



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



**INVESTIGACIÓN DEL PROCEDIMIENTO
DE DOS ALGORITMOS DE
MUESTREO-RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS
GAUSSIANOS NO-DIFERENCIABLES**

TESIS:

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES.**

PRESENTA:

ING. PEDRO PANCÓATL BORTOLOTTI

DIRECTOR DE TESIS:

DR. VLADIMIR KAZAKOV



SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 19:00 horas del día 10 del mes de NOVIEMBRE del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de ESIME-ZACATENCO para examinar la tesis titulada:

“INVESTIGACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE DOS ALGORITMOS DE MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN PARA PROCESOS GAUSSIANOS NO DIFERENCIABLES”

Presentada por el alumno:

PANCOATL

Apellido paterno

BORTOLOTTI

Apellido materno

PEDRO

Nombre(s)

Con registro:

B	0	9	1	8	2	3
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA DEFENSA DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

DR. VLADIMIR KAZAKOV

PRESIDENTE

DR. LUIS MANUEL RORÍQUEZ MENDEZ

SEGUNDO. VOCAL

DR. ALEXANDER MICHTCHENKO

TERCER VOCAL

DRA. MARTHA CECILIA GALAZ LARIOS

SECRETARIO

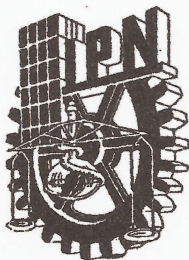
**M. EN C. MIGUEL SÁNCHEZ
MERAZ**

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

DR. JAIME ROBLES GARCÍA



CPZ



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de __México__ el día __18__ del mes __Noviembre__ del año __2011__, el que suscribe __Pedro Pancóatl Bortolotti__ alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones __con número de registro __B091823__, adscrito a __ESIME Zacatenco__, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de __Dr. Vladimir Kazakov__ y cede los derechos del trabajo intitulado __"Procedimiento de Dos algoritmos de Muestreo- Reconstrucción de procesos Gaussianos No diferenciables "__ al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección __pedro.pancoatl@hotmail.com__. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Nombre y firma

RESUMEN

Uno de los principales problemas en el estudio de la teoría de las comunicaciones, es la reconstrucción de las realizaciones de los procesos aleatorios desde la multitud de sus muestras utilizando modelos de procesos diferenciables. Sin embargo, no hay suficiente investigación acerca de reconstrucción de procesos aleatorios a partir de modelos de procesos no-diferenciables. En el presente trabajo, la investigación de los procesos Gaussianos No-Diferenciables Estacionarios será llevada a cabo, así como caracterizando y comparando con los modelos de procesos diferenciables comunes. También la investigación acerca de Procedimiento de Muestreo y Reconstrucción de los Procesos Aleatorios Gaussianos Estacionarios será realizada utilizando la Regla de La esperanza Matemática Condicional considerando diferentes funciones de covarianza, para reconstruir este tipo de procesos a partir de un número limitado de muestras, evaluando su función de reconstrucción, función de error de reconstrucción y error promedio dentro de la región de interpolación.

Además la investigación de la metodología del procedimiento de muestreo y reconstrucción basado en la regla de la esperanza matemática condicional, no está aplicada para la reconstrucción y evaluación de las realizaciones en la multitud de las muestras con valor cero en amplitud, es decir, los cruces por cero de las realizaciones. Actualmente existen investigaciones relacionadas con algunas estrategias de muestreo y reconstrucción considerando los cruces por cero de las realizaciones, sin embargo los investigadores en este tema no consideran características estadísticas para su análisis. Una de las técnicas utilizadas para la estimación de cruces por cero, es mediante el uso un convertidor no lineal (saturador), mismo que contiene la información de los cruces por cero en sus flancos. Por otro lado el algoritmo no óptimo intenta reconstruir la realización del proceso a la salida de este convertidor no lineal.

La metodología para la obtención de los resultados basado en la implementación de dos algoritmos de reconstrucción (Óptimo y No Óptimo), donde cada algoritmo obtiene una única realización del proceso y además intenta obtener los cruces por cero de la realización, para aplicar el procedimiento de muestreo y reconstrucción será propuesta.

Finalmente, las funciones de reconstrucciones y funciones de error de reconstrucción con los diversos modelos serán evaluadas y comparadas entre los diversos modelos de procesos.

Algunos de los modelos de procesos Gaussianos No-diferenciables usados en este trabajo son: Filtro RC de Una Etapa, Filtro Acoplado, Filtro para Modelo de Voz, Filtro RLC Resonante.

ABSTRACT

One of the main problems in the study of the communications theory is the reconstruction of the achievements of the random processes from many samples using Models of Differential Processes. However, there is not enough investigation about reconstruction of random processes since the models of Non-Differential Processes. In the present work, the investigation of the Stationary Non-Differential Gaussian Processes is carried out as well as characterizing and comparing with the common Differential Processes. Also, the investigation about Sampling-Reconstruction Procedure of the Stationary Gaussian Random Processes will be realized using the Conditional Mean Rule considering different covariance functions, to reconstruct this kind of processes from a limited number of samples, evaluating its reconstruction function, error function and average error inside the interpolation zone.

Moreover, the researching of the methodology of sampling-reconstruction procedure based on conditional mean rule is not applied to reconstruct and assess the realizations between samples with zero amplitude, that is, the realization zero crossing. Recently there is research related with some strategies of sampling-reconstruction procedure taking into account the realizations zero crossing; however researchers on this topic do not consider statistics features in order to be analyzed. For this reason the elicitation results for the methodology based on the two reconstruction algorithms implementation (optimal and no optimal), where each algorithm obtain only one realization of the process and so attempts to obtain the realization zero crossing to applied the sampling-reconstruction procedure will be proposed. One of the techniques used to estimating of zero crossing is using a non-lineal converter (clipper), the same that contains the information about of zero crossing on its edges. On the other hand, no optimal algorithm attempts to reconstruct the realization of the process to the no lineal converter output.

The methodology to the obtaining of the results is based into the implementation of two reconstruction algorithms (Optimal and No-Optimal), where each algorithm obtains single realization of the process, and attempts to get the zero crossing of the realization to finally implementing the procedure of sampling-reconstruction.

Finally, the reconstruction function and reconstruction error function will be evaluated and compared among the different model processes.

Some of the models of Non-Differentials Gaussian Processes used in this work are: RC-Stage Filter, Coupled Filter, Filter for Voice Model and Resonant RLC Filter.

CONTENIDO

LISTA DE SÍMBOLOS	iv
ÍNDICE DE TABLAS	v
ÍNDICES DE FIGURAS	vi
OBJETIVOS	xiii
JUSTIFICACIÓN	xiv
ESTADO DEL ARTE	xv
1 MODELOS DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS	1
1.1 TEOREMA DE BALAKRISHAN.....	1
1.1.1 OBSERVACIONES SOBRE EL TEOREMA BALAKRISHAN.....	2
1.2 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS ALEATORIOS.....	3
1.2.1 LA FUNCIÓN DE COVARIANZA.....	4
1.2.2 DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA.....	5
1.3 MODELOS DE LOS PROCESOS ALEATORIOS GAUSSIANOS.....	5
1.3.1 PROCESOS MARKOVIANOS CONTINUOS.....	5
1.3.2 PROCESOS DIFERENCIABLES Y NO DIFERENCIABLES.....	8
1.3.3 MODELOS DE PROCESOS GAUSSIANOS NO DIFERENCIABLES.....	11
1.4 PROGRAMA DE SIMULACIÓN DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS.....	24
1.5 FDP DE LOS INTERVALOS EVALUADOS EN EL CRUCE POR CERO.....	24
1.5.1 EVALUACIÓN DE LOS CRUCES POR CERO (CC).....	24
1.6 MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE ERROR.....	30
1.6.1 COEFICIENTE DE CORRELACIÓN.....	30
1.6.2 ERROR CUADRÁTICO MEDIO.....	31
1.6.3 VARIANZA CONDICIONAL.....	31
1.7 COMENTARIOS.....	32

2	MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS GAUSSIANOS DIFERENCIABLES Y NO-DIFERENCIABLES UTILIZANDO LA REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL.	33
2.1	PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE FILTRO RC DE UNA ETAPA.....	35
2.2	PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE FILTRO RC DE DOS ETAPAS.....	38
2.3	PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE FILTRO RC DE TRES ETAPAS.....	41
2.4	PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE FILTRO DE TELEMETRÍA.....	44
2.5	PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE FILTRO PARA PROCESO DE VOZ.....	46
2.6	PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE FILTRO ACOPLADO.....	52
2.7	COMENTARIOS.....	55
3	DESARROLLO DE ALGORITMOS ÓPTIMO Y NO-ÓPTIMO PARA MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS GAUSSIANOS	56
3.1	PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A PARTIR DE UNA MUESTRA EN LA MITAD ENTRE CRUCE POR CERO.....	58
3.2	PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A PARTIR DE UNA MUESTRA EN EL MÁXIMO ENTRE CRUCE POR CERO.....	61
3.3	PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A PARTIR DE UNA MUESTRA EN LA MITAD ENTRE DOS CRUCE POR CERO, CON AMPLITUD EN FUNCIÓN DEL INTERVALO ENTRE CRUCE POR CERO.....	65
3.5	PROCEDIMIENTO DE RECONSTRUCCIÓN DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE CONVERTIDOR NO-LINEAL: LIMITADOR IDEAL O CLIPPER.....	71
3.6	RESULTADOS.....	75
3.7	COMENTARIOS.....	77
4	APLICACIÓN DE ALGORITMO ÓPTIMO PARA MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS GAUSSIANOS NO-DIFERENCIABLES	80
4.1	PMR DE LAS REALIZACIONES DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS NO-DIFERENCIABLES CON UNA MUESTRA EN LA MITAD ENTRE DOS CRUCES POR CERO.....	84
4.2	PMR DE LAS REALIZACIONES DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS NO-DIFERENCIABLES CON UNA MUESTRA EN EL MÁXIMO ENTRE DOS CRUCES POR CERO.....	82
4.3	RESULTADOS.....	89
4.4	COMENTARIOS.....	90

5	DESARROLLO DE ALGORITMO NO-ÓPTIMO PARA MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS GAUSSIANOS NO-DIFERENCIABLES	91
5.1	PMR DE REALIZACIÓN DEL PROCESO GAUSSIANO NO DIFERENCIABLE CON UNA MUESTRA EN LA MITAD ENTRE DOS CRUCES POR CERO.....	91
5.2	RECONSTRUCCIÓN DE REALIZACIÓN A LA SALIDA DE LIMITADOR IDEAL O CLIPPER UTILIZANDO MODELOS DE PROCESOS NO DIFERENCIABLES.....	99
5.2.1	RECONSTRUCCIÓN DE REALIZACIÓN A LA SALIDA DE LIMITADOR IDEAL UTILIZANDO FILTRO RC DE UNA ETAPA.....	99
5.2.2	RECONSTRUCCIÓN DE REALIZACIÓN A LA SALIDA DE LIMITADOR IDEAL UTILIZANDO FILTRO PARA PROCESOS DE VOZ.....	103
6	RESULTADOS	105
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	107
	ANEXOS	109
	REFERENCIAS	

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ancho de Banda de banda del filtro, donde $\alpha = 1 / RC$;
a_{ij}	elementos de la matriz de covarianza inversa;
Δt	intervalo de muestreo ;
ΔZ_n	incrementos entre cruce por cero de un proceso aleatorio;
i, j, k, m, n	variables enteras o naturales;
j	variable compleja $\sqrt{-1}$;
$K_x(\tau)$	función de covarianza;
K_x	matriz de covarianza;
L, M	números enteros;
$m(t)$	función de esperanza matemática;
$\tilde{m}(t)$	función de esperanza matemática condicional;
N	entero para número de muestras;
$N(t)$	ruido blanco gaussiano;
$P(x)$	probabilidad de la variable aleatoria x ;
$R_x(\tau)$	función de covarianza normalizada;
$\sigma^2(t)$	función de varianza;
$\tilde{\sigma}^2(t)$	función de varianza condicional;
$S_x(\omega)$	densidad espectral de potencia;
τ	variable independiente de la función de covarianza, $\tau = t_2 - t_1$;
τ_c	tiempo de covarianza;
t	variable independiente para tiempo;
T_i	instante de muestreo de la i -enésima muestra;
$u(t)$	proceso aleatorio de entrada;
ω	frecuencia angular en radianes;
x	variable aleatoria;
$x(t)$	proceso aleatorio;
$\tilde{x}(t)$	proceso aleatorio condicional;
$x(T_i)$	valor de la muestra en el instante de tiempo T_i ;
Z_i	instante de tiempo de i -enésimo cruce por cero de una realización;

ÍNDICE DE TABLAS

2.1	Ejemplo con cuatro Valores de Muestras separadas $\Delta T = 0.5$	35
2.2	Ejemplo con 16 Valores de Muestras separadas $\Delta T = 0.1$	36
3.1	Cálculo del coeficiente de correlación y ECM del caso 1 de algoritmo No óptimo para comparación con función de error $\tilde{\sigma}^2(t)$, utilizando modelos de procesos diferenciables.....	79
3.2	Cálculo de Coeficiente de correlación y ECM del caso 2 de algoritmo No óptimo utilizando modelos de procesos diferenciables.....	79
3.3	Cálculo de Función de Error $\tilde{\sigma}^2(t)$ de reconstrucción para el caso 1 y 2 de algoritmo óptimo, utilizando modelos de procesos diferenciables.....	80
4.1	Función de error de reconstrucción y error promedio de reconstrucción de las realizaciones de los procesos No Diferenciables.....	90
5.1	Cálculo de Coeficiente de correlación para comparación con función de error $\tilde{\sigma}^2(t)$ Para modelos de procesos no diferenciables.....	100
5.2	Cálculo de Coeficiente de correlación para caso 2 de algoritmo No-Óptimo. Para modelos de procesos no diferenciables.....	106
6.1	Comparativo entre Error de reconstrucción de las realizaciones de los procesos diferenciables y no diferenciables para diversos valores de α . (caso 1 algoritmo No-óptimo).....	107
6.2	Comparativo entre Error de Reconstrucción de las Realizaciones de los Procesos Diferenciables y No Diferenciables a la salida de convertidor no lineal, para diversos valores de α . (caso 2 algoritmo No-óptimo).....	108
6.3	Comparativo entre Error de Reconstrucción de las Realizaciones de los Procesos Diferenciables y No Diferenciables para diversos valores de α . (Algoritmo óptimo).....	109

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

1.1	Proceso Markoviano y dependencia entre FDP debido a valores pasados y presentes.....	6
1.2	Sistema inercial y no lineal alimentado con ruido blanco.....	7
1.3	Modelo de Proceso Markoviano Gaussiano al aplicarle Ruido blanco Gaussiano...	7
1.4	Función de covarianza del proceso a la salida de Filtro RC de Dos Etapas.....	10
1.5	Graficas de Primera y Segunda Derivada de la función de covarianza del proceso a la salida de Filtro RC de Dos Etapas.....	10
1.6	Graficas de Primera y Segunda Derivada de la función de covarianza del proceso a la salida de Filtro RC de una Etapa.....	11
1.7	Descripción de un proceso de Wiener	12
1.8	Función de Error de Interpolación $\tilde{\sigma}(t)^2$ de un Proceso de Wiener para algunos valores diferentes de Intervalo de Muestreo ΔT	13
1.9	Función de Covarianza del proceso a la salida de filtro RC de Una Etapa y su Espectro de Potencia para $\alpha = 0.5$	14
1.10	Función de Covarianza del proceso a la salida de filtro RC de Una Etapa y su Espectro de potencia para $\alpha = 1$	14
1.11	Función de Covarianza del proceso a la salida de filtro RC de Una Etapa y su Espectro de Potencia para $\alpha = 0.2$	15
1.12	Función de covarianza Triangular del proceso a la salida de filtro acoplado.....	16
1.13	Graficas de Primera y Segunda derivada de la función de covarianza del proceso a la salida de filtro acoplado.....	16
1.14	Diagrama de Filtro RLC Resonante.....	17
1.15	Función de Covarianza del proceso a la salida de Filtro RLC Resonante.....	17
1.16	Graficas de Primera y segunda derivada de la función de covarianza del proceso a la salida de Filtro RLC Resonante.....	18
1.17	Diagrama de Filtro para Modelo de Voz.....	18
1.18	Función de covarianza del proceso a la salida de filtro para proceso de voz.....	19
1.19	Espectro de Potencia del proceso a la salida de Modelo de Voz.....	20
1.20	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida del Modelo de Voz con $\alpha_1 = 0.1, \alpha = 0.4$	20
1.21	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida del Modelo de Voz con $\alpha_1 = 1, \alpha = 0.4$	21
1.22	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida del Modelo De Voz con $\alpha_1 = 0.5, \alpha = 2$	21
1.23	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida del Modelo De Voz con $\alpha_1 = 0.5, \alpha = 1$	22
1.24	Graficas de Primera y segunda derivada de la función de covarianza del proceso a la salida de Modelo para Proceso de Voz.....	22
1.25	Diagrama de Procesamiento de Cruce por cero.....	24
1.26	Detección de Cruce por cero de un Proceso dentro de intervalo de tiempo Δt	25
1.27	Ruido Blanco Gaussiano.....	26
1.28	Representación de Histograma de los intervalos de cruce por cero de realización....	26

1.29	gg Graficas de: (a) Histograma de Intervalos de cruce por cero, con número pequeño de cruces por cero (b) Histograma como una función continua o FDP debido a una gran cantidad de cruces por cero de la realización.....	27
1.30	FDP de los intervalos entre cruces por cero de una realización a la salida de Filtro RC de Una etapa para $\alpha=1$	28
1.31	FDP de los intervalos entre cruces por cero de una realización a la salida de Filtro RC de Dos etapas, para $\alpha=2$	28
1.32	FDP de los intervalos entre cruces por cero de una realización a la salida de Modelo de Voz para $\alpha=0.1$ y $\alpha_1=10$	29
1.33	FDP de los intervalos entre cruces por cero de una realización a la salida de Filtro Acoplado con Señal de salida Triangular con $T_0=1$	29

CAPÍTULO 2

2.1	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de realización con cuatro muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de Una Etapa, $\alpha = 1$	35
2.2	Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con cuatro muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de Una Etapa, $\alpha = 1$	36
2.3	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Una Etapa, $\alpha = 1$	37
2.4	Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con cuatro muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Una Etapa, $\alpha = 1$	37
2.5	Diagrama de Filtro RC pasa-bajas de Dos etapas.....	38
2.6	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro RC de Dos para $\alpha = 2$	38
2.7	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro RC de dos etapas para $\alpha = 1$	39
2.8	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro RC de dos etapas para $\alpha = 0.5$	39
2.9	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de dos Etapas y $\alpha = 2$	40
2.10	Función de Error de reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ del proceso con cuatro muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de dos Etapas y $\alpha = 2$	40
2.11	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Dos Etapas y $\alpha = 2$	41
2.12	Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ para Filtro RC de Dos Etapas y $\alpha = 2$	41
2.13	Diagrama de Filtro RC pasa-bajas de Tres Etapas.....	42
2.14	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro RC de Tres Etapas para $\alpha = 8/3$	42
2.15	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro RC de Tres Etapas para $\alpha = 1/6$	43
2.16	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de Tres Etapas $\alpha = 8/3$	43
2.17	Función de error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de Tres Etapas $\alpha = 8/3$	43
2.18	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Tres Etapas y $\alpha = 8/3$	44

2.19	Función de error de reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Tres Etapas y $\alpha = 8/3$	44
2.20	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro para procesos de Telemetría $\alpha = 0.8$ y $\alpha_1 = 0.75$	45
2.21	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro de Telemetría con $\alpha = 0.8$ y $\alpha_1 = 0.75$	46
2.22	Función de covarianza y espectro de potencia del proceso a la salida de filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 0.8, \alpha = 0.75$	47
2.23	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro para procesos de Voz con $\alpha = 0.8$ y $\alpha_1 = 0.75$	47
2.24	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 0.1, \alpha = 10$	48
2.25	Función de covarianza y espectro de potencia del proceso a la salida de filtro para procesos de voz con $\alpha_1 = 0.49, \alpha = 0.5$	48
2.26	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 0.49, \alpha = 0.5$	49
2.27	Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro para procesos de Voz $\alpha_1 = 0, \alpha = 10$	49
2.28	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 0, \alpha = 10$	50
2.29	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 0.8, \alpha = 0.75$	50
2.30	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro para procesos de Voz y $\alpha_1 = 0.1, \alpha = 10$	51
2.31	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 0.49, \alpha = 0.5$	51
2.32	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 2, \alpha = 8$	52
2.33	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 10, \alpha = 0$	52
2.34	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro Acoplado con $T_0 = 1$	53

2.35	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro Acoplado con $T_0 = 10$	54
2.36	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro Acoplado con $T_0 = 1$	54
2.37	Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro Acoplado $T_0 = 10$	55

CAPÍTULO 3

3.1	Diagrama para desarrollo de algoritmo óptimo para PMR (caso 1 y 2).....	58
3.2	Diagrama para desarrollo de algoritmo no-óptimo para PMR (caso 1).....	59
3.3	Diagrama de estimación de error cuadrático medio.....	59
3.4	Diagrama para desarrollo de algoritmo no óptimo para PMR (caso 2).....	60
3.5	Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro RC de Dos Etapas con muestras en la mitad entre sus cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con filtro RC de Dos Etapas y $\alpha = 20$	62
3.6	Realización a la salida de Filtro RC de Tres Etapas con muestras en la mitad entre cruces por cero y con magnitud en función de la amplitud de la realización.....	62
3.7	Reconstrucción y error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero a la salida de filtro RC de Tres Etapas con $\alpha = 50$	63
3.8	Realización a la salida de filtro de Telemetría con muestras en la mitad entre cruce por cero y con magnitud en función de la amplitud de la realización.....	63
3.9	Graficas de: a) Realización a la salida de Modelo de Telemetría con muestras en la mitad entre cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero a la salida de Modelo de Telemetría con $\alpha_1 = 10, \alpha = 15$	64
3.10	Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro RC de Dos Etapas con muestras en el máximo entre sus cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero a la salida de Filtro RC de Dos Etapas con $\alpha = 20$	65
3.11	Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro RC de Tres Etapas con muestras en el máximo entre sus cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con Filtro RC de Tres Etapas.....	66
3.12	Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro de Telemetría con muestras en el máximo entre sus cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con Filtro de Telemetría.....	67
3.13	Grafica de Realización a la salida de Filtro RC de Dos Etapas con muestras en la mitad entre sus cruces por cero.....	69
3.14	Graficas de Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con filtro RC de Dos Etapas con $\alpha = 20$	70
3.15	Error cuadrático medio de realización reconstruida a la salida de filtro RC de dos Etapas.....	70

3.16	Graficas de: (a) realización a la salida de filtro RC de Tres Etapas con muestras en la mitad entre sus cruces por cero (b) Reconstrucción y error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero a la salida de filtro RC de tres Etapas.....	71
3.17	Error cuadrático medio de realización reconstruida a la salida de filtro RC de Tres Etapas.....	72
3.18	Graficas de: (a) Realización a la salida de filtro de Telemetría con muestra en la mitad entre cruces por cero (b) Reconstrucción y error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero.....	73
3.19	Error cuadrático medio de realización a la salida de de modelo de Telemetría.....	73
3.20	Aplicación de convertidor no lineal (limitador ideal) sobre la realización.....	74
3.21	Graficas de a) Realización a la salida de convertidor No-lineal: saturador o clipper (b) Reconstrucción de realización saturada con Filtro RC de Dos Etapas.....	75
3.22	Error cuadrático medio de realización a la salida de convertidor No-lineal, con Función de covarianza : Filtro RC de Dos Etapas.....	76
3.23	Graficas de reconstrucción de realización saturada con filtro RC de Tres Etapas con $\alpha = 100$	76
3.24	Error cuadrático medio de realización a la salida de convertidor No-lineal , con función de covarianza: filtro RC de Tres Etapas.....	77
3.25	Grafica de Reconstrucción de realización con filtro RC de telemetría con $\alpha_1 = 50, \alpha = 80$	77
3.26	Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Convertidor No lineal, con función de covarianza: Modelo de Telemetría.....	78

CAPÍTULO 4

4.1	Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa con muestra en la mitad entre cruces por cero (b) Función de reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero a la salida de Filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 20$, y con (c) $\alpha = 1$	82
4.2	Graficas de: (a) Realización a la salida de Filtro Acoplado y muestras agregadas en el máximo entre sus cruces por cero (b) Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción de Realización a la salida de Filtro Acoplado a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con $T_0 = 1$ y $A=1$	83
4.3	Graficas de: (a) Realización a la salida de Modelo para procesos de la Voz y muestras agregadas en el máximo entre sus cruces por cero (b) Función de Reconstrucción y Error de reconstrucción de Realización a la salida de Modelo para procesos de la Voz a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con $\alpha = 0.1; \alpha_1 = 10$; c) $\alpha_1 = 1, \alpha = 0.001$	85
4.4	Graficas de: (a) Realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 1$ y muestra agregada en el máximo entre cruces por cero (b) Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción y Error medio de realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con $\alpha = 20$; (c) $\alpha = 1$	86

4.5	Graficas de: (a) Realización a la salida de Filtro Acoplado y muestras agregadas en el máximo entre sus cruces por cero (b) Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción de Realización a la salida de Filtro Acoplado a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con $T_0 = 1$ y $A=1$	87
4.6	Graficas de: (a) Realización a la salida de Filtro para procesos de Voz y muestras agregadas en el máximo entre sus cruces por cero (b) Función de Reconstrucción y función de error de reconstrucción de realización a la salida de Filtro para Modelo de Voz partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con $\alpha_1 = 10, \alpha = 0.1$	88
4.7	Función de Reconstrucción y error de reconstrucción de realización a la salida de Filtro para Modelo de Voz partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con $\alpha_1 = 1, \alpha = 0.001$	89

CAPÍTULO 5

5.1	Graficas de Realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 1$ y muestras agregadas a la mitad entre cruces por cero.....	93
5.2	Grafica de Función de Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 20$	94
5.3	Grafica de Función de Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con filtro RC de una etapa con $\alpha = 1$	94
5.4	Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa Con $\alpha = 20$	93
5.5	Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa Con $\alpha = 1$	95
5.6	Grafica de Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con señal triángula a la salida de Filtro Acoplado $T_0 = 1$ y $A=1$	95
5.7	Grafica de Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero utilizando señal triángula a la salida de Filtro Acoplado $T_0 = 1$ y $A=1$	96
5.8	Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Filtro Acoplado con $T_0 = 1$..	96
5.9	Grafica de Realización a la salida de Filtro para Modelo de Voz y muestras agregadas a la mitad entre sus cruces por cero.....	97
5.10	Grafica de Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción y Error medio de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre cada cruce por cero con Filtro para Modelo de Voz y $\alpha_1 = 10, \alpha = 0.1$	97
5.11	Grafica de Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción y Error medio de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con Filtro para Modelo de Voz $\alpha_1 = 1, \alpha = 0.001$	98
5.12	Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Modelo de Voz con $\alpha_1 = 10, \alpha = 0.1$	98

5.13	Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Modelo de Voz con $\alpha_1 = 1, \alpha = 0.001$	99
5.14	Graficas de: (a) Realización a la salida de convertidor no lineal, (b) Reconstrucción de Realización con Filtro RC de Una Etapa y 0.1	101
5.15	Graficas: (a) de Reconstrucción de Realización con Filtro RC de Una Etapa y $\alpha = 100$; (b) $\alpha = 500$; (c) $\alpha = 1$	102
5.16	Error Cuadrático Medio de reconstrucción realización a la salida de Convertidor No lineal, con función de covarianza: Filtro RC de Una Etapa, para (a) $\alpha = 0.1$;(b) $\alpha = 100$;(c) $\alpha = 500$; (d) $\alpha = 1$	104
5.17	Graficas de Realización después del Proceso de Saturación; Reconstrucción de realización con Filtro para Modelo de Voz con $\alpha = 80, \alpha_1 = 150$	105
5.18	Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Convertidor No lineal, con función de covarianza: Modelo de Voz para $\alpha = 80, \alpha_1 = 150$	106

OBJETIVOS

Investigación de la teoría estadística de comunicaciones para describir el Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de los Procesos Estocásticos Gaussianos No-Diferenciables, utilizando como herramienta básica la Regla de la Esperanza Matemática Condicional.

Los objetivos particulares para análisis considerando funciones de covarianza de modelos de procesos no diferenciables son:

- Estudio de los Modelos de Procesos Gaussianos No-Diferenciales (características) comparación con modelos de Procesos Diferenciables.
- Calcular las funciones de reconstrucción, error de reconstrucción y error promedio de reconstrucción de procesos Gaussianos No-Diferenciables utilizando el algoritmo de la Regla de la Esperanza Matemática condicional, y realizando comparación con Modelos de Procesos Diferenciables.
- Desarrollo de algoritmo computacional para la detección de cruces por cero de una realización.
- Desarrollo computacional de algoritmo para obtención de Histogramas de cruce por cero de realización a la salida de diversos modelos de Procesos Gaussianos.
- Desarrollo de algoritmo Óptimo para Muestreo y Reconstrucción de una realización, a partir de muestras agregadas entre dos cruces por cero.

Caso 1: Funciones de reconstrucción y error de reconstrucción de las realizaciones de los procesos con una muestra agregada en la mitad entre cruce por cero de la realización, utilizando funciones de covarianza de procesos Gaussianos no diferenciables.

Caso 2: Funciones de reconstrucción y error de reconstrucción de las realizaciones de los procesos con una muestra en el máximo entre dos cruces por cero, utilizando funciones de covarianza de procesos Gaussianos no diferenciables.

- Desarrollo computacional de algoritmo No-Óptimo para Muestreo y Reconstrucción de una realización bajo dos condiciones:

Caso 1: Reconstrucción de realización con una muestra en la mitad del intervalo entre dos cruces por cero y amplitud en función del intervalo entre cruce por cero, basado en funciones de covarianza de procesos Gaussianos no diferenciables.

Caso 2: Reconstrucción de realización a la salida de convertidor lineal tipo saturador ideal o clipper.

JUSTIFICACIÓN

La teoría del procedimiento de muestreo y reconstrucción (PMR) óptimo de los procesos aleatorios esta realizada para varios tipos de modelos matemáticos del tipo diferencial. Sin embargo esta teoría no ha sido aplicada para los modelos de procesos no diferenciables y aunque estos modelos de procesos existen, no hay investigación profundizada acerca su comportamiento.

Durante la investigación serán analizados modelos de procesos no diferenciales existentes, entre los más comunes serán utilizados principalmente el modelo para procesos de voz, filtro RC de una etapa y filtro acoplado; comparando principales características con modelos de procesos diferenciables más ampliamente utilizados en el área de análisis de señales y sistemas así como en el estudio de telecomunicaciones, entre los más usado son encontrados: filtros RC de Dos y Tres Etapas, modelos para procesos de Telemetría, mismos que son modelos de procesos más suaves.

Otra manera central para la evaluación de los modelos de procesos no diferenciables, es aplicando la metodología de procedimiento de muestreo y reconstrucción (PMR) basado en la regla de la esperanza matemática condicional, puesto que esta metodología no está aplicada en la reconstrucción de las realizaciones con funciones de covarianza de los procesos no diferenciables.

Por otro lado, en la investigación de PMR basado en la regla de la esperanza matemática condicional (REMC) no está realizada para la reconstrucción de las realizaciones en la multitud de sus muestras con valor cero en amplitud, es decir los cruces por cero de las realizaciones; de tal forma de poder evaluar estrategias que permitan la reconstrucción considerando el valor de las muestras cero en amplitud.

Por tal motivo es requerida una metodología que permita realizar el procedimiento de muestreo y reconstrucción pudiendo evaluar el desempeño de la aplicación de los modelos de procesos no diferenciables, de tal forma de que los resultados puedan ser comparados con modelos de procesos diferenciables más comunes.

Este estudio es posible realizarlo para el caso más simple de procesos aleatorios, como el caso de procesos Gaussianos como sería el caso de los procesos de ruido blanco gaussiano, la ventaja de hacer uso de este tipo de procesos se debe a sus características, esencialmente su amplio ancho de banda y su función de distribución de tipo normal. Será analizado el comportamiento de los modelos anteriormente mencionados una vez que los alimentamos con ruido blanco gaussiano (WGN), y las realizaciones a la salida de cada uno de los diversos filtros serán reconstruidas utilizando una herramienta primordial, que en nuestro caso será La Regla de la Media Condicional, mencionando previamente sus características, ventajas y desventajas, así también comparando frente a otros métodos de muestreo y reconstrucción tradicionales como es el caso del Teorema de Balakrishnan o el teorema clásico WKS.

ESTADO DEL ARTE

En el estudio del análisis de señales y sistemas han sido realizadas metodologías para el procedimiento de muestreo y reconstrucción de los procesos estocásticos, sin embargo, esta técnica resulta complicada y poco óptima para la reconstrucción de las realizaciones de los procesos que han sufrido transformaciones no lineales, tal es el caso de convertidores tipo limitador ideal o clipper puesto que reconstruir realizaciones con características de saturación ideal y estimar errores de reconstrucción resulta muy complicado. Sin embargo existen estrategias que permiten una alternativa para modelar y aproximar estas realizaciones a las originales utilizando como única información los cruces por cero de las realizaciones binarias (clipped). Una de las estrategias usadas para determinar la información de cruces por cero de las realizaciones consiste en el uso de funciones $\text{sgn}\{h(t)\}$, donde $h(t)$ corresponde una realización sin alterar, esto es, hay innumerables maneras de elegir un conjunto de señales pasa banda Z tal y como se muestra en [20]. En donde una vez localizados los cruces por cero mediante esta estrategia, es asumido que la función $\text{sgn}\{h(t)\}$ no tiene discontinuidades removibles, además es considerado que las dos funciones son distintas, esto es, una función no es una constante multiplicativa de la otra y por tanto no tienen dependencia lineal. En el estudio de la reconstrucción de realizaciones, han sido estudiadas estrategias que permiten la reconstrucción de señales limitadas en banda, mismas que han sufrido transformaciones no lineales, una de estas estrategias aplicada a señales determinísticas se basa en el principio de contracción de mapeo y que parece trabajar experimentalmente, sin embargo estos trabajos solo consideran resultados analíticos, esto es posible de analizar en [18]. Considerando $B\psi s = s_0$ la ecuación donde $s=s(t)$ es una señal pasa bajas, ψ es una transformación de memoria cero, y B es la operación de re-banda de limitación de la ψs a la región espectral de s . ¿Puede s ser recuperada desde s_0 , dado el conocimiento de ψ ? La respuesta es: obvio cuando ψ es lineal, pero es más complicado cuando ψ es no lineal. Para este caso dos tipos de limitadores son propuestos: SSB clipping y clipping con cero real. Asumiendo que toda la señal es periódica normalizada en $T=1$, lo cual implica que la frecuencia en Hz de la n -ésima armónica coincide con su armónica número n , el algoritmo de recuperación iterativo SSB-clipping es de la forma $s_{n+1} = A s_n$, donde el mapeo de A es definido por $A s_n = s_n - c[B\psi s_n - s_0]$. Por otro lado es posible reconstruir una realización de proceso como el caso del saturador (clipper), considerando muestras perdidas de la señal como lo es mencionado en [29, 30, 31, 33], donde son propuestos métodos y análisis de reconstrucción.

Uno de estos teoremas implica que si la velocidad de muestreo es $a\%$ más grande que la tasa de Nyquist, es posible tener una pérdida aproximada de $(a/100)/(1+a/100)$ de muestras y satisface el teorema de unicidad. Para una exacta recuperación puede ser usado el método iterativo similar al caso de un muestreo no uniforme [26]. Por otro lado existe investigación en donde son incluidas características estadísticas (de como lo es el caso de [32]), en donde es realizada la corrección de una realización con un bit de cuantización, es decir una realización saturada (clipping). Considerado un proceso aleatorio estacionario $x(t)$, este proceso tiene asociada una función de auto correlación normalizada (covarianza) $R_x(\tau)$. En donde si a dicho proceso le es aplicado una cuantización de 1 bit, será obtenida una versión no lineal del proceso $x(t)$. El resultado de esta conversión no lineal será un proceso binario o procesos clipper denotado por $y(t)$, y que además tiene asociada una función de auto correlación $R_y(\tau)$, esto es claro observando la figura b, en donde $R_x(0)$ es la correlación no retardada, es decir, el valor máximo de la señal auto correlacionada. La ecuación $R_y(\tau)$ es conocida como la ley *arco sin*, la relación inversa de la ecuación $R_x(\tau)$ es conocida como la *corrección de saturación van Vleck*. Pues si $R_y(\tau)$ puede ser medida, $R_x(\tau)$ puede ser fácilmente calculada.

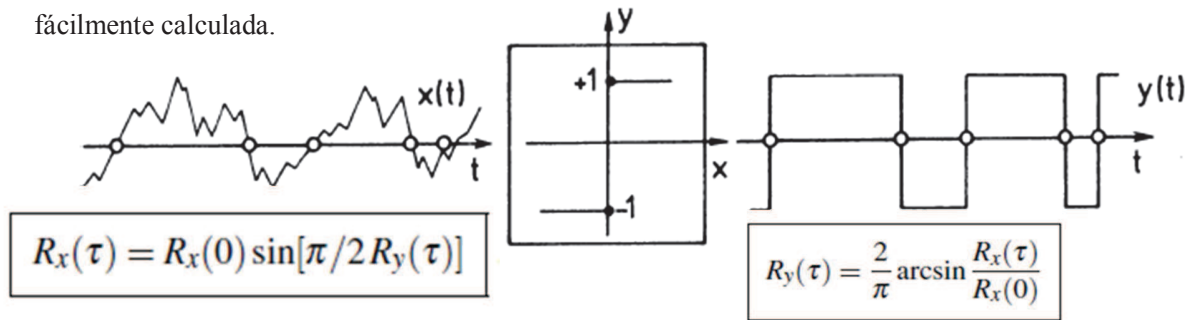


Figura b. Ilustración de una señal $x(t)$ saturada con un bit para producir una señal clipping $y(t)$. La función de auto correlación de la señal de entrada es recuperada desde $y(t)$, usando la ley *arc sin*.

En la figura b. también es posible observar que la única información de la realización está contenida en los cruces por nivel cero, puesto que la saturación fomenta a la pérdida de información. Por tal motivo una estrategia encontrada en [34], consiste en encontrar y mantener solo aquellas muestras de cruce de nivel las cuales están más cerca de los picos de la señal, mientras que todas las demás muestras son descartadas; de esta manera es obtenido un muestreo no uniforme con los picos de la señal. La recuperación de la señal continua puede estar basada en una interpolación lineal misma que provee buenos resultados para la señal de voz.



CAPÍTULO 1

MODELOS DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS

Un proceso Gaussiano está definido como la distribución de probabilidad, de modo que el conjunto de valores evaluados en un conjunto arbitrario de puntos resulta tener una distribución conjunta también gaussiana. Una característica importante de los procesos aleatorios Gaussianos es cuando se hacen pasar a través de un sistema lineal, bajo estas condiciones a la salida obtenemos una realización de naturaleza Gaussiana también. [1]

Un proceso Gaussiano tiene características importantes, desde el punto de vista matemático es un modelo manejable, además de que solo dos funciones son necesarios para describir dicho proceso: la esperanza matemática y la función de covarianza.

En este primer capítulo serán realizados la investigación y el análisis de modelos de procesos Gaussianos diferenciables que son los comúnmente usados en el procedimiento de muestreo y reconstrucción así como los no diferenciables.

Durante la introducción de los modelos de procesos no-diferenciables, serán planteados las definiciones de diferenciación de procesos aleatorios, demostrando cuando un proceso es no diferenciable y demostrando que dichos procesos se encuentran asociados con procesos caóticos, además abordaremos algunas de las herramientas necesarias en el desarrollo de esta investigación, como lo son el concepto saturación de realizaciones haciendo usos de métodos de limitador ideal o clipper, así como el desarrollo computacional de algoritmos de detección de cruces por cero.

Haremos mención sobre teorema de Balakrishnan, el cual generaliza su metodología de muestreo y reconstrucción estocástica, analizando sobre esta generalización.

1.1 TEOREMA DE BALAKRISHNAN.

El Teorema de Balakrishnan es una generalización al teorema de muestreo clásico, usualmente asociado a Whittaker-Kotel'nikov-Shannon (o teorema WKS). El teorema WKS el cual fue demostrado para funciones determinísticas de espectro limitado, afirma: [2,3,4,5]

Toda función de una señal determinística $s(t)$ que está limitada en banda dentro de un intervalo $[-\omega_c, \omega_c]$, (donde $\omega_c > 0$) puede ser completamente reconstruida con respecto a t , partiendo de sus valores muestreados $f(k\pi/\omega_c)$, que son formados en términos de:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{\text{sen}(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi} \quad (1-1)$$

Donde $s(t)$ solo es válido para funciones determinísticas de espectro limitado; además es sabido que si la función determinística es muestreada al menos al doble de su ancho de banda, es posible reconstruir dicha función con un error próximo a cero. Es importante mencionar que la ecuación (1-1) fue desarrollada a partir del espectro de la amplitud de la fase $G(j\omega)$.

El teorema de Balakrishnan fue generalizado para los procesos aleatorios estacionarios. En ocasiones, este teorema es llamado *teorema WKS para Procesos Estocásticos*.

La formulación del Teorema de Balakrishnan afirma: [6]

Sea $x(t)$ con $-\infty < t < \infty$, un proceso estocástico evaluado real o complejo, estacionario en el “sentido amplio” y que posee una densidad espectral, la cual desaparece fuera del intervalo de la frecuencia angular $[-\omega_c < \omega < \omega_c]$. Entonces $x(t)$ tiene la representación:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N x \left(\frac{N}{2\omega_c} \right) \frac{\sin \pi(2\omega_c t - N)}{\pi(2\omega_c t - N)} \quad (1-2)$$

La mención del Teorema de Balakrishnan, es para plantear un caso más general en la descripción estadística del Procedimiento de Muestreo y Reconstrucción de los Procesos Estocásticos, así como demostrar que la regla de la esperanza matemática condicional tiene algunas ventajas en la descripción estadística del Procedimiento de Muestreo y Reconstrucción (PMR) de los procesos estocásticos, y finalmente comparar con la descripción PMR del Teorema de Balakrishnan.

El teorema de Balakrishnan de la ecuación (1-2) asegura un error próximo a cero en la reconstrucción para cualquier realización del proceso.

1.1.1 OBSERVACIONES SOBRE EL TEOREMA DE BALAKRISHNAN

En esta parte, formulamos algunas cuestiones u observaciones sobre el planteamiento de Balakrishnan, lo que no afirma que el teorema este incorrecto, si no que una de las metas es la de precisar la formulación de este teorema y especificar su rango de aplicación. [12]

- ❖ ¿Por qué este teorema no utiliza una Función de Densidad de Probabilidad o funciones características?
- ❖ ¿Por qué la función básica (la que se multiplica con cada muestra) determinada por $\sin x/x$ es usada para todo tipo de procesos aleatorios?
- ❖ ¿Por qué el teorema no incluye características estadísticas, momentos o función de covarianza?
- ❖ ¿Por qué el teorema no incluye alguna característica espectral de algún proceso estocástico en $[-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c]$?
- ❖ ¿Por qué es necesario considerar el número infinito de muestras? En caso de no ser así ¿es la función básica de la ecuación (1-3) es la mejor opción para el procedimiento de Muestreo-Reconstrucción?

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} \quad (1-3)$$

- ❖ Existe alguna relación entre las ecuaciones (1-2) y algún algoritmo matemático con el mismo criterio del error de reconstrucción?
- ❖ ¿Por qué la función de error de reconstrucción es cero para todos los procesos estocásticos (1-3)?
- ❖ ¿Por qué es suficiente utilizar la frecuencia límite ω_c para obtener una reconstrucción completa de alguna realización, en todos los procesos estocásticos con un error de cero?
- ❖ ¿Por qué este teorema no incluye el procedimiento de extrapolación en su formulación?

1.2 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS ALEATORIOS

Sabemos que un proceso aleatorio continuo $x(t)$ tiene muchas realizaciones $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$, $x^{(3)}(t)$, ..., $x^{(j)}(t)$, ..., $x^{(M)}(t)$ en un tiempo dado y cada realización tiene una medida de probabilidad descrita por las propiedades estadísticas que pueden ser expuestas bajo condiciones similares. Cada realización $x^{(j)}(t)$ puede estar definida en una continuidad de valores t sobre un intervalo finito (t_a, t_b) o sobre un intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ además cada realización contiene una característica importante denominada función de densidad de probabilidad (FDP).

Al conocer las fdp's unidimensionales ($W_1[x(t_1)], W_1[x(t_2)], \dots, W_1[x(t_m)]$) de cada tiempo $t_1, t_2, \dots, t_m$, es posible obtener alguna información estadística del proceso, tal como la *función de esperanza matemática* $m(t) = \langle x(t) \rangle$ en cada instante de tiempo $t_1, t_2, \dots, t_m$, así como la *función de varianza* $\sigma^2(t) = \langle (x(t) - m(t))^2 \rangle$, y las funciones de sus momentos iniciales y centrales unidimensionales.

Función de esperanza matemática:

$$m(t) = \langle x(t) \rangle = \int x(t)W[x(t)]dx(t) \quad (1-4)$$

Función de Varianza:

$$\sigma^2(t) = \langle (x(t) - m(t))^2 \rangle = \int (x(t) - m(t))^2 W[x(t)]dx(t) \quad (1-5)$$

Función de momento inicial de orden n:

$$\langle x^n(t) \rangle = \int x^n(t)W[x(t)]dx(t) \quad (1-6)$$

Función de momento central de orden n:

$$\langle \dot{x}^n(t) \rangle = \int (x(t) - m(t))^n W[x(t)] dx(t) \quad (1-7)$$

1.2.1 FUNCIÓN DE COVARIANZA

Otra característica estadística que puede reflejar las diferencias entre las estructuras en el tiempo, es la función de covarianza; la cual es una función determinística con dos argumentos del tiempo t_1 y t_2 , la cual indica como el momento de covarianza cambia cuando la distancia entre el intervalo t_1 y t_2 cambian también. Donde puede ser determinada a partir de su fdp bidimensional y su esperanza matemática

$$K(t_1, t_2) = \langle \dot{x}(t_1) \dot{x}(t_2) \rangle = \iint (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2)) W(x(t_1), x(t_2)) dx(t_1) dx(t_2) \quad (1-8)$$

La función de covarianza nos indica si la estructura del proceso en el tiempo es caótico o suave.

Algunas propiedades que tiene la función de covarianza en régimen estacionario:

- a) Tiene su valor cuando $t_1 = t_2$:

$$K(t_1, t_1) = \langle \dot{x}(t_1) \dot{x}(t_2) |_{t_2=t_1} \rangle = \langle \dot{x}^2(t_1) \rangle = \sigma^2(t) \quad (1-9)$$

- b) Para caso estacionario es una función par

$$K(\tau) = K(-\tau), \tau = t_2 - t_1. \quad (1-10)$$

- c) Tiende a cero cuando $\tau \rightarrow \infty$ en la mayoría de los casos:

$$K(\infty) = 0 \quad (1-11)$$

- d) Existe una función de covarianza normalizada $R(\tau)$ donde:

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)} = \frac{K(\tau)}{\sigma^2} \quad (1-12)$$

- e) Su rango de valores está contenido en:

$$|K(\tau)| \leq K(0), \text{ por lo tanto } 0 \leq |R(\tau)| \leq 1. \quad (1-13)$$

- f) Tiene relación con el parámetro llamado *tiempo de covarianza* τ_c en función de $R(\tau)$.

$$\tau_c = \int_0^\infty |R(\tau)| d\tau \quad (1-14)$$

1.2.2 DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Existe otro parámetro importante que caracteriza las propiedades espectrales de los procesos aleatorios con la distribución de potencia en función de la frecuencia. El *Teorema de Wiener-Khintchine* sugiere que la función de covarianza $K(\tau)$ está relacionada con la función de densidad espectral de potencia $S(\omega)$ mediante la transformada de Fourier.

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1-15)$$

$$S(\omega) = K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1-16)$$

Debido a los atributos espectrales de la función de covarianza $K(\tau)$ su transformada de Fourier $S(\omega)$ tiene las siguientes propiedades:

- 1) $S(\omega)$ siempre es real.
- 2) $S(\omega) \geq 0$.
- 3) *Es una función simétrica:* $S(\omega) = S(-\omega)$.

Es importante no confundir el concepto de espectro de potencia con espectro de la realización, puesto que el espectro de potencia $S(\omega)$ está asociado a la transformada en dominio de la frecuencia de la función de covarianza, y que además es siempre real (*Teorema de Wiener-Khintchine*). Por otro lado, el espectro de la realización $X(j\omega)$ corresponde a la transformada de Fourier de la realización, es decir el espectro de la fase, la cual contempla valores complejos.

1.3 MODELOS DE LOS PROCESOS ALEATORIOS GAUSSIANOS

En el siguiente apartado analizaremos modelos más comunes de procesos Gaussianos, tanto diferenciales como no diferenciales, usando técnicas para comprobar la diferenciación de dichos procesos, además de resaltar las características más importantes de dichos modelos, entre las que encontramos las densidades espectrales de cada modelo.

1.3.1 PROCESOS MARKOVIANOS CONTINUOS

Un Proceso *Markoviano* es una serie de eventos causales, es decir eventos no anticipativos o que dependen solo de los eventos anteriores o actuales; y por tanto la probabilidad de dichos eventos condiciona a eventos futuros. De manera explícita tenemos una función que contiene los siguientes elementos: [9]

$$W(x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_{n-2}(t_{n-2}), x_{n-1}(t_{n-1}), x_n(t_n)) \quad (1-17)$$

En donde la ecuación (1-17) corresponde a la fdp multidimensional y misma que nos da la posibilidad de analizar las conexiones estadísticas en un proceso dado. De la ecuación (1-17) se observa que $x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_{n-2}(t_{n-2})$ corresponden a eventos pasados; $x_{n-1}(t_{n-1})$ corresponden a eventos presentes y $x_n(t_n)$ corresponden a eventos futuros. Cada función de distribución de probabilidad con estas características pueden ser procesados como:

$$W(x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_{n-1}(t_{n-1}), x_n(t_n)) = \quad (1-18)$$

$$W(x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_{n-1}(t_{n-1})) * W(x_n(t_n) | x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_{n-1}(t_{n-1}))$$

La ecuación (1-18), esta expresada en forma general y es válida para cualquier proceso aleatorio continuo; esta expresión la podemos interpretar también como: los eventos futuros del proceso (x_n, t_n) dependen de todo pasado $(x_1(t_1); x_2(t_2); \dots; x_{n-2}(t_{n-2}))$. La ecuación (1-18) significa que la FDP $W(x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_{n-1}(t_{n-1}), x_n(t_n))$ depende de todos los valores en pasado y presente. Por otro lado si $x(t)$ es un *Proceso Markoviano* entonces su futuro x_n, t_n depende solamente del valor presente $x_{n-1}(t_{n-1})$, y no de valores pasados, $x_1(t_1); x_2(t_2), \dots, x_{n-2}(t_{n-2})$ es decir: [9]

$$W(x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_{n-1}(t_{n-1}), x_n(t_n)) = W(x_n(t_n) | x_{n-1}(t_{n-1})) \quad (1-19)$$

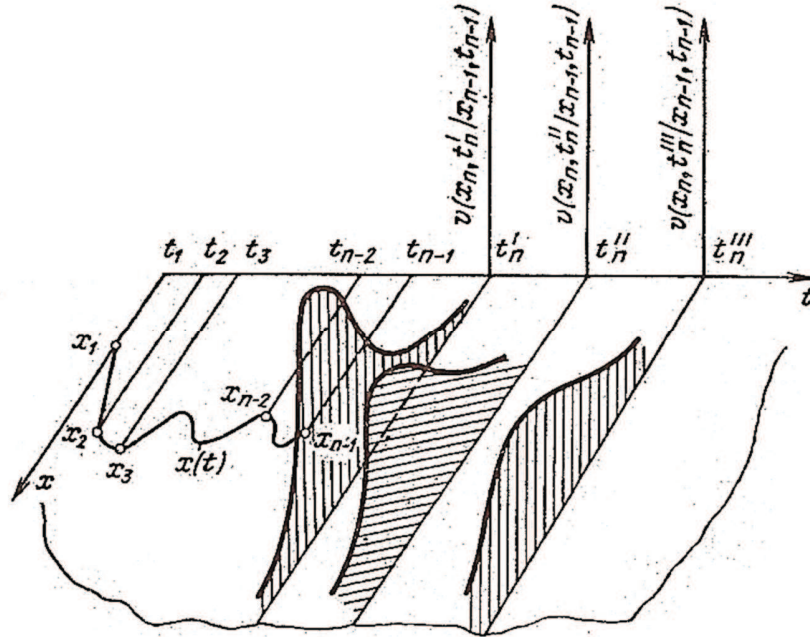


Figura 1.1 Proceso Markoviano y dependencia entre FDP debido a valores pasados y presentes.[9]

En la figura 1.1 se observa la dependencia de la FDP Gaussiana sobre las muestras de un proceso aleatorio Markoviano, es posible apreciar que al reducir la distancia entre t_{n-1} y t'_n la FDP se contrae, lo que significa que es más fácil determinar la variable aleatoria en el tiempo t'_n ; por el contrario si aumentamos la distancia de la muestras presente t_{n-1} hasta un punto t'''_n , la FDP se expande teniendo como resultado una FDP estacionaria; en estas circunstancias es de interés determinar el valor del evento en el instante t'''_n .

Un Proceso Markoviano puede ser formado por algunos sistemas de primer orden; en donde la entrada de dicho sistema es alimentado con ruido blanco $n(t)$ con su densidad espectral $N_0/2$ y por tanto en la salida obtendremos un Proceso Markoviano $x(t)$. En caso general tal *sistema no lineal* está descrito con una ecuación estocástica de primer orden, cuando un proceso externo es ruido blanco:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x, t)x(t) + p(x, t)n(t) \quad (1-20)$$

Donde $g(x, t)$ y $p(x, t)$ son funciones no lineales, y por tanto en la salida del sistema, el proceso aleatorio $x(t)$ será no Gaussiana.

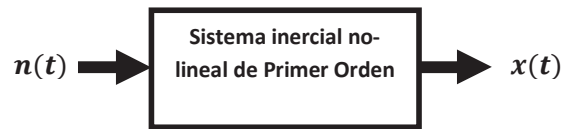


Figura 1.2 Sistema inercial y no lineal alimentado con ruido blanco

Para obtener un Proceso Markoviano a la salida del sistema de la figura 1.2 se necesitan dos condiciones:

- 1) El sistema debe ser descrito con la ecuación diferencial estocástica de primer orden, como la mostrada en la ecuación (1-20).
- 2) La entrada del sistema debe ser alimentada por Ruido Blanco.

Al no cumplirse las dos condiciones anteriores, el proceso a la salida no será Markoviano. [9]

Por otro lado si tenemos un sistema lineal como el descrito en (1-21), el proceso a la salida del sistema sería un proceso Markoviano Gaussiano.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) + \alpha n(t) \quad (1-21)$$

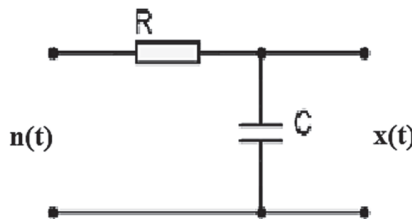


Figura 1.3 Modelo de Proceso Markoviano Gaussiano al aplicarle Ruido blanco Gaussiano (Filtro RC de Una Etapa).

En caso estacionario el proceso $x(t)$ a la salida de filtro RC de una etapa tiene las características mostradas en (1-22).

$$\langle x(t) \rangle = 0; \quad \sigma^2 = \frac{\alpha N_0}{4}; \quad K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (1-22)$$

1.3.2 PROCESOS DIFERENCIABLES Y NO DIFERENCIABLES.

Considerando un proceso $x(t)$ con función de covarianza en régimen no estacionario $K_x(t_1, t_2)$, es posible obtener la derivada del proceso dado como $x'(t)$, entonces la función de covarianza de la derivada del proceso para régimen *no estacionario* es obtenida como: [8]

$$K_{x'}(t_1, t_2) = \frac{d^2 K_x(t_1, t_2)}{dt_1 dt_2} \quad (1-23)$$

En este caso fueron anexados los subíndices x , los cuales indican la asociación de la función de covarianza K con el proceso aleatorio x . La ecuación (1-23) indica la segunda derivada de la función de covarianza del proceso.

Por otro lado en caso *Estacionario* la función de covarianza mutua dentro de $x(t)$ y $x'(t)$ se expresan respectivamente: [8,10]

$$K_{x'x}(\tau) = -\frac{dK_x(\tau)}{d\tau} \quad (1-24)$$

En lugar de (1-24) se tiene:

$$K_{x'}(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} \quad (1-25)$$

Es posible observar que para caso estacionario la ecuación (1-24) nos proporciona la función de covarianza mutua entre $x(t)$ y $x'(t)$, sin embargo para probar si un proceso estacionario es diferenciable basta con calcular (1-25), el cual calcula la segunda derivada de la función de covarianza del proceso.

Ahora un proceso aleatorio está completamente descrito por su función de distribución de probabilidad multidimensional (fdp) $W(x_1(t_1), x_2(t_2), \dots, x_n(t_n))$, la descripción mínima debe de tener fdp unidimensional $W(x, t)$ y la función de covarianza $K_x(t_1, t_2)$; además de estas características los procesos pueden ser diferenciables o no diferenciables.

Supongamos que tenemos un proceso aleatorio no estacionario $x(t)$ con características $m_x(t) = \langle x(t) \rangle$ así como $K_x(t_1, t_2) = \langle \dot{x}(t_1) \dot{x}(t_2) \rangle$. Si deseamos obtener las características correspondientes del proceso aleatorio $x'(t) = dx/dt$, el cual es la derivada del proceso dado. Por tanto la esperanza matemática del proceso diferencial se escribiría [9]:

$$m_{x'}(t) = \frac{dm_x(t)}{dt}, \quad (1-26)$$

Las ecuaciones (1-23) y (1-26) son validas para el caso no estacionario, por el contrario para el caso estacionario $m_x(t) = m_x = \text{constante}$.

Si retomamos la ecuación (1-23) y sabiendo que la derivada de una constante es cero tenemos para el caso estacionario:

$$m_{x'}(t) = 0. \quad (1-27)$$

Tomando en cuenta $t_2 - t_1 = \tau$ obtenemos (1-25)

Es decir para determinar la función de covarianza del proceso de derivado, se necesita calcular una segunda derivada de la función de covarianza del proceso dado. Pero la derivada del proceso no siempre existe, pues hay una condición natural; esto es, la derivada de un proceso existe, si su varianza existe y si su varianza no tiende a infinito.

Es decir, la derivada del proceso estacionario $x'(t)$ existe si:

$$\sigma_{x'}^2 = K_{x'}(\tau = 0) = -K''_x(0) = \text{constante} \quad (1-28)$$

En caso no estacionario la condición para que la derivada exista sería

$$\sigma_{x'}^2(t) = K_{x'}(t_1 = t_2 = t) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} [K_x(t_1, t_2)]_{t_1=t_2=t} \quad (1-29)$$

En general el proceso dado se llama diferencial si:

- 1) La primera y segunda derivada de la función de covarianza existe.
- 2) Si la derivada de la función de covarianza no existe, entonces el proceso es no diferenciable.

Además, es posible probar que un proceso $x(t)$ y la derivada de dicho proceso $x'(t)$, son están correlacionados en el mismo tiempo.

$$K_{xx'}(t, t) = 0 \quad (1-30)$$

Ahora en el presente trabajo solo serán considerados procesos Gaussianos, por lo que esta condición puede ser forzada como: *Proceso Estacionario Gaussiano* $x(t)$ y la derivada de su proceso $x'(t)$ en el mismo tiempo t , donde ambos procesos son independientes:

$$W(x, x', t) = W(x(t))W(x'(t)) \quad (1-31)$$

Considerando la función de covarianza del proceso en la ecuación (1-32) y que corresponde al modelo del proceso a la salida de filtro RC de Dos etapas, afectado con ruido blanco.

$$R_x(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)\exp\{-\alpha|\tau|\} \quad (1-32)$$

A continuación será usado un término corto para los procesos en la salida de los filtros afectados con ruido blanco, modelo del filtro RC de Una, Dos, Tres Etapas.

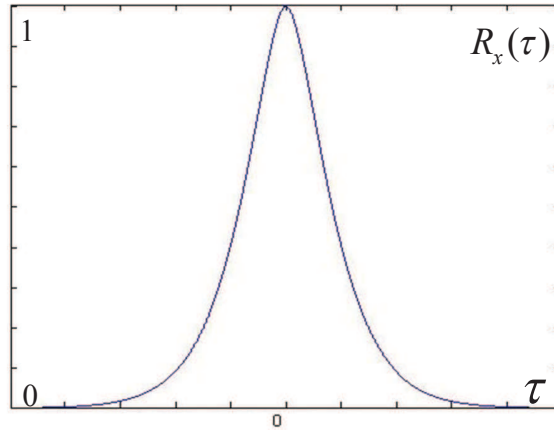


Figura 1.4 Función de covarianza del Proceso a la salida de Filtro RC de Dos Etapas.

Considerando procesos en régimen estacionario y aplicando la ecuación (1-25) al modelo del filtro RC de Dos Etapas se tiene:

$$R_x(\tau) = -\frac{d^2(1 + \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|}}{d\tau^2} \quad (1-33)$$

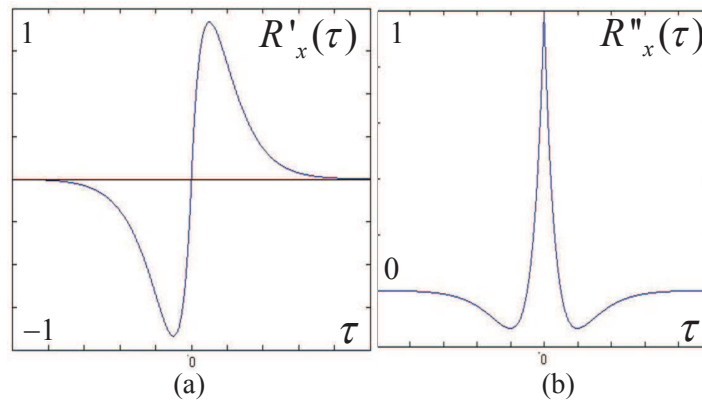


Figura 1.5 Graficas de: (a) Primera y (b) Segunda Derivada de la función de covarianza del proceso a la salida del Filtro RC de Dos Etapas.

Observando en la segunda derivada de la figura 1.5 es posible apreciar que la función de covarianza evaluada en $\tau = 0$, es decir $K_x(\tau = 0) = \sigma^2$ es finita, por tanto este modelo de proceso es diferencial. Ahora evaluamos un proceso Markoviano, como el que obtenemos a la salida de un filtro RC de Una etapa cuando lo alimentamos de ruido blanco Gaussiano, y cuyas características estadísticas se expresa en la ecuación (1-22). Si es utilizada la versión normalizada de la función de Covarianza, entonces $\sigma^2 = 1$, y la notación de función de covarianza normalizada sería $K_x(\tau) = R_x(\tau)$. Aplicando (1-25) en la función de covarianza (1-22) en caso estacionario obtendremos:

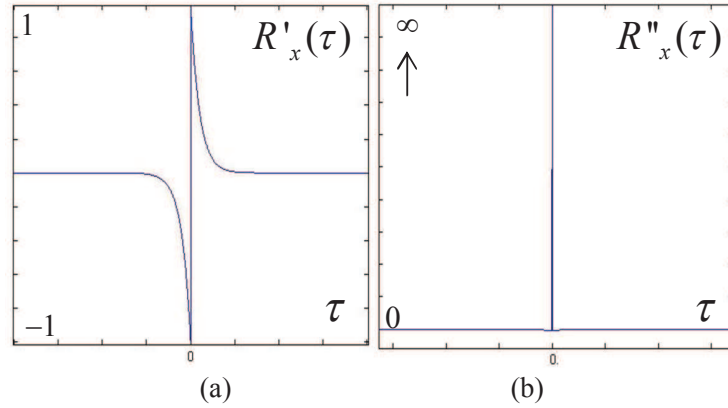


Figura 1.6 Graficas de: (a) Primera y (b) Segunda Derivada de la función de covarianza del proceso a la salida del Filtro RC de una Etapa.

En figura 1.6 se aprecia en la segunda derivada en $\tau = 0$, el valor de $K_x(\tau) = \sigma^2 \rightarrow \infty$, por lo que este Proceso Markoviano es *No-Diferenciable*.

1.3.3 MODELOS DE PROCESOS GAUSSIANOS NO DIFERENCIALES

La mayoría de los procesos aleatorios son diferenciables, sin embargo se comprobó que existen procesos que son no diferenciables un ejemplo fue el proceso Markoviano a la salida de Filtro RC de Una Etapa, otro ejemplo es el caso particular con un *Sistema lineal* $g(x,t) = p(x,t) = \alpha(t)$, como sería el caso del circuito RC integral de la figura (1.7) en estas condiciones obtendremos en la salida un Proceso Gaussiano. Para este circuito tenemos que $dx/dt = -\alpha(t)x(t) + \alpha(t)n(t)$, donde $\alpha(t) = 1/CR(t)$. Este tipo de sistemas se denominan paramétricos ya que su estructura cambia en el tiempo, y además son no estacionarios.

Ahora cuando $\alpha(t) = \alpha$, se tiene un circuito con parámetros constantes como en el caso de la ecuación (1-21).

1) Proceso de Wiener.

Un Proceso de Wiener es un Proceso Aleatorio No Estacionario Gaussiano Markoviano, cuya ecuación estocástica de dicho modelo es: [8,11]

$$\frac{dx(t)}{dt} = c n(t) \quad (1-34)$$

Donde el proceso $x(t)$ puede ser obtenido

$$x(t) = c \int_0^t n(t') dt' \quad (1-35)$$

La ecuación 1-34 describe a un Proceso de Wiener;

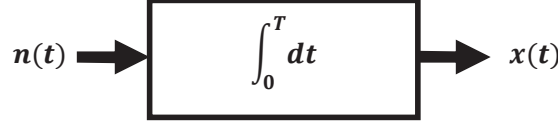


Figura 1.7 Descripción de un Proceso de Wiener.

Partiendo de la ecuación (1-39) y considerando $c=1$, determinamos sus características estadísticas

$$m(t) = \langle x(t) \rangle = \int_0^t \langle n(t') \rangle dt' = 0 \quad (1-36)$$

$$\sigma^2(t) = \langle x^2(t) \rangle = \langle \int_0^t n(t') dt' * \int_0^t n(t'') dt'' \rangle = \int_0^t \langle n(t') n(t'') \rangle dt' dt'' = \frac{N_0 t}{2} \quad (1-37)$$

Ahora si tomamos en cuenta las ecuaciones (1-36) y (1-37) podemos escribir su FDP como:

$$f(x, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{N_0 t}} \exp \left\{ \frac{-x^2}{N_0 t} \right\} \quad (1-38)$$

Además tenemos la función de covarianza

$$K(t_1, t_2) = \langle \int_0^{t_1} n(t') dt' * \int_0^{t_2} n(t'') dt'' \rangle = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \langle n(t') n(t'') \rangle dt' dt'' = \frac{N_0}{2} \min(t_1, t_2) \quad (1-39)$$

Como mencionamos anteriormente, un proceso de Wiener también puede ser Markoviano, y por tanto podemos escribir las expresiones de varianza como funciones de error de reconstrucción; para el procedimiento de *extrapolación* tenemos: [11]

$$\tilde{m}(t) = x(T_n), \quad t > T_n \quad (1-40)$$

y para el procedimiento *interpolación* tenemos:

$$\tilde{m}(t) = \frac{(T_{i+1}-t)X(T_i) + (t-T_i)X(T_{i+1})}{T_{i+1}-T_i} \quad (1-41)$$

En las ecuaciones (1-40) y (1-41) las funciones de reconstrucción de interpolación no dependen de otras muestras vecinas, solo dependen de dos $X(T_i)$ y $X(T_{i+1})$.

Las correspondientes expresiones para la función de error de reconstrucción tienen la forma:

$$\tilde{\sigma}^2(t) = (t - T_n), \quad t > T_n \quad (1-42)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \frac{(t-T_i)(T_{i+1}-t)}{T_{i+1}-T_i}, \quad T_i < t < T_{i+1} \quad (1-43)$$

La función de error de interpolación $\sigma^2(t)$ y la varianza incondicional $\tilde{\sigma}^2(t)$ de un Proceso de Wiener, incrementa ilimitadamente de manera lineal, tal y como se muestra en la figura 1.8.

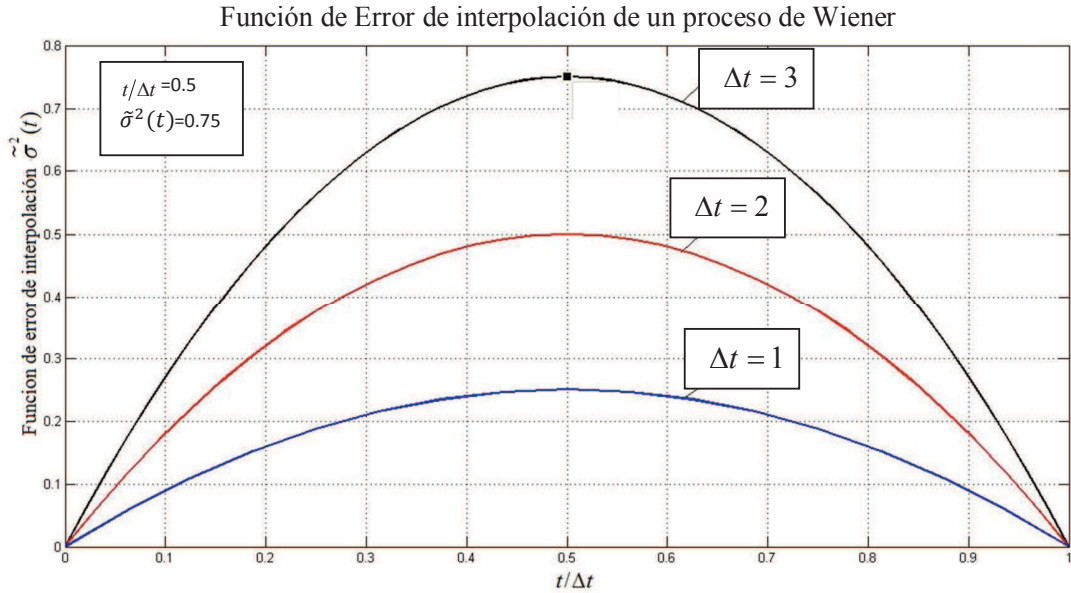


Figura 1.8 Función de Error de Interpolación $\tilde{\sigma}^2(t)$ de un Proceso de Wiener para algunos valores diferentes de Intervalo de Muestreo ΔT .

2) Proceso Gaussiano Markoviano.

Un proceso Markoviano está determinado por la función de covarianza de la ecuación (1-21) y si aplicamos la ecuación para el tiempo de covarianza de la ecuación (1-44), obtendremos el tiempo de covarianza normalizado en (1-45).

$$\tau_c = \int_0^\infty |R_x(\tau)| d\tau \quad (1-44)$$

El tiempo de covarianza τ_c a partir del modelo de filtro RC de Una Etapa visto anteriormente es calculado con:

$$\tau_c = \int_0^\infty |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^\infty \exp\{-\alpha|\tau|\} d\tau = \frac{1}{\alpha} \quad (1-45)$$

En la ecuación (1-45) se tiene que el tiempo de covarianza $\tau_c = 1/\alpha$, por lo que si $\alpha = 1$ entonces el $\tau_c = 1$ será también, por lo que se obtendrá el tiempo de covarianza normalizado del proceso.

El tiempo de covarianza normalizado significa que el área de la función desde 0 hasta ∞ es la unidad, y por tanto $\sigma^2 = 1$ también. A continuación se presenta la función de covarianza $R_x(\tau) = \exp\{-\alpha|\tau|\}$ y su espectro de potencia para diversos valores de α .

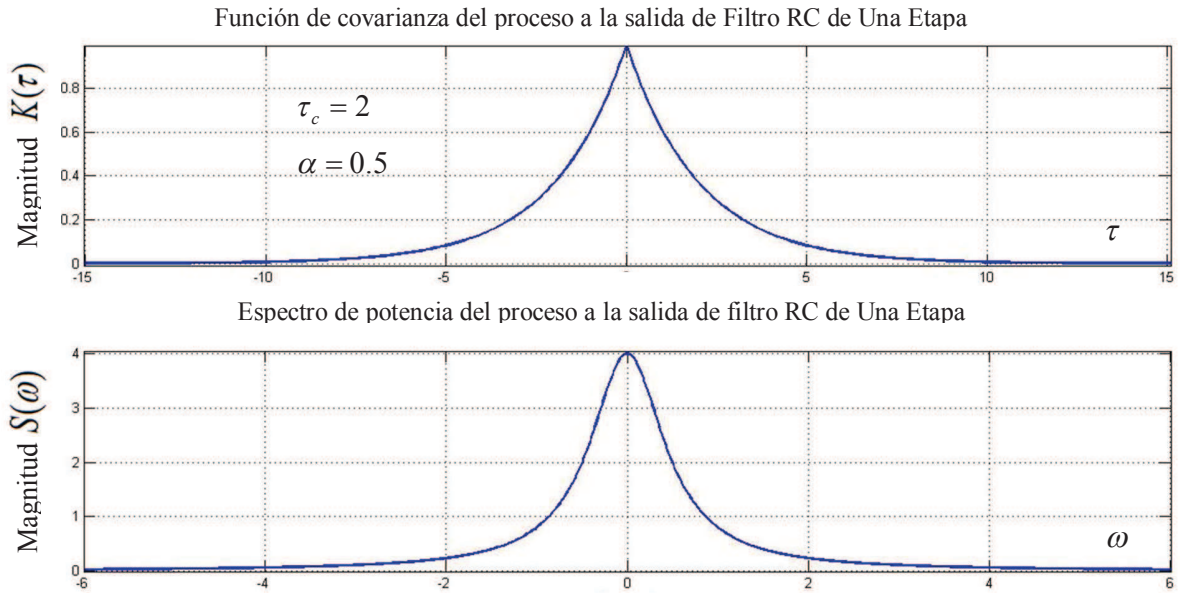


Figura 1.9 Función de Covarianza del proceso a la salida de Filtro RC de Una Etapa y su Espectro de Potencia para $\alpha = 0.5$.

Observe que el valor del tiempo de covarianza τ_c depende directamente del valor de α y además influye en su espectro de potencia; nótese también que al aumentar el tiempo de covarianza τ_c en la función de covarianza normalizada $R_x(\tau)$, reduce el espectro de potencia pero aumenta su magnitud. (Ver figuras 1.9 y 1.10).

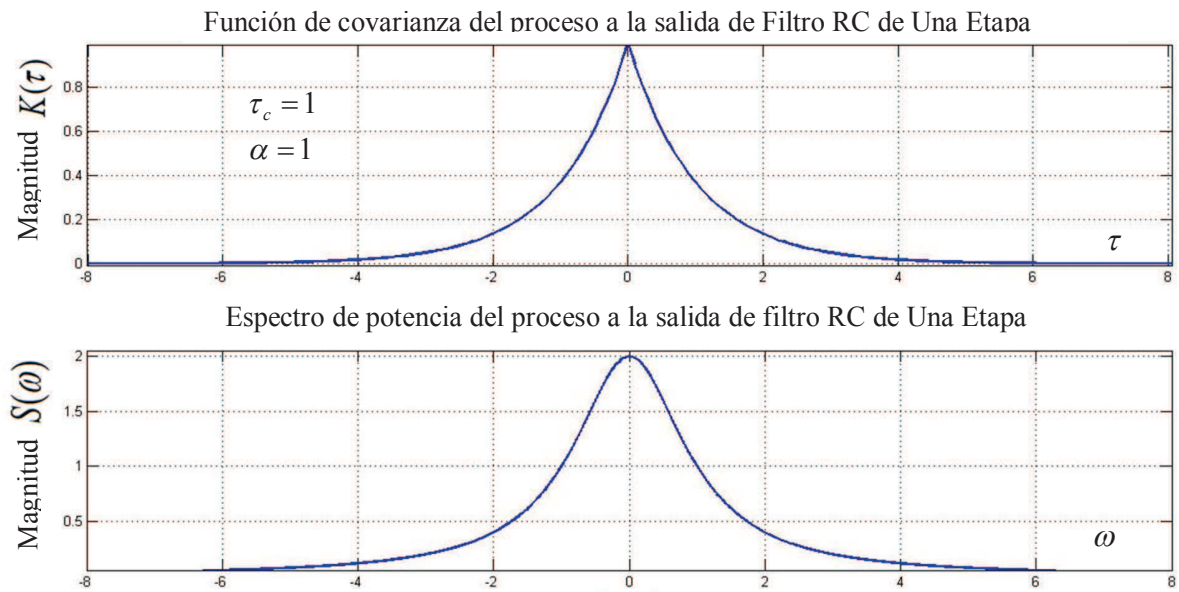


Figura 1.10 Función de Covarianza del proceso a la salida de Filtro RC de Una Etapa y su Espectro de Potencia para $\alpha = 1$

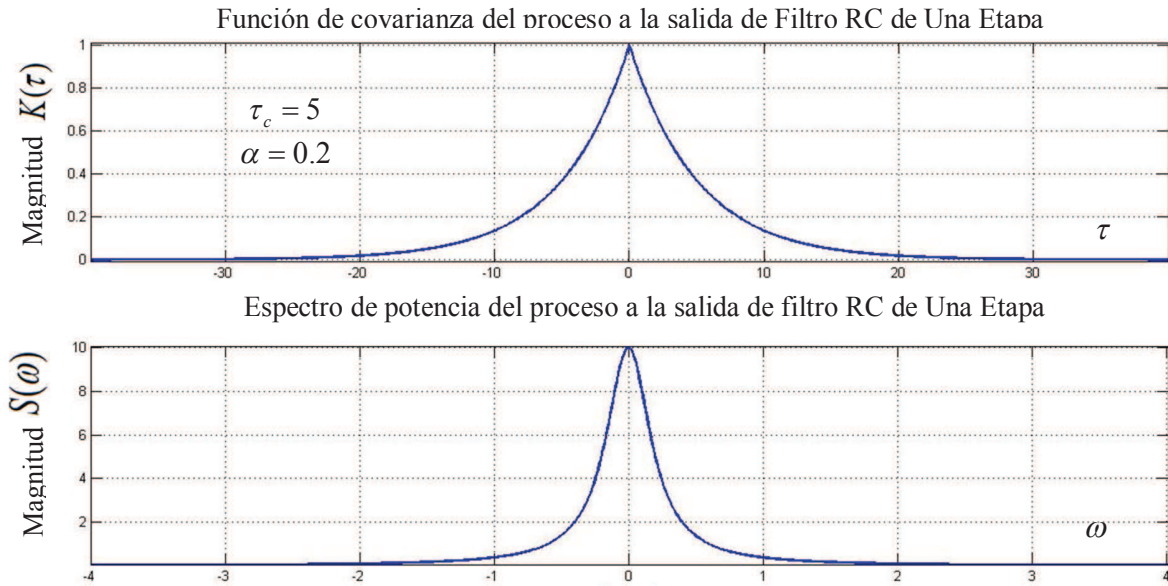


Figura 1.11 Función de Covarianza del proceso a la salida de Filtro RC de Una Etapa y su Espectro de Potencia para $\alpha = 0.2$.

En las figuras (1.9, 1.10, 1.11) es posible notar que al incrementar el valor de α , la función de covarianza normalizada para el proceso a la salida de un filtro RC se reduce o disminuye, mientras que el espectro de potencia se expande; lo cual muestra una analogía entre la *Transformada de Fourier* y la transformada de *Wiener-Khintchine*.

3) Proceso Gaussiano a la salida de un Filtro Acoplado para una señal Rectangular.

Se dice que un filtro está acoplado cuando dicho filtro puede transferir la señal eléctrica desde un punto a otro, además dichos filtros nos aseguran un máximo de relación señal a ruido S/N. Considerando una señal rectangular con ruido blanco gaussiano y se hace pasar a través de filtro acoplado, a la salida del filtro obtendremos una realización triangular, que corresponde a la función de covarianza del proceso. La función de covarianza triangular está dada por:

$$K(\tau) = A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T_0}\right); \text{ para } 0 < |\tau| \leq T_0 \quad (1-46)$$

$$K(\tau) = 0; \text{ para } |\tau| \geq T_0 \quad (1-47)$$

Donde A corresponde a la magnitud de la función de covarianza en $\tau = 0$, es decir, $A = \sigma^2$. El parámetro τ es la variable independiente de la función de covarianza y T_0 es el tiempo de duración del pulso rectangular a la entrada del filtro acoplado. Considerando una señal rectangular alimentada con ruido blanco y se hace pasar a través del filtro acoplado, a la salida será obtenida una función de covarianza triangular del proceso, tal y como se muestra en la figura 1.12.

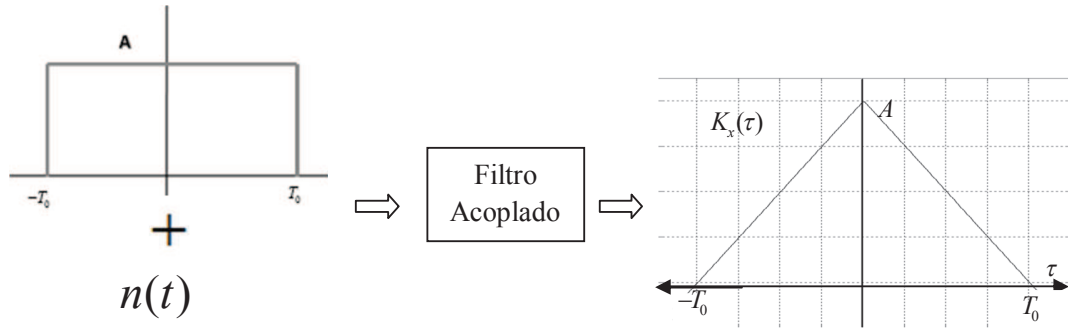


Figura 1.12 Función covarianza Triangular del proceso a la salida de filtro acoplado.

Aplicando la ecuación (1-25) para probar la diferenciación de este modelo considerando un proceso estacionario, se tiene la función de covarianza normalizada dada por:

$$R_{x'}(\tau) = -\frac{d^2(1-|\tau|/T_0)}{d\tau^2} = -\frac{2\delta(\tau)}{T_0} \quad (1-48)$$

Nuevamente en la figura 1.13, se observa una discontinuidad en el origen para el caso de la primera derivada, y en la segunda derivada al evaluar en $\tau = 0$, se tiene que la varianza de este modelo de proceso es un impulso que tiende al infinito, por lo que este modelo es no diferencial.

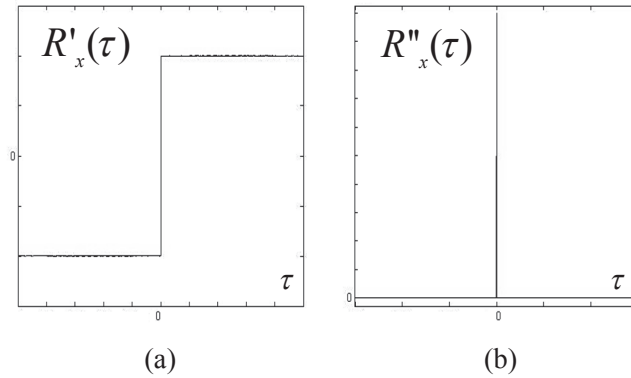


Figura 1.13 Graficas de: (a) Primera y (b) Segunda derivada de la función de covarianza del proceso a la salida de filtro acoplado.

4) Proceso de Corriente en Inductancia de filtro RLC Resonante

Un filtro resonante es un filtro RLC pasa-banda sintonizado a una frecuencia central con la característica de que su banda de paso es muy estrecha o media estrecha en este caso la relación de ancho de banda con la frecuencia central es $B/\omega_0 < 0.3$, Donde B corresponde al ancho de banda del filtro y ω_0 es la frecuencia central donde también se puede determinar por: [13]

$$\omega_0^2 = 1/LC \quad (1-49)$$

Y su parámetro α dado por:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (1-50)$$

La ecuación diferencial estocástica que describe a dicho proceso es la siguiente:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 n(t) \quad (1-51)$$

El proceso mencionado en la ecuación (1-51) no es un proceso Markoviano ya que está descrito por una ecuación de segundo orden y no cumple con las características mencionadas anteriormente sobre un proceso Markoviano.

La función de covarianza normalizada del proceso de la corriente del filtro resonante está dada por:

$$R(\tau) = \exp -\alpha|\tau| \cos(\omega_0 \tau) \quad (1-52)$$

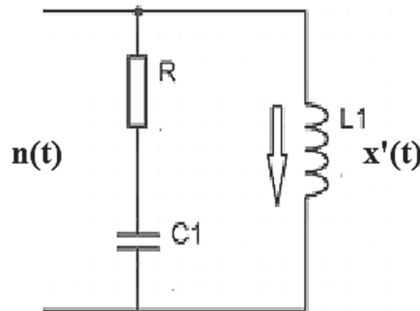


Figura 1.14 Diagrama de Filtro RLC Resonante

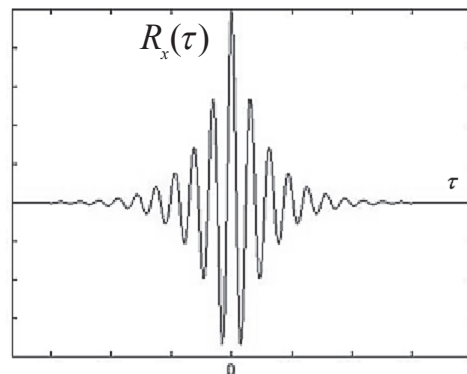


Figura 1-15 Función de Covarianza del proceso a la salida de Filtro RLC Resonante.

Nuevamente probamos la diferenciación de este modelo.

$$R_{x'}(\tau) = -\frac{d^2(e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau))}{d\tau^2} = \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau) - \omega_0^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau) + 2\alpha\omega_0 e^{-\alpha|\tau|}\sin(\omega_0\tau) \quad (1-53)$$

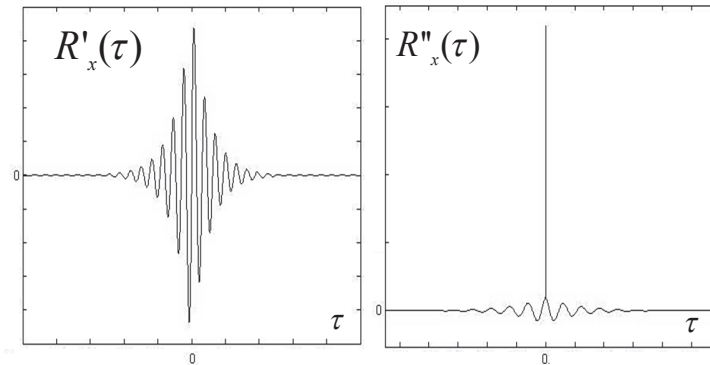


Figura 1.16 Graficas de: (a) Primera y (b) segunda derivada de la función de covarianza del proceso a la salida de Filtro RLC Resonante.

En la figura 1.16 puede probarse que el modelo del proceso es no diferenciable, ya que hay una discontinuidad en $\tau = 0$ para el caso de la segunda derivada del modelo.

5) Modelo para Procesos de Voz.

Las señales de voz son procesos aleatorios de carácter no estacionario; es decir, que su función de esperanza matemática $m(t)$, su función de varianza σ^2 , y su estructura dependen del tiempo. En este apartado se planteará y analizará un modelo utilizado para procesamiento de las señales de voz. Este tipo de modelo de procesos están formados por dos circuitos RC afectados por ruido blanco, tal y como se muestra en la figura 1.17. [7]

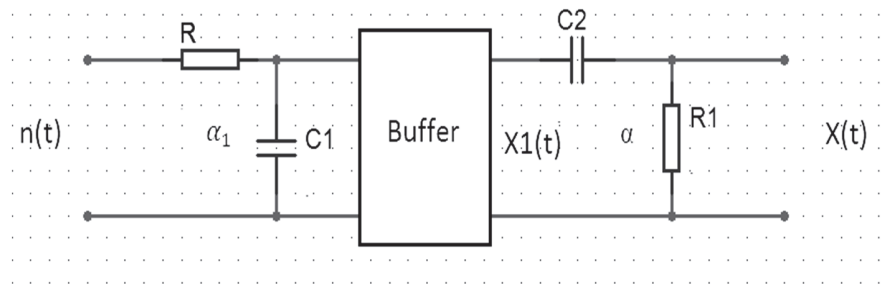


Figura 1.17 Diagrama de Filtro para Modelo de Voz

Este tipo de proceso está descrito por un sistema de dos ecuaciones estocásticas de primer orden.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) + \alpha_1 x_1(t) \quad (1-54)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\alpha_1 x_1(t) + \alpha_1 n(t) \quad (1-55)$$

A partir de la solución de estas ecuaciones, se plantean un modelo de reconstrucción $K(\tau)$ y su respectiva transformada de *Wiener-Khintchine* $S(\omega)$; dicho modelo posee de manera dual una función de dispersión σ_x^2 ; la función de covarianza, su espectro de potencia y su función de dispersión quedan expresados por:

$$K(\tau) = \frac{\alpha_1^2 N_0}{4(\alpha^2 - \alpha_1^2)} (\alpha e^{-\alpha|\tau|} - \alpha_1 e^{-\alpha_1|\tau|}) \quad (1-56)$$

$$S(\omega) = \frac{\alpha_1^2 \omega N_0}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)(\omega^2 + \alpha^2)} \quad (1-57)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_1^2 N_0}{4(\alpha^2 - \alpha_1^2)} \quad (1-58)$$

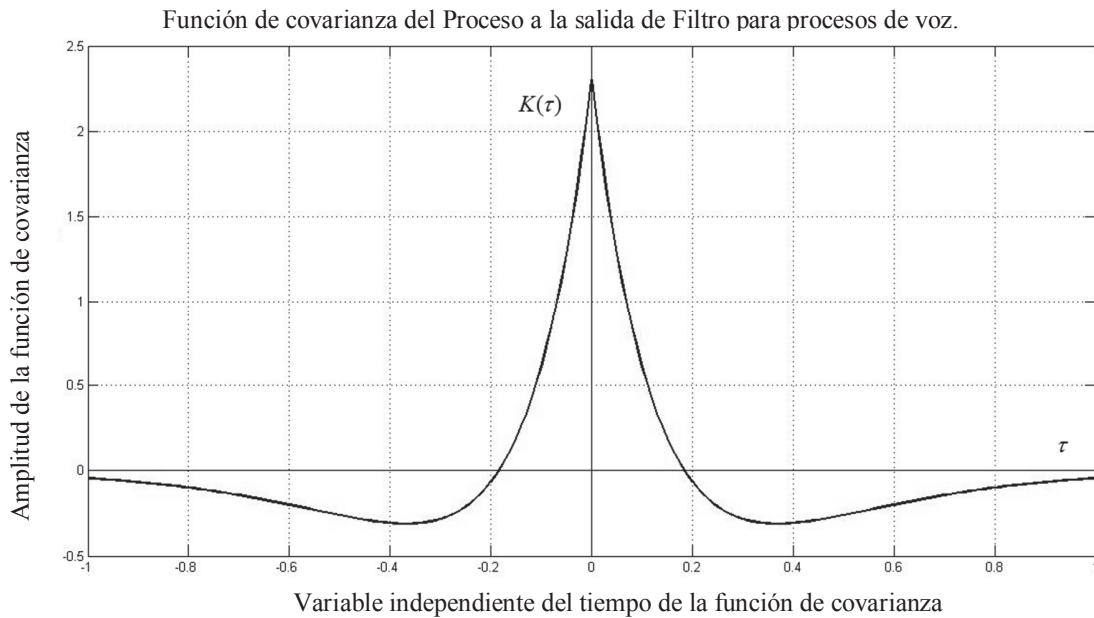


Figura 1.18 Función de Covarianza del proceso a la salida de filtro para proceso de voz.

En la figura 1.18 es posible observar la función de covarianza del proceso a la salida del modelo para procesos de voz, donde una característica de dicha función es que contiene lóbulos negativos debido al efecto producido por el derivador e integrador, lo que indica que el proceso es más caótico en comparación con la función de covarianza a la salida del filtro RC de una etapa.

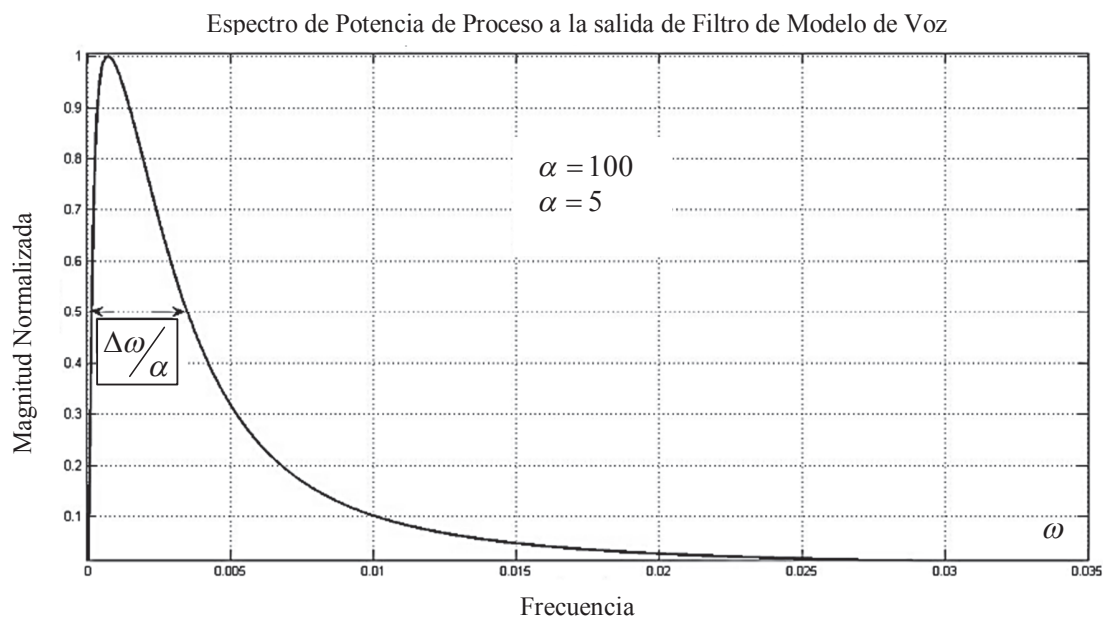


Figura 1.19 Espectro de Potencia del Proceso a la salida de modelo de Voz.

En la figura 1.19 podemos apreciar que el espectro de potencia está en función de los parámetros α ; al modificar dicho parámetro se modifica espectro de potencia normalizado, lo cual es un indicio de que es posible manipular el ancho de banda del espectro de la función propuesta. A continuación se muestran diversas graficas de espectro de potencia, para diversos valores de α y α_1 .

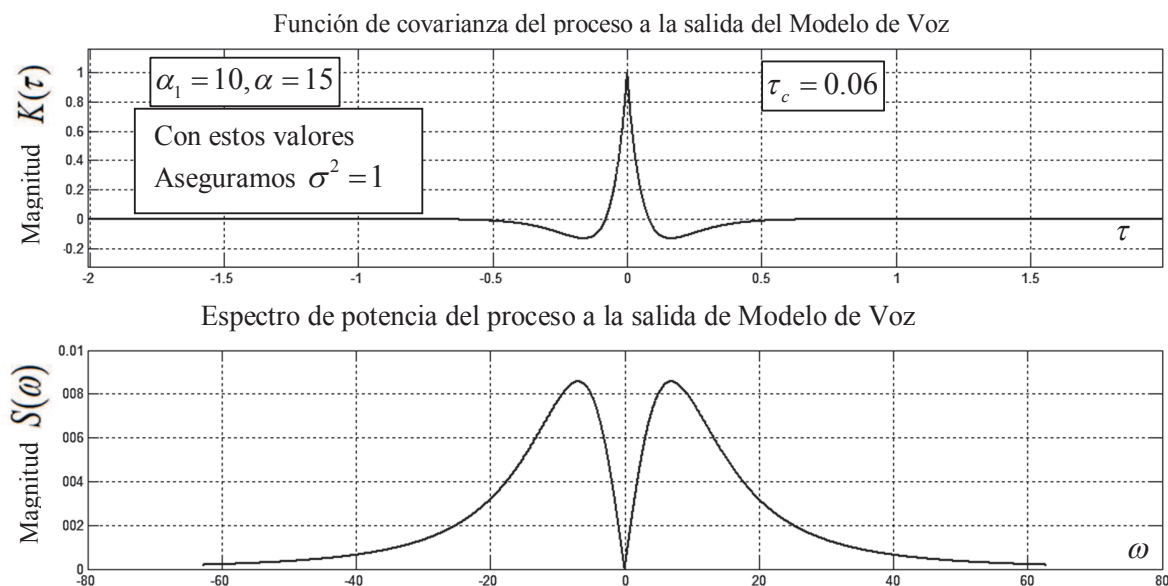


Figura 1.20 Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida del Modelo de Voz con $\alpha_1 = 10, \alpha = 15$

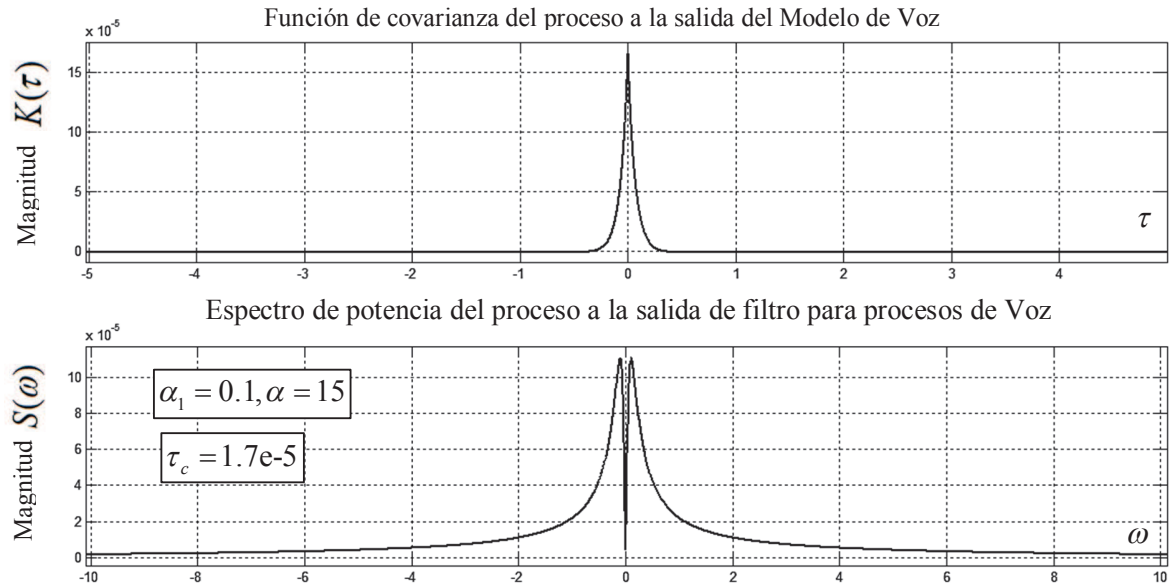


Figura 1.21 Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida del Modelo de Voz con $\alpha_1 = 0.1, \alpha = 15$

En las figuras 1.20 y 1.21 se comprueba que la variación de α_1 proporciona una variación en el espectro de potencia, esto es, para $\alpha_1 = 10$, el espectro de potencia se expande y su función de covarianza se reduce, análogamente, con $\alpha_1 = 0.1$ el espectro de potencia se reduce mientras que su función de covarianza se expande; esto siempre y cuando α sea constante para los 2 casos.

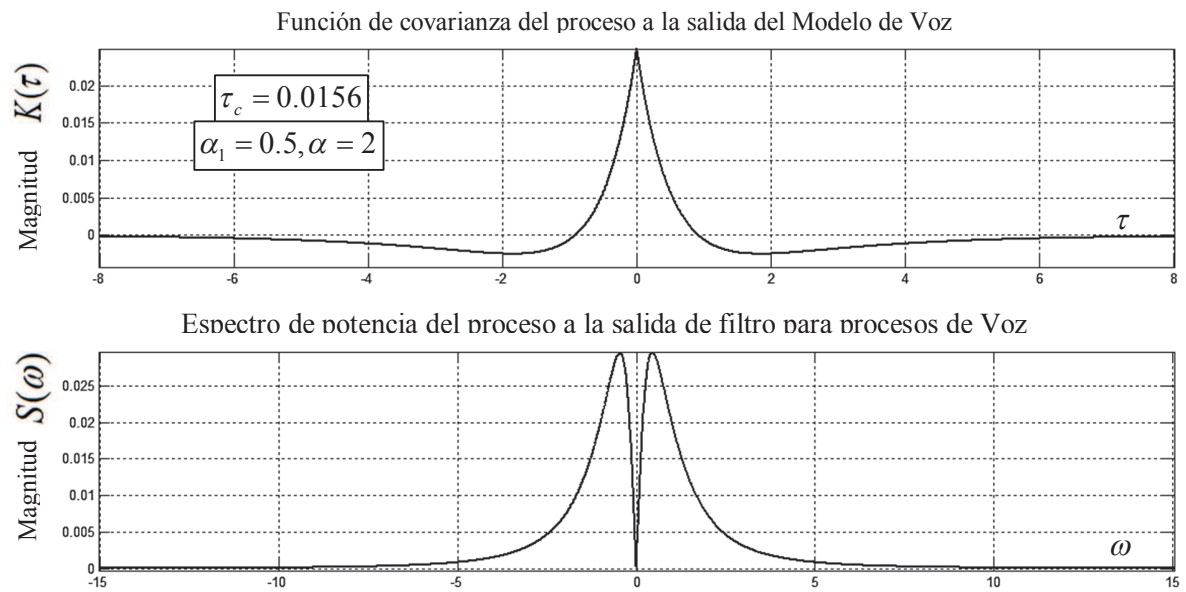


Figura 1.22 Función de Covarianza y Espectro de Potencia para Modelo de Voz con $\alpha_1 = 0.5, \alpha = 2$

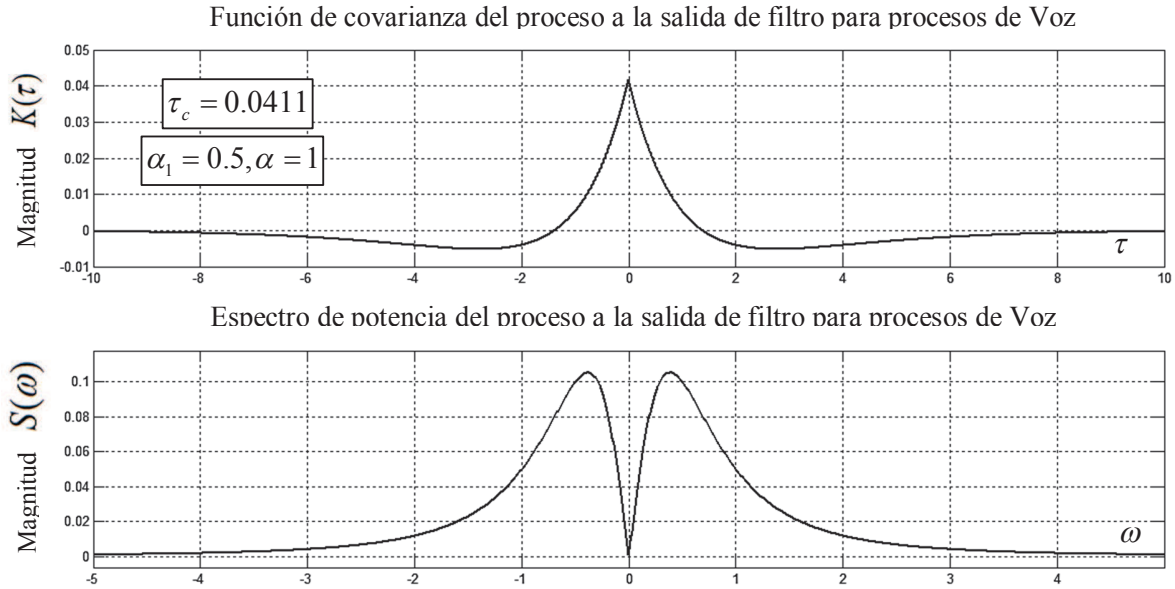


Figura 1.23 Función de Covarianza y Espectro de Potencia para Modelo de Voz con $\alpha_1 = 0.5, \alpha = 1$

Nuevamente en las figuras (1.22) y (1.23) se tiene ahora $\alpha_1 = 0.5$ (para ambos casos), y se compara con los valores propuestos de $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$ obteniendo un resultado similar al de las figuras (1.20) y (1.21), que es la variación del ancho del espectro de potencia así como la variación del ancho de la función de covarianza. Es importante mencionar que el modelo de voz utilizado y que se menciona en la ecuación (1-56), es de carácter no diferencial, para comprobarlo nuevamente haremos uso de las ecuaciones (1-27)

$$R_{x'}(\tau) = -\frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} = (\alpha^3 e^{-\alpha\tau} - \alpha_1^3 e^{-\alpha_1\tau}) \quad (1-59)$$

La ecuación (1-59) son el resultado de la comprobación de diferenciación del modelo de voz, si graficamos dichas ecuaciones se observa que la segunda derivada $K_{x'}(\tau = 0) = \sigma^2 \rightarrow \infty$, por lo que nuevamente sabemos que si un proceso tiene una varianza en singularidad, es decir tiende a infinito, entonces el proceso es no diferencial.

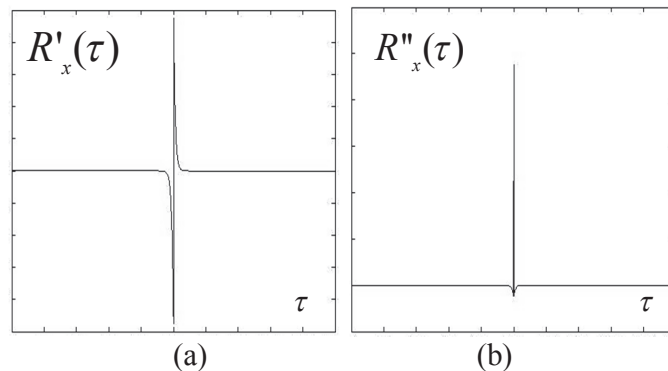


Figura 1.24 Graficas de: (a) Primera y (b) segunda derivada de la función de covarianza del proceso a la salida de Modelo para Proceso de Voz.

Como en los casos anteriores de filtros RC de una, dos y tres etapas, fue obtenido el tiempo de covarianza normalizada, para el modelo de voz realizaremos el mismo procedimiento, es decir:

$$\tau_c = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \left(\alpha e^{-\alpha|\tau|} - \alpha_1 e^{-\alpha_1|\tau|} \right) d\tau \quad (1-60)$$

En la ecuación (1-60) observamos que la integral para el cálculo del tiempo de covarianza da como resultado cero puesto que los argumentos son iguales para cualquiera de los límites sustituidos, por consiguiente obtenemos el resultado del límite cuando $\alpha_1 \rightarrow \alpha$ de tal modo que la ecuación (1-56) del modelo de voz se simplifica en: [15]

$$R(\tau) = (1 - \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|} \quad (1-61)$$

Cabe recalcar que la ecuación (1-61) es el resultado de calcular el límite de la ecuación 1-56, sin embargo no es objetivo de la investigación calcular dicho límite, y por tanto el tiempo de covarianza puede ser calculado como:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} (1 - \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|} d\tau \quad (1-62)$$

El problema de integrar una función como el de la ecuación (1-62) es que su función de covarianza contiene lóbulos negativos, esto lo podemos apreciar en la figura 1.18, por lo que al integrar nos arrojaría datos inconsistentes, para corregir esto se calcula el modulo de la función, esto es:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau \quad (1-63)$$

Integrando por partes:

$$\tau_c = \left| \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} d\tau - \int_0^{\infty} \tau e^{-\alpha|\tau|} d\tau = \frac{1}{\alpha} - \int_0^{\infty} \tau e^{-\alpha|\tau|} d\tau \right| \quad (1-64)$$

$$\tau_c = \frac{1}{\alpha} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{(\alpha\tau+1)}{\alpha} e^{-\alpha\tau} - \frac{1}{\alpha} \right| = \tau_c = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{(\alpha\tau+1)}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \right| \quad (1-65)$$

Por Regla de l'Hopital es obtenido:

$$\tau_c = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha\tau} \right| = ind \quad (1-66)$$

El tiempo de covarianza de la ecuación (1-66) representa un límite indeterminado, sin embargo computacionalmente fue posible aproximar a la normalización del tiempo de covarianza, en cambio este tiempo de covarianza no fue mayor a $\tau_c = 0.5$ cuando $\alpha = 0.5, \alpha_1 = 600$. Los valores mencionados anteriormente no cumplen la condición de $\sigma = 1$, por lo que para asegurar $K(\tau = 0) = \sigma^2 = 1$ fue necesario que $\alpha = 15, \alpha_1 = 10$.

1.4 PROGRAMA DE SIMULACIÓN DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS PARA LA FUNCIÓN DE COVARIANZA DADA.

En los posteriores capítulos será desarrollada la programación de las simulaciones de las características estadísticas vistas anteriormente, para aplicarlas en el análisis dentro de los cruces por cero de las realizaciones de los procesos Gaussianos bajo la plataforma Matlab en su versión 7.8.0347 (R2009a), elegida gracias a su flexibilidad, ambiente amigable, representación gráfica de datos y además de contar con gran variedad de funciones incluidas.

MATLAB (abreviatura de MATrix LABoratory, "laboratorio de matrices") es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Está disponible para las plataformas Unix, Windows y Apple Mac OS X.

Entre sus prestaciones básicas se hallan: la manipulación de matrices, la representación de datos y funciones, la implementación de algoritmos, la creación de interfaces de usuario (GUI) y la comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware. El paquete MATLAB dispone de dos herramientas adicionales que expanden sus prestaciones, a saber, Simulink (plataforma de simulación multidominio) y GUIDE (editor de interfaces de usuario - GUI). Además, se pueden ampliar las capacidades de MATLAB con las cajas de herramientas (toolboxes); y las de Simulink con los paquetes de bloques (blocksets). Los programas realizados son mostrados en el anexo 1. [16]

1.5 FDP DE LOS INTERVALOS EVALUADOS EN EL CRUCE POR CERO

A continuación será propuesto Ruido Blanco Gaussiano como un proceso aleatorio, mismo que será introducido a los diferentes modelos de filtro, para obtener diferentes realizaciones con características Gaussianas a la salida, como se muestra en la figura 1.25.

Además será presentada la implementación computacional para la detección de cruce por cero de la realización del proceso Gaussiano a la salida de los diversos filtros, obteniendo el intervalo de tiempo entre cruces por cero. Posteriormente serán obtenidas las diferencias entre cruces por cero de la realización del proceso, de tal forma de obtener un histograma de los números de ocurrencias de la realización, como una función de la duración de los intervalos de cruce por cero.

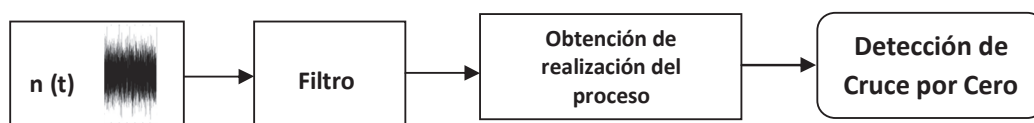


Figura 1.25 Diagrama de Procesamiento de Cruce por cero

1.5.1 EVALUACIÓN DE CRUCES POR CERO (CC)

Considerando una realización a la salida de un filtro específico, después de ser alimentado con ruido blanco gaussiano, donde dicha realización tiene un número de muestras limitado, y al no ser periódica se obtienen diferentes valores de ΔT en los cruces por cero de la realización, tal y como se muestra en la figura 1.26. [20]

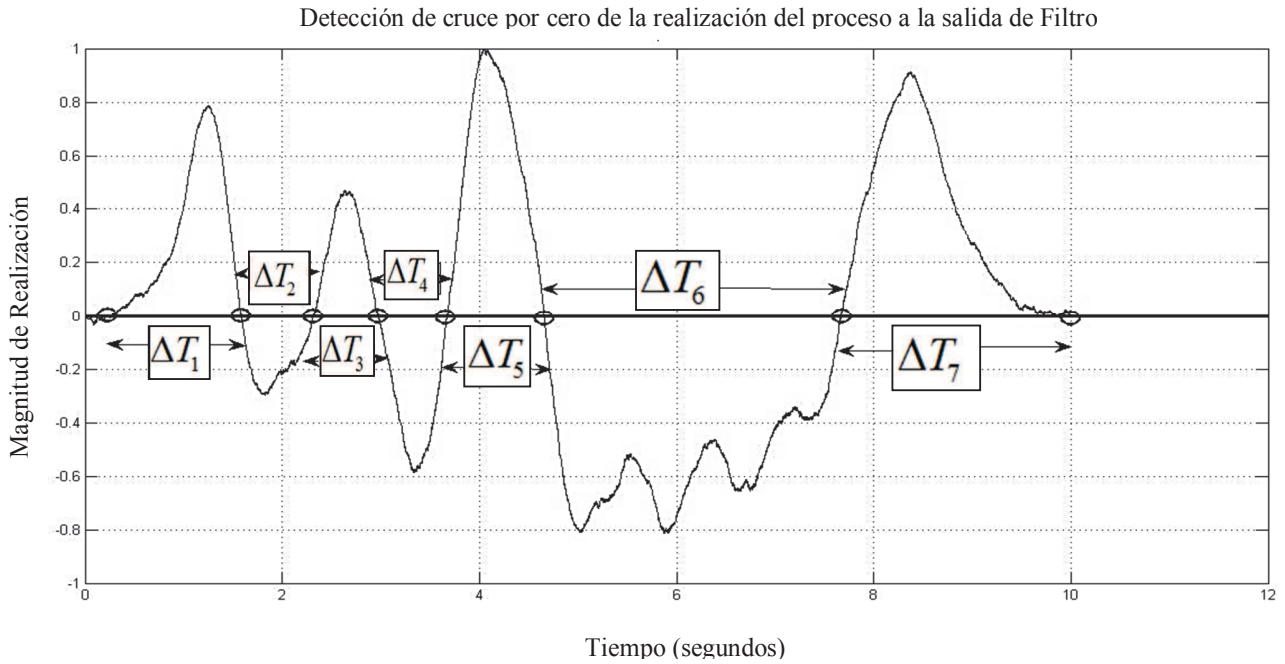


Figura 1.26 Detección de Cruce por cero de una realización en diferentes de intervalos de tiempo ΔT .

Un algoritmo computacional que permite determinar los cruces por cero para procesos aleatorios es la presentada en la ecuación (1-67).

$$Z_i = t_i \text{ Si } x(t_i) = 0 \quad (1-67)$$

Donde Z_i es un vector que contiene los cruces por cero del proceso $x(t_i)$, y t_i es el tiempo evaluado en el proceso. Además obtenemos una función de incrementos de ΔZ_i , que no es más que el valor distante o incrementos entre los cruces por cero y está dada por la ecuación (1-68).

$$\Delta T_n = Z_{n+1} - Z_n \text{ Para } n = i - 1 \quad (1-68)$$

En donde ΔT_n es el intervalo de tiempo o duración entre dos cruces por cero, este parámetro será de utilidad para calcular y graficar magnitud e histograma en las figuras siguientes.

Ahora evaluando Ruido Blanco Gaussiano como un proceso aleatorio, tal y como se muestra en la figura 1.27.

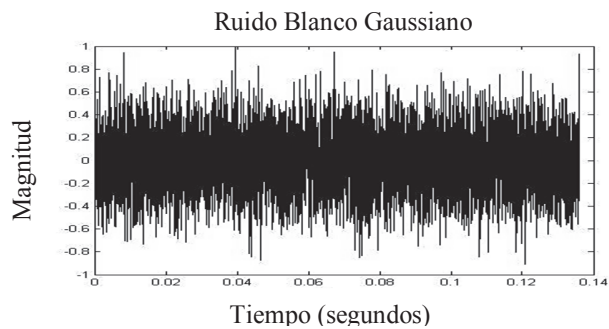


Figura 1.27 Ruido Blanco Gaussiano.

Es claro que si intentamos obtener los cruces por cero de Ruido Blanco Gaussiano sería imposible, esto es porque sabemos que esta clase de ruido tiene un espectro muy amplio o que tiende al infinito, por lo que los incrementos Δt de cruces por cero evaluados tienden a cero. Para esto evaluamos Ruido Blanco Gaussiano en la entrada de diferentes filtros para así obtener una realización a la salida de dichos filtros, evaluando los cruces por cero de esta realización. También es posible obtener los valores correspondientes de los cruces por cero como histogramas de los intervalos de cruce por cero. Dicho histograma consiste en una representación grafica con las componentes de cruces por cero repetidos dentro del intervalo de duración de la realización.

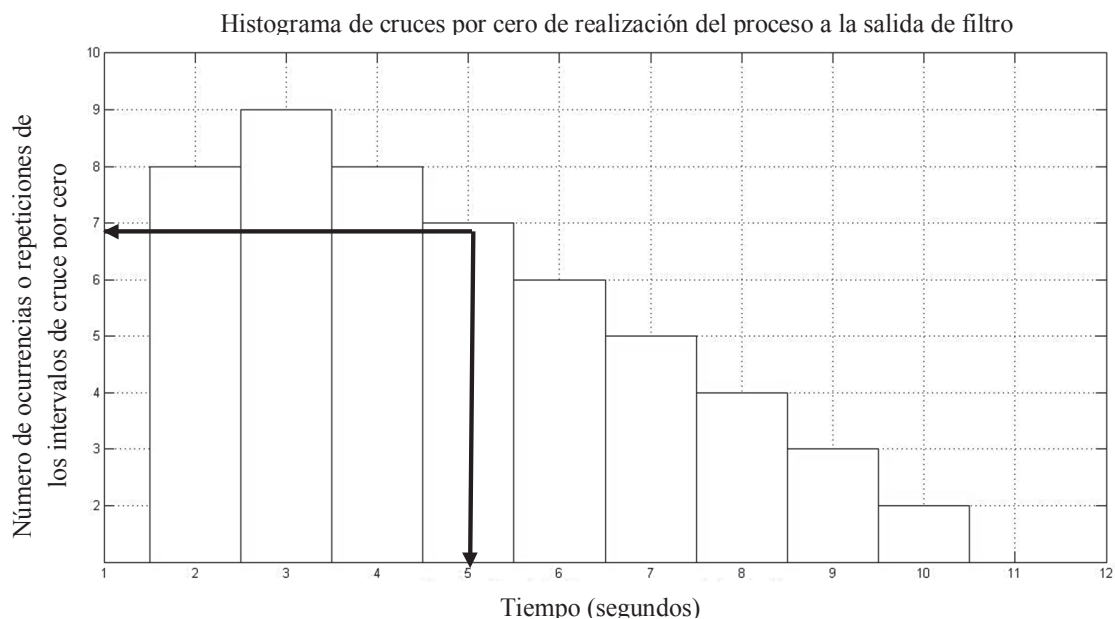


Figura 1.28 Representación de Histograma de los intervalos de cruce por cero de realización

En la figura 1.28 es obtenido un histograma que representa las repeticiones u ocurrencias de los valores de intervalos entre cruces por cero, por ejemplo, si el valor que hay entre dos cruces por cero es $\Delta T = 5$ segundos, entonces el histograma indica que este valor se ha repetido 7 veces durante el análisis de detección de cruce por cero en la realización completa, por tanto la suma de magnitudes del histograma (área bajo la curva) nos proporciona el número de total de cruces por cero de la realización. Otro dato proporcionado por el histograma de la figura 1.28, es que la suma de elementos del número de ocurrencias, es el número total de cruces por cero.

Si es evaluado el histograma de los intervalos de las realizaciones con un número infinito de cruces por cero a la salida de diferentes filtros (Filtro RC de Una, Dos y Tres Etapas, Modelos de Voz y Telemetría), y que además este histograma sea normalizado desde cero hasta infinito; el área bajo la curva de dicho histograma será igual a la unidad, lo que conlleva a que el histograma de los intervalos ahora puede ser representado como una función de densidad de probabilidad de los intervalos de cruce por cero. [2]

$$\int_0^{\infty} W(x)dx = 1 \quad (1-69)$$

Computacionalmente es posible generar una realización de un número suficientemente grande de elementos a la salida de los diversos filtros, de tal forma que sea obtenido un número mucho mayor de cruces por cero de la realización, y así aproximar el histograma a una función continua, es decir una fdp, esto es mostrado en la figura 1.29.

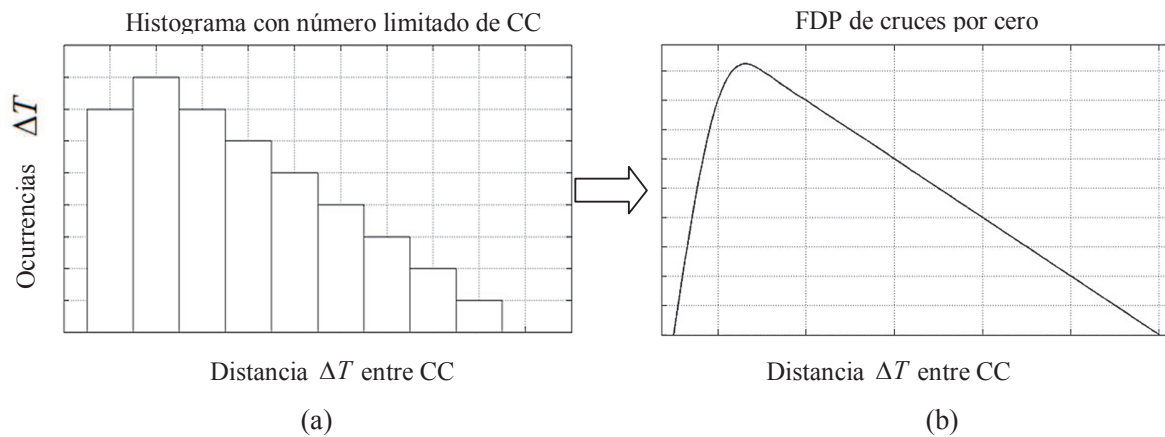


Figura 1.29 Graficas de: (a) Histograma de Intervalos de cruce por cero, con número pequeño de cruces por cero (b) Histograma como una función continua o FDP debido a una gran cantidad de cruces por cero de la realización.

A continuación, en las figuras 1-30 a 1-33, diversos modelos de filtros son afectados con ruido blanco Gaussiano, en donde a la salida serán obtenidas las realizaciones con gran cantidad de cruces por cero para cada realización. Aplicando las ecuaciones (1-67) y (1-68) a las realizaciones resultantes para diferentes valores de α , serán obtenidos los cruces por cero de la realización representadas como funciones de densidad de probabilidad continuas.

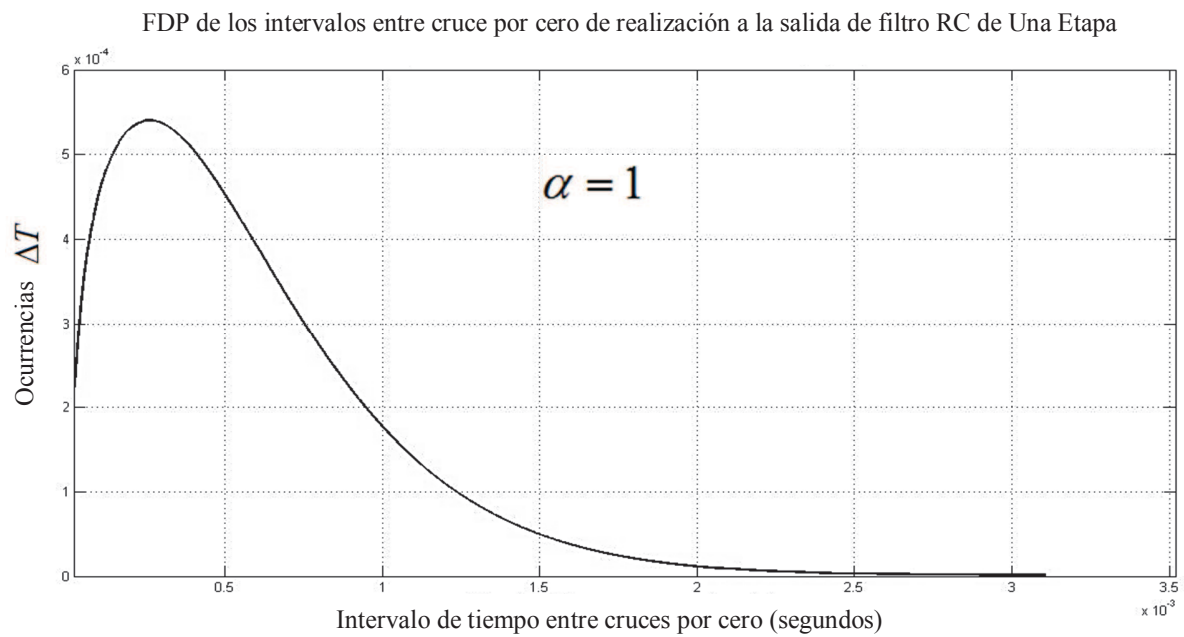


Figura 1.30. FDP de los intervalos entre cruces por cero de una realización a la salida de Filtro RC de Una etapa para $\alpha=1$

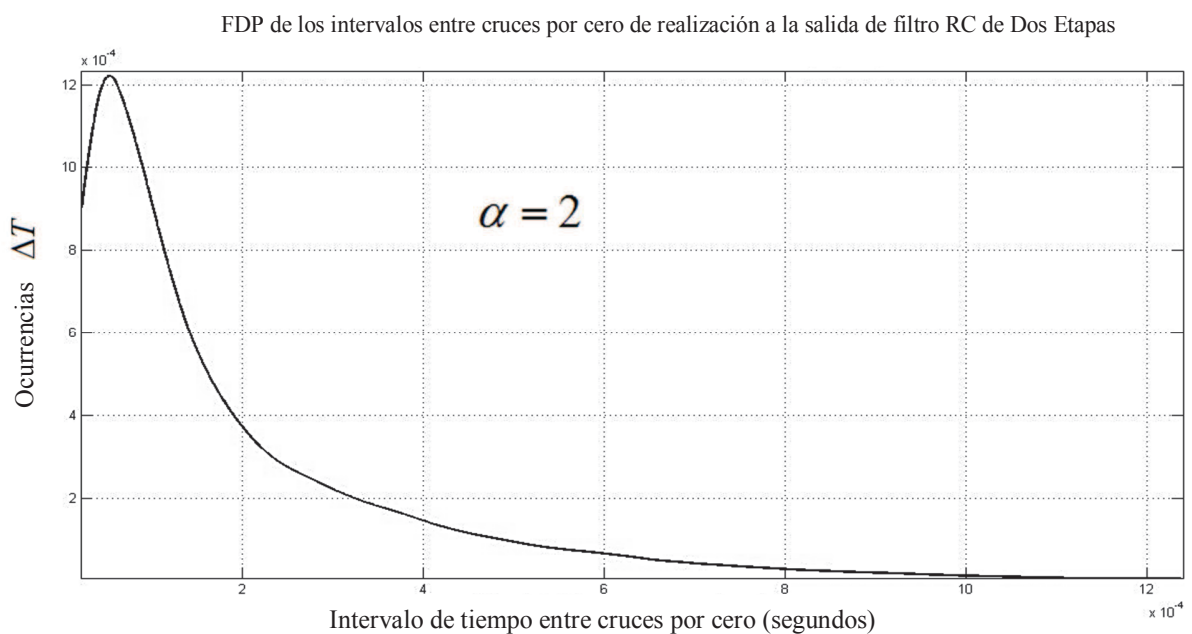


Figura 1.31 FDP de los intervalos entre cruces por cero de una realización a la salida de Filtro RC de Dos etapas para $\alpha=2$.

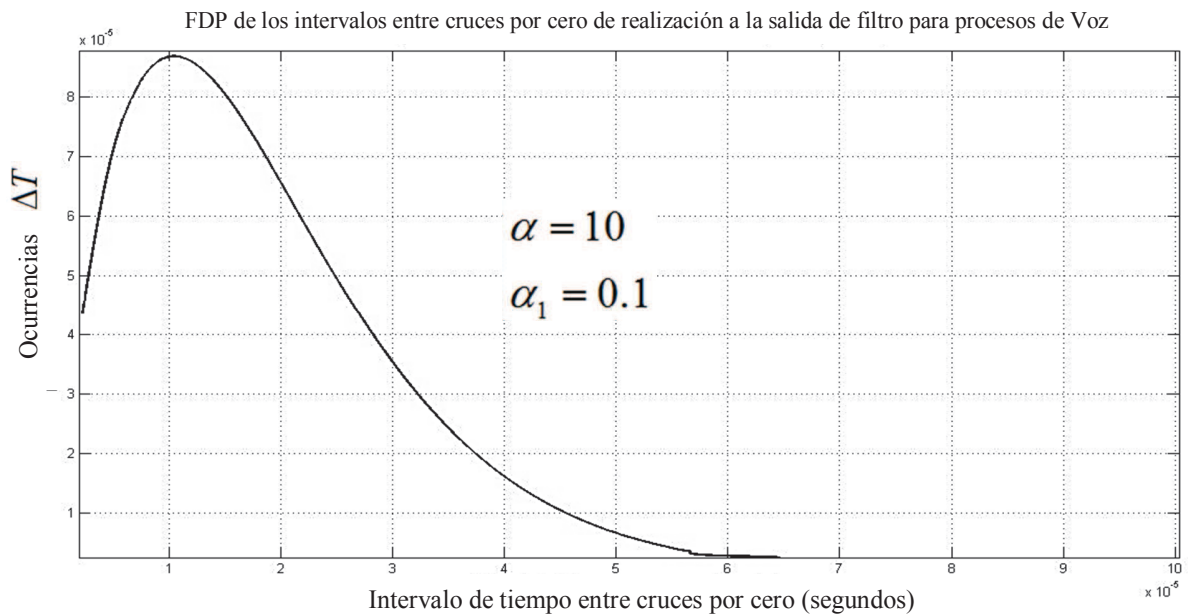


Figura 1.32 FDP de los intervalos de cruces por cero de realización a la salida de Modelo de Voz, para $\alpha=0.1$ y $\alpha_1=10$.

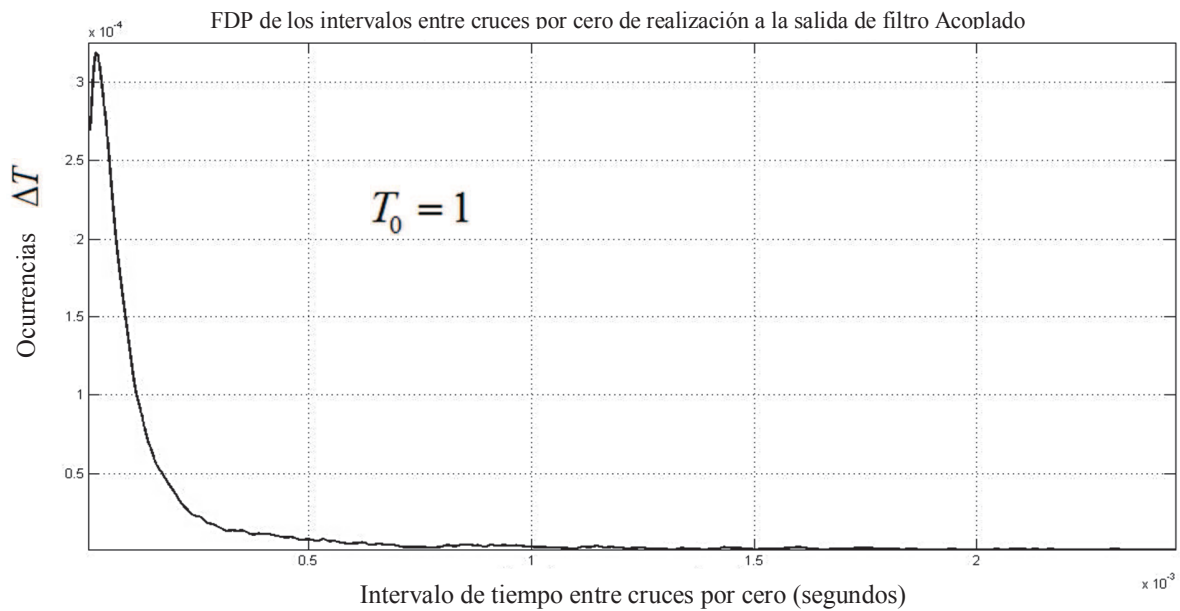


Figura 1.33 FDP de los intervalos entre cruces por cero de una realización a la salida de Filtro Acoplado con Señal de salida Triangular con $T_0=1$.

Es posible notar en las figuras anteriores que todos los casos de estimación de las fdp de los intervalos de cruces por cero incluyendo el de la figura 1.28, el valor de distancia entre cruce por cero de la realización siempre es mayor que cero, es decir, que la función no comienza en cero o el origen. Esto es claro ya que si la función comenzara desde cero implicaría que el tiempo del cruce por cero $Z_i = Z_{i+1} = 0$.

Es posible observar que la fdp de los intervalos de cruce por cero para modelos de procesos diferenciables como sería el caso del filtro RC de dos etapas de la figura 1.31, tiene menores componentes de cruce por cero, en comparación con los modelos de procesos diferenciables tal como filtro RC de una etapa y modelo para procesos de voz, y por tal motivo la loma generada está restringida para ciertos valores de cruce por cero. Por otro lado en las figuras 1.30 y 1.32, las fdp son en proporción más amplias, esto es, contienen mayor número de componentes de cruce por cero puesto que estos modelos tienen un mayor ancho de banda. Este ancho de banda es posible analizarlo determinando el espectro de potencia de la función de covarianza asociado a cada modelo.

1.6 MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE ERROR.

En el presente apartado son mencionados algunas estrategias para estimar y evaluar el error principalmente en la reconstrucción de realizaciones, en algunos casos estos tipos de métodos permite tener una estimación a partir de dos realizaciones, normalmente entre una realización limpia (estimador) o que no ha sufrido ninguna alteración y otra realización alterada (estimada), ya sea en presencia de ruido, interferencias, procesamiento o simplemente cuando han sufrido algún tipo de alteración como puede ser una conversión lineal o no lineal.

1.6.1 COEFICIENTE DE CORRELACIÓN.

El coeficiente de correlación es una medida estadística que proporciona información sobre la relación lineal existente entre dos variables aleatorias, es decir, es un índice que puede utilizarse para medir el grado de relación de dos variables siempre y cuando ambas sean cuantitativas. Básicamente, esta información se refiere a dos características de la relación lineal: la dirección o sentido y la cercanía o fuerza.

Aunque el coeficiente de correlación no es un estimador de error como tal, si proporciona un porcentaje de similitud entre dos realizaciones, sirviendo de referencia para evaluar la reconstrucción de una realización. El algoritmo de coeficiente de correlación es obtenida por: [24]

$$r = \frac{\sum_m (A_m - \bar{A})(B_m - \bar{B})}{\sqrt{\left(\sum_m (A_m - \bar{A})^2\right)\left(\sum_m (B_m - \bar{B})^2\right)}} \quad (1-70)$$

Donde A_m y B_m son dos realizaciones discretas conformadas de m elementos; $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son el promedio estadístico de las realizaciones de los procesos, r es el coeficiente de correlación.

Si el valor del coeficiente de correlación es la unidad implica que los procesos son idénticos, bajo este criterio la correlación puede ser utilizada también como una medida de la dependencia estadística entre dos realizaciones de procesos aleatorios.

El valor del índice de correlación normalizado varía en el intervalo $-1,1$:

- Si $r = 1$, existe una correlación positiva perfecta. El índice positivo indica una dependencia total entre las dos variables denominada relación directa: cuando una de ellas aumenta, la otra también lo hace en proporción constante.
- Si $0 < r < 1$, existe una correlación positiva.
- Si $r = 0$, no existe relación lineal. Pero esto no necesariamente implica que las variables son independientes: pueden existir todavía relaciones no lineales entre las dos variables.
- Si $-1 < r < 0$, existe una correlación negativa.
- Si $r = -1$, existe una correlación negativa perfecta. El índice negativo indica una dependencia total entre las dos variables llamada relación inversa: cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en proporción constante.

1.6.2 ERROR CUADRÁTICO MEDIO.

El error cuadrático medio ECM mide el promedio de los cuadrados de los "errores". El error cuadrático medio evalúa la calidad de un estimador en términos de su variación. Es decir: [25]

$$ECM = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] \quad (1-71)$$

Donde $(X_1, \dots, X_n)$ son variables aleatorias del estimador X , y $\bar{X}$ es el valor promedio estimado, n es la cantidad de variables aleatorias del estimador.

1.6.3 LA VARIANZA CONDICIONAL

La regla de la esperanza matemática condicional es un procedimiento que permite la reconstrucción de la realización a partir de la multitud de sus muestras, conjuntamente posee una función que determina el error de reconstrucción tanto de la región de interpolación como la región de extrapolación, la función que estima el error de reconstrucción se denomina función de varianza condicional la cual es mostrada en la ecuación (1-72) usada para caso no estacionario. Es posible observar que la función de varianza condicional solo depende de la función de covarianza del proceso y del intervalo de tiempo entre muestras.

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t) \quad (1-72a)$$

En caso estacionario:

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t - T_i) a_{ij} K_x(T_j - t) \quad (1-72b)$$

1.7 COMENTARIOS

En este primer capítulo fueron descritos algunos conceptos importantes que serán de utilidad en el desarrollo de la presente investigación. Como ejemplo de estos conceptos fueron mencionados la existencia de modelos de procesos no-diferenciables, mencionando los más comunes, comprobando su diferenciabilidad y comparando con modelos de procesos diferenciables, llegando a la conclusión de que los modelos de procesos no-diferenciables están asociados a procesos caóticos, es decir, procesos con valores de dispersión o varianza muy grandes y por tanto con espectro amplio. En contraste con modelos de procesos diferenciales los cuales tiene una respuesta suave debido a su varianza constante y pequeña. También fueron analizados los parámetro determinados por α en algunos modelos de procesos, este parámetro influye directamente en el ancho de banda del espectro de potencia, mismo que se incrementará si este parámetro incrementa también.

Otra característica estadística para comparación y evaluación de modelos de procesos diferenciales así como no diferenciales, fue el desarrollo computacional del algoritmo de detección de cruce por cero de una realización a la salida de los diversos modelos y en esencia sus funciones de densidad de probabilidad. Observando que dichas FDPs de los intervalos de cruce por cero para procesos diferenciables está limitada a solo algunos valores de cruce por cero, esto debido a la respuesta suave de los modelos de procesos diferenciables. En comparación los modelos de procesos no diferenciables poseen densidades espectrales más amplias y por tanto tienen mayores componentes de intervalos de cruce por cero en su función de densidad de probabilidad.

Fueron mencionados algunos estimadores de error que serán de gran utilidad en la evaluación de la reconstrucción de las realizaciones en la multitud de sus muestras, utilizando diversos modelos de procesos diferenciables y no diferenciables para capítulos posteriores.



CAPÍTULO 2

MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS GAUSSIANOS DIFERENCIABLES Y NO-DIFERENCIABLES UTILIZANDO LA REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL.

Si se tiene un proceso aleatorio $x(t)$ caracterizado por su función de densidad de probabilidad FDP multidimensional: $W[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)]$, y que una realización de este proceso es discretizado en los instantes de tiempo $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$. Por lo tanto existe un conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$. Esta información cambia el dato inicial del proceso aleatorio, es decir sus momentos iniciales y centrales, así como sus densidades de probabilidad. Estas nuevas funciones y densidades de probabilidad se denominan condicionales (o posteriori), y dependerán de cada muestra $x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$.

$$W[x(t) | X, T] = W[x(t) | x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)] \quad (2-1)$$

$$\tilde{m}(t) = \langle x(t) | X, T \rangle = \langle x(t) | X(T_1), X(T_2), \dots, X(T_N) \rangle = \int x(t) W[x(t) | X, T] dx(t) \quad (2-2)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 | X, T \rangle = \int (x(t) - m(t))^2 W[x(t) | X, T] dx(t) \quad (2-3)$$

La reconstrucción de la señal dependerá del conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ y de conocer su fdp $W[x(t), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)]$. La regla de la esperanza matemática condicional asegura el mínimo error de la estimación para las variables aleatorias con fdp arbitraria.

$$\tilde{m}(t) = \langle x(t) | X, T \rangle, \text{ es la función de reconstrucción}$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 | X, T \rangle, \text{ es la función de error de reconstrucción}$$

El caso más general de un proceso *Gaussiano no estacionario* $x(t)$, con la *esperanza matemática* $m(t)$, la *varianza* $\sigma^2(t)$, y *función de covarianza* $K(t_i, t_j)$ de la realización del proceso muestreado.

$$W = [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)] =$$

$$(2\pi)^{-m/2} [Det \mathbf{K}_x(t_i, t_j)]^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [x(T_i) - m(T_i)] a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \right\} \quad (2-4)$$

Donde $\text{Det } \mathbf{K}(t_i, t_j)$ es el determinante de la matriz de covarianza.

$$\mathbf{K}(T_i, T_j) = \begin{bmatrix} K(T_1, T_1) & K(T_1, T_2) & \cdots & K(T_1, T_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(T_m, T_1) & K(T_m, T_2) & \cdots & K(T_m, T_m) \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

Y $\mathbf{a}$ es la matriz inversa de covarianza con elementos a_{ij} .

$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{K}^{-1}(t_i, t_j) \quad (2-6)$$

Fijando el conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ y las características estadísticas del proceso condicional, se tiene el proceso Gaussiano condicional $\tilde{x}(t)$ (para el caso no estacionario) descrito por: [17]

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \quad (2-7)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} K(T_j, t) \quad (2-8)$$

$$\tilde{K}(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t_1, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t_2) \quad (2-9)$$

En donde (2-7), (2-8) y (2-9) los argumentos son diferentes para $a_{ij} = [K(T_i, T_j)]^{-1}$. Con el procedimiento de reconstrucción que utiliza la regla de la esperanza matemática condicional se resuelve dos problemas prácticos:

- Dado un conjunto de muestras de un proceso estocástico inicial, es posible encontrar su función de reconstrucción y su función de error de reconstrucción.
- Dado algunas condiciones sobre la calidad de reconstrucción, es posible obtener: los intervalos de muestreo y la función de reconstrucción óptima para el proceso estocástico inicial.
- Al considerar la reconstrucción de un proceso condicional cuando $t > t_N$ se obtiene el comportamiento de la reconstrucción del proceso en la región de extrapolación, es decir fuera de la región de muestreo; siempre y cuando el número de muestras sea finito. De igual manera, si $T_i < T_N$, en donde $i = 1, \dots, N-1$ se puede observar el comportamiento en la región de interpolación, es decir, dentro de la región de muestreo.

2.1 PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE FILTRO RC DE UNA ETAPA

Considerando el PMR con las realizaciones de los procesos Gaussianos diferenciables, así como no diferenciables para comparar resultados entre ambos. Para el caso *estacionario* tenemos que la función de esperanza matemática y la varianza no dependen del tiempo, de tal forma que $m(t) = 0$, y $\sigma^2(t) = 1$, además para el proceso Markoviano con función de covarianza $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$. Con estas condiciones las ecuaciones son reescritas como:

$$\hat{x}(t) = \tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N \exp\{-\alpha|(t - T_i)|\} a_{ij} \quad (2-10)$$

$$\hat{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \exp(-\alpha|t - T_i|) a_{ij} \exp(-\alpha|T_j - t|) \quad (2-11)$$

A continuación se muestra un ejemplo con cuatro valores de muestras arbitrarias equidistantes cada 0.5 segundos dentro de un intervalo de 1,5 segundos, tal y como se muestra en la tabla 2.1, y que introduciéndolas en las ecuaciones (2-10) y (2-11), obtenemos la reconstrucción y error de reconstrucción de una realización a partir de sus muestras.

Valor de la Muestra	Instante de Tiempo
$x(T_i)$	T_i [seg]
$x(T_1) = 1$	$T_1 = 0$
$x(T_2) = 1.4$	$T_2 = 0.5$
$x(T_3) = 0.6$	$T_3 = 1$
$x(T_4) = 1.2$	$T_4 = 1.5$

Tabla 2.1 Ejemplo con cuatro Valores de Muestras $\Delta T = 0.5$

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro RC de Una Etapa

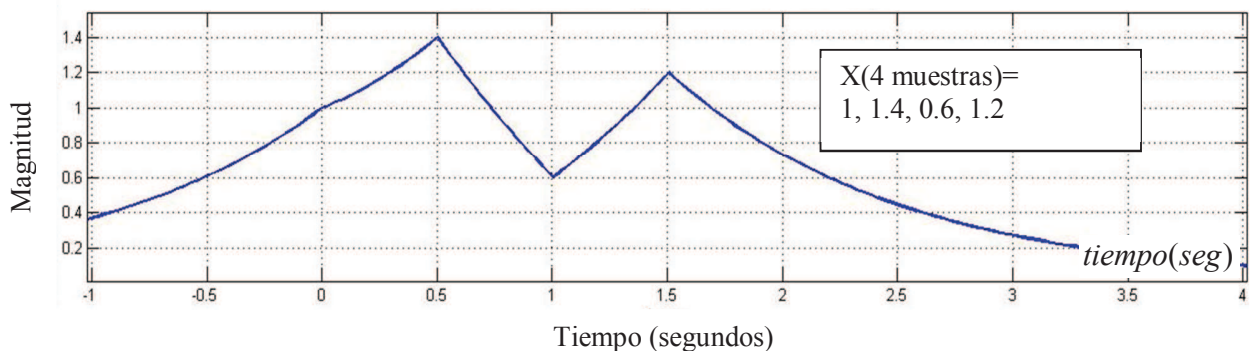


Figura 2.1 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización del proceso con cuatro muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de Una Etapa, $\alpha = 1$.

Función de Error de Reconstrucción $\widetilde{\sigma}^2(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro RC de Una Etapa

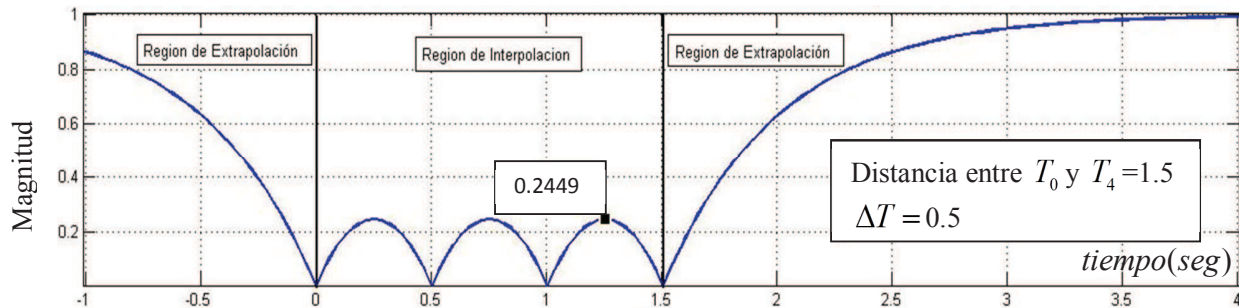


Figura 2.2 Función de Error de Reconstrucción de realización del proceso con cuatro muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de Una Etapa, $\alpha = 1$.

De igual manera en la figura 2.2 es presentada la función de varianza condicional como una función de error, que depende directamente de la distancia entre las muestras presentadas, es decir $\Delta T = 0.5$ y no de la distancia entre la primera y última muestra. En este caso el valor del error es de $\widetilde{\sigma}^2(t) = 0.2449$.

Valor de la Muestra	Instante de Tiempo
$x(T_i)$	T_i [seg]
$x(T_1) = 1$	$T_1 = 0$
$x(T_2) = 1.4$	$T_2 = 0.1$
$x(T_3) = 0.6$	$T_3 = 0.2$
$x(T_4) = 1.2$	$T_4 = 0.3$
$x(T_5) = 5$	$T_5 = 0.4$
$x(T_6) = 0.1$	$T_6 = 0.5$
$x(T_7) = 5$	$T_7 = 0.6$
$x(T_8) = 3$	$T_8 = 0.7$
$x(T_9) = 1$	$T_9 = 0.8$
$x(T_{10}) = 5$	$T_{10} = 0.9$
$x(T_{11}) = 0.1$	$T_{11} = 1$
$x(T_{12}) = 5$	$T_{12} = 1.1$
$x(T_{13}) = 7$	$T_{13} = 1.2$
$x(T_{14}) = 8$	$T_{14} = 1.3$
$x(T_{15}) = 9$	$T_{15} = 1.4$
$x(T_{16}) = 2$	$T_{16} = 1.5$

Tabla 2.2 Ejemplo con 16 Valores de Muestras $\Delta T = 0.1$

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro RC de Una Etapa

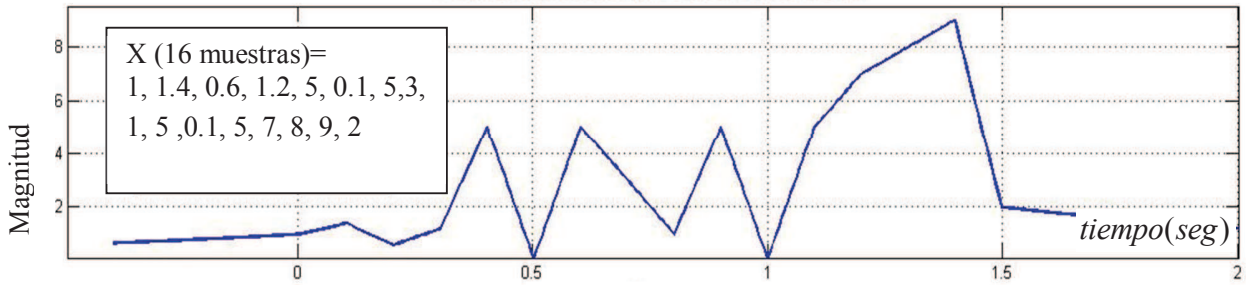


Figura 2.3 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de realización del proceso con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Una Etapa, $\alpha = 1$.

Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro RC de Una Etapa

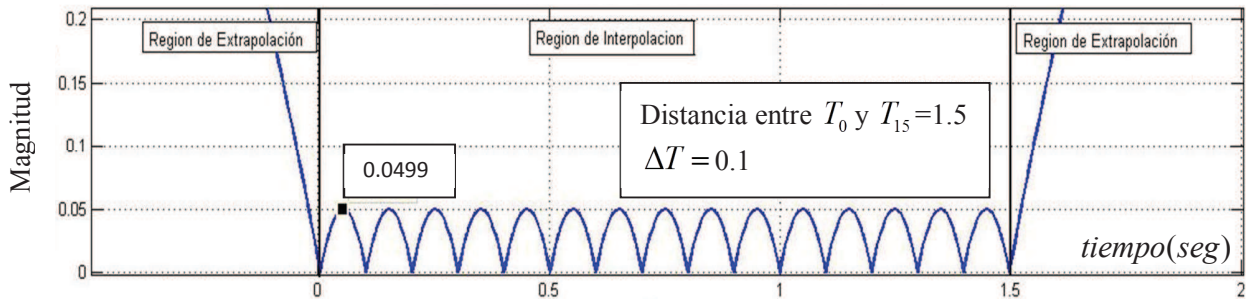


Figura 2.4 Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización del proceso con cuatro muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Una Etapa, $\alpha = 1$.

En la tabla 2.2 son propuestos valores arbitrarios de muestras, en este caso son 16 muestras dentro del mismo intervalo de 1.5 segundos. La figura 2.3 muestra la función de reconstrucción $\tilde{m}(t)$, en esta variante el intervalo entre muestra es de $\Delta T = 0.1$ lo que contribuye a una reducción en la función de error de reconstrucción. La función de error de reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ presentada en la figura 2.4 muestra como el error disminuye considerablemente con respecto al de la figura 2.2 debido a que el valor de la distancia entre las muestras disminuye también, esto es debido al intervalo de muestreo $\Delta T = 0.1$.

Cabe recalcar que tanto para la figura 2.2 y la figura 2.4, la distancia entre la primera y última muestra ($T_1 - T_4$) y ($T_1 - T_{16}$) respectivamente es la misma (1.5 seg).

Otra manera de poder manipular la reconstrucción y la función de error de reconstrucción consiste en manipular diversos tipos de funciones de covarianza y los parámetros de ancho de banda asociados a estas funciones.

2.2 PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE FILTRO RC DE DOS ETAPAS.

Los filtros RC de dos etapas tienen una respuesta más suave cuando en la entrada son alimentados con ruido blanco y su función de covarianza es determinada por la ecuación (2-12); este filtro posee dos etapas de filtro RC de una etapa acopladas por un buffer tal y como se muestra en la figura 2.5, y en donde ambas etapas comparten el mismo parámetro de ancho de banda α :

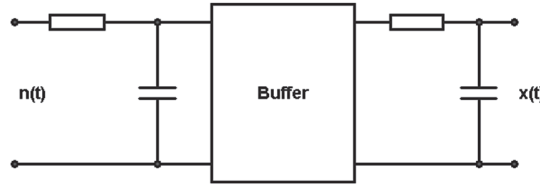


Figura. 2.5 Diagrama de Filtro RC pasa-bajas de Dos etapas

$$R(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)\exp\{-\alpha|\tau|\}; S(\omega) = \frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \quad (2-12)$$

Por tanto el tiempo de covarianza para esta función de covarianza está determinada por:

$$\tau_c = \int_0^\infty |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^\infty (1 + \alpha|\tau|)\exp\{-\alpha|\tau|\} d\tau = \frac{2}{\alpha} \quad (2-13)$$

Nuevamente el tiempo de covarianza depende del valor $\alpha = 1/RC$; a continuación se presenta la función de covarianza del proceso $R(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)\exp\{-\alpha|\tau|\}$ y su espectro de potencia para diversos valores de α .

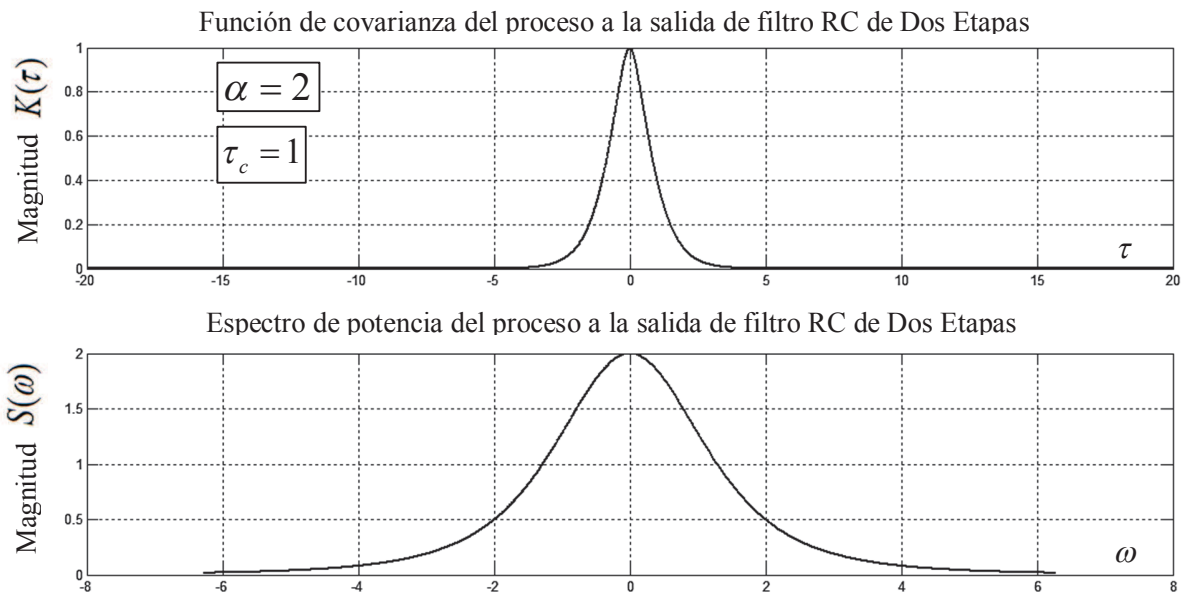


Figura 2.6 Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro RC de Dos etapas para $\alpha = 2$.

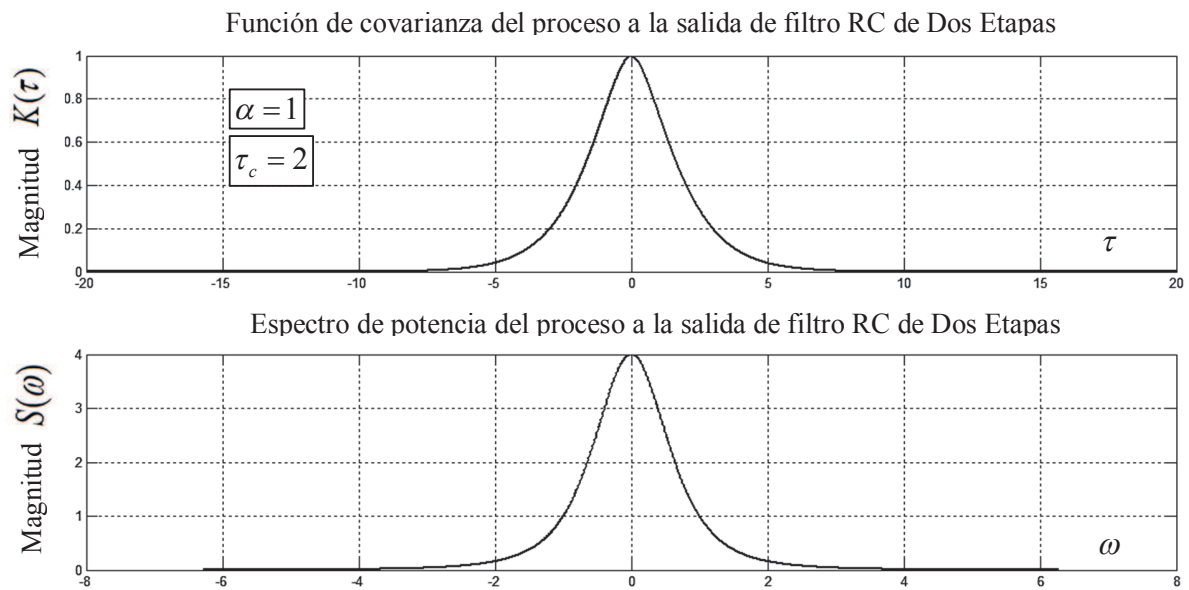


Figura 2.7 Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro RC de dos etapas para $\alpha = 1$.

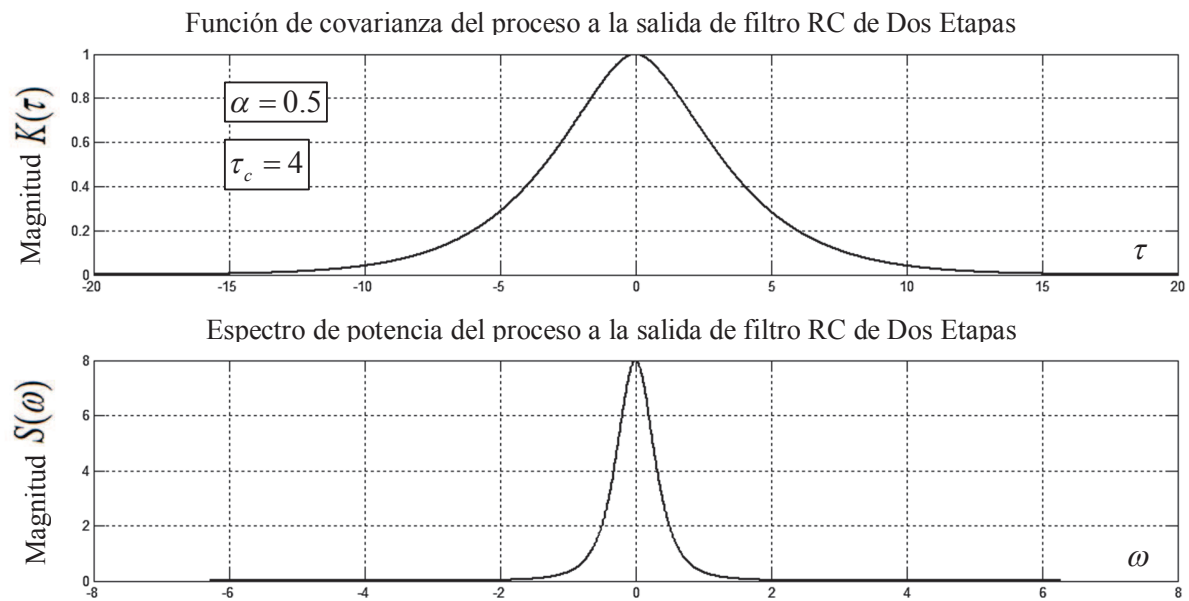


Figura 2.8 Función de Covarianza y Espectro de Potencia del proceso a la salida de filtro RC de dos etapas para $\alpha = 0.5$.

En las figuras 2.6, 2.7 y 2.8 es posible observar la influencia del parámetro determinado por α sobre el tiempo de covarianza y análogamente sobre su espectro de potencia, en donde para mayores valores de α mayor será el espectro de potencia y menor será el tiempo de covarianza. En esencia el tiempo de covarianza es el tiempo de descarga del filtro.

Para este caso, es considerada la función de covarianza normalizada $R(\tau)$ a la salida del filtro RC de dos etapas, y además será incluida en la regla de la esperanza matemática condicional para la reconstrucción de una realización en la multitud de sus muestras, en las ecuaciones (2-14) y (2-15) es posible observar este caso particular.

$$\hat{x}(t) = \tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N (1 + \alpha|(t - T_i)|) \exp\{-\alpha|(t - T_i)|\} a_{ij} \quad (2-14)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (1 + \alpha|(t - T_i)|) \exp\{-\alpha|(t - T_i)|\} a_{ij} (1 + \alpha|(T_j - t)|) \exp\{-\alpha|(T_j - t)|\} \quad (2-15)$$

Nuevamente son retomados los valores de la tabla 2.1 que corresponden a valores de muestras arbitrarios y que al introducirlos en la regla de la esperanza matemática condicional utilizando la función de covarianza a la salida de filtro RC de dos etapas, serán obtenidas las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción de las figuras 2.9 y 2.10 respectivamente.

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro RC de Dos Etapas

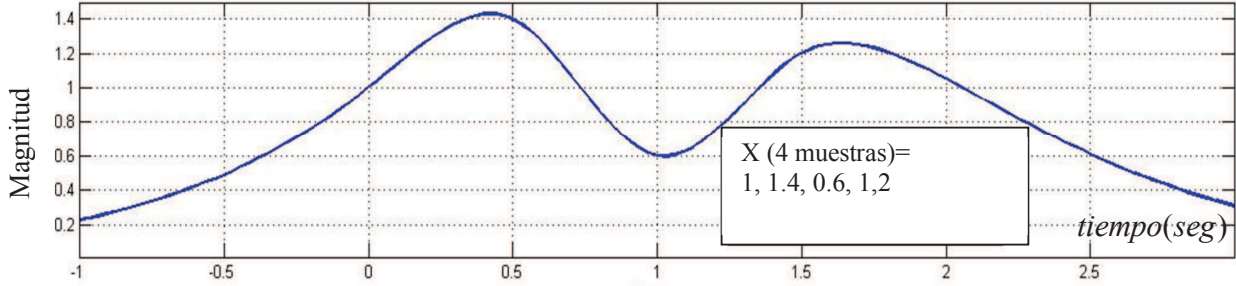


Figura 2.9 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de realización del proceso con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de dos Etapas y $\alpha = 2$.

Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro RC de Dos Etapas

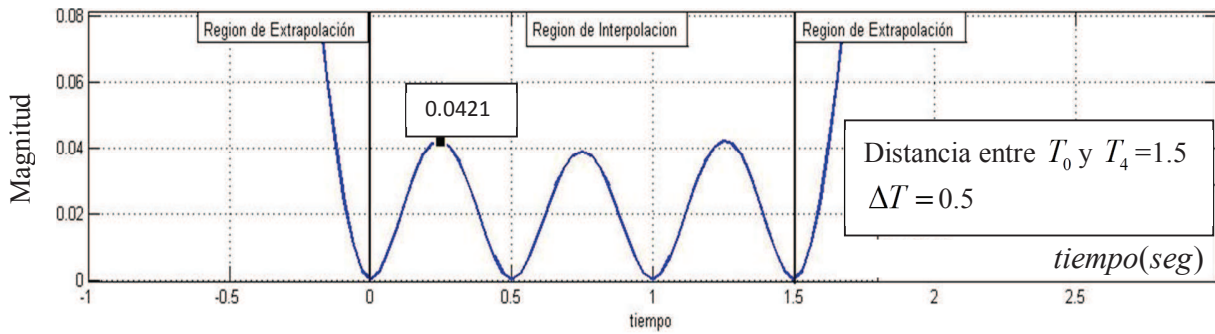


Figura 2.10 Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ del proceso con cuatro muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de Dos Etapas y $\alpha = 2$.

Comparando con la Figura 2.2 y Figura 2.10, observamos que tenemos el mismo número de muestras y los mismos valores de muestras así como también el mismo intervalo entre la primera y última muestra, sin embargo se observa reducción en el error de reconstrucción considerablemente ($\tilde{\sigma}^2(t) = 0.042$) debido a las características de nuestra función de covarianza.

Utilizando los valores de la tabla 2.2 y dentro del intervalo entre muestras de $\Delta T = 0.1$ para nuestra función de covarianza a la salida de filtro RC de dos etapas, serán obtenidas las figuras 2.11 y 2.12 correspondientes a las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción de una realización en la multitud de sus muestras.

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro RC de Dos Etapas

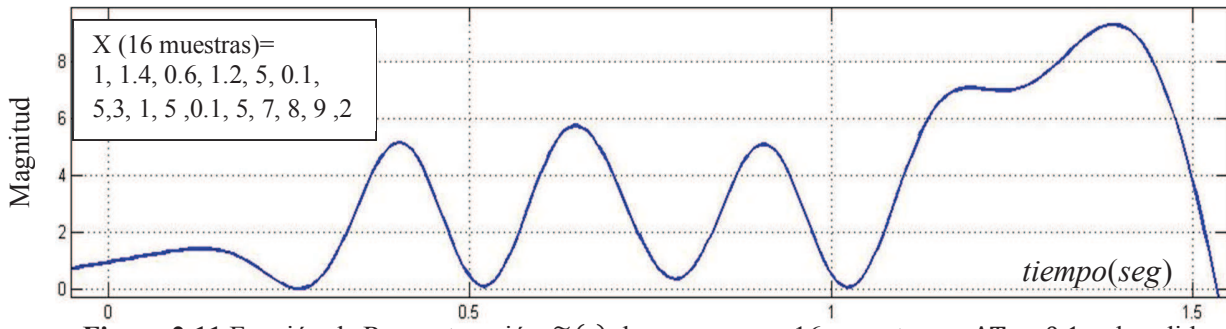


Figura 2.11 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de proceso con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Dos Etapas y $\alpha = 2$.

Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro RC de Dos Etapas

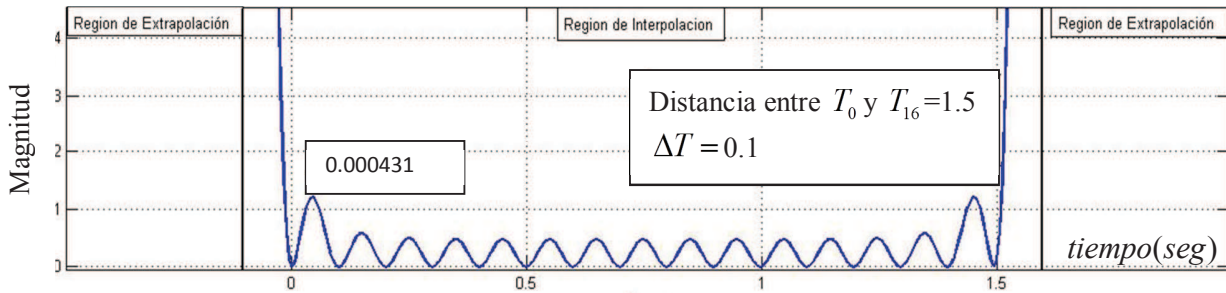


Figura. 2-12 Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ del proceso con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Dos Etapas y $\alpha = 2$.

En la figura 2-12 se puede apreciar una reducción del error de reconstrucción debido a dos factores: la función de covarianza presentada como filtro RC de dos etapas y el número de muestras introducidas dentro de la Región de Interpolación, de tal modo que $\tilde{\sigma}^2(t) = 0.0004391$.

2.3 PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO EN LA SALIDA DEL FILTRO RC DE TRES ETAPAS.

A continuación, se procede a utilizar un modelo de proceso más suave y por tanto diferencial, en este caso la función de covarianza a la salida del filtro RC de tres Etapas, evaluando su función de reconstrucción y error de reconstrucción. En la figura 2.13 es mostrado el circuito equivalente que consta de tres etapas de filtro pasa bajas acoplado por dos etapas de buffer y que además comparten el mismo parámetro de ancho de banda definido por α .

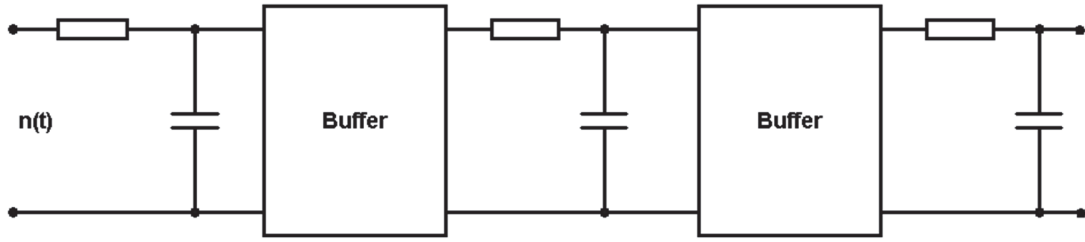


Figura. 2.13 Diagrama de Filtro RC pasa-bajas de Tres Etapas.

$$R(\tau) = (1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3})\exp\{-\alpha|\tau|\}; S_x = \frac{16\alpha^5}{(\alpha^2 + \omega^2)^3} \quad (2-16)$$

Por tanto el tiempo de covarianza de función la de covarianza es:

$$\tau_c = \int_0^\infty |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^\infty (1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3})\exp\{-\alpha|\tau|\} d\tau = \frac{8}{3\alpha} \quad (2-17)$$

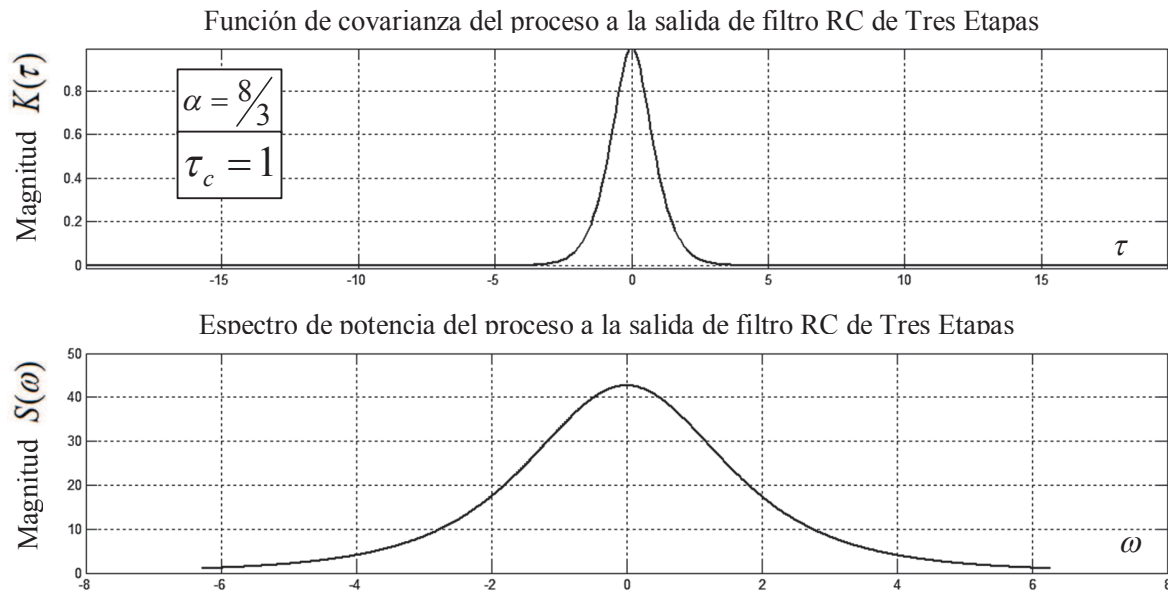


Figura. 2.14 Función de Covarianza y Espectro de Potencia de proceso a la salida de Filtro RC de Tres Etapas para $\alpha = 8/3$.

En las figuras 2.14 y 2.15 es posible observar que la respuesta de la función de covarianza a la salida de filtro RC de tres etapas es mucho más suave en comparación a la función de covarianza a la salida de filtro RC de dos etapas, y por tanto su espectro de potencia se encuentra restringido. Por otro lado continúa cumpliéndose que para valores grandes de α , el tiempo de covarianza se reduce y el espectro se expande.

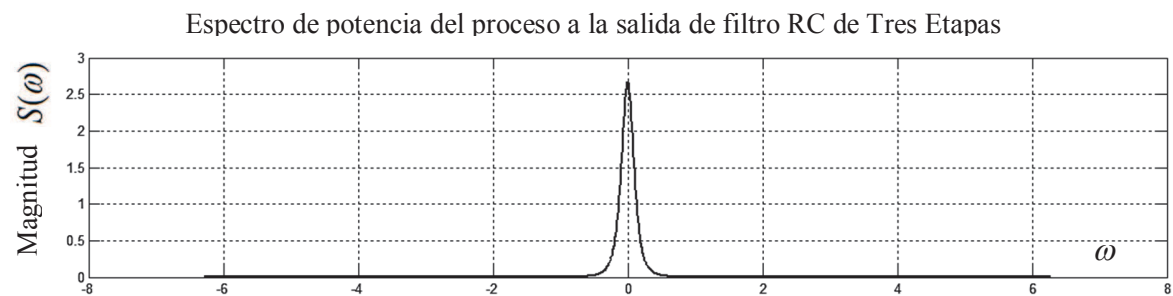
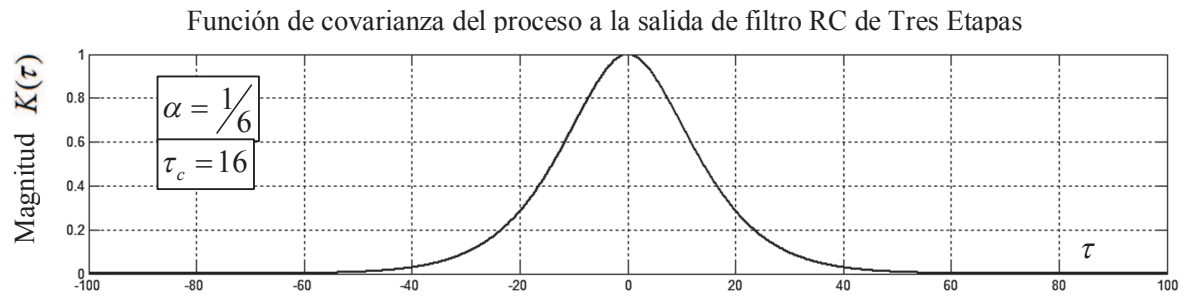


Figura. 2.15 Función de Covarianza y Espectro de Potencia de proceso a la salida de filtro RC de Tres Etapas para $\alpha = 1/6$.

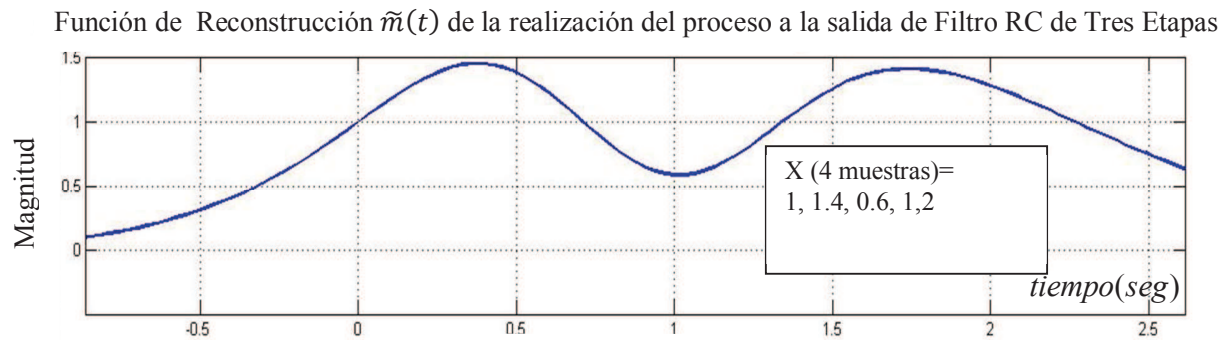


Figura. 2.16 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de Tres Etapas para $\alpha = 8/3$

Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización del proceso a la salida de Filtro RC de Tres Etapas

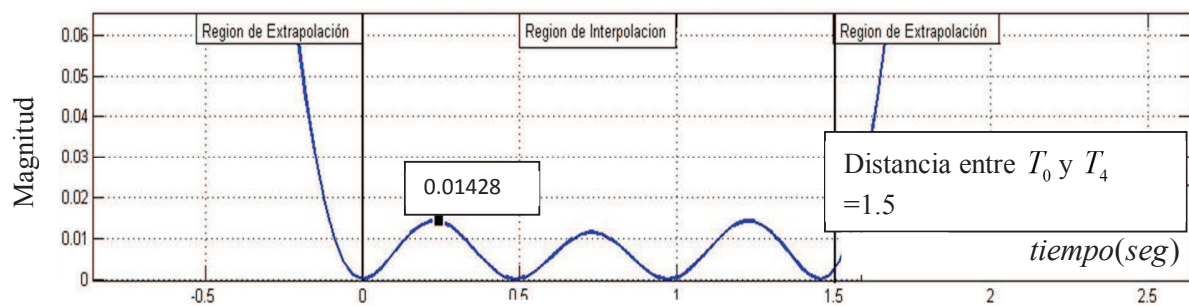


Figura. 2.17 Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro RC de Tres Etapas para $\alpha = 8/3$

En las figuras 2.17 y 2.18 es posible observar que la función de reconstrucción y error de reconstrucción utilizando los valores de muestras arbitrarios con la función de covarianza a la salida de filtro RC de tres etapas proporciona son más suaves para diversos valores de α debido a la naturaleza misma de la función de covarianza. Por otro lado en la figuras 2.18 y 2.19 el

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro RC de Tres Etapas

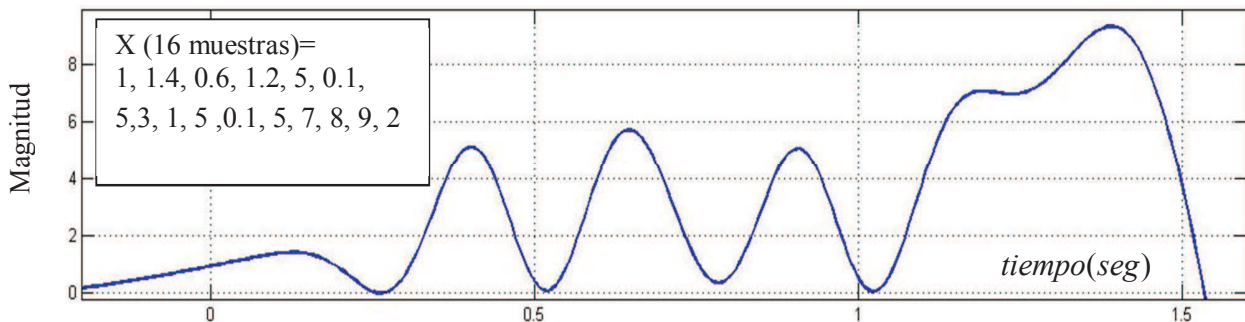


Figura. 2.18 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Tres Etapas y $\alpha = 8/3$

Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización del proceso a la salida de Filtro RC de Tres Etapas

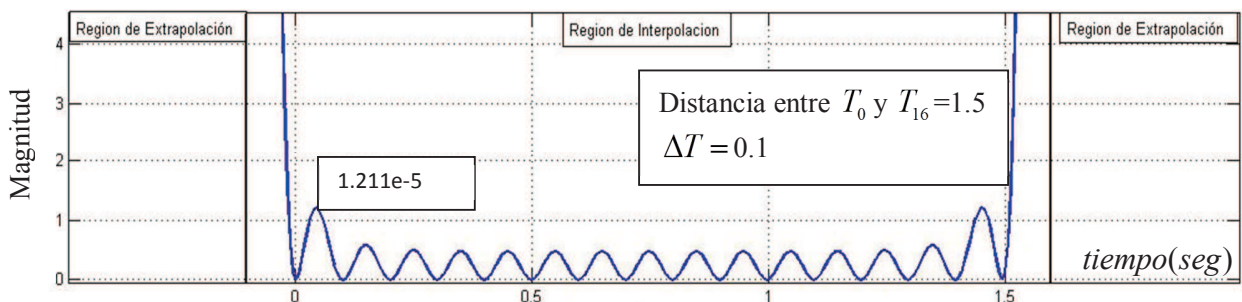


Figura. 2.19 Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro RC de Tres Etapas y $\alpha = 8/3$.

En la figura 2.19 es posible observar que hay picos más altos de la función de error (en el límite de la región de interpolación), en comparación con los picos ubicados a la mitad de la función de error, esto se debe a la influencia de todas las muestras para reconstruir la realización es decir, la muestra ubicada en $T=0$, tiene menor influencia en la muestra en $T=0.5$ debido a la distancia desde $T=0$ hasta $T=5$, sin embargo, la influencia de la muestra en de $T=0$ es mucho mayor para la muestra $T=0.1$, debido a la cercanía con esta muestra. Esta influencia la determina la función de covarianza. Una característica importante en la comparación de los resultados de las figuras 2.21 respecto 2.22 es observada en las funciones de covarianza usadas, puesto que la reconstrucción de la realización es mucho más suave en el uso del modelo de telemetría lo que implica un tiempo de covarianza mayor respecto al modelo de voz, puesto que este modelo posee un tiempo de covarianza muy corto, es decir un tiempo de descarga de filtro bastante abrupta, lo que implica una reconstrucción caótica en la realización.

2.4 PMR DE LA REALIZACIÓN A LA SALIDA DE FILTRO PARA PROCESOS DE TELEMETRÍA.

Es presentado a continuación otro modelo utilizado en el tratamiento de señales de medición, a este modelo se le conoce como modelo para procesos de Telemetría mismo que se ha demostrado como diferenciable y por tanto de respuesta muy suave. Este modelo de procesos es utilizado para señales que no realizan cambios abruptos en el tiempo, donde cuya función de covarianza y espectro de potencia están dados por la ecuación (2-18) y (2-19). [7]

$$S(\omega) = \frac{\alpha \alpha_1 \omega N_0}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)(\omega^2 + \alpha^2)} \quad (2-18)$$

$$K(\tau) = \frac{\alpha \alpha_1 N_0}{4(\alpha_1^2 - \alpha^2)} (\alpha_1 e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\alpha_1|\tau|}) \quad (2-19)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha \alpha_1 N_0}{4(\alpha_1^2 - \alpha^2)} \quad (2-20)$$

Donde N_0 = Densidad espectral del Ruido ;

τ = variable independiente de la función de covarianza;

α_1 y α = coeficientes de filtro (el tiempo de covarianza dependen de estos coeficientes)

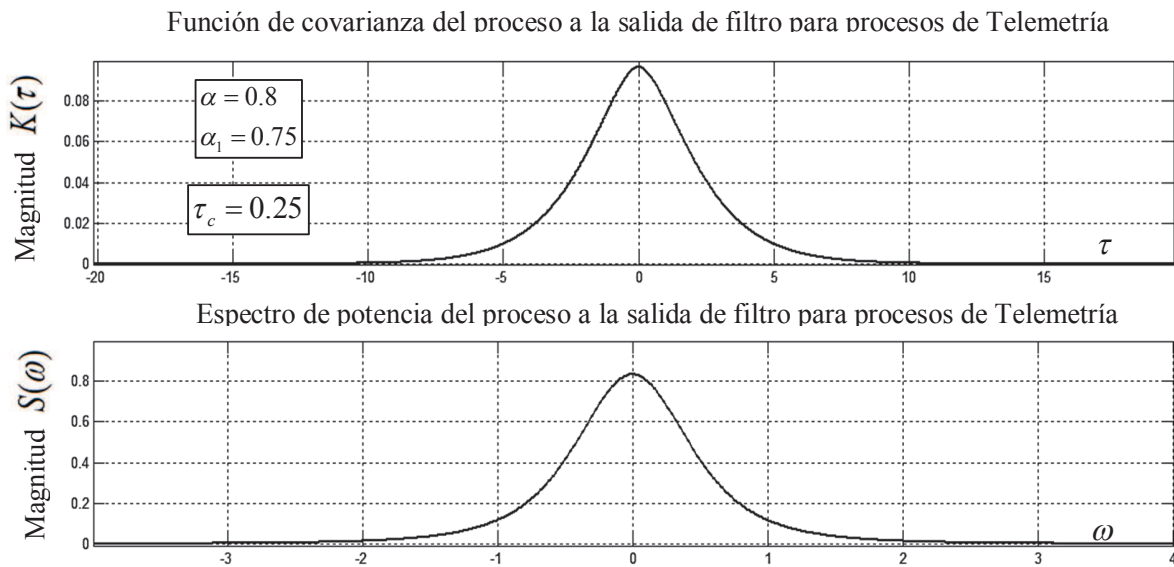


Figura. 2.20 Función de covarianza y espectro de potencia de proceso a la salida de filtro para procesos de Telemetría para $\alpha = 0.8$ y $\alpha_1 = 0.75$.

En las figuras 2.20 y 2.21, es posible notar que el espectro de potencia al ser reducido mediante los parámetros de ancho de banda, fomenta a una respuesta más suave en la función de covarianza. Comparando respecto a modelos de filtros RC de dos y tres etapas, este modelo de proceso es muy suave. En esencia es similar al circuito de filtro RC de dos etapas con la diferencia de que posee dos argumentos de ancho de banda distintos.

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro para procesos de Telemetría

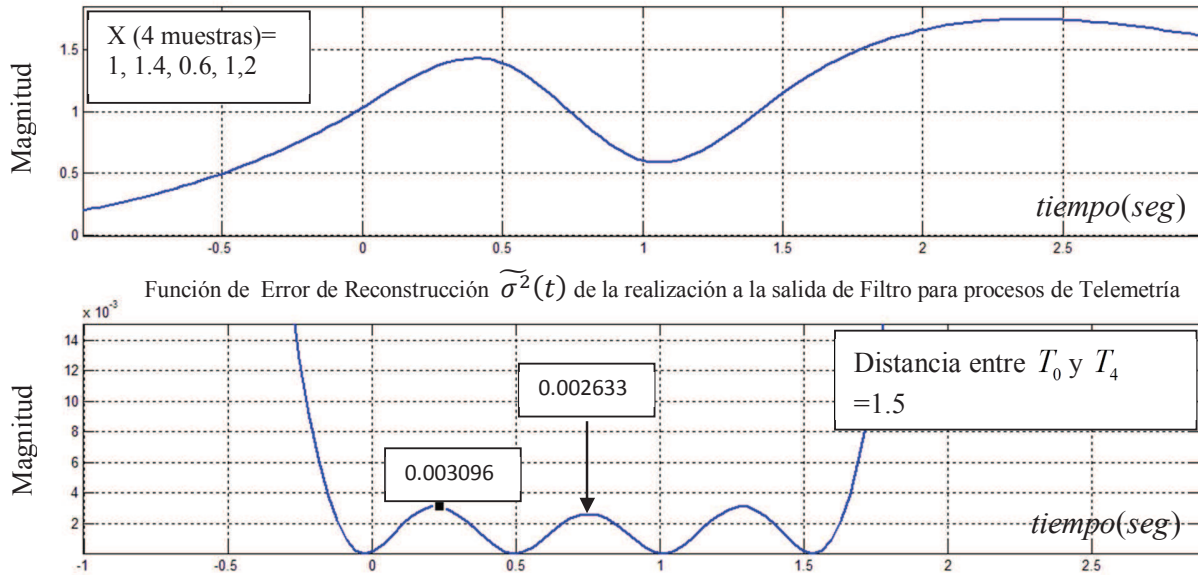


Figura. 2.21 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro de Telemetría con $\alpha = 0.8$ y $\alpha_1 = 0.75$.

La figura 2.21 demuestra y concluye que las funciones de covarianza de los procesos a la salida de filtros de respuesta suave, contribuyen a una reducción en la función de error de reconstrucción utilizada en la regla de la esperanza matemática condicional. En este caso, la realización fue reconstruida con solo cuatro muestras con amplitudes determinadas por la tabla 2.1, obteniendo así funciones de error lo suficientemente pequeñas.

2.5 PMR DE LA REALIZACIÓN A LA SALIDA DE FILTRO PARA PROCESO DE VOZ.

En este apartado serán mostrados ejemplos de PMR utilizando la regla de la media condicional usando modelo para procesos de voz. Recordando que este modelo de proceso es no diferenciable y además más caótico en comparación con filtro RC de una etapa.

$$\text{Si } \alpha = 0.8 \text{ y } \alpha_1 = 0.75 \text{ y además } K(\tau) = \frac{\alpha_1^2 N}{4(\alpha^2 - \alpha_1^2)} (\alpha e^{-\alpha|\tau|} - \alpha_1 e^{-\alpha_1|\tau|})$$

En donde:

N = Densidad espectral de Ruido Blanco Gaussiano

τ = variable independiente de la función de covarianza

α_1 y α = coeficientes de filtro (el tiempo de covarianza dependen de estos coeficientes)

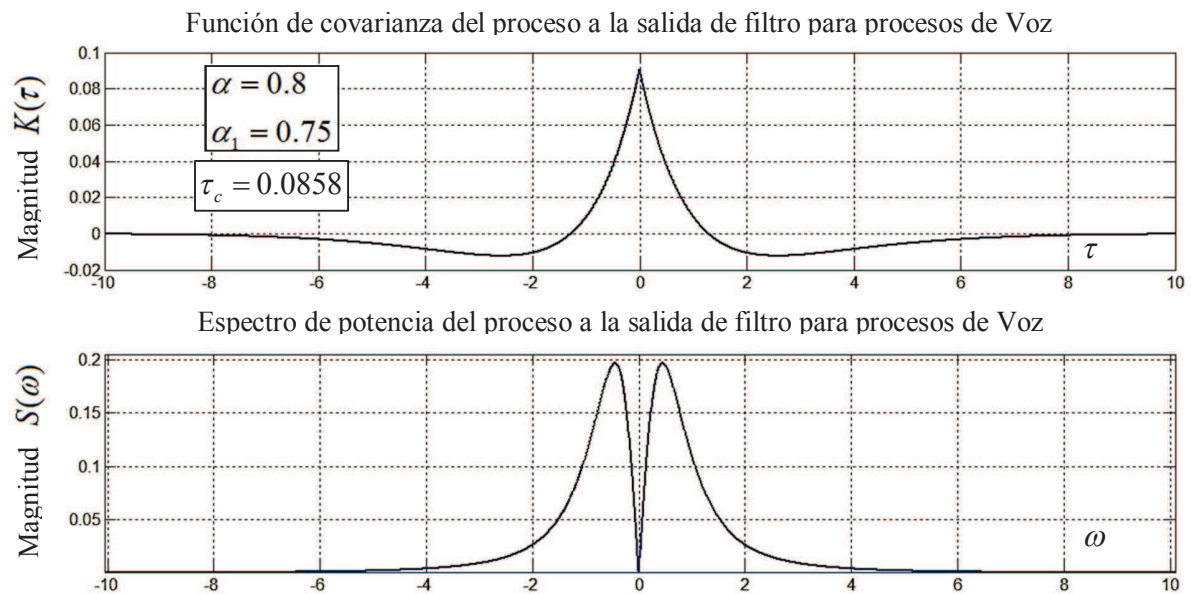


Figura 2.22 Función de covarianza y espectro de potencia del proceso a la salida de filtro para procesos de voz con $\alpha_1 = 0.8, \alpha = 0.75$.

Es claro que la función de covarianza del proceso a la salida de modelo para procesos de voz, contiene mayor número de componentes espectrales debido a las características del modelo, el cual como se mencionó anteriormente utiliza dos etapas acopladas de derivador e integrador con parámetros de ancho de banda independientes, es decir parámetros α y α_1 . Ahora con este modelo será aplicada la Regla de Esperanza Matemática Condicional, primeramente evaluando diversos valores de muestras, en este caso retomando los valores arbitrarios de la tabla 2.1.

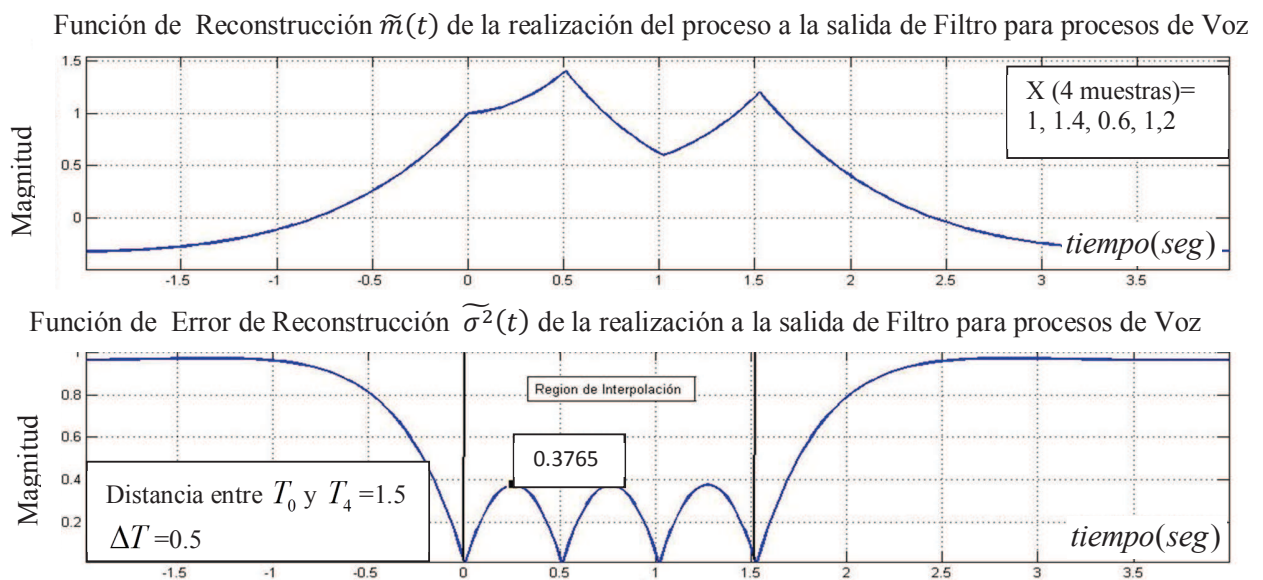


Figura 2.23 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro para procesos de Voz y $\alpha = 0.8$ y $\alpha_1 = 0.75$

Es posible notar en la figura 2.23 que la reconstrucción de la realización no es suave, por lo que la influencia de ese modelo más la distancia de separación de las muestras, nos proporciona valores elevados en la función de error reconstrucción, sin embargo es claro que la reconstrucción utilizando los modelos no-diferenciables es lograda.

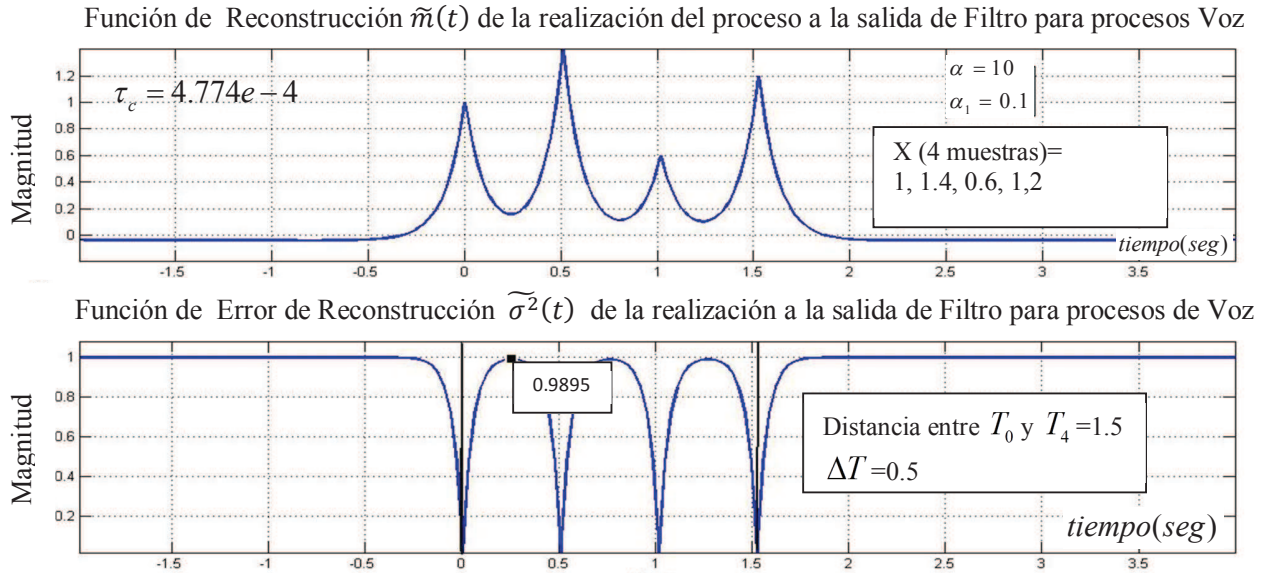


Figura 2.24 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de filtro para procesos de Voz y $\alpha_1 = 0.1, \alpha = 10$.

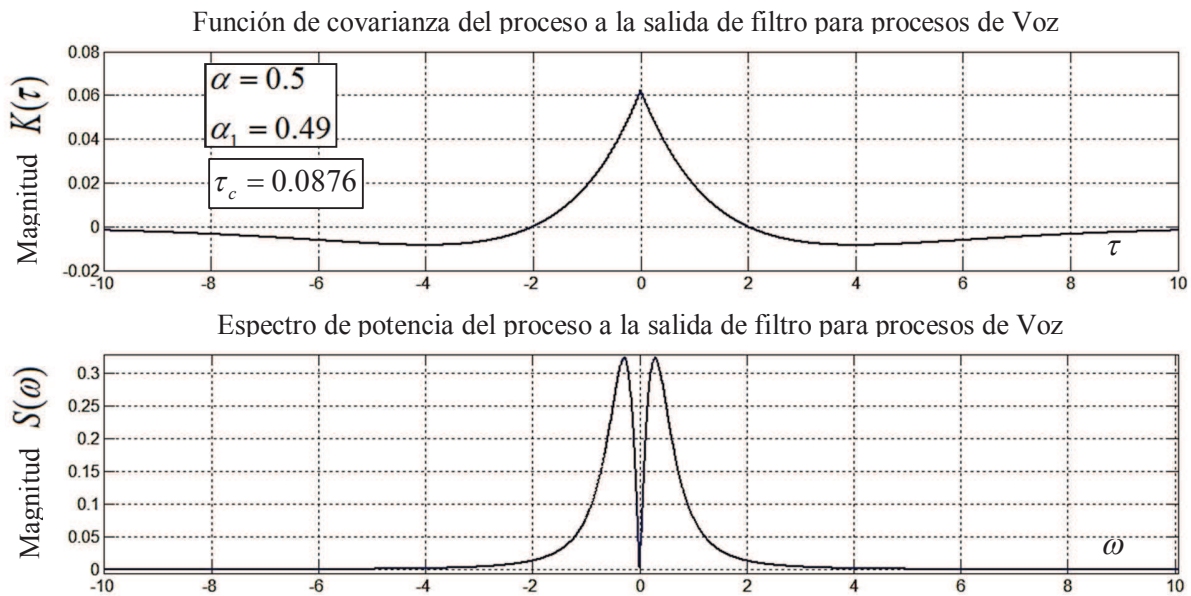


Figura 2.25 Función de covarianza y espectro de potencia del proceso a la salida de filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 0.49, \alpha = 0.5$.

En la figura 2.24 al incrementar el parámetro α de ancho de banda del filtro para procesos de voz, el error en la reconstrucción aumenta también, además cabe aclarar que la distancia entre las muestras es grande, por lo que también influye en la función de reconstrucción y error de reconstrucción.

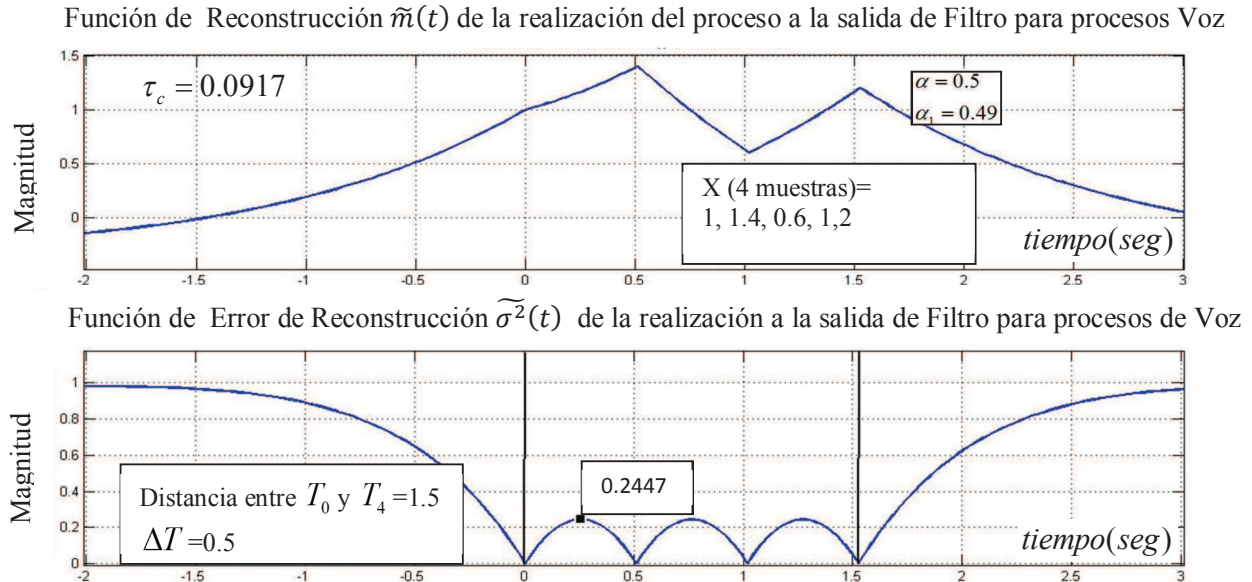


Figura 2.26 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro para procesos de Voz y $\alpha_1 = 0.49, \alpha = 0.5$.

En este caso es considerado $\alpha_1 = 10$, cabe mencionar que al incrementar α_1 la densidad espectral aumenta también.

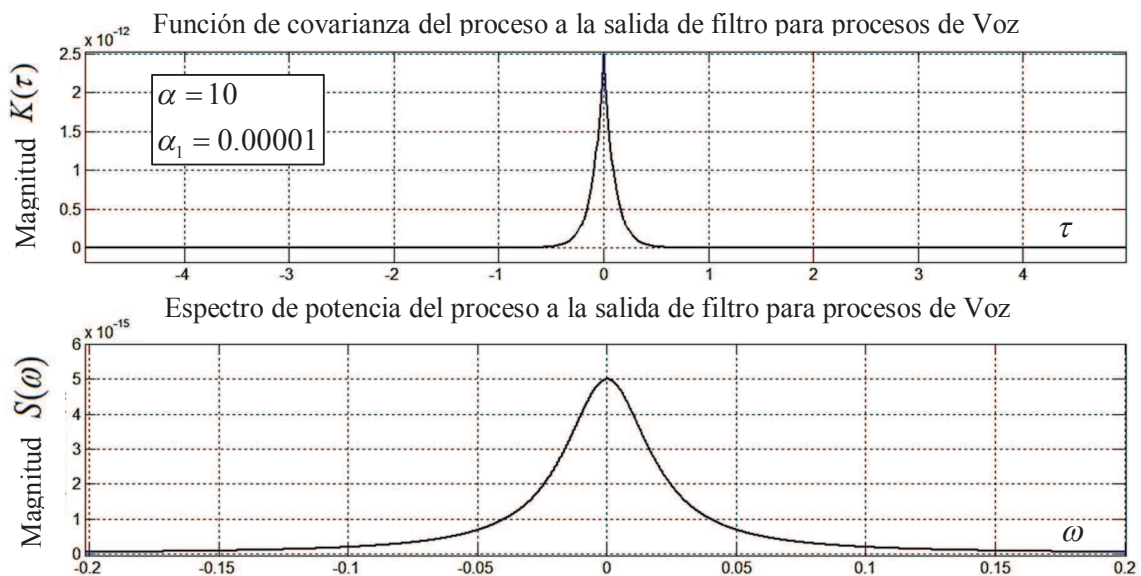


Figura 2.27 Función de covarianza y espectro de potencia de proceso a la salida de filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 0.00001, \alpha = 10$.

En la figura 2.27 si $\alpha_1 = 0$ modificamos la característica espectral de la función de covarianza del procesos a la salida del modelo, de igual forma ampliando su espectro, por consiguiente el error de reconstrucción incrementará.

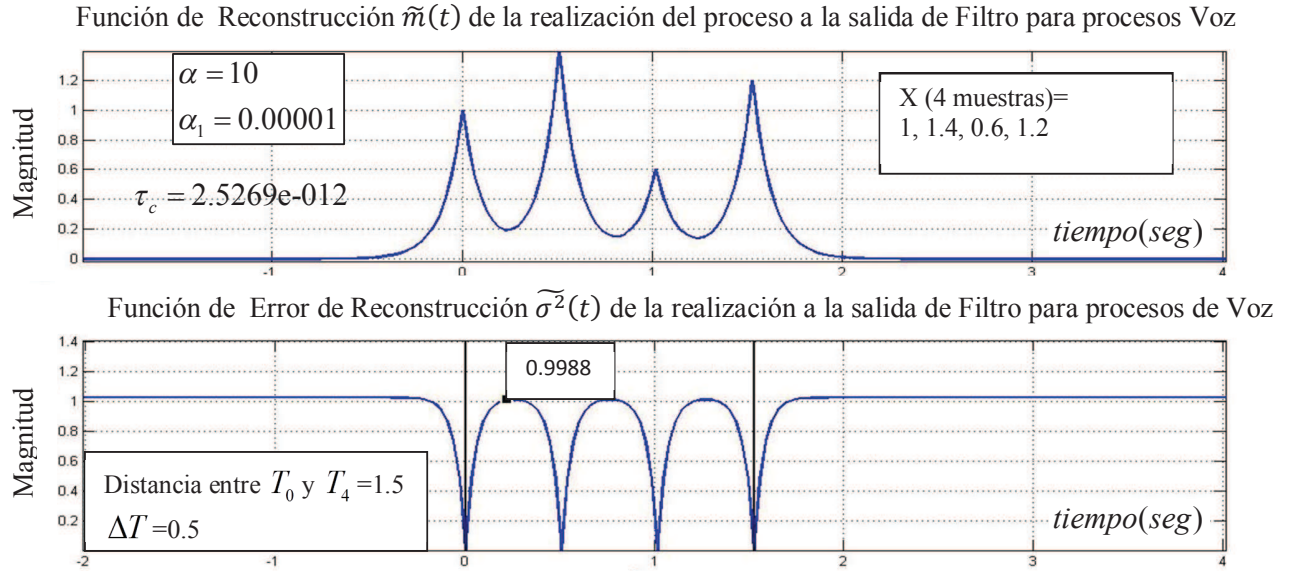


Figura 2.28 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de filtro para procesos de Voz con $\alpha_1 = 0.00001$, $\alpha = 10$.

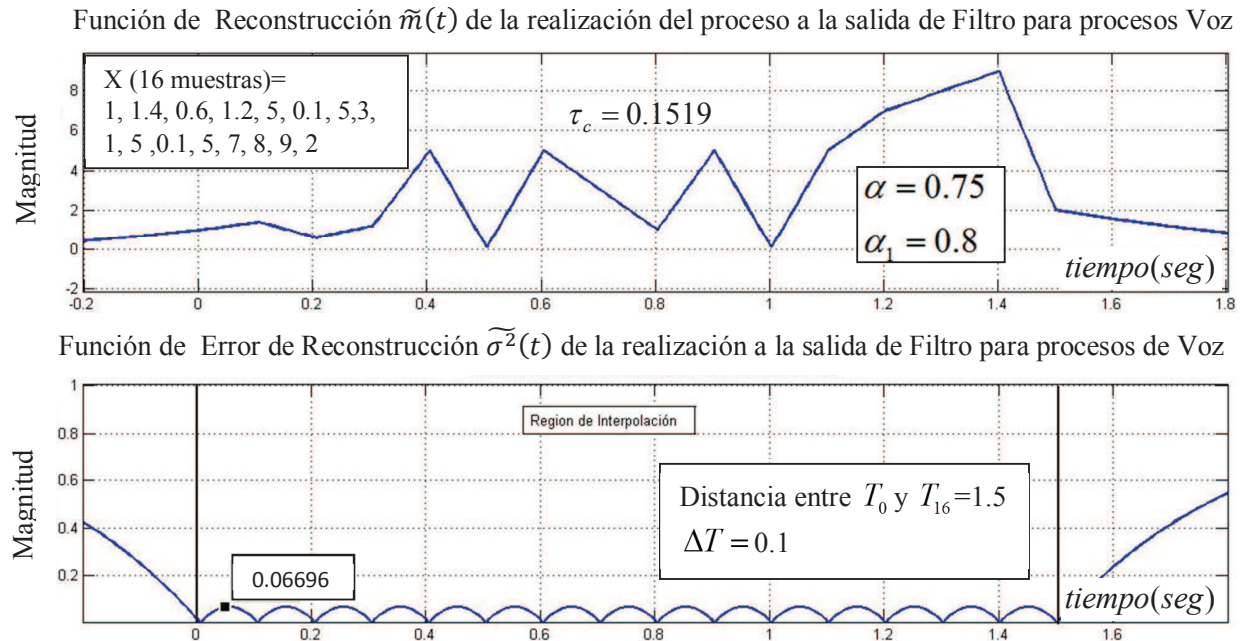
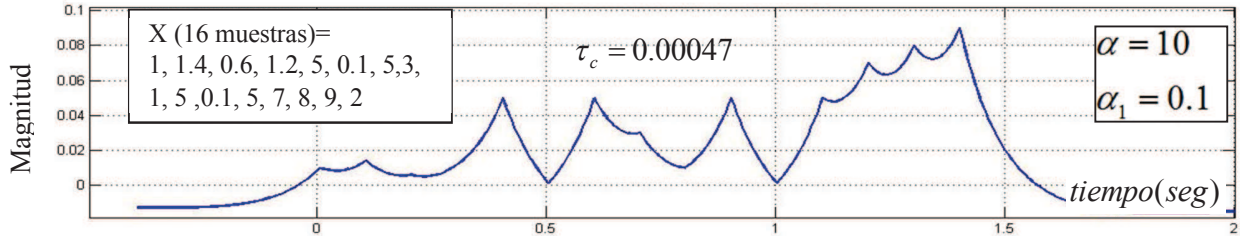


Figura 2.29 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de filtro para procesos de Voz y $\alpha_1 = 0.8$, $\alpha = 0.75$

En la figura 2.27 nuevamente se representa la función de covarianza y espectro de potencia, observando que no hay dependencia del número de muestras o intervalo de tiempo; ya que la función de covarianza y su espectro dependen solo de los coeficientes α_1 y α .

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro para procesos Voz



Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de la realización a la salida de Filtro para procesos de Voz

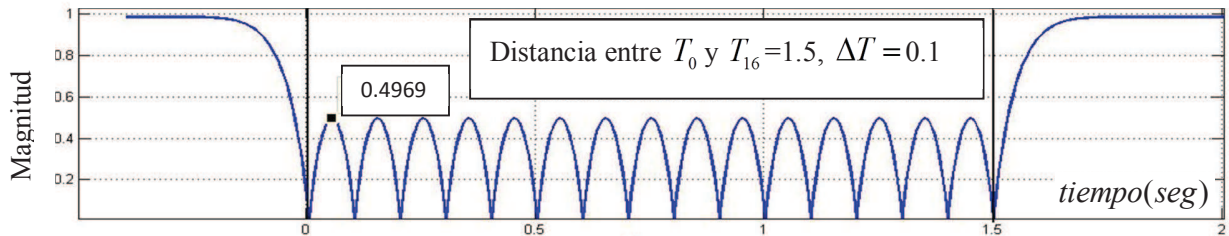
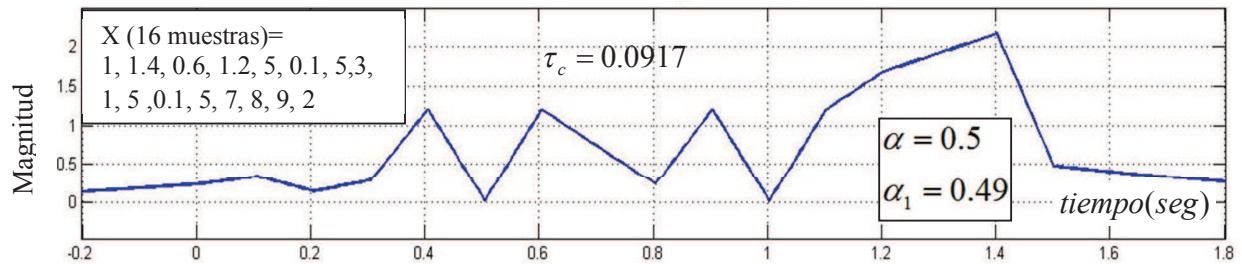


Figura 2.30 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de filtro para procesos de Voz y $\alpha_1 = 0.1, \alpha = 10$.

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ de la realización del proceso a la salida de Filtro para procesos Voz



Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de la realización a la salida de Filtro para procesos de Voz

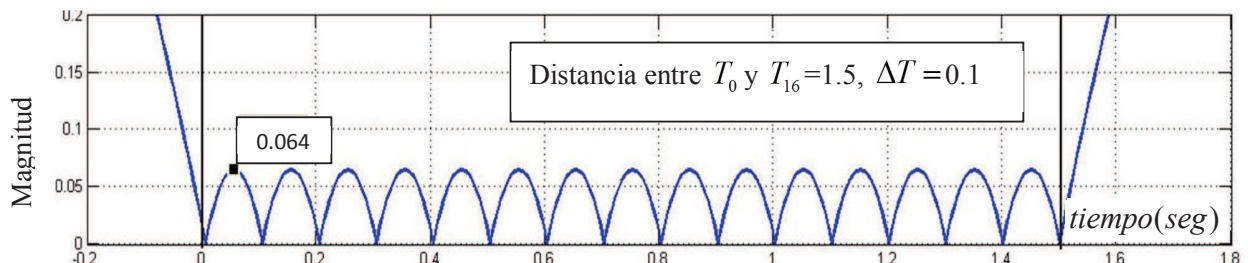


Figura 2.31 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro para procesos de Voz y $\alpha_1 = 0.49, \alpha = 0.5$.

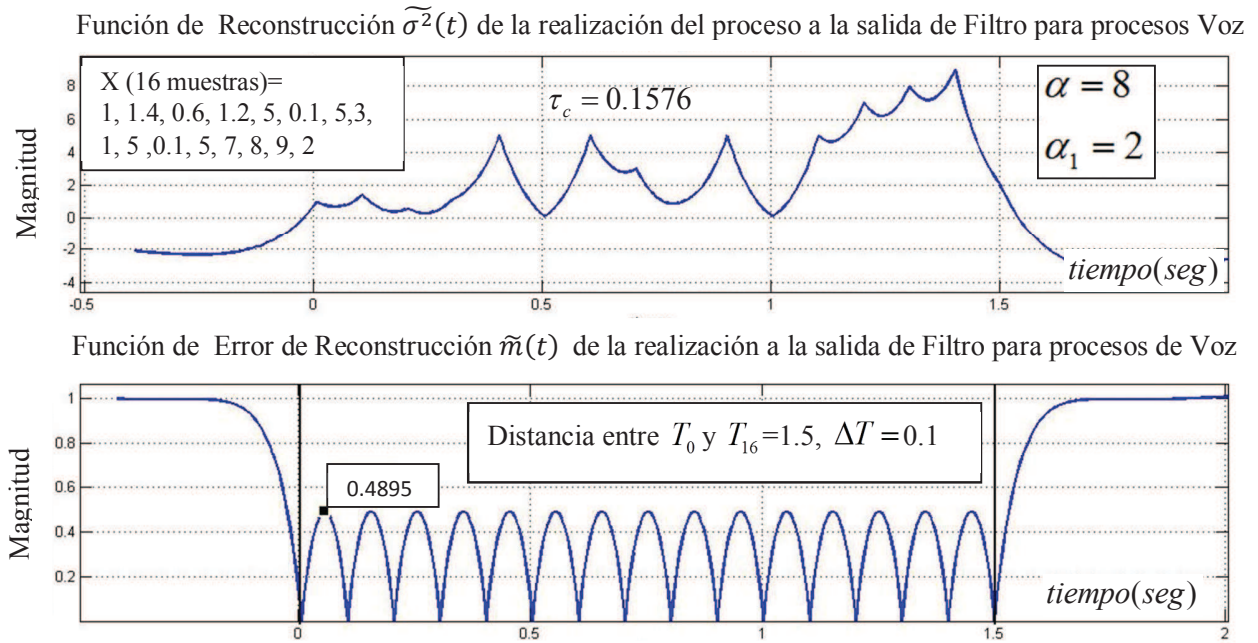


Figura 2.32 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida de Filtro para procesos de Voz y $\alpha_1 = 2$, $\alpha = 8$.

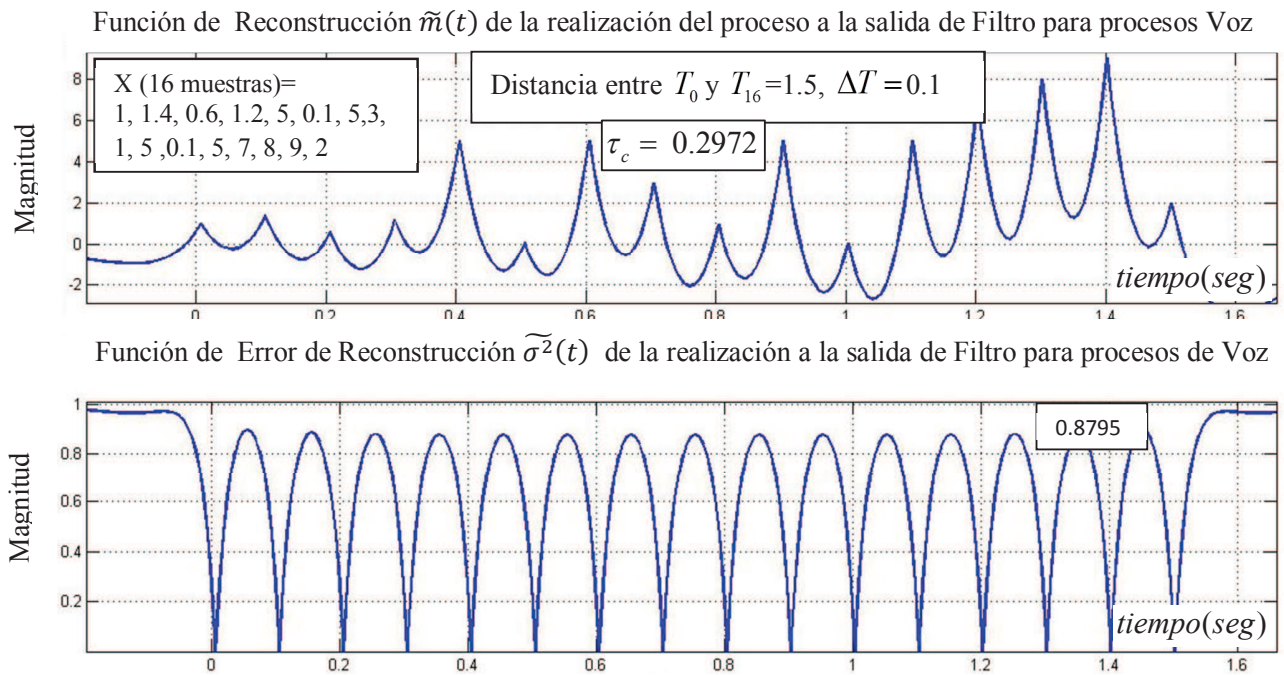


Figura 2.33 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ a la salida Filtro para procesos de Voz y $\alpha_1 = 10$, $\alpha = 15$.

En las figuras 2.30 a 2.33 se puede observar que al incrementar la distancia entre α_1 y α , el error aumenta, por el contrario si se reduce la diferencia entre estos parámetros el error se reduce tal y como se muestra en la figura 2.34. Además la distancia reducida debido a la interpolación de mayor número de muestras en la reconstrucción, reduce el error considerablemente, es decir el mismo efecto ocurrido en la reconstrucción de procesos utilizando modelos diferenciables, este efecto también es posible observarlo en la función de reconstrucción, misma que tiende a ser caótica cuando incrementamos los parámetros de ancho de banda del filtro.

Existe un límite en la reducción del error de reconstrucción, pues como se aprecia en la figura 2.34, α_1 no puede ser igual a α , ya que habría una indeterminación de la función de covarianza, es decir: $K(\tau) = \frac{\alpha_1^2 N}{4(\alpha^2 - \alpha_1^2)} (\alpha e^{-\alpha|\tau|} - \alpha_1 e^{-\alpha_1|\tau|}) \rightarrow K(\tau) = \frac{\alpha^2 N}{4(0)} (0)$

2.6 PMR DE LA REALIZACIÓN A LA SALIDA DE FILTRO ACOPLADO.

A continuación mostraremos ejemplos de PMR utilizando la regla de la media condicional usando otro modelo de proceso no diferencial en este caso un filtro acoplado, cuyas características se presentaron en el capítulo anterior y que ahora será utilizada la función de covarianza del proceso a la salida de este filtro para la reconstrucción de la realización del proceso en la multitud de sus muestras de sus muestras.

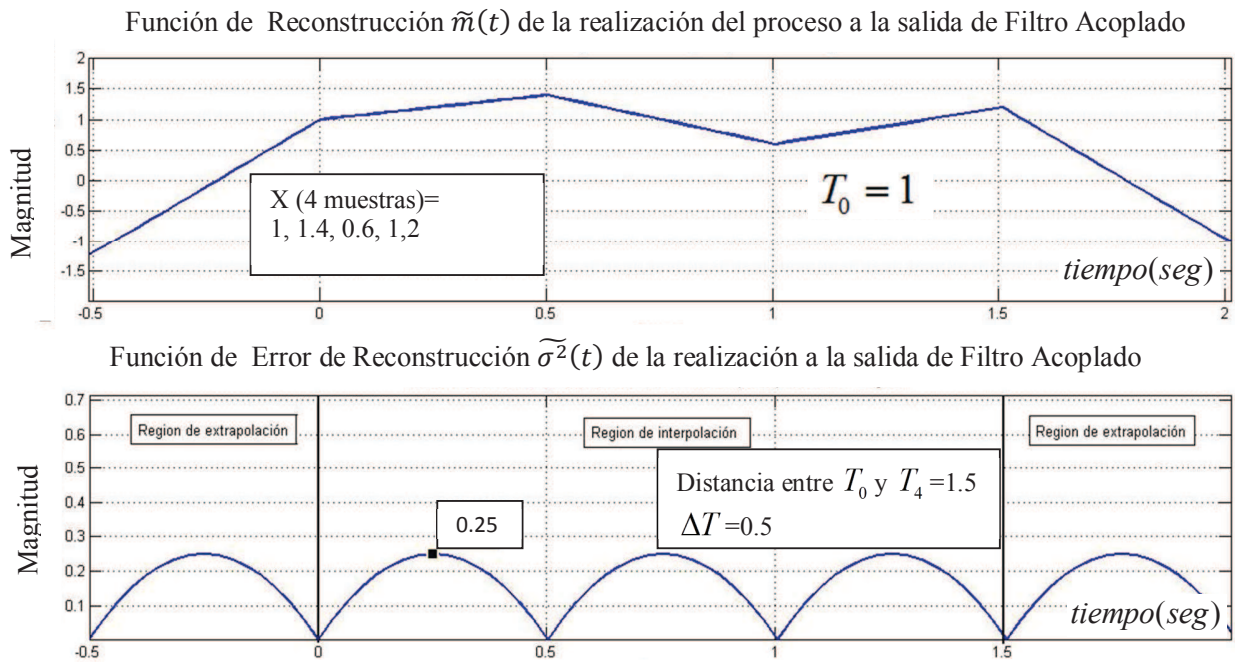


Figura 2.34 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro Acoplado con $T_0 = 1$

En las figuras 2.34, 2.35, 2.36 y 2.37 es posible notar que ahora la función de error de reconstrucción depende de la función de covarianza y además de un nuevo parámetro denotado por T_0 , mismo que define la duración del pulso en la entrada del filtro acoplado, y que al incrementarlo fomentará a la reducción del error y una reconstrucción menos caótica.

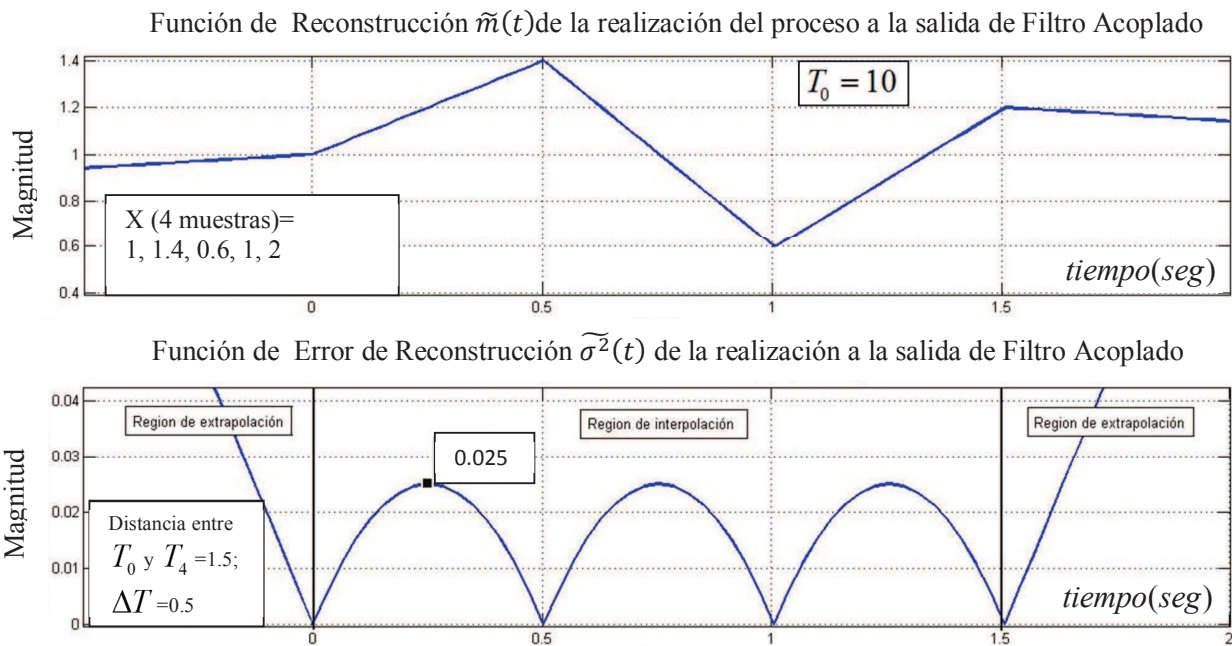


Figura 2.35 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\sigma^2(t)$ de realización con 4 muestras y $\Delta T = 0.5$ a la salida de Filtro Acoplado con $T_0 = 10$

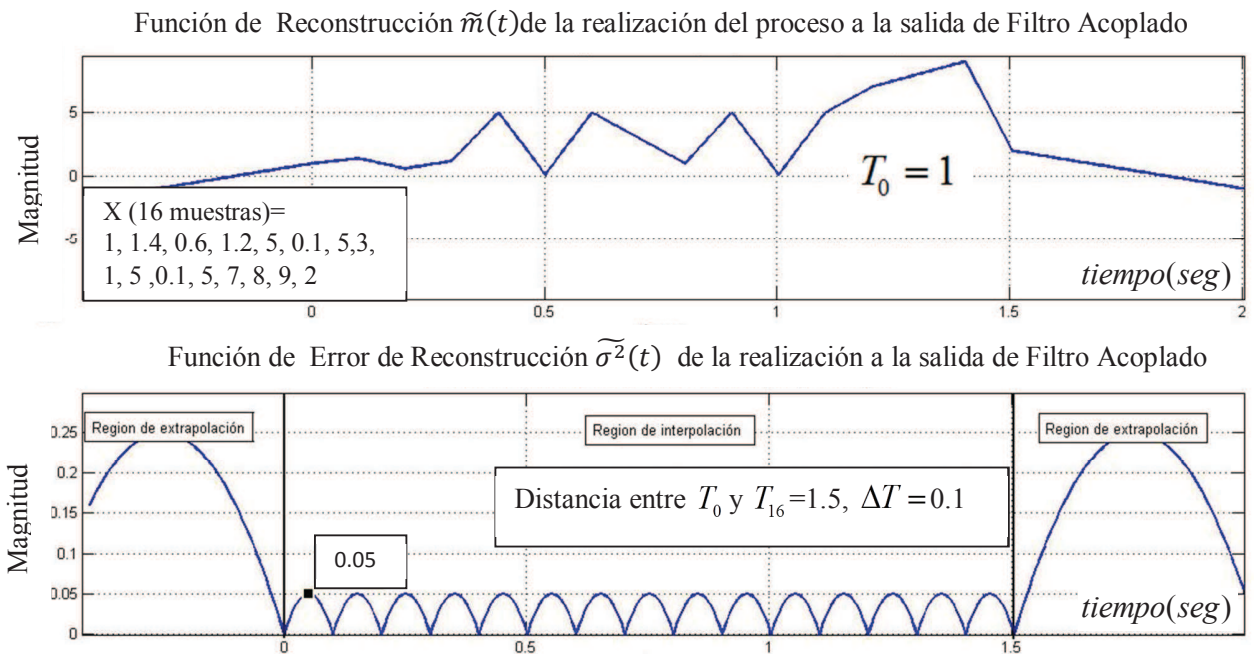


Figura 2.36 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ para señal Triangular a la salida de Filtro Acoplado $T_0 = 1$

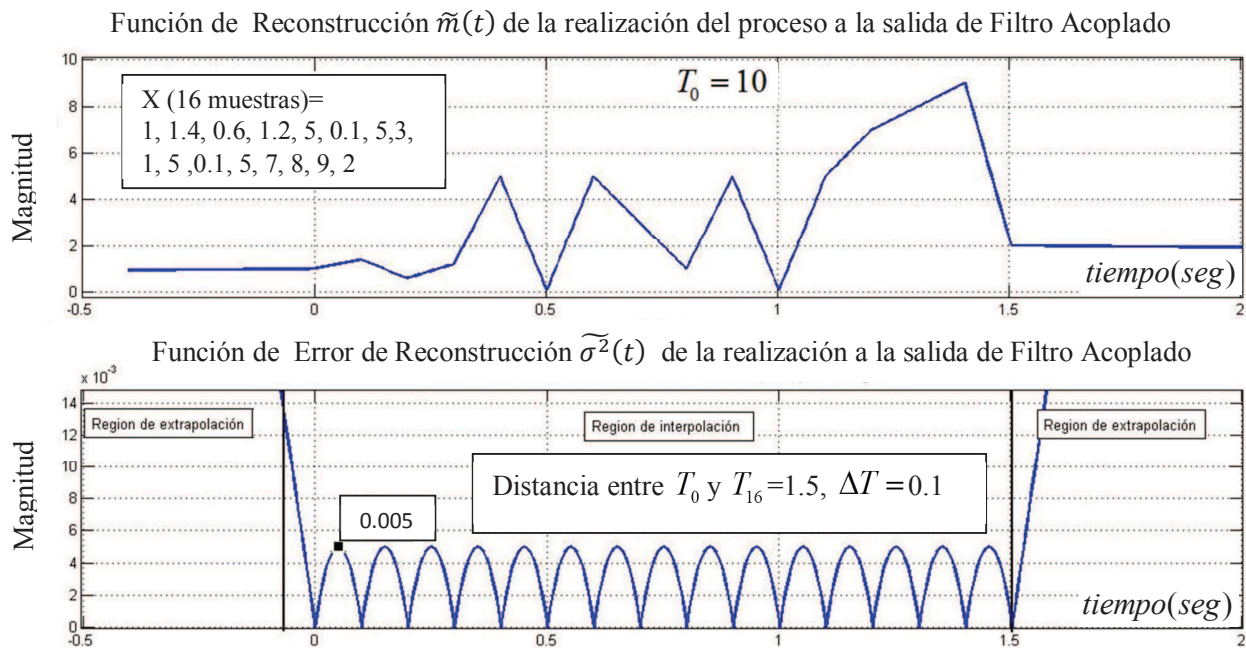


Figura 2.37 Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ y Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ con 16 muestras y $\Delta T = 0.1$ para señal Triangular a la salida de Filtro Acoplado $T_0 = 10$

Como fue mencionado, este tipo de filtros son muy útiles para la máxima transferencia de energía de una señal desde la entrada hasta la salida del filtro, asegurando una máxima relación señal a ruido. De la misma forma que el modelo de voz, es posible reducir el error disminuyendo la distancia entre las muestras, esto contribuye a la mejora en la reconstrucción de la realización. Este modelo no es tan caótico como el modelo de voz, sin embargo fue probado que también es un modelo de proceso no diferenciable.

2.7 COMENTARIOS

En este apartado la reconstrucción de una realización a partir de sus muestras utilizando la regla de la media condicional o regla de la esperanza matemática condicional tanto para modelos de procesos diferenciales como no diferenciables fue logrado, lo cual es una ventaja para decidir el límite de error de reconstrucción permitido elegir un modelo de acuerdo al tipo de reconstrucción de realización deseada, con esto es posible concluir que dependiendo de los requerimientos y del error de reconstrucción deseado, es posible obtener diferentes tipos de reconstrucción de realizaciones, es decir reconstrucciones suaves o caóticas. El error de reconstrucción depende principalmente de la función de covarianza utilizada, que aunque disminuye para funciones de covarianza de modelos de procesos diferenciales, también es posible obtener valores de errores aceptables para modelos de procesos no-diferenciales. Una segunda opción para contribuir a la reducción de error de reconstrucción consiste en la disminución del intervalo ΔT entre muestras.

Es importante mencionar que la investigación se centra en el análisis de reconstrucción y de error de reconstrucción dentro de la región de interpolación es decir en la región de muestreo, a pesar de que se han realizado estudios sobre el comportamiento de la reconstrucción y error de reconstrucción en la región de extrapolación o región fuera de la región de muestreo.

En los casos anteriores, los valores de las muestras fueron consideradas equidistantes, es decir, la misma distancia entre el conjunto de muestras de la realización, por lo que los valores en la función de error de reconstrucción son prácticamente constantes en los picos de la función de error, sin embargo esta no es una limitante en la reconstrucción de procesos aleatorios, puesto que es posible tener valores no equidistantes de muestras, es decir realizar un muestreo no uniforme de la realización y reconstruir a partir de dicho muestreo no uniforme; este hecho implicaría tener diferentes valores de los picos de la función de error de reconstrucción, pudiendo evaluar el error promedio de la función de reconstrucción a lo largo de la región de interpolación.

La función de error de reconstrucción es sensible también a los parámetros de ancho de banda definido por α en algunos de los filtros, lo que implica que un aumento en los valores de estos parámetros contribuye a un incremento en el ancho de banda de la realización en su reconstrucción, así como también a una reducción del tiempo de covarianza τ_c fomentando a que la función de error se incremente considerablemente.

No es necesario evaluar el espectro de la realización reconstruida, pues basta con evaluar el espectro de potencia de la función de covarianza, ya que la función de covarianza nos proporciona información acerca de la realización.



CAPÍTULO 3

DESARROLLO DE ALGORITMOS ÓPTIMO Y NO-ÓPTIMO PARA MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS EN LA SALIDA DE LIMITADOR IDEAL

En el presente capítulo se desarrollan dos algoritmos No-Óptimo y Óptimo para el procedimiento de muestreo y reconstrucción de procesos Gaussianos, mencionando y utilizando los modelos más comunes tales como filtros RC de Dos Etapas, Tres Etapas, Filtro para señales de Telemetría, todos estos ya mencionados en capítulos anteriores y que corresponden a modelos de procesos diferenciables. Uno de los métodos usados se basa en el muestreo de los cruces por cero mediante *Clipping*, éste método consiste en la saturación de la realización teniendo como información solo los cruces por cero de la misma realización, por tal motivo es necesario realizar una investigación acerca de este método y sus variantes para los diferentes tipos de procesos.

El objetivo principal de este capítulo consiste en desarrollar los algoritmos computacionales bajo la plataforma Matlab, que permitan la obtención de una realización a partir de un proceso Gaussiano estacionario. La forma de obtener la realización consiste en el filtrado del proceso, utilizando los modelos de filtros (funciones de covarianza del proceso) para obtener una realización a la salida, para posteriormente proceder con la detección de los intervalos entre cruces por cero de la realización obtenida y aplicar la metodología de muestreo y reconstrucción de los procesos Gaussianos basada en la regla de la esperanza matemática condicional.

Algoritmo Óptimo

A continuación un algoritmo óptimo es propuesto para desarrollar el procedimiento de muestreo y reconstrucción de una realización a partir sus muestras agregadas entre cada cruce por cero. Como método de reconstrucción será utilizada la regla de la media condicional o esperanza matemática condicional, evaluando las funciones de error de reconstrucción para diversas funciones de covarianza dadas.

El esquema para desarrollar de algoritmo Óptimo se muestra en la figura 3-1, donde se considera dos casos o variantes de este algoritmo:

1er caso: Una muestra es agregada en el máximo entre cruces por cero y cuya magnitud corresponde propiamente al del valor máximo de la realización en esa posición.

2do caso: Una muestra es agregada en la mitad entre cruce por cero y cuya magnitud corresponde propiamente a la de la realización.

En la entrada del sistema transmisor de la figura 3.1 se tiene ruido blanco Gaussiano, por lo que a la salida de filtro será obtenida una realización del proceso de ruido. Posteriormente las muestras de los cruces por cero de la realización son calculados mediante la conversión no lineal o clipper, para posteriormente agregar entre cada par de muestras de cruce por cero una muestra en la mitad (caso 1) con amplitud igual a la de la realización en ese punto, y finalmente una muestra ubicada en el máximo entre dos cruces por cero (caso 2). Al final de la etapa de transmisión serán enviadas tres muestras (dos muestras de cruce por cero y una muestra dentro de dos cruces por cero).

El bloque anterior considera la etapa del transmisor propuesto que incluye la metodología óptima de muestreo de la realización del proceso, bajo los dos casos posibles. Ahora es posible contemplar una etapa de recepción, en donde es llevado a cabo el proceso de reconstrucción de la realización utilizando únicamente las dos muestras por cada cruce por cero y la muestra intermedia entre las mismas. La principal ventaja es tiempo de procesamiento de estas muestras así como el uso mínimo de muestras para la reconstrucción.

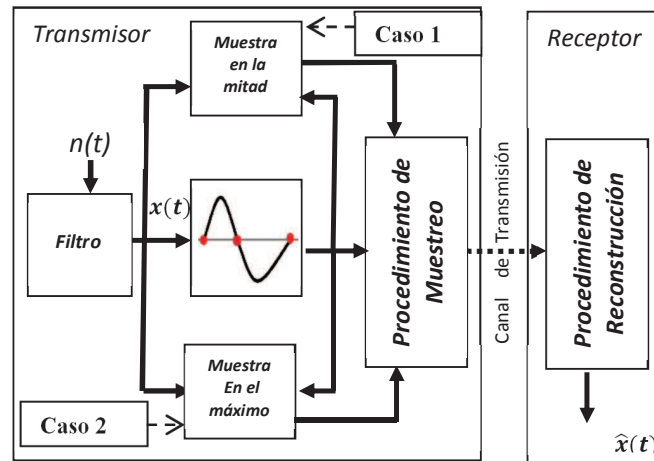


Figura 3.1 Diagrama de algoritmo óptimo para PMR (caso 1 y 2).

Algoritmo No-Óptimo

A continuación es desarrollado el segundo algoritmo (algoritmo No-Óptimo), en donde serán considerados los siguientes dos casos:

1er caso: Una muestra es agregada justo a la mitad entre dos cruces por cero y cuya magnitud estará en función de la distancia entre cruces por cero de la realización. Este primer caso es similar al desarrollado por el algoritmo óptimo, con la diferencia de que esta muestra tiene una magnitud en función de la distancia del cruce por cero, por tanto no hay una relación con la magnitud de la realización original. En el esquema de la figura 3.2, es propuesto el algoritmo de acondicionamiento de la señal en la etapa de transmisor. En este caso, la realización del proceso a la salida del filtro es saturada mediante el convertidor no lineal tipo clipper, de tal forma de obtener una señal binaria de la realización. La realización binaria proporciona información de los cruces por cero, por lo que es posible obtener las muestras a de los cruces por cero, y posteriormente enviarlas sobre un canal de transmisión.

En la etapa de recepción propuesta, son recibidas las muestras de cruce por cero, en donde el algoritmo del receptor estima una muestra adicional, esta muestra está en función del intervalo de dos cruces por cero y además será ubicada entre ambas muestras de cruce por cero. En conclusión la etapa de recepción incluye un algoritmo de muestreo y reconstrucción. Aunque este desarrollo no es óptimo debido a que estima las muestras entre cruce por cero, si tiene la ventaja de solo enviar la información de cruces por cero, y no muestras adicionales de la realización.

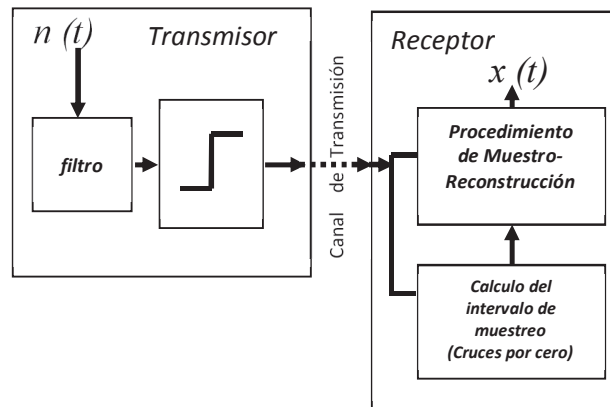


Figura 3.2 Diagrama para desarrollo de algoritmo No-Óptimo para PMR (Caso 1).

Será utilizada la regla de la esperanza matemática condicional para reconstruir la realización a partir de dicha muestra obteniendo su función de error de reconstrucción. Sin embargo al calcular la función de error de reconstrucción de la realización proporcionado por la varianza condicional, es posible notar que dicho error no depende de la magnitud de la muestra si no solo del intervalo de muestras y de la función de covarianza utilizada, por lo que al no incluir muestras con magnitud equivalente de la realización original, el error no es preciso. Por tal motivo

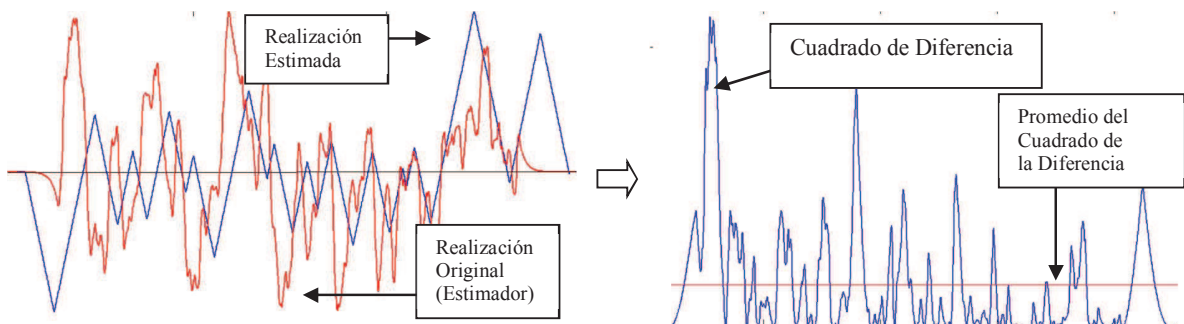


Figura 3.3 Diagrama para estimación de Error cuadrático medio.

Los métodos considerados para resolver el problema de evaluación de error serán dos: El primer método se basa en la evaluación del error cuadrático medio de la ecuación (1-71) entre la realización original y la realización reconstruida, esta metodología consiste normalizar ambas realizaciones para posteriormente realizar una operación de diferencia (resta) entre ambas realizaciones y finalmente aplicar la potencia al cuadrado de la diferencia.

Al resultado obtenido de aplicar una función módulo (el cuadrado de la diferencia) tiene la finalidad de impedir que los errores por defecto y por exceso se anulen mutuamente. Finalmente será obtenido el valor promedio a lo largo de la región de interpolación de la función generada por el error cuadrático. El diagrama procedimiento para la estimación del error cuadrático medio se muestra en la figura 3.3. Al utilizar la estimación con ECM existe el inconveniente de utilizar la realización original como estimador en el receptor, lo que en la práctica no es posible. Esta es una ventaja que posee la regla de la esperanza matemática condicional, puesto que proporciona el error de reconstrucción sin necesidad de un estimador.

2do caso: Este algoritmo no-óptimo consiste en obtener una realización del proceso Gaussiano a la salida de filtro RC de Dos Etapas y que además será común para cualquier caso de muestreo para diversas funciones de covarianza. En esta variante, es aplicado un convertidor no lineal tipo clipper a la realización del proceso, de tal forma que una realización binaria es obtenida a la salida con las características de cruce por cero de la realización. Finalmente la realización con saturación es transmitida sin muestrear por un canal de transmisión y reconstruida con diversos filtros correspondientes a modelo de procesos diferenciables.

Para evaluar el error de reconstrucción respecto a la realización original será utilizado de coeficiente de correlación de la ecuación (1-70) entre la realización reconstruida y la realización original así como el estimador de error cuadrático medio. Posteriormente se aplica un convertidor no-lineal a la realización; la transformación no-lineal corresponde a un saturador o limitador ideal (Clipper), de tal forma que se obtendrá una versión recortada o binaria de la realización original. Finalmente la realización saturada será reconstruida haciendo uso de diversos modelos vistos con anterioridad. El procedimiento general para el desarrollo del algoritmo no-óptimo caso 2 se muestra en la figura 3.4

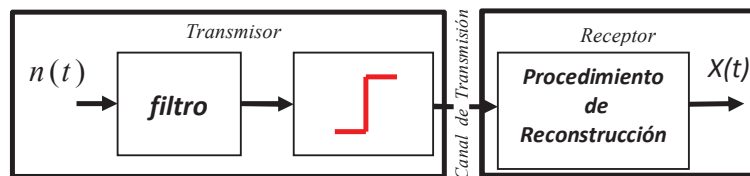


Figura 3.4 Diagrama para desarrollo de algoritmo no-óptimo para PMR (Caso 2).

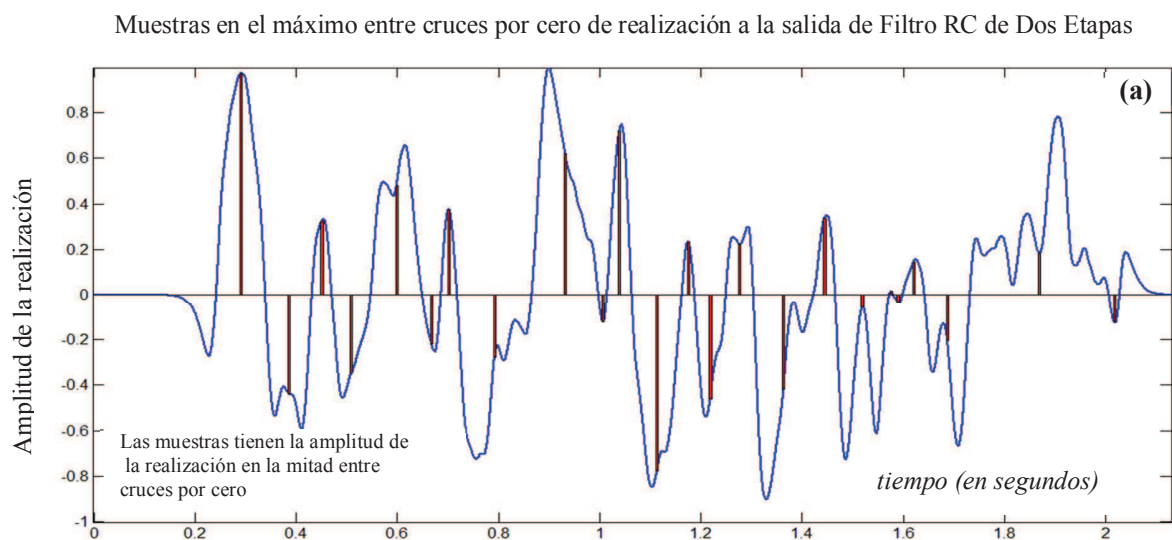
En el segundo caso del desarrollo del algoritmo no-óptimo, solo una realización es considerada a la salida del Filtro RC de Dos etapas, con la finalidad de conservar la misma estructura de la realización a la salida del convertidor no lineal, y así conservar la referencia. Será utilizada la versión normalizada de la función de covarianza del Filtro RC de Dos Etapas de la realización, para todo caso es decir, normalizamos el tiempo de covarianza $\tau_c = 1$ (esto es posible considerando el parámetro $\alpha = 2$). En el desarrollo del algoritmo no-óptimo es posible notar de manera intuitiva que al aplicar una saturación a la realización, ésta perderá la mayor parte de la información acerca de su composición, por lo que la única información de la realización saturada serán los cruces por cero de la realización.

Este caso de algoritmo No-Óptimo fue desarrollado como una idea subjetiva debido a la necesidad de reconstruir procesos que han sufrido este tipo de conversiones no lineales, por lo que calcular la función de error de reconstrucción resulta muy complicado debido a la pérdida de información por la conversión no lineal que sufrió la realización, sin embargo es posible utilizar alternativas de medición de error entre las que se encuentran el coeficiente de correlación como parámetro de error, el cual indica el índice de similitud entre la realización original y la realización reconstruida a partir de su versión saturada.

La estimación del error cuadrático medio (ECM) también será utilizado para evaluar la calidad del algoritmo. La referencia para la realización de los algoritmos óptimo y no óptimo en la estrategia para la introducción de muestras de manera no lineal puede observarse en [26], sin embargo el autor no realiza una investigación analítica del método, es decir, no incluye características estadísticas como función de covarianza o fdp. El presente trabajo pretende proporcionar una investigación analítica de muestreo no lineal.

3.1 PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A PARTIR DE UNA MUESTRA EN LA MITAD ENTRE DOS CRUCE POR CERO.

En el presente apartado se procede con el desarrollo del algoritmo óptimo, en donde una muestra es colocada en el promedio entre dos cruces por cero de una realización con una amplitud igual al de la realización en ese punto intermedio, es decir, la muestra tiene una parte de la información de la realización. Utilizando la regla de la esperanza matemática condicional, se procede a reconstruir la realización a partir de sus muestras para las diversas funciones de covarianza dadas, en esta primera prueba utilizando modelos de procesos no diferenciables. En los posteriores capítulos será aplicada la metodología para funciones de covarianza de procesos no diferenciables, que para el caso de la función de covarianza del proceso a la salida de diversos filtros será obtenida.



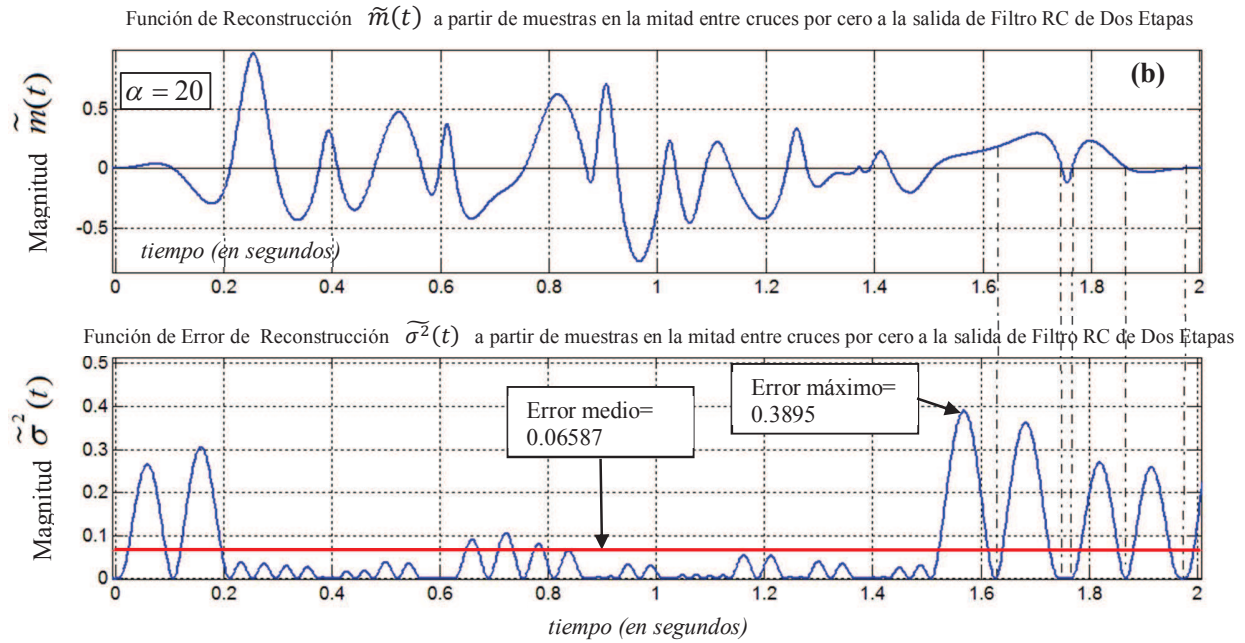


Figura 3.5 Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro RC de Dos Etapas con muestras en la mitad entre cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero a la salida de Filtro RC de Dos Etapas.

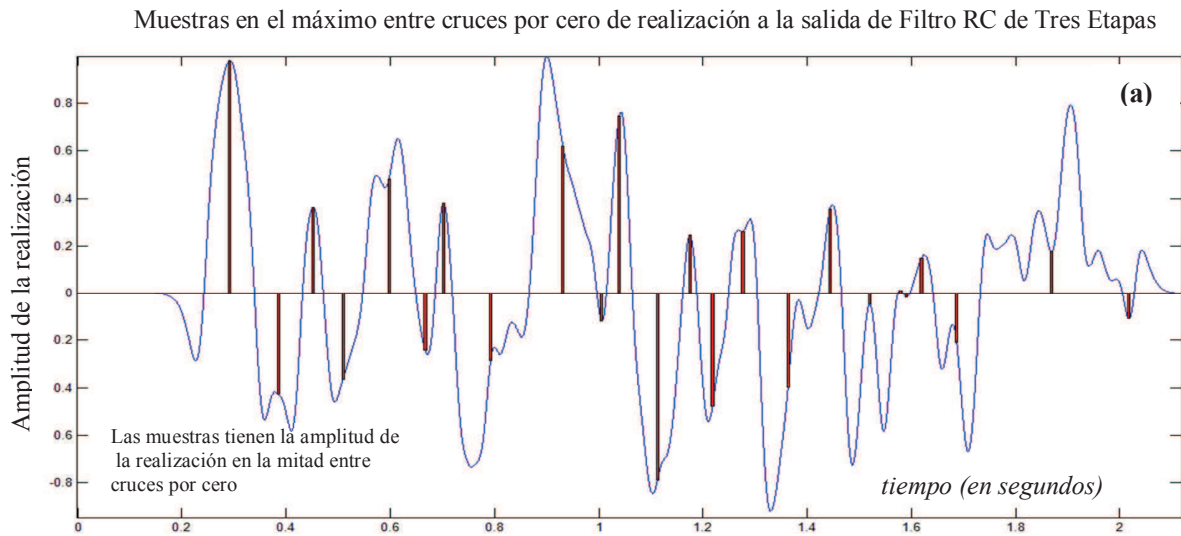


Figura 3.6 Realización a la salida de Filtro RC de Tres Etapas con muestras en la mitad entre cruces por cero y con magnitud en función de la amplitud de la realización.

Las líneas punteadas de la figura 3.5b y en las posteriores figuras, denotan que para cada muestra real en la realización hay una correspondencia de error igual a cero, mientras que entre dos muestras existe un máximo de error de reconstrucción determinado por la varianza condicional.

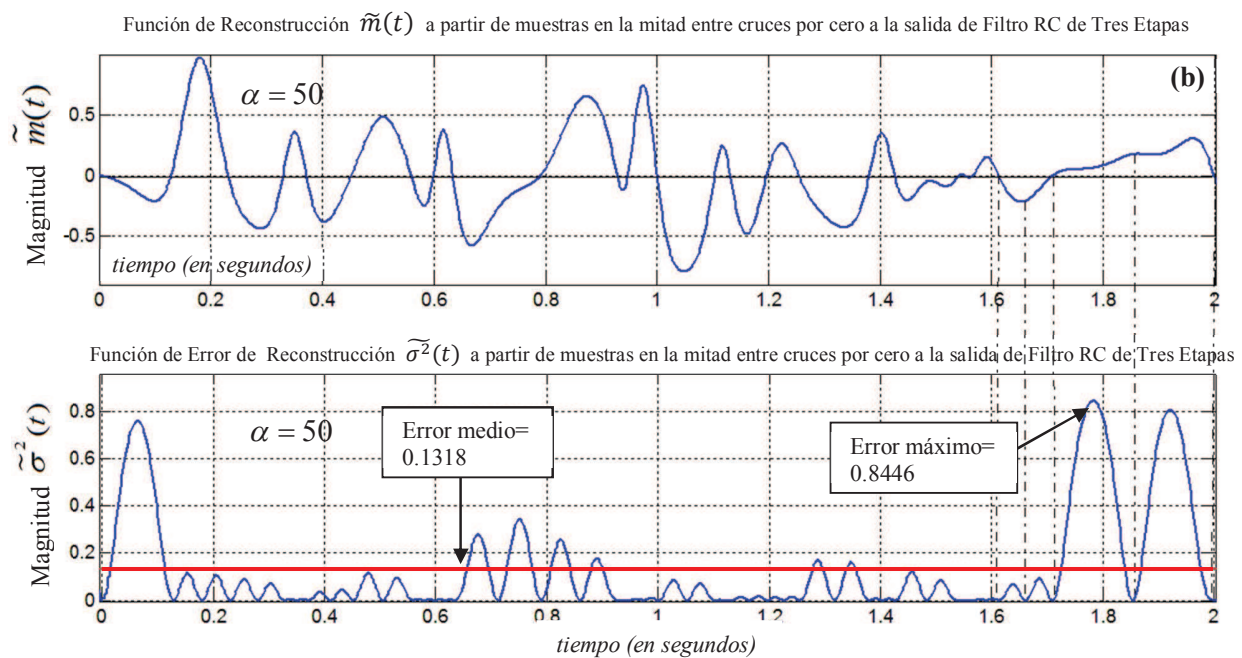


Figura 3.7 Función de Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero a la salida de Filtro RC de Tres Etapas.

Para la siguiente variante mostrada en la figura 3.8, es considerada la realización a la salida del filtro para procesos de telemetría, a la cual es posible determinar sus cruces por cero y aplicar la metodología óptima para reconstrucción mencionada. Este caso de realización es suave por tal motivo proporciona la distancia entre las muestras será mayor, y por tanto su función de error de reconstrucción será incrementada también. Esto es posible de observar en la figura 3.9, donde los picos más altos de la función de error de reconstrucción son debido a la distancia de separación entre las muestras cero y la muestra intermedia.

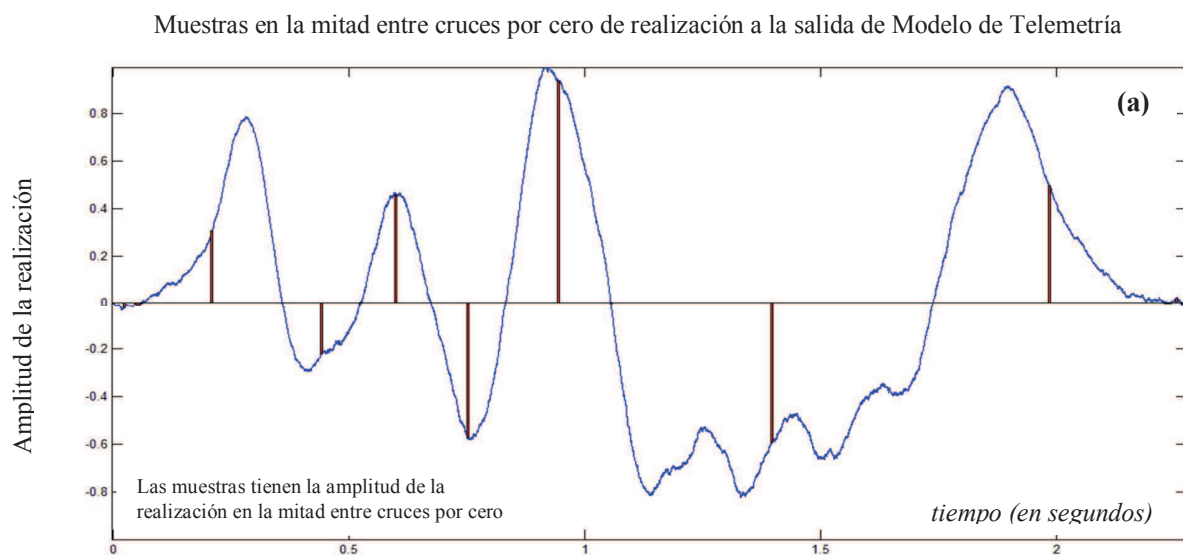


Figura 3.8 Realización a la salida de Filtro de Telemetría con muestras en la mitad entre cruces por cero y con magnitud en función de la amplitud de la realización.

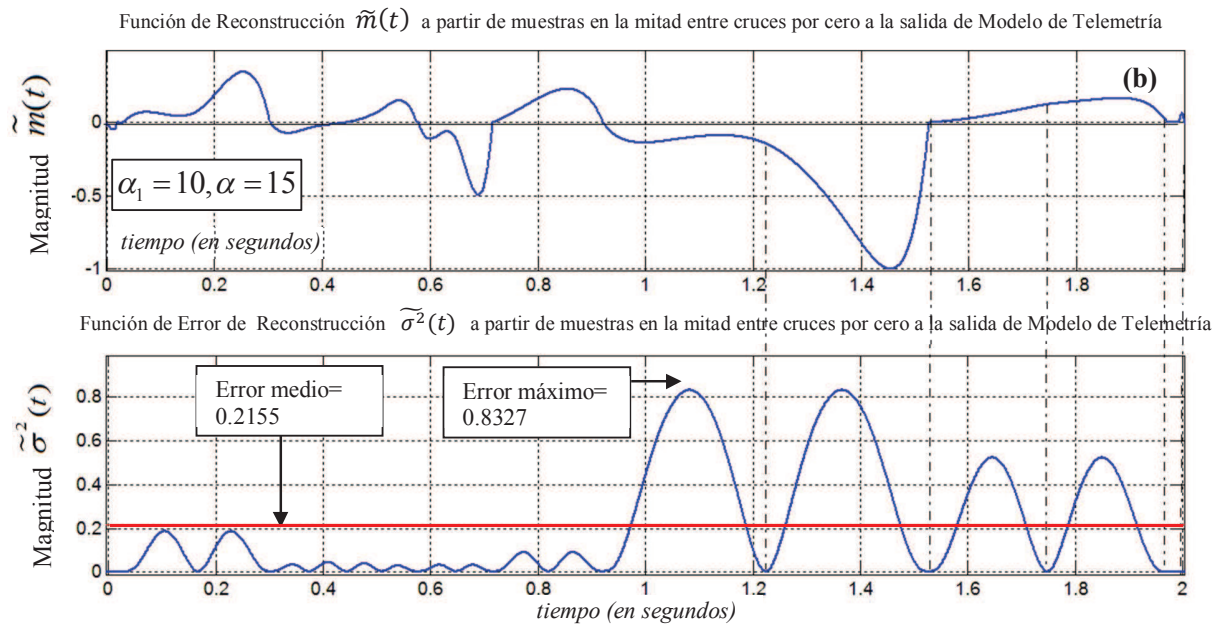
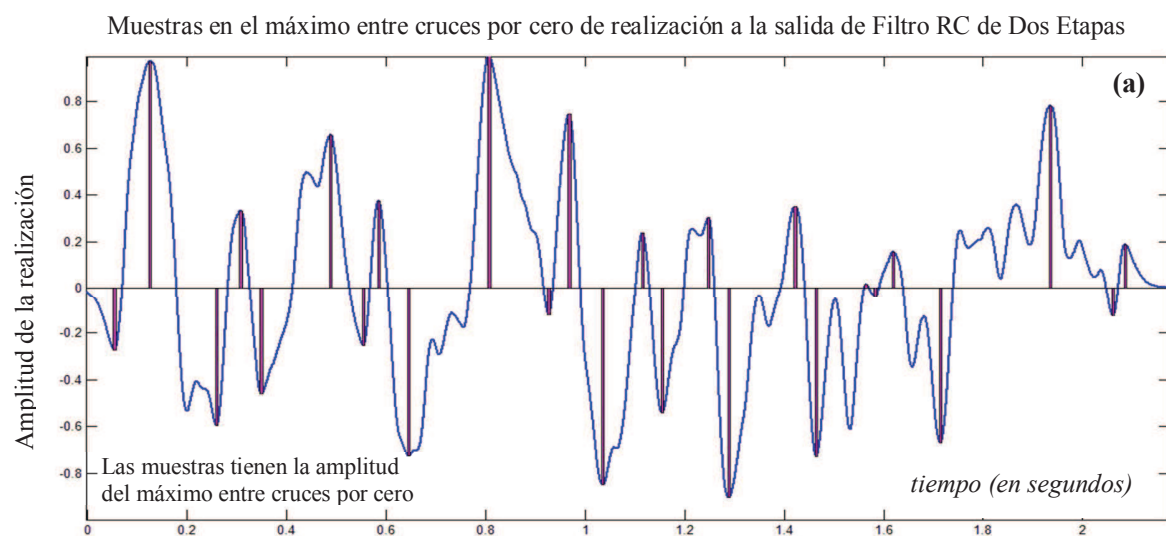


Figura 3.9 Graficas de: a) Realización a la salida de Modelo de Telemetría con muestras en la mitad entre cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero a la salida de Modelo de Telemetría.

3.2 PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A PARTIR DE UNA MUESTRA EN EL MÁXIMO ENTRE DOS CRUCES POR CERO.

En el presente apartado será desarrollado el segundo caso del algoritmo óptimo en donde una muestra es ubicada en el máximo entre dos cruces por cero de una realización, es decir la muestra tiene una parte de la información de la realización en su máximo. En este caso se esperaría tener una mayor información acerca de la realización reconstruida y así poder evaluar la función de reconstrucción y de error de reconstrucción así como su error medio a lo largo de la región de interpolación de la realización.



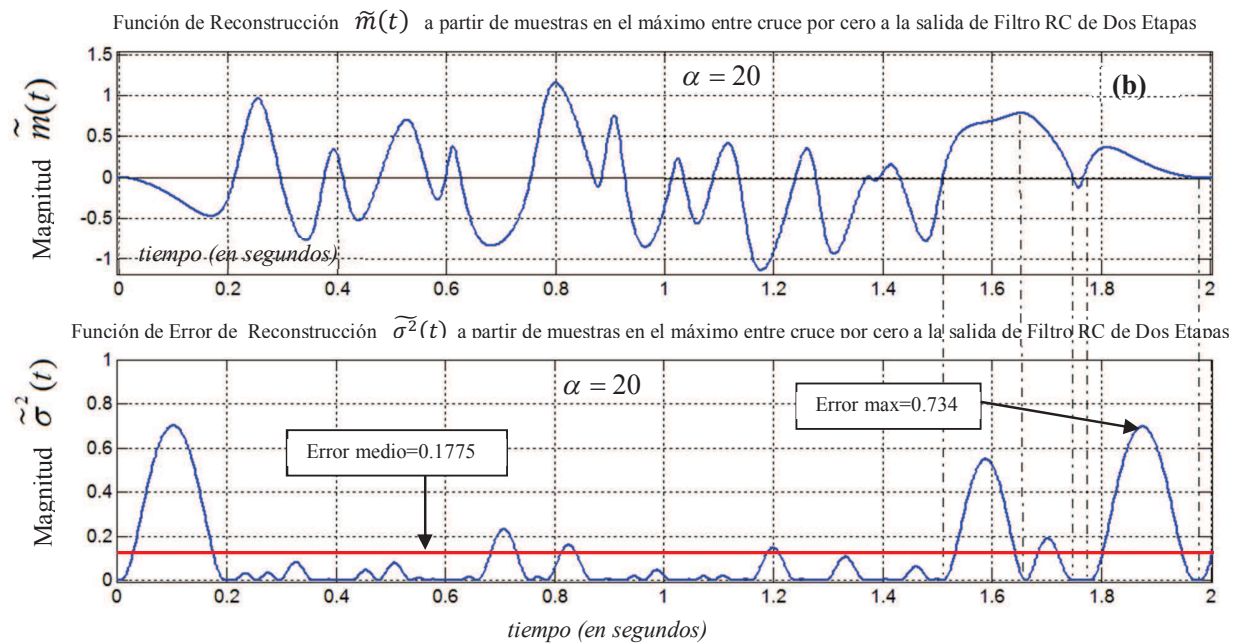


Figura 3.10 Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro RC de Dos Etapas con muestras en el máximo entre sus cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero a la salida de Filtro RC de Dos Etapas con $\alpha = 20$.

La presencia de una muestra en el máximo entre dos cruces por cero proporciona una mejor caracterización de la realización, puesto que ubica a la muestra en la posición exacta de amplitud máxima en su correspondiente posición en el tiempo, sin embargo el error de reconstrucción no es favorable respecto al caso 1, esto se debe al incremento de la distancia entre las muestras agregadas, ya que al ubicar la muestra en un máximo, desplazamos dicha muestra en el tiempo incrementado en algunos puntos la distancia de la muestra respecto a la anterior y a la subsecuente. Recordando que la función de error depende en gran medida de la distancia entre las muestras.

Un problema práctico en el PMR utilizando la regla de la media condicional para modelos de respuesta muy suave como los son los modelos de procesos diferenciables es, que si el parámetro de ancho de banda α de la función de covarianza es reducido, la matriz de covarianza utilizada en la regla de la esperanza matemática condicional sufre una singularidad al calcular su inversa, lo que nos arroja valores inconsistentes de reconstrucción y principalmente de error de reconstrucción.

La figura 3.10a muestra una realización del proceso de ruido blanco a la salida del filtro RC de dos etapas, en donde a dicha realización le será aplicada la metodología de reconstrucción óptima, dando como resultado la función de reconstrucción y error de reconstrucción en la figura 3.10b. Es posible notar que aunque es obtenido un valor pico alto de error (0.734), el error promedio compensa ese valor de error, esto considerando que solo se realiza el proceso de reconstrucción con únicamente tres muestras reales de la realización.

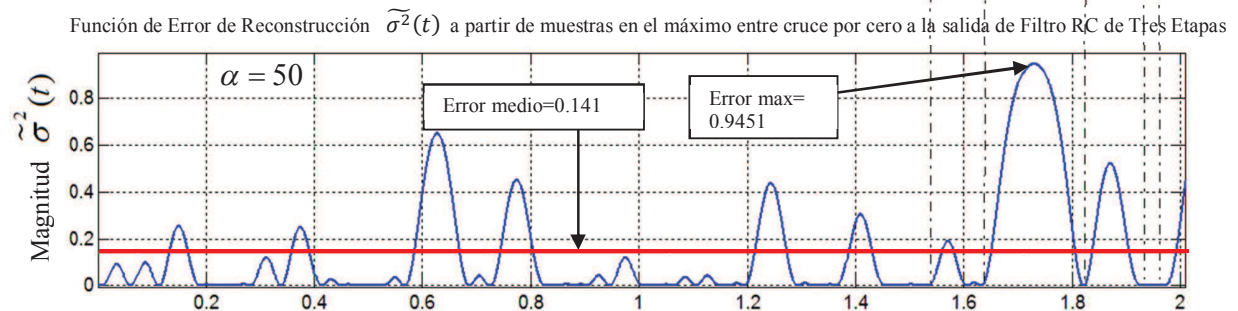
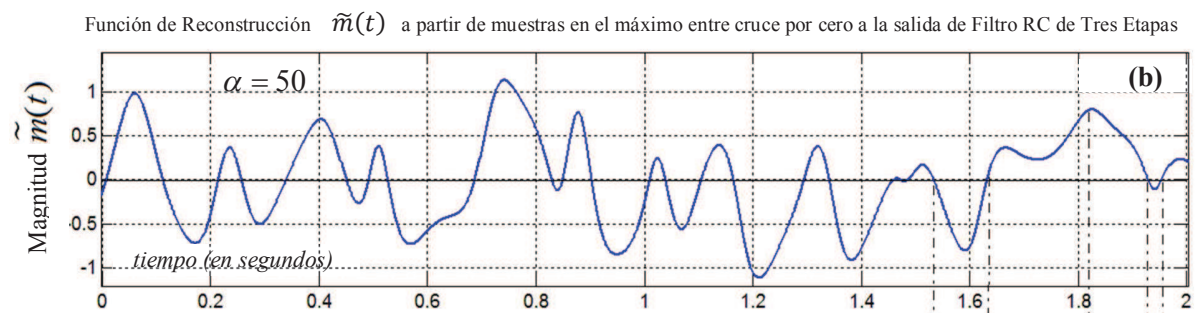
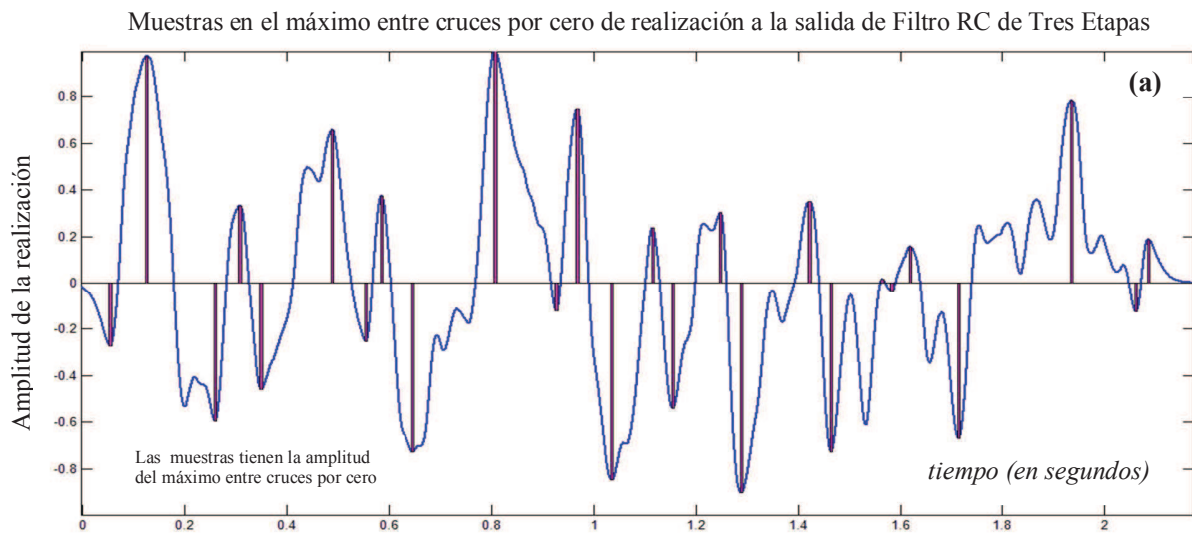


Figura 3.11 Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro RC de Tres Etapas con muestras en el máximo entre sus cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con Filtro RC de Tres Etapas.

Cuando es utilizado el Filtro RC de Tres Etapas como función básica para la reconstrucción de la realización, es sabido que este filtro proporciona reconstrucciones más suaves del proceso, de tal forma que se esperaría una mayor reducción en los valores de la función de error, así como una reducción en las componentes espectrales. Sin embargo el reducir parámetro de ancho de banda nuevamente fomenta a una singularidad en el cálculo de la matriz de covarianza. Es por tal motivo que para prueba en la figura 3.11 se tiene una reconstrucción de la realización para un valor $\alpha = 50$

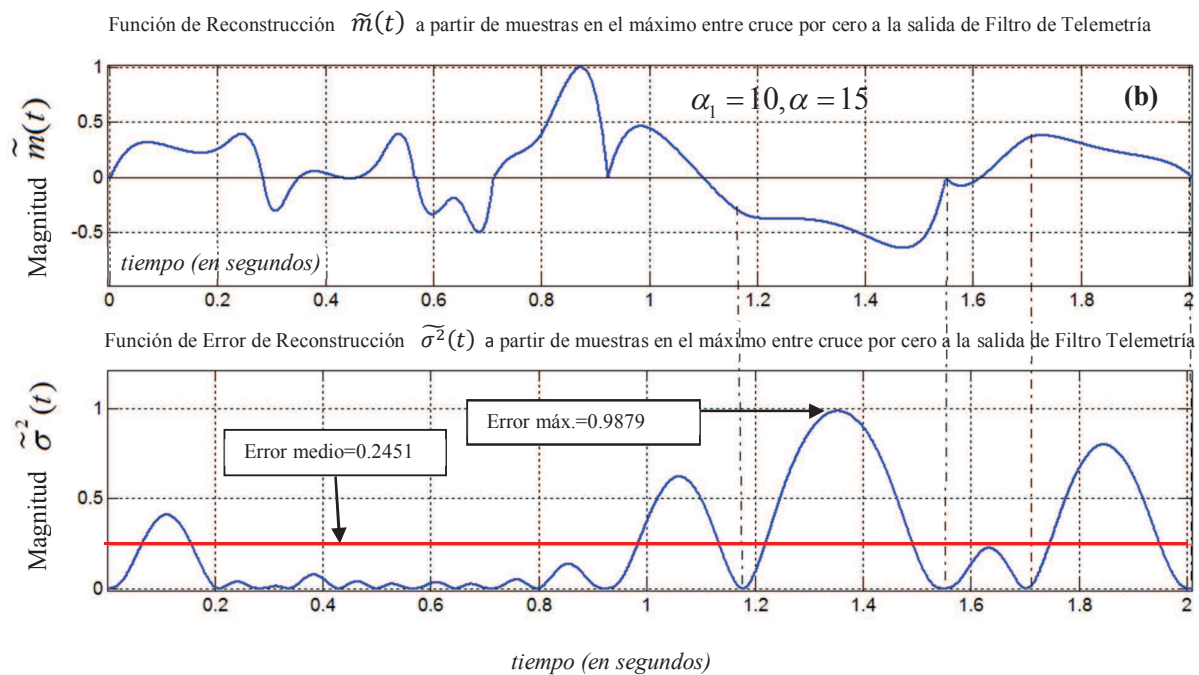
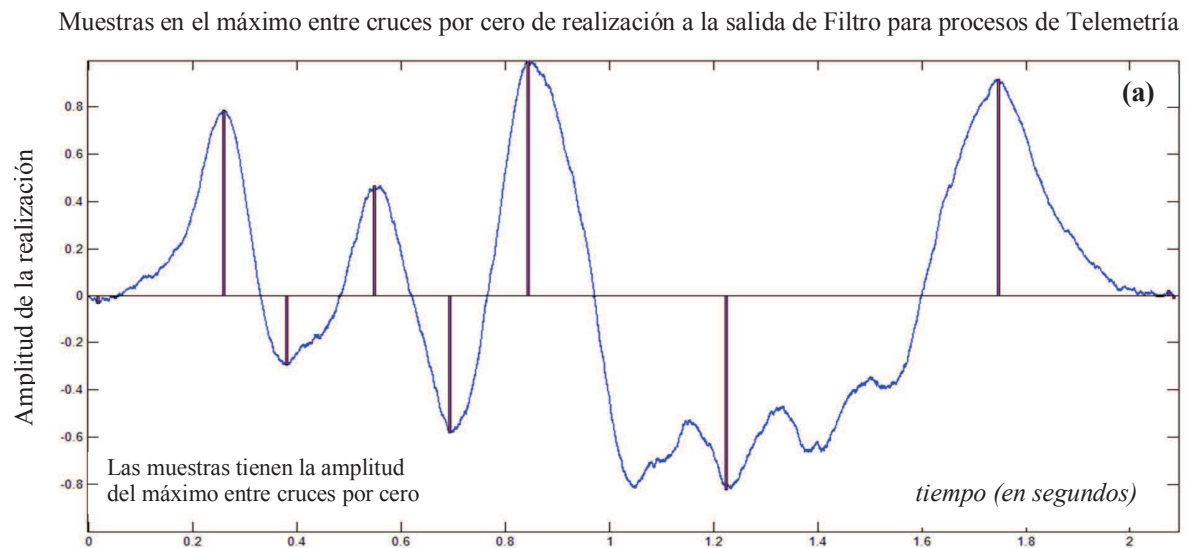


Figura 3.12 Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro de Telemetría con muestras en el máximo entre sus cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con Filtro de Telemetría.

La realización obtenida a la salida del filtro para procesos de telemetría produce una realización más suave respecto a las obtenidas con Dos y Tres Etapas de tal forma que la distancia entre muestras es aún mayor respecto de la distancia entre muestras de las realizaciones a la salida de los filtros RC de Dos y Tres Etapas, esto es claro comparando las figuras 3.10 (a), 3.11(a) y 3.12 (a).

El modelo anteriormente mencionado corresponde a un filtro de respuesta más suave respecto a los Filtros de Dos y Tres Etapas y es sabido que este modelo es diferenciable, y además es importante mencionar que el filtro de Telemetría y el filtro RC de Dos etapas, son en esencia los mismos, puesto que ambos contienen dos etapas de filtros RC acopladas por una etapa de buffer, sin embargo sus modelos matemáticos son distintos, puesto que el filtro de telemetría posee una respuesta más suave que el filtro RC de Dos Etapas. La diferencia es debido a que el modelo de telemetría incluye un buffer intermedio para acoplar la etapa de entrada con la de salida, lo que el filtro de Dos etapas no necesariamente debe incluirlo, otra diferencia entre ambos modelos consiste en que los parámetros de ancho de banda del filtro de telemetría son independientes, es decir son diferentes para la etapa de entrada como la de salida, mientras que en el filtro de Dos etapas, este parámetro de ancho de banda es común para la entrada y la salida.

Es posible observar una reducción importante de las componentes espectrales de la realización reconstruida con el modelo de Filtro de Telemetría, lo que aproxima la realización reconstruida a la realización original. Sin embargo como se mencionó anteriormente, no es suficiente ubicar solo una muestra entre cada intervalo de cruce por cero, puesto que no es suficiente información acerca de la realización. También es posible observar una reducción importante de las componentes espectrales de la realización reconstruida con el modelo de Filtro de Telemetría, lo que aproxima la realización reconstruida a la realización original.

3.4 PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A PARTIR DE UNA MUESTRA A LA MITAD ENTRE DOS CRUCES POR CERO, CON AMPLITUD EN FUNCIÓN DEL INTERVALO ENTRE CRUCE POR CERO.

A continuación es realizado el desarrollo del algoritmo no óptimo para la reconstrucción de una realización, teniendo como información solo una muestra en la mitad entre dos cruces por cero (primer caso), donde la muestra tiene una magnitud en función de la distancia entre cruce por cero, y por tanto no está en función de las magnitudes de la realización original. Para este primer caso de algoritmo no óptimo son no es considerado el estimador de error proporcionado por la regla de la media condicional, puesto que la muestra ubicada en la mitad no es de amplitud real, por tal motivo dos estimadores de error serán utilizados:

- El error calculado a partir del coeficiente de correlación, comparando las diferencias de error, puesto que la varianza condicional no considera las magnitudes de las muestras.
- La estimación del error cuadrático medio (ECM) entre la realización original (Estimador) y la realización a la salida del filtro (Estimada).

Es importante mencionar que la función de varianza condicional es una función de error de reconstrucción, en nuestro caso solo considerando la región de interpolación de la realización, por otro lado, el coeficiente de correlación no es un estimador de error como tal, sin embargo es un parámetro constante determinado por la ecuación (1-71), que evalúa si dos procesos tienen estructuras tanto en tiempo, frecuencia y magnitud similares. El primer algoritmo no óptimo tiene la principal ventaja de solo calcular y transmitir los cruces por cero de la realización, para posteriormente estimar muestras intermedias en función del intervalo, sin necesidad de transmitir las muestras del promedio.

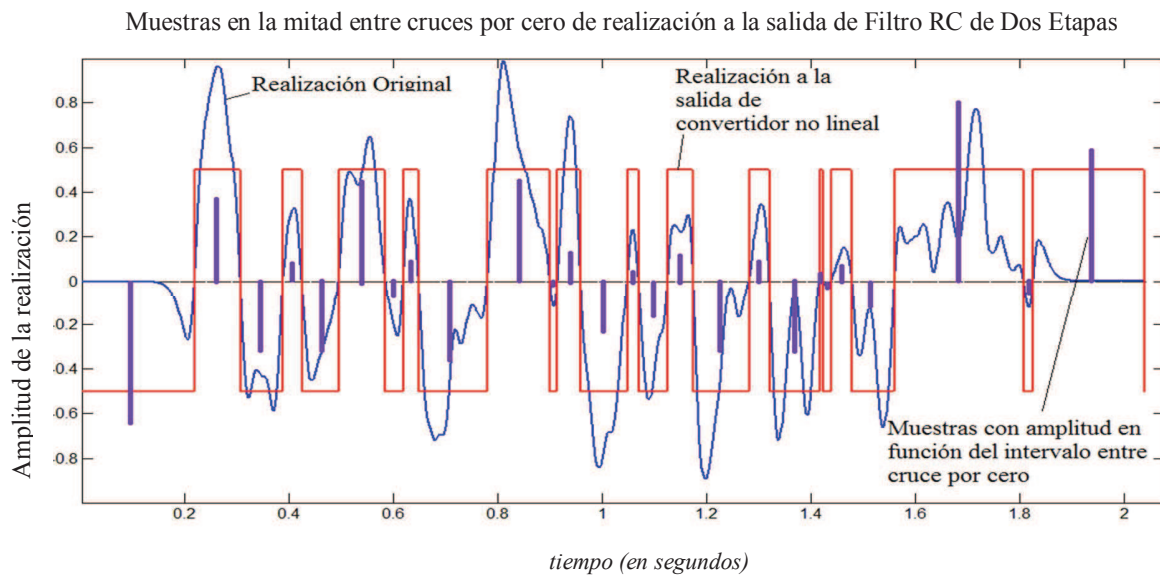


Figura 3.13 Grafica de Realización a la salida de Filtro RC de Dos Etapas con muestras en la mitad entre sus cruces por cero.

Es posible observar que la figura 3.13 muestra una realización a la salida del Modelo de Filtro RC de Dos Etapas, en donde es posible estimar los cruces por cero mediante la aplicación de un convertidor no lineal tipo *clipper* o limitador ideal y posteriormente estimar las muestras en función de los dos cruces por ceros; una vez estimadas las muestras es posible incluirlas entre cada par de cruce por cero, para posteriormente ser reconstruida utilizando tanto las muestras de cruce por cero y las muestras estimadas. Es posible reconstruir la realización haciendo uso de la regla de la media condicional para diversas funciones de covarianza.

En el PMR utilizando la media condicional es posible modificar los parámetros de la función de covarianza, en el caso de la reconstrucción de la figura 3.14 (a) fue considerado el valor de $\alpha = 20$, con la finalidad de obtener un amplio ancho de banda y evitar la singularidad en el cálculo de la matriz de covarianza.

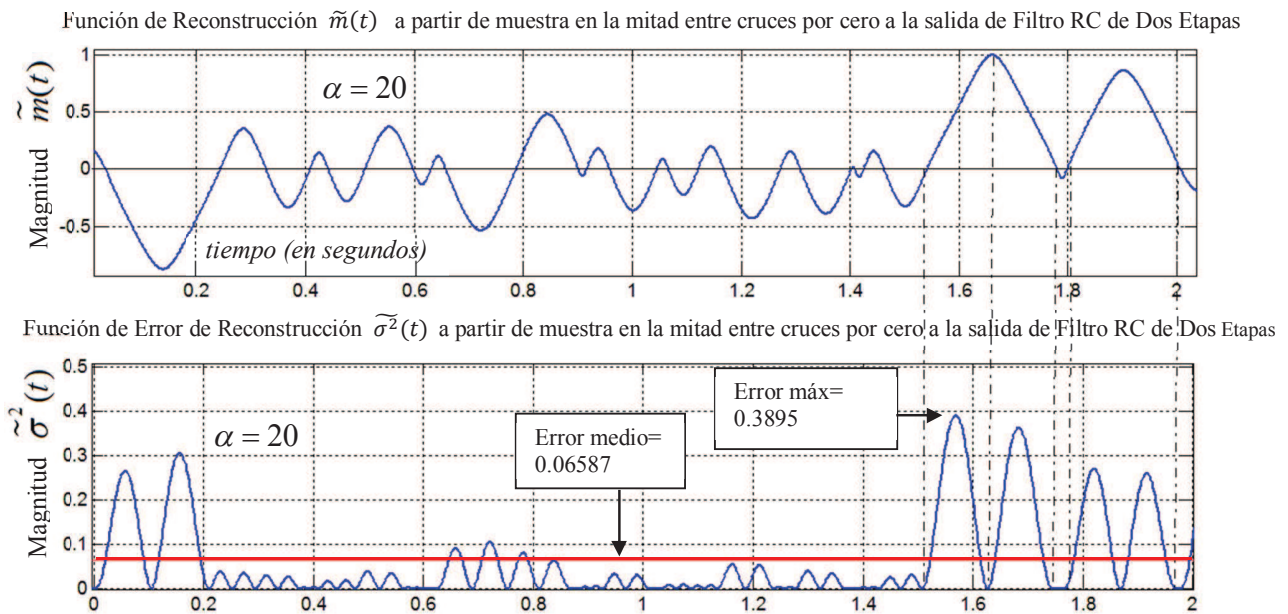


Figura 3.14 Graficas de Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con filtro RC de Dos Etapas.

Comparando la figura 3.5 y la figura 3.14 es posible observar que ambos errores de la funciones de error de reconstrucción son iguales, puesto que solo dependen del intervalo de tiempo entre cruces por cero y de la función de covarianza. Sin embargo la amplitud de las muestras en ambas figuras son diferentes, por lo que es difícil obtener el error de reconstrucción utilizando la varianza condicional para este segundo método. Por tal motivo será utilizado el error cuadrático medio (ECM) como nuevo estimador para esta comparación.

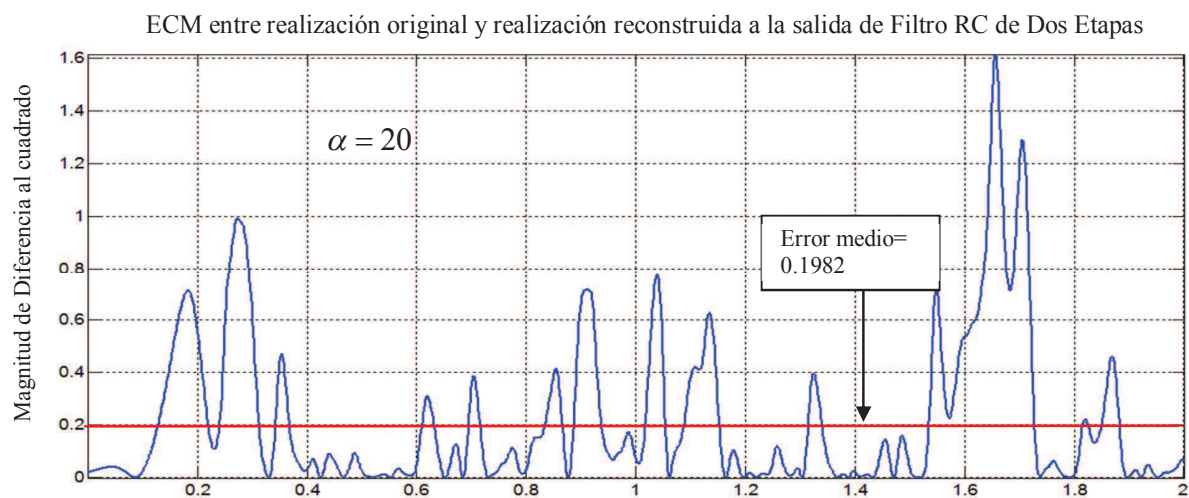


Figura 3.15 Error Cuadrático Medio de realización reconstruida a la salida de Filtro RC de Dos Etapas.

En la figura 3.15 es mostrada la estimación del error cuadrático medio entre la realización original (estimador) y la realización reconstruida (estimada). En este caso es posible comprar el error generado por la varianza condicional ($\hat{\sigma}^2(t) = 0.06587$) con el valor estimado por el error cuadrático medio ($ECM = 0.1982$), y concluir de que al no ser aproximaciones entre ellas, será descartada la función de varianza condicional como estimador de error en este método. Una característica importante al evaluar el error con el estimador ECM sucede cuando es aumentado el parámetro de ancho de banda definido por α , el ECM es reducido.

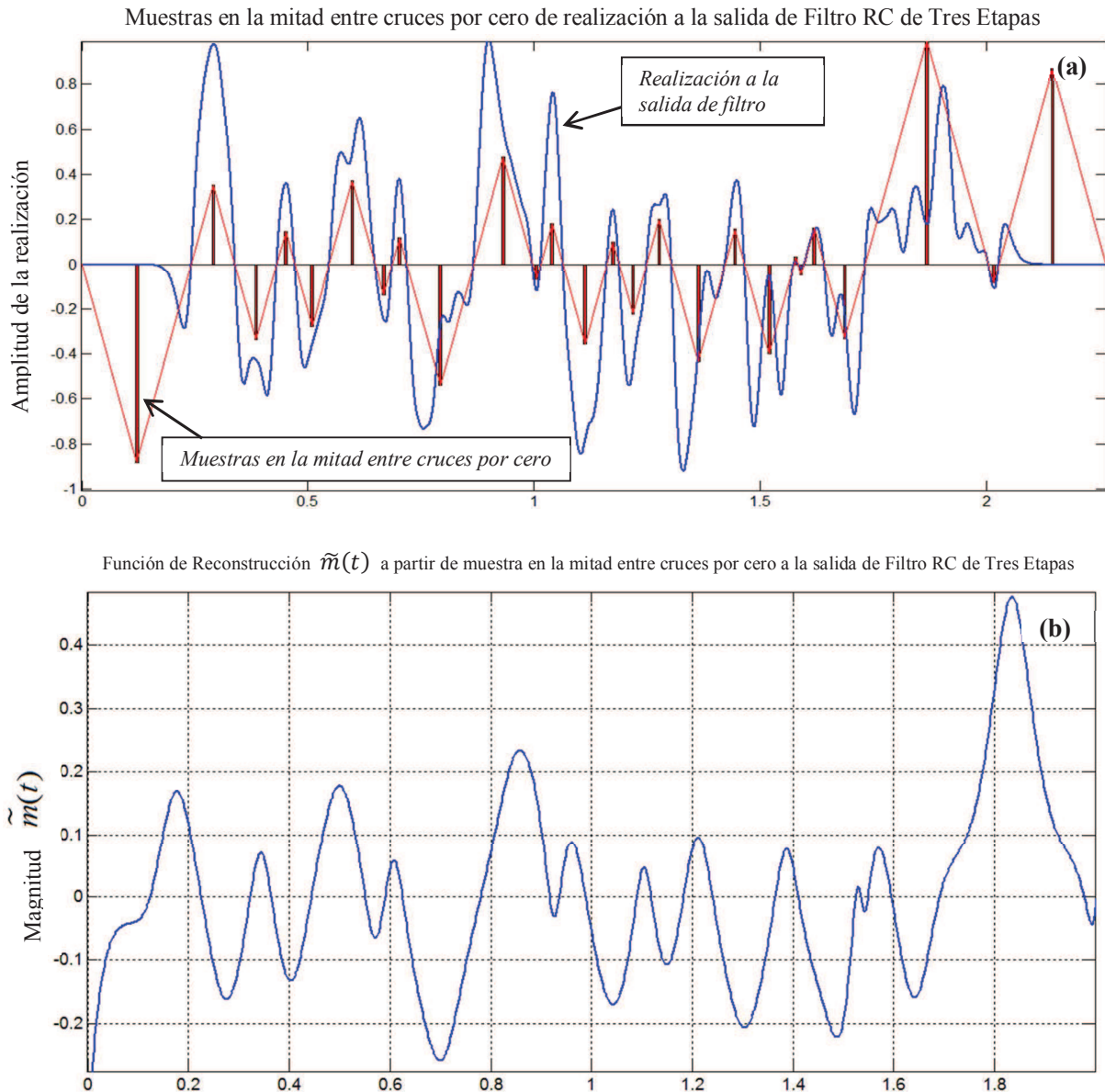


Figura 3.16 Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro RC de Tres Etapas con muestras en la mitad entre sus cruces por cero (b) Función de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero a la salida de Filtro RC de Tres Etapas.

La figura 3.16a muestra la obtención de las muestras de cruce por cero, incluyendo la muestra adicional intermedia estimada en función de la distancia entre los dos cruces por cero de las realizaciones, y cuya función de reconstrucción proporcionada por la regla de la media condicional es mostrada en la figura 3.16b. Es claro observar que hay una pérdida de componentes en la realización original, pues es necesario mencionar que para los casos de algoritmo óptimo y no óptimo se requiere al menos una muestra por cada par de cruce por cero, de no ser así sería obtenida una reconstrucción con amplitud cero lo cual no tendría sentido.

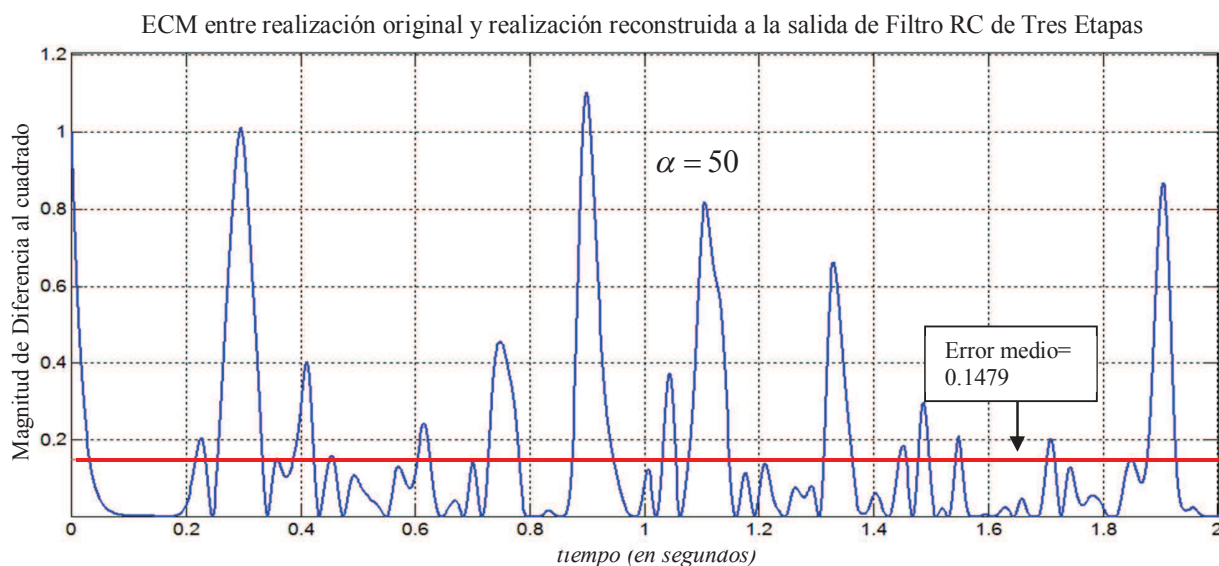
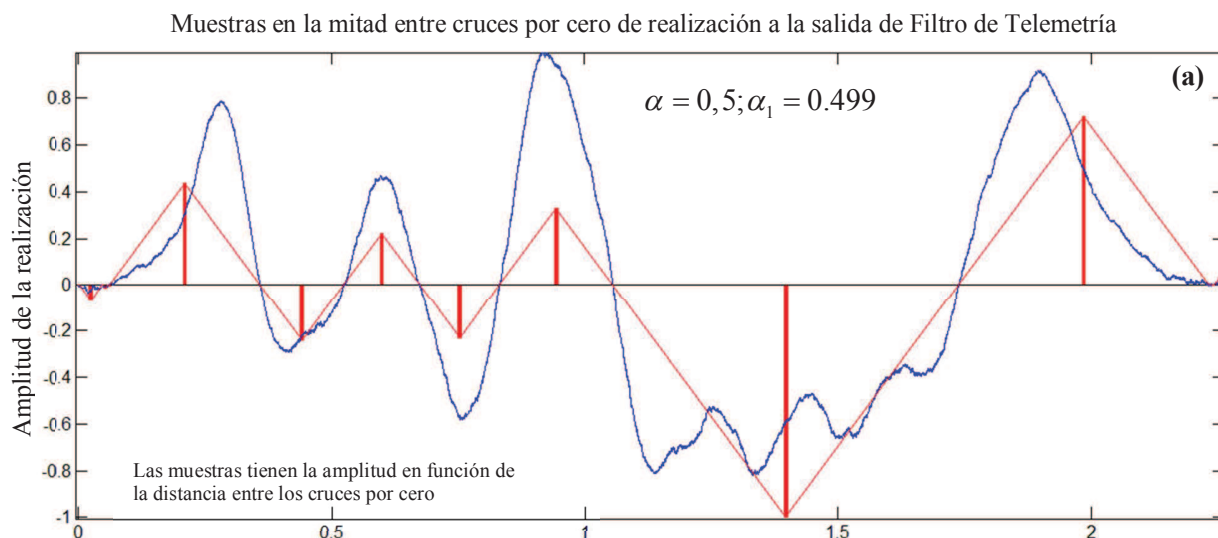


Figura 3.17 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Filtro RC de Tres Etapas.

Aplicando el primer caso del algoritmo no óptimo para reconstruir una realización a la salida de filtro para señal de telemetría, donde para ciertos valores de parámetro de ancho de banda α_1 y α será obtenida la realización del proceso a la salida de dicho filtro con sus respectivas funciones de reconstrucción y el cálculo de ECM correspondiente.



Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de muestra en la mitad entre cruces por cero a la salida de Filtro de Telemetría

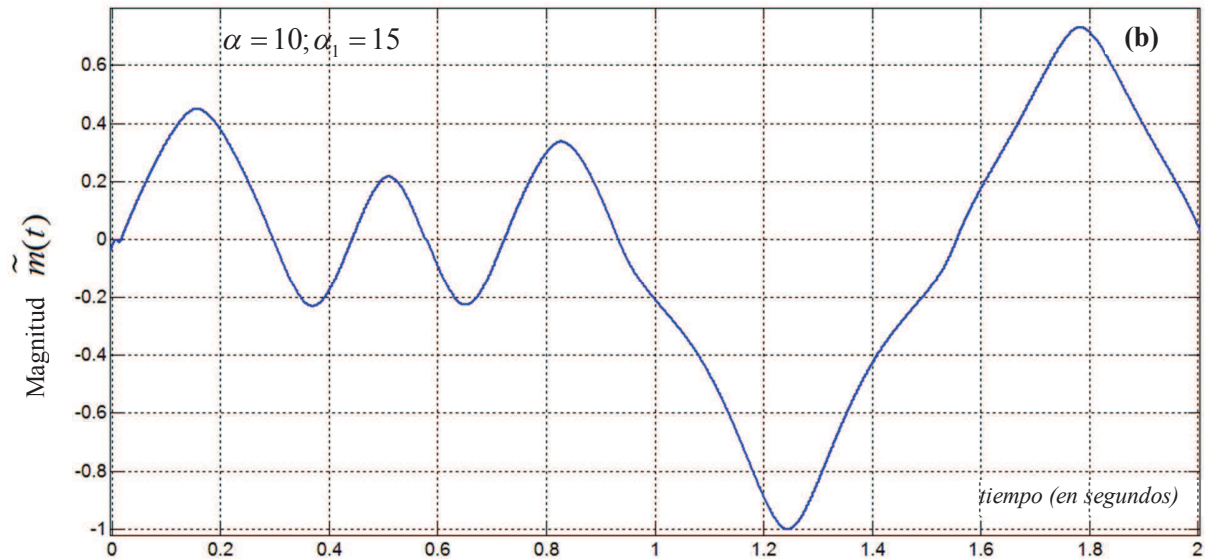


Figura 3.18 Gráficas de: a) Realización a la salida de Filtro de Telemetría con muestras en la mitad entre sus cruces por cero (b) Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero con Filtro RC de Telemetría.

En la figura 3.18 es posible observar la realización reconstruida a la salida del filtro para procesos de telemetría, donde dicha realización contiene tiempo entre intervalos de cruce por cero amplios y además en los puntos más amplios de la realización la muestra agregada y los cruces por cero determinan un valor de pico máximo en la función de error de reconstrucción determinada por ECM.

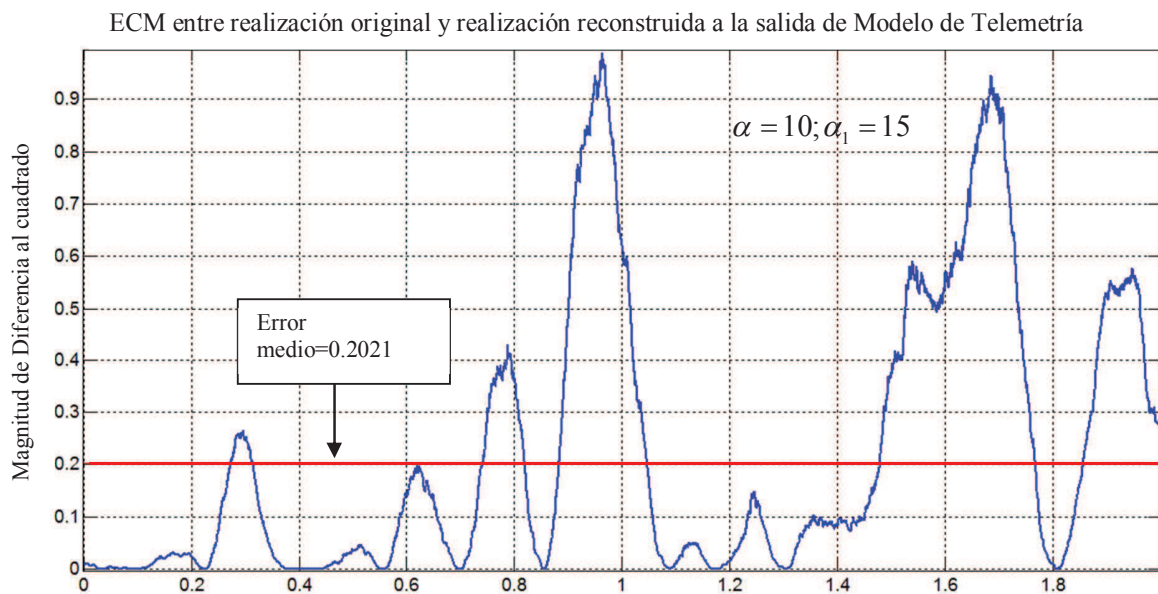


Figura 3.19 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Modelo de Telemetría.

3.5 PROCEDIMIENTO DE RECONSTRUCCIÓN DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A LA SALIDA DE CONVERTIDOR NO-LINEAL: LIMITADOR IDEAL O CLIPPER.

En el presente apartado es desarrollado el segundo algoritmo No-Óptimo de muestreo y reconstrucción de una realización a la salida de un convertidor no lineal de la clase limitador ideal, de tal modo que la única información obtenida acerca del proceso son los cruces por cero de la realización. Este proceso es posible observarlo en la figura 3.20, donde la realización ha perdido información al sufrir una saturación fuerte, además la magnitud pico a pico de la realización en saturación es la unidad. [18,19,27,28,29]

Recordemos que en esta segunda parte de algoritmo no óptimo no será utilizada la regla de la esperanza matemática condicional puesto que los datos proporcionados en la función de error generan incertidumbre debido al recorte o pérdida de información de la realización, por lo que será evaluado el coeficiente de correlación y la estimación ECM como parámetros de error de reconstrucción entre la realización original y la realización reconstruida a la salida de convertidor no lineal.

Es por tal motivo que reconstruir y evaluar una función de error de reconstrucción de una realización no lineal como es el caso de la señal clippered, resulta muy complicado desde el punto de vista estadístico, puesto que la función de densidad de probabilidad la cual es una característica importante que nos indica cómo se comporta el proceso o en este caso la realización, pierde sus propiedades Gaussianas.

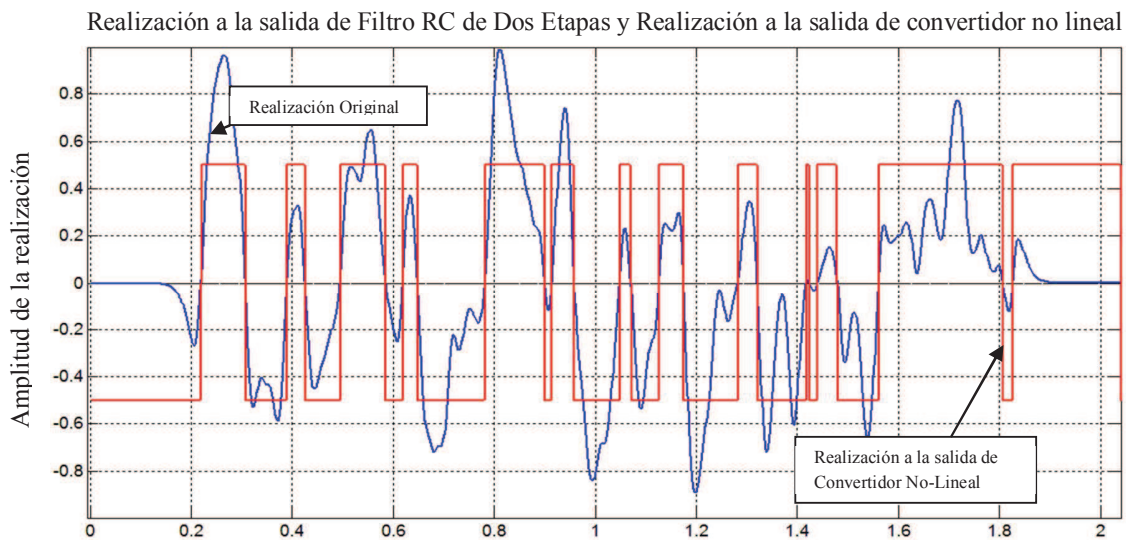


Figura 3.20 Aplicación de convertidor No-lineal (limitador ideal) sobre realización.

Posteriormente la realización pasa a través de un proceso de conversión no lineal, saturándola en amplitud dentro de un rango de ± 1 . Es importante mencionar que tanto la realización original como la obtenida a la salida del convertidor no lineal, serán comunes para todas las reconstrucciones. Una vez obtenida la realización saturada, procedemos a reconstruirla utilizando los diferentes modelos de filtros con diferentes parámetros de ancho de banda. Para el caso de filtro RC de Dos Etapas se obtendrá. El caso 2 del algoritmo no óptimo será considerada la realización a la salida del filtro RC de dos etapas común para todas las reconstrucciones con la finalidad de facilitar el análisis.

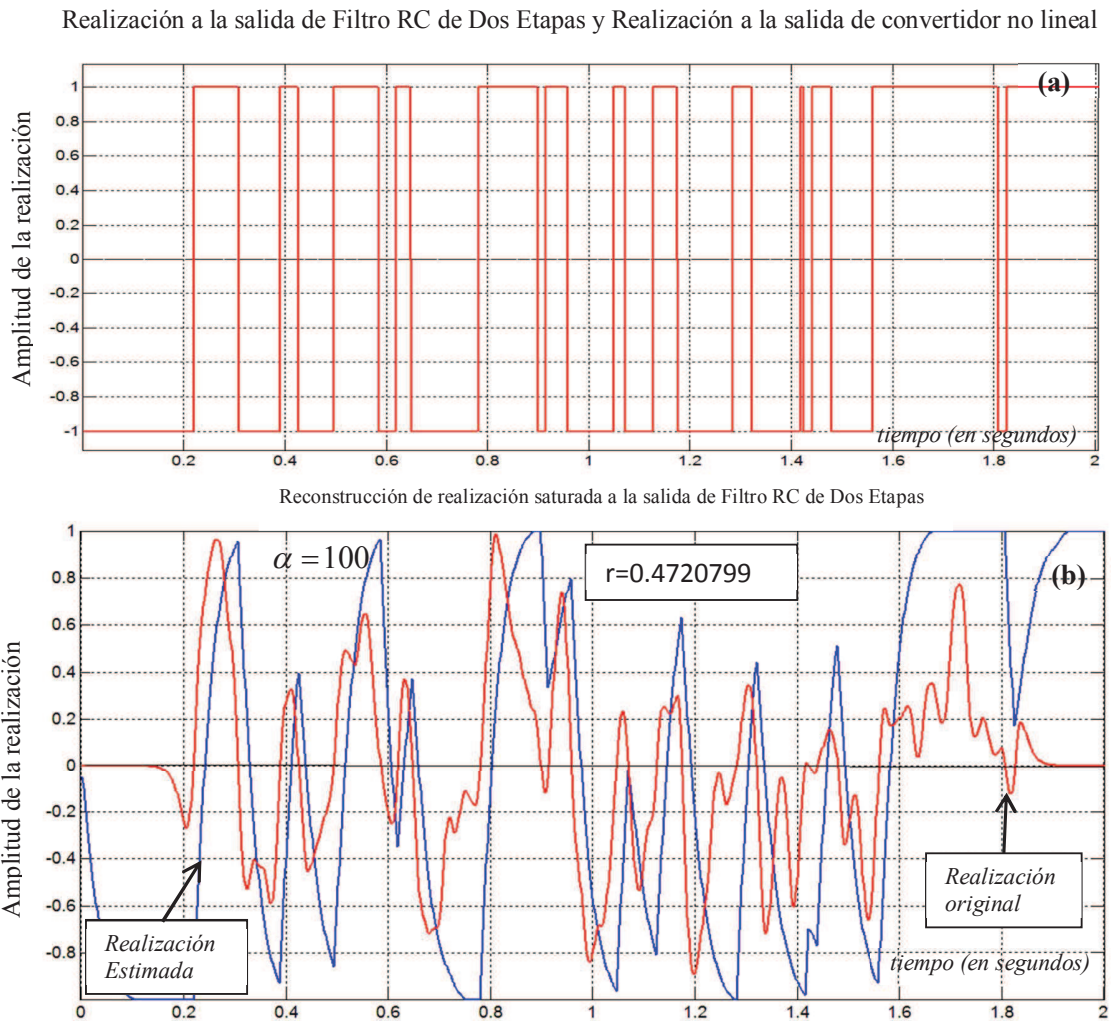


Figura 3.21 Graficas de: a) Realización a la salida de convertidor No-lineal: saturador o clipper
(b) Reconstrucción de realización saturada con Filtro RC de Dos Etapas.

Recordando que la función limitador ideal que se muestra en la figura 3.21 (a), es común para las diversas reconstrucciones, además de que también podemos obtener sus componentes espectrales como en el desarrollo del algoritmo óptimo. Calcular el error de reconstrucción de la realización de la figura 3.21 (b) resulta muy complicado, puesto que la realización a sufrido un proceso de saturación, bajo estas condiciones la realización a perdido información acerca de sus característica.

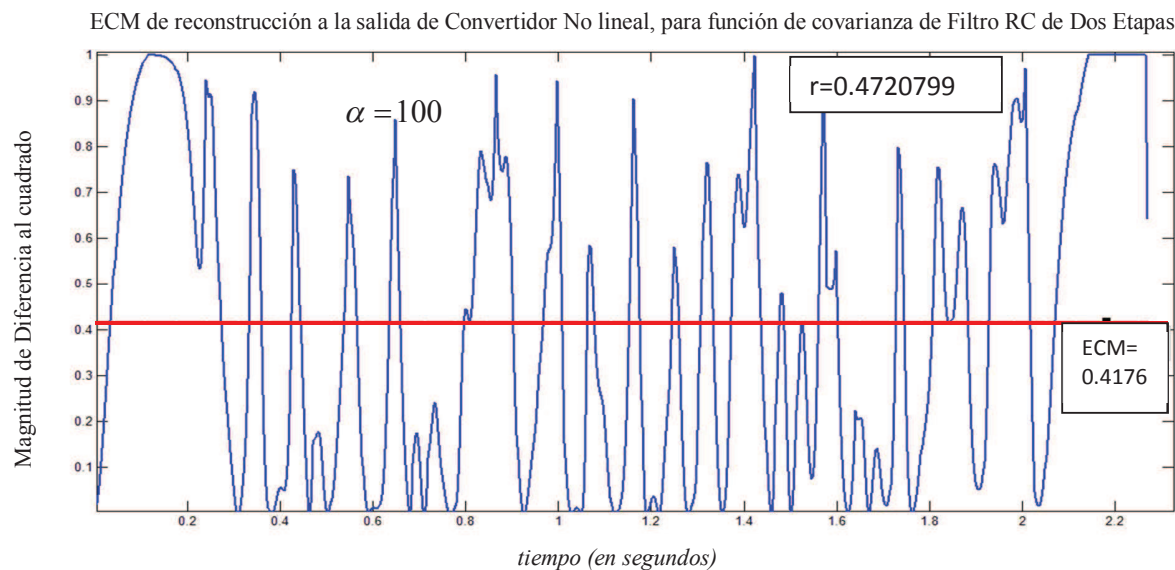


Figura 3.22 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Convertidor No lineal, con función de covarianza: Filtro RC de Dos Etapas.

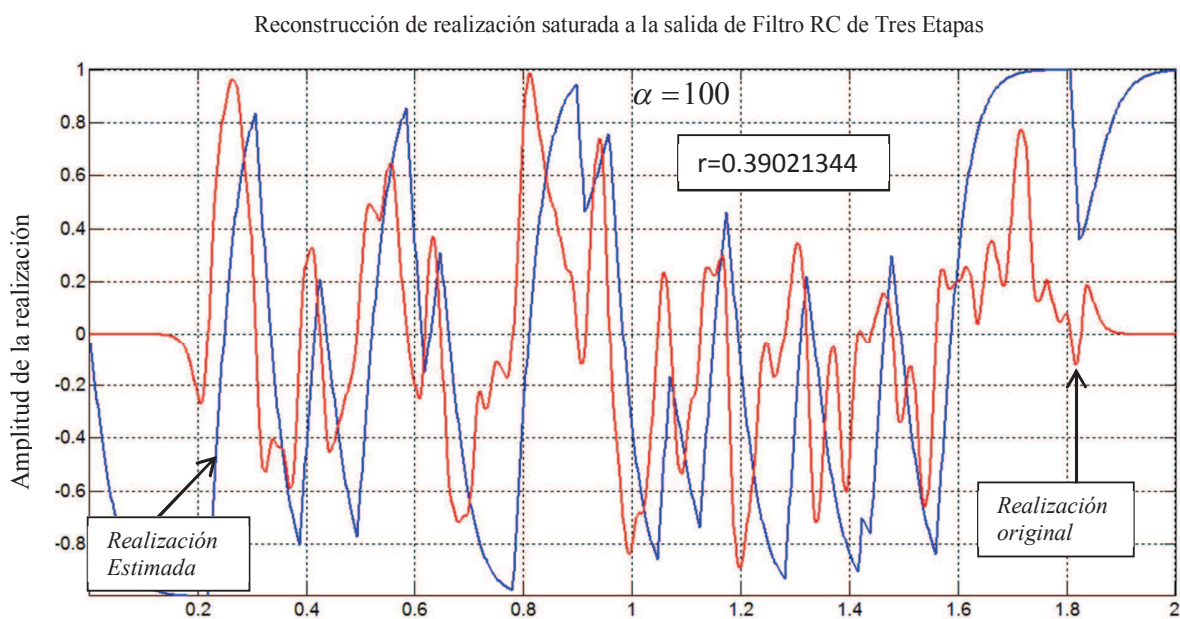


Figura 3.23 Gráficas de Reconstrucción de realización saturada con Filtro RC de Tres Etapas $\alpha = 100$.

La reconstrucción de la realización utilizando el método de filtrado para el caso del algoritmo no óptimo fue aplicado para reconstruir la realización del proceso a la salida del convertidor no lineal tipo clipper, haciendo pasar la realización en saturación a través del filtro RC de tres etapas resultando en una reconstrucción no gaussiana y con pérdida en la información de la realización original tal y como se muestra en la figura 3.23. Por otro lado es posible estimar ECM de reconstrucción de esta realización.

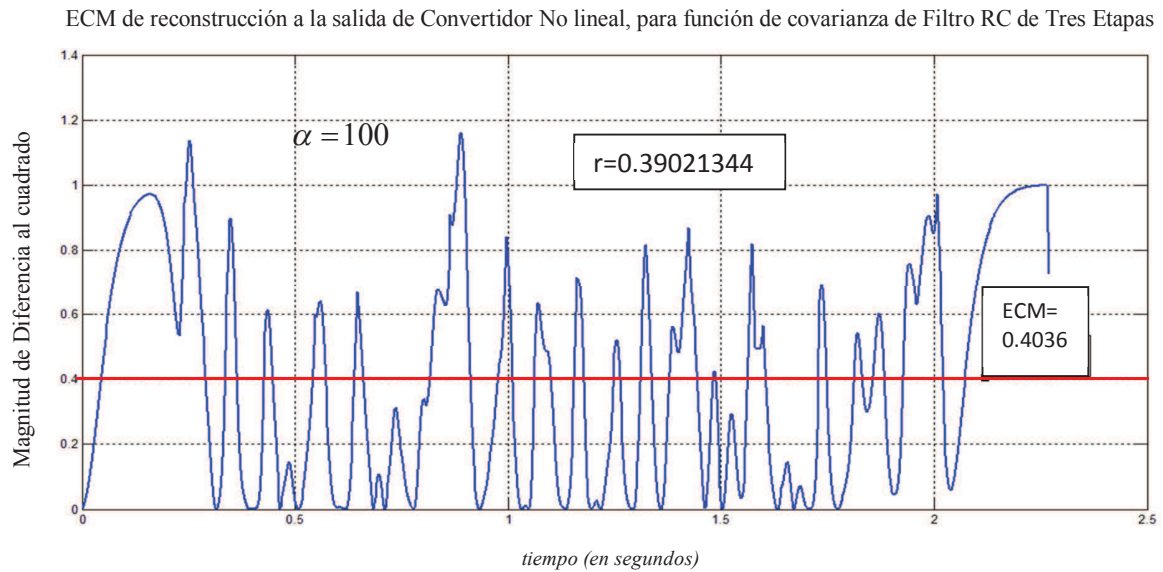


Figura 3.24 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Convertidor No lineal, con función de covarianza: Filtro RC de Tres Etapas.

La estimación de ECM muestra un incremento puesto que la reconstrucción de realización no es completa, debido a la pérdida de componentes en la realización original debido al proceso de saturación. Además es posible notar un cambio de fase debido a la naturaleza de repuesta del filtro, esto es claro de observar en las figuras 3.24 y 3.25, puesto que los cruces por cero de la realización original se encuentran desplazados respecto a la realización reconstruida.

A continuación se procede a reconstruir la misma realización utilizando filtros RC de tres etapas y Filtro para señales de Telemetría, comparando sus espectros en dominio de la frecuencia.

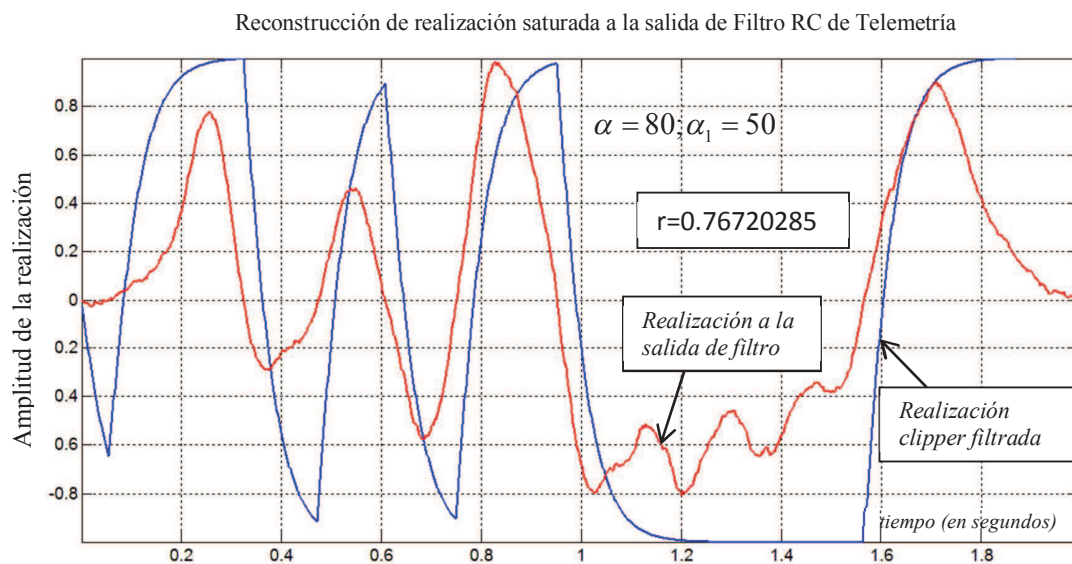


Figura 3.25 Graficas de Reconstrucción de realización con Filtro RC de Telemetría $\alpha_1 = 50, \alpha = 80$

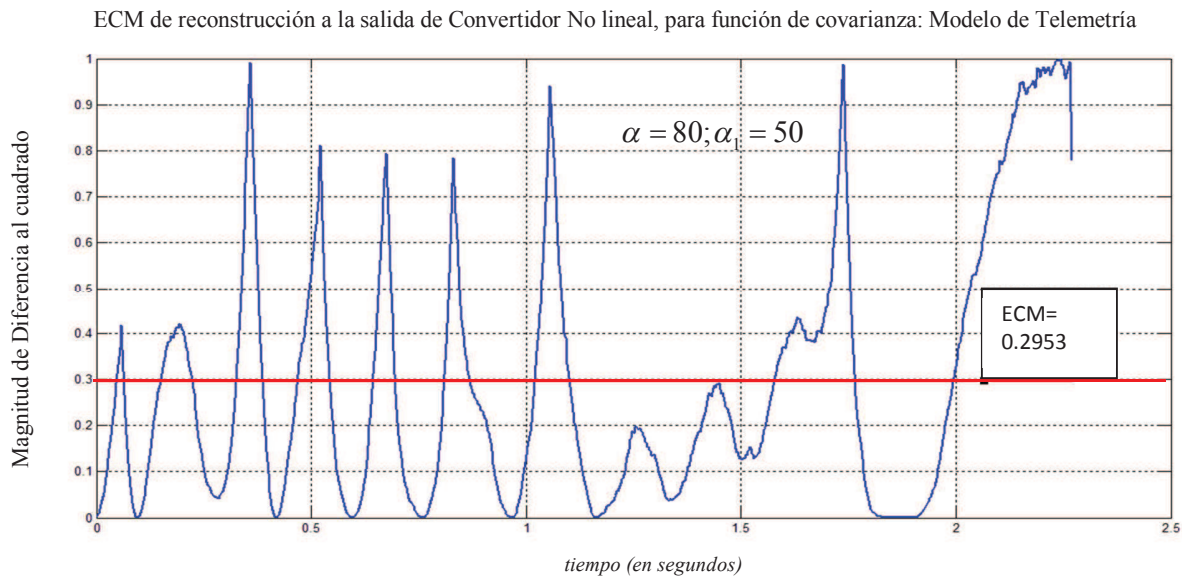


Figura 3.26 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Convertidor No lineal, con función de covarianza: Modelo de Telemetría.

En el caso del modelo para procesos de telemetría, el ECM disminuye en comparación de los otros modelos utilizados, debido nuevamente a que su respuesta es suave y contribuye a este hecho.

3.6 RESULTADOS

Aunque el obtener resultados de función de reconstrucción y función de error de reconstrucción para modelos de procesos diferenciables no es objetivo de la investigación, dichos modelos nos permitieron evaluar las características y desempeño de los algoritmos óptimo y no óptimo como parte del objetivo del presente capítulo, posteriormente, serán realizadas las evaluaciones sobre modelos de procesos no diferenciables, comparando con los resultados obtenidos en los modelos de procesos diferenciables. El primer caso del algoritmo no óptimo, en donde una muestra es colocada entre dos muestras de cruce por cero, con amplitud en función de la distancia del intervalo de cruce por cero, tiene una ventaja importante. Puesto que la amplitud de la muestra es calculada como una cifra proporcional al intervalo de muestreo, de tal forma que no es necesario enviar la muestra dentro del intervalo de dos cruces por cero, pues es suficiente enviar solo las dos muestras de cruce por cero de la realización y en el receptor es posible estimarla. Para los casos de algoritmo óptimo la información de las muestras de cruce por cero es enviada dentro de los flancos de la realización en saturación, lo que representa un método simple de transmisión de muestras. El segundo caso de algoritmo no óptimo tiene la ventaja de no incluir la tercer muestra intermedia dentro de los dos cruces por cero, de tal forma de evaluar únicamente los cruces por cero de las realizaciones, sin embargo la reconstrucción de este tipo de realizaciones no proporciona valores de error satisfactorios.

En las tablas (3.1), (3.2) y (3.3) son presentados los resultados obtenidos de calcular los valores máximo pico y promedio de la función de error de reconstrucción además de compararlos con el coeficiente de correlación de la ecuación (1-71) entre la realización original y la realización reconstruida.

Recordemos que un valor en el coeficiente de correlación $r=1$, indica que la similitud entre la realización original y la reconstruida es máxima o total, en otras palabras las dos realizaciones son idénticas, partiendo de este concepto se puede evaluar ampliamente este parámetro. A continuación son mostrados los resultados de error de reconstrucción de los casos 1 y 2 de algoritmos Óptimo y No-Óptimo para diversos modelos de procesos diferenciables con algunos parámetros de ancho de banda.

Filtro Usado	Parámetro de ancho de banda α		Coeficiente de correlación normalizado r	ECM
Filtro RC de Dos Etapas	20		0.1622754	0.2478
	200		0.0691821	0.1701
Filtro RC de Tres Etapas	50		0.0651318	0.2076
	200		0.0618609	0.1606
Filtro de Telemetría	α	α_1		
	15	10	0.5354674	0.2434
	0.49	0.5	0.2716746	0.2891
	0.1	10	0.2307142	0.2425
	1e-5	1	0.4235977	0.2535

Tabla 3.1 Cálculo de Coeficiente de correlación y ECM para **caso 1 de algoritmo No-óptimo** y comparación con función de error $\widehat{\sigma}^2(t)$, utilizando modelos de procesos diferenciables.

Filtro Usado	Parámetro de ancho de banda α		Coeficiente de correlación r entre realización original y reconstruida	ECM
Filtro RC de Dos Etapas	200		0.63495119	0.4378
	20		0.21868623	0.456
	2		0.18700073	0.4673
	0.2		0.18654039	0.4675
Filtro RC de Tres Etapas	200		0.58100574	0.4352
	50		0.19928610	0.3679
	8/3		0.04226458	0.448
	3/8		0.03608395	0.310
Filtro de Telemetría	α	α_1		
	50	80	0.76720285	0.2953
	0.499	0.5	0.016893699	0.4518
	10	15	0.350556930	0.301
	0.1	10	0.012592476	0.4487
	1e-5	1	0.018110177	0.3575

Tabla 3.2 Cálculo de Coeficiente de correlación y ECM para **caso 2 de algoritmo No-Óptimo**, utilizando modelos de procesos diferenciables.

Para evaluar el algoritmo óptimo solo es requerido la metodología basada en la regla de la media condicional, en donde la varianza condicional es utilizada como estimador del error de la reconstrucción para los diversos modelos de procesos diferenciables con el objetivo estricto de evaluar la calidad de los algoritmos de reconstrucción

		Caso 1 Óptimo (1 muestra en la mitad entre CC)		Caso 2 Óptimo (1 muestra en el máximo entre CC)	
Filtro Usado	Parámetro de ancho de banda α	Error máximo $\widetilde{\sigma}^2(t)$	Error medio $\widetilde{\sigma}^2(t)$	Error máximo $\widetilde{\sigma}^2(t)$	Error medio $\widetilde{\sigma}^2(t)$
Filtro RC de Dos Etapas	20	0.6118	0.1354	0.734	0.177
	200	0.9998	0.8488	0.9998	0.8567
Filtro RC de Tres Etapas	50	0.9765	0.2856	0.9788	0.3176
	200	0.99987	0.7766	0.9998	0.7856
Filtro de Telemetría	α	α_1			
	10	15	0.971	0.7941	0.2004
	0.49	0.5	0.998	0.99921	0.4965
	0.1	10	0.074	0.12599	0.0366
	1e-5	1	0.998	0.99875	0.9766

Tabla 3.3 Cálculo de Función de Error de reconstrucción $\widetilde{\sigma}^2(t)$, para el caso 1 y 2 de algoritmo Óptimo, utilizando modelos de procesos diferenciables.

3.7 COMENTARIOS

El objetivo de este capítulo fue el desarrollar los algoritmos óptimo y no óptimo para el procedimiento de muestreo y reconstrucción de procesos Gaussianos, implementando dicho algoritmo computacionalmente y aplicándolo a modelos de procesos diferenciales más comunes, con la finalidad de evaluar el desempeño de los propios algoritmos. El desarrollo del algoritmo no-óptimo surgió como una necesidad para la reconstrucción de una realización la cual ha sufrido un proceso de saturación mediante un convertidor no-lineal, este algoritmo no proporciona una función de error de reconstrucción puesto que no sabemos nada acerca de la realización original, bajo estas condiciones resulta complicado evaluar la función de error, sin embargo, el modelo óptimo el cual utiliza la regla de la media condicional nos proporciona un cálculo de error de reconstrucción, gracias a sus características estadísticas. Estas características estadísticas son principalmente la función de covarianza, función de densidad de probabilidad, así como también la multitud de muestras agregadas entre dos cruces por cero (esta última aunque no es una característica estadística también influye en la determinación del error). Es posible notar que la densidades espectrales de las realizaciones reconstruidas dependen en gran medida de los parámetros de ancho de banda definidos por α de la función de covarianza usada por la regla de la media condicional, entre mayor sea este parámetro, mayor serán las componentes espectrales de la reconstrucción y mayor será la función de error de reconstrucción.



CAPÍTULO 4

DESARROLLO DE ALGORITMO ÓPTIMO PARA MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS GAUSSIANOS NO-DIFERENCIABLES

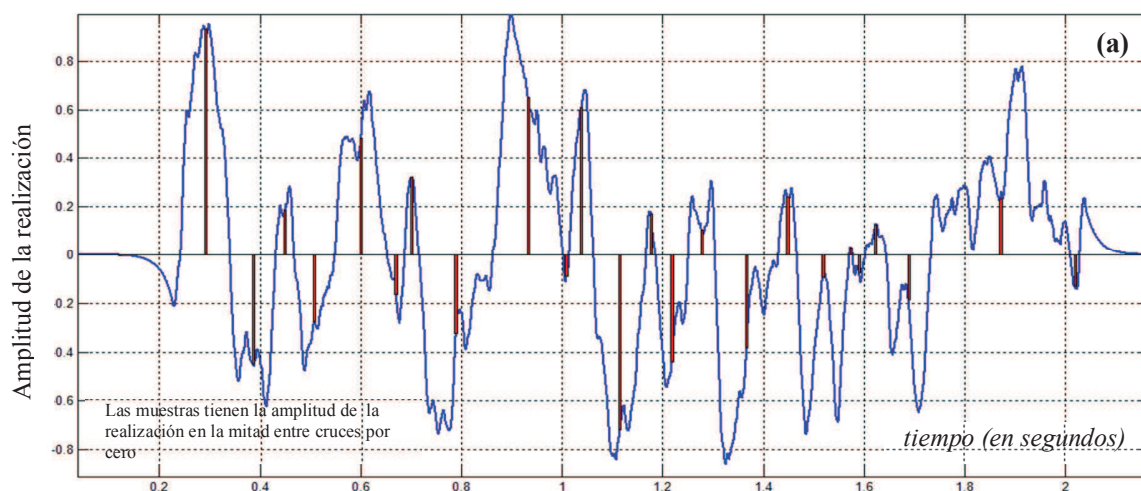
En el capítulo anterior se desarrollaron los esquemas para implementación de algoritmos óptimo y no óptimo para modelos mas comunmente usados en análisis de señales y telecomunicaciones. Ahora en este apartado se procede a la implementación del algoritmo óptimo a modelos de procesos no diferenciables como los estudiados en capitulos anteriores. Los modelos utilizados corresponden en escencia a filtro RC de una Etapa (que aunque es un modelo comunmente utilizado hemos comprobado que es un modelo de proceso no diferenciable), modelo para procesos de voz y señal triangular a la salida de filtro acoplado.

De esta forma es posible evaluar y comparar resultados respecto a modelos diferenciales, comprobando que los modelos de procesos no diferenciales estan asociados a procesos caóticos, característica que hace presente un incremento en la densidad espectral.

4.1 PMR DE LAS REALIZACIONES DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS NO-DIFERENCIABLES CON UNA MUESTRA EN LA MITAD ENTRE DOS CRUCES POR CERO.

Desarrollando la metodología del capítulo 3, se procede con la implementación del primer caso del algoritmo óptimo, que consiste en el PMR de una realización con una muestra en la mitad entre cruces por cero con magnitud a la mitad de la realización, evaluando la función de reconstrucción y error de reconstrucción a la salida de los modelos de procesos no diferenciables.

Muestras en la mitad entre cruces por cero de realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa



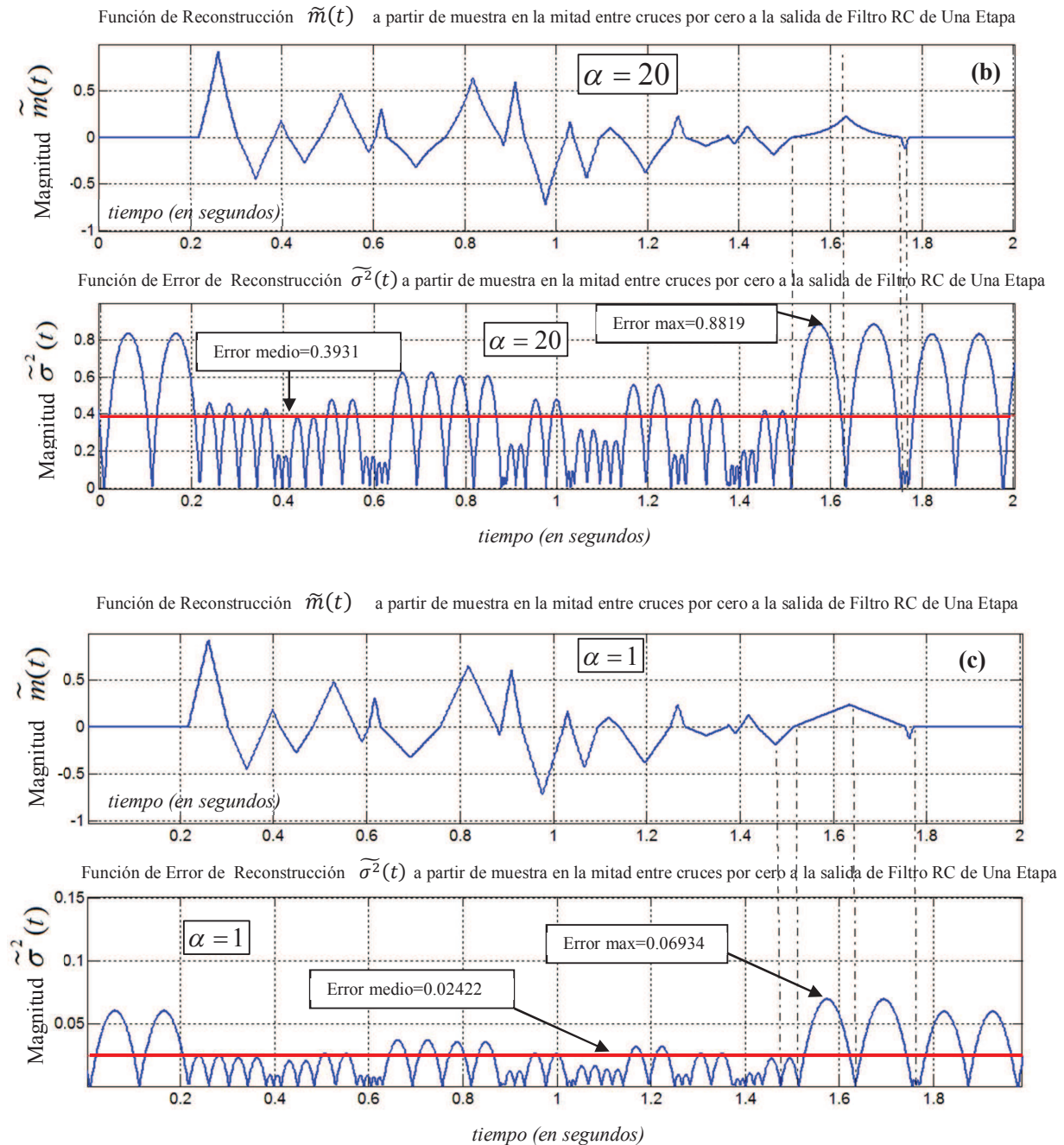


Figura 4.1 Graficas de: a) Realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa con muestra en la mitad entre cruces por cero (b) Función de reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada en la mitad entre dos cruces por cero a la salida de Filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 20$, y con (c) $\alpha = 1$.

En la figura 4.1 es posible observar las funciones de reconstrucción y error de reconstrucción de la realización a la salida de filtro RC de una etapa, y donde al incrementar el parámetro de ancho de banda incrementa el error de reconstrucción, por otro lado el error de reconstrucción con solo tres muestras y $\alpha = 1$, proporciona valores de error promedio de reconstrucción aceptables.

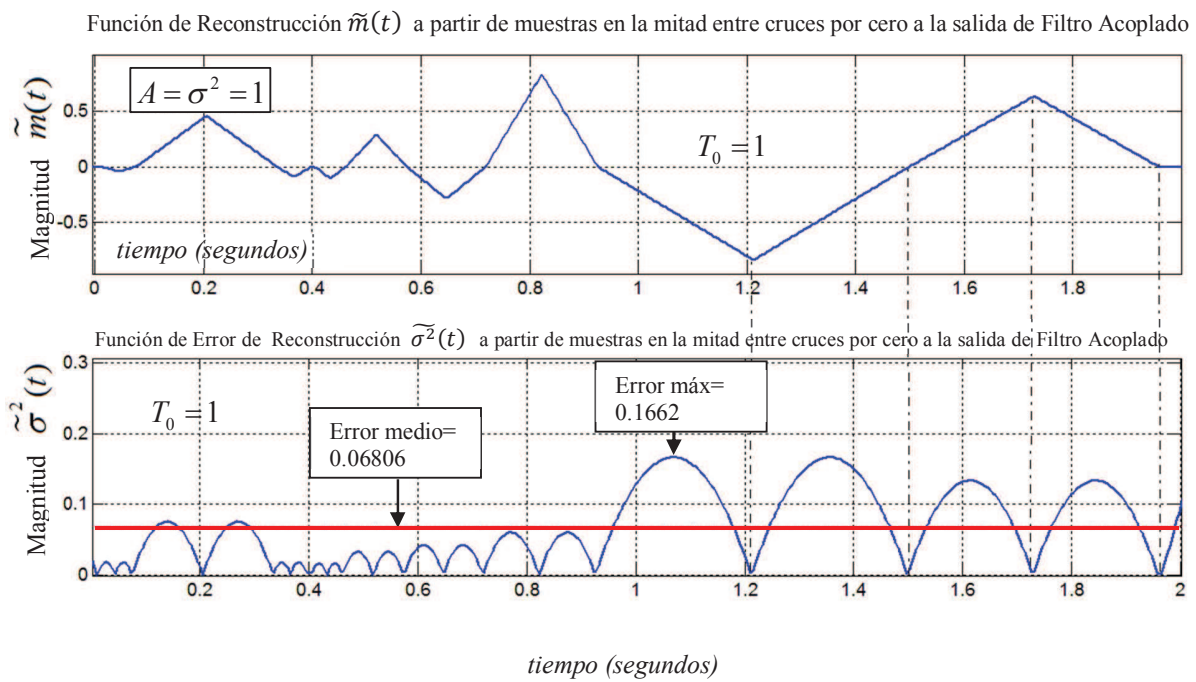
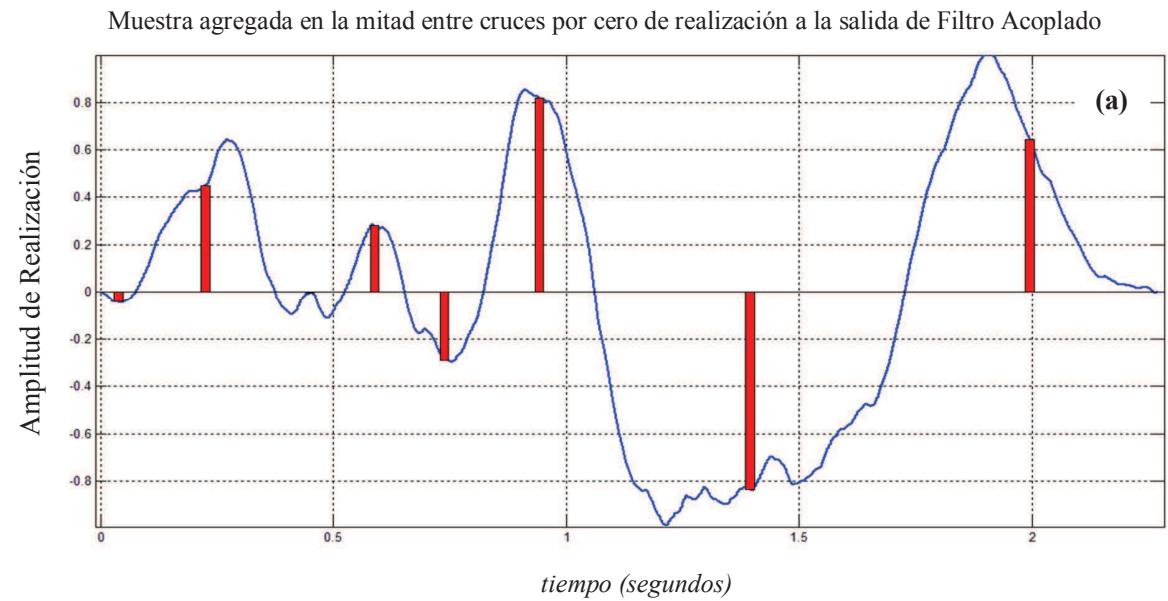
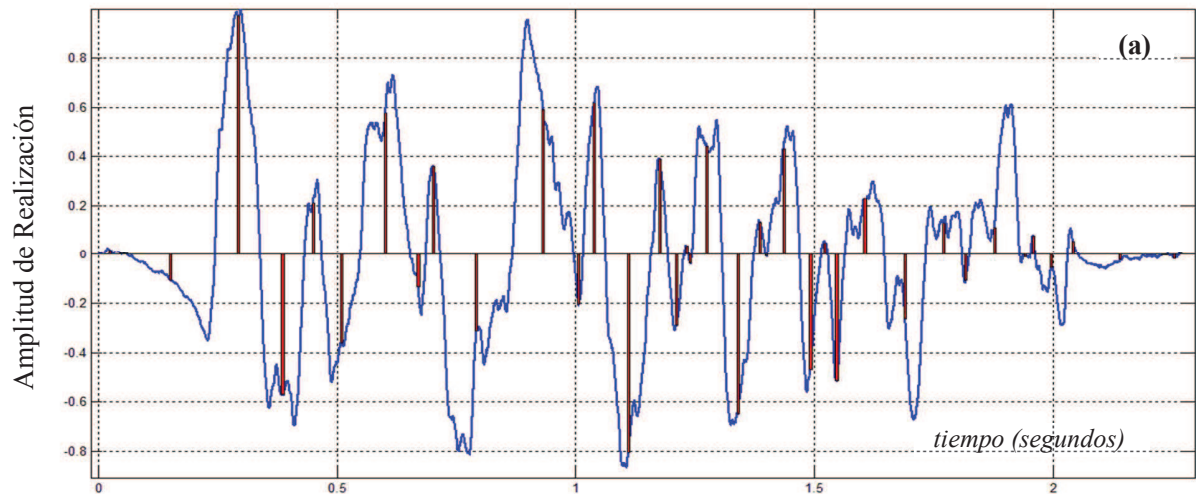


Figura 4.2 Graficas de: (a) Realización a la salida de Filtro Acoplado y muestras agregadas en la mitad entre sus cruces por cero (b) Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción de Realización a la salida de Filtro Acoplado a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con $T_0 = 1$ y $A=1$.

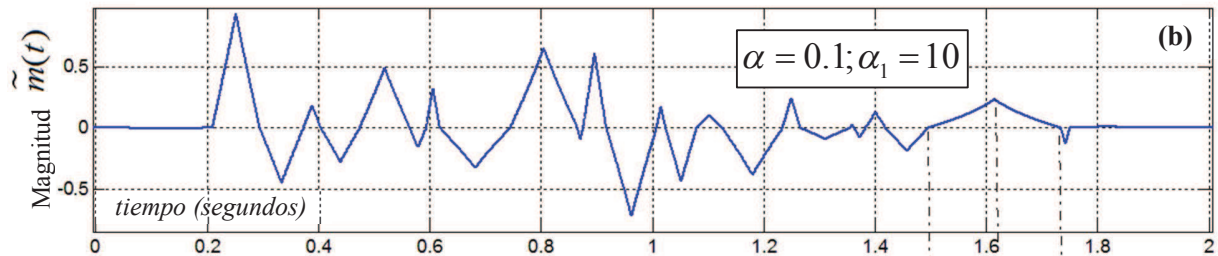
Para el caso de la reconstrucción de la realización con función de covarianza triangular a la salida de filtro acoplado, es posible tener valores aceptables en el error de reconstrucción, al igual que el caso del filtro RC de una etapa, la reconstrucción es caótica.

En la figura 4.3 es posible observar que el uso de la función de covarianza a la salida de modelo para procesos de voz, proporcionan reconstrucciones más caóticas en comparación con filtro RC de una etapa y filtro acoplado, fomentando a un incremento en el error de reconstrucción. De igual manera es posible contribuir a la reducción del error proporcionalmente, reduciendo los valores de parámetros de ancho de banda, sin embargo no hay que olvidar que este modelo de proceso es por naturaleza caótico.

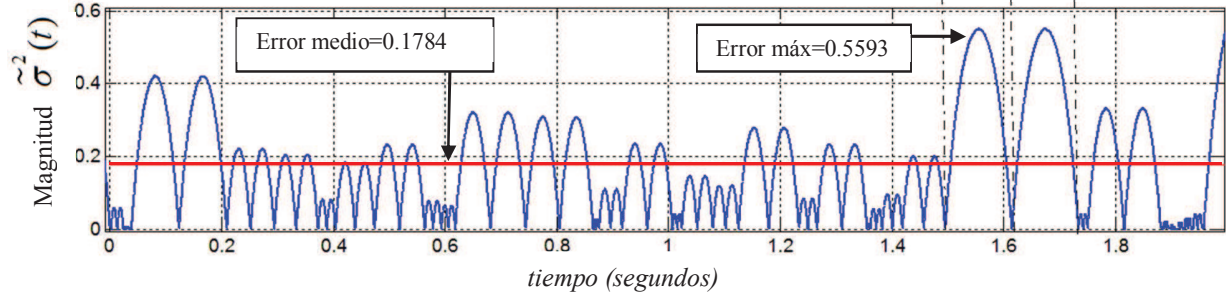
Muestra agregada en la mitad entre cruces por cero de realización a la salida de Modelo de Voz



Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de muestra en la mitad entre cruce por cero a la salida de Modelo de Voz



Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de muestra en la mitad entre cruces por cero a la salida de Modelo de Voz



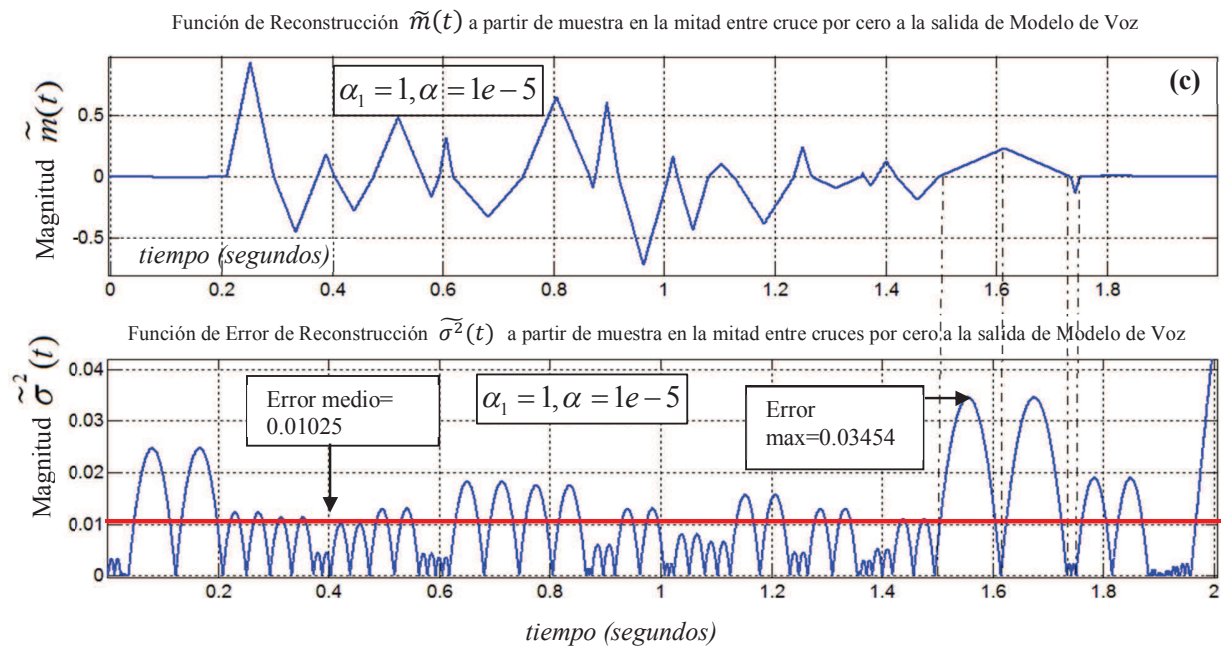
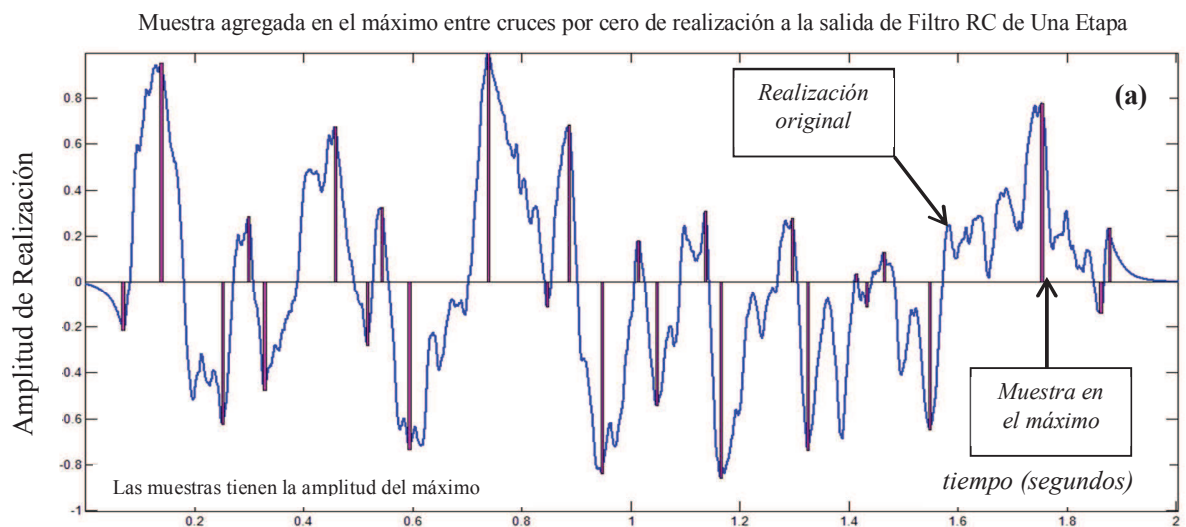


Figura 4.3 Graficas de: (a) Realización a la salida de Modelo para procesos de la Voz y muestras agregadas en la mitad entre sus cruces por cero (b) Función de Reconstrucción y Error de reconstrucción de Realización a la salida de Modelo para procesos de la Voz a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con $\alpha = 0.1; \alpha_1 = 10$, (c) $\alpha_1 = 1, \alpha = 1e-5$

4.2 PMR DE LAS REALIZACIONES DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS NO-DIFERENCIABLES CON UNA MUESTRA EN EL MÁXIMO ENTRE DOS CRUCES POR CERO.

A continuación se procede con la implementación del algoritmo óptimo visto en el capítulo 3, incluyendo los 3 casos mencionados (muestra agregada en la mitad, en el máximo y 6 muestras entre cruces por cero) para la reconstrucción de una realización a la salida de filtro RC de una Etapa. Nuevamente la herramienta de PMR de la realización será la regla de la media condicional para las funciones de covarianza de los procesos a la salida de los diversos filtros.



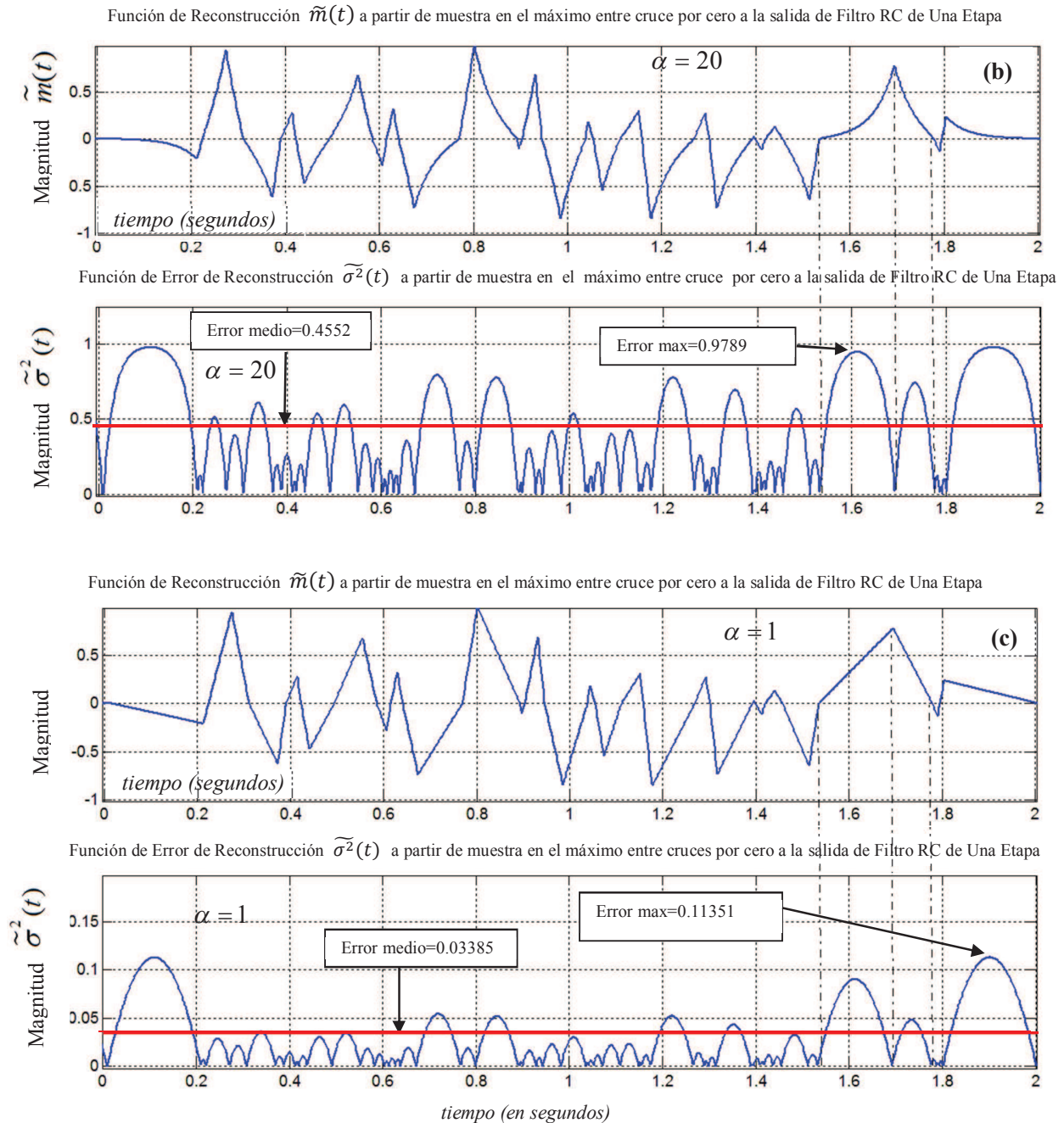


Figura 4.4 Graficas de: (a) Realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 1$ y muestra agregada en el máximo entre cruces por cero (b) Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción y Error medio de realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con $\alpha = 20$; (c) $\alpha = 1$.

En esta variante de algoritmo efectivamente tenemos mayor información acerca de la realización, puesto que ubicamos la muestra central en el máximo entre dos cruces por cero, sin embargo es posible observar en la figura 4.4 que la distancia entre la muestra cero y la muestra intermedia más alejada contribuye al incremento en la función de error, aun así se tienen valores aceptables en el error promedio de reconstrucción.

En la figura 4.1 es posible observar una reducción en la función de error respecto al de la figura 4.4, esto se debe a que al ubicar las muestras en la mitad entre cruces por cero, el intervalo tiempo entre muestra y cruce por cero es menor en comparación con el segundo caso de muestra agregada en el máximo entre cruce por cero; puesto que el ubicar la muestra en el máximo fomenta a aumentar el intervalo entre la muestra y alguno de los cruces por cero adyacentes, produciendo un incremento en la función de error de reconstrucción.

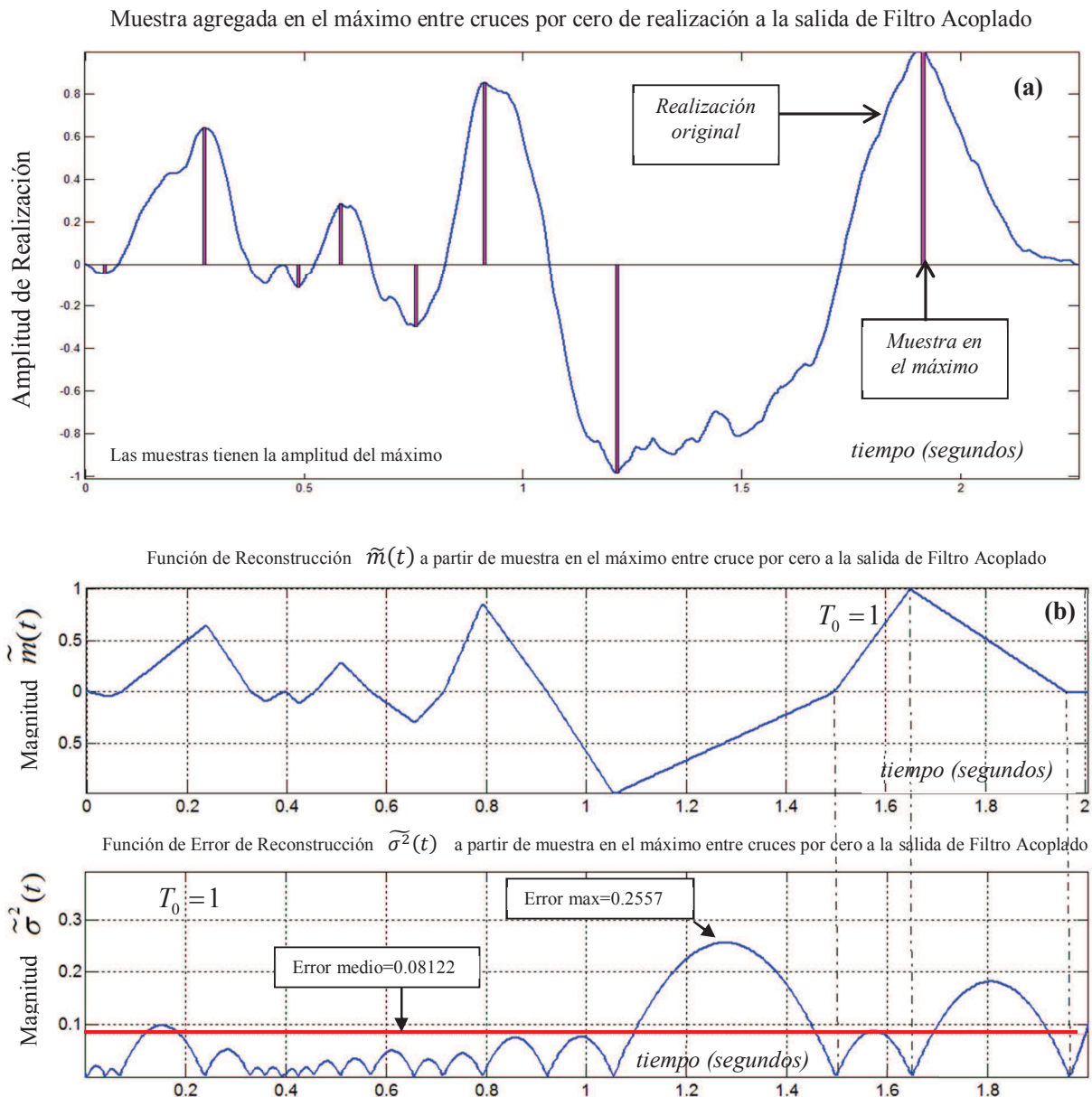


Figura 4.5 Graficas de: (a) Realización a la salida de Filtro Acoplado y muestras agregadas en el máximo entre sus cruces por cero (b) Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción de Realización a la salida de Filtro Acoplado a partir de muestra agregada en el máximo entre dos cruces por cero con $T_0 = 1$ y $A=1$.

En la figura 4.5, pese al gran intervalo entre muestras, la función de error de reconstrucción provee valores de error promedio aceptables, considerando el hecho de que está siendo utilizado un modelo de proceso no diferenciable en la reconstrucción.

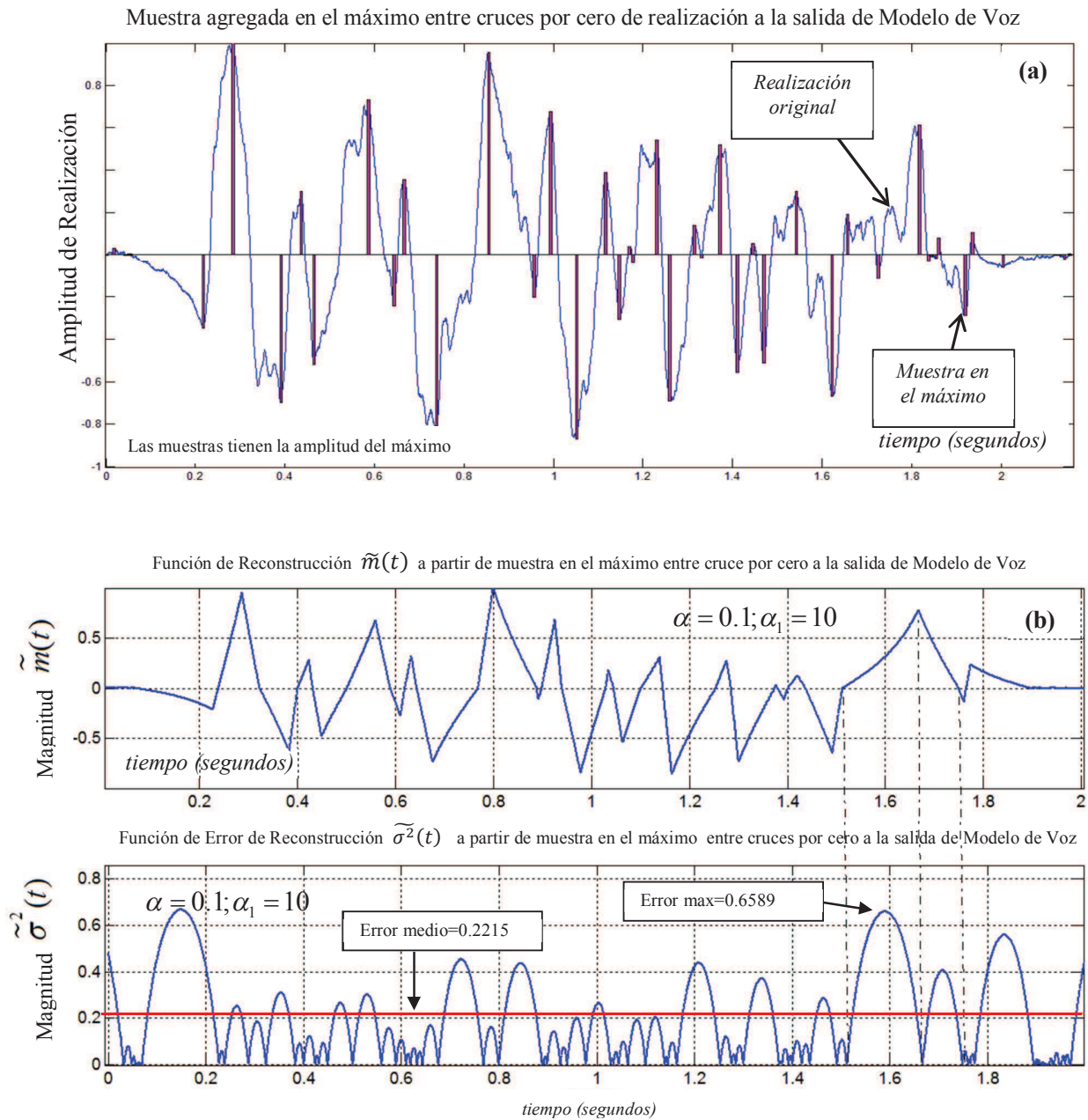


Figura 4.6 Graficas de: (a) Realización a la salida de Filtro para procesos de Voz y muestras agregadas en el máximo entre sus cruces por cero (b) Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción de realización a la salida de Filtro para Modelo de Voz partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con y $\alpha_1 = 10, \alpha = 0.1$.

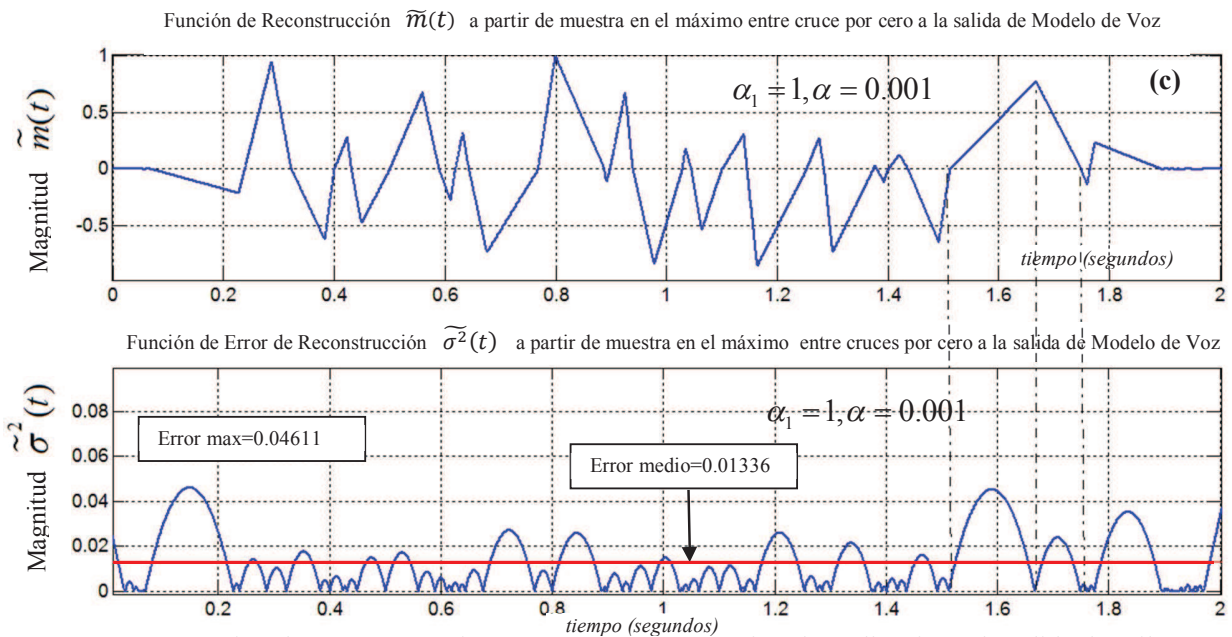


Figura 4.7 Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción de realización a la salida de Filtro para Modelo de Voz partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con y $\alpha_1 = 1, \alpha = 0.001$

En el caso anterior es posible notar que el error de reconstrucción fue reducido considerablemente, recordando que no necesariamente se debe al número de muestras introducidas, pues recordemos que el error de reconstrucción de la función de varianza condicional depende de dos elementos fundamentales:

- 1.- La distancia entre las muestras evaluadas.
- 2.- La función de Covarianza utilizada como modelo de reconstrucción.

Sin embargo hay parámetros en la función de covarianza que modifican las características tanto de reconstrucción y recíprocamente el error de reconstrucción. Este parámetro es en la mayoría de los casos es ancho de banda definido por α , algunos modelos manejan este parámetro de tal modo que el tiempo de covarianza sea unitario, sin embargo fue realizado el proceso de reconstrucción con diferentes valores de tiempo de covarianza, y por tanto diversos valores de α .

Sin embargo para los casos como el modelo de voz el calcular la integral de tiempo de covarianza nos resulta en un límite indeterminado o con tendencia a infinito, de tal modo que consideramos parámetros α que ajusten o aproximen a la normalización de dicha función, usando aproximaciones de cómputo. Es claro que las componentes de frecuencia para el caso de la realización a la salida de Filtro Acoplado con señal de salida Triangular son menores en comparación con las obtenidas con filtro RC de Una etapa y el Filtro para señales de Voz, puesto que este modelo no es tan caótico como los mencionados anteriormente, y por tanto la tendencia de la realización reconstruida es de igual forma reducir las componentes.

El parámetro de ancho de banda lo determina T_0 . Donde T_0 , representa la duración de la señal triangular de salida del filtro acoplado. Recordando que el filtro acoplado tiene a la entrada una señal rectangular con duración T_0 y con ruido blanco Gaussiano aditivo a la señal rectangular; el resultado a la salida será una realización con función de covarianza triangular.

Un problema práctico en la utilización de la función de covarianza de la señal triangular a la salida de filtro acoplado, es la sensibilidad de T_0 puesto que si es parámetro es modificado con valores mayores o menores a 1 la reconstrucción no será posible y proporcionará datos de la función de error inconsistentes, por tal motivo para el desarrollo del presente trabajo solo será considerado $T_0 = 1$. Una observación importante al obtener una realización a partir de la señal Triangular a la salida del filtro acoplado, es que dicha realización no es tan caótica; eso es claro comparando el número de cruces por cero de los modelos de procesos no diferenciables vistos, con el un número reducido de cruces por cero en la realización obtenida con la señal triangular. Sin embargo está probado que este modelo de procesos es no diferenciable.

4.3 RESULTADOS

A continuación son mostrados en la tabla 4.1 algunos resultados de Función de error de reconstrucción para las funciones de covarianza de los procesos No diferenciables, evaluando para diversos parámetros de ancho de banda para cada modelo.

			Caso 1 (muestras en la mitad entre cruces por cero)		Caso 2 (muestras en el máximo entre cruces por cero)	
Filtro Usado	Parámetro de ancho de banda α		Error máximo $\bar{\sigma}^2(t)$	Error medio $\bar{\sigma}^2(t)$	Error máximo $\bar{\sigma}^2(t)$	Error medio $\bar{\sigma}^2(t)$
Filtro RC de Una Etapa	20		0.9496	0.5212	0.9792	0.556
	1		0.09125	0.03494	0.1135	0.04222
	0.1		0.01851	0.00707	0.0011	0.00042
Filtro Acoplado	T_0					
	1		0.1664	0.07	0.3492	0.1306
Filtro para Procesos de Voz	α	α_1				
	0.1	10	0.612	0.2351	0.779	0.3156
	1	0.001	0.0705	0.02474	0.1023	0.03517
	0.499	0.5	0.07975	0.02821	0.07975	0.02821
	1e-5	1	0.07235	0.02561	0.1064	0.0374

Tabla 4.1 Función de error de reconstrucción y error promedio de reconstrucción de las realizaciones de los procesos No Diferenciables.

4.4 COMENTARIOS.

En este capítulo podemos concluir que es posible reconstruir alguna realización en la multitud de las muestras de cruce por cero utilizando modelos de procesos no diferenciables, obteniendo valores de error de reconstrucción considerables hasta cierto punto, sin embargo la realización reconstruida será de carácter caótico en la reconstrucción, por lo que también concluimos que podemos reconstruir realizaciones de procesos caóticos utilizando estos modelos. Si bien tenemos un incremento de componentes espectrales en la reconstrucción es por dos motivos: 1) de la misma forma que los modelos diferenciables, la reconstrucción dependerá de los parámetros del filtro utilizado, en nuestro caso los parámetros de ancho de banda del filtro determinados por α . 2) La naturaleza de modelo del proceso, ya que como hemos probado los modelos de procesos no-diferenciables están asociados a procesos caóticos, donde la densidad espectral de estos procesos son mucho mayor en comparación a los procesos diferenciables y por tanto su dispersión es muy grande o tiende a infinito.

En el desarrollo de este algoritmo no fue necesario calcular el coeficiente de correlación, puesto que las muestras integradas a lo largos de la realización, contienen las amplitudes correspondientes de la realización en esos puntos, por lo que la influencia de cálculo de error dependerá únicamente de la función de covarianza utilizada y el intervalo de tiempo entre muestras.

La función de error de reconstrucción proporcionada por la regla de la media condicional proporciona una ventaja grande desde el punto de vista de sistemas de comunicaciones, puesto que no requerimos información de la realización original para estimar el error, solo conocer la función de covarianza para la reconstrucción y su intervalo de muestras en el bloque de recepción, tal y como fue mostrado en el diagrama de la figura 3.1.

La pregunta más natural sería cuando utilizar modelos de procesos diferenciables y cuando elegir modelos de procesos no diferenciables, esto puede variar dependiendo de la aplicación puesto los modelos de procesos no diferenciables puede ser utilizado para la reconstrucción de realizaciones de voz, los cuales son caóticos y por tanto requieren de reconstrucciones de igual forma caóticas. Los resultados comentados en la tabla 4.1 demuestran que es posible obtener valores aceptables en la función de reconstrucción, restringiendo el ancho de banda de la función de covarianza del proceso no diferenciable. El mejor de los resultados en el error de reconstrucción lo proporciona la reconstrucción de la realización del proceso en la multitud de las muestras a la salida del filtro RC de una etapa, para un $\alpha = 0.1$. Para este caso será obtenido una realización del proceso markoviano con un error mínimo.

Es claro que si el número de muestras es aumentado dentro de dos cruces por cero, este error disminuirá considerablemente, sin embargo es difícil de implementar la metodología cuando intentamos incrementar más muestras dentro de cruces por cero.



CAPÍTULO 5

DESARROLLO DE ALGORITMO NO ÓPTIMO PARA MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS GAUSSIANOS NO-DIFERENCIABLES

En este último capítulo serán aplicados dos casos del algoritmo no-óptimo para la reconstrucción de una realización aplicada a procesos no diferenciables. En el primer caso será utilizada la regla de la media condicional para reconstruir la realización a partir de una única muestra a la mitad entre cruce por cero con magnitud en función del intervalo entre cruce por cero y utilizando como funciones de covarianza, los modelos de procesos no diferenciables. Finalmente serán obtenidos los resultados para la comparación de la función de error de reconstrucción con los valores arrojados por el coeficiente de correlación y ECM. El coeficiente de correlación de nueva cuenta será utilizada como un parámetro estimador de reconstrucción entre la realización original y la realización estimada o reconstruida, pero especialmente será utilizado el ECM.

El segundo caso se tiene una realización a la salida de filtro RC de Dos Etapas, para posteriormente hacer pasar la realización del proceso a través de un convertidor no lineal del tipo limitador (saturador o clipper), de tal forma que la realización resultante pueda ser reconstruida mediante el algoritmo de la regla condicional haciendo uso de los modelos de procesos no diferenciables para diversos parámetros de ancho de banda α .

Recordando que todas las realizaciones analizadas son de densidad Gaussiana, las realizaciones a la salida son Gaussianas también. A diferencia del caso 2 del algoritmo no óptimo, donde reconstruimos una realización con fdp no Gaussiana debido al efecto del convertidor no lineal.

5.1 PMR DE REALIZACIÓN DEL PROCESO GAUSSIANO NO DIFERENCIABLE CON UNA MUESTRA EN LA MITAD ENTRE DOS CRUCES POR CERO.

Para este primer desarrollo nuevamente es tomado ruido blanco Gaussiano a la entrada del Filtro RC de Una Etapa, de tal forma que a la salida sea obtenida una realización como la que se muestra en la figura 5.1. En esta realización es agregada una muestra por cada cruce por cero de la realización, con la diferencia respecto del caso óptimo de que la muestra tiene una magnitud en función de la distancia entre los mismos cruces por cero, de acuerdo con las condiciones del algoritmo no óptimo caso 1.

Posteriormente será realizado el PMR del proceso utilizando la regla de la esperanza matemática condicional, utilizando primeramente la función de covarianza del proceso a la salida de filtro RC de Una etapa.

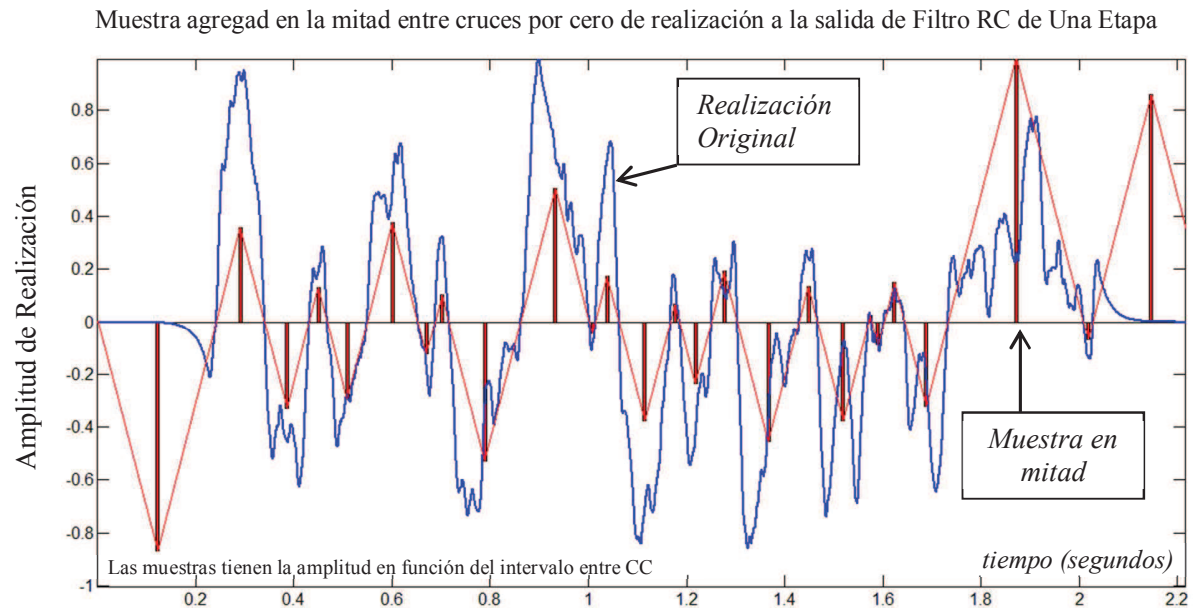


Figura 5.1 Graficas de Realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 1$ y muestras agregadas a la mitad entre cruces por cero.

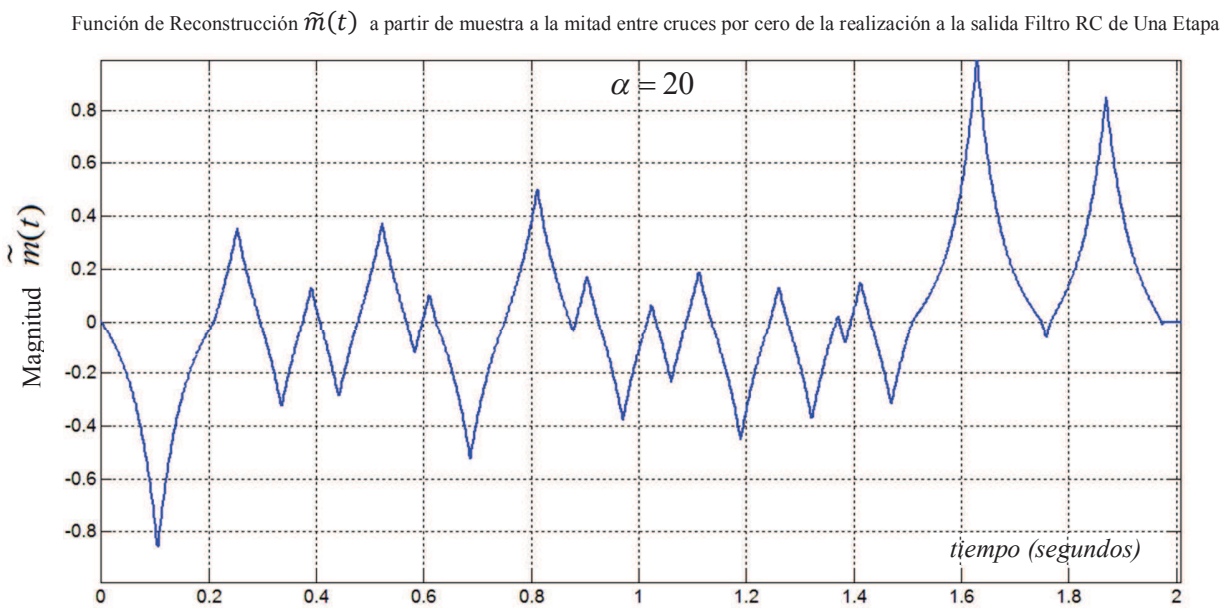


Figura 5.2 Grafica de Función de Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 20$.

La figura 5.1 muestra la realización del proceso de ruido a la salida de filtro RC de una etapa, en donde se aplica la metodología de reconstrucción no óptima, y posteriormente obtener la reconstrucción de la realización mostrada en la figura 5.2, misma que es caótica.

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de muestra a la mitad entre cruces por cero de la realización a la salida Filtro RC de Una Etapa

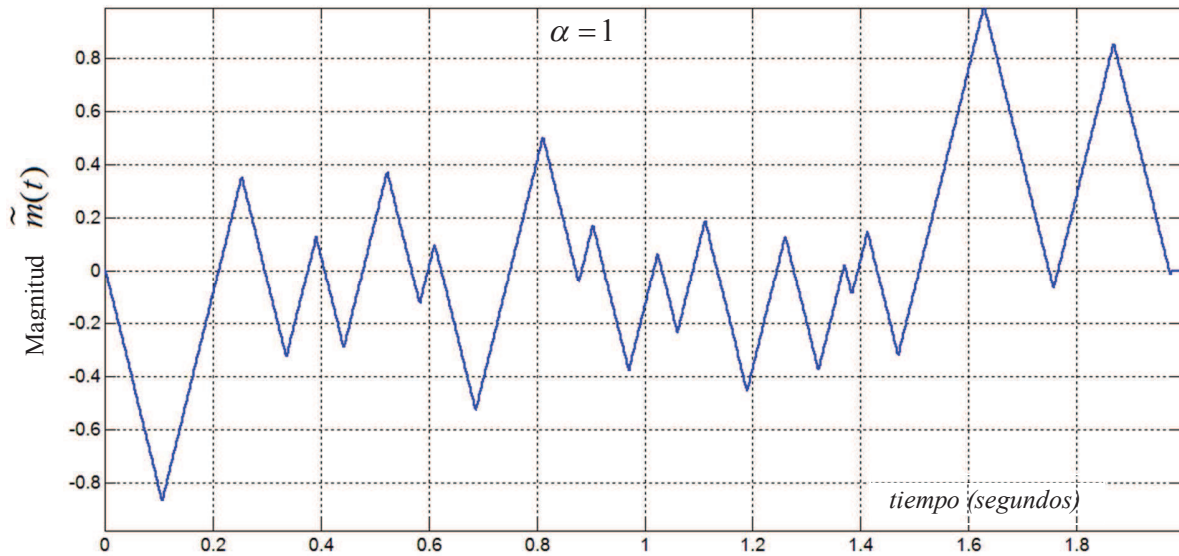


Figura 5.3 Grafica de Función de Reconstrucción y Error de reconstrucción de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 1$.

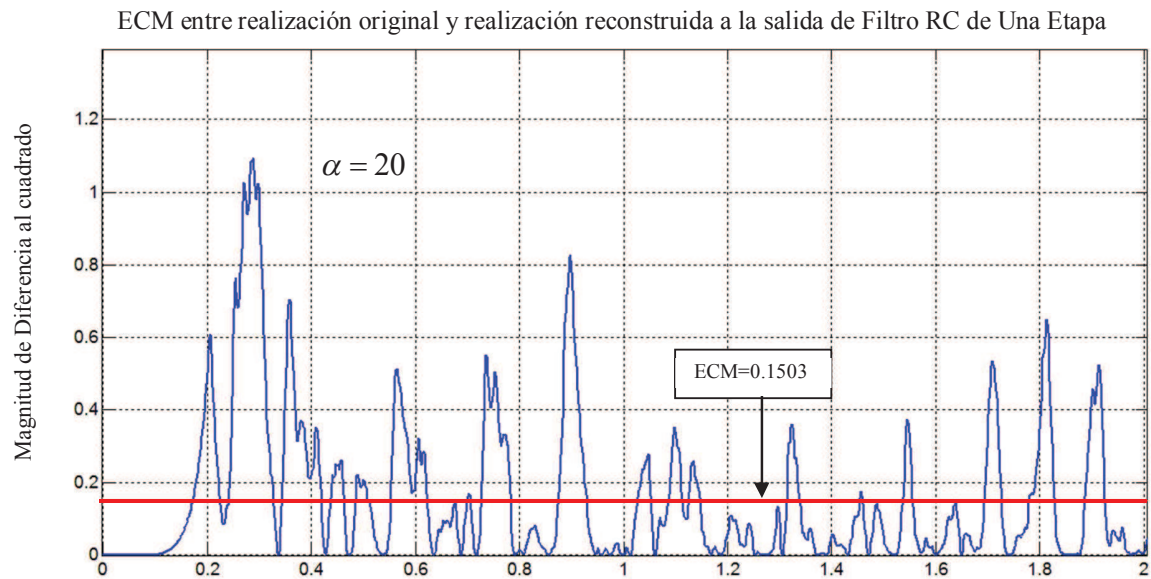


Figura 5.4 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa Con $\alpha = 20$.

La figura 5.4, muestra el error de reconstrucción con el estimador de ECM, mismo que proporciona valores de reconstrucción aceptables mientras es aumentado el tiempo de respuesta de la función de covarianza. Sin embargo comparando los errores de reconstrucción de las figuras 5.4 y 5.5, es claro que la función que fue reconstruida con mayor ancho de banda provee menor error que el mostrado en la figura 5.4.

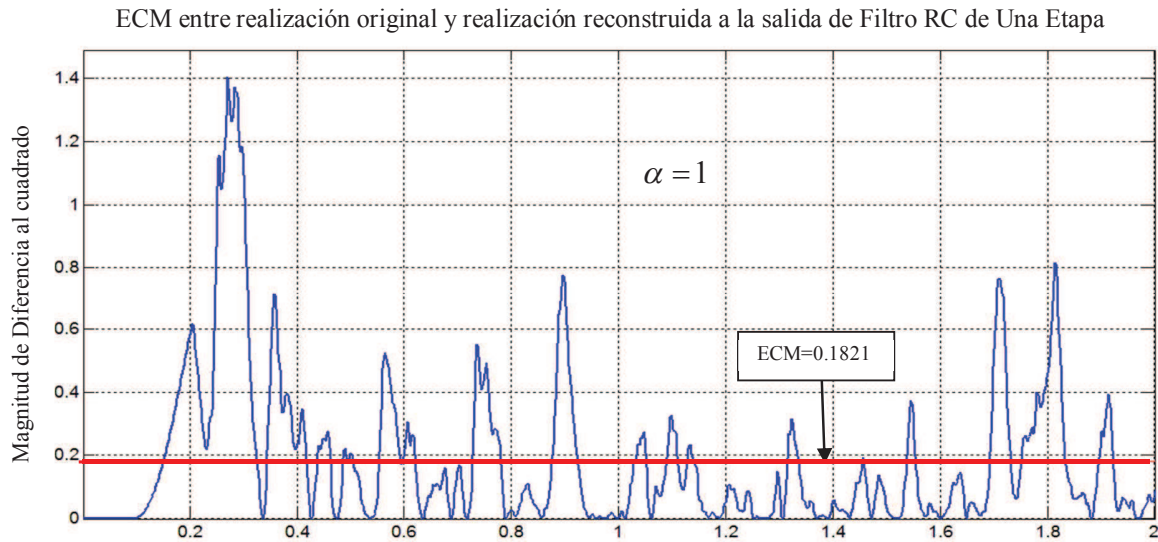


Figura 5.5 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa con $\alpha = 1$.

En este primer caso fue evaluado un proceso Markoviano como el obtenido a la salida del filtro RC de Una Etapa, y que al reconstruir dicho proceso a partir de una muestra a la mitad entre dos cruces por cero utilizando la regla de la esperanza matemática condicional, se observó que la reconstrucción no es suave para los diferentes valores de α , pudiendo comprobarlo en las reconstrucciones mostradas en la figura 5.3. En el siguiente caso será considerado un proceso No-Markoviano pero también No-diferenciable como es el caso de Filtro Acoplado con señal de salida Triangular, evaluando las función de reconstrucción y función de error de reconstrucción.

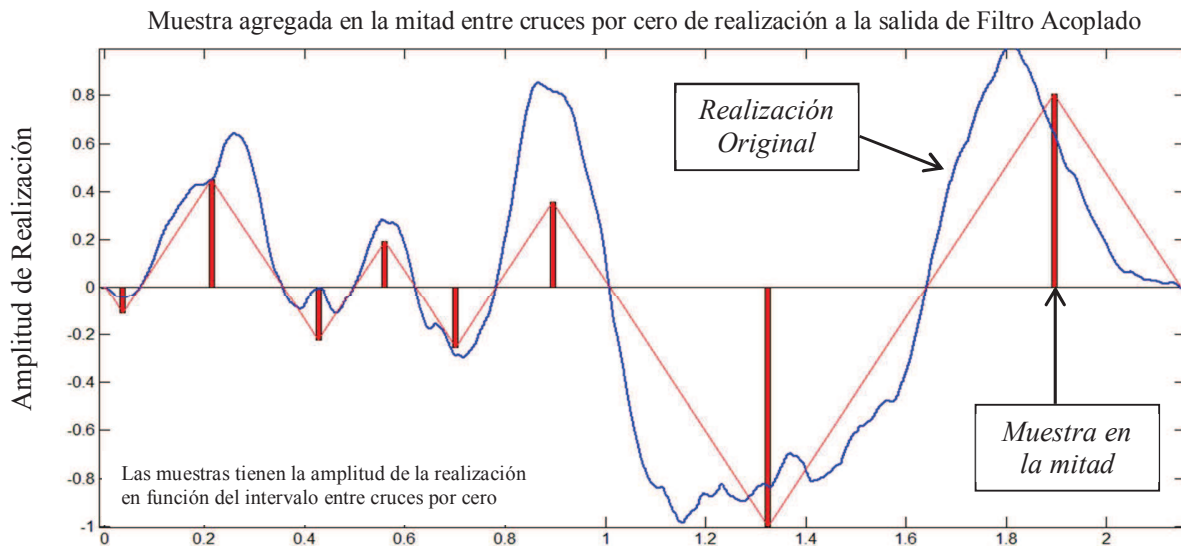


Figura 5.6 Grafica de Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con señal triangular a la salida de Filtro Acoplado $T_0 = 1$ y $A=1$.

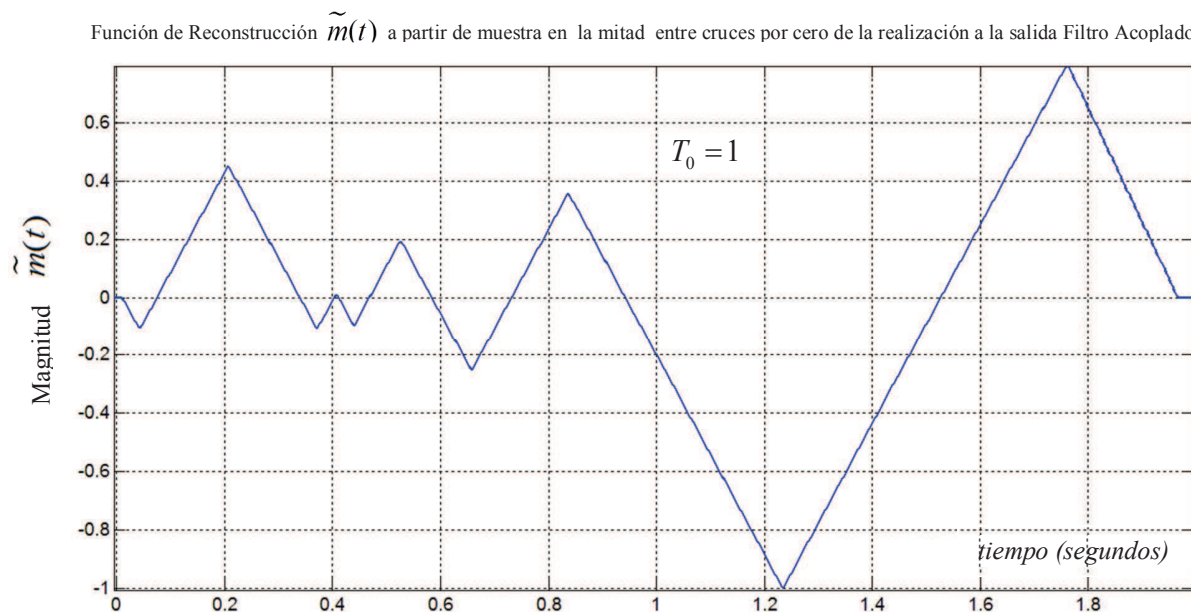


Figura 5.7 Grafica de Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero utilizando señal triangular a la salida de Filtro Acoplado $T_0 = 1$ y $A=1$.

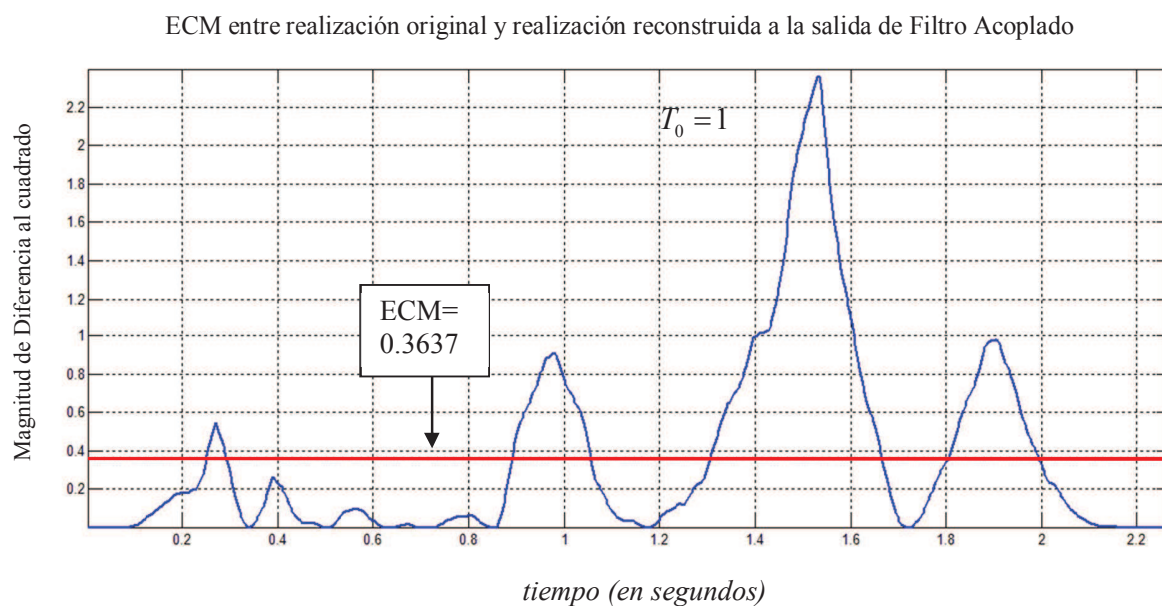


Figura 5.8 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Filtro Acoplado con $T_0 = 1$.

La realización a la salida del filtro acoplado al poseer intervalos grandes entre cruces por cero, contribuyendo a un aumento en el error de reconstrucción. Para este caso solo fue considerado el tiempo de duración del pulso a la entrada igual a la unidad, puesto que cambiarlo implica un disparo en los valores de ECM.

Para el caso del modelo para procesos de voz, la realización tiene mayores componentes espectrales esto debido a que el modelo del proceso analizado es más caótico en comparación con el Filtro RC de Una Etapa y al Filtro Acoplado. De igual forma procedemos a integrar el algoritmo no óptimo, incluyendo las muestras en la mitad entre los dos cruces por cero de la realización y reconstruyendo para analizar su función de error de reconstrucción.

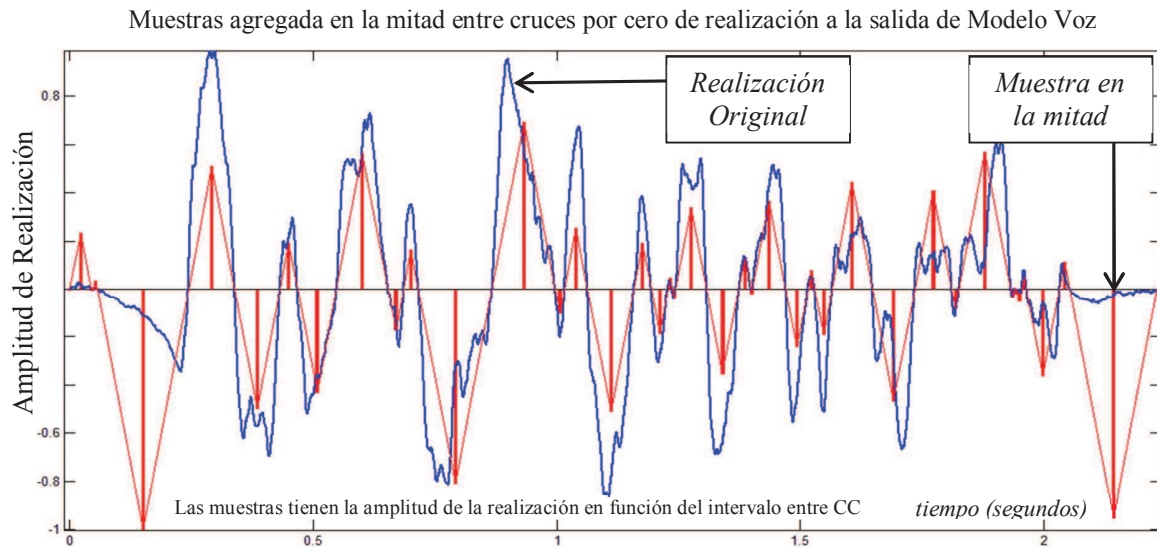


Figura 5.9 Grafica de Realización a la salida de Filtro para Modelo de Voz y muestras agregadas a la mitad entre sus cruces por cero.

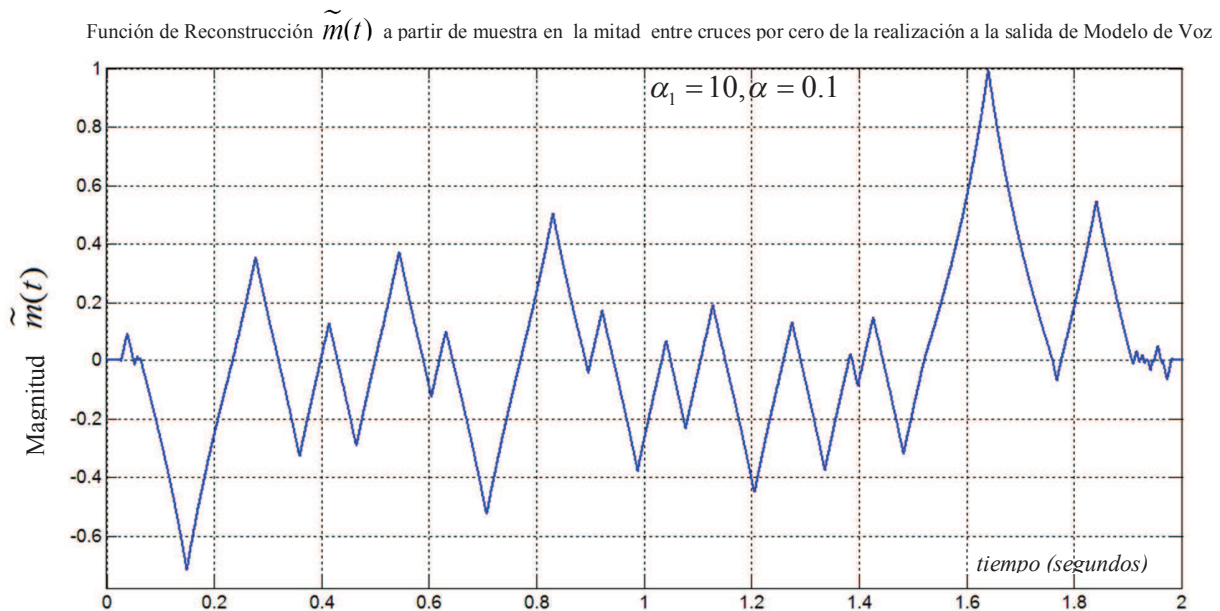


Figura 5.10 Grafica de Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción y Error medio de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre cada cruce por cero con Filtro para Modelo de Voz y $\alpha_1 = 10, \alpha = 0.1$.

Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de muestra en la mitad entre cruces por cero de la realización a la salida de Modelo de Voz

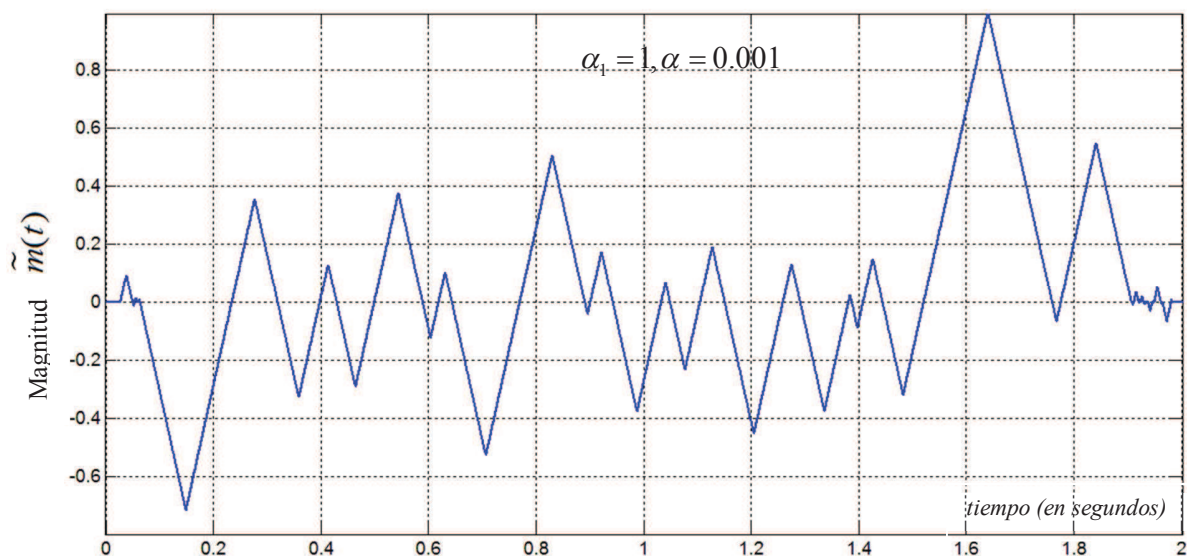


Figura 5.11 Grafica de Función de Reconstrucción, Error de reconstrucción y Error medio de realización a partir de muestra agregada a la mitad entre dos cruces por cero con Filtro para Modelo de Voz y $\alpha_1 = 1, \alpha = 0.001$.

ECM entre realización original y realización reconstruida a la salida de Modelo de Voz

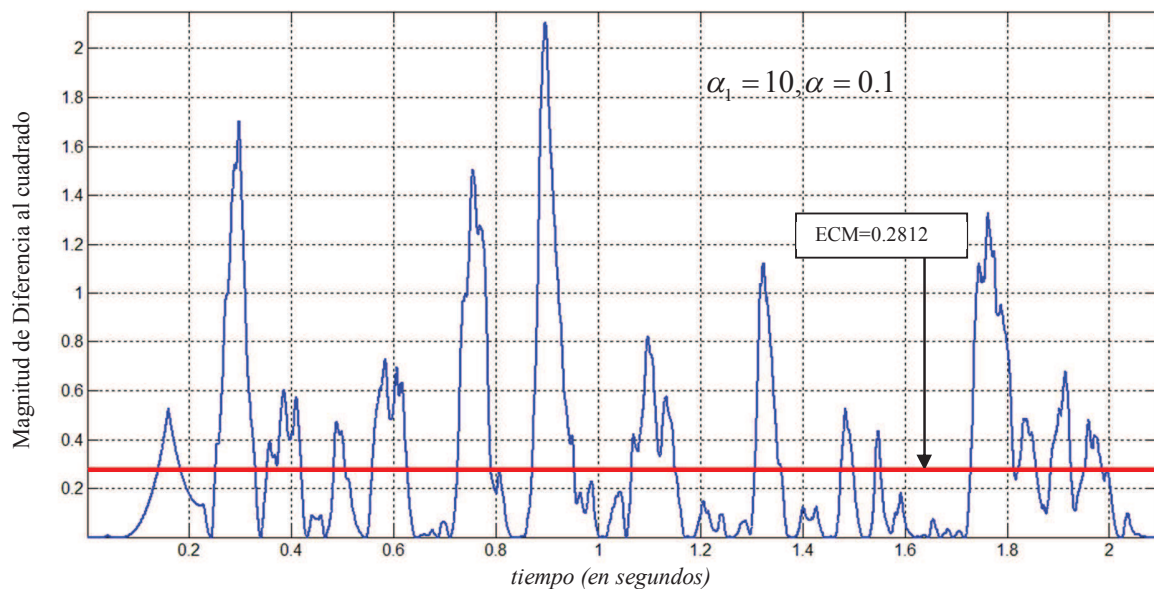


Figura 5.12 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Modelo de Voz con $\alpha_1 = 10, \alpha = 0.1$.

Los resultados del ECM proporcionados en la figura 5.12 indican que para este primer caso de algoritmo no óptimo un incremento en el ancho de banda mejora ligeramente el error de reconstrucción respecto a la de la figura 5.13.

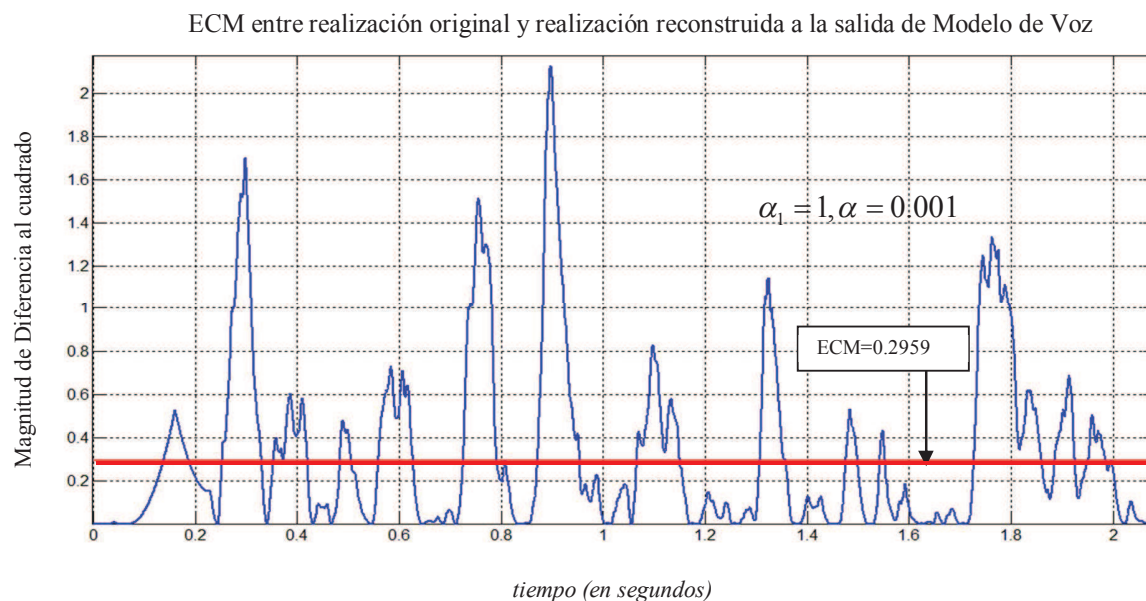


Figura 5.13 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Modelo de Voz con $\alpha_1 = 1, \alpha = 0.001$.

Es posible notar en la figura 5.11, que la reconstrucción con una única muestra entre dos intervalos de cruce por cero, no proporciona la suficiente información acerca de la realización, además de que la reconstrucción de la realización es muy caótica, lo que incrementa sus densidades espectrales y sin embargo es posible notar que el incremento de componentes de ancho de banda definido por α , mejoran el error de reconstrucción, esto es el caso inverso de los dos casos de algoritmo óptimo, en el que la reducción del ancho de banda contribuye a mejorar el error.

En el presente análisis se han presentado las técnicas de reconstrucción de realizaciones a partir de sus muestras basándose en el algoritmo no óptimo (caso 1) para dicho desarrollo, sin embargo es necesario evaluar los criterios de error de reconstrucción. En la tabla 5.1 son mostrados los resultados proporcionados por el ECM y el coeficiente de correlación, donde es posible concluir que los resultados proporcionados por el coeficiente de correlación tienen cierta diferencia respecto a los resultados de ECM. El coeficiente de correlación nos proporciona cierta confiabilidad de error ya que el modelo para calcularlo involucra las magnitudes de la n muestra y además incluye la característica estadística del valor promedio de la realización reconstruida.

Este concepto no es posible con la regla de la varianza condicional, puesto que el error solo depende de la duración de intervalo de la muestra y su función de covarianza, mas no de la magnitud de la muestra. Y en el caso propuesto anteriormente las magnitudes de las muestras no coinciden con la amplitud de algún elemento de la realización original, ya que la disposición de la muestra solo es subjetiva, es decir, solo colocar muestras por cada cruce por cero de la realización y con amplitud en función del tiempo de duración del intervalo del cruce por cero.

Filtro Usado	Parámetro de ancho de banda α		Coficiente de correlación r	ECM
Filtro RC de Una Etapa	1		0.19754193	0.2062
	10		0.19743154	0.1935
	20		0.19501171	0.1743
	100		0.10345637	0.1493
Filtro Acoplado	T_0	A		
	1	1	0.89420143	0.5342
Filtro para señales de Voz	α	α_1		
	15	10	0.22042102	0.4644
	0.49	0.5	0.59500862	0.527
	0.1	10	0.59994391	0.3311
	1e-5	1	0.59504209	0.5142

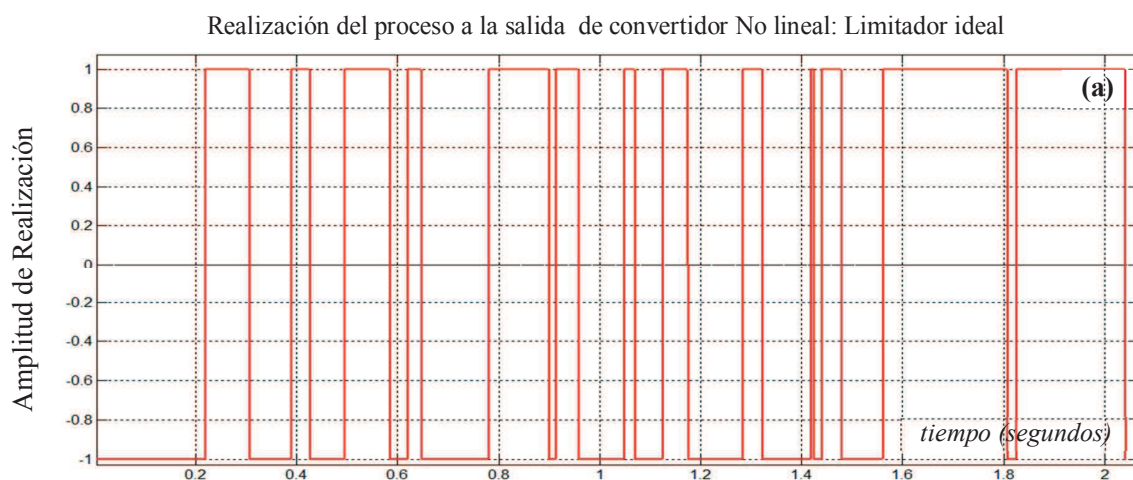
Tabla 5.1 Caso 1 algoritmo No óptimo, Cálculo de Coeficiente de correlación y Error cuadrático medio.

5.2 RECONSTRUCCIÓN DE REALIZACIÓN A LA SALIDA DE LIMITADOR IDEAL O CLIPPER UTILIZANDO MODELOS DE PROCESOS NO DIFERENCIABLES.

En esta parte de la investigación se implementará el caso 2 del algoritmo no-óptimo de reconstrucción, comenzando con el modelo de filtro RC de Una Etapa para la reconstrucción del proceso con diferentes valores del parámetro α . Recordando que la realización original y la realización a la salida del limitador ideal serán comunes para los diversos resultados de reconstrucción con los diferentes modelos de procesos no diferenciables.

5.2.1 RECONSTRUCCIÓN DE REALIZACIÓN A LA SALIDA DE LIMITADOR IDEAL UTILIZANDO FILTRO RC DE UNA ETAPA.

A continuación será realizada la reconstrucción de la realización mediante la función de covarianza del proceso a la salida de filtro RC de una etapa.



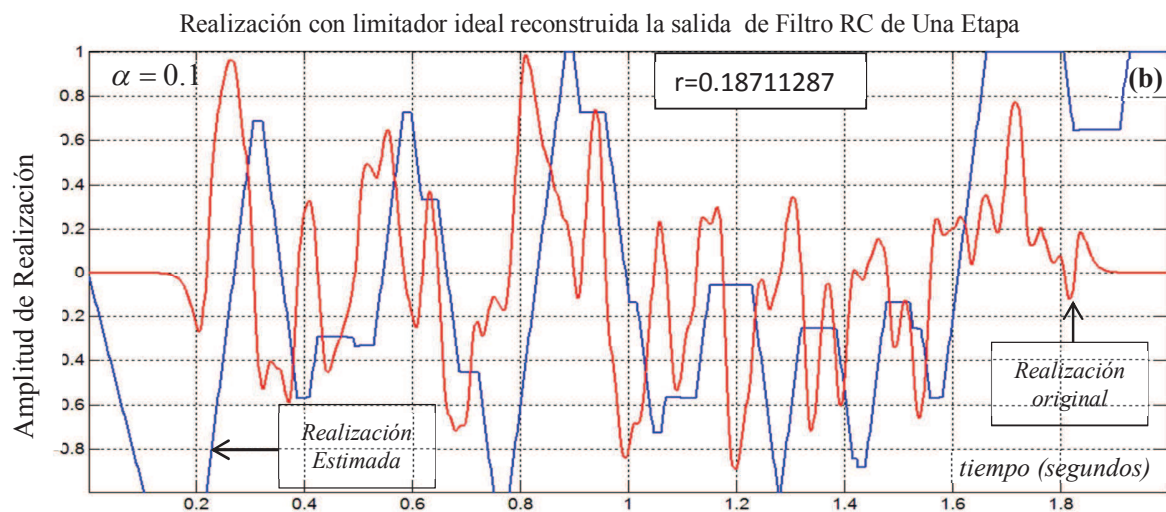
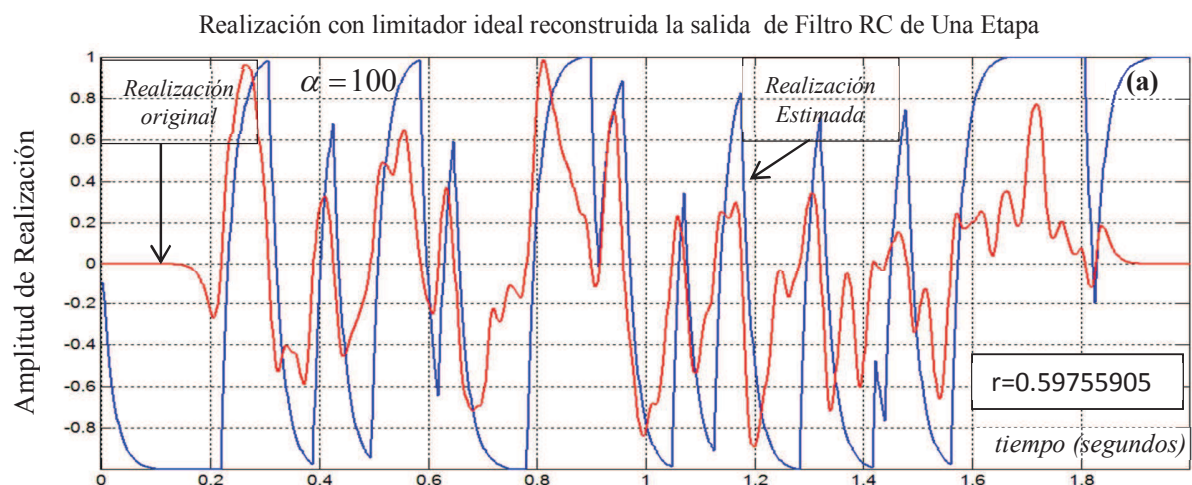


Figura 5.14 Graficas de: (a) Realización a la salida de convertidor no lineal, (b) Reconstrucción de Realización con Filtro RC de Una Etapa y $\alpha = 0.1$

La figura 5.14a muestra la realización del proceso de ruido a la salida de filtro RC de dos etapas, misma que a pasado a través de un convertidor no lineal tipo clipper, cabe recalcar que esta realización en saturación será filtrada usando todos los modelos de procesos no diferenciables utilizados hasta ahora. Para este primer ejemplo en la figura 5.14b se tiene que la realización saturada pasa a través de un filtro RC de una etapa, el cual es un modelo de proceso no diferenciable, y por tanto en la salida tendremos un proceso markoviano no gaussiano. En la figura 5.15 son obtenidos las realizaciones del proceso clipper a la salida de filtro RC de una etapa para diversos valores de ancho de banda. Es posible notar que de la misma forma que en el caso 1 de algoritmo no óptimo, el incremento de ancho de banda contribuye a una reducción en el ECM, pero hasta cierto punto, pues si este parámetro es incrementado demasiado, dicho error incrementará. También es posible observar un incremento en el coeficiente de correlación gracias a la información de cruces por cero de la realización en saturación.



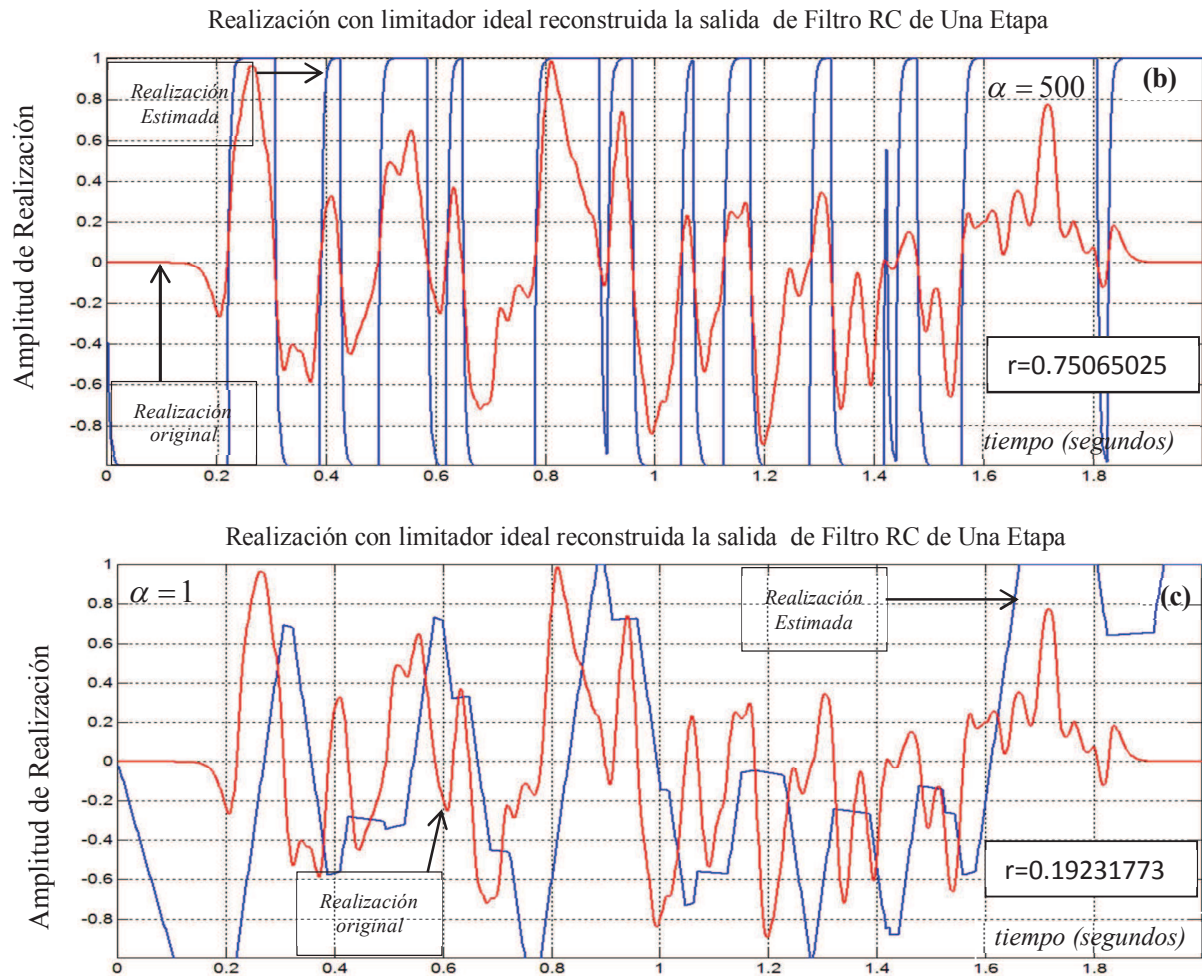
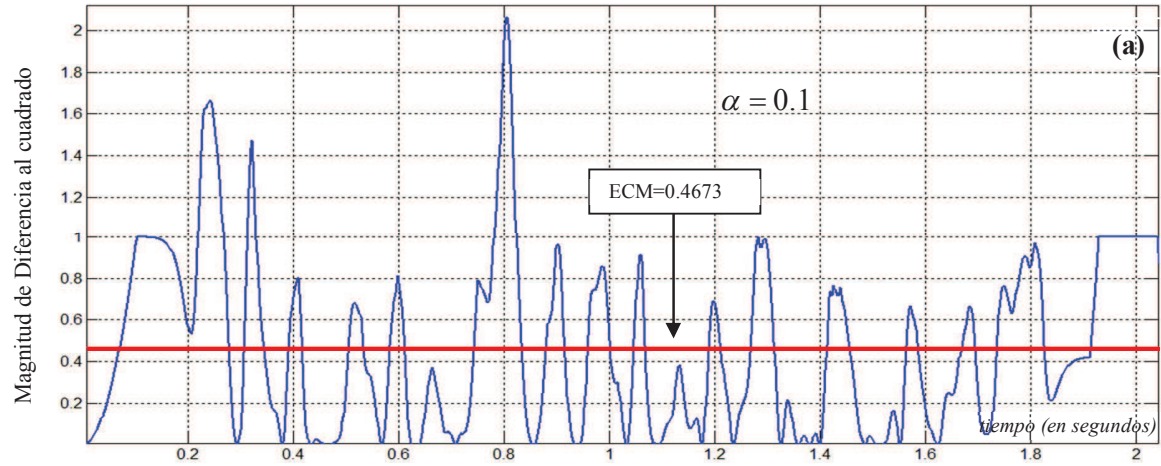


Figura 5.15 Graficas: (a) de Reconstrucción de Realización a la salida de convertidor no lineal con Filtro RC de Una Etapa y $\alpha = 100$; (b) $\alpha = 500$; (c) $\alpha = 1$.

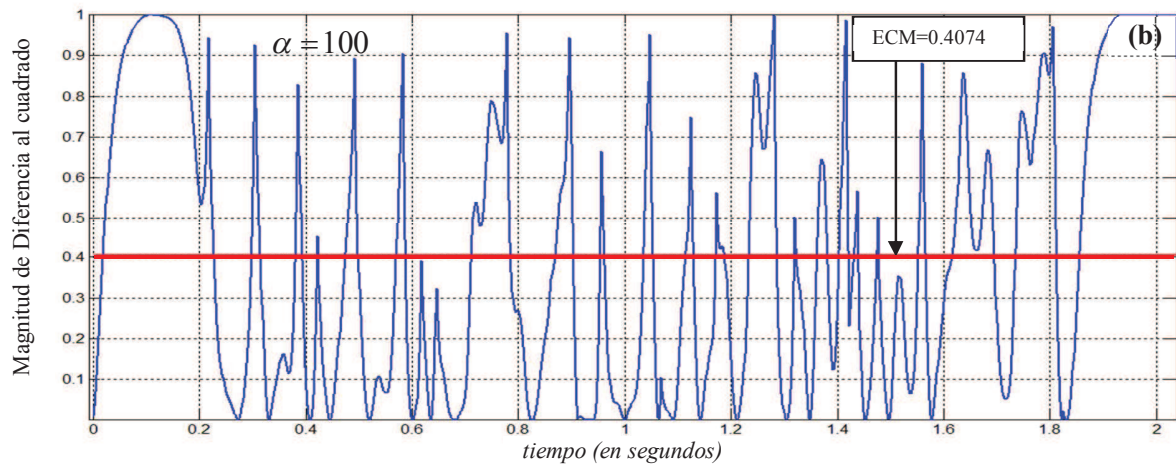
Es evidente en la figura 5.16 la tendencia del error de reconstrucción a disminuir cuando el ancho de banda definido por alfa es aumentado. La principal razón de este hecho es que al aumentar el ancho de banda, la señal saturada que pasa a través del filtro tiende nuevamente a una señal rectangular con componentes de frecuencia altos, al realizar esto los cruces por cero de la realización original respecto a la estimada a la salida del filtro se ajustan casi perfectamente, evaluando el error más precisamente entre los cruces por cero de la realización y mejorando el coeficiente de correlación así como también fomenta la disminución del error cuadrático medio.

Esto no sucede para valores de ancho de banda pequeños, pues la realización clipper a la salida del filtro es distorsionada, además el efecto de reducción de ancho de banda fomenta el fenómeno de desfase provocando que los cruces por cero de la realización original, no coincidan en el tiempo con la realización clipper a la salida de filtro de una etapa. Entre menor sea el ancho de banda definido en el filtro, mayor será evidente el desfase de la realización así como la distorsión.

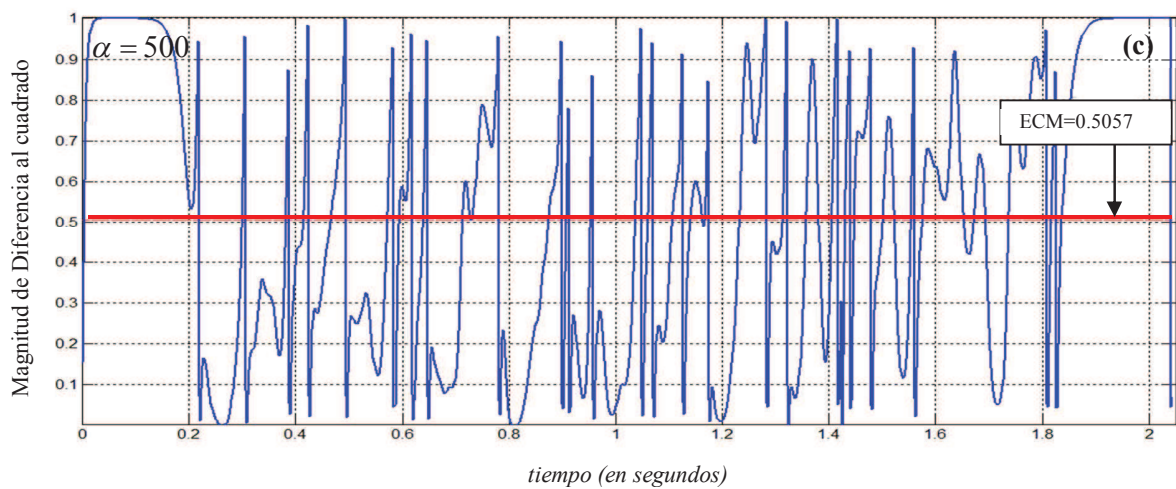
ECM de reconstrucción a la salida de Convertidor No lineal, para función de covarianza de Filtro RC de Una Etapa



ECM de reconstrucción a la salida de Convertidor No lineal, para función de covarianza de Filtro RC de Una Etapa



ECM de reconstrucción a la salida de Convertidor No lineal, para función de covarianza de Filtro RC de Una Etapa



ECM de reconstrucción a la salida de Convertidor No lineal, para función de covarianza de Filtro RC de Una Etapa

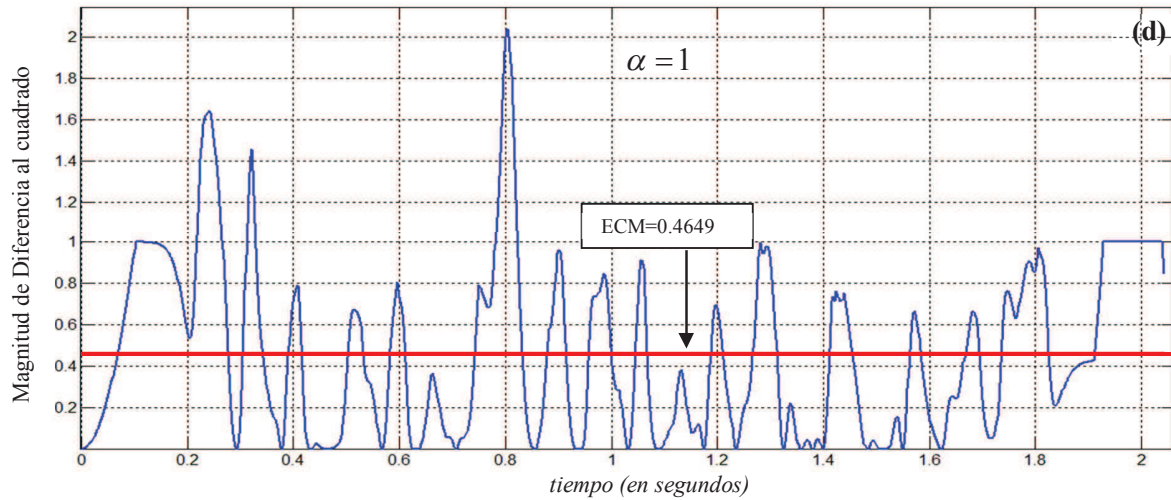


Figura 5.16 Error Cuadrático Medio de reconstrucción realización a la salida de Convertidor No lineal, con función de covarianza: Filtro RC de Una Etapa, para (a) $\alpha = 0.1$; (b) $\alpha = 100$; (c) $\alpha = 500$; (d) $\alpha = 1$.

Es posible comprobar en la figura 5.15(a) que al aplicar una saturación con un convertidor ideal a la realización original, esta incrementa su densidad espectral, debido al procesamiento no lineal que sufrió, sin embargo una desventaja de aplicar este algoritmo no-óptimo, es que la realización original pierde gran parte de su información, por lo que es más difícil recuperar o reconstruir este tipo de procesos, de tal forma que una vez que es aplicado este proceso de saturación fuerte la única información acerca de este proceso será el cruce por cero de la realización. Por otro lado fue comentado que estimar el error de reconstrucción de estas realizaciones es muy difícil.

5.2.2 RECONSTRUCCIÓN DE REALIZACIÓN A LA SALIDA DE LIMITADOR IDEAL UTILIZANDO FILTRO PARA MODELO DE VOZ.

A continuación se obtendrán los resultados de la reconstrucción de una realización a la salida de limitador ideal o Clipper, en este caso es demostrado que al incrementar el ancho de banda definido por α y α_1 es posible aproximar la reconstrucción a la realización original, esto es obvio desde el análisis de los modelos anteriores. De acuerdo a estudios realizados en el estado del arte, el modelo para proceso de voz es utilizado por algunos autores para filtrar procesos clipping, esto es, procesos con saturación ideal, sin embargo muy pocos incluyen características estadísticas que describan la reconstrucción y filtrado de estas realizaciones. Por otro lado no hay investigación relacionada a la reconstrucción de realizaciones de los procesos basados en la regla de la media condicional, que incluya modelos de procesos como el de la voz.

Realización con limitador ideal reconstruida la salida de Modelo de Voz

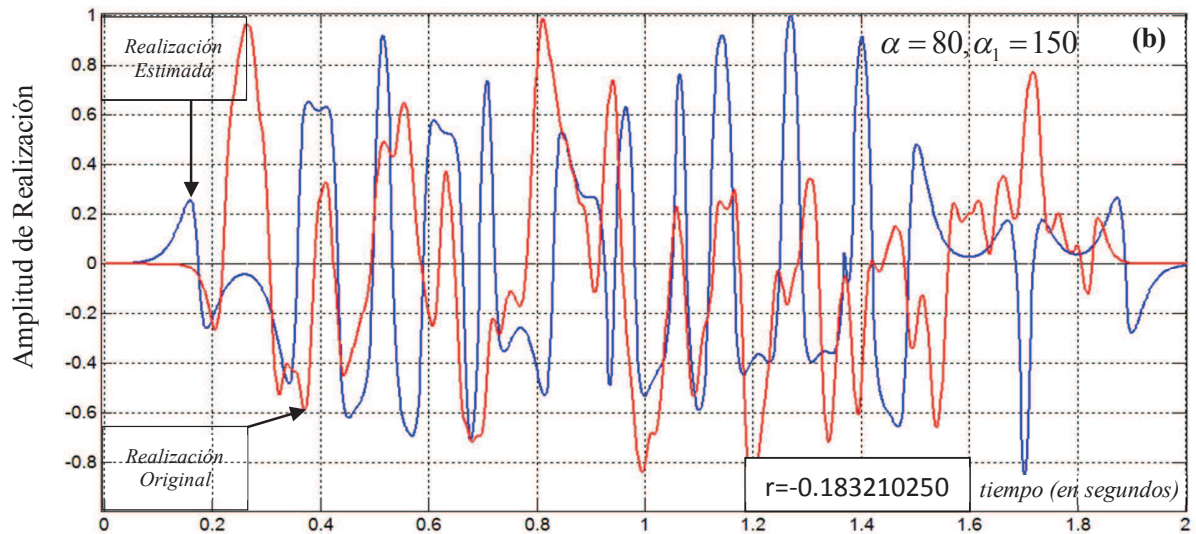
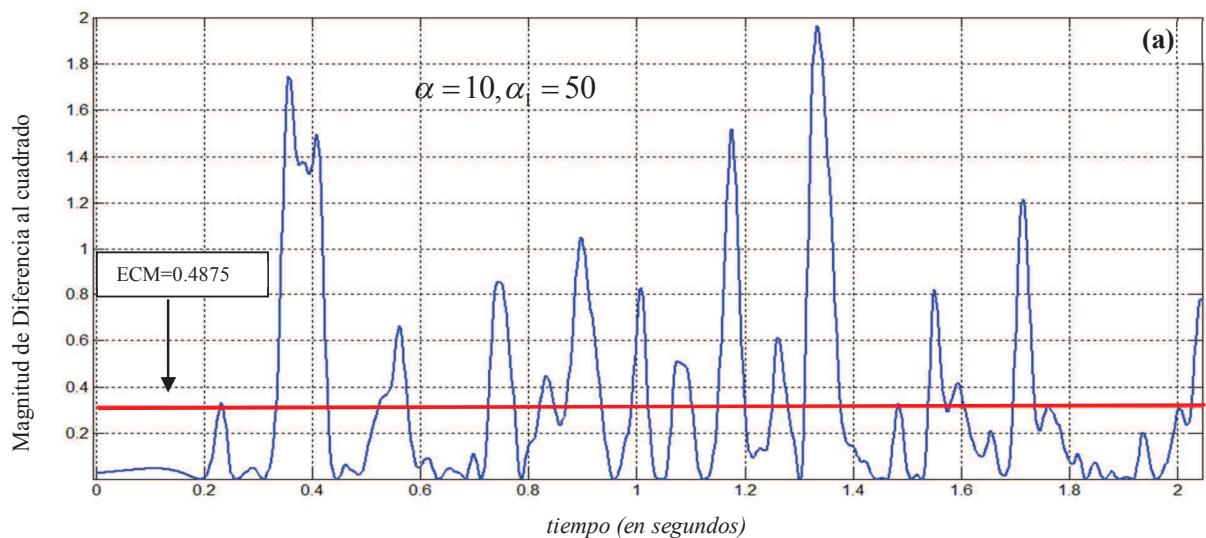


Figura 5.17 Graficas de Realización después del Proceso de Saturación; Reconstrucción de realización con Filtro para Modelo de Voz con $\alpha = 80, \alpha_1 = 150$.

En la figura 5.17 es posible notar que la realización estimada, es decir la realización clipper a la salida de filtro para procesos de voz, es parcialmente más suave en comparación con la reconstrucción con otros modelos de filtros, sin embargo el coeficiente de correlación indica otro resultado, en este caso es posible ver que el coeficiente de correlación es negativo, lo que indica que no solamente la realización original no es similar a la estimada, si no que también son inversas. Por otro lado nuevamente es posible observar que las fases de cruce por cero de ambas realizaciones no coinciden debido a este hecho.

ECM de reconstrucción a la salida de Convertidor No lineal, para función de covarianza de Modelo de Voz



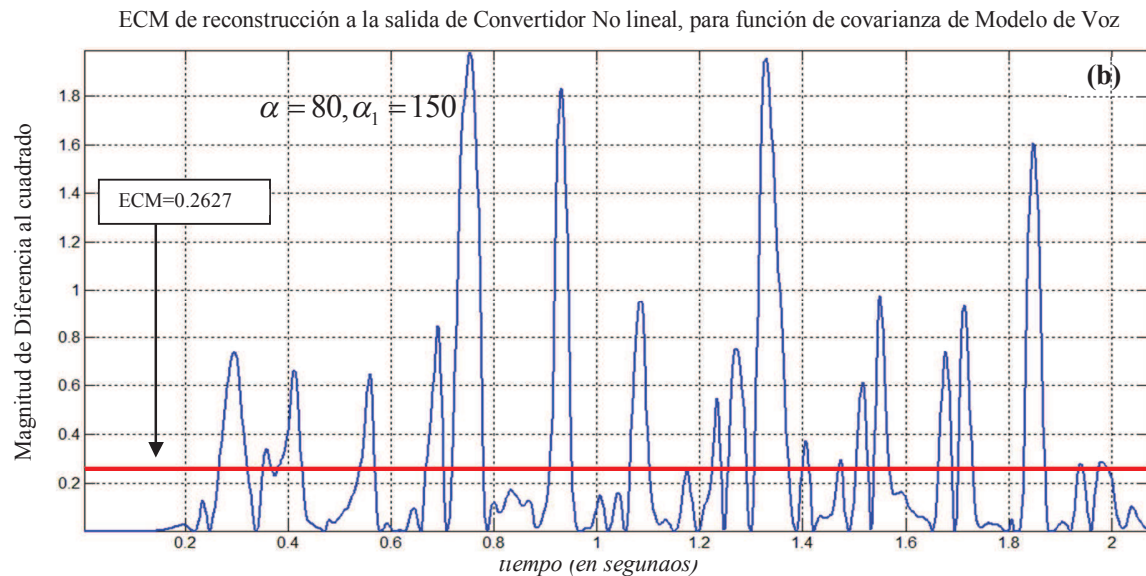


Figura 5.18 Error Cuadrático Medio de realización a la salida de Convertidor No lineal, con función de covarianza: Modelo de Voz para (a) $\alpha = 10, \alpha_1 = 50$; (b) $\alpha = 80, \alpha_1 = 150$.

Filtro Usado	Parámetro de ancho de banda α		Coefficiente de correlación r entre realización original y reconstruida	ECM
Filtro RC de Una Etapa	100		0.59755905	0.4074
	10		0.24479411	0.4438
	1		0.19231773	0.4649
	0.1		0.18711287	0.4673
Señal Triangular a la salida de Filtro Acoplado	A	T_0		
	1	1	0.00984177	0.5342
	1	100	-0.0454135	0.2953
	1	0.01	0.05086321	0.2655
Filtro para señales de Voz	α	α_1		
	50	80	0.226630713	0.281
	15	10	-0.114588310	0.4644
	10	50	0.114588310	0.3138
	80	150	-0.183210250	0.2627
	0.499	0.5	-0.0191544541	0.5436
	0.1	10	-0.0228935065	0.3456
	1e-5	1	-0.0214768318	0.5326

Tabla 5.2 Cálculo de Coeficiente de correlación y Error cuadrático medio para caso 2 de algoritmo No-Óptimo. Para modelos de procesos no diferenciables.

En la tabla 5.2 son mostrados algunos resultados de error de reconstrucción con estimador ECM y el coeficiente de correlación normalizada para evaluar el desempeño del algoritmo no óptimo, determinando el mejor modelo de proceso no diferenciable usado en la reconstrucción de realizaciones con pérdidas de información debido a procesos de conversión no lineales.

Recordando que el coeficiente de correlación con un índice negativo implica que la proporción de una variable aleatoria aumenta cuando otra proporción de variable aleatoria disminuye o viceversa. Esto es claro al observar la figura 5.17, en donde la realización a la salida de convertidor no lineal es estimada haciendo uso del filtro para procesos de voz, y que al compararla con la realización original se tiene que no todos los puntos de ambas realizaciones coinciden, y además son inversas debido al proceso de filtrado.

6 RESULTADOS

En el presente apartado son mostrados los resultados de las funciones error cuadrático medio para los diferentes valores del parámetro α asignados a los diversos modelos de procesos diferenciables y no diferenciables.

Filtro Usado	Parámetro de ancho de banda α		Coeficiente de correlación normalizado r	ECM
Filtro RC de Una Etapa	1		0.19754193	0.2062
	10		0.19743154	0.1935
	20		0.19501171	0.1743
	100		0.10345637	0.1493
Filtro RC de Dos Etapas	20		0.1622754	0.2478
	2		0.1544352	0.277
	200		0.0691821	0.1606
Filtro RC de Tres Etapas	8/3		0.0486184	0.1808
	50		0.0651318	0.2076
	200		0.0618609	0.1701
Filtro Acoplado	A	T_0		
	1	1	0.89420143	0.5342
Filtro para señales de Voz	α	α_1		
	15	10	0.22042102	0.4644
	0.49	0.5	0.59500862	0.527
	0.1	10	0.59994391	0.3311
	1e-5	1	0.59504209	0.5142
Filtro de Telemetría	α	α_1		
	15	10	0.5354674	0.2434
	0.49	0.5	0.2716746	0.2891
	0.1	10	0.2307142	0.2425
	1e-5	1	0.4235977	0.2535

Tabla 6.1 Error de Cuadrático medio y Coeficiente de correlación de la reconstrucción de Procesos Diferenciables y No Diferenciables para diversos valores de α . (Caso 1 Algoritmo No-Óptimo).

En la tabla 6.1 es posible observar que utilizando la metodología no óptima en la que ubicamos una muestra en la mitad entre dos cruces por cero, amplitud proporcional al intervalo entre cruces por cero, es posible obtener resultados de reconstrucción aceptables para modelos de procesos no diferenciables.

En este caso el menor error lo proporciona el filtro RC de una etapa, mismo que es un modelo de proceso no diferenciable; por otro lado el mejor valor de coeficiente de correlación lo proporciona el filtro acoplado que también es un modelo de proceso no diferenciable.

Filtro Usado	Parámetro de ancho de banda α		Coeficiente de correlación r entre realización original y reconstruida	ECM
Filtro RC de Una Etapa	100		0.59755905	0.4074
	10		0.24479411	0.4438
	1		0.19231773	0.4649
	0.1		0.18711287	0.4673
Filtro RC de Dos Etapas	200		0.63495119	0.4378
	20		0.21868623	0.456
	2		0.18700073	0.4673
	0.2		0.18654039	0.4675
Filtro RC de Tres Etapas	200		0.58100574	0.4352
	50		0.19928610	0.3679
	8/3		0.04226458	0.448
	3/8		0.03608395	0.310
Filtro Acoplado	A	T_0		
	1	1	0.00984177	0.5342
	1	100	-0.0454135	0.2953
	1	0.01	0.05086321	0.2655
Filtro para señales de Voz	α	α_1		
	50	80	0.226630713	0.281
	15	10	-0.114588310	0.4644
	10	50	0.226455470	0.3138
	80	150	0.183210250	0.2627
	0.499	0.5	-0.0191544541	0.5436
	0.1	10	-0.0228935065	0.3456
	1e-5	1	-0.0214768318	0.5326
Filtro de Telemetría	α	α_1		
	50	80	0.76720285	0.2953
	0.499	0.5	0.016893699	0.4518
	15	10	0.350556930	0.301
	0.1	10	0.012592476	0.4487
	1e-5	1	0.018110177	0.3575

Tabla 6.2 Coeficiente de correlación y Error cuadrático medio de Reconstrucción de las Realizaciones de los Procesos Diferenciables y No Diferenciables a la salida de convertidor no lineal, para diversos valores de α . (Caso2 Algoritmo No-Óptimo).

Para el caso de los resultados obtenidos en el desarrollo del algoritmo caso 2, donde la realización en saturación es filtrada a través de los diversos modelos de procesos, no proporciona buenos resultados en la reducción de error y en el incremento del coeficiente de correlación, sin embargo una principal ventaja en el uso de esta metodología no óptima, consiste en ahorrar recursos de procesamiento en el receptor, pues no es necesario estimar muestras intermedias ni tampoco es necesario estimar sus amplitudes, solo filtrar la realización en saturación completamente. Por su puesto hay un precio que pagar en el sentido de la calidad de la reconstrucción, y esa calidad es medida en términos del error en la tabla 6.2.

			Caso 1 Muestra en mitad entre cruce por cero		Caso 2 Muestra en máximo entre cruce por cero	
Filtro Usado	Parámetro de ancho de banda α		Error máximo $\bar{\sigma}^2(t)$	Error medio $\bar{\sigma}^2(t)$	Error máximo $\bar{\sigma}^2(t)$	Error medio $\bar{\sigma}^2(t)$
Filtro RC de Una Etapa	20		0.9496	0.5212	0.9792	0.556
	1		0.09125	0.0349	0.1135	0.04222
	0.1		0.01851	0.0070	0.0011	0.00042
Filtro RC de Dos Etapas	20		0.6118	0.1354	0.734	0.177
	2		0.00169	3.5e-7	0.0079	6.5e-4
	200		0.9998	0.8488	0.9998	0.8567
Filtro RC de Tres Etapas	8/3		0.8636	0.0475	0.9950	0.0995
	50		0.9765	0.2856	0.9788	0.3176
	200		0.99987	0.7766	0.9998	0.7856
Filtro Acoplado	T_0					
	1		0.1664	0.07	0.3492	0.1306
Filtro para Procesos de Voz	α	α_1				
	0.1	10	0.612	0.2351	0.779	0.3156
	1	0.001	0.0705	0.0247	0.1023	0.03517
	15	10				
	0.49	0.5	0.0797	0.0282	0.07975	0.02821
	1e-5	1	0.0723	0.0256	0.1064	0.0374
Filtro para Procesos de Telemetría	10	15	0.971	0.1339	0.7941	0.2004
	0.49	0.5	0.998	0.8791	0.99921	0.4965
	0.1	10	0.074	0.0253	0.12599	0.0366
	1e-5	1	0.998	0.9901	0.99875	0.9766

Tabla 6.3 Coeficiente de correlación y Error cuadrático medio de Reconstrucción de las Realizaciones de los Procesos Diferenciables y No Diferenciables para diversos valores de α .
(Algoritmo Óptimo).

En la tabla 6.3 son mostrados los resultados de error de reconstrucción utilizando la metodología óptima propuesta, en donde el error de reconstrucción lo proporciona la varianza condicional en términos de la función de covarianza utilizada y el intervalo de muestras.

A diferencia de los dos casos anteriores de algoritmo no óptimo en donde para estimar el error era necesario el uso de un estimador (realización original), para el caso óptimo no es necesario, pues el error se estima en el receptor con la función de covarianza utilizada y las muestras recibidas. Una desventaja en este procedimiento es que no proporciona los mejores resultados para todos los modelos de procesos, pues en la mayoría de los casos, proporciona valores mínimos de error para modelos de procesos no diferenciables.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo fue comprobado que los modelos de los procesos no diferenciales pueden ser ampliamente utilizados en el procedimiento de muestreo-reconstrucción de las realizaciones de los procesos aleatorios, especialmente de procesos aleatorios caóticos o de carácter no-diferenciable. Fue comprobado que este tipo de procesos tienen una función de dispersión grande, es decir que la derivada del proceso evaluada en $\sigma_x^2 \rightarrow \infty$. Es importante también considerar los parámetros de ancho de banda de los modelos de estos procesos ya que de estos dependerán la reconstrucción y error de reconstrucción de la realización.

El método de *Clipping* es una herramienta de conversión no lineal, que consiste en saturar la realización, teniendo como resultado una función rectangular, con espaciamientos de tiempo correspondiente a la realización, estos espaciamientos corresponden precisamente a los cruces por cero de las realizaciones. El método de clipping fue usado para muestrear los intervalos de cruce por cero de las realizaciones en los casos del algoritmo no óptimo, en donde la principal razón de la investigación es detectar las muestras de cruces por cero de las realizaciones, estimado muestras intermedias según la metodología basada en los algoritmos óptimo y no óptimo. Este método fue aplicado para los modelos de procesos Gaussianos estacionarios diferenciables y no diferenciables.

Para modelos de procesos no diferenciables que poseen parámetros de inverso de la variable de tiempo (en nuestra investigación parámetros de tipo $\alpha = 1/RC$), es recomendado utilizar valores pequeños de estos parámetros en la reconstrucción, ya que esto asegura un mínimo error de reconstrucción y reducción de las componentes espectrales de la realización reconstruida.

En general el PMR para Procesos Aleatorios Gaussianos Estacionarios No-Diferenciables utilizando los algoritmos óptimo y no óptimo puede ser logrado utilizando cualquiera de las diversas funciones de covarianza (Modelos tanto de procesos diferenciables como no-diferenciables), pudiendo obtener diferentes valores de error en la reconstrucción y eligiendo el modelo o función básica para la reconstrucción más conveniente.

El concepto anterior para el teorema de Balakrishnan representa una desventaja, puesto que la función única de reconstrucción para cualquier proceso aleatorio estacionario gaussiano se encuentra limitada por la función $\sin x/x$, por lo que esto crea la incertidumbre de si ésta función es la indicada para cualquier proceso aleatorio y además si proporciona el mínimo error de reconstrucción; además que esta metodología no incluye una función de densidad de probabilidad y en general características estadísticas.

Estas justificaciones no indican que el teorema de Balakrishnan sea incorrecto, si no que el teorema se limita a una única función básica para la reconstrucción y que además generaliza este método para procesos aleatorios.

Como se mencionó en capítulos anteriores una desventaja en PMR utilizando la regla de la esperanza matemática condicional aplicada a la metodología óptima de reconstrucción de las realizaciones con muestras entre cruces por cero, con modelos de procesos diferenciables, se centra en el incremento del parámetro de ancho de banda α , ya que de no será así, la matriz de covarianza sufre una singularidad al calcular la matriz inversa, provocando valores inconsistentes tanto en la función de reconstrucción como en la función de error de reconstrucción. Por otro lado, el inconveniente de incrementar el parámetro de ancho de banda produce mayores componentes espectrales en la reconstrucción de la realización y por tanto aumenta la función de error de reconstrucción. Este hecho no sucede con los modelos de procesos no diferenciables, puesto que es posible reducir los parámetros α de ancho de banda de algunos procesos y poder reconstruir la realización. Si bien no se reduce suficientemente el error de reconstrucción con los modelos de procesos no diferenciales, si es posible limitar en gran medida las componentes espectrales.

Una de las inquietudes en la realización de esta investigación es la implementación de los algoritmos óptimo y no óptimo en dispositivos embebidos o incluso en dispositivos de ejecución en tiempo real. De acuerdo a las pruebas y poder de cómputo realizado todo indica que es posible tomando en cuenta ciertas consideraciones. Una de estas consideraciones es el no poder procesar grandes cantidades de muestras, puesto que esto provocaría un incremento en la matriz de covarianza, incrementando el tiempo de procesamiento. Una primera solución a este problema sería introducir un número pequeño de muestras dentro de un intervalo de tiempo pequeño también, y reconstruir la realización por segmentos.

En esta investigación fueron considerados solo algunos modelos de procesos no diferenciables, por otro lado existen otros que solo fueron mencionados, algunos de estos modelos recomendados para la implementación de la metodología óptima y no óptima son: los modelos de filtro RC de una Etapa, el modelo para procesos de voz, señal triangular a la salida de Filtro Acoplado, filtro RLC resonante.

ANEXOS

1 PROGRAMAS DE SIMULACIÓN

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Programa que Detecta Cruces por cero de Una Realización %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% a la Salida de Filtro RC de Una Etapa, Detecta distancias entre cruces%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% por cero y Genera Histograma de Realizaciones%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Ing. Pedro Pancóatl Bortolotti %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear all
load Ruido.mat
x=Ruido;
alfa=1;
tic;
format long
r=2;
interpolacion=r;
fs=r*44100;
t=0:1:20;
X=x(1:100000)/max(abs(x(1:100000)));
%X=interp(X,r);
K=exp(-alfa*t);
media=conv(K,X);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
promedio=mean(media);
medial=media-promedio;
medial=medial/(max(abs(medial)));
for i=1:length(media)
    h(i)=(c(length(x)/length(media))*i)/fs/interpolacion;%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%(((Rutil/NM)*21.5)/length(Var))*i;%2;
end
for i=1:length(X)
    f(i)=(((length(x)/length(media))*i)/fs)/interpolacion;
end
subplot(2,1,1);
plot(f,X);
title('Ruido Blanco Gaussiano');
xlabel('tiempo');
ylabel('Proceso Aleatorio');
subplot(2,1,2);
plot(h,medial);
title('Proceso aleatorio a travez de FILTRO RC DE 1 ETAPA (Proceso Markoviano)');
xlabel('tiempo');
ylabel('Proceso Aleatorio');
hold off
figure
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Detecta Cruces por cero del Proceso a la Salida de filtro%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
j=1;
for i=1:length(medial)-1
    if medial(i)==0;
        z(j)=i;
        j=j+1;
    else
        if medial(i)>0
            if medial(i+1)<0
                z(j)=i;
                j=j+1;
            else
                end
        else
            if medial(i)<0
                if medial(i+1)>0
                    z(j)=i;
                    j=j+1;
                else
                    end
            end
        end
    end
end
l=length(z);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Calcula la distancia entre cruce por zero en segundos
for i=1:l-1
    Dist(i)=z(i+1)-z(i);
end
T=Dist*(1/fs);
T1=sort(T);
plot((t/fs),K);
title('Funcion de Covarianza');
```

```

xlabel('tiempo');
ylabel('K(t)');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Calcula el número de elementos repetidos en un vector
vector=T1;
vectorNoRepetido=unique(vector); %con este vector analizas uno a uno los elementos
ocurrencias=zeros(numel(vectorNoRepetido),1); %preallocation for speed
for i=1:numel(vectorNoRepetido)
mask=vector==vectorNoRepetido(i); %esto da un vector con 1 en las ocurrencias y ceros donde no
ocurrencias(i)=nnz(mask);
end
O=ocurrencias';
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Histograma%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Normaliza=O/trapz(O);
N=Normaliza(1:length(vectorNoRepetido));
figure
S1=interp(vectorNoRepetido,1);
S2=interp(N,1);
%S2=S2/sum(S2);
bar(S1,S2,1);
%bar(vectorNoRepetido,Normaliza,1);
title('Histograma');
xlabel('Distancia DeltaT entre cruces por cero (segundos)');
ylabel('Numero de Ocurrencias DeltaT');
toc;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Programa que interpola muestras entre dos cruces por cero %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%en máximo, en mitad y 6 muestras %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%entre cruces por cero. Las muestras son de una realizacion%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%la salida de un filtro RC de 1 etapa (Proceso Markoviano)%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%$$$$ Ing. Pedro Pancoatl Bortolotti $$$$$%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc
format long
load Ruido.mat
X=Ruido;
x=X(50:80100);
fs=44100;
interpolacion=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Calcula la media del Proceso%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
promedio=mean(x);
medial=x-promedio;
medial=medial/(max(abs(medial)));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Filtrado de Ruido con Filtro RC de 1 Etapa.
alfa=20; %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Normalizada
t=-10:0.001:10;
K=exp(-alfa*abs(t));
x1=conv(medial,K); %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Proceso Markoviano
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Normalizacion con la frecuencia de muestreo
x1=interp(x1,interpolacion);
for i=1:length(x1)
h(i)=((length(x1)/length(x1))*i)/(fs)/interpolacion;
end
for i=1:length(x1)
f(i)=((length(x1)/length(x1))*i)/(fs)/interpolacion;
end
%plot(x1);
plot(f,0,'k');
hold on
plot(f,x1); %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Gráfica en dominio del tiempo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
hold off
medial=x1/max(abs(x1));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Detecta Cruces por cero del Proceso %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
j=1;
for i=1:length(medial)-1
if medial(i)==0;
z(j)=i;
j=j+1;
else
if medial(i)>0
if medial(i+1)<0
z(j)=i;
j=j+1;
else
end
else
if medial(i)<0
if medial(i+1)>0

```



```

        z(j)=i;
        j=j+1;
    else
        end
    end
end
end
end
l=length(z);
%%Calcula la distancia entre cruce por zero en segundos
for i=1:l-1
    Dist(i)=z(i+1)-z(i);
end
Z=(z*(1/fs))/interpolacion; %Cruces por cero !!!!!!!!!!!!!!!
T=(Dist*(1/(fs)))/interpolacion; %Distancia entre cruces Por cero !!!!!!!!!!!!!!!
T1=sort(T);
%%Calcula el número de elementos repetidos en un vector
%vector=T1;
%vectorNoRepetido=unique(vector); %con este vector analizas uno a uno los elementos
%ocurrencias=zeros(numel(vectorNoRepetido),1); %preallocation for speed
%for i=1:numel(vectorNoRepetido)
%mask=vector==vectorNoRepetido(i); %esto da un vector con 1 en las ocurrencias y ceros donde no
%ocurrencias(i)=nnz(mask);
%end
%O=ocurrencias';

%%INTRODUCE MUESTRA ENTRE DOS CRUCES POR CERO
%O=ocurrencias';

%Samp(1)=(Z(1)+Z(2))/2;
for i=1:length(Z)-1
    Samp(i+1)=(Z(i)+Z(i+1))/2;
end
Z2=interp(Z,2);
%%Combina el vector de cruces por cero con el vector de muestras intermedias
i=1;
for j=1:2:length(Z2)-2
    Z2(j+1)=Samp(i+1); %Vector recombinado
    i=i+1;
end
%%Inicializamos Amplitudes de muestras agregadas en funcion de las
%%Distancias T entre cruces por cero
A=zeros(1,length(Z2));
i=1;
for j=1:2:length(Z2)-2
    A(j+1)=T(i); %Vector recombinado
    i=i+1;
end
Z4=fs.*Z2.*interpolacion; %Para manipular muestras como enteros
Z4=int64(Z4);
for s=1:length(Z4)
    l=Z4(s);
    if l>=length(media1)
        break
    else
        end
    signo(s)=media1(l);
end
signo=sign(signo); %localiza el signo de la Realizacion
R=(A(1:length(signo)).*signo); %Realizacion final
R=R/(max(abs(R)));
bar(Z2(1:length(R)),R,2.5,'r');
hold on
plot(f,media1);
plot(Z2(1:length(R)),R,'r');
title('Muestras agregadas a la mitad de cruces por cero de la Realización');
xlabel('tiempo (segundos)');
ylabel('Amplitud de Realización');
text(0.005,-0.75,'La amplitud de las muestras agregadas estan en funcion de la distancia entre cruces por cero')
hold off
%%INTRODUCE MUESTRA EN EL MÁXIMO ENTRE DOS CRUCES POR CERO
%Z5=fs.*Z.*interpolacion; %Para manipular muestras como enteros
Z5=int64(Z5);
for i=1:length(Z5)-1
    C1=double(Z5(i));
    C2=double(Z5(i+1));
    for q=C1:1:C2
        M(q)=media1(q);
    end
end

```

```

end
MM=abs(M);
[maximo(i),pos(i)]=max(MM); %%%Calcula el máximo y su posicion dentro de cada cruce por cero
clear('MM','M')
end
%%Recombina vector de máximos y su posicion con vector de cruces por cero%%
for j=2:1:length(pos)-1
if pos(j)==pos(j+1)
pos(j+1)=pos(j+1)+1; %%%Corrige posibles valores repetidos en posicion
else
end
end
posb=(pos/fs)/interpolacion;
for k=1:1:length(pos)
l=pos(k);
signoa(k)=sign(media1(l));
end
maximob=maximo.*signoa;
figure
plot(f,0,'k');
hold on
plot(f,media1);
%Z3=(A3.*(1/(fs)))/interpolacion;
bar(posb,maximob,1.5,'m');
plot(posb,maximob,'m');
title('Muestras agregadas en el máximo entre cruces por cero de la Realización');
xlabel('tiempo (segundos)');
ylabel('Amplitud de Realización');
text(0.0001,-0.8,'Las muestras agregadas tienen la amplitud del maximo entre cruces por cero')
%axis([0 0.025 -1 1]);
hold off
%%Reconstruye Realización utilizando la media condicional con %Función de Covarianza: FILTRO RC DE 1 ETAPA y alfa=1 %Pedro Pancóatl Bortolotti
clear all
clc
load RC1.mat
%%Reconstrucción Utilizando la media condicional
sigma=1;
alfa=1;
l=length(f);
Rutil=f(l);
NM=length(mitadY);
%while NM<2 && NM>40
%end
DeltaT=Rutil/(NM-1);
%for i=1:1:NM
% TI(i)=DeltaT*(i-1);
%end
TI=mitadX(1:length(mitadY));
%%Introduccion del valor de cada muestra [Xi]
X=decimate(mitadY,1);
%%Reconstrucción de Proceso con muestras agregadas en la mitad del cruce %por cero
for i=1:1:NM
for j=1:1:NM
K(i,j)=(sigma^2)*exp(-alfa*abs(TI(i)-TI(j)));
end
end
%%Calcula inversa de la matriz K
A=inv(K);
%%Calcula la media y la varianza condicional
%%Calculo de Variables de desicion
Divic=(NM+12)*16^2;
Tinic=-4*DeltaT;
Tvaria=Rutil/(16*(NM-1));
%%Calculo de la Media Matematica Condicional
for n=1:1:(Divic+1)
T=Tinic+(n-1)*Tvaria;
media(n)=0;
for i=1:1:NM
for j=1:1:NM
media(n)=media(n)+(sigma^2)*exp(-alfa*abs(T-TI(i)))*A(i,j)*X(j);
end
end
end
%%Calculo de Varianza Matematica condicional
for n=1:1:(Divic+1)
T=Tinic+(n-1)*Tvaria;
Var(n)=sigma^2;

```

```

for i=1:1:NM
    for j=1:1:NM
        Var(n)=Var(n)-(sigma^4)*exp(-alfa*abs(T-TI(i)))*A(i,j)*exp(-alfa*abs(TI(j)-T));
    end
end
end
%%%
%%% Graficas de Reconstruccion y error de reconstrucción para muestras
%%%a la mitad de cruce por cero
Var=Var/max(abs(Var));
d=length(f);
d2=f(d);
i=0;
for k=1:1:length(Var)
    h(k)=(i*2*(d2/length(Var)));
    i=i+1;
end
%%%Calculo de error promedio
PP=mean(Var(66:1471));
%%%
subplot(2,1,2);
plot(h,PP,'r');
hold on
plot(h,Var);
title('Funcion de Error de Reconstruccion de Realizacion a partir de muestras a la mitad entre cruces por cero con K=Filtro RC de Una Etapa y alfa=1');
xlabel('tiempo');
ylabel('Error de Reconstruccion Sigma^2');
hold off
subplot(2,1,1);
plot(h,media);
hold on
plot(0,'k');
title('Funcion de Reconstruccion m(t) a partir de muestras a la mitad entre cruces por cero con K=Filtro RC de una Etapa con alfa=1');
xlabel('tiempo');
ylabel('Funcion de Reconstruccion m(t) condicional');
hold off
%%%
%%%Reconstrucción de Proceso con muestras agregadas en el máximo del cruce por
%%%cero
figure
clear h TI NM Var media
NM=length(maximoY);
%%%Distancias x
TI=maximoX(1:length(maximoY));
%%%Introduccion del valor de cada muestra [Xi]
X=maximoY;
%%%
for i=1:1:NM
    for j=1:1:NM
        K(i,j)=(sigma^2)*exp(-alfa*abs(TI(i)-TI(j)));
    end
end
%%%Calcula inversa de la matriz K
A=inv(K);
%%%Calcula la media y la varianza condicional
%%%Calculo de Variables de desicion
Divic=(NM+12)*16*2;
Tinic=-4*DeltaT;
Tvaria=Rutil/(16*(NM-1));
%%%Calculo de la Media Matematica Condicional
for n=1:1:(Divic+1)
    T=Tinic+(n-1)*Tvaria;
    media(n)=0;
    for i=1:1:NM
        for j=1:1:NM
            media(n)=media(n)+(sigma^2)*exp(-alfa*abs(T-TI(i)))*A(i,j)*X(j);
        end
    end
end
%%%Calculo de Varianza Matematica condicional
for n=1:1:(Divic+1)
    T=Tinic+(n-1)*Tvaria;
    Var(n)=sigma^2;
    for i=1:1:NM
        for j=1:1:NM
            Var(n)=Var(n)-(sigma^4)*exp(-alfa*abs(T-TI(i)))*A(i,j)*exp(-alfa*abs(TI(j)-T));
        end
    end
end
end

```

```

%% Graficas de Reconstruccion y error de reconstrucción para muestras en el máximo entre de cruces por cero
Var=Var/max(abs(Var));
d=length(f);
d2=f(d);
i=0;
for k=1:1:length(Var)
h(k)=(i*2.3*(d2/length(Var)));
i=i+1;
end
%% Calculo de Error medio
PP=mean(Var(33:722));
subplot(2,1,2);
plot(h,PP,'r');
hold on
plot(h,Var);
title('Funcion de Error de Reconstruccion de Realizacion a partir de muestras en el máximo entre cruces por cero con K=Filtro RC de Una Etapa y alfa=20');
xlabel('tiempo');
ylabel('Error de Reconstruccion Sigma^2');
hold off
subplot(2,1,1);
plot(h,media);
hold on
plot(0,'k');
title('Funcion de Reconstruccion m(t) a partir de muestras en el máximo entre cruces por cero utilizando K=Filtro RC de una Etapa con alfa=20');
xlabel('tiempo');
ylabel('Funcion de Reconstruccion m(t) condicional');
hold off

```

PUBLICACIÓN DE ARTÍCULO

“Investigación del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de Procesos Gaussianos No diferenciables”.

Ponencia en el XII Congreso Nacional de Ingeniería
Electromecánica y de Sistemas
Del 8-12 noviembre de 2010

Maestría en Ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones
Ing. Pedro Pancóatl B. Dr. Vladimir Kazakov
Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En el Presente trabajo se publica brevemente los resultados obtenidos en el Muestreo-Reconstrucción de Procesos Gaussianos no diferenciables, identificando dichos modelos y haciendo mención a modelos diferenciales. La herramienta utilizada en este trabajo es la “*Regla de La Esperanza Matemática Condicional*” como procedimiento para el muestreo y reconstrucción; que además tiene la particularidad de evaluar la función de error de reconstrucción de dicho proceso Aleatorio.

Introducción

En la realización de estudio de Procesos Estocásticos, muchos investigadores han evaluado y analizado diversos tipos de fenómenos aleatorios, apoyándose de gran variedad de herramientas y modelos que contribuyen a la reconstrucción de dichos Procesos y obteniendo el mínimo error posible; sin embargo los modelos utilizados son Diferenciales, ya que los resultados de utilizar estos modelos aproximan en gran escala a la mayoría de los fenómenos físicos.

Por otro lado no se han realizado estudios profundizados en la utilización de modelos No-Diferenciales.

I. PROCESOS DIFERENCIALES Y NO DIFERENCIALES

Considerando un proceso $x(t)$ con función de covarianza en régimen no estacionario $K_x(t_1, t_2)$, es posible obtener la derivada del proceso dado como $x'(t)$, entonces la función de covarianza de la derivada del proceso para régimen estacionario es obtenida como: [1]

$$K_{x'}(t_1, t_2) = \frac{d^2 K_x(t_1, t_2)}{d(t_1, t_2)} \quad (2)$$

Por otro lado en caso *Estacionario* la definición se expresan [2]:

$$K_{x'}(\tau) = -\frac{dK_x(\tau)}{d\tau} \quad (3)$$

$$K_{x''}(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} \quad (4)$$

Un proceso aleatorio es *no-diferencial* si $K_x(\tau = 0) = \sigma^2$ y dicho valor $\sigma^2 \rightarrow \infty$ para el caso Estacionario.

Evaluamos un ejemplo con un Proceso Markoviano, como el que obtenemos a la salida de un filtro RC de una etapa cuando lo alimentamos de ruido blanco gaussiano, y cuya función de Covarianza $K(\tau)$ de dicho filtro se expresa en (5).

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (5)$$

Donde $\alpha = RC^{-1}$ y σ^2 es la varianza del proceso.

Si utilizamos la versión normalizada de la función de Covarianza en (5), entonces $\sigma^2 = 1$, y la notación de función de covarianza normalizada sería $K_x(\tau) = R_x(\tau)$.

Aplicando (3) y (4) en la función de covarianza normalizada (5) en caso estacionario obtendremos:

$$R_{x'}(\tau) = -\alpha e^{-\alpha|\tau|} \quad (6)$$

$$R_{x''}(\tau) = \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (7)$$

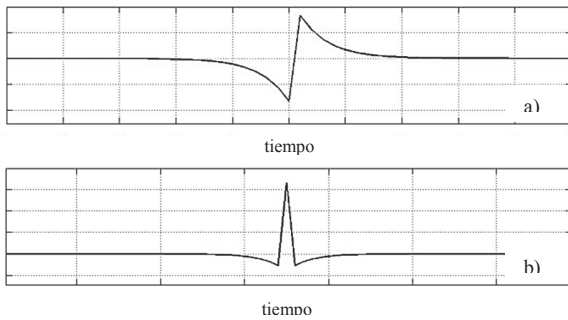


Figura 1. a) Primera y b) Segunda Derivada de un Proceso Markoviano

En figura 1 se aprecia que en $\tau = 0$, el valor de $R_{x''}(\tau) = \sigma^2 \rightarrow \infty$, por lo que este Proceso Markoviano es *No-Diferencial*. Hay que mencionar que a la salida de este Filtro obtendremos un proceso Markoviano cuya densidad espectral del ruido es $N_0/2$.

II. MODELOS DE LOS PROCESOS GAUSSIANOS DIFERENCIALES Y NO DIFERENCIALES

Entre los modelos Gaussianos Diferenciales utilizados comúnmente para procesos aleatorios se encuentran los Filtros de orden superior como lo pueden ser los filtros de dos y tres etapas o filtros para modelo de Telemetría.

Como ejemplo de modelo Diferencial consideraremos al Modelo de Telemetría, mismo que se presenta en la ecuación (8) con su respectivo espectro de potencia en (9).

$$K(\tau) = \frac{\alpha\alpha_1\sigma^2}{4(\alpha_1^2 - \alpha^2)} (\alpha_1 e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\alpha_1|\tau|}) \quad (8)$$

$$S(\omega) = \frac{\alpha\alpha_1\omega\sigma^2}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)(\omega^2 - \alpha^2)} \quad (9)$$

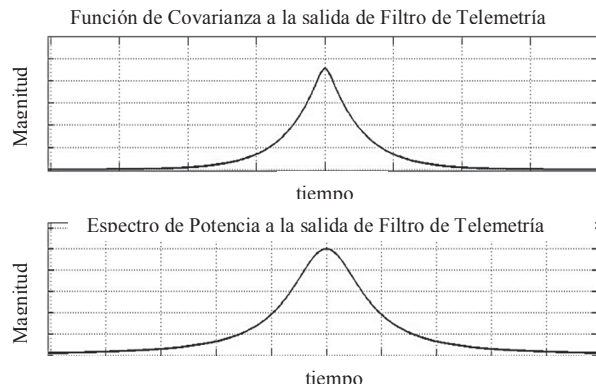


Figura 2. Modelo de Telemetría y su Espectro de Potencia

El modelo de Telemetría es un arreglo especial de filtros RC pasa-bajas de dos etapas acoplados; el cual nos permite manipular los valores de α y α_1 para obtener diversos valores de error de reconstrucción.

En los siguientes casos analizamos los modelos No-Diferenciales; dos de estos modelos corresponden a Filtro RC de una Etapa (Proceso del tipo Markoviano) y Modelo de Voz.

El modelo de un Proceso Markoviano, que consiste en un Filtro RC de una etapa se muestra en las ecuaciones (10) y (11).

Función de Covarianza a la salida de Filtro RC de una Etapa

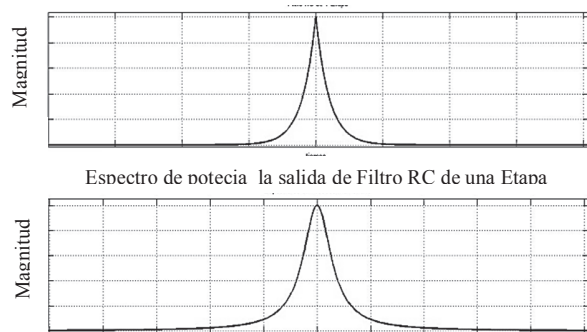


Figura 3. Proceso Markoviano y su espectro de Potencia.

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (10)$$

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (11)$$

A continuación se muestra las ecuaciones del Modelo de Voz (12 y 13) que consiste en un arreglo de filtros similar al Modelo de Telemetría visto en (8) y (9); consta básicamente de una tapa Diferencial acoplada a un Integrador.

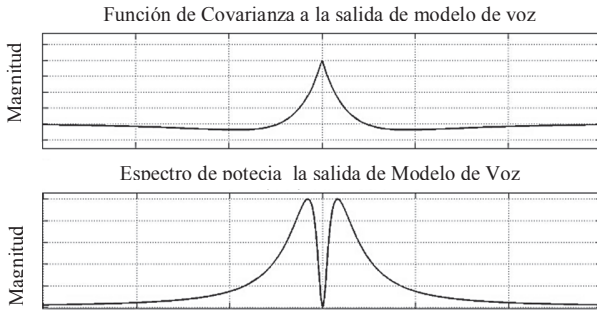


Figura4. Modelo de Voz y su Espectro de Potencia.

$$K(\tau) = \frac{\alpha_1^2 N_\lambda}{4(\alpha^2 - \alpha_1^2)} (\alpha e^{-\alpha|\tau|} - \alpha_1 e^{-\alpha_1|\tau|}) \quad (12)$$

$$S(\omega) = \frac{\alpha_1^2 \omega N_\lambda}{2(\omega^2 + \alpha_1^2)(\omega^2 + \alpha^2)} \quad (13)$$

Para todos los casos anteriores α corresponde a un parámetro del filtro, dicho parámetro lo determina los elementos lineales e inerciales del filtro, es decir .

III. REGLA DE ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL

Si se tiene un proceso estocástico $x(t)$ caracterizado por su función de distribución de probabilidad multidimensional (FDP):

$W_m[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)]$, y que una realización de este proceso es discretizado en los instantes de tiempo $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$.

Por lo tanto existe un conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$. Esta información cambia el dato inicial del proceso aleatorio, es decir sus momentos iniciales y centrales, así como sus densidades de probabilidad. Estas nuevas funciones y densidades de probabilidad se denominan condicionales (o posteriori), y dependerán de cada muestra $x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$. [3].

$$W[x(t) | X, T] = W[x(t) | x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_n)]$$

Entonces desde tiempo continuo se puede apreciar que la Esperanza matemática condicional está determinada por:

$$\tilde{m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) W[x(t) | X, T] dx(t) \quad (14)$$

Y su función de Varianza Condicional dada por la ecuación (18):

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \quad (15)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \tilde{m}(t))^2 W[x(t) | X, T] dx(t)$$

La reconstrucción de la señal dependerá del conjunto de muestras X, T y del conocimiento su función de distribución de probabilidad $W[x(t) | X, T]$. La regla de la esperanza matemática condicional proporciona el mínimo error de la estimación para las variables aleatorias con fdp arbitraria; de tal manera tenemos que la Esperanza Matemática Condicional $\tilde{m}(t)$ así como la Función de Varianza Condicional $\tilde{\sigma}^2(t)$, son las funciones de reconstrucción y función de error de reconstrucción respectivamente.

Si fijamos un conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ y las características estadísticas del proceso condicional, se tiene el proceso Gaussiano condicional $\tilde{x}(t)$ (para el caso no estacionario) descrito por (16):

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) m(T_j)]$$

$$(17)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} K(T_j, t)$$

Donde $K(t, T_i)$ y a_{ij} es la matriz de covarianza y su matriz inversa respectivamente.

Si evaluamos procesos *Estacionarios*, consideramos $m(t) = 0$ y $\sigma^2(t)=1$ en la ecuaciones (16) y (17).

IV. MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS GAUSSIANOS NO-DIFERENCIALES

A continuación proponemos los tres modelos anteriores (Modelo de Telemetría, Proceso Markoviano y Modelo de Voz), como funciones de Covarianza de reconstrucción de un Proceso aleatorio mediante el uso la Regla de La Esperanza Matemática Condicional formado por un conjunto de muestras arbitrarias, tal y como se muestran en la tabla 1.

Valor de la Muestra $X(T_i)$	Instante de Tiempo T_i [seg]
$x(T_1) = 1$	$T_1 = 0$
$x(T_2) = 1.4$	$T_2 = 0.1$
$x(T_3) = 0.6$	$T_3 = 0.2$
$x(T_4) = 1.2$	$T_4 = 0.3$
$x(T_5) = 1$	$T_5 = 0.4$
$x(T_6) = 3$	$T_6 = 0.6$
$x(T_7) = 2$	$T_7 = 0.7$
$x(T_8) = 0.4$	$T_8 = 0.8$
$x(T_9) = 0.9$	$T_9 = 0.9$
$x(T_{10}) = 0.3$	$T_{10} = 1$
$x(T_{11}) = 1.5$	$T_{11} = 1.2$
$x(T_{12}) = 0.1$	$T_{12} = 1.3$
$x(T_{13}) = 0.3$	$T_{13} = 1.4$
$x(T_{14}) = 1.8$	$T_{14} = 1.5$
$x(T_{15}) = 0.2$	$T_{15} = 1.6$

Tabla 1. Valores de 15 muestras Arbitrarias.

La tabla anterior contiene 15 valores arbitrarios de muestras en un intervalo de 1.6 segundos, por tanto tendremos en intervalo de tiempo entre muestras de $\Delta t = 0.1$.

➤ Modelo de Telemetría

Si proponemos $\alpha = 1$ y $\alpha_1 = 2$ para este modelo Diferencial, utilizando los valores de la Tabla 1, La Regla de la Esperanza Matemática Condicional (16) para caso estacionario obtenemos:

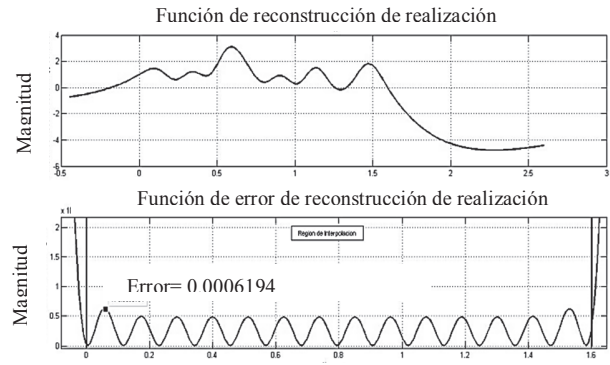


Figura 5. Función de Reconstrucción y Error de Reconstrucción utilizando Modelo de Telemetría.

El Resultado en la Reconstrucción utilizando el modelo de Telemetría como función de Covarianza en la Regla de la Esperanza Matemática Condicional nos arrojó una función de error de reconstrucción $\tilde{\sigma}(\tau) = 0.0006194$; esta reducción error implica una reconstrucción suave en el proceso aleatorio evaluado.

➤ Modelo de Voz

Ahora evaluamos el caso No-Diferencial del Modelo de Voz, evaluando con valores de $\alpha = 0.49$ y $\alpha_1 = 0.5$ y de nueva cuenta utilizando la Regla de Esperanza matemática condicional obtenemos:

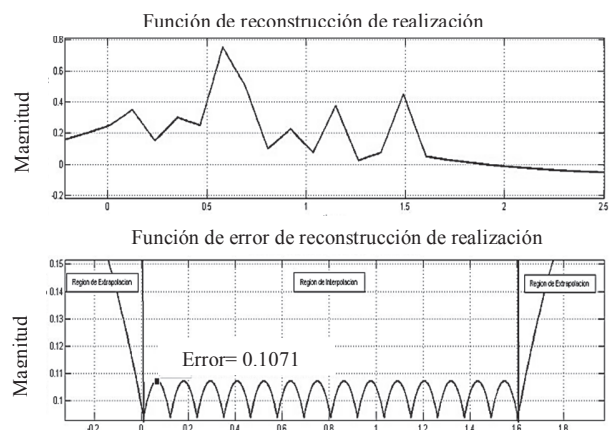


Figura 6. Funciones de Reconstrucción y Error de Reconstrucción utilizando Modelo de Voz.

En la figura 6 se obtiene la función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de número arbitrario de muestras y la función de varianza condicional $\tilde{\sigma}(t)$ como la función de error de reconstrucción de dicho proceso; en este caso el error de reconstrucción para 15 muestras fue de $\tilde{\sigma}(t) = 0.1071$.

➤ Proceso Markoviano

Ahora si nuevamente tomamos los valores de la tabla anterior con valor de $\alpha = 1$ es decir consideramos Función de Covarianza Normalizada y Reconstruimos dicho proceso utilizando la Regla de la Esperanza Matemática Condicional con el Proceso Markoviano como una función de Covarianza, obtendremos:

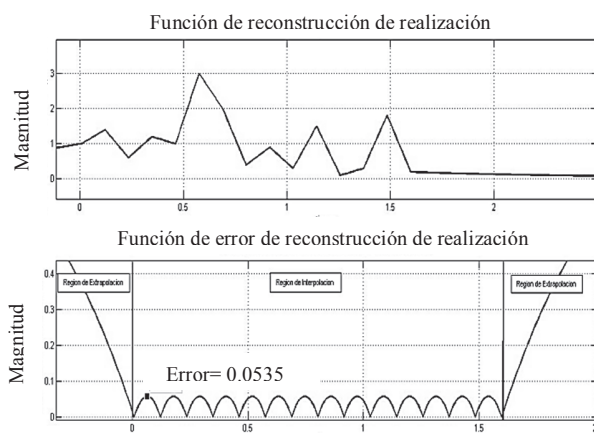


Figura 7. Funciones de Reconstrucción y de Error de Reconstrucción utilizando Proceso Markoviano.

En la figura 7 apreciamos una reducción mayor en el error de reconstrucción con respecto al modelo de voz en este caso para 15 muestras $\tilde{\sigma}(t) = 0.0535$; que aunque no reduce en gran escala el error de reconstrucción como los modelos diferenciales, prueban la influencia de dichos modelos no-diferenciales en la reconstrucción y reducción de error de procesos estocásticos.

Conclusiones

Los Modelos No-Diferenciales nos alojan resultados con un nivel de error considerable, en especial los modelos tanto de Voz como los Procesos Markovianos.

Para el caso del Modelo de Voz, el error depende en gran medida a la elección de los parámetros α y α_1 , de la misma forma en que $\alpha = 1$ para el proceso Markoviano.

Debe tenerse presente el hecho de que el aumento del número de muestras en el mismo intervalo de 1.6 segundos analizado en los tres casos anteriores, contribuye a la reducción de error de reconstrucción.

La Regla de la esperanza matemática Condicional es un método de muestreo-reconstrucción para procesos Estocásticos, la ventaja de usar esta herramienta se concentra en que es aplicable para procesos aleatorios con función de distribución de probabilidad arbitraria, obteniendo el mínimo error.

Bibliografía

- [1] Middleton David, "Statistical Communication Theory", New York McGraw-Hill 1996, pp 68-69
- [2] M.S. Yiarlykov "Aplicación de la Teoría Markoviana de la Filtración no lineal en Radioingeniería" Moscú, "Sovetskoe Radio", 1980.
- [3] R.L. Strattonovich, "Topics in the Theory of Random Noise", Vol. 1, Gordon and Breach. New York, 1963, pp 46.
- [4] H. Stark & John W. Woods, "Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing", 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall 2002.

“Reconstrucción de los Procesos Gaussianos con ubicación de las muestras entre cruces por cero de las realizaciones”.

Ponencia en el VI Congreso Internacional de Ingeniería
Electromecánica y de Sistemas
Del 7-11 noviembre de 2011

Maestría en Ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones
Ing. Pedro Pancóatl B. Dr. Vladimir Kazakov
Instituto Politécnico Nacional

Resumen

El problema de la reconstrucción de las realizaciones de los procesos Gaussianos con algoritmo modificado de *Clipper* es investigado. Además de las muestras de cruce por cero de las realizaciones de los procesos, son consideradas las muestras : 1), en la mitad del intervalo de muestreo, 2) en el máximo valor dentro del intervalo de muestreo entre dos cruces por cero. Ambas variantes son analizadas con algoritmo óptimo en la base de la regla de la esperanza matemática condicional. Es decir, fueron obtenidas: la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción. Una variante de muestreo no óptimo en donde las muestras son ubicadas en la mitad del intervalo de cruce por cero, con amplitud en función de la distancia del intervalo entre los mismos cruces por cero. La investigación del error de reconstrucción, es cumplida con el método especial y la comparación de dicho método es presentada para diversos tipos de procesos Gaussianos.

Palabras Clave: *Clipping, Regla de la Esperanza Matemática Condicional, Procesos Gaussianos, Cruce por Cero.*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad existen, publicaciones dedicadas al problema de procedimiento de muestreo-reconstrucción de los procesos Gaussianos y No Gaussianos. En donde dicha investigación está fundada en la regla de la esperanza matemática condicional (REMC). (Ver ejemplo los artículos [1-4])

El resultado obtenido para cada proceso fue la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción mínima. Sin embargo el problema de la descripción del proceso Gaussiano después de la operación *Clipping*, no fue investigado. A continuación es presentado un caso especial, en donde la realización del proceso a la salida del convertidor no lineal de *clipping*, tienen como única información los cruces por cero; bajo estas condiciones no es posible aplicar la metodología de REMC, esto se debe a que la función de reconstrucción óptima es igual a cero.

En estas condiciones algoritmos modificados son propuestos, en los cuales, además de las muestras de cruce por cero, también es usada una muestra ubicada entre cada cruce por cero.

La multitud de muestras de ceros aumentas con muestras adicionales dentro de cada intervalo de muestreo: 1) el muestreo en el momento en el que la realización tiene un valor máximo dentro de dos cruces por cero; 2) el muestreo en la mitad dentro de dos cruces por cero; 3) el muestreo en la mitad dentro de cruces por cero, con amplitud en función de la distancia del intervalo de cruce por cero. Las dos primeras variantes mencionadas pueden ser analizadas con la aplicación de la REMC. En resultado fueron obtenidas la función de reconstrucción óptima y la función de error de reconstrucción. La tercera variante mencionada es un caso no óptimo, puesto que es usado un muestreo no real. En este caso la amplitud de la muestra es calculada como una cifra proporcional al intervalo de muestreo. Este método posee una ventaja, puesto que no es necesario enviar la muestra dentro del intervalo de dos cruces por cero, pues es suficiente enviar solo las dos muestras de cruce por cero de la realización.

Las investigaciones fueron realizadas para procesos Gaussianos diferenciables y no diferenciables, para diferentes funciones de covarianza.

I. MODELOS DE PROCESOS GAUSSIONOS

Considere procesos Gaussianos estacionarios con esperanza matemática igual a cero, dichos procesos han sido formados a partir de algunos filtros afectados con ruido blanco $n(t)$. Hacer un cambio en el filtro representa tener los procesos Gaussianos a la salida, con funciones de covarianza de diversos tipos.

Es posible clasificar a los modelos de procesos en dos tipos: Modelos de Procesos Diferenciables y No diferenciables. Los modelos de procesos Diferenciables están asociados a procesos suaves, además son más comunes y utilizados ampliamente en el tratamiento de las señales y radiotécnica. Por simplicidad, los análisis fueron realizados a partir de la funciones de covarianza normalizada, lo que implica que $R(\tau) = K(\tau)/K(0) = K(\tau)/\sigma^2$ y por tanto $0 < R(\tau) < 1$ Algunos modelos de procesos diferenciables son mostrados en la Tabla 1.

Tipo de Filtro	Función de Covarianza
Filtro RC de Dos Etapas	$R(\tau) = (1 + \alpha \tau)e^{-\alpha \tau }$
Filtro RC de Tres Etapas	$R(\tau) = (1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2\tau^2}{3})e^{-\alpha \tau }$
Filtro para Procesos de Telemetría	$R(\tau) = \alpha_1 e^{-\alpha \tau } - \alpha e^{-\alpha_1 \tau }$

Tabla 1. Modelos de Procesos Diferenciables.

Por otro lado existen procesos No Diferenciables los cuales están asociados a procesos caóticos, tales y como se muestran en la Tabla 2.

Tipo de Filtro	Función de Covarianza
Modelo de Filtro RC de Una Etapa	$R(\tau) = e^{-\alpha \tau }$
Filtro Acoplado	$R(\tau) = (1 + \frac{ \tau }{T_0})$
Modelo para Procesos de Voz	$R(\tau) = \alpha e^{-\alpha \tau } - \alpha_1 e^{-\alpha_1 \tau }$
Filtro RLC Resonante	$R(\tau) = e^{-\alpha \tau } \cos(\omega_0 \tau)$

Tabla 2. Modelos de Procesos No-Diferenciables

II. REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL.

Si se tiene un proceso estocástico caracterizado por su función de distribución de probabilidad (fdp) multidimensional: $W[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)]$, y que una realización de este proceso es discretizado en los

instantes de tiempo $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$. Por lo tanto existe un conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$.

Esta información cambia los datos del proceso aleatorio, es decir sus momentos iniciales y centrales, así como sus densidades de probabilidad. Estas nuevas funciones y densidades de probabilidad se denominan condicionales (o posteriori), y dependerán de cada muestra $x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$:

$$W[x(t) | X, T] = W[x(t) | x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)] \quad (1)$$

Entonces desde tiempo continuo se puede apreciar que la Esperanza matemática condicional está determinada por:

$$\tilde{m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) W[x(t) | X, T] dx(t) \quad (2)$$

Y su función de Varianza Condicional dada por la ecuación:

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \tilde{m}(t))^2 W[x(t) | X, T] dx(t) \quad (3)$$

La reconstrucción de la señal dependerá del conjunto de muestras X, T y del conocimiento de su función de distribución de probabilidad $W[x(t) | X, T]$. Además REM genera el mínimo error de la estimación para las variables aleatorias con fdp arbitraria. Considerando el caso con una función de densidad de probabilidad Gaussiana, se tiene que la Esperanza Matemática Condicional $\tilde{m}(t)$ así como la Función de Varianza Condicional $\tilde{\sigma}^2(t)$, son las funciones de reconstrucción y función de error de reconstrucción respectivamente.

Si fijamos un conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ y las características estadísticas del proceso dado, se tiene (para el caso no estacionario):

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} K(T_j, t) \quad (5)$$

Donde $K(t, T_i)$ y a_{ij} son los elementos de la matriz de covarianza y su matriz inversa respectivamente. Además es posible preciar la función de esperanza matemática $m(t)$ y la función de varianza $\sigma^2(t)$. Al que al tratarse de un proceso no estacionario, esto parámetros dependen del tiempo.

En el presente trabajo evalúa el caso de los procesos *Estacionarios*, por lo que serán consideradas funciones de covarianza normalizada así como $\tilde{m}(t)=0$ y $\tilde{\sigma}^2(t)=1$ en la ecuaciones (4) y (5), De tal modo que dichas ecuaciones pueda ser reescritas como:

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R(t, T_i) a_{ij} x(T_j) \quad (6)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t - T_i) a_{ij} K(T_j - t) \quad (7)$$

III. DESARROLLO DE ALGORITMO ÓPTIMO.

El algoritmo óptimo se basa en la reconstrucción de una realización a partir de la multitud de sus muestras; en este caso la inserción de muestras es llevada a cabo entre cada cruce por cero de la realización bajo dos condiciones: 1) Una muestra es agregada en la mitad entre cruce por cero de la realización con amplitud en función de del intervalo de muestreo (entre dos cruces por cero). 2) Una muestra agregada en el máximo entre cruce por cero de la realización. [7, 8, 9]

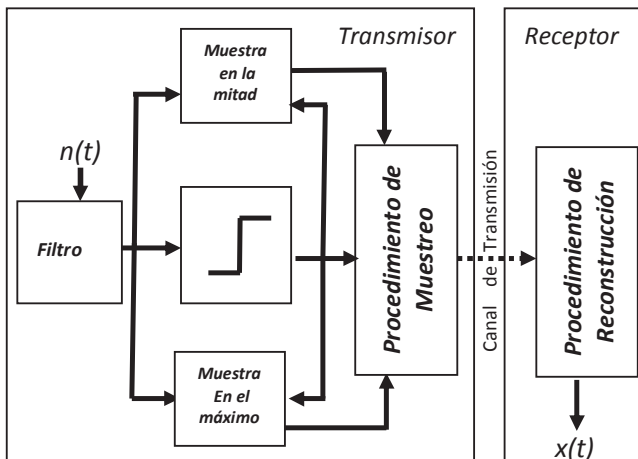


Figura 1. Diagrama de Desarrollo de algoritmo Óptimo

En la figura 1 es mostrado el esquema dividido en dos partes como sería el caso de un sistema de transmisión, en donde la etapa de transmisión (etapa de muestreo) incluye un bloque para la obtención de la realización, así como la detección de cruce por cero para posteriormente

integrar una muestra en la mitad o en el máximo entre dos cruces por cero. Por otro lado en la recepción, es desarrollado el procedimiento de reconstrucción basado en REMC. Si es utilizada el modelo de filtro RC de una etapa en la regla de la esperanza matemática condicional, como función de covarianza del proceso será obtenida la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción de la realización (ver figura 2).

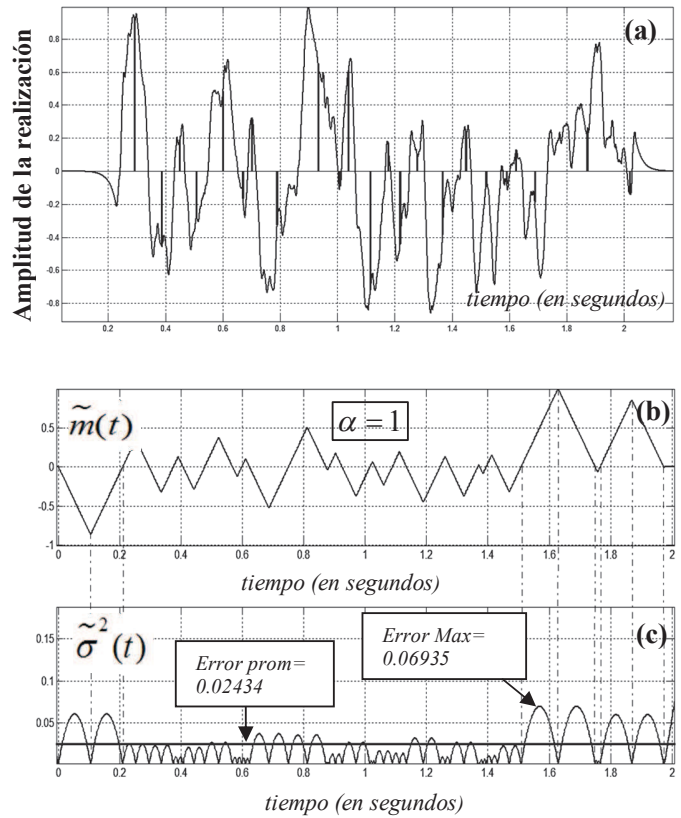
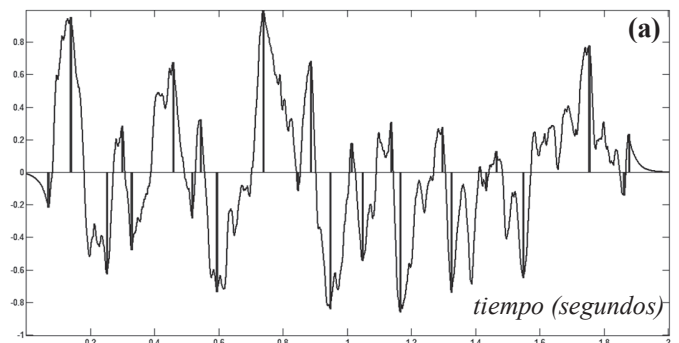


Figura 2. a) Realización del proceso a la salida de Filtro RC de Una Etapa con muestras en la mitad entre cruce por cero. b) Función de Reconstrucción de realización a partir de muestras utilizando REMC. c) Función de Error de Reconstrucción determinado por la REMC.



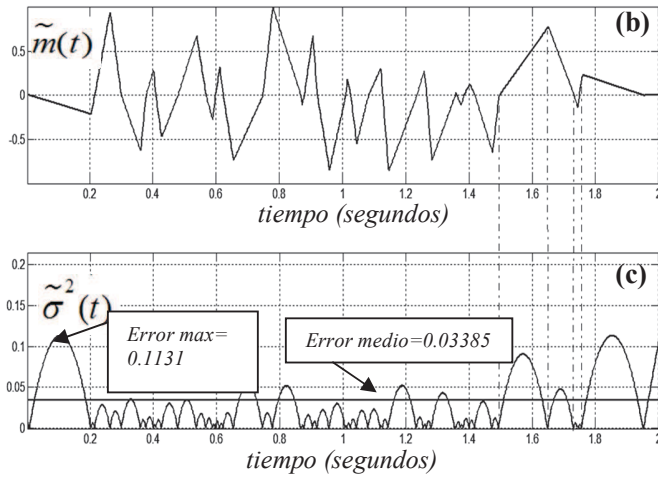


Figura 3. a) Realización del proceso a la salida de Filtro RC de Una Etapa con muestras en el máximo entre cruce por cero. b) Función de Reconstrucción de realización a partir de muestras utilizando REMC. c) Función de Error de Reconstrucción determinado por la REMC.

Es posible observar en las figuras 2 y 3, que para un valor de la muestra le es correspondido un nivel cero de error de reconstrucción. Sin embargo entre una muestra y su subsecuente existe un máximo de error. En cuanto mayor sea esta distancia de intervalo de tiempo, mayor será el error entre muestras.

IV. DESARROLLO DE ALGORITMO NO ÓPTIMO

El desarrollo de este algoritmo surge como una necesidad en la reconstrucción de realizaciones que han sufrido un proceso de no linealidad, en este caso una saturación mediante un limitador ideal o clipper. [7]

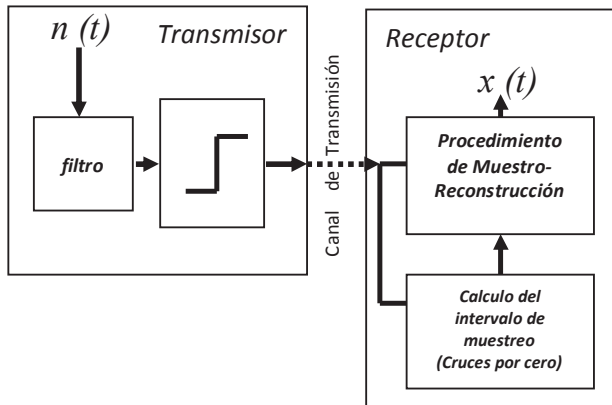


Figura 4. Diagrama de Desarrollo de algoritmo No-Óptimo

En este caso al no conocer la amplitud de las muestras entre cruce por cero debido al proceso de saturación, una opción consiste en introducir dichas muestras en la mitad entre cada cruce por cero con una amplitud en función de la distancia entre cruce por cero. Esto es, entre mayor

sea el intervalo entre cruce por cero donde se ubica la muestra, mayor será la amplitud de la muestra. Al poder estimar la muestra en función de la distancia entre cruces por cero, el procedimiento de muestreo y reconstrucción es llevado a cabo en el receptor. El algoritmo de la figura 4 es dividido en dos sistemas separados por un canal de transmisión, de tal forma que la parte del transmisor incluye la realización a la salida de convertidor no lineal y además proporciona acondicionamiento para transmisión, y por otro lado el esquema del receptor detecta los cruces por cero de la realización y realiza el procedimiento de muestreo-reconstrucción. Puesto que es posible observar en la ecuación (7) que la función de error de reconstrucción proporcionado por la varianza condicional no depende de la magnitud de las muestras, si no únicamente de la función de covarianza y del intervalo entre muestras. Por lo que entre mayor sea intervalo entre muestras, mayor será el error de la reconstrucción en la región de interpolación. Una alternativa consiste en estimar el error haciendo uso de la ecuación de error cuadrático medio (ECM), que se basa en el cálculo del promedio de la diferencia al cuadrado entre la realización original (estimador) y la realización reconstruida (estimada). [4]

Considerando nuevamente el modelo de filtro RC de una etapa se tiene:

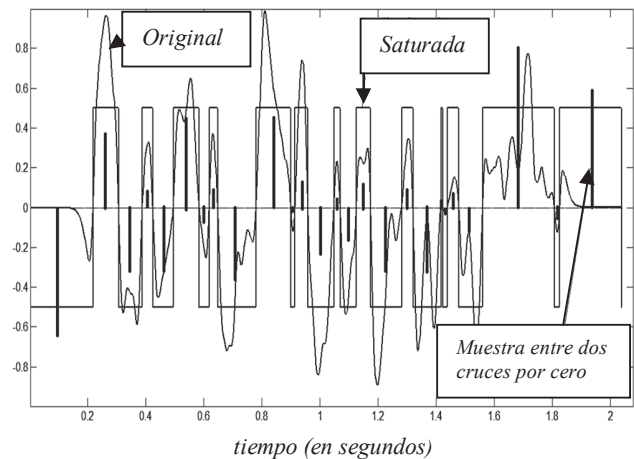


Figura 5. Realización original, Realización a la salida de convertidor no lineal, y muestras agregadas en la mitad de cruce por cero con amplitud en función del intervalo entre cruce por cero de la realización.

Al reconstruir la realización a la salida de convertidor no lineal usando la regla de la esperanza matemática condicional (REMC) se tiene:

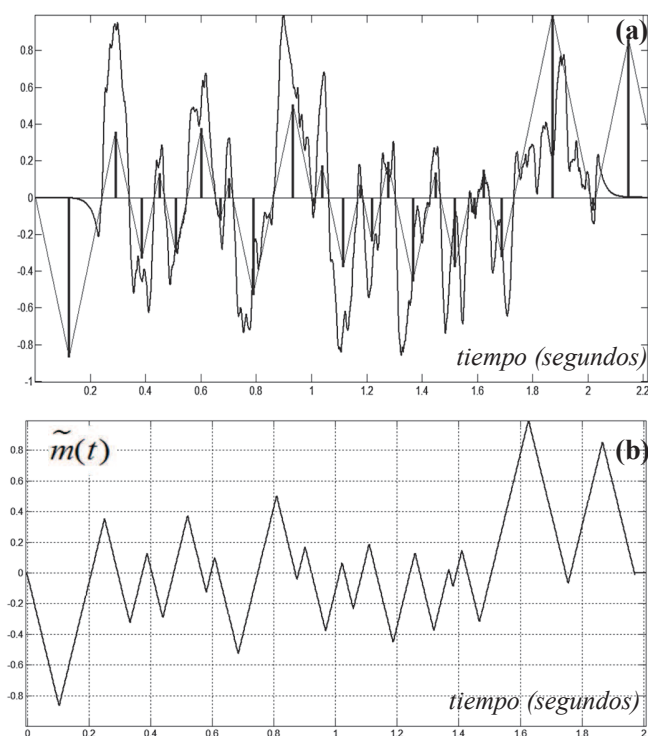


Figura 6. a) Función de reconstrucción de realización a partir de muestras en la mitad de cruce por cero con amplitud en función del intervalo entre CC. b) Función de reconstrucción determinado por la REMC.

En esta parte es omitido el resultado de la función de error de reconstrucción de la REMC, puesto que el error no sería correcto. En vez de eso es calculado el error cuadrático medio (ECM), de tal forma que:

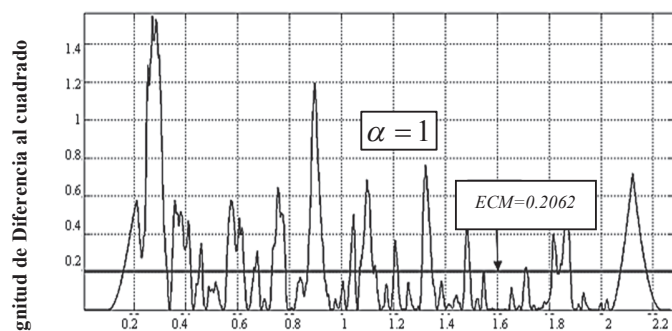


Figura 7. Estimación de Error cuadrático medio entre realización original y realización reconstruida.

			Muestra en mitad	Muestra en máximo
Filtro Usado	Parámetro de Ancho de Banda α		Error medio $\tilde{\sigma}^2(t)$	Error medio $\tilde{\sigma}^2(t)$
Filtro RC de Una Etapa	20		0.3931	0.4552
	1		0.02434	0.03385
	0.1		0.00557	0.003392
Filtro RC de Dos Etapas	20		0.06556	0.1228
	2		0.00395	0.002714
	200		0.7326	0.7412
Filtro RC de Tres Etapas	8/3		0.01127	0.3528
	50		0.2967	0.1705
	200		0.7313	0.608
Filtro Acoplado	A	T_0		
	1	1	0.06806	0.081219
Filtro para señales de Voz	α	α_1		
	0.1	10	0.1967	0.2447
	15	10	0.4101	0.4557
	0.49	0.5	0.02141	0.02826
Filtro para Señales de Telemetría	α	α_1		
	0.1	10	0.8428	0.9968
	10	15	0.17	0.1043
	0.49	0.5	0.9590	0.9983

Tabla 3. Resultados de Algoritmo de Reconstrucción para diferentes funciones de covarianza.

El algoritmo no-óptimo, proporciona la ventaja de solo transmitir las muestras de cruce por cero, de tal forma que las muestras colocadas en dentro del cruce por cero, son estimadas en función del intervalo de muestreo.

Filtro Usado	Parámetro de Ancho de Banda α		Error Cuadrático Medio ECM
Filtro RC de Una Etapa	1		0.2062
	0.1		0.2064
	20		0.1744
Filtro RC de Dos Etapas	20		0.2478
	2		0.2774
	200		0.1606
Filtro RC de Tres Etapas	8/3		0.1861
	50		0.1505
	200		0.1701
Filtro Acoplado	A	T_0	
	1	1	0.3248
Filtro para señales de Voz	α	α_1	
	0.1	10	0.09371
	15	10	0.09248
	0.49	0.5	0.09738
Filtro para Señales de Telemetría	0.1	10	0.1583
	15	10	0.312968
	0.49	0.5	0.1079

Tabla 4. Resultados de Algoritmo de Reconstrucción para diferentes funciones de covarianza.

CONCLUSIONES

En el procedimiento de muestreo y reconstrucción de las realizaciones de los procesos Gaussianos, fue posible reconstruir las realizaciones en la multitud de las muestras para los casos de los algoritmos óptimo y no óptimo. Para el caso del algoritmo óptimo es completamente utilizable la regla de la esperanza matemática condicional (REMC) tanto para la reconstrucción de la realización como para el cálculo de la función de error de reconstrucción. Sin embargo para el caso del algoritmo no óptimo, solo fue válida la función de reconstrucción de la regla de esperanza matemática condicional, puesto que la función de error de reconstrucción proporcionada por la varianza condicional no es precisa al estimar el error, ya que no está en función de las magnitudes de las muestras si no del tipo de función de covarianza del proceso utilizada, así como la distancia entre intervalos de las muestras, por lo que fue necesario recurrir a otro método estimador de error, en este caso del error cuadrático medio (ECM).

Una característica importante en el algoritmo óptimo de reconstrucción mostró que la ubicación de las muestras en un máximo entre cruces por cero provoca un error promedio de reconstrucción mayor en comparación con el error promedio calculado con una muestra en la mitad entre cruces por cero. Esto se debe a que la distancia de ubicación entre la muestra máxima a cualquiera de los cruces por cero adyacentes, es mayor en comparación con la distancia entre el cruce más distante y la muestra en la mitad, lo que implica un aumento del error de reconstrucción en la función de varianza efectivamente. El error de reconstrucción también puede ser reducido utilizando la función de covarianza adecuada para cada caso, pues una función de covarianza de un proceso diferenciable es mucho más suave en respuesta y por tanto proporcionará menor error de reconstrucción.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] V.A. Kazakov, "Regeneration of samples of random processes following nonlinear inertialess conversions", Telecommunication and Radioengineering. Vol. 43. pp 94-96. #10, 1998.
- [2] V. Kazakov, "Sampling-reconstruction procedure with a limited number of samples of stochastic processes and fields on basis of the conditional mean rule", Electromagnetic Waves and Electronic Systems. Vol. 10, pp. 98-116, #1-2, 2005.
- [3] V. Kazakov, D. Rodriguez, "Sampling-Reconstruction Procedure of Gaussian Processes with jitter characterized by beta distribution", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 56, #5, pp 1814-1824, ISSN 0018-9456, October 2007.
- [4] Yu. A. Goritskiy, V. A. Kazakov, "Sampling and Reconstruction of Markov Processes with limited set of states" Journal of Computer and Systems Sciences International. No. 1, pp 16-21, 2010.
- [5] Middleton David, "Statistical Communication Theory", New York McGraw-Hill 1996, pp 68-69.

- [6] R.L. Strattonovich, "Topics in the Theory of Random Noise", Vol. 1, Gordon and Breach. New York, 1963, pp 46.
- [7] F. Marvasti, Editor. "Nonuniform Sampling: Theory and Practice", Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 924, 2001.
- [8] Hwei P. Hsu, Ph.D. "Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes", Mean Square Estimation, pp 249-253, Schaum's Outline of series, Edit McGraw-Hill, New York, 1997.
- [9] H. Stark & John W. Woods, "Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing", 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall 2002. [2] M.S. Yiarlykov "Aplicación de la Teoría Markoviana de la Filtración no lineal en Radioingeniería" Moscú, "Sovetskoe Radio", 1980.
- [10] V. Kazakov, "Introducción a la teoría de los Procesos Markovianos y algunos problemas de radiotecnia." Moscú "Sovetskoe Radio" 1973.
- [11] B.F. Logan, Jr.: "Information in the zero crossing of Band-Pass Signals", Bell System Technical J., 56(4), PP.487-510, (1977).
- [12] F. Marvasti, Editor. "Nonuniform Sampling: Theory and Practice", Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 924, 2001.
- [13] S. P. Lloyd "A Sampling Theorem for Stationary (Wide Sense) Stochastic Processes", Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 92, pp 1-12, 1959.
- [14] H. Stark & John W. Woods, "Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing" ed. New Jersey: Prentice Hall 2002.

CURRÍCULUM



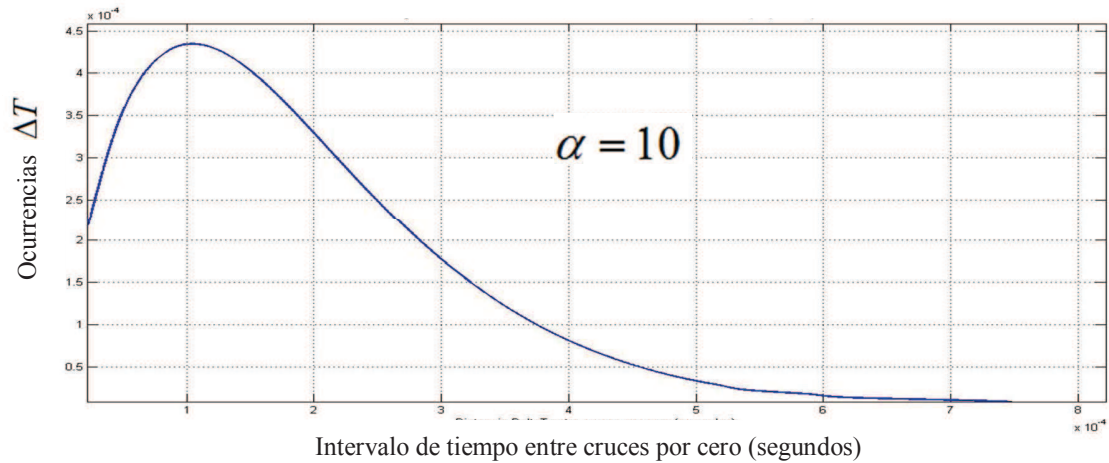
NOMBRE: Pedro Pancóatl Bortolotti
FECHA DE NACIMIENTO:
8 de septiembre de 1984
EDAD: 27 años
E – MAIL: pedro.pancoatl@hotmail.com
UNIVERSIDAD: Instituto Tecnológico de Puebla
CARRERA: Ingeniería en Electrónica
PERIODO: 2002 – 2006
TÍTULO: Título y Cédula profesional

POSTGRADO: Instituto Politécnico Nacional
AREA: Maestría en Ingeniería en Telecomunicaciones
ESPECIALIDAD: Procesamiento de Señales
PERIODO: 2009-2011
CONGRESOS:
PARTICIPACIONES:
Miembro de la rama estudiantil IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.)
Posición: Miembro del comité periodo 2004 - 2005
Posición: Secretario de la rama periodo 2006 .
PONENCIAS:
*XII Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas del 8-12 Noviembre de 2010 con la ponencia: "Muestreo y Reconstrucción de Procesos Gaussianos No Diferenciables". Instituto Politécnico Nacional.
EXPERIENCIA LABORAL:
*Prácticas profesionales
*EMPRESA: GESTAMP DE PUEBLA
AREA: Técnico Mantenimiento Eléctrico
JEFE INMEDIATO: Ing. Juan Carlos Benítez
PERIODO: 9 Julio 07 – 19 Diciembre 08.

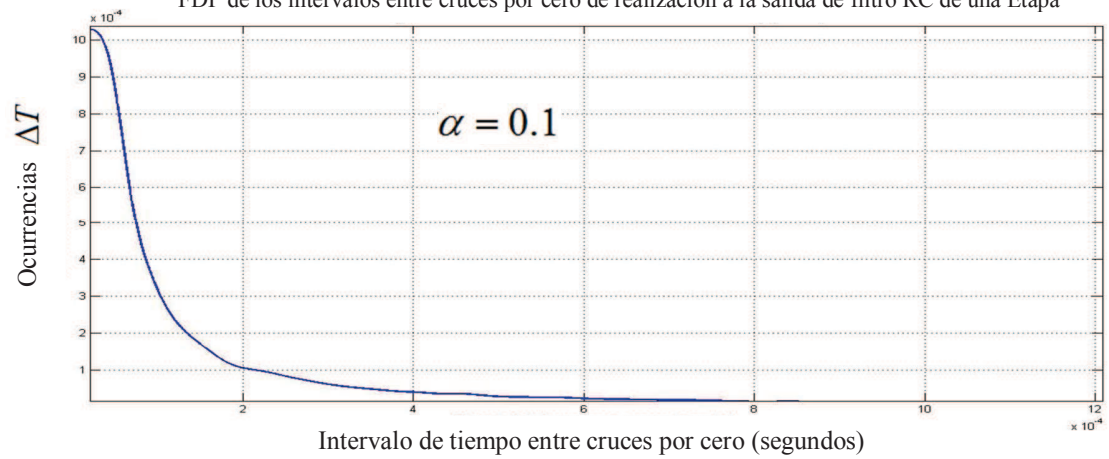
ANEXOS 3 GRAFICAS DE SIMULACIONES

FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LOS INTERVALOS ENTRE CRUCES POR CERO A LA SALIDA DE DIVERSOS FILTROS (REF. CAP. 1, PAGES. 25-29)

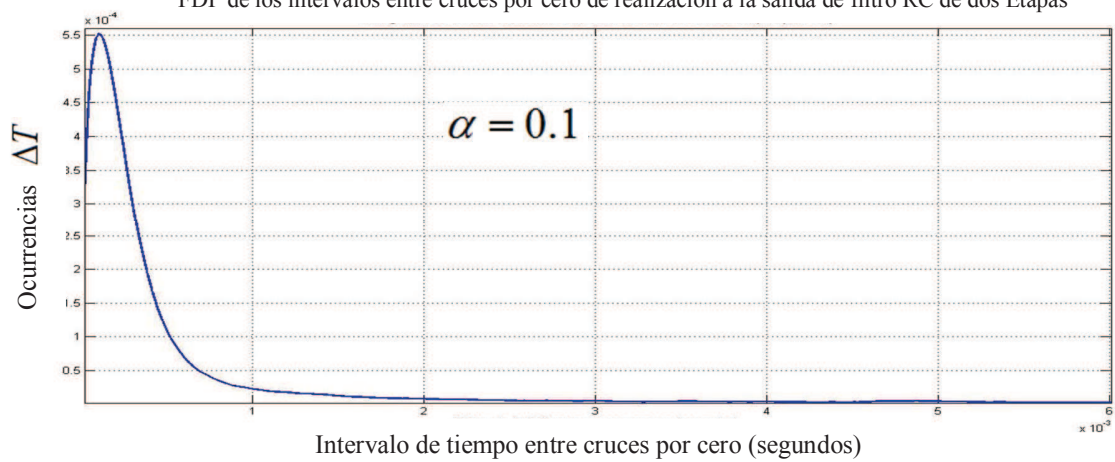
FDP de los intervalos entre cruces por cero de realización a la salida de filtro RC de una Etapa



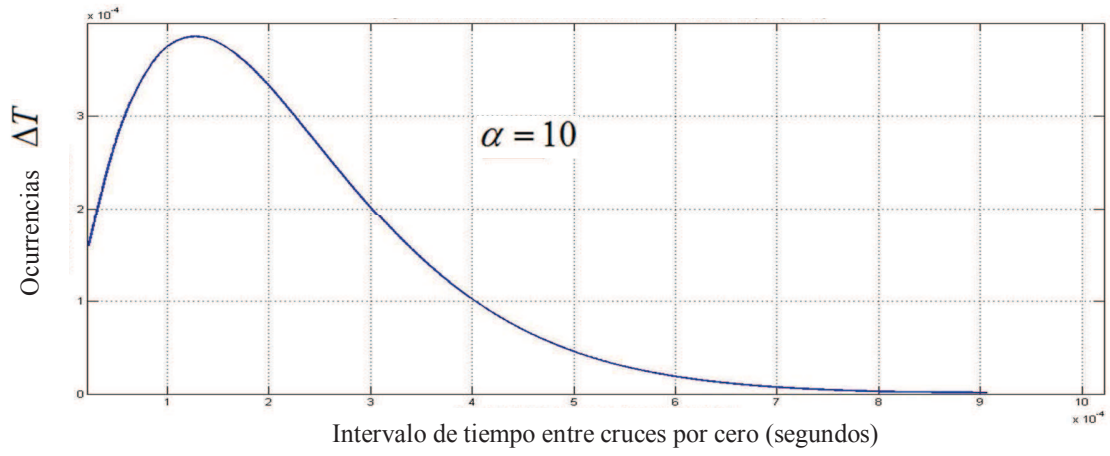
FDP de los intervalos entre cruces por cero de realización a la salida de filtro RC de una Etapa



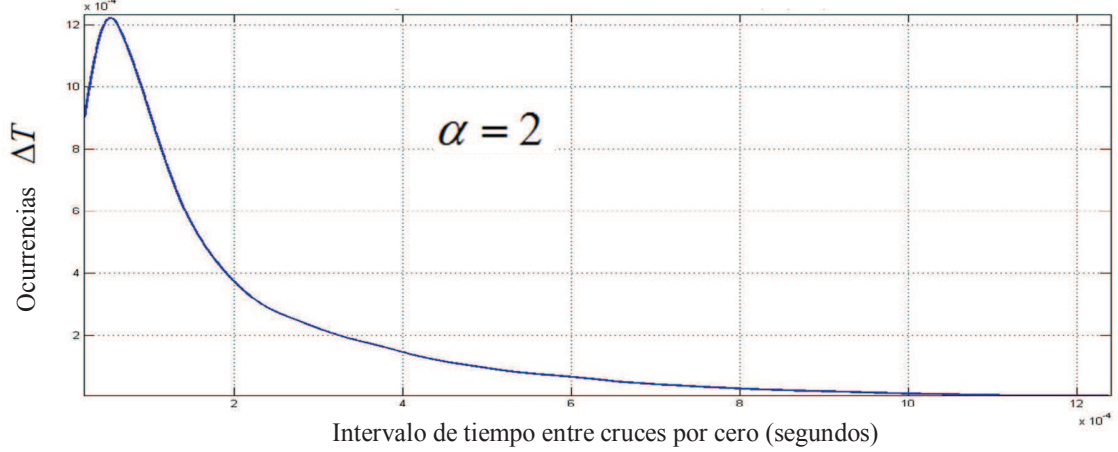
FDP de los intervalos entre cruces por cero de realización a la salida de filtro RC de dos Etapas



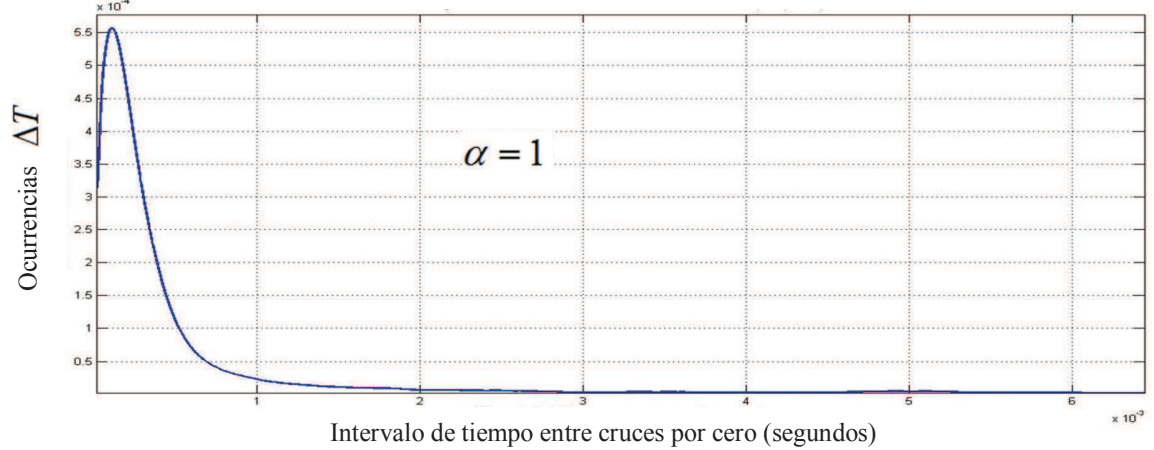
FDP de los intervalos entre cruces por cero de realización a la salida de filtro RC de dos Etapas

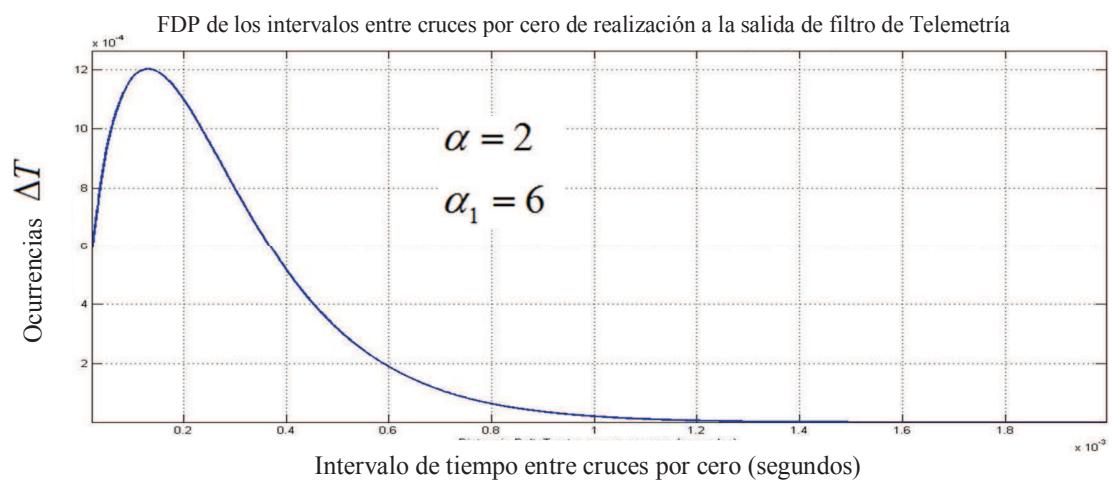
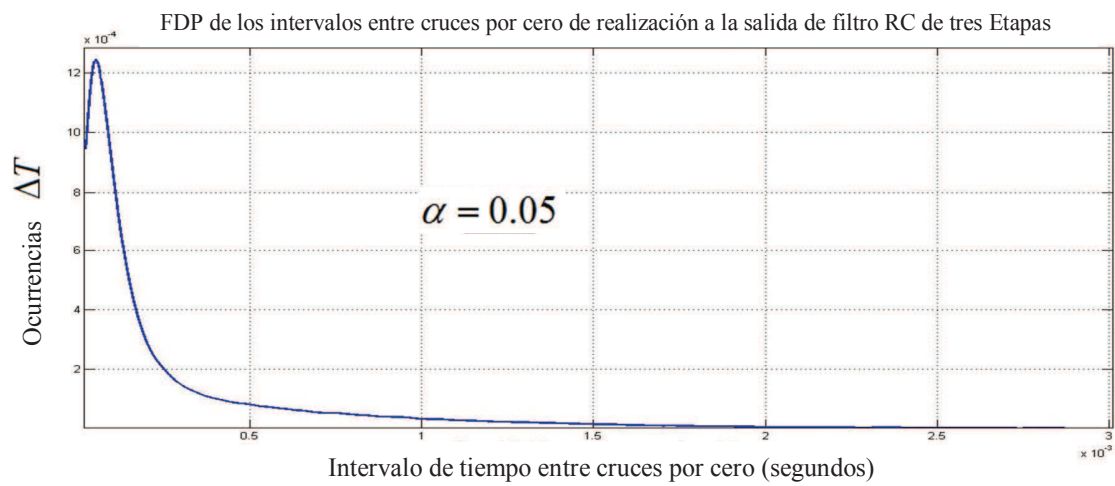
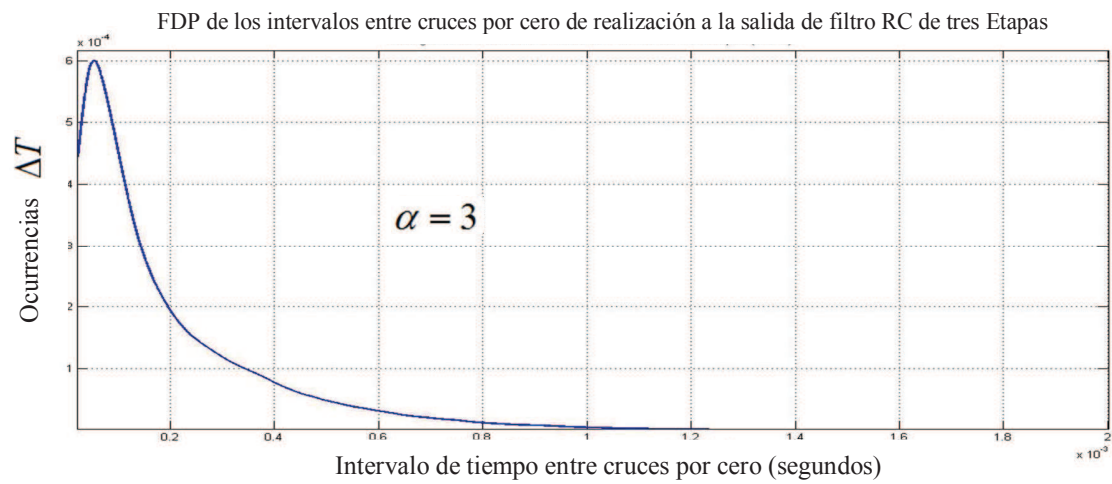


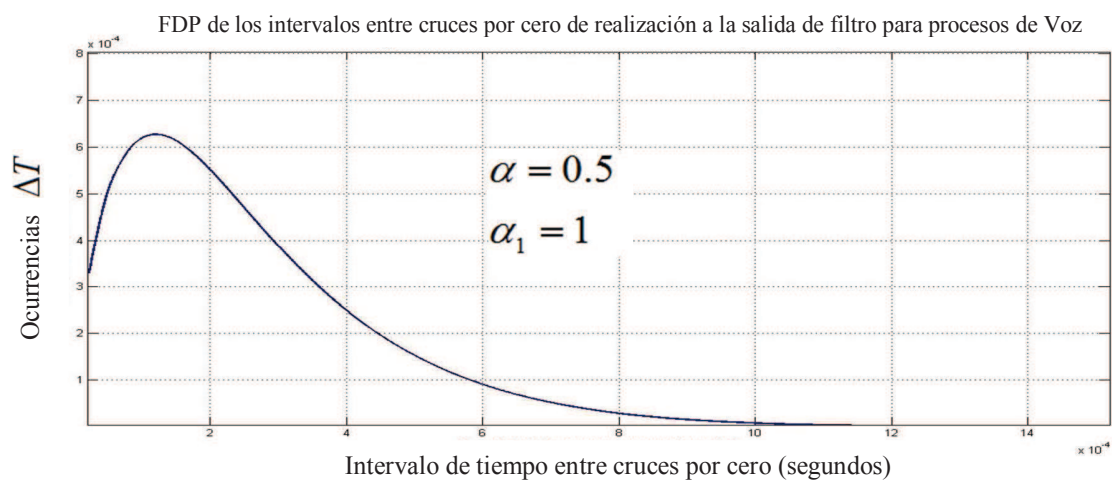
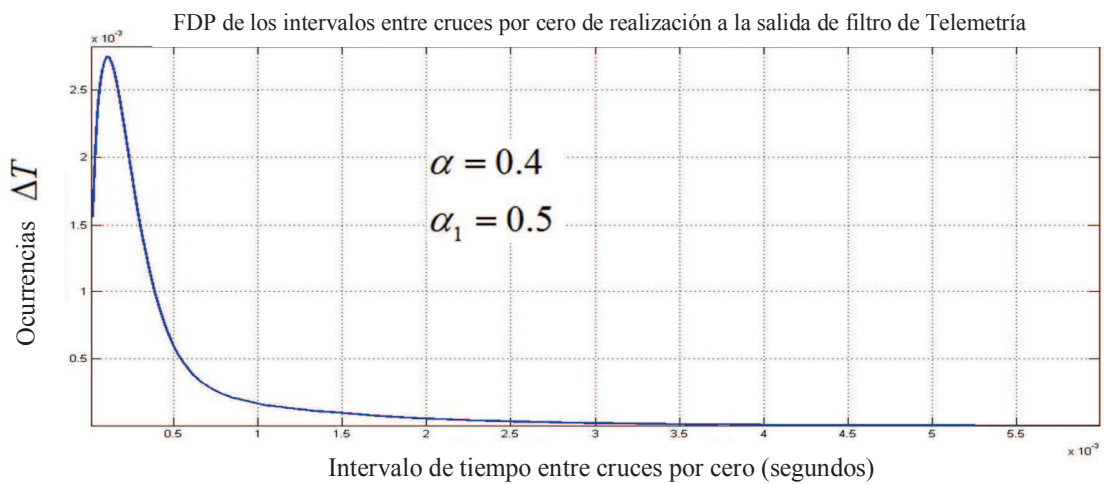
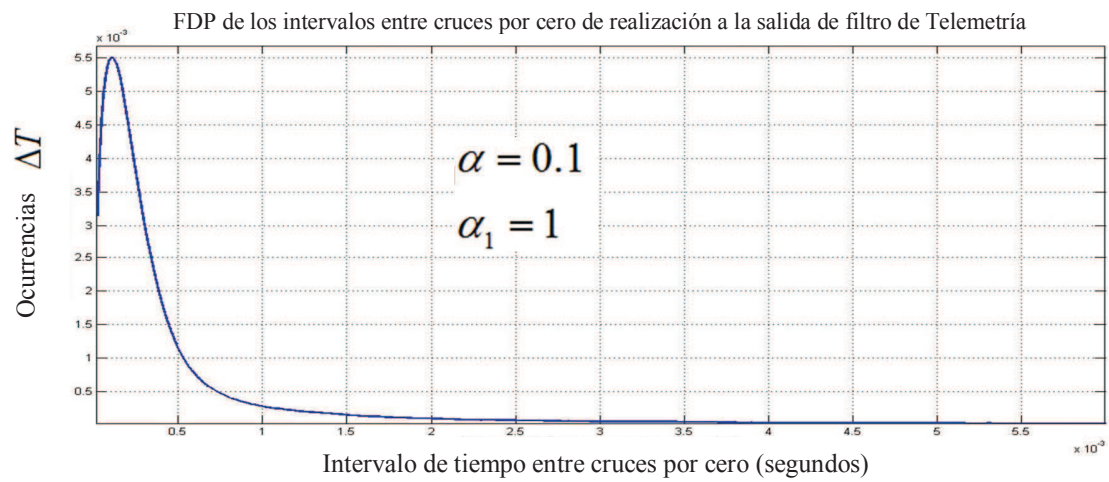
FDP de los intervalos entre cruces por cero de realización a la salida de filtro RC de dos Etapas

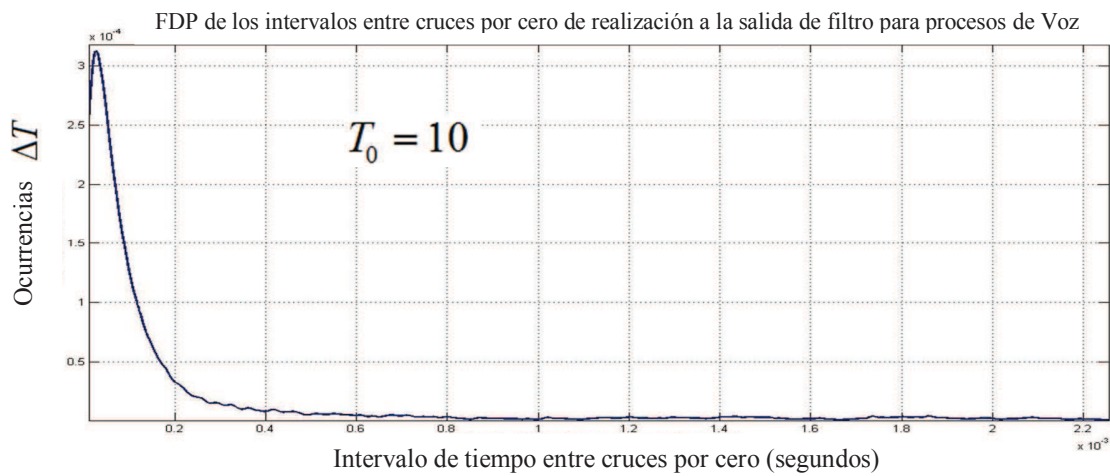
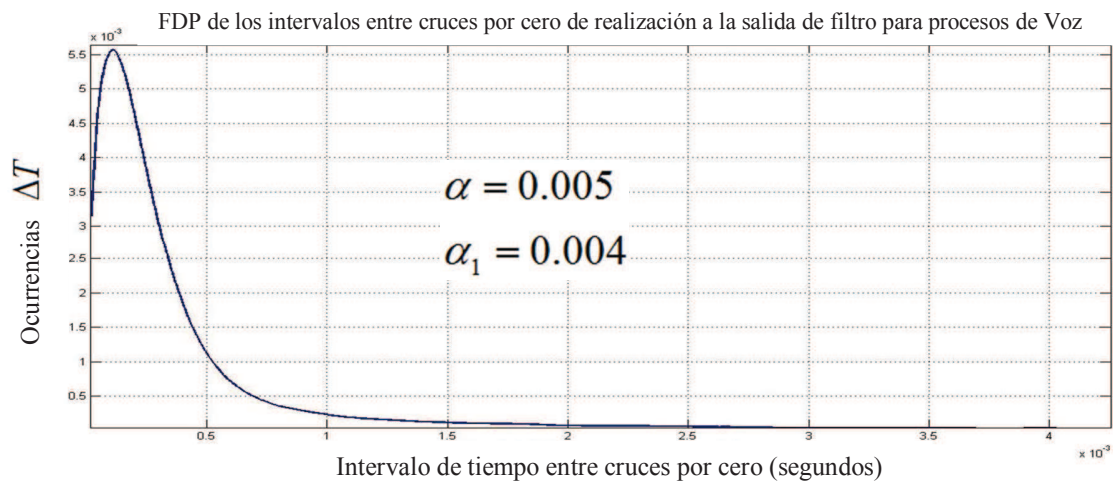
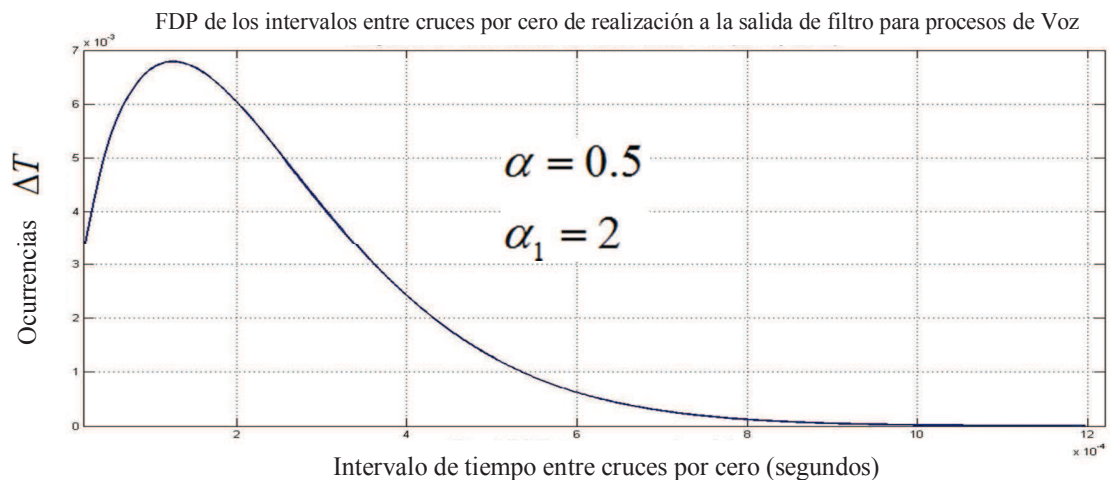


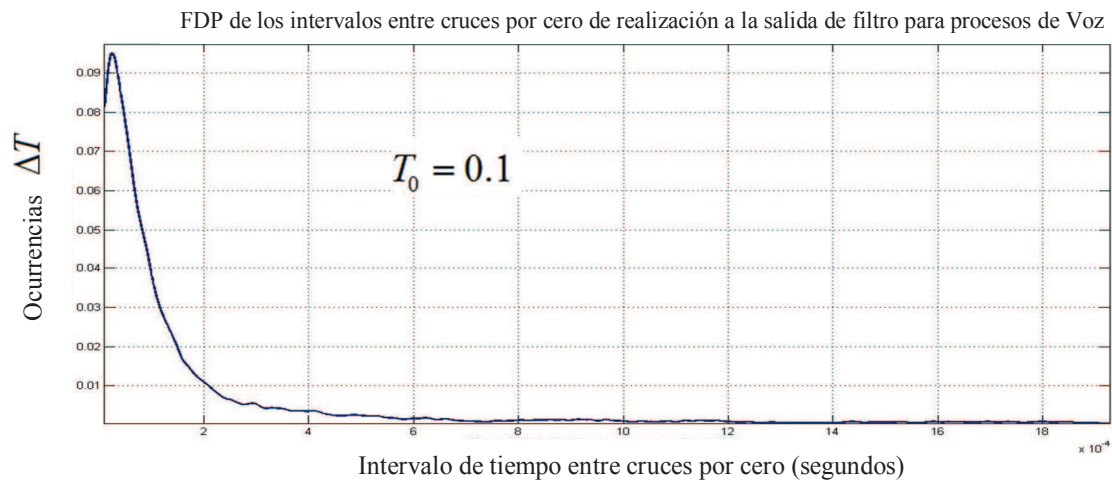
FDP de los intervalos entre cruces por cero de realización a la salida de filtro RC de tres Etapas



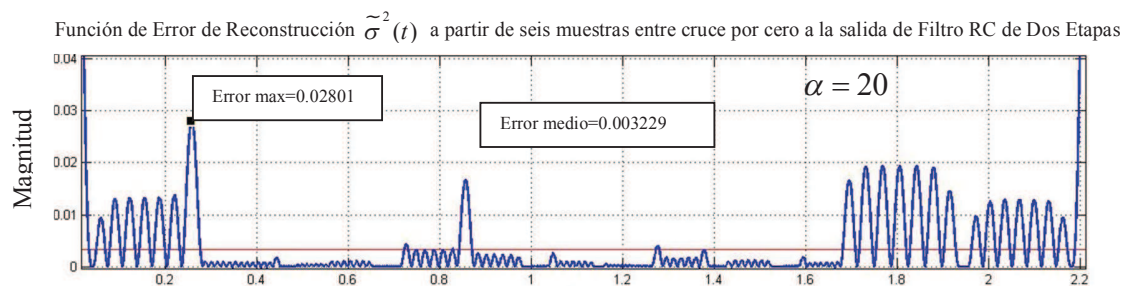
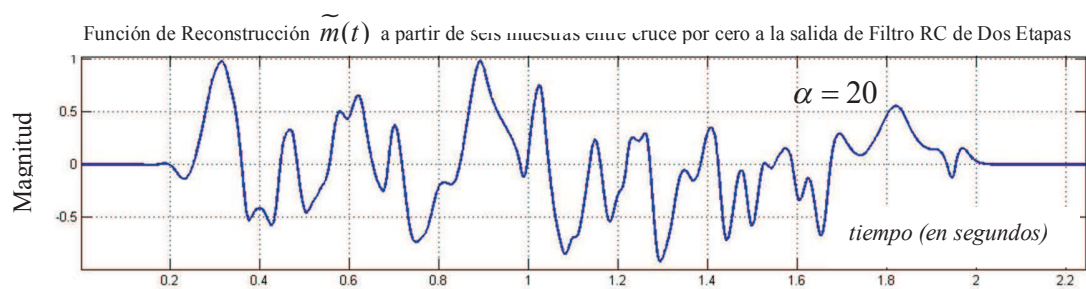
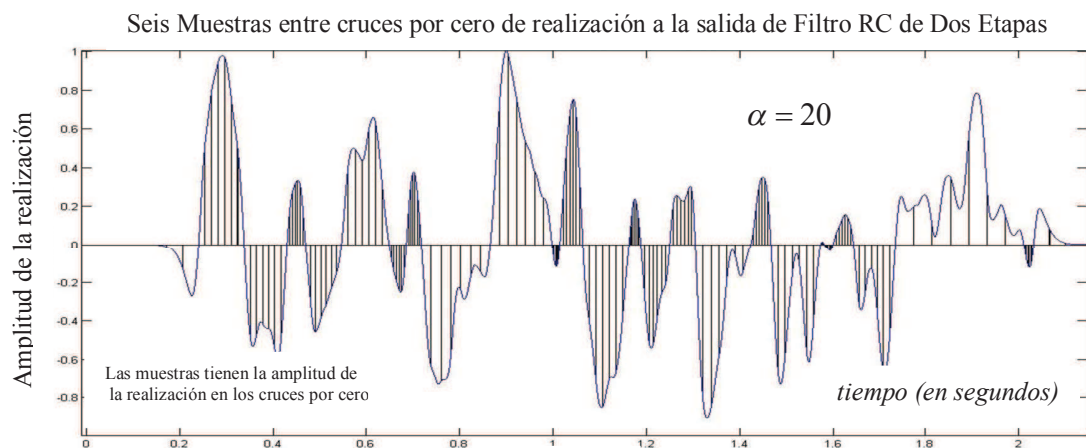




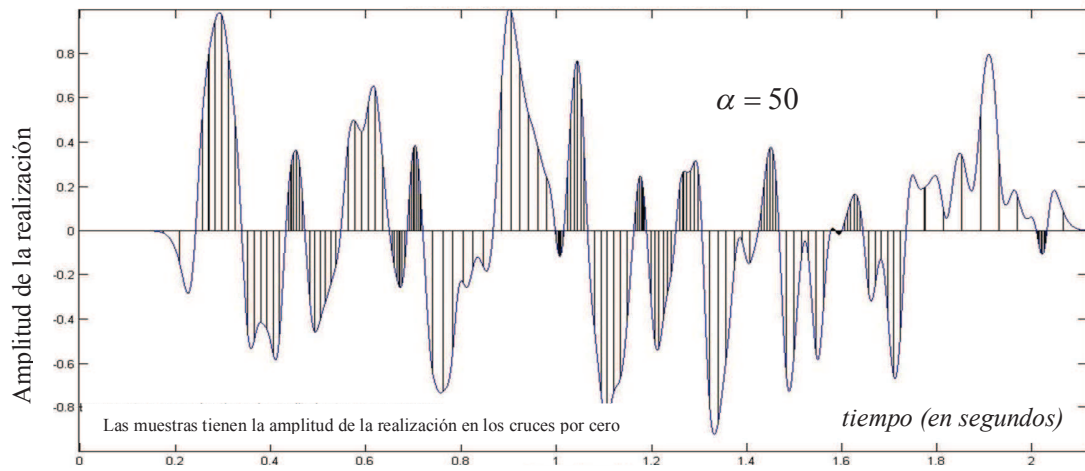




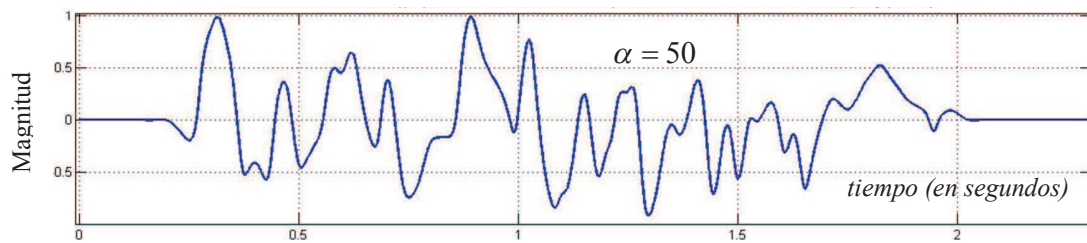
PMR DE LA REALIZACIÓN DEL PROCESO A PARTIR DE 6 MUESTRAS ENTRE DOS CRUCES POR CERO (REF. CAP. 3 Y 4).



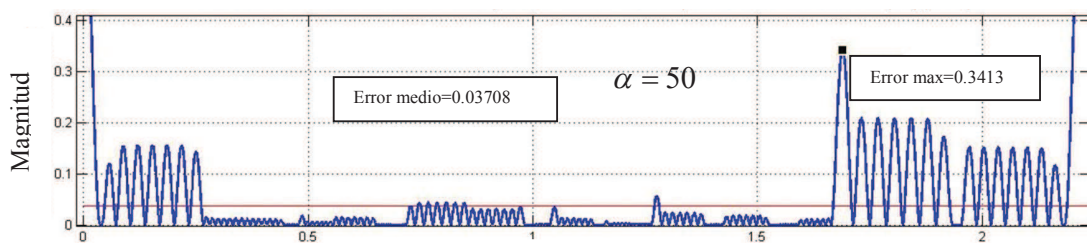
Seis Muestras entre cruces por cero de realización a la salida de Filtro RC de Tres Etapas



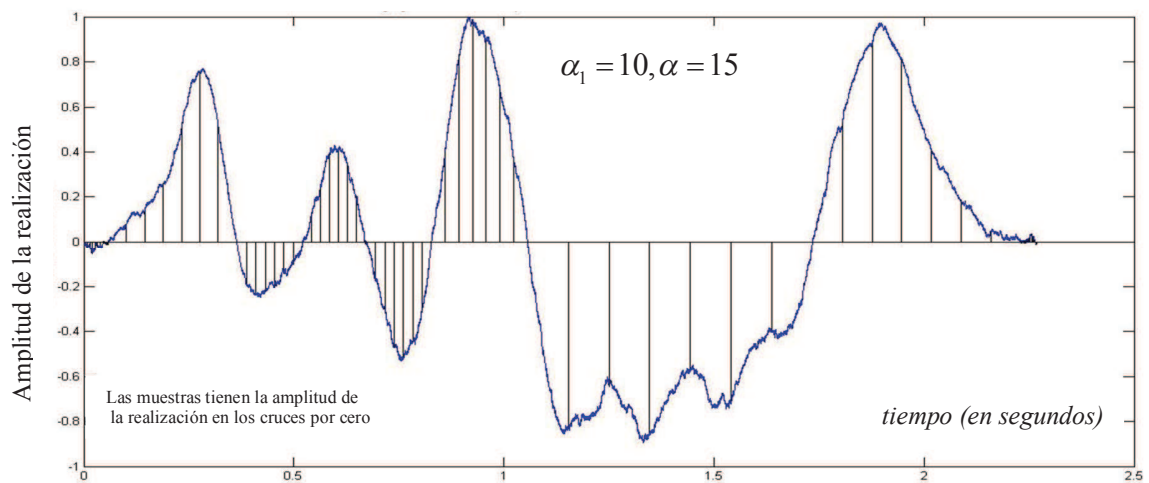
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de seis muestras entre cruce por cero a la salida de Filtro RC de Tres Etapas

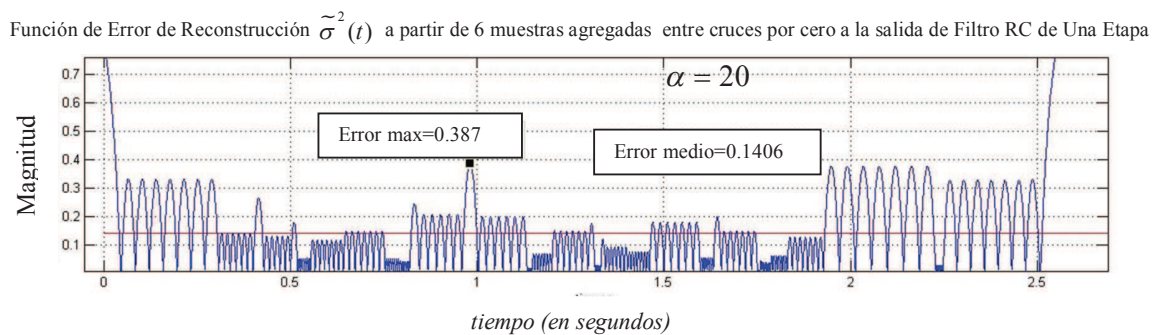
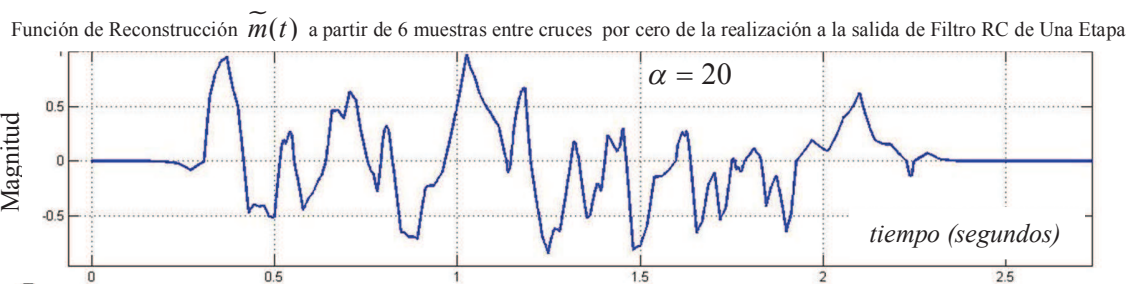
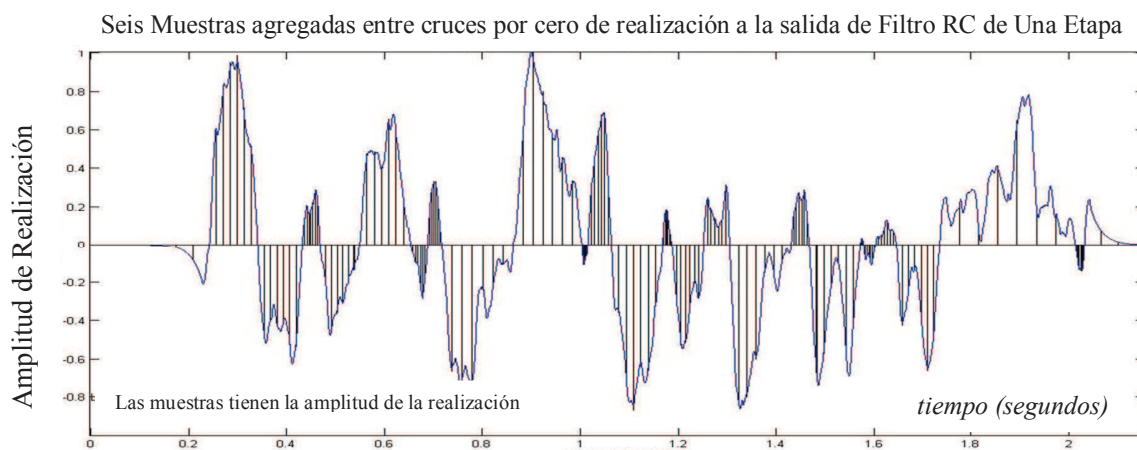
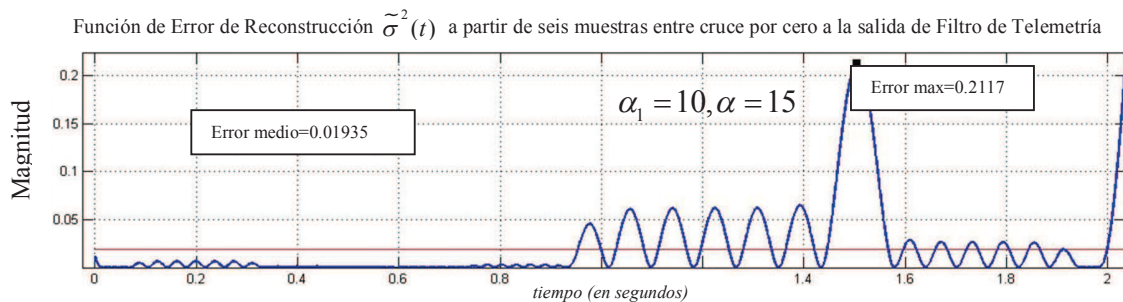
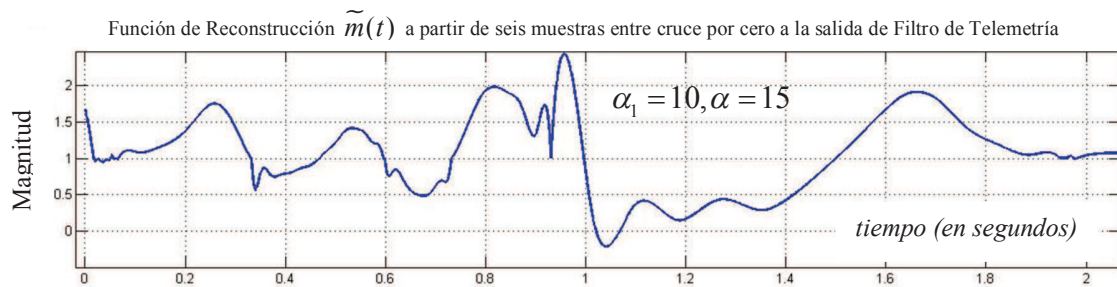


Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de seis muestras entre cruce por cero a la salida de Filtro RC de Tres Etapas

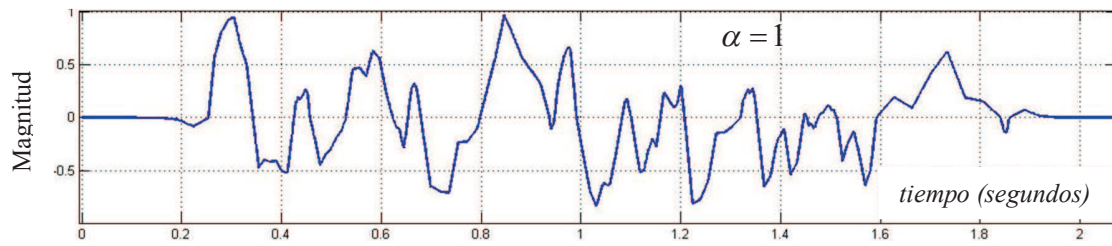


Seis Muestras entre cruces por cero de realización a la salida de Filtro de Telemetría

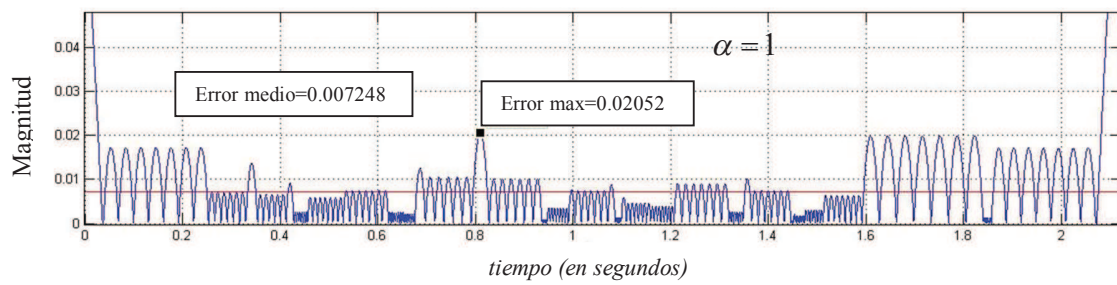




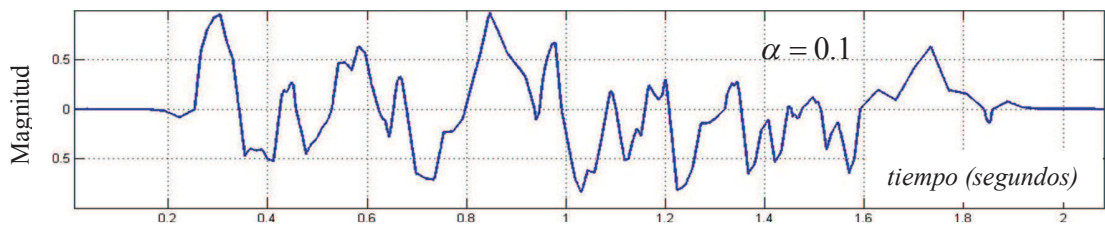
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 6 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa



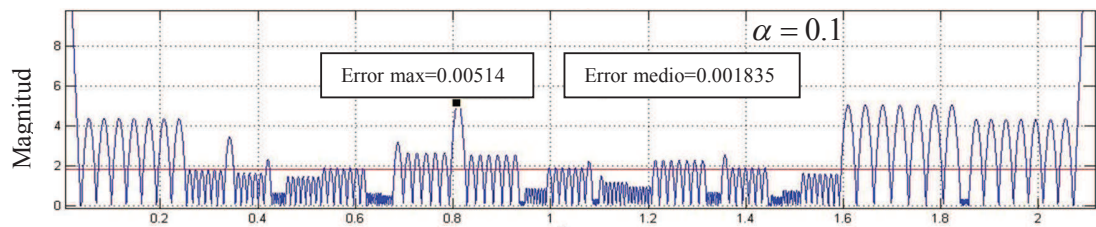
Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 6 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Filtro RC de Una Etapa



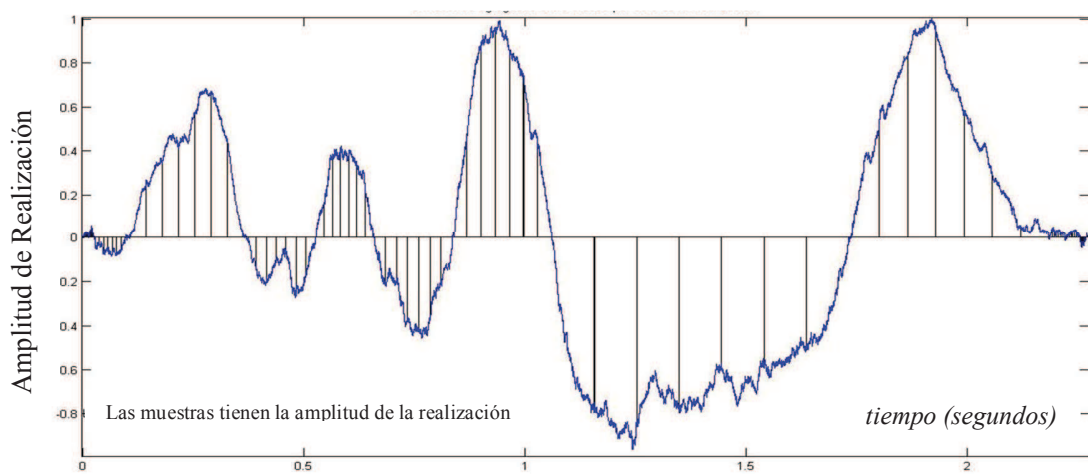
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 6 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa

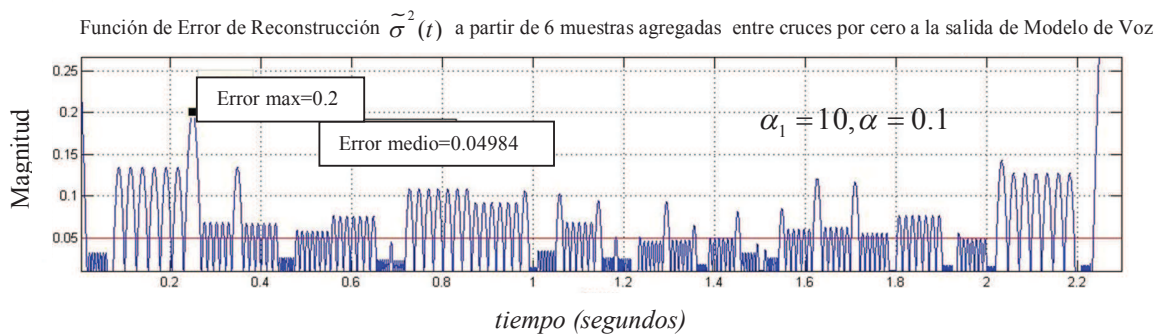
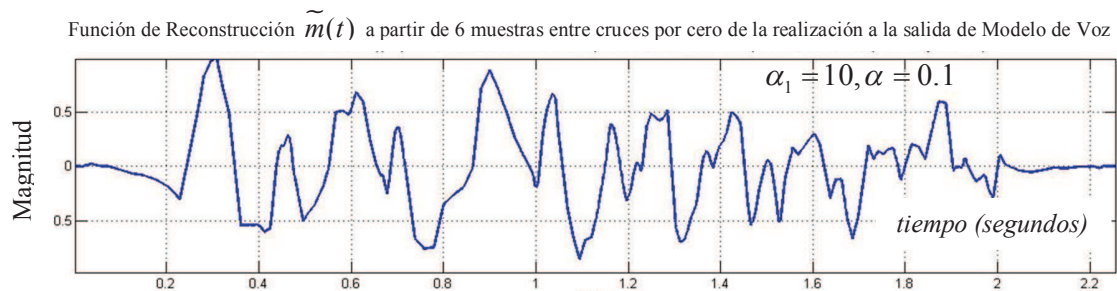
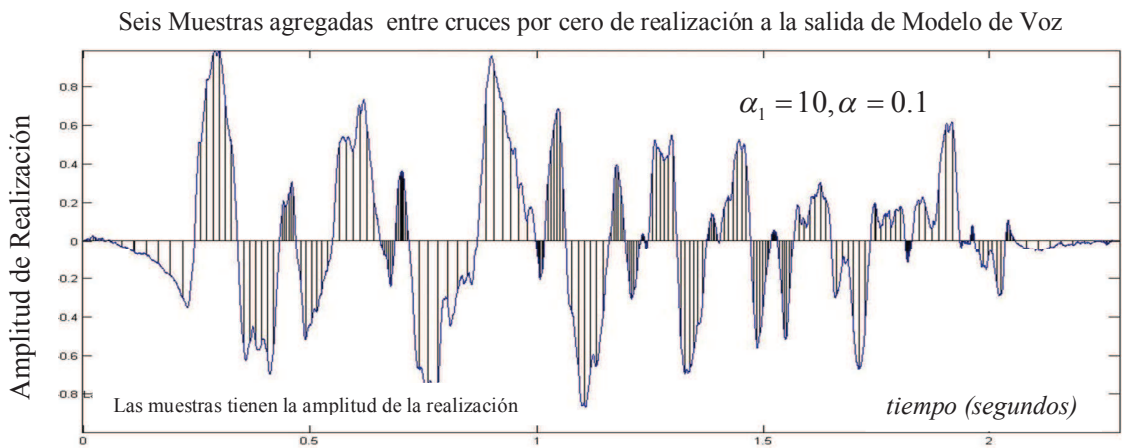
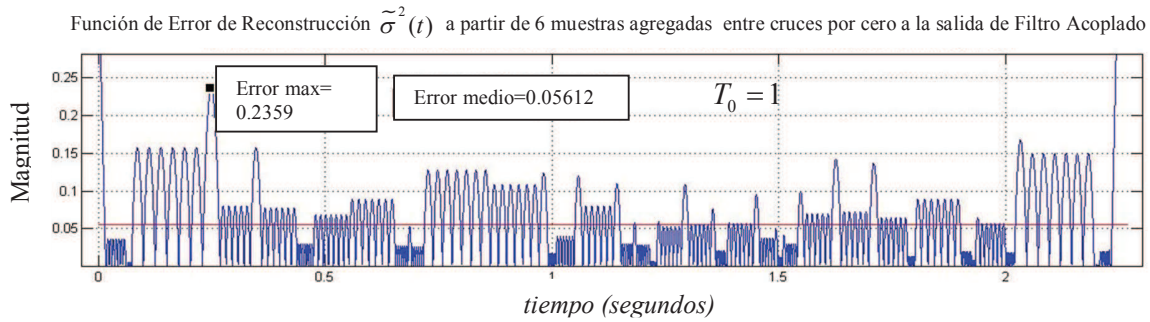
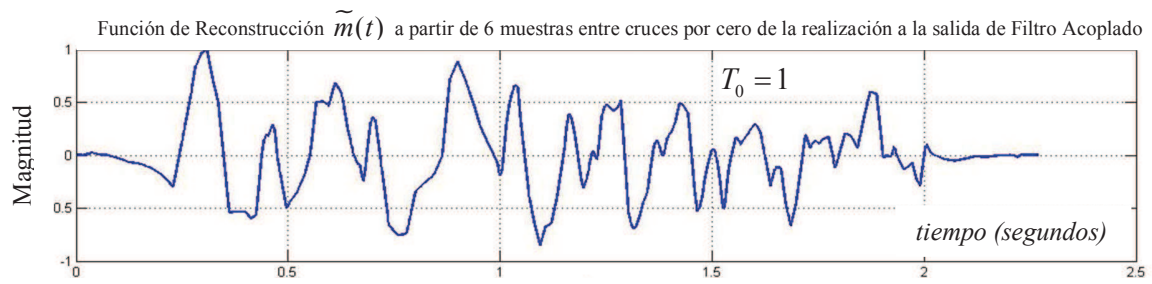


Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 6 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Filtro RC de Una Etapa

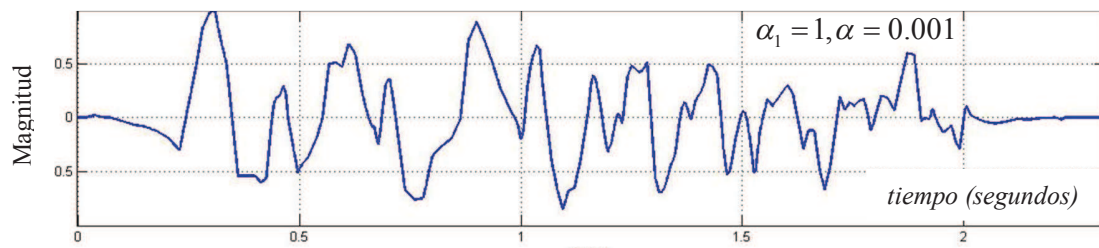


Seis Muestras agregadas entre cruces por cero de realización a la salida de Modelo de Voz

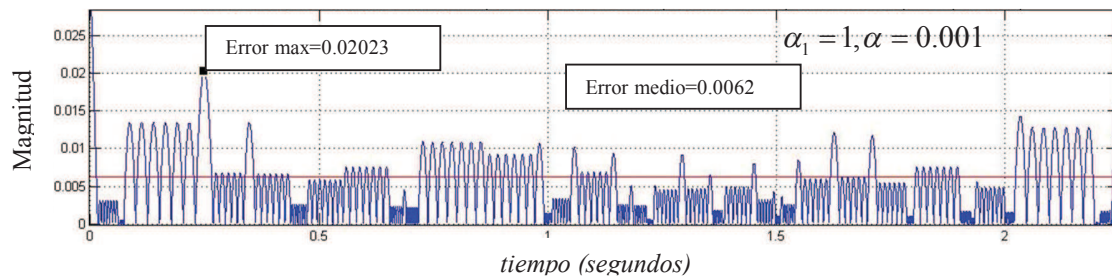




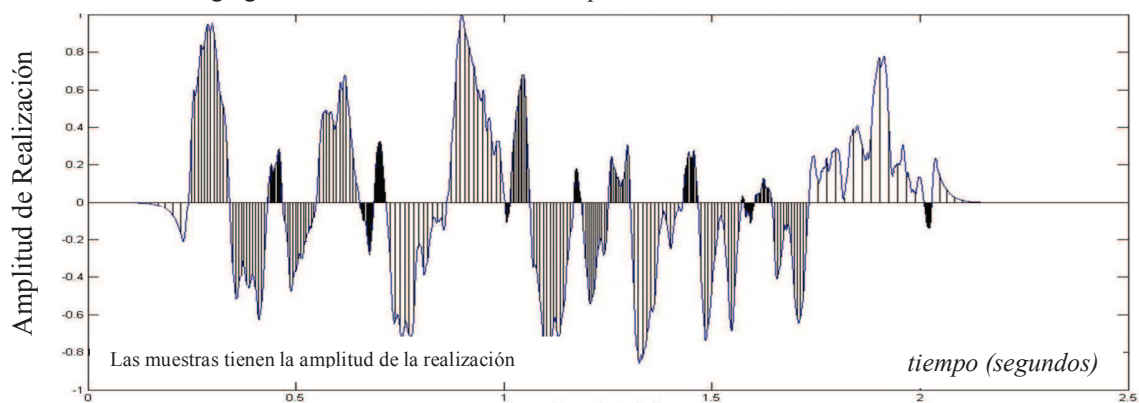
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 6 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Modelo de Voz



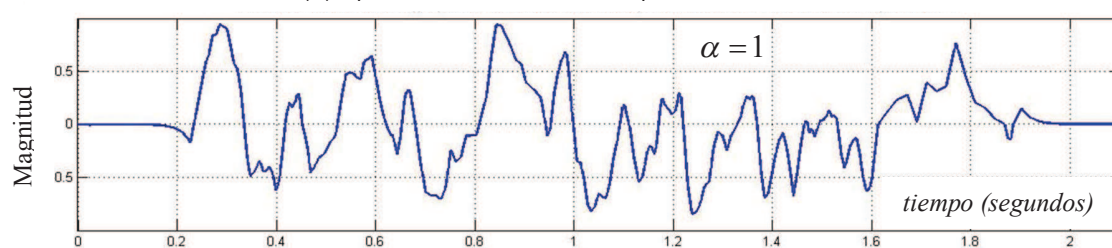
Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 6 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Modelo de Voz



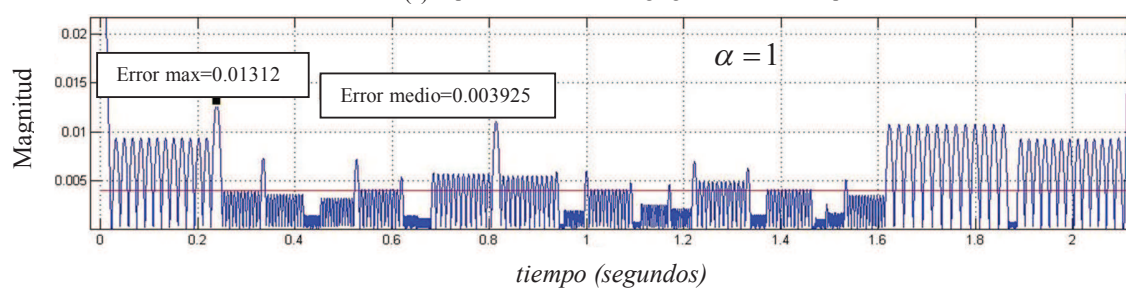
12 Muestras agregadas en el máximo entre cruces por cero de realización a la salida de Modelo de Voz



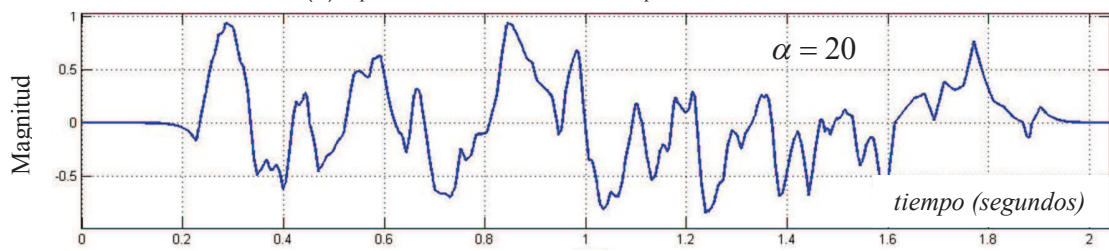
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 12 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa



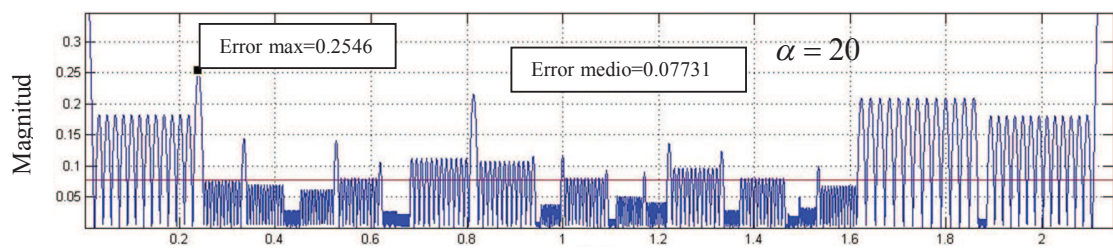
Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 12 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Filtro RC de Una Etapa



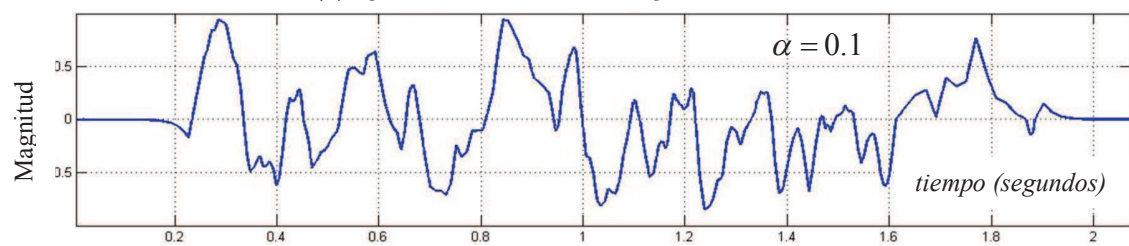
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 12 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa



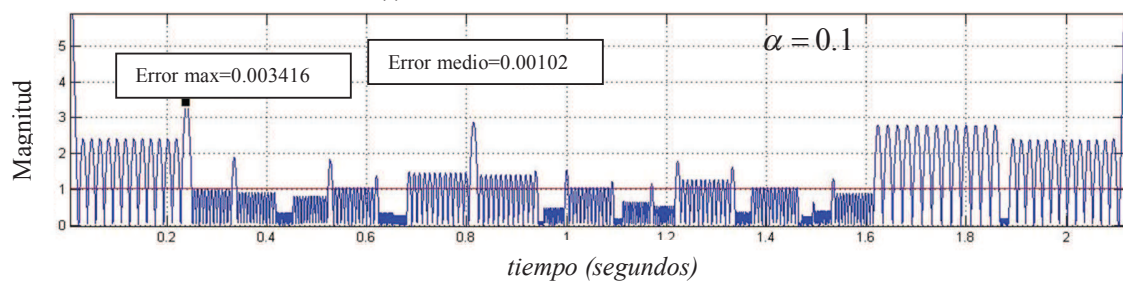
Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 12 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Filtro RC de Una Etapa



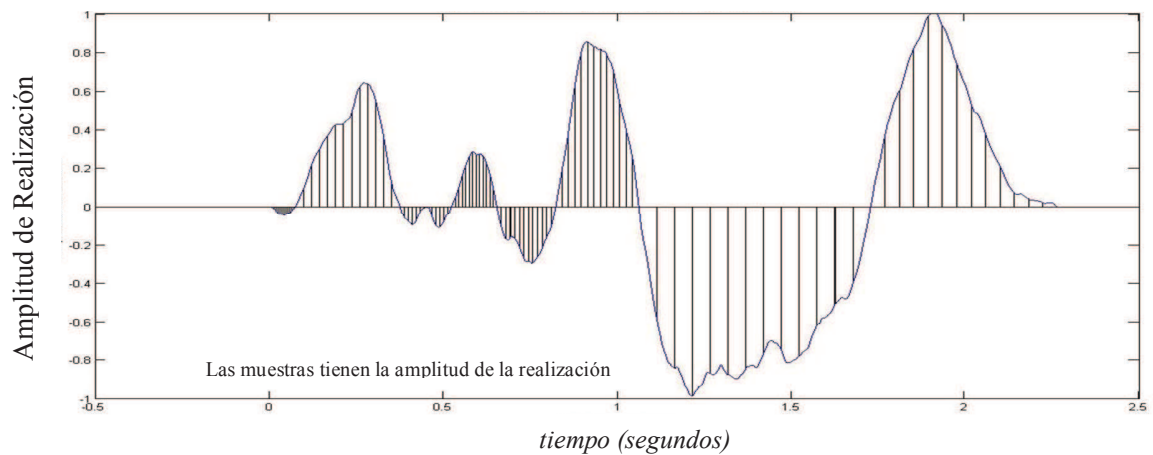
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 12 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Filtro RC de Una Etapa



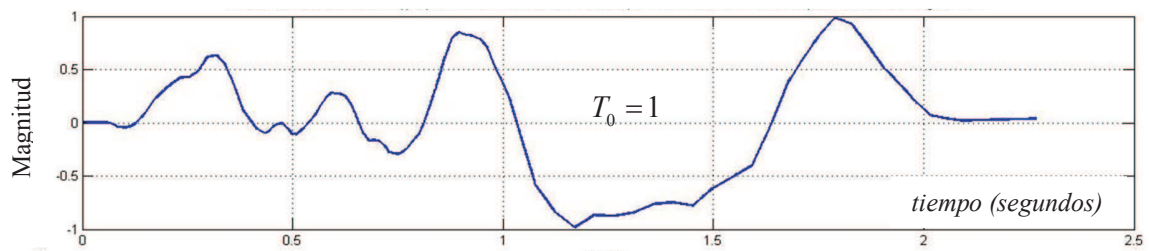
Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 12 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Filtro RC de Una Etapa



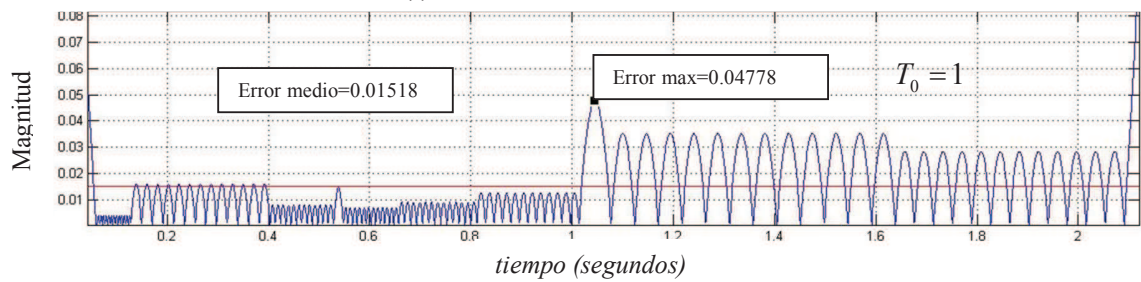
12 Muestras agregadas en el máximo entre cruces por cero de realización a la salida de Filtro Acoplado



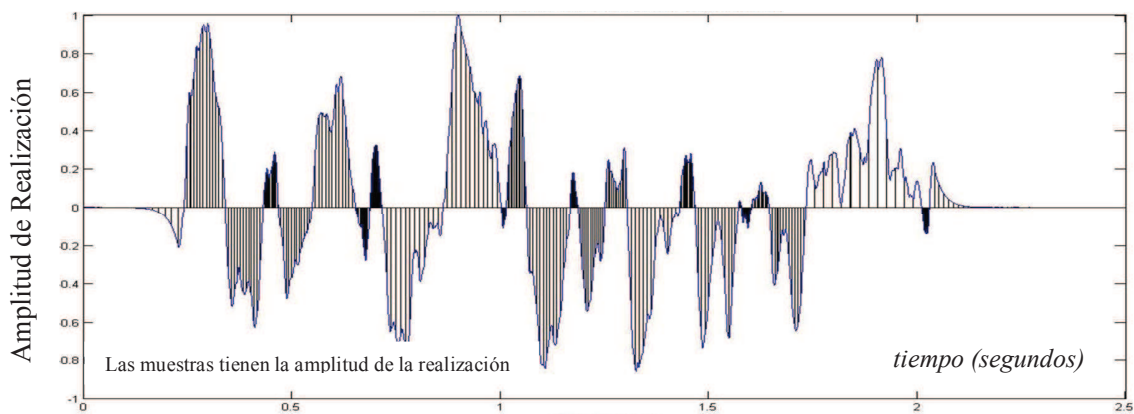
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 12 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Filtro Acoplado



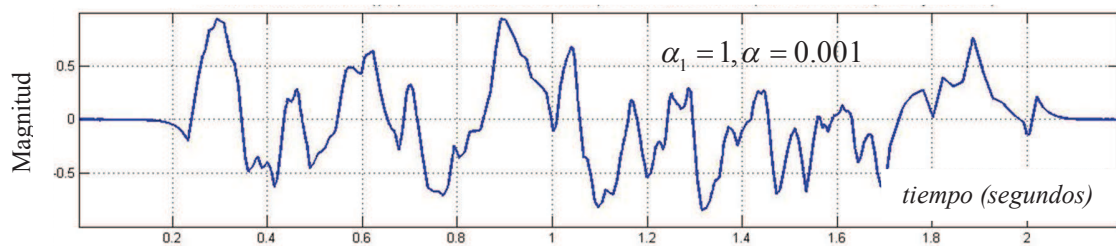
Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 12 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Filtro Acoplado



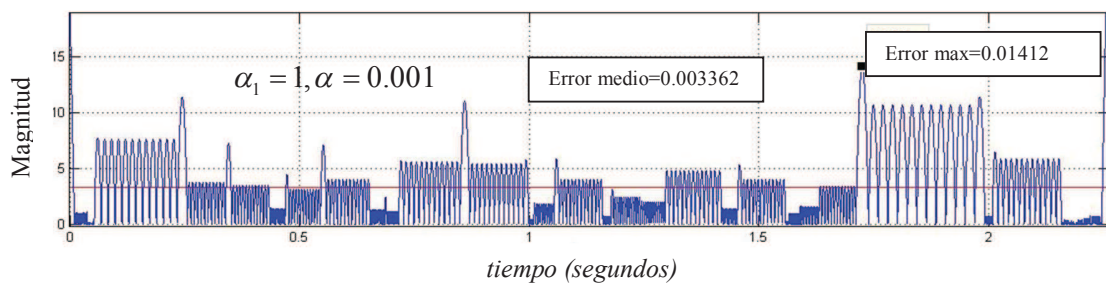
12 Muestras agregadas en el máximo entre cruces por cero de realización a la salida de Modelo Voz



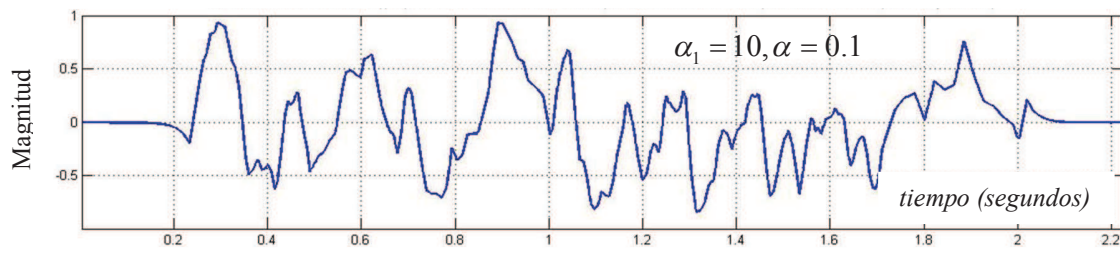
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 12 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Modelo de Voz



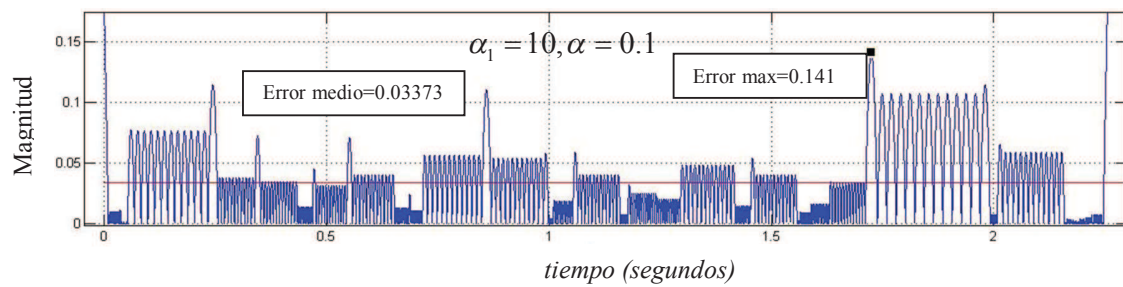
Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 12 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Modelo de Voz



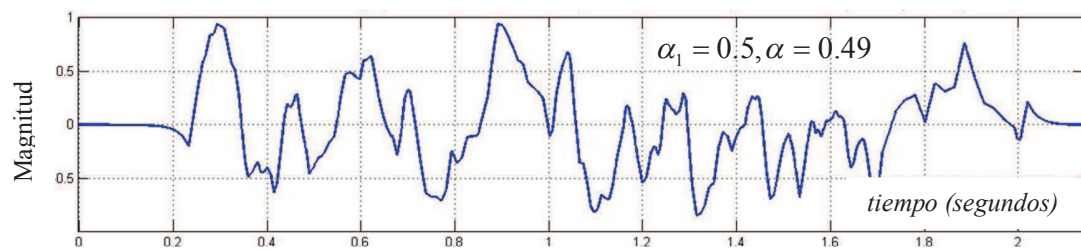
Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 12 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Modelo de Voz



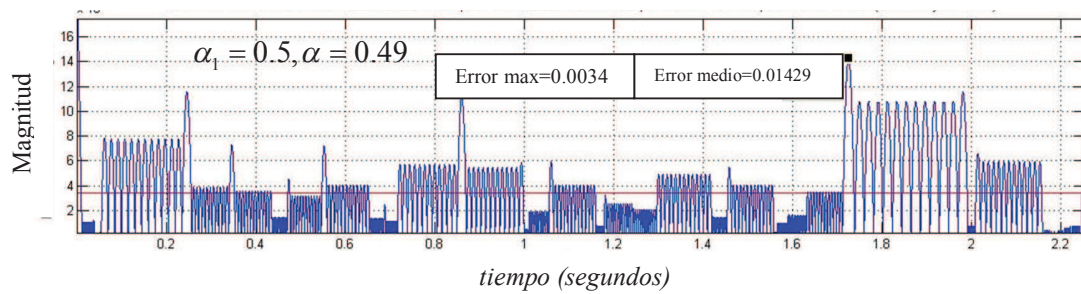
Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 12 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Modelo de Voz



Función de Reconstrucción $\tilde{m}(t)$ a partir de 12 muestras entre cruces por cero de la realización a la salida de Modelo de Voz



Función de Error de Reconstrucción $\tilde{\sigma}^2(t)$ a partir de 12 muestras agregadas entre cruces por cero a la salida de Modelo de Voz



REFERENCIAS

- [1] Steven M. Kay, *"Intuitive Probability and Random Processes Using Matlab"*, New York: Springer 2006.
- [2] M. Zakai. *"Band- Limited functions and the Sampling Theorem"*, information and Control, Vol. 8, pp 143-158, 1965.
- [3] W. A. Gardner. *"A Sampling Theorem for Non-Stationary Random Processes"*, IEEE Trans. Information theory, Vol. IT 18, pp 808-809, Nov 1972.
- [4] Z. A Piranashvili. *"On the Problem of Interpolation of Stochastic Processes"*, Theory of Probability and its applications, Vol. 12, pp 647-657, 1967.
- [5] B. D. Sharma and F. C. Metha *"A Generalized Sampling Theorem for Non-Stationary Processes"*, J. Cybernetics , pp 87-95, 1974.
- [6] A. V. Balakrishnan. *"A note on the Sampling Principle for Continuous Signals"*. IRE Trans. On Inf. Theory, Vol. IT- 3, pp 143-146, 1957.
- [7] M.S. Yiarlykov *"Aplicación de la Teoría Markoviana de la Filtración no lineal en Radioingeniería"* Moscú, "Sovetskoe Radio" 1980.
- [8] Middleton David, *"Statistical Communication Theory"* , New York McGraw-Hill 1996, pp 68-69
- [9] V. Kazakov, *"Introducción a la teoría de los Procesos Markovianos y algunos problemas de radiotecnica."* Moscú "Sovetskoe Radio" 1973.
- [10] M.S. Yiarlykov *"Aplicación de la Teoría Markoviana de la Filtración no lineal en Radioingeniería"* Moscú, "Sovetskoe Radio", 1980.
- [11] V.A. Kazakov, M.A. Belyaev, *"Sampling Reconstruction Procedure for Non-Stationary Gaussian Processes Based on Conditional Expectation Rule"*, Sampling Theory in Signal and Image Processing, May 2002, Vol. 1, No. 2, pp 87-180
- [12] V. Kazakov, *"The sampling-reconstruction procedure with a limited number of samples of stochastic processes and fields on the basis of the Conditional Mean Rule"*, International Journal Electromagnetic Waves and Electronic Systems, Vol.10, N 1-2, 2005, pp. 98-115.
- [13] Manuel Sierra, Belen Galocha, Jose Luis Fernandez, Manuel Sierra., *"Electrónica de Comunicaciones"*, Prentice Hall, Madrid 2003.
- [14] Proceeding of 8th International Conference, *"Mixed Design of Integrated Circuits and Systems"*., Zakopane, Poland. 21-23 June 2001. Organized by: Departament of Microelectronics and Computer Science, Technical University of Lodz, Poland.
- [15] V.I. Tikhonov, N.K. Kulman., *"La filtración no lineal y la recepción no coherente de las señales"*. Moscú, Ed. "Sov. Radio", 1975. pp 544-545.
- [16] <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- [17] R.L. Stratonovich, *"Topics in the Random Noise"*, New York: Gordon and Breach, 1963.
- [18] H. Voelcker and A. Requicha, *"Clipping and signal Determinism: Two Algorithms Requiring Validation"*, IEEE Trans Commun., June 1973, pp 738-744.

- [19] V.A.Kazakov. "Regeneration of samples of random Processes following non-linear inertialess conversions." Telecommunication and Radioengineering. vol.43. pp.94-96. #10, 1988.
- [20] B.F. Logan, Jr.: "Information in the zero crossing of Band-Pass Signals", Bell Sistem Technical J., 56(4), PP.487-510, (1977).
- [21] F. Marvasti, Editor. "Nonuniform Sampling: Theory and Practice", Kluwer Academic / Plenum Publishers, New York, 924, 2001.
- [22] S. P. Lloyd "A Sampling Theorem for Stationary (Wide Sense) Stochastic Processes", Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 92, pp 1-12, 1959.
- [23] H. Stark & John W. Woods, "Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing" ., 3rded. New Jersey: Prentice Hall 2002.
- [24] Sanjit, K. Mitra, "Digital Signal Processing, A computer-based approach, second edition", Normalized Forms of Correlation, pp 92-44.Edit McGraw-Hill, July 2001.
- [25] Hwei P. Hsu, Ph.D. "Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes", Mean Square Estimation, pp 249-253, Schaum's Outline of series, Edit McGraw-Hill, New York, 1997.
- [26] F. Marvasti, "Non uniform Sampling Theory and Practice", Random Topics in non uniform sampling, pp 210-217. Kluwer Academic/Plenum Publisher. New York, Boston 2001.
- [27] M.Streitenberger, H.Brech, W. Mathis."First Digital Full AudioBand Implementation of a zero position Coding System with separated base bandband for use in clase-D amplifiers". Proceeding of the 8th International Conference 'Mixed Design of Integrated Circuits and Systems', Zakopane, Poland, 21-23 june 2001.
- [28] Elias Masry, "Signal Identification after Noisy Nonlinear Transformations", IEEE Trans. For Information theory, pp 50-58 ,Vol. IT 26, No. 1, November 1980.
- [29] Elias Masry (member IEEE), "The reconstruction of Analogue Signals from the sign of their noisy samples", IEEE Trans. For Information theory, pp 735-745 ,Vol. IT 27, No. 6, November 1981.
- [30] F.A Marvasti, Peter M. Clarkson, Miroslav V. Dokic, Ut Goenchanart, Chuande Liu, "Reconstruction of Speech with lost samples ", IEEE 1992.
- [31] Raymond Veldhuis, "Restoration of Lost Samples in Digital Signals", Prentice Hall, NY 1991.
- [32] T.L Wilson, K. Rohlf, S. Hüttemeister, "Tools of Radio Astronomy 5th Edition ", Astronomy and Astrophysics library; The Van Vleck Clipping Correction: One Bit Quantization pp 469-471, Edit Springer, Berlin Heidelberg 2009.
- [33] Jonathan S. Abel, Julios O. Smith, "Restoring a Clipped Signal", Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1991. ICASSP-91., 1991 International Conference on, pp 1745-1748, Canadá 14-17 Apr 1991.
- [34] Modris Greitans, Rolands Shavelis, Laurent Fesquet, Taha Beyrouthy, "Combined Peak and level-Crossing Sampling Scheme", The 9th International Conference on Sampling Theory and Applications, Singapore May 2-6 2011.
- [35] Vladimir Kazakov, P. Pancóatl."Investigación del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de Procesos Gaussianos No diferenciables". XII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica Eléctrica y de Sistemas, IPN, Nov 2010.
- [36] Vladimir Kazakov, P. Pancóatl. "Reconstrucción de los Procesos Gaussianos con ubicación de las muestras entre cruces por cero de las realizaciones", VI INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTROMECHANICS AND SYSTEMS ENGINEERING (VI CHIES) IPN, Nov 2011.