

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN  
UNIDAD PROFESIONAL ADOLFO LÓPEZ MATEOS

**“VALIDACION NUMÉRICA DEL AMORTIGUAMIENTO  
CRÍTICO PARA EL TERCER MODO  
DE VIBRACIÓN”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
CON ESPECIALIDAD EN  
INGENIERÍA MECÁNICA

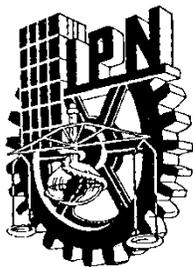
**PRESENTA:**

**GUILLERMO MONTIEL VARELA**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JULIO CÉSAR GÓMEZ MANCILLA**

MÉXICO, D. F.

2011



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

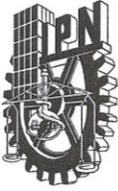
**CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, Distrito Federal el día 21 del mes Junio del año 2011, el (la) que suscribe Guillermo Montiel Varela alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica con número de registro A090391, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Zacatenco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Julio César Gómez mancilla y cede los derechos del trabajo intitulado Validación numérica del amortiguamiento crítico para el tercer modo de vibración, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección gmontielp0800@alumno.ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Guillermo Montiel Varela

Nombre y firma



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14

**ACTA DE REVISIÓN DE TESIS**

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 16:00 horas del día 17 del mes de Junio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.M.E. para examinar la tesis titulada:

**“VALIDACIÓN NUMÉRICA DEL AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO  
PARA EL TERCER MODO DE VIBRACIÓN”**

Presentada por el alumno:

<b>MONTIEL</b>	<b>VARELA</b>	<b>GUILLERMO</b>							
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)							
Con registro: <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">A</td> <td style="padding: 2px 5px;">0</td> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> <td style="padding: 2px 5px;">0</td> <td style="padding: 2px 5px;">3</td> <td style="padding: 2px 5px;">9</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> </tr> </table>			A	0	9	0	3	9	1
A	0	9	0	3	9	1			

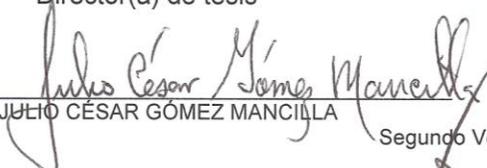
aspirante de:

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

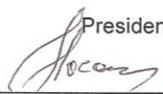
LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

  
DR. JULIO CÉSAR GÓMEZ MANCILLA

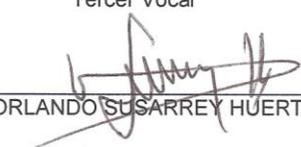
Segundo Vocal

Presidente

  
DR. VALERY ROMANOVICH NOSSOV

  
DR. JOSÉ ALFREDO JIMÉNEZ BERNAL

Tercer Vocal

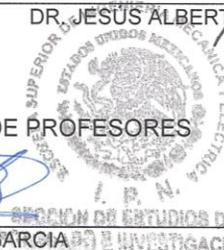
  
DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA

Secretario

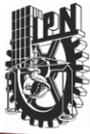
  
DR. JESÚS ALBERTO MEDA CAMPAÑA

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

  
DR. JAIME ROBLES GARCÍA







# CONTENIDO

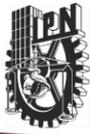
CONTENIDO.....	ii
LISTA DE FIGURAS.....	v
LISTA DE TABLAS.....	vii
NOMECLATURA.....	vii
RESUMEN.....	x
ABSTRACT.....	xi
OBJETIVO.....	xii
JUSTIFICACIÓN.....	xii
INTRODUCCIÓN.....	xiii

## Capítulo 1

### Estado del Arte: Estudios previos de vigas fisuradas y detección de fisuras.

1.1	Introducción.....	2
1.2	Teorías de vigas y estudios de fisura.....	3
	1.2.1 Teoría de Vigas.....	3
	1.2.2 Estudios de vigas fisuradas.....	6
1.3	Trabajos previos en detección de fisuras.....	9
1.4	Avances y desarrollos en el Laboratorio de Vibraciones y Rotodinámica en ESIME.....	10
	1.4.1 Avances en Rotodinámica.....	11
	1.4.2 Avances en Detección de Fisuras.....	12





## Capítulo 2

### Introducción a la obtención de las ecuaciones continuas para la viga Euler-Bernoulli.

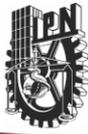
2.1	Introducción.....	15
2.1.1	Consideraciones cinemáticas.....	15
2.2	Obtención de las ecuaciones para la viga Euler-Bernoulli.....	18
2.2.1	Consideración del amortiguamiento.....	23
2.3	Solución de la ecuación de movimiento.....	24
2.3.1	Aplicación del método de Separación de variables.....	24
2.3.2	Condiciones frontera.....	26
2.3.3	Viga Simplemente apoyada.....	26
2.4	Solución del problema de valores característico.....	26
2.5	Calculó de las frecuencias naturales temporales.....	28
2.6	Solución para una viga simplemente apoyada.....	29

## Capítulo 3

### Modelación por medio de dos elementos viga Euler-Bernoulli y simulación de un disco entre ellas

3.1	Introducción.....	35
3.2	Modelación de una viga simplemente apoyada mediante dos elementos Euler-Bernoulli.....	35
3.2.1	Condiciones de frontera.....	36
3.2.2	Solución del problema de valores característicos.....	40
3.2.2.1	Valores y Vectores propios.....	42
3.2.2.2	Grafica de formas modales.....	43
3.3	Desarrollo de las condiciones de frontera para un disco posicionado entre los elementos viga.....	45
3.4	Solución del problema de valores característicos para la viga formada con dos elementos y disco en el centro.....	50
3.5	Frecuencias naturales para diferentes masas del disco.....	50





3.5.1 Grafica de formas modales para diferentes masas del disco.....	53
3.6 Análisis de frecuencias naturales.....	54

## Capítulo 4

### Desarrollo y solución de ecuaciones de movimiento Euler-Bernoulli con efecto de fisura y solución en base a la solución del capítulo anterior.

4.1 Introducción.....	57
4.2 Ecuaciones de movimiento en dos planos.....	57
4.2.1 Modelación del “respiro” de la fisura.....	58
4.2.2 Modelación del acoplamiento provocado por la fisura.....	59
4.3 Solución de las ecuaciones de movimiento con fisura para dos planos .....	61
4.3.1 Sistema de ecuaciones expresado en espacio de estados.....	64
4.4 Función realizada en Matlab para la solución por medio de Simulink.....	65
4.4.1 Diagrama de bloques en Simulink.....	66
4.5 Resultado de la simulaciones.....	67

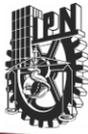
## Capítulo 5

5.1 Conclusiones.....	72
5.2 Trabajos futuros.....	73

Anexos.....	80
-------------	----

- Anexo A
- Anexo B
- Anexo C
- Anexo D
- Anexo E





## **LISTA DE FIGURAS**

**Figura 1. 1 Turbina de vapor Mitsubishi para una planta nuclear**

**Figura 1. 2 La imagen de la izquierda Leonhard Euler (1707-1783) y la imagen de la derecha Daniel Bernoulli**

**fig 2. 1 antes (a) y después de ser deformada (b)**

**fig 2. 2 Vista de lado de la sección transversal de la viga**

**fig 2. 3 Distribución del esfuerzo de tensión**

**fig 2. 4 Diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial**

**fig 2. 5 Viga simplemente apoyada condiciones frontera**

**fig 2. 6 Viga simplemente apoyada**

**fig 2. 7 Modos de vibración para una viga simplemente apoyada**

**fig. 3. 1 Viga simplemente apoyada formada por dos elementos Euler-Bernoulli**

**fig. 3. 2 Modos de vibración para una viga simplemente apoyada formada por dos elementos Euler-Bernoulli.**

**fig. 3. 3 Condición de frontera para simular un disco entre dos vigas**

**fig. 3. 4 Determinante de la matriz del sistema para una masa de 1.495 Kg.**

**fig 3. 5 Modos de vibración para una viga sin masa de disco.**

**fig 3. 6 Modos de vibración para una masa de disco=1.495 Kg.**

**fig 3. 7 Modos de vibración para una masa de disco= 2.99 Kg.**

**fig 3. 8 Efecto de la masa del disco en las frecuencias naturales para una viga**

**fig.4. 1 Mecanismo de apertura y cierre de la fisura**

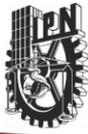
**fig.4. 2 Grafica para la función de respiro de Mayes y Davies**

**fig.4. 3 Diagrama de bloques empleado en Simulink**

**fig.4. 4 Diagrama de bloques empleado en Simulink**

**fig. 4.4 Desplazamiento del eje W,  $\omega=0.5\omega_n$ , C=0,  $\Delta k=0.1$**





**fig. 4 5 Movimiento del eje V,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.1$**

**fig. 4 6 Evolución de la órbita,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.1$**

**fig. 4 7 Desplazamiento del eje W,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.25$**

**fig. 4 8 Desplazamiento del eje V,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.25$**

**fig. 4 9 Evolución de la órbita,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.25$**

**fig. 4 10 Desplazamiento del eje W,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=108/1000$ ,  $\Delta k=0.25$**

**fig. 4 11 Desplazamiento del eje V,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=108/1000$ ,  $\Delta k=0.25$**

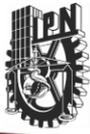
**fig. 4 12 Evolución de la órbita,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=108/100$ ,  $\Delta k=0.25$**

**fig. 4 13 Desplazamiento del eje W,  $\omega=\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.1$**

**fig. 4 14 Desplazamiento del eje V,  $\omega=\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.1$**

**fig. 4 15 Evolución de la órbita,  $\omega=\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.1$**





## ***LISTA DE TABLAS***

**Tabla 1 Frecuencias naturales espaciales para los cuatro primeros modos de vibración**

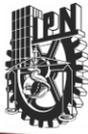
**Tabla 2 Propiedades de la viga**

**Tabla 3 Frecuencias naturales temporales para una viga simplemente apoyada formada por dos elementos Euler-Bernoulli en rad/s.**

**Tabla 4 Valores de frecuencias naturales temporales para diferentes masas de disco en rad/s**

**Tabla 5 Valores de frecuencia natural espacial para diferentes masas de disco**

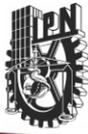




## NOMECLATURA

$OXYZ$  sistema de coordenada fijo  
 $OX'Y'Z'$  sistema de coordenada rotativo  
 $a, b$  amplitudes de vibración indeterminadas  
 $a_G, a_C$  aceleración del punto  $G$  y  $C$ , en  $m \cdot s^{-2}$   
 $A$  área de la sección transversal de la viga, en  $m^2$   
 $A^k$  vector propio asociado a la frecuencia  $\lambda_k$   
 $\alpha_i^k$  coordenada  $i$  del vector propio asociado a la frecuencia  $\lambda_k$   
 $c$  coeficiente de amortiguamiento  
 $c_i^k$   $i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 8$  coordenada  $i$  del vector  $k$  asociado a la frecuencia  $\lambda_k$   
 $C_1(p)$  función representando la discontinuidad en los momentos  
 $C_2(p)$  función representando la discontinuidad en los cortantes  
 $C_i(\lambda_k)$   $i = 3, 4, 5, 6$  función de  $\lambda_k$  para simplificar la escritura  
 $\gamma(p)$  función de  $p$  para simplificar la escritura  
 $\Delta$  variación de rigidez por la fisura por kg, en  $N \cdot m^{-1} \cdot kg^{-1}$   
 $\Delta k$  variación de rigidez por la fisura, en  $N \cdot m^{-1}$   
 $e$  variable para simplificar la lectura, función de la fisura, de velocidad de giro y amortiguamiento  
 $E$  modulo de Young del material del eje  
 $\varepsilon_{xx}$  tensión axial extensional  
 $f_{amor}$  fuerza debida al amortiguamiento no rotatorio, en  $N$   
 $f_X, f_Y, f_Z$  fuerzas internas, en  $N$   
 $F, F_X, F_Y, F_Z$  fuerzas externas, en  $N$   
 $I$  momento de área de inercia del eje  
 $I_G$  momento de área de inercia del disco, plano  $Oxy$  o  $Oxz$   
 $k$  rigidez del eje integro, en  $N \cdot m^{-1}$   
 $k_1, k_2$  rigidez del eje en las direcciones  $y$  y  $z$ , en  $N \cdot m^{-1}$   
 $k_t$  rigidez del resorte torsional provocada por tipo de apoyos  
 $L_{apoyos}$  longitud de la viga hasta entre apoyos, en  $m$   
 $L_{total}$  longitud total de la viga, en  $m$   
 $L_1, L_2$  longitud del primer/segundo elemento de la viga, en  $m$   
 $\lambda$  frecuencia natural espacial, en  $rad \cdot s^{-1}$   
 $m$  masa del disco, en  $kg$   
 $m_{viga}$  masa de la viga, en  $kg$   
 $M$  momento aplicado en el plano considerado  
 $M_G$  momentos en el punto  $G$   
 $M(\lambda)$  matriz asociada al sistema de ecuaciones de condiciones de frontera  
 $\mu(p)$  función de  $p$  para simplificar la escritura





$\xi$  coeficiente de amortiguamiento crítico

$\xi_{umbral}$  amortiguamiento umbral

$p$  frecuencia natural temporal de las vibraciones, en  $rad. s^{-1}$

$r$  radio del eje, en  $m$

$\vec{r}_{G/C}$  vector  $\overline{CG}$

$\mathfrak{R}$  matriz de rotación para cambio de coordenadas sistema fijo-sistema rotativo

$\rho$  densidad del material del eje, en  $kg. m^{-3}$

$S$  cortante, en  $N$

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  esfuerzos extensional y transversales

$t$  tiempo, en  $s$

$u, v, w$  funciones de  $(x, t)$  de desplazamiento de los puntos del centroide de la viga, en  $X, Y, Z$

$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$  funciones de  $(x, t)$  de desplazamiento de cualquier punto de la viga, en  $X, Y, Z$

$V, W$  funciones de  $(x)$  de desplazamiento transversal, en  $(Y, Z)$

$V_a, W_a, V_b, W_b$  funciones de desplazamiento transversal de la viga  $a$  o  $b$

$\omega$  velocidad de rotación del eje, en  $rad. s^{-1}$

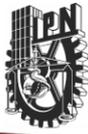
$\omega_{critic}^i$  velocidad crítica  $i$ , en  $rad. s^{-1}$

$\omega'_{min}$  velocidad adimensional de giro a la cual ocurre el mínimo del índice de estabilidad

$\omega_{nat}$  frecuencia natural del eje integro, en  $rad. s^{-1}$

$t_i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$  variables en el espacio de estados





## **RESUMEN**

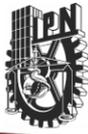
En este trabajo, se compone de dos partes. Una de ellas es el desarrollo y estudio de una modelación por medio de la aplicación de la teoría para la viga Euler-Bernoulli. Y la otra parte la simulación de la fisura es propuesta por un par de ecuaciones que rigen el movimiento en el plano vertical y horizontal con una variación de la rigidez en ambos ejes.

Para la primera parte se propone la utilización de dos elementos viga, y para obtener la solución del modelo compuesto por dos elementos se introduce en las condiciones frontera la simulación de un disco en el centro de ambos elementos, en las cuales se involucran los efectos provocados por la inercia rotatoria, una vez que se resuelve el sistema, en el cual la solución está compuesta por la frecuencia natural temporal del sistema y los vectores propios, se pueden obtener las formas modales dependiendo de la masa del disco.

La segunda parte es la solución de un sistema de ecuaciones acopladas, en las cuales se introduce como se mencionó anteriormente, el fenómeno de respiro está definido mediante la función de Mayes y Davies, la cual es una función suave del respiro. Y lo cual nos provoca un cambio en la rigidez del sistema y por consiguiente el sistema se vuelve inestable es decir, existe un rango en que el sistema es inestable cerca de las frecuencias naturales, esto debido al efecto de la fisura y para nuestro modelo el amortiguamiento es "cero", esto porque el efecto de amortiguamiento es muy fuerte y nos provoca que no se vuelva inestable el sistema.

Al final de este trabajo se obtendrán las zonas de estabilidad e inestabilidad y el efecto del amortiguamiento en el sistema.





## **ABSTRACT**

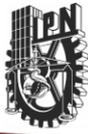
In this work, consists of two parts. One is the development and study of a modeling through the application of the theory for Euler-Bernoulli beam. And the other the simulation part of the crack is proposed by a pair of equations governing movement in the vertical and horizontal variation of stiffness in both axes.

For the first part proposes the use of two beam elements, and to obtain solution of the model consists of two elements are introduced into the boundary conditions simulation of a disk in the center of both elements, which involve the effects caused by the rotational inertia, once the system is solved in solution which consists of the temporary system natural frequency and eigenvectors, we can obtain the mode shapes depending on the mass of the disk.

The second part is the solution of a system of coupled equations, in which introduced as mentioned above, the phenomenon of breathing is defined by Mayes and Davies function, which is a smooth function of the "breathing cracked". And which causes us a change in the rigidity of the system and therefore the system becomes unstable in other hand, there is a range where the system is unstable near the natural frequencies, this is due to the effect of the crack and for our model the damping is "zero" this is because the damping effect is very strong and causes us not to return unstable system.

At the end of this work will areas of stability and instability and the effect damping in the system.





## **OBJETIVO**

En este trabajo, se desarrolla y estudia un modelo de viga fisurada con elementos continuos, con el fin de estudiar las inestabilidades generadas por la fisura en los diferentes modos de vibración, y analizar el efecto del amortiguamiento sobre esta inestabilidad. Un mejor conocimiento de los efectos de daños en ejes en rotación permite desarrollar técnicas de detección y evitar accidentes.

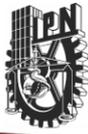
## **JUSTIFICACIÓN**

En maquinaria rotatoria existen diferentes tipos de fallas tales como: desalineamiento, desbalance, doblamiento, etc. de las cuales la presencia de fisuras en dichas maquinas es un problema de gran de importancia, teniendo en cuenta que pocos accidentes ocurren por este tipo de falla en los equipos sin embargo, cuando las dimensiones de la fisura son considerables, agregándole las altas velocidades a las cuales operan las consecuencias de un accidente pueden ser catastróficas, tanto en vidas humanas, como en pérdidas económicas por los daños o por el paro de la producción.

Con los requerimientos actuales de tener trabajando los equipos el mayor tiempo posible, ha aumentado la necesidad de poder verificar si el equipo se encuentra en condiciones favorables de trabajo. Debido a esto, la detección de fisuras se ha vuelto un tema de relevante importancia. Hoy en día, muchas técnicas para detección de daños se están desarrollando en la comunidad científica internacional. Estas técnicas se basan en los diferentes efectos que provocan las fisuras como son: cambio en frecuencias naturales del sistema, en las formas modales de vibración, amplitudes de vibración, variación de rigidez, acoplamientos, etc.

Un mejor conocimiento de los efectos de las fisuras, permite realizar mejores modelaciones de ejes dañados, lo que conducen a métodos de detección más eficaces. En varios artículos se ha estudiado con énfasis que la fisura provoca inestabilidad para el primer modo de vibración, sin embargo para los modos subsecuentes existe escasa investigación. Estos modos podrían proporcionar información muy útil para métodos de detección, por lo que se justifica esta tesis. Además, se propone en este trabajo la aplicación de una nueva modelación, realizada en base a la unión de elementos viga Euler-Bernoulli por medio de las condiciones frontera.





# INTRODUCCIÓN

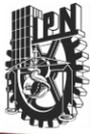
Las fallas en máquinas rotatorias en la industria pueden tener consecuencias fatales. Sin embargo, reemplazar una turbina de vapor de tamaño considerable tiene un costo muy elevado, ya sea por el simple hecho de reemplazo de una pieza o como por la pérdida de ganancias que resulta del paro de la producción durante el periodo de mantenimiento. Por tal motivo, es necesario saber con un gran detalle cuando debe renovar el equipo, que no ocurra en una etapa temprana, para ahorrar gastos inútiles, pero considerando que la máquina o equipo se volviera un riesgo, por razones obvias.

La capacidad de detectar daños en máquinas, y en particular en las máquinas rotatorias, se convirtió por lo tanto en una necesidad cada vez mayor en la industria, por tal razón la inversión económica es mayor para el área de desarrollo de sistemas más seguros, eficaces, y con el menor costo posible. Hoy en día, los conocimientos adquiridos en este campo se han implementado en la industria, pero no se ha llegado a obtener un resultado lo suficientemente bueno por tal razón este campo está en continuo desarrollo, varios de los métodos para detección de fisura aun necesitan parar la producción para realizar una inspección en el rotor. Este problema por lo tanto sigue siendo una gran fuente de investigación, y muchos científicos a nivel mundial están involucrados en este tema.

Los métodos de detección de fisura que se han desarrollado, se basan en el conocimiento de los efectos producidos por la fisura, ya que en la mayoría de los casos una investigación inicia a partir de un modelo analítico y con simulaciones numéricas, para posteriormente, una vez que se obtuvieron resultados interesantes, se procede a iniciar con la experimentación para comprobar los resultados teóricos obtenidos.

En este trabajo, se pretende utilizar el modelo formado por dos elementos de viga Euler-Bernoulli con el objetivo de poder observar las inestabilidades (e igualmente el efecto de la fisura y del amortiguamiento) en los siguientes modos de vibración. Estos resultados no existen en la literatura, y pueden ser bastante útiles para una mejor comprensión de los efectos producidos en un eje.

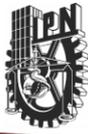




# Capítulo 1

**Estado del Arte: Estudios previos de vigas fisuradas y detección de fisuras**





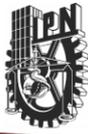
## 1.1 INTRODUCCIÓN

Los rotores o ejes rotatorios son elementos mecánicos usados para transmitir potencia y están sujetos a condiciones severas de operación en máquinas que tienen un alto rendimiento, tales como: compresores, turbinas de gas y vapor, generadores eléctricos, etc. Como consecuencia de la carga de trabajo, muchos rotores están sumergidos a fallas. Los cambios de temperatura durante la operación también contribuyen a que la maquinaria falle. Por tal motivo es de gran importancia detectar a tiempo las fallas que pudiera presentar el equipo o maquina rotatoria.

Debido a los aspectos económicos, la industria busca hoy en día obtener el máximo tiempo de vida útil de la maquinaria rotatoria que utiliza, por lo que trae como consecuencia la presencia de fisuras en los ejes de las mismas y cada vez es más frecuente. Es por ello que la industria requiere de métodos eficaces para la detección de fisuras en rotores, ya que un accidente derivado de la ruptura de un rotor es de una magnitud inimaginable, por ejemplo una turbina de vapor puede llegar a pesar alrededor de 40 toneladas (figura 1.1) y tener una velocidad de giro entre las 3000 y 3600 rpm, lo cual si algún elemento de dicha turbina saliera expulsado la energía contenida en este elemento sería suficientemente grande para causar un daño irreversible.



Figura 1. 1 Turbina de vapor Mitsubishi para una planta nuclear



En las últimas décadas, este tema ha presentado bastante interés para los investigadores debido a la necesidad de obtener buenas técnicas de detección de fisura por medio del análisis de vibraciones.

En la presente investigación se busca contribuir con la obtención de las zonas donde la maquinaria se pudiera volver inestable ocasionando problemas severos debido a la presencia de una fisura en el rotor, esto mediante la aplicación de una nueva modelación basada en la viga de Euler-Bernoulli con ajustes para ejes fisurados y además con la presencia de un disco a la mitad de esta viga, esta modelación fue propuesta por el Dr. Julio Cesar Gómez Mancilla jefe del Laboratorio de vibraciones y rotodinámica de la ESIME Zacatenco.

## 1.2 TEORIA DE VIGAS Y ESTUDIOS DE FISURA

En este trabajo nos interesa estudiar de manera teórica el comportamiento de las vigas fisuradas por medio de la modelación antes mencionada. Les mencionare en esta parte un poco sobre las teorías de las vigas más relevantes como son: la teoría de viga Euler-Bernoulli, Viga Timoshenko y la teoría de Rayleigh.

### 1.2.1 TEORÍA DE VIGAS [1]

Los inicios de la modelación de una viga vibrando se remontan a los primeros científicos Pochhammer (1876) y Chree (1889) [2], quienes investigaron una solución exacta del problema de la viga en términos de elasticidad, derivaron las ecuaciones de movimiento para un cilindro sólido vibrando. Solo que en algunas ocasiones no es factible desarrollar el problema completo, porque existe demasiada información que en nuestro caso no sería utilizable, lo que a nosotros nos interesa conocer es el comportamiento de las vibraciones transversales es decir desplazamientos. Las teorías que se muestran a continuación nos permiten obtener resultados aproximados de estas vibraciones.

El modelo de Euler-Bernoulli fue desarrollado en el siglo XVII, por Jacob Bernoulli (1654-1705), quien fue el primero en descubrir que la curvatura de una viga elástica es proporcional en todos sus puntos al momento de flexión este punto. Daniel Bernoulli (1700-1783), sobrino de Jacob, formulo la primera ecuación diferencial de movimiento para una viga vibrando. Más tarde, la teoría de Jacob Bernoulli fue tomada por Leonhard Euler(1707-1783) [3]. En su investigación formas tomadas por vigas elásticas bajo diferentes cargas.



La teoría de Euler- Bernoulli es conocida como la teoría clásica de vigas, es la más utilizada de todas debido a que sus aproximaciones son demasiado buenas para aplicaciones en ingeniería, los cuales son obtenidos de una manera sencilla, sin embargo cuando se encuentran las frecuencias naturales esta teoría los sobre estima y esto es más notable para altas frecuencias.

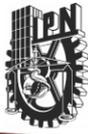


**Figura 1. 2 La imagen de la izquierda Leonhard Euler (1707-1783) y la imagen de la derecha Daniel Bernoulli**

El trabajo desarrollado por Rayleigh (1877) [4] añade el efecto de la inercia rotatoria; lo que conlleva a tener una mejora en la estimación de las frecuencias naturales, sin embargo estas frecuencias no son lo suficientemente buenas. Otros investigadores, incluyendo Davies [5] estudiaron los efectos que produce la inercia rotatoria para una viga en voladizo.

Otro de los grandes aportadores para la teoría de vigas fue Timoshenko (1921-1922) [6] [7]. Propuso que los efectos de cortantes como los de rotación tenían que ser agregados al modelación de la viga propuesta por Euler-Bernoulli. El modelo de Timoshenko es el más preciso para vigas no esbeltas y para respuestas a altas frecuencias, en las cuales el efecto rotacional y cortante no se puede despreciar. Después de Timoshenko, los estudios que se realizaron fueron para obtener las formas modales y la frecuencia de estos, por medio de la variación de las condiciones frontera. Entre los cuales se encuentran Kruszewski (1949) [8], Traill-Nash y Colar (1953) [9], Dolph (1954) [10] y Huang (1961) [11].

Traill-Nash y Collar realizan un trabajo tanto teórico como experimental para una viga de sección uniforme. En la primera parte de su artículo obtienen resultados numéricos para los modelos antes mencionados: Euler-Bernoulli, Timoshenko. Con la utilización de vigas no delgadas, en las cuales los efectos del cortante y momento de inercia son de gran importancia.



Ellos únicamente proporcionan las expresiones para las frecuencias naturales y los modos. No obtuvieron respuestas para diferentes condiciones iniciales y cargas externas.

Para hacer esto fue necesario que Dolph (1954) y Herrmann (1955) [12] presentaran las condiciones de ortogonalidad para la viga Timoshenko. Dolph resolvió el problema inicial y de condiciones frontera para una viga simplemente apoyada y con fuerzas externas. En la publicación que realizó también, trata un método para resolver el problema de condiciones frontera forzadas y condiciones iniciales independientes del tiempo. Un método general para resolver la viga Timoshenko con condiciones iniciales y fuerzas externas es presentado en el libro *Elastokinetics* de ReismannPawlik (1974), con la aplicación del método de eigenfunction expansion.

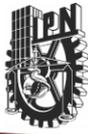
Huang (1961) obtiene de manera independiente las ecuaciones de frecuencia y las expresiones para los modos de vibración para seis diferentes condiciones de frontera. Las ecuaciones de frecuencia son difíciles de resolver, excepto para el caso de una viga simplemente apoyada.

A pesar de los trabajos constantes realizados por varios autores, la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y de Timoshenko siguen siendo muy utilizadas por las ventajas que presentan.

A continuación se presentan las conjeturas que se utilizan para las teorías antes mencionadas:

1. Se considera solo la dirección axial, por ser mayor que en las otras dos direcciones.
2. El material es elástico (cumple con la ley de Hooke).
3. La relación de Poisson es despreciable.
4. Sección transversal axisimetrica, por lo tanto el eje neutro y centroidal coinciden.
5. Los planos perpendiculares al eje neutro se mantienen perpendiculares después de ser sometidos a una deformación.
6. Los ángulos de deformación son pequeños, por lo que la teoría de pequeños ángulos puede ser utilizada.





En resumen las cuatro teorías principales para las vigas son las siguientes:

- Teoría de la viga Euler-Bernoulli.
- Teoría de Rayleigh.
- Teoría del Cortante.
- Teoría de la viga Timoshenko.

### **1.2.2 Estudios en vigas fisuradas**

Durante las últimas décadas, varios investigadores comenzaron a interesarse en el estudio de vigas fisuradas, sus efectos y diagnóstico. En las maquinas rotatorias, por las necesidades crecientes de la industria. Las publicaciones de revisión del estado del arte realizadas por Dimarogonas [13], Wauer [14] y Gash [15], son de una gran calidad y proporcionan demasiada información en esta área.

Algunos de los estudios que se pueden realizar en ejes fisurados son mencionados a continuación.

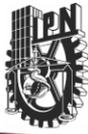
#### ***Por Análisis De Estabilidad En Ejes Fisurados***

Algunos resultados fueron presentados por Gash y Papadopoulos-Dimarogonas [16], mediante una serie de graficas en las cuales las zonas de estabilidad de un eje con fisura que presenta el fenómeno de respiro (la abertura y cierre de la fisura dependiendo de la orientación de esta), es representada para los modos de vibración de flexión. Por otra parte el trabajo desarrollado por Huang et al. [17] para ejes que giran, presenta una gráfica donde muestra los efectos del amortiguamiento sobre la estabilidad, indicando que este tienen efecto estabilizador sobre un eje con presencia de fisura.

#### ***Por Análisis De La Respuesta Transitoria En Ejes Fisurados***

Las maquinas rotatorias a la velocidad critica, presentan comportamiento particular, es decir, existe un rango de velocidades que oscila entre la velocidad critica en el cual las amplitudes de vibración pueden llegar a ser demasiado grandes. El monitoreo de la respuesta vibratoria durante el cruce por la velocidad critica pudiera darnos información de la presencia de una fisura por medio del análisis de la respuesta.





## **Mediciones De Frecuencia**

Con la presencia de la fisura en los ejes, provoca una disminución de la rigidez, por lo que tienen repercusión en las frecuencias naturales las cuales bajan dependiendo de las dimensiones de la fisura.

Lee y Chung [18] presentan un método de evaluación no destructivo para la identificación de la fisura en una estructura de tipo viga unidimensional, por medio del uso de frecuencias naturales y el Método de Elementos Finitos (FEM). Por otra parte Lee y Maiti [19] obtienen las frecuencias naturales por medio del conocimiento de los parámetros de la fisura y también para el problema inverso conociendo las frecuencias naturales determinaron la ubicación de la fisura para una viga Timoshenko por medio de la representación de la fisura como un resorte rotacional.

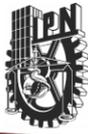
## **Modos De Vibración**

Los modos de vibración también son afectados por la presencia de una fisura. En este caso, las mediciones de vibraciones en diferentes puntos pueden ser utilizadas con el objetivo de ubicar la y determinar su profundidad.

Imam et al. [20] publicaron en 1989 e la presencia de un sistema de monitoreo y detección de fisura en un rotor en línea. El sistema es también capaz de detectar fisuras durante el arranque o paro de la maquina. Esta técnica se basa en el enfoque de análisis de firmas de vibraciones y en la modelización analítica de la dinámica del rotor. El sistema puede detectar fisuras hasta de 1% o 2% del diámetro del rotor sujeto a una carga de pandeo. El reporte también incluye una validación experimental de la técnica propuesta. Esta tecnología se aplica con éxito tanto en muchos sistemas de generadores de turbinas como en bombas verticales de enfriamiento de reactores nucleares.

Seibold and Weinert [21] presentan una localización de fisuras en máquinas rotatorias basada en mediciones de vibraciones. El método utilizado es un algoritmo de identificación de dominio de tiempo: el Filtro de Kalman Extendido (FKE). La localización se realiza utilizando un banco de FKE, en el cual cada filtro se calibra utilizando una hipótesis de daño diferente: i.e. en este caso la ubicación específica de la fisura. Al calcular la probabilidad de las diferentes hipótesis, se puede ubicar la fisura y determinar su profundidad.





Dong et al. [22] mediante el uso de un modelo continuo para análisis de vibraciones e identificación de parámetros de un rotor estático con una grieta abierta, basándose en dos suposiciones: el rotor es una viga Euler-Bernoulli con sección transversal circular, y la región fisurada es modelada utilizando una flexibilidad local utilizando métodos de mecánica de la fractura. Al medir la deflexión en dos puntos simétricos y utilizando el método de identificación de envolturas, predicen la ubicación y profundidad de la fisura.

### ***Por Medio De Acoplamiento***

La presencia de una fisura provoca un acoplamiento entre los diferentes modos de vibración, este fenómeno fue reportado por primera vez para vibraciones longitudinales y transversales por Papadopoulos y Dimarogonas [23] y después para flexión y vibraciones transversales.

Goumaris y Papadopoulos [24] utilizan las propiedades de acoplamiento de vibraciones inducidas por una fisura para determinar su profundidad y ubicación, en una viga Timoshenko. Una fuerza armónica es utilizada para excitar la viga, y dos mediciones se efectúan: en la dirección de la excitación, y en la dirección donde aparece el efecto de acoplamiento.

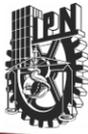
Wauer [25] deriva las ecuaciones de movimiento para una viga Timoshenko en rotación, incluyendo vibraciones axiales y torsionales, y considerando condiciones de fronteras. Se demuestra también el acoplamiento pandeo-torsional y pandeo-longitudinal.

### ***Por Medio De Una Excitación Externa***

El efecto de una fisura es provocar un comportamiento dinámico no lineal. Este comportamiento se puede observar midiendo las amplitudes de vibración en función de la velocidad de rotación; durante el proceso de arranque o paro de la maquinaria rotatoria.

Ishida et al. [26] [27] por medio de excitaciones externas a ejes fisurados rotatorios, provocan la excitación de características no lineales de la grieta, con el objetivo de identificarla. De esta manera la fisura puede ser detectada a su velocidad de operación.





Gómez-Mancilla et al. [28] utilizan picos de vibración que ocurren a fracciones racionales de la velocidad crítica de rotación fundamental, para facilitar la detección de grietas en ejes durante el arranque o paro de la maquinaria.

Utilizando un rotor Jeffcott o de Laval modificado apoyado sobre chumaceras. La selección de parámetros modales permite en este modelo lineal representar características del primer modo de máquinas reales.

Las evoluciones de orbitas y patrones de vibración son analizados, conduciendo a resultados útiles. Concluyen que en lugar de utilizar las componentes  $1x$  y  $2x$  para la detección de fisuras, el análisis de las resonancias locales (a  $1/2x$ ,  $1/3x$  y  $1/4x$ ) deberían de hacerse en prioridad.

### 1.3 TRABAJOS PREVIOS EN DETECCIÓN DE FISURAS

En este apartado se mencionan algunas de las más importantes aportaciones en la línea de investigación aquí tratada, las cuales han sido tratadas a lo largo del tiempo por reconocidos estudiosos del tema, y por consiguiente han servido como referencia para continuar generando contribuciones.

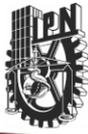
Nataraj [29] explica que es posible detectar fisuras por medio de vibraciones, debido a que los patrones vibratorios cambian cuando también ocurren cambios en el sistema; dichos cambios pueden ser provocados principalmente por la inestabilidad, desbalance o el crecimiento de una fisura.

Por otra parte Mayes y Davis [30] representan la descripción teórica experimental para detectar y localizar una fisura transversal. La ecuación que emplean para localizar la posición y el tamaño de la fisura se desarrolla a partir de métodos energéticos, proporcionando los cambios en las frecuencias naturales de al menos los dos primeros modos de vibración flexiónate. Sin embargo, el gran inconveniente es que solo aplica para ejes estáticos es decir, sin rotación.

En base a los importantes experimentos realizados por Nilsson [31] sugiere que para fines prácticos en detección de fisuras, solo se deben de monitorear las vibraciones  $1x$  y  $2x$ , ya que las armónicas superiores son, casi siempre, altamente amortiguadas.

Dimarogonas y Papadopoulos [32] realizan análisis de estabilidad en sistemas rotatorios con diferentes profundidades de fisura, y además notifican que existen resonancias subarmónicas que son la primera fuente de información para la identificación de una fisura en el eje rotatorio.





Tamura [33] y Gash [34] han analizado la estabilidad de rotores fisurados soportados sobre chumaceras infinitamente rígidas, encontrando zonas de inestabilidad a causa de la presencia de la fisura.

Para representar el cambio cíclico de rigidez en ejes rotatorios fisurados, Gash [15] propone utilizar el modelo de simple bisagra (hinge model) siempre y cuando la profundidad de la fisura no sea mayor que el 25% del diámetro del eje. Pero si la profundidad de la fisura es mayor del 25% del diámetro del eje, el modelo modificado de Mayes y Davis [35] es el que se recomienda usar, ya que se trata de un modelo mejorado con una función más suave de abertura y cierre de la fisura que representa mejor el comportamiento de fisuras profundas.

Ishida et al. [27] han estudiado los efectos no lineales en rotores verticales fisurados, primordialmente cuando pasan a través de la velocidad crítica principal. De forma similar a este trabajo, Ishida aplicó las transformadas de Fourier para caracterizar la respuesta del sistema. Para el caso de un rotor vertical fisurado teniendo efectos giroscópicos significativos. Yamamoto e Ishida proponen un interesante modelo no lineal capaz de analizar el efecto de la orientación entre la fisura y el desbalance en ausencia de efectos de la gravedad.

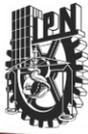
Aplicando la teoría de Floquet, Meng [36] y Gash analizaron el comportamiento estable del sistema rotor-chumacera Jeffcott con una fisura transversal y con masa en los muñones de la chumacera. Por desgracia, los sistemas lineales vibrando alrededor del equilibrio trivial son bastante estables con respecto a la fisura y por tanto requieren una fisura excesivamente profunda para afectar significativamente sus estabildades.

Penny y Friswell [37] han trabajado en diversos tópicos interesantes, entre los cuales han analizado diferentes modelos simplificados de respiro de la fisura en rotores. La conclusión de ellos tiene gran relevancia, puesto que la función armónica simple de respiro como la propuesta por Mayes y Davies permite que este modelo sea lineal y, sin embargo, producir un comportamiento del sistema similar al de un modelo no lineal equivalente y más complicado.

#### **1.4 AVANCES Y DESARROLLOS EN EL LABORATORIO DE VIBRACIONES Y ROTODINÁMICA DE LA SEPI-ESIME ZACATENCO**

En México existen varias instituciones y centros de investigación que trabajan en tópicos relacionados con vibraciones y rotodinámica. Actualmente el *Laboratorio De Vibraciones Y Rotodinámica ESIME* (fundado por el Dr. Gómez Mancilla) es considerado líder nacional en investigación y desarrollo asociado con la dinámica, la lubricación aplicada y las vibraciones en maquinaria rotatoria.





A continuación se presentan algunas de las aportaciones que diversos investigadores, formando parte del equipo de trabajo del *Laboratorio De Vibraciones Y Rotodinámica ESIME*, han desarrollado.

#### 1.4.1 Avances en Rotodinámica

Trabajos sobre chumaceras hidrostáticas, hidrodinámicas o híbridas se han desarrollado en la SEPI-ESIME Zacatenco, produciendo muchos resultados y avances que se han publicado en numerosos congresos y revistas internacionales y nacionales.

Kucherenko y Gómez Mancilla [38] desarrollaron un modelo de rotor-chumacera tomando en cuenta los efectos no lineales de las fuerzas en las chumaceras

Antonio García, Gómez Mancilla y Nossov [39] reportan la obtención de expresiones explícitas de la velocidad del umbral de estabilidad en función de la excentricidad cuando ambas configuraciones típicas del modelo de Jeffcott para rotores de eje rígido y eje flexible. Para la determinación de las velocidades del umbral utilizaron el criterio de estabilidad de Lienard- Chipard.

Una conclusión importante a la que se llega, es que las expresiones encontradas para el cálculo de la velocidad del umbral de estabilidad son más simples que los métodos proporcionados en la literatura.

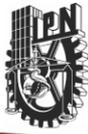
Importantes análisis realizados por Gómez Mancilla y Nossov [40] muestran que el desalineamiento angular tienen influencia importante en el comportamiento de la maquinaria rotatoria soportada en chumaceras hidrodinámicas.

Ramírez Vargas et al. [41] analizaron el comportamiento de una chumacera corta que está sometida a presurización externa, dando como resultado un cambio radical en el comportamiento de las propiedades dinámicas de la película de lubricante.

La presurización fue modelada con funciones especiales de impulso (función Delta de Dirac), tal modelación fue la primera en su tipo para problemas similares en rotodinámica.

Torres Cedillo [42] utiliza en su tesis de maestría un modelo matemático desarrollado en colaboración con Gómez-Mancilla y Meda-Campaña [43] para describir un sistema rotor-chumacera rígido con movimiento orbital pivotado. Se estudia la presurización y se calculan coeficientes rotodinámicos para diferentes presiones de inyección en función de la velocidad de operación.





Se realizan comparaciones muy completas con simulaciones numéricas realizadas en SIMULINK y experimentos en la plataforma experimental Rotor Kit de Bently Nevada. En una última parte se empieza también a controlar las presiones de inyección mediante control activo.

Alan Domínguez [44], en su tesis de maestría realizó la investigación para chumaceras infinitamente largas con puertos de presurización lineales, introduciendo así los inicios para esta teoría.

José Luis Pacheco [45] y Adolfo Marín, colaboran en la realización del diseño de detalle instrumentación y experimentación para una chumacera híbrida la cual puede ser presurizada en cuatro puntos a la vez, desarrollada en el laboratorio de vibraciones y rotodinámica.

Juan Carlos Hernández [46], realizó experimentación por medio del Machine Fault Simulator, para detectar daño estructural en ejes fisurados por medio de las señales adquiridas en el software ADRE.

#### **1.4.2 Avances en Detección de Fisuras**

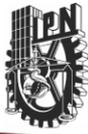
Balankin et al. [47] descubrieron que las superficies fisuradas tienen una rugosidad que impacta el mecanismo de “respiro”, lo que complica una modelación exacta de la fisura.

En su tesis de Maestría, García Illescas [48] hizo una gran contribución en la detección de fisuras, obteniendo resultados muy interesantes tanto teóricos como experimentales. Investigo entre otras cosas los cambios de rigidez provocados por la fisura, resultados muy importantes para la modelación teórica de fisuras.

En colaboración con Gómez Mancilla [49], presentaron un nuevo modelo matemático poderoso para análisis cualitativos, considerando entre otras cosas los cambios de rigidez provocados por la fisura y excitaciones provocadas por las chumaceras lubricadas. Basándose en este modelo, efectuaron simulaciones numéricas que validaron experimentalmente [50], y compararon los diferentes modelos de respiro, concluyendo en la poca influencia de este.

Gómez Mancilla et al. [51] utilizan un modelo matemático de rotor Jeffcott o de Laval extendido con una fisura a la mitad para desarrollar métodos de detección de fisuras. Simulaciones numéricas demostraron lo favorable que es utilizar arranques o paros de máquinas.





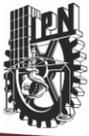
Gómez Mancilla investigo después con Zambrano Reyes et al. [52] [53] [54] la fuerte influencia que tiene el ángulo existente entre el desbalance y la fisura; concluyen que las resonancias locales a  $1/2$ ,  $1/3$  y  $1/4$  pueden ser utilizadas para detección de fisuras. Con Machorro López [55] validaron experimentalmente estas simulaciones numéricas, corroborando la fuerte interacción fisura-desbalance. Mencionan que el desalineamiento y otros problemas pueden excitar las resonancias locales, por lo que se recomienda una resta vectorial de dos corridas similares.

Machorro López, en su tesis de maestría [56], hizo un trabajo muy completo de modelación, simulación numérica y comprobación experimental para detección de fisuras, utilizando resonancias locales, y estudiando los efectos de desalineamientos, mejoró sus resultados experimentales quitando las manifestaciones indeseadas de desalineamiento.

Zambrano Reyes et al. [57] desarrollaron un modelo matemático de rotor Jeffcott o de Laval extendido fisurado a la mitad del eje y soportado por chumaceras hidrodinámicas. Este modelo innovador consta de seis ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes periódicos.

En su tesis de doctorado, Machorro López [58] desarrolla técnicas de diagnósticos de rotores fisurados utilizando una excitación externa y monitoreando la respuesta. Simulaciones numéricas en ANSYS y MATLAB, y una experimentación muy completa, le permiten comprobar sus resultados.

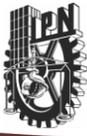




# Capítulo 2

## **Introducción a la obtención de las Ecuaciones Continuas para la viga de Euler-Bernoulli**





## 2.1 INTRODUCCIÓN

El propósito de este capítulo es introducir una modelación por medio de la aplicación de vigas continuas de Euler-Bernoulli, para posteriormente utilizarla en una modelación de dos elementos para el formado de una sola viga y teniendo en cuenta la simulación de un disco entre estos elementos por medio de las condiciones frontera adecuadas para esto.

En este capítulo se desarrolla el caso para una viga simple formada por un solo elemento, considerando las condiciones frontera pertinentes en los extremos de la misma; para posteriormente resolver el problema de valores característicos o Eigenproblema con el propósito de obtener las frecuencias naturales del sistema en estudio y las tres primeras formas modales. El procedimiento aplicado en este capítulo nos ayudara a comprender con más facilidad la metodología para obtener los resultados cuando se tenga presente que la viga está formada por dos elementos.

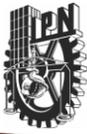
Las ecuaciones de la viga Euler-Bernoulli, como se mencionó al inicio del capítulo anterior también es conocida también como la teoría clásica de vigas, ecuaciones simples que permiten obtener la deformación en barras, tanto para la flexión, tensión y torsión.

Nos enfocaremos en el desarrollo de las ecuaciones para flexión y tensión; aunque en realidad solo se utilizara la ecuación en flexión. Es necesario hacer varias conjeturas y/o aproximaciones. Utilizando relaciones entre momento flexionante, las propiedades de la sección transversal, esfuerzos y deformaciones internas e implementando todas estas condiciones en las ecuaciones de equilibrio fuerzas y momentos internos y externos obtenemos una ecuación diferencial de varias variables; en este caso dos variables, de segundo orden en el tiempo y cuarto orden en desplazamientos.

### 2.1.1 CONSIDERACIONES CINEMÁTICAS

Es necesaria la aplicación de conjeturas para poder simplificar las ecuaciones resultantes. Se necesita realizar suposiciones sobre la deformación para poder realizar el cambio de un problema estáticamente indeterminado a un problema estáticamente determinado.





Con lo que después se proceden a encontrar las relaciones entre esfuerzos-deformación y corroborar las condiciones de equilibrio.

Se consideradas para este trabajo una viga horizontal de sección transversal (figura 2.1a); de sección transversal constante con un eje de simetría; considerando que cuando la viga no se encuentra sujeta a ninguna carga, es decir no se encuentra deformada, una línea horizontal une a todos los centroides de las secciones transversales; es decir cortamos a la viga en rebanadas y cada una de estas rebanadas cuenta con su centroide en el mismo lugar unido por esa línea trazada, la cual es conocida como la línea del eje neutro de la viga.

En la figura 2.1b se considera una rebanada de la viga en vista lateral formada por dos planos perpendiculares al eje neutro limitado por la figura formada por  $abcd$ . Cuando este elemento de viga es sujeto en cada extremo a la aplicación de un momento de igual magnitud pero de sentido contrario, el elemento original se flexiona en el plano de simetría, y los planos inicialmente perpendiculares se inclinan un poco figura 2.3, ocasionando que las líneas  $ad$  y  $bc$  se conviertan en  $a'd'$  y  $b'c'$  pero permaneciendo rectas. Esta consideración es el principio de la teoría de la flexión para vigas que en palabras más adecuadas es: las secciones planas de la viga, normales al eje neutro, siguen siendo planas a pesar de que la viga haya estado sujeta a flexión.

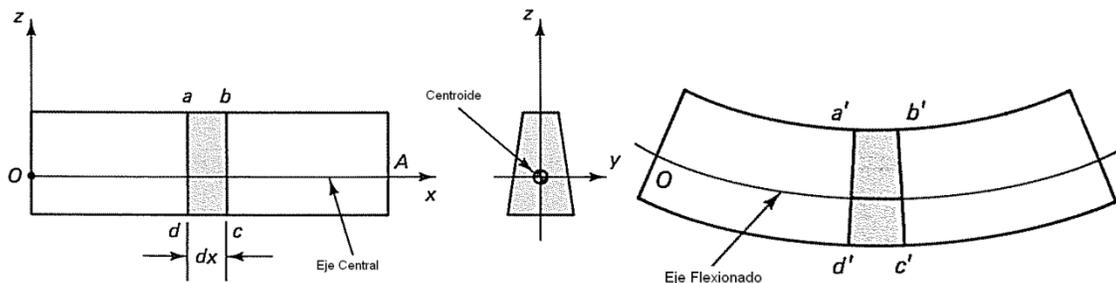
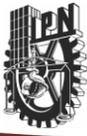


fig 2. 1 antes (a) y después de ser deformada (b)

También es importante considerar que se aplica para vigas esbeltas, es decir la sección transversal es de mucho menor tamaño con respecto a la longitud de la viga. Esto nos ayuda a despreciar los efectos provocados por los momentos de inercia, ya que estos momentos de inercia son relativamente pequeños comparados con los cortantes y la inercia transversal de la viga.





Se obtendrá la ecuación para los desplazamientos en el plano xz. El desplazamiento del centroide es notado por  $u$  y el desplazamiento transversal por  $w$ . Ambas características dependen de la posición ( $x$ ) y del factor tiempo ( $t$ ) (figura 2.3).

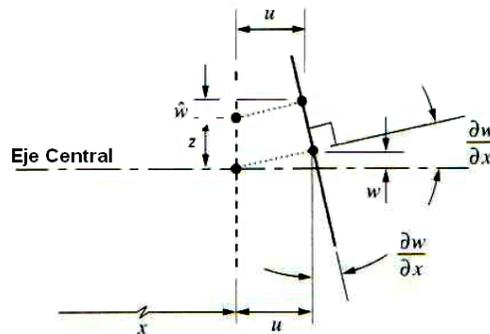


fig 2. 2 Vista de lado de la sección transversal de la viga

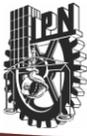
Debido a que nuestro análisis se realizara por medio de la teoría lineal, se consideraran pequeñas deformaciones por lo consiguiente, ángulos pequeños serán obtenidos. En la figura 2.2 se puede ver que debido a las pequeñas deformaciones la rotación del elemento puede ser aproximada por la pendiente dada por  $\partial w / \partial x$ , por lo tanto el desplazamiento en cualquier parte de la sección transversal está definido por  $w$ , mientras que el desplazamiento axial varia linealmente con la distancia  $z$  medida desde el punto centroidal. La convección de signos para las rotaciones es sentido anti horario positivo, la rotación de la sección transversal es del punto  $\partial w / \partial x$  al punto arriba del eje central se mueve hacia atrás de  $z(\partial w / \partial x)$  con respecto al punto centroidal. Se utilizará a continuación el símbolo  $\hat{\phantom{u}}$  para las componentes de desplazamientos de un punto arbitrario.

La expresión que nos describe los desplazamientos del centroide y los desplazamientos transversales son:

$$\hat{u} = u - z \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\hat{w} = w$$

Ec. 2. 1





## 2.2 OBTENCION DE LAS ECUACIONES DE LA VIGA EULER-BERNOULLI

La deformación axial es consecuencia de la aplicación de una fuerza de tensión, la cual se nota por  $\epsilon_{xx}$  y su expresión es la siguiente:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ec. 2. 2

Sustituyendo la expresión del desplazamiento del centroide (Ec. 2.1) en la ecuación (2.2) tenemos:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Ec. 2. 3

Mediante la aplicación de la ley de Hooke, la componente del esfuerzo normal que actúa en la sección transversal es un esfuerzo a tensión

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$$

Ec. 2. 4

Sabiendo que  $E$  es el módulo de Young del material de la viga. En la teoría de vigas se desprecia el esfuerzo en la dirección transversal, es decir  $\sigma_{zz}$ , ya que la viga es esbelta, este esfuerzo es demasiado pequeño comparado con el esfuerzo  $\sigma_{xx}$ , por lo tanto la distribución de esfuerzos en la viga es la siguiente:

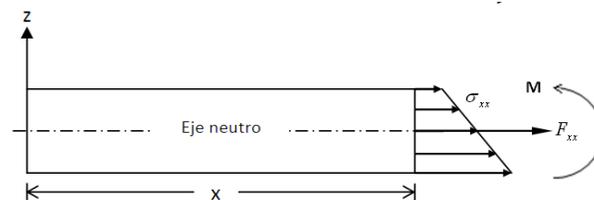
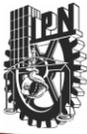


fig 2. 3 Distribución del esfuerzo de tensión





La resultante del esfuerzo normal  $F_{xx}$  actuando en un elemento diferencial de sección transversal  $dA$  está definido por  $\sigma_{xx} dA$ . Esta resultante produce un momento  $M$  de magnitud  $-\sigma_{xx} dA \cdot z$  con respecto al eje perpendicular al plano  $xz$ , en sentido horario cuando el esfuerzo es de tensión. Por lo tanto, resultante de la distribución del esfuerzo normal es una fuerza axial  $F_{xx}$  y un momento  $M$ . La fuerza y momento totales actuando en toda el área de la sección transversal se pueden expresar por dos integrales:

$$F_{xx} = \iint_A \sigma_{xx} dA$$
$$M = -\iint_A \sigma_{xx} z dA$$

Ec. 2.5

Sustituyendo las relaciones anteriores entre esfuerzos y deformaciones (Ec. 2.3 y 2.4) en las ecuaciones (2.5) se obtienen:

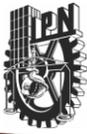
$$F_{xx} = \iint_A E \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dA$$
$$M = \iint_A \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) z dA$$

Ec. 2.6

En las integrales anteriores se puede ver que existen términos constantes, por lo que solo nos queda por evaluar las integrales de  $z^0$ ,  $z^1$  y  $z^2$  a lo largo de la sección transversal. Estos términos en las integrales son el área, primer momento de área y segundo momento de área o momento de inercia respectivamente.

Debido a que  $z=0$ , porque es donde se encuentra en el centroide, el momento de inercia vale cero. Resultando que la fuerza depende únicamente del desplazamiento axial y el momento es dependiente del desplazamiento transversal.





A continuación se expresa esta simplificación:

$$F = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Ec. 2. 7

Por consiguiente lo restante es utilizar un diagrama de cuerpo libre (figura 2.4) para obtener las fuerzas internas que actúan en un elemento diferencial de la viga.

Utilizando las ecuaciones de equilibrio de Newton, para un elemento diferencial de longitud  $dx$ , en el cual no se presentan deformaciones, esto debido a las consideraciones de pequeños desplazamientos; en donde actúan: fuerzas normales  $F$ , fuerzas cortantes  $S$ , esto a pesar de que anteriormente los efectos producidos por dicho cortante no se consideraron para la deformación, fuerzas distribuidas por unidad de longitud  $f_x dx$  y  $f_z dz$  y momentos flexionantes  $M$ .

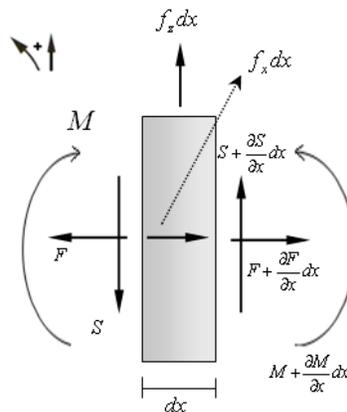
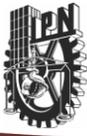


fig 2. 4 Diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial





La convección de signos utilizada es: cortante positivo si actúa en dirección de las  $z$  positivas. El sentido de la flexión es tal que una curvatura positiva,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} > 0$ , produce una compresión en  $z > 0$ , cómo se mencionó al inicio de este capítulo.

La diferencia entre momentos es mínima por lo que se considera el segmento como cuerpo rígido, por lo tanto las fuerzas que actúan en el elemento diferencial son:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + f_x dx \\ \sum F_z &= \frac{\partial S}{\partial x} dx + f_z dx \\ \sum M_G &= S \frac{dx}{2} + \left( S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} + \frac{\partial M}{\partial x} dx = 0\end{aligned}$$

Ec. 2. 8

Las ecuaciones de equilibrio que rigen al diagrama de cuerpo libre (figura 2.4) son las siguientes:

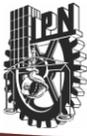
$$\begin{aligned}\sum F_x &= dmt \\ \sum F_z &= dm\dot{w} \\ \sum M_G &= dI_G \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\end{aligned}$$

Ec. 2. 9

Donde:

La masa del elemento diferencial es  $dm$ , la cual se puede expresar si el material no fuera uniforme por unidad de longitud por medio de la expresión  $dm = \rho A dx$  y  $dI_G$  es el momento de inercia centroidal que algunos autores como Timoshenko revela que a frecuencias bajas de rotación no es importante, pero en altas frecuencias los efectos





de deformación asociados al inercia rotatoria se podrían comparar con los efectos provocados por la fuerza cortante, para esta modelación consideramos que  $dI_G = 0$ .

Igualando las expresiones obtenidas por el diagrama de cuerpo libre (Ec. 2.8) y las ecuaciones de equilibrio (Ec. 2.9), utilizando la notación mencionada anteriormente las ecuaciones de movimiento se convierten en las siguientes:

$$\sum F_x = \frac{\partial F}{\partial x} dx + f_x dx = (\rho A dx) \ddot{u}$$

$$\sum F_z = \frac{\partial S}{\partial x} dx + f_z dx = (\rho A dx) \ddot{w}$$

Ec. 2. 10

La relación entre los cortantes y momentos se expresa por una ecuación muy conocida:

$$S = - \frac{\partial M}{\partial x}$$

Ec. 2. 11

Sustituyendo la ecuación (2.11) en las ecuaciones (2.10) y utilizando la relación entre fuerzas y momentos (Ec. 2.7) finalmente se obtienen las expresiones parciales que describen el movimiento axial y transversal y son las siguientes:

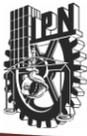
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho A u = -f_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho A w = -f_z$$

Ec. 2. 12

Para nuestro caso se considera que la viga no se encuentra sometida a ninguna carga externa y además las propiedades de la sección transversal son constantes así como





también al material, finalmente obtenemos las expresiones para la viga de Euler-Bernoulli y son las siguientes:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \ddot{u} = 0$$
$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho A \ddot{w} = 0$$

Ec. 2. 13

Para nuestro caso solo utilizaremos la expresión que describe los desplazamientos transversales en el plano OXZ.

### 2.2.1 CONSIDERACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO

El amortiguamiento lo consideramos como una fuerza externa actuando a lo largo de toda la viga, que tiene como principal objetivo el disipar energía y aparte de esto es una fuerza no conservativa. El término del amortiguamiento está acompañado y afectado directamente proporcional por el factor de la velocidad, por lo general se expresa de la siguiente manera:

$$f_{\text{amortiguamiento}}(x,t) = -c\dot{w}$$

Ec. 2. 14

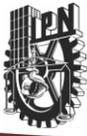
Tiene el signo negativo, lo cual indica que se opone al movimiento. Donde el término  $C$  se le conoce con el nombre de factor de amortiguamiento.

Sustituyendo la ecuación (2.14) en la ecuación para los desplazamientos transversales (Ec. 2.13), se obtiene la expresión que será utilizada en este trabajo y es:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Ec. 2. 15





## 2.3 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para poder resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales, ya que en nuestro caso está en función de desplazamiento ( $x$ ) y del tiempo ( $t$ ), es necesario utilizar alguno de los métodos que existen para resolverla, en esta ocasión utilizaremos el método de separación de variables. Para poder obtener una ecuación diferencial en función únicamente de alguna de las dos variables en este caso será en función del desplazamiento.

Posteriormente se aplicaran las condiciones frontera pertinentes a la solución encontrada, para obtener un sistema de ecuaciones el cual en el campo de las vibraciones es conocido como problema de **valores característicos o Eigenproblema**. Al resolver este problema los resultados son la obtención de las frecuencias naturales del sistema, así como también las formas modales.

### 2.3.1 APLICACIÓN DEL METODO DE SEPARACION DE VARIABLES

La ecuación obtenida para las vibraciones transversales (Ec. 2.15), es de cuarto orden en desplazamientos y de segundo orden en tiempo. La solución propuesta tiene la siguiente forma:

$$w(x,t) = W(x)e^{ipt}$$

Ec. 2. 16

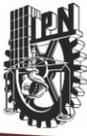
En esta solución, se propone que existe una función periódica en el tiempo, con frecuencia  $p$ , esta suposición se basa en que las vibraciones son oscilaciones que ocurren a lo largo del tiempo.

Se sustituye la ecuación (2.16) en la ecuación de movimiento (Ec. 2.15), haciendo simplificaciones obtenemos la siguiente expresión:

$$EI \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + icpW(x) - \rho Ap^2 W(x) = 0$$

Ec. 2. 17





Esta ecuación diferencial (Ec 2.17) ahora solo depende del desplazamiento y es de cuarto orden, teniendo como solución  $W(x) = \alpha e^{\lambda x}$ , sustituyendo la solución en la ecuación (2.17) tenemos:

$$EI\lambda^4 + icp - \rho Ap^2 = 0$$

Ec. 2. 18

La ecuación anterior (Ec. 2.18) es conocida como la **ecuación característica** del sistema. Obteniendo las raíces de dicha ecuación que son equivalentes a la frecuencia temporal tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_a &= \sqrt[4]{\frac{\rho Ap^2 - icp}{EI}} \\ \lambda_b &= -\sqrt[4]{\frac{\rho Ap^2 - icp}{EI}} \\ \lambda_c &= i\sqrt[4]{\frac{\rho Ap^2 - icp}{EI}} \\ \lambda_d &= -i\sqrt[4]{\frac{\rho Ap^2 - icp}{EI}}\end{aligned}$$

Ec. 2. 19

Entonces, la expresión de la solución de la ecuación diferencial (2.15) es:

$$W(x) = \alpha_a e^{\lambda_a x} + \alpha_b e^{-\lambda_a x} + \alpha_c e^{i\lambda_a x} + \alpha_d e^{-i\lambda_a x}$$

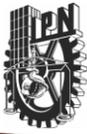
Ec. 2. 20

Se puede reescribir por medio de la utilización de las relaciones de Euler  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$  como:

$$W(x) = \alpha_1 \cos(\lambda_a x) + \alpha_2 \text{sen}(\lambda_a x) + \alpha_3 \cosh(\lambda_a x) + \alpha_4 \text{senh}(\lambda_a x)$$

Ec. 2. 21



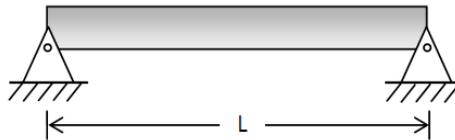


### 2.3.2 CONDICIONES FRONTERA

En base a las condiciones frontera se obtendrá un sistema de ecuaciones el cual nos ayudara a obtener las frecuencias naturales y los modos de vibración. Las condiciones que utilizaremos en esta ocasión son muy conocidas, posteriormente utilizaremos condiciones más complejas ya que se tendrá que simular un disco entre la unión de los elementos.

### 2.3.3 VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

La articulación en ambos extremos de la viga permite rotaciones y también restringe el movimiento en dirección vertical, en otras palabras tenemos cuatro condiciones y son:



$$\begin{aligned} W(x=0) &= 0 \\ \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=0} &= 0 \\ W(x=L) &= 0 \\ \left. \frac{d^2W}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 \end{aligned}$$

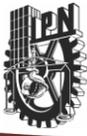
fig 2. 5 Viga simplemente apoyada condiciones frontera

Ec. 2. 22

## 2.4 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALORES CARACTERÍSTICOS

Con las condiciones frontera, dependiendo del caso que se desea analizar se obtendrá la solución de nuestro modelo.





En esta ocasión solo tomaremos las condiciones de la viga simplemente apoyada, estas condiciones de frontera se tendrán que sustituir en la solución (Ec. 2.21) de la ecuación diferencia, para obtener un sistema de ecuaciones de 4x4, el cual escrito en forma matricial quedara como sigue:

$$M(\lambda) * A = 0$$

Ec. 2. 23

Dónde el vector A representa las incógnitas del sistema de ecuaciones:

$$A = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

Ec. 2. 24

Este problema se resuelve encontrando los valores de  $\lambda \neq 0$  y los vectores asociados  $A \neq 0$ , porque si no sería una solución trivial. En el caso de la viga existe una infinidad de soluciones.

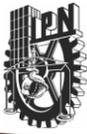
Para encontrar las  $\lambda \neq 0$  se obtiene el  $\det(M(\lambda))=0$ , a estos valores se le conoce como valores propios  $\lambda$  y a cada valor propio le corresponde un vector propio A.

Los valores propios corresponden a la frecuencia llamada espacial. A cada frecuencia le corresponde una forma modal y el resultado de estos vectores son la amplitud de la forma modal correspondiente.

Para obtener los vectores propios se debe proponer un valor diferente de cero, de cualquiera de los cuatro valores ( $\alpha$ ) que conforman la solución, ya que los demás coeficientes ( $\alpha$ 's) estarán en función de este.

Esto nos explica el hecho de que al determinante obtenido reduce su rango en uno, es decir una matriz 4x4 con rango 3, nos indica que tiene una línea redundante.





Se eliminara una línea cualquiera que uno elija, pero si esta línea es la adecuada se puede obtener con mucha mayor rapidez numérica la solución.

Con las alfas obtenidas lo único que faltaría es la graficación de la forma modal, dependiendo de las frecuencias espaciales.

Los pasos para la solución del Eigenproblema son:

1. Escribir en forma matricial el sistema de ecuaciones obtenido por medio de las condiciones frontera.
2. Encontrar  $\det(M(\lambda))=0$ .
3. Proponer un valor para cualquier  $\alpha$ , ya que en función de este estarán los demás parámetros.
4. Escribir el nuevo sistema de ecuaciones
5. Grafica de las formas modales.

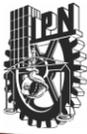
## 2.5 CALCULO DE FRECUENCIAS NATURALES

Para la solución de la ecuación diferencia parcial se tuvo que realizar la separación de variables lo que nos llevó a tener dos tipos de frecuencias una es la frecuencia temporal, es decir dependientes del tiempo  $p$ ; y la otra es la frecuencia espacial  $\lambda$ , la cual ya se calculó anteriormente. Ahora toca el turno de encontrar las frecuencias temporales.

Anteriormente se presentó la ecuación característica del sistema (Ec. 2.18), ahora con ella encontraremos el valor de  $p$  en función de los valores  $\lambda$ .

$$EI\lambda^4 + icp - \rho Ap^2 = 0$$





Esta ecuación es de segundo grado en  $p$  por lo que sus raíces son:

$$p = \frac{ic \pm \sqrt{-c^2 + 4EI\rho A\lambda^4}}{2\rho A}$$

Ec. 2. 25

Como conocemos los valores de las frecuencias espaciales  $\lambda$ , ahora se puede obtener el valor de  $p$ , considerando las propiedades de la sección transversal y el material de la viga.

## 2.6 SOLUCIÓN PARA UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

Se introdujo anteriormente la metodología que se necesita seguir para el desarrollo del problema ahora la aplicaremos para tener una mejor comprensión de la misma. Se hará por medio de la solución para la viga simplemente apoyada ya que es el caso que nos interesa. Analizaremos una viga de sección transversal y material constante de longitud  $L$ .

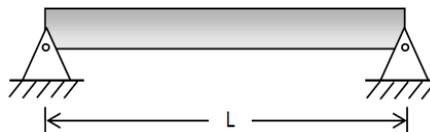


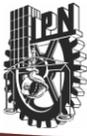
fig 2. 6 Viga simplemente apoyada

### CONDICIONES FRONTERA

En la ecuación (2.22) están escritas estas expresiones y son:

$$\left. \begin{array}{l} W(x=0) = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \frac{d^2W}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ W(x=L) = 0 \\ \frac{d^2W}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$





Es necesario obtener las derivadas de la ecuación (2.21) para poderlas sustituirlas en las condiciones frontera y así encontrar el Eigenproblema.

$$\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2 \alpha_1 \cos(\lambda x) - \lambda^2 \alpha_2 \operatorname{sen}(\lambda x) + \lambda^2 \alpha_3 \cosh(\lambda x) + \lambda^2 \alpha_4 \operatorname{senh}(\lambda x)$$

Ec. 2. 26

Se evalúa en las cuatro condiciones frontera y obtenemos:

$$\left. \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\lambda^2 \alpha_1 + \lambda^2 \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 \cos(\lambda L) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\lambda L) + \alpha_3 \cosh(\lambda L) + \alpha_4 \operatorname{senh}(\lambda L) = 0 \\ -\lambda^2 \alpha_1 \cos(\lambda L) - \lambda^2 \alpha_2 \operatorname{sen}(\lambda L) + \lambda^2 \alpha_3 \cosh(\lambda L) + \lambda^2 \alpha_4 \operatorname{senh}(\lambda L) = 0 \end{cases} \right\}$$

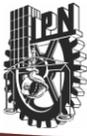
Ec. 2. 27

Ahora se escribirá de manera matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ \cos(\lambda L) & \operatorname{sen}(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \operatorname{senh}(\lambda L) \\ -\lambda^2 \cos(\lambda L) & -\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L) & \lambda^2 \cosh(\lambda L) & \lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Ec. 2. 28



**VALORES PROPIOS**

Para resolver el determinante (Ec. 2.18), se utilizara un programa realizado Matlab (Anexo A) obteniendo como resultado:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ \cos(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sinh(\lambda L) \\ -\lambda^2 \cos(\lambda L) & -\lambda^2 \sin(\lambda L) & \lambda^2 \cosh(\lambda L) & \lambda^2 \sinh(\lambda L) \end{bmatrix} = -4\lambda^4 \sin(\lambda L) \sinh(\lambda L)$$

Ec. 2. 29

Para este caso es fácil identificar donde el determinante se hace cero. El seno hiperbólico se hace 0 solo en 0, y el seno, es una función periódica que se cancela cada  $\pi$ . Teniendo la siguiente solución:

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{L}, i \in N^+$$

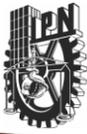
Ec. 2. 30

**FIJACIÓN ARBITRARIA DE ALGUN  $\alpha$** 

Los vectores propios se obtienen a partir el sustituir los valores de  $\lambda$  en la matriz, como ya se mencionó, con esta acción el rango de la matriz baja uno. Lo que matemáticamente nos dice que existe una ecuación redundante en el sistema, por lo tanto se puede fijar un valor de  $\alpha$  diferente del cero.

La elección adecuada del valor  $\alpha$  a fijar no repercute en el resultado, sin embargo, hay casos que una sabia elección nos llevara a obtener resultados de una manera más rápida numéricamente hablando.





Tomando en cuenta lo anterior, se tomara el valor de  $\alpha_2 = 1$  por ejemplo (pudiera ser 2, 3,  $\pi$ , etc. siempre y cuando este sea diferente de cero). Al hacer esto, obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones.

### **SUPRESIÓN DE UNA ECUACIÓN**

Del sistema de ecuaciones de 4x4, y como se dijo anteriormente el sistema tienen una ecuación redundante, no importa cuál de todas las ecuaciones tomemos, pero como existe la posibilidad de suprimir la que uno desee, en este caso eliminaremos la ecuación con mayor grado y/o la más compleja. Con esto el programa tendrá menos dificultad de encontrar la solución y estas serán con una mejor precisión. En este caso eliminaremos la cuarta línea de la matriz.

La matriz que a continuación se muestra es realizando la fijación de  $\alpha_2 = 1$  y eliminando la línea 4 de la matriz completa, para obtener:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & \lambda^2 & 0 \\ \cos(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sinh(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sen}(\lambda L) \end{Bmatrix}$$

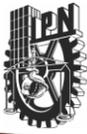
**Ec. 2. 31**

El sistema de ecuaciones ahora tiene 3 incógnitas, el cual debe tener una solución única (para eso se buscaron las frecuencias naturales  $\lambda$  que hacen el determinante igual al cero).

### **Obtención de resultados numéricos por medio de MATLAB**

Por medio de la realización de un programa en Matlab, se resolverá el sistema de ecuaciones (Ec. 2.31), esto mediante la aplicación de la función llamada **bicg**(BiConjugateGradientsMethod), la cual puede resolver sistemas de ecuaciones del tipo  $A * X = B$ .





En el (Anexo A) se encuentra con más detalle que es lo que esta función necesita para poder resolver el sistema de ecuaciones.

Los vectores propios correspondientes a los tres primeros modos de vibración son los siguientes:

$$M_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -0.1060 \times 10^{-16} \end{Bmatrix} \quad M_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.0091 \times 10^{-16} \end{Bmatrix} \quad M_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -0.0006 \times 10^{-16} \end{Bmatrix}$$

Con los vectores propios obtenidos, se puede ahora realizar la gráfica de los modos de vibración (Anexo A). A continuación se muestran los resultados.

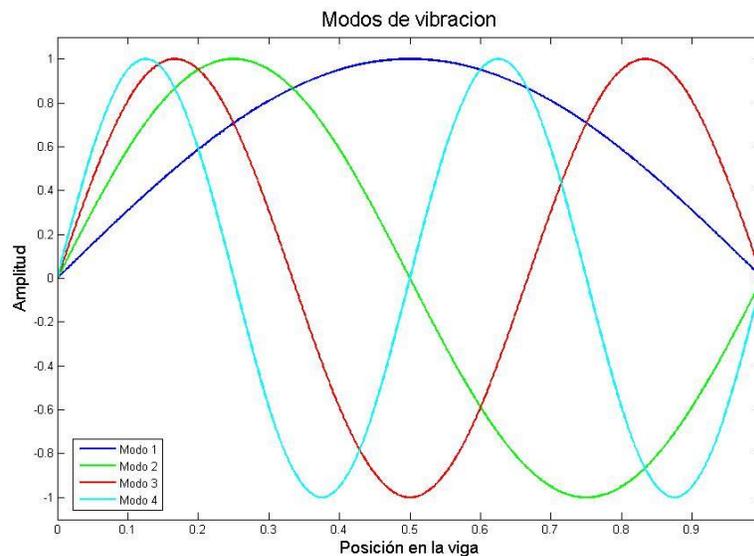
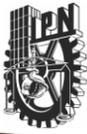


fig 2. 7 Cuatro primeros modos de vibración para una viga simplemente apoyada

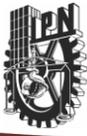




# Capítulo 3

**Modelación por medio de dos elementos viga Euler-Bernoulli y simulando un disco entre ellas.**





### 3.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior se mostró la manera simplificada de la modelación por medio del elemento viga Euler-Bernoulli, ahora utilizaremos la misma idea pero utilizando dos elementos viga, las cuales se encontraran unidos mediante las condiciones frontera. Para nuestro caso se utilizaran ahora ocho condiciones de frontera, las cuales contienen a ocho variables.

En primera instancia se realizara una modelación por medio de los dos elementos vigas unidos por las condiciones frontera pertinentes y se resolverá el problema de valores característicos; una comparación con la viga simplemente apoyada de un solo elemento estudiado en el capítulo anterior permitirá comprobar los resultados. Posteriormente se realizara el desarrollo de la condición que nos permitirá simular un disco entre estos elementos, con la cual se agregara a las condiciones que ya teníamos para así volver a resolver el problema, y se analizara el efecto del disco en las frecuencias naturales.

### 3.2 MODELACIÓN DE UNA VIGA SIMPLEMENTE APOYADA FORMADA POR DOS ELEMENTOS EULER-BERNOULLI.

Se utilizaran dos vigas de la misma longitud ( $L_1 = L_2$ ), las cuales en los extremos se encuentran simplemente apoyadas. En la parte central es donde se aplicaran las condiciones frontera para encontrar la continuidad deseada (En el caso que no existe un disco en medio se puede considerar que existe una continuidad  $C^3$ ). En la figura 3.1 se puede observar con más detalle las características del sistema a analizar.

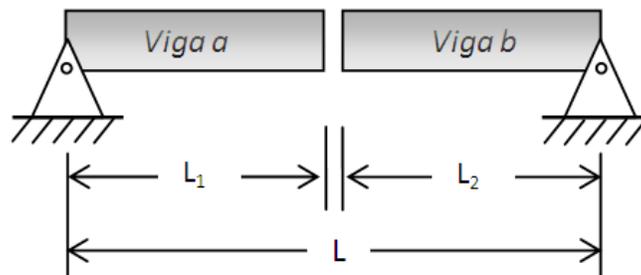
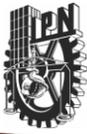


fig 3. 1 Viga simplemente apoyada formada por dos elementos Euler-Bernoulli





Lo primero a realizar es encontrar las condiciones frontera correspondientes, para posteriormente introducirlas en la ecuación (2.21), con el fin de obtener un sistema de ecuaciones el cual se tendrá que resolver para poder así encontrar el valor de las frecuencias naturales y sus respectivas formas modales de vibración.

### 3.2.1 CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera son la base de la solución para nuestro problema ya que si se toman condiciones que no satisfagan a nuestro sistema o que se contradigan entre ellas nunca se va a llegar a obtener una buena solución.

Para nuestro caso se tomara la viga izquierda o viga **a** como el origen del sistema es decir  $x = 0$ , en este punto se considerará las condiciones para un apoyo simple con una pequeña adición de una rigidez; esto debido a que nuestro sistema se encuentra soportado sobre rodamientos de tipo bolas y nos ocasionan que no exista tal cual un apoyo simple. En el centro de los elementos o unión de los mismos, se denota como la coordenada  $x = L_1$ , en esta zona se va a considerar que los desplazamientos, las pendientes y los momentos son exactamente iguales tanto en la viga **a** como en la viga **b**, esta consideración si no se tomara de esta manera tendría un sentido físico de que la viga pudiera estar rota, es decir no existe continuidad de ningún tipo ( $C^1, C^2$  o  $C^3$ ) y por último nos queda el extremo derecho de la viga **b** es decir en  $x = L_1 + L_2$  que se toma la condición similar que en el origen de la viga ya que es el otro punto donde se encuentra nuestro apoyo.

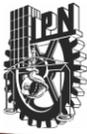
A continuación se muestran las ecuaciones que rigen a una viga formada por dos elementos continuos:

$$\begin{aligned}W_a &= \alpha_1 \cos(\lambda x) + \alpha_2 \sin(\lambda x) + \alpha_3 \cosh(\lambda x) + \alpha_4 \sinh(\lambda x) \\W_b &= \alpha_5 \cos(\lambda x) + \alpha_6 \sin(\lambda x) + \alpha_7 \cosh(\lambda x) + \alpha_8 \sinh(\lambda x)\end{aligned}$$

Ec. 3.1

Los coeficientes  $\alpha_i$  dependen de cada viga es decir y también de cada forma modal, no son los mismos para la viga **a** o para la viga **b**, mas sin embargo el valor de  $\lambda$  es el mismo para ambas vigas y a cada modo le corresponde un valor  $\lambda$  diferente.





Como se mencionó anteriormente que nuestro modelo físico se encuentra soportado sobre rodamientos de bolas, es decir no se encuentra en su totalidad simplemente apoyado, lo que ocasiona que exista un porcentaje de un apoyo del tipo empotrado, este porcentaje esta denotado por  $\beta$ , Para la modelación de esta condición de frontera se tuvo que añadir un resorte resorte torsional como se puede ver:

Para  $x = 0$ , se encuentra simplemente apoyada por lo tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_a(x = 0) = 0 \\ \left. \frac{d^2 W_a}{dx^2} \right|_{x=0} = \beta k_t \left. \frac{dW_a}{dx} \right|_{x=0} \end{array} \right\}$$

Ec. 3. 2

Para  $x = L$ , se encuentra simplemente apoyada por lo tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_b(x = L) = 0 \\ \left. \frac{d^2 W_b}{dx^2} \right|_{x=L} = \beta k_t \left. \frac{dW_b}{dx} \right|_{L=0} \end{array} \right\}$$

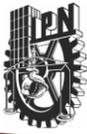
Ec. 3. 3

Para poder encontrar el valor correspondiente de cuanto es el valor de la condición del resorte torsional se tuvo que realizar por medio de la combinación de la parte experimental (la cual fue realizada por Juan Carlos Hernández) y a también tomando en cuenta los resultados analíticos, a continuación se muestra los resultados obtenidos para lo antes mencionado:

Para la parte experimental se obtuvo una frecuencia que tiene un valor de  $\omega_{\text{exp}} = 196.63 \text{ rad} / \text{s}$ .

Para la parte analítica la frecuencia calculada es de  $\omega_{\text{calc}} = 142.02 \text{ rad} / \text{s}$ .





Sabiendo que la frecuencia natural está dada por la ecuación  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m_{eq}}}$

Por lo que tomando en cuenta que existe la siguiente relación de rigideces  $K = K_{calc} + K_{emp}$  y una masa equivalente  $m_{eq} = m_d + 0.5m_{eje}$  se puede encontrar el valor de  $K_{emp}$

$$K_{calc} = (142.02 \text{ rad/s})^2 (1.9425 \text{ kg}) = 39179.60 \text{ N/m}$$

Ec. 3.4

$$K_{emp} = (169.63 \text{ rad/s})^2 (1.9425 \text{ kg}) - 39179.60 \text{ N/m} = 16714.54 \text{ N/m}$$

Ec. 3.5

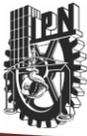
Para saber el porcentaje  $\beta$  de esta rigidez, se recurrió a simulaciones numéricas de donde el valor adecuado es  $\beta = 0.06$ .

Para  $x = L1$ , se encuentra continuidad en desplazamientos, pendientes y momentos obteniendo así las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} W_a(x=L_1^-) &= W_b(x=L_1^+) \\ \frac{dW_a}{dx} \Big|_{x=L_1^-} &= \frac{dW_a}{dx} \Big|_{x=L_1^+} \\ \frac{d^2W_a}{dx^2} \Big|_{x=L_1^-} &= \frac{d^2W_a}{dx^2} \Big|_{x=L_1^+} \\ \frac{d^3W_a}{dx^3} \Big|_{x=L_1^-} &= \frac{d^3W_a}{dx^3} \Big|_{x=L_1^+} \end{aligned} \right\}$$

Ec. 3.6





Agrupando todas las condiciones frontera obtenidas anteriormente tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_a(x=0) = 0 \\ EI \frac{d^2 W_a}{dx^2} \Big|_{x=0} = \beta K_t \frac{dW_a}{dx} \Big|_{x=0} \\ W_a(x=L^-_1) = W_b(x=L^+_1) \\ \frac{dW_a}{dx} \Big|_{x=L^-_1} = \frac{dW_a}{dx} \Big|_{x=L^+_1} \\ \frac{d^2 W_a}{dx^2} \Big|_{x=L^-_1} = \frac{d^2 W_a}{dx^2} \Big|_{x=L^-_1} \\ \frac{d^3 W_a}{dx^3} \Big|_{x=L^-_1} = \frac{d^3 W_a}{dx^3} \Big|_{x=L^-_1} \\ W_b(x=L) = 0 \\ EI \frac{d^2 W_b}{dx^2} \Big|_{x=L} = \beta K_t \frac{dW_b}{dx} \Big|_{x=L} \end{array} \right.$$

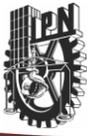
Ec. 3.7

Con estas condiciones se formara un sistema de ecuaciones de 8x8. Para lo cual hay que encontrar las derivadas correspondientes de la ecuación (3.1), y posteriormente sustituirlas en las condiciones, como ya se ha realizado en el capítulo anterior. Las derivadas de la ecuación (3.1) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dW_a}{dx} &= -\lambda\alpha_1 \text{sen}(\lambda x) + \lambda\alpha_2 \cos(\lambda x) + \lambda\alpha_3 \text{senh}(\lambda x) + \lambda\alpha_4 \cosh(\lambda x) \\ \frac{d^2 W_a}{dx^2} &= -\lambda^2\alpha_1 \cos(\lambda x) - \lambda^2\alpha_2 \text{sen}(\lambda x) + \lambda^2\alpha_3 \cosh(\lambda x) + \lambda^2\alpha_4 \sinh(\lambda x) \\ \frac{d^3 W_a}{dx^3} &= \lambda^3\alpha_1 \text{sen}(\lambda x) - \lambda^3\alpha_2 \cos(\lambda x) + \lambda^3\alpha_3 \text{senh}(\lambda x) + \lambda^3\alpha_4 \cosh(\lambda x) \end{aligned}$$

Ec. 3.8





Sustituyendo las derivadas correspondientes en las condiciones frontera, se formara el sistema de ecuaciones que será la base para la solución de nuestro problema:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ -\lambda^2 \alpha_1 + \lambda^2 \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 \cos(\lambda L_1) - \alpha_2 \operatorname{sen}(\lambda L_1) - \alpha_3 \cosh(\lambda L_1) - \alpha_4 \operatorname{senh}(\lambda L_1) + \alpha_5 \cos(\lambda L_1) + \alpha_6 \operatorname{sen}(\lambda L_1) + \alpha_7 \cosh(\lambda L_1) + \alpha_8 \operatorname{senh}(\lambda L_1) &= 0 \\ \lambda \alpha_1 \operatorname{sen}(\lambda L_1) - \lambda \alpha_2 \cos(\lambda L_1) - \lambda \alpha_3 \sinh(\lambda L_1) - \lambda \alpha_4 \cosh(\lambda L_1) - \lambda \alpha_5 \sin(\lambda L_1) + \lambda \alpha_6 \cos(\lambda L_1) + \lambda \alpha_7 \sinh(\lambda L_1) + \lambda \alpha_8 \cosh(\lambda L_1) &= 0 \\ \lambda^2 \alpha_1 \cos(\lambda L_1) - \lambda^2 \alpha_2 \operatorname{sen}(\lambda L_1) - \lambda^2 \alpha_3 \cosh(\lambda L_1) - \lambda^2 \alpha_4 \operatorname{senh}(\lambda L_1) - \lambda^2 \alpha_5 \cos(\lambda L_1) - \lambda^2 \alpha_6 \operatorname{sen}(\lambda L_1) + \lambda^2 \alpha_7 \cosh(\lambda L_1) + \lambda^2 \alpha_8 \operatorname{senh}(\lambda L_1) &= 0 \\ -\lambda^3 \alpha_1 \cos(\lambda L_1) + \lambda^3 \alpha_2 \operatorname{sen}(\lambda L_1) - \lambda^3 \alpha_3 \operatorname{senh}(\lambda L_1) - \lambda^3 \alpha_4 \cosh(\lambda L_1) + \lambda^3 \alpha_5 \operatorname{sen}(\lambda L_1) - \lambda^3 \alpha_6 \cos(\lambda L_1) + \lambda^3 \alpha_7 \operatorname{senh}(\lambda L_1) + \lambda^3 \alpha_8 \cosh(\lambda L_1) &= 0 \\ \alpha_5 \cos(\lambda L) + \alpha_6 \operatorname{sen}(\lambda L) + \alpha_7 \cosh(\lambda L) + \alpha_8 \operatorname{senh}(\lambda L) &= 0 \\ -\lambda^2 \alpha_5 \cos(\lambda L) - \lambda^2 \alpha_6 \operatorname{sen}(\lambda L) + \lambda^2 \alpha_7 \cosh(\lambda L) + \lambda^2 \alpha_8 \operatorname{senh}(\lambda L) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ec. 3. 9

Escribiendo el sistema de ecuaciones en forma matricial tenemos:

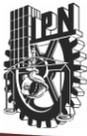
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\lambda L_1) & -\operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\cosh(\lambda L_1) & -\operatorname{senh}(\lambda L_1) & \cos(\lambda L_1) & \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \cosh(\lambda L_1) & \operatorname{senh}(\lambda L_1) \\ \lambda \operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\lambda \cos(\lambda L_1) & -\lambda \operatorname{senh}(\lambda L_1) & -\lambda \cosh(\lambda L_1) & -\lambda \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \lambda \cos(\lambda L_1) & \lambda \operatorname{senh}(\lambda L_1) & \lambda \cosh(\lambda L_1) \\ \lambda^2 \cos(\lambda L_1) & \lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\lambda^2 \cosh(\lambda L_1) & -\lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L_1) & -\lambda^2 \cos(\lambda L_1) & -\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \lambda^2 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L_1) \\ -\lambda^3 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \lambda^3 \cos(\lambda L_1) & -\lambda^3 \operatorname{senh}(\lambda L_1) & -\lambda^3 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^3 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\lambda^3 \cos(\lambda L_1) & \lambda^3 \operatorname{senh}(\lambda L_1) & \lambda^3 \cosh(\lambda L_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\lambda L) & \operatorname{sen}(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \operatorname{senh}(\lambda L) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 \cos(\lambda L) & -\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L) & \lambda^2 \cosh(\lambda L) & \lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = 0$$

Ec. 3. 10

### 3.2.2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALORES CARACTERÍSTICOS

El sistema de ecuaciones anterior es complejo en comparación con el sistema de ecuaciones obtenido para el caso de que la viga es formada por un solo elemento. Pero la metodología de solución es la misma solo que ahora trabajaremos con más incógnitas.





Para resolver el determinante si inicia con una simplificación ya que esta se puede ver de manera sencilla en las líneas primera y segunda de la matriz.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ -\lambda^2 \alpha_1 + \lambda^2 \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Ec. 3. 11

De aquí se puede ver que  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ , por lo que sustituyendo estos valores en la matriz (Ec. 3.8) se reduce a:

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\operatorname{senh}(\lambda L_1) & \cos(\lambda L_1) & \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \cosh(\lambda L_1) & \operatorname{senh}(\lambda L_1) \\ -\lambda \cos(\lambda L_1) & -\lambda \cosh(\lambda L_1) & -\lambda \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \lambda \cos(\lambda L_1) & \lambda \operatorname{senh}(\lambda L_1) & \lambda \cosh(\lambda L_1) \\ \lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L_1) & -\lambda^2 \cos(\lambda L_1) & -\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \lambda^2 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L_1) \\ \lambda^3 \cos(\lambda L_1) & -\lambda^3 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^3 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\lambda^3 \cos(\lambda L_1) & \lambda^3 \operatorname{senh}(\lambda L_1) & \lambda^3 \cosh(\lambda L_1) \\ 0 & 0 & \cos(\lambda L) & \operatorname{sen}(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \operatorname{senh}(\lambda L) \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \cos(\lambda L) & -\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L) & \lambda^2 \cosh(\lambda L) & \lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = 0$$

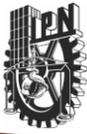
Ec. 3. 12

El siguiente paso es obtener el determinante de la matriz. Por medio de la ayuda de MATLAB, teniendo como resultado:

$$\det \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\operatorname{senh}(\lambda L_1) & \cos(\lambda L_1) & \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \cosh(\lambda L_1) & \operatorname{senh}(\lambda L_1) \\ -\lambda \cos(\lambda L_1) & -\lambda \cosh(\lambda L_1) & -\lambda \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \lambda \cos(\lambda L_1) & \lambda \operatorname{senh}(\lambda L_1) & \lambda \cosh(\lambda L_1) \\ \lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L_1) & -\lambda^2 \cos(\lambda L_1) & -\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & \lambda^2 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L_1) \\ \lambda^3 \cos(\lambda L_1) & -\lambda^3 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^3 \operatorname{sen}(\lambda L_1) & -\lambda^3 \cos(\lambda L_1) & \lambda^3 \operatorname{senh}(\lambda L_1) & \lambda^3 \cosh(\lambda L_1) \\ 0 & 0 & \cos(\lambda L) & \operatorname{sen}(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \operatorname{senh}(\lambda L) \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \cos(\lambda L) & -\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L) & \lambda^2 \cosh(\lambda L) & \lambda^2 \operatorname{senh}(\lambda L) \end{bmatrix} = 8\lambda^8 \operatorname{sen}(\lambda L) \operatorname{senh}(\lambda L)$$

Ec. 3. 13





### 3.2.2.1 VALORES Y VECTORES PROPIOS

Para encontrar los valores propios es decir, en esta ocasión es el mismo valor que para cuando analizamos la viga simplemente apoyada formada por un solo elemento en el capítulo anterior y es la ecuación (2.30).

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L}; k \in R^+$$

	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4
$\lambda$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$

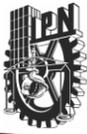
Tabla 1 Frecuencias naturales espaciales para los cuatro primeros modos de vibración

Lo siguiente encontrar los vectores propios correspondientes a cada valor propio. Para esto se tendrá que fijar arbitrariamente el valor de cualquiera de los  $\alpha \neq 0$ . En este caso tomaremos  $\alpha_2 = 1$  como en el capítulo anterior. Se suprime la ecuación con mayor complejidad y/o grado, en este caso quitaremos la línea de la matriz que contiene términos de  $\lambda^3$ . Para finalmente obtener el sistema de ecuaciones a resolver.

$$\begin{bmatrix} -\text{sen}(\lambda L_1) & \cos(\lambda L_1) & \text{sen}(\lambda L_1) & \cosh(\lambda L_1) & \text{senh}(\lambda L_1) \\ -\lambda \cos(\lambda L_1) & -\lambda \text{sen}(\lambda L_1) & \lambda \cos(\lambda L_1) & \lambda \text{senh}(\lambda L_1) & \lambda \cosh(\lambda L_1) \\ \lambda^2 \text{sen}(\lambda L_1) & -\lambda^2 \cos(\lambda L_1) & -\lambda^2 \text{sen}(\lambda L_1) & \lambda^2 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^2 \text{senh}(\lambda L_1) \\ 0 & \cos(\lambda L) & \text{sen}(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \text{senh}(\lambda L) \\ 0 & -\lambda^2 \cos(\lambda L) & -\lambda^2 \text{sen}(\lambda L) & \lambda^2 \cosh(\lambda L) & \lambda^2 \text{senh}(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -\text{sen}(\lambda L_1) \\ -\lambda \cos(\lambda L_1) \\ \lambda^2 \text{sen}(\lambda L_1) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ec. 3. 14





Utilizando un programa realizado en MATLAB (anexo B) se obtiene la solución del sistema de ecuaciones; considerando que se tiene la misma longitud en los dos elementos de vigas es decir  $L_1 = \frac{L}{2} = \frac{1}{2}$ , para los cuatro primeros modos tenemos los siguientes resultados:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.00 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.0013 \\ 0.0119 \\ 0.9183 \\ 0.0230 \\ -0.0229 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.000 \\ 0.000 \\ -0.000 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -0.000 \\ -0.010 \\ 0.9909 \\ -0.0063 \\ 0.0063 \end{pmatrix}$$

Ec. 3. 15

### 3.2.2.2 GRÁFICAS MODOS DE VIBRACIÓN

Con los valores de  $\lambda$  y  $p$  obtenidos se puede ahora realizar la graficación para cada forma modal. A cada valor  $\lambda$  le corresponde su forma modal como se muestra:

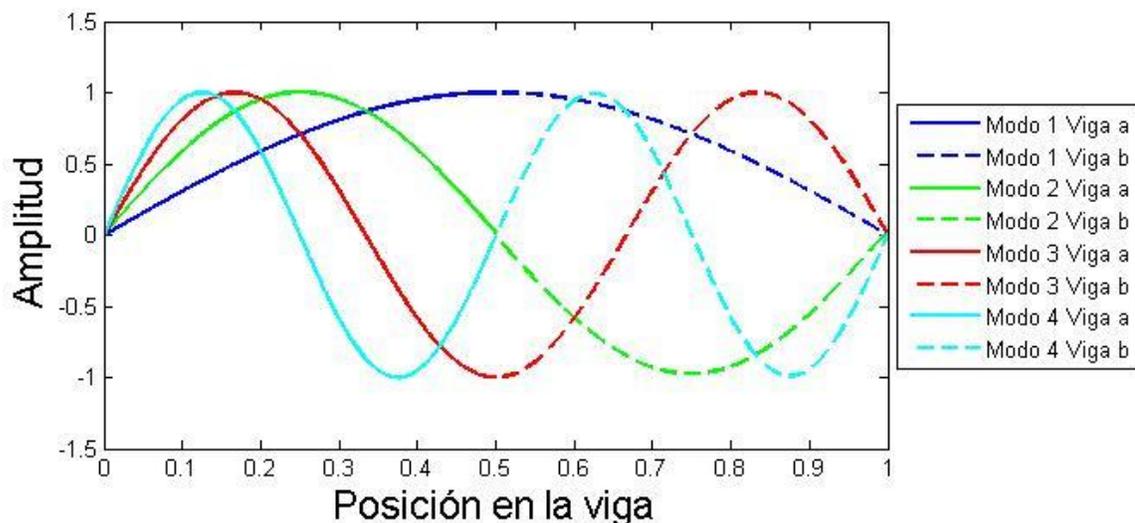
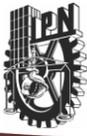


fig. 3. 1 Modos de vibración para una viga simplemente apoyada formada por dos elementos Euler-Bernoulli.





Se puede verificar (fig. 3.2) las condiciones de continuidad establecidas se cumplieron. Así como también las formas modales obtenidas son las que se esperaban obtener.

### **FRECUENCIA NATURAL TEMPORAL**

La expresión que se utiliza para el cálculo de esta frecuencia está dada por la ecuación (2.19).

$$p = \frac{ic \pm \sqrt{-c^2 + 4EI\rho A\lambda^4}}{2\rho A}$$

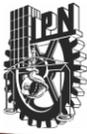
Ec. 3. 16

Con las características correspondientes de la viga utilizada en el modelo físico para la experimentación tales como: dimensiones geométricas, propiedades geométricas y del material, y teniendo en mente que el amortiguamiento despreciado, las características de la viga se muestran en la siguiente tabla:

<b>PROPIEDADES DE LA VIGA</b>	
<i>Longitud entre apoyos</i>	0.69 m.
<i>Longitud total de la viga</i>	0.915 m.
<i>Densidad del acero</i>	7920 Kg/m <sup>3</sup>
<i>Módulo de Young</i>	210 GPa
<i>Radio de la viga</i>	6.35e-2 m.
<i>Área</i>	1.2668e-4 m <sup>2</sup> .
<i>Momento de Inercia</i>	1.2770e-9 m <sup>4</sup>

Tabla 2 Propiedades de la viga utilizada en experimentación.





Debido a que el eje de nuestro modelo físico no se encuentra acotado dimensionalmente exactamente en donde terminan los apoyos, es necesario tomar en cuenta esa variación de longitud de la viga que tenemos presente, por lo tanto para la modelación se introdujo en el término de la densidad ya que esta se encuentra relacionada con la masa, la siguiente expresión se utilizó para obtener la densidad utilizada en este análisis:

$$\rho = \rho_{acero} \left( \frac{L_{total} + 1.55L_{apoyos}}{L_{total}} \right)$$

Ec. 3. 17

Con las características antes mencionadas, obtenemos los siguientes valores de frecuencias naturales temporales considerando la unión de dos elementos viga simplemente apoyado.

	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4
$p$	124	496	1115.9	1983.9

Tabla 3 Frecuencias naturales temporales para una viga simplemente apoyada formada por dos elementos Euler-Bernoulli en rad/s.

### 3.3 Desarrollo de condiciones frontera para un disco posicionado entre los dos elementos viga

La presencia de un disco nos provoca que existan fuerza internas. En la siguiente figura, se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga y el disco para poder realizar un análisis de equilibrio de fuerzas y momentos.



Cuando se tiene una masa concentrada en un punto, se pueden despreciar los efectos de la inercia rotatoria, mas sin embargo, consideraremos un disco con un radio el cual nos provocara efectos inerciales los cuales ya no pueden ser despreciados.

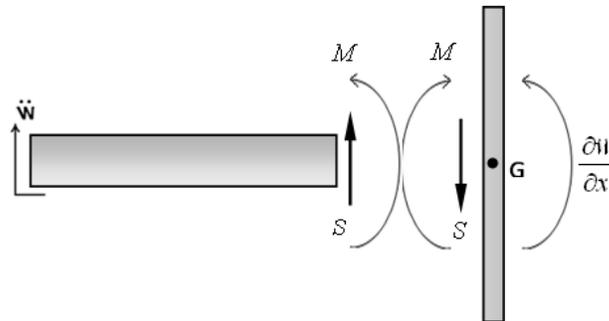


fig. 3. 2 Condición de frontera para simular un disco entre dos vigas

El disco a considerar es de espesor delgado, con un centro de masa G, suponiendo que el desplazamiento del disco y la viga es el mismo denotado por  $w$  y el cortante  $s$  es positivo en el extremo de la viga, por lo tanto la fuerza ejercida por la viga en el disco está dada por la expresión:

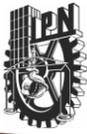
$$S = -\frac{\partial}{\partial x} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Ec. 3. 18

Y esta fuerza actúa en sentido opuesto. La ecuación de movimiento que rige a la viga es:

$$F = ma = m\ddot{w} = -S$$

Ec. 3. 19



Igualando las expresiones (Ec. 3.18) y (Ec. 3.19) tenemos como resultado la siguiente expresión:

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=disco} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=disco}$$

**Ec. 3. 20**

Para considerar los efectos inerciales, teniendo en cuenta que  $I_G$  es el momento de inercia centroidal para el disco, la ecuación que rige la dinámica del disco es:

$$-M = I_G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

**Ec. 3. 21**

Sabiendo que existe una relación entre la fuerza y desplazamiento tenemos:

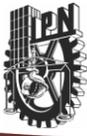
$$-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=disco} = I_G \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=disco} = I_G \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=disco}$$

**Ec. 3. 22**

Para considerar si el disco se encuentra en el lado izquierdo de la viga, solo se necesita invertir los signos y esto nos dará resultados correctos.

Las condiciones frontera cuando se tiene una viga formada por dos elementos continuos y entre las cuales se encuentra un disco en el punto de unión son las siguientes:





$$\left\{ \begin{array}{l} W_a(x=0) = 0 \\ EI \frac{d^2 W_a}{dx^2} \Big|_{x=0} = \beta k_t \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} \\ W_a(x=L_1^-) = W_b(x=L_1^+) \\ \frac{dW_a}{dx} \Big|_{x=L_1^-} = \frac{dW_b}{dx} \Big|_{x=L_1^+} \\ EI \frac{d^2 W_b}{dx^2} \Big|_{x=L^+} - EI \frac{d^2 W_a}{dx^2} \Big|_{x=L^-} = -I_G p^2 \left( \frac{dW_b}{dx} \Big|_{x=L^+} - \frac{dW_a}{dx} \Big|_{x=L^-} \right) \\ EI \frac{d^3 W_b}{dx^3} \Big|_{x=L^+} - EI \frac{d^3 W_a}{dx^3} \Big|_{x=L^-} = mp^2 (W_b \Big|_{x=L^+} - W_a \Big|_{x=L^-}) \\ W_b(x=L) = 0 \\ EI \frac{d^2 W_b}{dx^2} \Big|_{x=L} = \beta k_t \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} \end{array} \right.$$

Ec. 3. 23

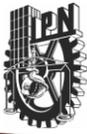
Donde posteriormente por simplificaciones utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} C_1 &= -I_G p^2 \\ C_2 &= mp^2 \\ C_3 &= \beta k_t \end{aligned}$$

Ec. 3. 24

Ahora formamos el sistema de ecuaciones que rigen a nuestra viga y en forma matricial tenemos:





$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
 -\lambda^2 & -c_3\lambda & \lambda^2 & -c_3\lambda & \dots \\
 -\cos(\lambda L_1) & -\text{sen}(\lambda L_1) & -\cos(\lambda L_1) & -\text{senh}(\lambda L_1) & \dots \\
 \lambda \text{sen}(\lambda L_1) & -\lambda \cos(\lambda L_1) & -\lambda \text{senh}(\lambda L_1) & -\lambda \cosh(\lambda L_1) & \dots \\
 \lambda^2 \cos(\lambda L_1) + c_1 \lambda \text{sen}(\lambda L_1) & \lambda^2 \text{sen}(\lambda L_1) - c_1 \lambda \cos(\lambda L_1) & -\lambda^2 \cosh(\lambda L_1) - c_1 \lambda \text{senh}(\lambda L_1) & -\lambda^2 \text{senh}(\lambda L_1) + c_1 \lambda \cosh(\lambda L_1) & \dots \\
 -\lambda^3 \text{sen}(\lambda L_1) + c_2 \cos(\lambda L_1) & \lambda^3 \cos(\lambda L_1) - c_2 \text{sen}(\lambda L_1) & -\lambda^3 \text{senh}(\lambda L_1) - c_2 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^3 \cosh(\lambda L_1) - c_2 \lambda \text{senh}(\lambda L_1) & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cos(\lambda L_1) & \text{sen}(\lambda L_1) & \cosh(\lambda L_1) & \text{senh}(\lambda L_1) \\
 -\lambda \text{sen}(\lambda L_1) & \lambda \cos(\lambda L_1) & \lambda \text{senh}(\lambda L_1) & \lambda \cosh(\lambda L_1) \\
 \lambda^2 \cos(\lambda L_1) + c_1 \lambda \text{sen}(\lambda L_1) & -\lambda^2 \text{sen}(\lambda L_1) - c_1 \lambda \cos(\lambda L_1) & -\lambda^2 \cosh(\lambda L_1) - c_1 \lambda \text{senh}(\lambda L_1) & \lambda^2 \text{senh}(\lambda L_1) - c_1 \lambda \cosh(\lambda L_1) \\
 \lambda^3 \text{sen}(\lambda L_1) - c_2 \cos(\lambda L_1) & -\lambda^3 \cos(\lambda L_1) - c_2 \text{sen}(\lambda L_1) & \lambda^3 \text{senh}(\lambda L_1) - c_2 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^3 \cosh(\lambda L_1) - c_2 \lambda \text{senh}(\lambda L_1) \\
 \cos(\lambda L) & \text{sen}(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \text{senh}(\lambda L) \\
 \lambda^2 \cos(\lambda L_1) + c_3 \text{sen}(\lambda L_1) & \lambda^2 \cos(\lambda L_1) + c_3 \text{senh}(\lambda L_1) & \lambda^2 \text{senh}(\lambda L_1) + c_3 \cosh(\lambda L_1) & \lambda^2 \text{senh}(\lambda L_1) + c_3 \cosh(\lambda L_1)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \alpha_1 \\
 \alpha_2 \\
 \alpha_3 \\
 \alpha_4 \\
 \alpha_5 \\
 \alpha_6 \\
 \alpha_7 \\
 \alpha_8
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

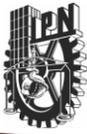
Ec. 3. 25

Esta matriz es la que se utilizara para la solución por medio de MATLAB en caso de que se tenga un disco.

Las variables  $C_1(p)$  y  $C_2(p)$  están en función de la frecuencia temporal  $p$ . Esta frecuencia depende directamente de la frecuencia espacial  $\lambda$ , mediante la ecuación (2.19). Hay que sustituirla en la matriz para que solo nos quede todo en función de alguna de las dos frecuencias ya sea la espacial o la temporal. Lo más simple sería sustituir la frecuencia temporal, ya que aparece pocas veces, al contrario de la frecuencia espacial que aparece en cada término trigonométrico o hiperbólico. Sin embargo, a continuación se obtendrá una matriz en función de  $p$ .

Otra cuestión a considerar serán los parámetros de la viga, como lo son: el módulo de Young, momento de inercia, densidad del material, área de sección transversal, además de la longitud de la viga y las características geométricas del disco.





### 3.4 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALORES CARACTERÍSTICOS PARA LA VIGA FORMADA POR DOS ELEMENTOS Y UN DISCO EN EL CENTRO

El sistema de ecuaciones anterior se complica aún más comparándolo con el modelo cuando solo tenemos las condiciones para unir dos vigas sin presencia de disco, esto es provocado por los efectos producidos por el disco (efectos rotacionales y traslacionales debido a la masa). La metodología es la misma que se ha utilizado hasta el momento, solo hay que tener presente que existen mayor número de incógnitas.

Lo primero será encontrar el valor de la frecuencia natural temporal ( $p$ ) mediante la obtención del determinante de la matriz resultante de la sustitución de las condiciones frontera, esta solución se encuentra de manera numérica por medio de la aplicación de un programa realizado en Matlab (Anexo C). Para posteriormente encontrar la frecuencia espacial  $\lambda$  y su correspondiente vector propio.

### 3.5 FRECUENCIAS NATURALES PARA DIFERENTES MASAS DEL DISCO

La presencia de un disco en la unión de dos elementos viga nos conduce a una disminución en el valor de las frecuencias naturales, esto por el simple hecho de la adición de masa al sistema. Como se mencionó con anterioridad con la ayuda de Matlab se realizó un programa que nos permite encontrar los valores del determinante cuando este vale cero. A continuación se muestra la gráfica obtenida por dicho programa y los valores correspondientes para cada forma modal.

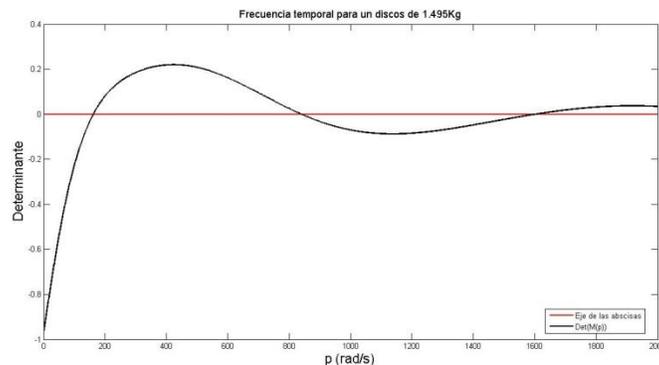
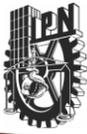


fig. 3. 3 Determinante de la matriz del sistema para una masa de 1.495 Kg.





En la siguiente tabla se muestran los valores de la frecuencia temporal ( $p$ ) para la viga formada por dos elementos y con presencia de un disco en la unión de dichos elementos.

	<b>Modo 1</b>	<b>Modo 2</b>	<b>Modo 3</b>
$P_{masa=0}$	<b>302.9658</b>	<b>1013.1519</b>	<b>2172.8396</b>
$P_{masa=1.495kg}$	<b>161.9899</b>	<b>839.6942</b>	<b>1602.401</b>
$P_{masa=2.99kg}$	<b>110.3996</b>	<b>694.7725</b>	<b>1509.3899</b>

**Tabla 4 Valores de frecuencias naturales temporales para diferentes masas de disco en rad/s**

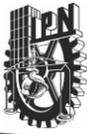
Una vez que se han obtenido las frecuencias naturales temporales para cada forma modal, ahora se puede calcular el valor de  $\lambda$  correspondiente para cada una de dichas formas modales, a continuación se muestran los valores de  $\lambda$  para los casos mostrados anteriormente:

Cabe mencionar que los resultados que a continuación se presentan fueron obtenidos mediante la siguiente ecuación:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho A p^2 - icp}{EI}}$$

Ec. 3. 26





	<b>Modo 1</b>	<b>Modo 2</b>	<b>Modo 3</b>	<b>Modo 4</b>
$\lambda_{masa=0}$	<b>3.1416</b>	<b>6.2831</b>	<b>9.4248</b>	<b>12.5665</b>
$\lambda_{masa=1.495kg}$	<b>2.5423</b>	<b>6.2293</b>	<b>8.3813</b>	<b>12.1120</b>
$\lambda_{masa=2.99kg}$	<b>2.8213</b>	<b>6.2453</b>	<b>8.65</b>	<b>12.3367</b>

**Tabla 5 Valores de frecuencia natura espacial para diferentes masas de disco**

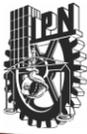
El paso siguiente será obtener los vectores propios es decir los valores correspondientes a las  $\alpha$ 's para lo cual nos apoyaremos de un programa realizado en Matlab (Anexo D), los resultados de los cuatro primeros modos son los siguientes:

Se muestra el resultado obtenido para el caso que se tiene un disco de masa de 1.495Kg.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -0.17431279401228 \\ -0.66364250336521 \\ 0.68378314474591 \\ 1.81063059665489 \\ -1.99081639253206 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -0.19868382155893 \\ 0.139641456783300 \\ 0.85051622373423 \\ 2.40635460059485 \\ -2.40398508462768 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.00262648433724 \\ 0.89116230776211 \\ 0.88401647685890 \\ 32.0846916972649 \\ -32.085377322455 \end{pmatrix}$$

Ec. 3. 27





### 3.5.1 GRAFICA DE FORMAS MODALES PARA DIFERENTES MASAS DE DISCO

Con los valores y vectores propios obtenidos anteriormente es posible obtener las gráficas de las formas modales, para cada caso a continuación se muestran estas:

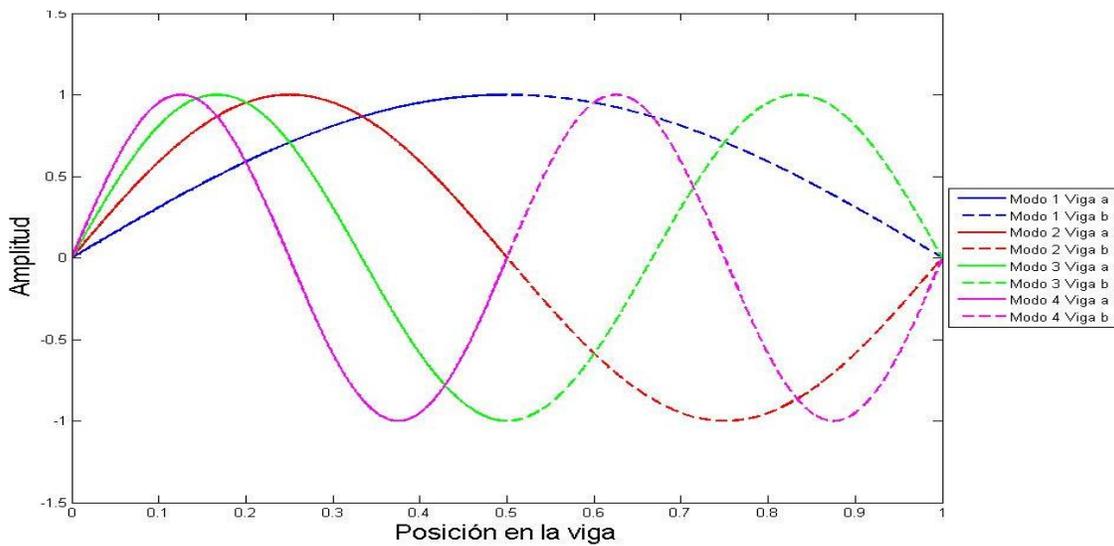


fig 3. 5 Modos de vibración Para una viga sin masa de disco

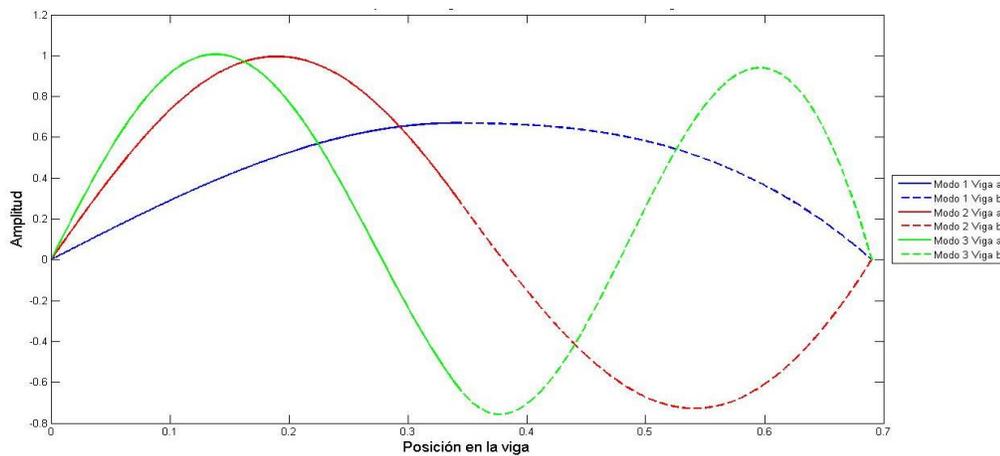


fig 3. 6 Modos de vibración para una masa de disco=1.495 Kg.



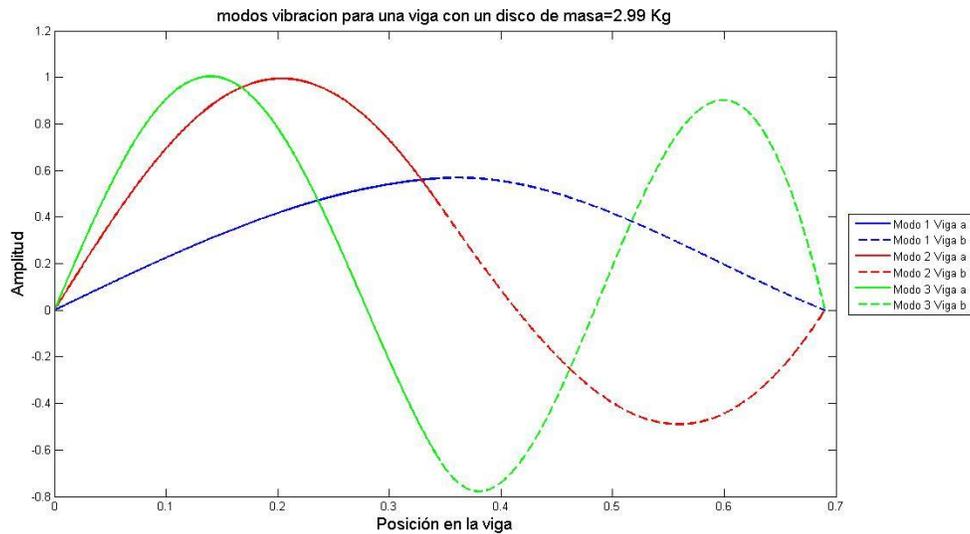
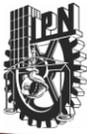


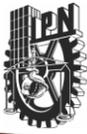
fig 3. 7 Modos de vibración para una masa de disco= 2.99 Kg.

### 3.6 ANALISIS DE FRECUENCIAS NATURALES

Masa del disco Kg	1x	2x	3x
m=0	302.9658	1013.1519	2172.8396
m=1.495	161.9898	839.694	1602.4011
m=2.99	110.3996	694.7725	1509.3899

Como se puede observar el efecto de la masa del disco nos provoca una disminución de la frecuencia natural, esto se ve mas reflejado en la primera frecuencia temporal del sistema esto debido a que la masa del disco es la dominante para dicha frecuencia. En la segunda frecuencia el cambio ya no es demasiado como en la anterior frecuencia ya que el segundo modo de vibración sin importar la masa que sea los efectos que nos provocan esta variación son provocados por la inercia rotatoria del disco, si estos fueran despreciados la frecuencia no tendría cambios siempre seria casi la misma sin importar la masa que este contenida en el disco.





Y por último la tercera frecuencia natural, esta sufre cambios porque a diferencia de la anterior (que es una forma modal anti simétrica) la masa del disco juega un papel importante, similar al de la primera frecuencia, donde los efectos de la masa tienen un gran efecto.

En la gráfica siguiente se muestra la variación de las cuatro primeras frecuencias naturales debido a la masa del disco para una viga modelada mediante dos elementos con un disco en el centro de estas. Se puede apreciar una tendencia de hacer cero el valor de la frecuencia 1x, la 2x no sufre un cambio drástico, y la 3x y 4x tienden a juntarse esto probablemente sucedería pero con valores de masa del disco que experimentalmente no sería posible realizar.

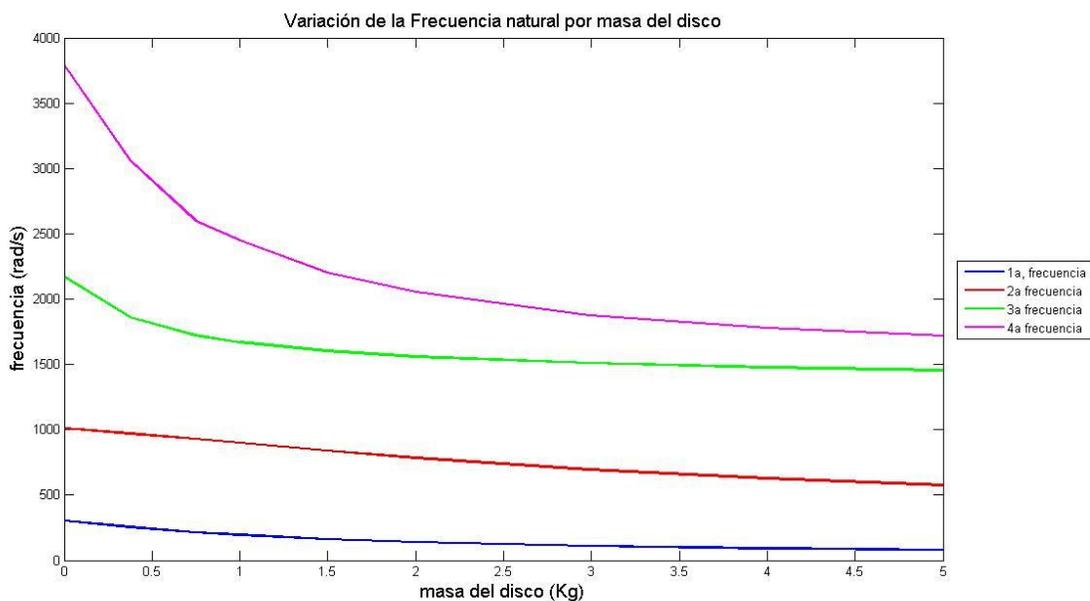
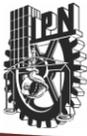


fig 3. 8 Efecto de la masa del disco en las frecuencias naturales para una viga

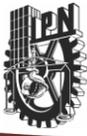




# Capítulo 4

**Desarrollo y solución de ecuaciones de movimiento Euler-Bernoulli con efecto de fisura.**





## 4.1 INTRODUCCION

En este capítulo se propone un método de solución para las ecuaciones diferenciales de la viga Euler-Bernoulli, las cuales describen el movimiento en dos direcciones ( $w$  y  $v$ ) respectivamente, debido a que son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de cuarto orden en desplazamiento y segundo orden en tiempo, se tendrá que utilizar el método de separación de variables, esto con la ayuda de los resultados obtenidos en el capítulo anterior (solución para dos elementos vigas con un disco al centro) que son la base para encontrar la nueva solución de las ecuaciones pero ahora teniendo en cuenta que estas presentan el efecto de la fisura.

Con el uso de un programa desarrollado en Matlab y la librería de Simulink, se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido, para así observar el comportamiento de la viga en dos direcciones.

## 4.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN DOS PLANOS

Utilizando la ecuación de la viga de Euler-Bernoulli para el caso de flexión, aplicándola para dos planos es decir considerar dos movimientos denotados por ( $w$  y  $v$ ) respectivamente, y a su vez teniendo presente que se les agregara el término que involucra un cambio de rigidez con el cual físicamente denotamos a la fisura

Por lo tanto obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para describir el movimiento en el plano longitudinal y transversal, en un caso donde no existe fisura, es decir el eje esta integro.

$$\begin{aligned}\rho A \ddot{w} + c w + EI_{\text{int}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 0 \\ \rho A \ddot{v} + c v + EI_{\text{int}} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} &= 0\end{aligned}$$

Ec. 4. 1



#### 4.2.1 MODELACIÓN DEL “RESPIRO” DE LA FISURA

Es sabido que el efecto de la fisura es provocar un cambio en la rigidez del sistema, y a su vez esto ocasiona que exista un fenómeno conocido como el “respiro” de la fisura.

Tales efectos producidos por la presencia de una fisura en un eje, requieren ser modelados por separado, para después ser introducidos en las ecuaciones (4.1) en el presente análisis se considera el efecto de la gravedad como el principal factor de apertura y cierre de la fisura.

Existen diferentes modelos propuestos por varios investigadores por ejemplo la función de respiro de Gash y la de Mayes y Davies por mencionar algunos de los modelos para simular este efecto de “respiro”. Una fisura es considerada como una variación periódica de la rigidez estructural del eje, la cual se expresa en función del tiempo.

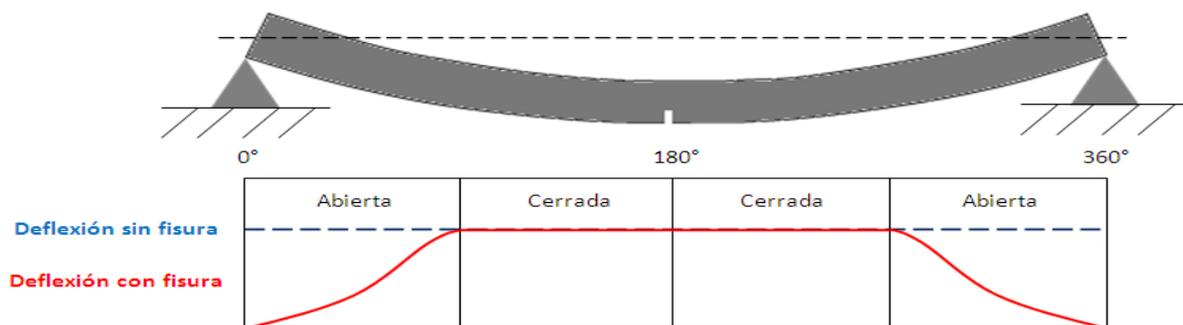
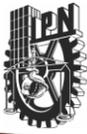


fig.4. 1 Mecanismo de apertura y cierre de la fisura

El modelo que utilizaremos en este trabajo es el realizado por Mayes y Davies, esta modelación sugiere un cambio suave entre la apertura y cierre de la fisura (fig. 4.1), y considera una función periódica de la posición angular de la grieta con respecto al vector de la gravedad.



El modelo desarrollado por Mayes y Davies está representado por la siguiente expresión:

$$g(\omega t) = \frac{1 + \cos(\omega t)}{2}$$

Ec. 4. 2

La función puede tomar valores entre cero y uno. El valor de uno nos indica que la fisura se encuentra abierta y valor de cero cuando esta se encuentra cerrada.

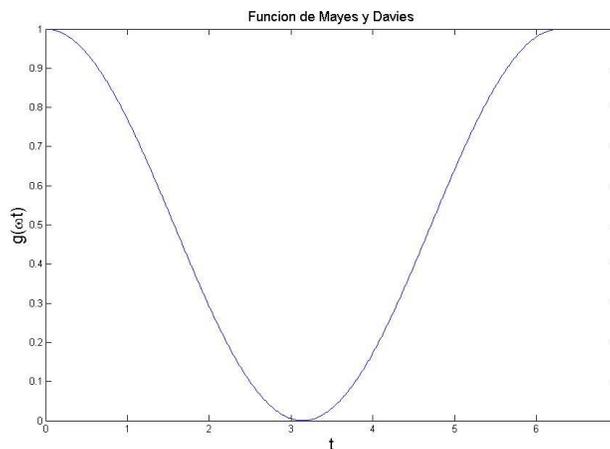
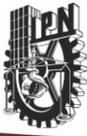


fig.4. 2 Grafica para la función de respiro de Mayes y Davies

#### 4.2.2 MODELACIÓN DEL ACOPLAMIENTO PROVOCADO POR LA FISURA

Debido a que estamos realizando un análisis utilizando dos planos y tenemos considerado que existe el efecto de la fisura, lo que nos trae como resultado de estos dos factores es que los movimientos en ambas direcciones ya no sean independientes es decir, hay un acoplamiento entre los movimientos por la interacción de la fisura en ambos planos.





Para expresar este acoplamiento es necesario introducir algunos términos en las ecuaciones (4.1) que provoquen tal efecto, el cual se logra por medio de una variación en la rigidez y un desfase entre estas variaciones, dado por las siguientes expresiones:

Para el plano  $w$

$$w(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos(2\omega t)) - v(\Delta k_2 \sin(2\omega t))$$

Ec. 4. 3

Para el plano  $v$

$$w(\Delta k_1 \sin(2\omega t - \pi)) + v(\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos(2\omega t - \pi))$$

Ec. 4. 4

Finalmente obtener las expresiones que regirán la modelación de la fisura en nuestro modelo, en base a la suma de los efectos causados por el “respiro” de la fisura y el acoplamiento provocado por dicha fisura.

Para el plano  $w$  se tienen los siguientes términos:

$$\frac{1}{2} g(\omega t) [w(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos(2\omega t)) - v\Delta k_2 \sin(2\omega t)]$$

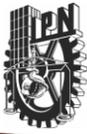
Ec. 4. 5

Para el plano  $v$  se tienen lo siguiente:

$$\frac{1}{2} g(\omega t) [w\Delta k_1 \sin(2\omega t - \pi) + v(\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos(2\omega t - \pi))]$$

Ec. 4. 6





El término  $\Delta k_1$  y  $\Delta k_2$  se encuentra en función de las características de la fisura como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \Delta K &= 0.1, 0.05, \dots & \Delta K &= \text{profundidad fisura} \\ \Delta k_1 &= k_i * \Delta K & k_i &= \text{Rigidez eje int egro} \\ \Delta k_2 &= \frac{\Delta k_1}{4} & \Delta k_1 &= \text{Cambio rigidez en plano } w \\ & & \Delta k_2 &= \text{Cambio rigidez en plano } v \end{aligned}$$

Ec. 4. 7

En los trabajos desarrollados en el laboratorio de vibraciones y rotodinámica se ha obtenido resultados de fisura correspondientes a un valor típico es  $\Delta k = 0.1$

Agregando los términos de los efectos de la fisura y desbalance a las ecuaciones (4.1) las expresiones obtenemos que rigen a nuestro sistema viga-fisura son las siguientes:

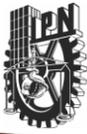
$$\begin{aligned} \rho A \ddot{w} + c \dot{w} + EI_f \frac{\partial^4(w)}{\partial x^4} - \frac{1}{2} g(\omega t) [w(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos(2\omega t)) - v \Delta k_2 \sin(2\omega t)] &= 0 \\ \rho A \ddot{v} + c \dot{v} + EI_f \frac{\partial^4(v)}{\partial x^4} - \frac{1}{2} g(\omega t) [w \Delta k_1 \sin(2\omega t) + v(\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos(2\omega t))] &= 0 \end{aligned}$$

Ec. 4. 8

### 4.3 SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO CON FISURA PARA DOS PLANOS

Una vez obtenido el sistema de ecuaciones el siguiente paso es resolverlas, esto se realizara mediante la aplicación del método que anteriormente hemos utilizado (separación de variables), la solución que ahora se propone está integrada por los resultados obtenidos en el capítulo anterior (solución para dos elementos viga con un disco al centro) dependiendo de la forma modal a analizar y otra función dependiente del tiempo.





$$w = W(x)T(t)$$

$$v = V(x)T(t)$$

$W_i(x)$  = Solucion obtenida para la  $i$  – esima forma mod al plano  $w$

$V_i(x)$  = Solucion obtenida para la  $i$  – esima forma mod al plano  $v$

$T_1(t)$  = Solucion dependiente del tiempo

$T_2(t)$  = Solucion dependiente del tiempo

Ec. 4. 9

Se procede a evaluar las derivadas correspondientes para poderlas sustituir en las ecuaciones de movimiento (4.8).

Evaluando la primera derivada con respecto al tiempo tenemos:

$$\dot{w} = \dot{T}_i(t) \cdot (\alpha_1 \cos(\lambda_i x) + \alpha_2 \text{sen}(\lambda_i x) + \alpha_3 \cosh(\lambda_i x) + \alpha_4 \text{senh}(\lambda_i x)) = \dot{T}_i(t)w$$

$$\dot{v} = \dot{T}_i(t) \cdot (\alpha_5 \cos(\lambda_i x) + \alpha_6 \text{sen}(\lambda_i x) + \alpha_7 \cosh(\lambda_i x) + \alpha_8 \text{senh}(\lambda_i x)) = \dot{T}_i(t)v$$

Ec. 4. 10

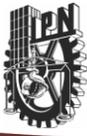
Y ahora para la segunda derivada con respecto al tiempo:

$$\ddot{w} = \ddot{T}_i(t) \cdot (\alpha_1 \cos(\lambda_i x) + \alpha_2 \text{sen}(\lambda_i x) + \alpha_3 \cosh(\lambda_i x) + \alpha_4 \text{senh}(\lambda_i x)) = \ddot{T}_i(t)w$$

$$\ddot{v} = \ddot{T}_i(t) \cdot (\alpha_5 \cos(\lambda_i x) + \alpha_6 \text{sen}(\lambda_i x) + \alpha_7 \cosh(\lambda_i x) + \alpha_8 \text{senh}(\lambda_i x)) = \ddot{T}_i(t)v$$

Ec. 4. 11





Por último la cuarta derivada con respecto al desplazamiento es:

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right|_x = T_1 \left( \frac{\partial^4 (\alpha_1 \cos(\lambda_1 x) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\lambda_1 x) + \alpha_3 \cosh(\lambda_1 x) + \alpha_4 \operatorname{senh}(\lambda_1 x))}{\partial x^4} \right) \Big|_x$$

$$\left. \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right|_x = T_2 \left( \frac{\partial^4 (\alpha_5 \cos(\lambda_1 x) + \alpha_6 \operatorname{sen}(\lambda_1 x) + \alpha_7 \cosh(\lambda_1 x) + \alpha_8 \operatorname{senh}(\lambda_1 x))}{\partial x^4} \right) \Big|_x$$

Ec. 4. 11

Simplificando tenemos:

$$\left. \frac{\partial^4 (w)}{\partial x^4} \right|_x = T_1 (\alpha_1 \lambda_1^4 \cos(\lambda_1 x) + \alpha_3 \lambda_1^4 \cosh(\lambda_1 x) + \alpha_2 \lambda_1^4 \operatorname{sen}(\lambda_1 x) + \alpha_4 \lambda_1^4 \operatorname{senh}(\lambda_1 x)) = T_1 \lambda^4 w$$

$$\left. \frac{\partial^4 (v)}{\partial x^4} \right|_x = T_2 (\alpha_5 \lambda_1^4 \cos(\lambda_1 x) + \alpha_7 \lambda_1^4 \cosh(\lambda_1 x) + \alpha_6 \lambda_1^4 \operatorname{sen}(\lambda_1 x) + \alpha_8 \lambda_1^4 \operatorname{senh}(\lambda_1 x)) = T_2 \lambda^4 v$$

Ec. 4. 12

Sustituyendo las derivadas anteriores (4.10), (4.11) y (4.13) y acomodando términos en las ecuaciones (4.8) tenemos:

$$\rho A \ddot{T}_1 W_i + c \dot{T}_1 W_i = -EI_f \lambda^4 T_1 W_i$$

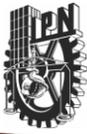
$$+ \frac{1}{2} g(\omega t) [T_1 W_i (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos(2\omega t)) - T_2 V_j (\Delta K_2 \sin(2\omega t))]$$

$$\rho A \ddot{T}_2 V_j + c \dot{T}_2 V_j = -EI_f \lambda^4 T_2 V_j$$

$$+ \frac{1}{2} g(\omega t) [T_1 W_i \Delta K_1 \sin(2\omega t) + T_2 V_j (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos(2\omega t))]$$

Ec. 4. 13





Despejando a  $T_1$  y  $T_2$  de las ecuaciones (4.14) obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_1 &= -\frac{c}{\rho A} \dot{T}_1 - \frac{EI_f}{\rho A} T_1 \lambda^4 + \frac{1}{2\rho A} g(\omega t) [T_1 (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos(2\omega t)) - \frac{T_2 v}{w} (\Delta K_2 \sin(2\omega t))] \\ \ddot{T}_2 &= -\frac{c}{\rho A} \dot{T}_2 - \frac{EI_f}{\rho A} T_2 \lambda^4 + \frac{1}{2\rho A} g(\omega t) [\frac{T_1 w}{v} \Delta K_1 \sin(2\omega t) + T_2 (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos(2\omega t))] \end{aligned}$$

Ec. 4. 14

Estas expresiones se encuentran ahora únicamente en función del desplazamiento, las cuales se transformaran en un el sistema de ecuaciones expresado en espacio de estados.

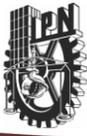
### 4.3.1 SISTEMA DE ECUACIONES EXPRESADO EN ESPACIO DE ESTADOS

Una vez habiendo sustituido la solución propuesta, para poder solucionar este sistema de ecuaciones es necesario transformar el sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en tiempo a un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden por medio de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= t_1 \\ T_2(t) &= t_2 \\ \dot{T}_1(t) &= t_3 \\ \dot{T}_2(t) &= t_4 \end{aligned}$$

Ec. 4. 15





Sustituyendo estas equivalencias en (4.15) finalmente el sistema de ecuaciones se convierte en un sistema de primer orden formado por cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{t}_1 &= t_3 \\ \dot{t}_2 &= t_4 \\ t_3 &= -\frac{c}{\rho A} t_3 - \frac{EI_f}{\rho A} t_1 \lambda^4 + \frac{1}{2\rho A} g(\omega t) \left[ t_1 (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos(2\omega t)) - \frac{t_2 v}{w} (\Delta K_2 \sin(2\omega t)) \right] \\ t_4 &= -\frac{c}{\rho A} t_4 - \frac{EI_f}{\rho A} t_2 \lambda^4 + \frac{1}{2\rho A} g(\omega t) \left[ \frac{w t_1}{v} \Delta K_1 \sin(2\omega t) + t_2 (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos(2\omega t)) \right] \end{aligned}$$

Ec. 4. 16

#### 4.4 FUNCION DE REALIZADA EN MATLAB PARA LA SOLUCION POR MEDIO DE SIMULINK

Este sistema de ecuaciones de 4 incógnitas y 4 ecuaciones es el que se resolverá con la ayuda de una función realizada en MATLAB y simulada en Simulink.

En Matlab se desarrolló una función (Anexo E) en la cual se escriben las ecuaciones de movimiento a resolver (Ec. 4.17), para posteriormente realizar en un programa de Simulink la solución de las ecuaciones antes mencionadas.

En las simulaciones realizadas se obtienen las zonas de inestabilidad esto provocado por la presencia de la fisura y para nuestro caso el efecto del amortiguamiento se debe despreciar esto porque se verá más adelante gráficamente como nos reduce el efecto de la inestabilidad y para algún valor de amortiguamiento critico esta zona de inestabilidad desaparece por completo, lo cual siempre nos daría un sistema estable, es decir no presenta el fenómeno de la fisura.



#### 4.4.1 DIAGRAMA DE BLOQUES EN SIMULINK

El siguiente diagrama de bloques realizado en Simulink representa el sistema de ecuaciones que estamos resolviendo por medio del método de solución de ecuaciones diferenciales **ODE45** y con condiciones iniciales de desplazamiento en ambas direcciones igual a:  $t_1 = 0.0001 m$  y  $t_2 = 0.0001 m$

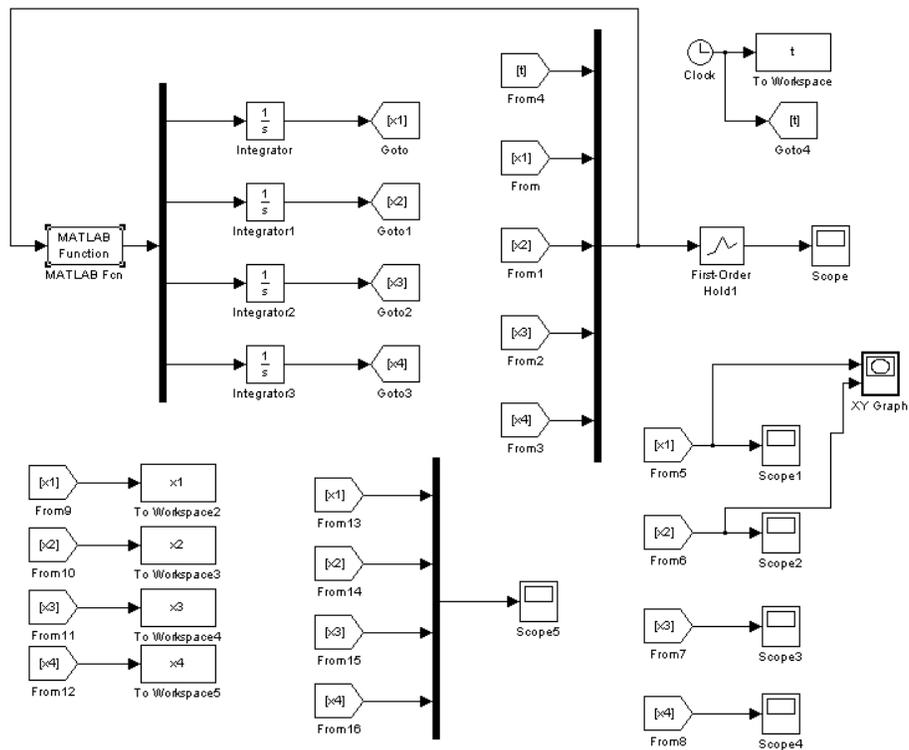
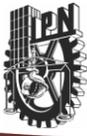


fig.4. 3 Diagrama de bloques empleado en Simulink



## 4.5 RESULTADO DE LAS SIMULACIONES

Teniendo en cuenta que la frecuencia natural de nuestro sistema es de 161.9899 rad/s las siguientes graficas son para la frecuencia  $0.5\omega_n$ , y  $\Delta K=0.1$ . Se puede ver la inestabilidad pero no tan marcada, esto porque la fisura no afecta demasiado al sistema.

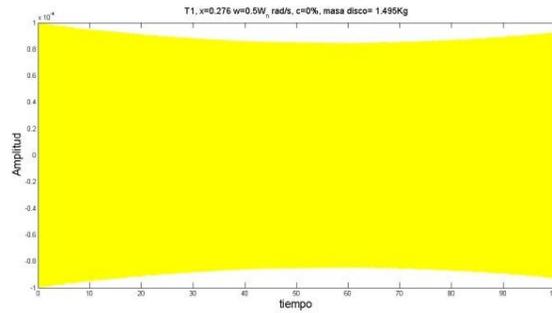


fig. 4.4 Desplazamiento del eje W,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.1$

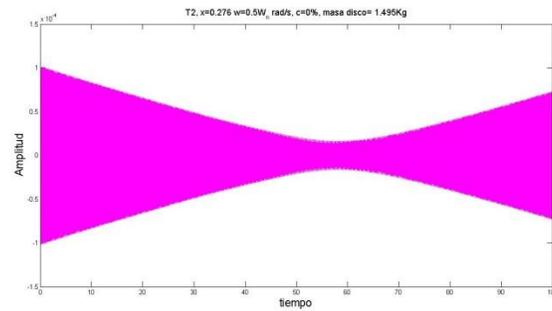


fig. 4.5 Movimiento del eje V,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.1$

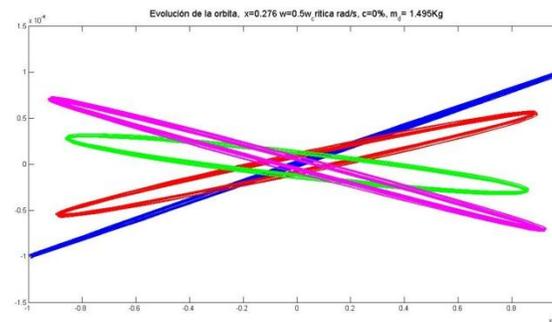
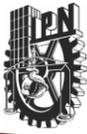


fig. 4.6 Evolución de la órbita,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.1$





Para la misma velocidad de  $0.5\omega_n$  pero con una fisura más grande  $\Delta K=0.25$  se observa mayor inestabilidad del sistema a diferencia del caso anterior, y este resultado es lo que se esperaba.

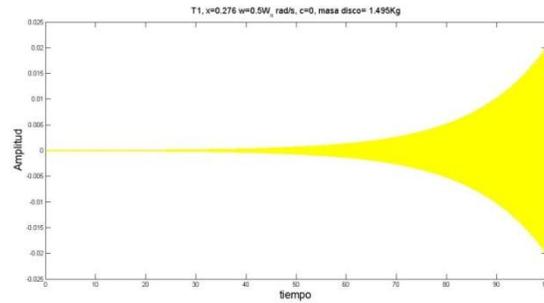


fig. 4 7 Desplazamiento del eje W,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.25$

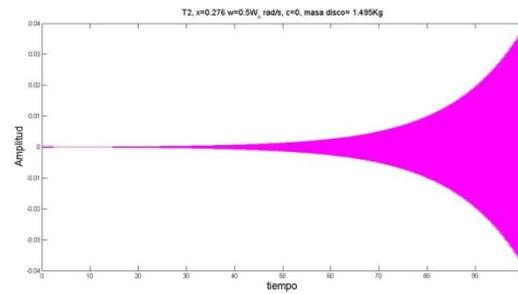


fig. 4 8 Desplazamiento del eje V,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.25$

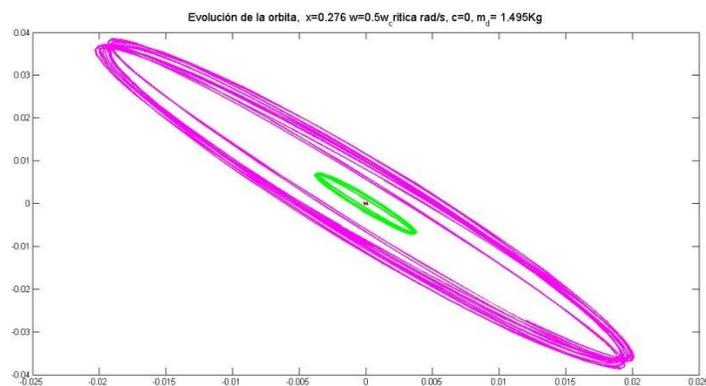
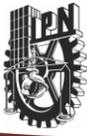


fig. 4 9 Evolución de la órbita,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=0$ ,  $\Delta k=0.25$





Ahora se verá que el efecto del amortiguamiento nos elimina la zona inestable para una  $0.5\omega_n$  y  $\Delta K=0.25$ .

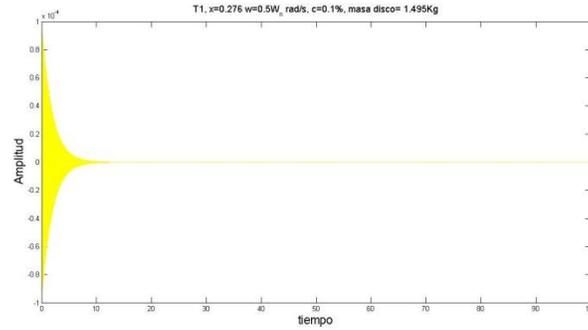


fig. 4 10 Desplazamiento del eje W,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=108/1000$ ,  $\Delta k=0.25$

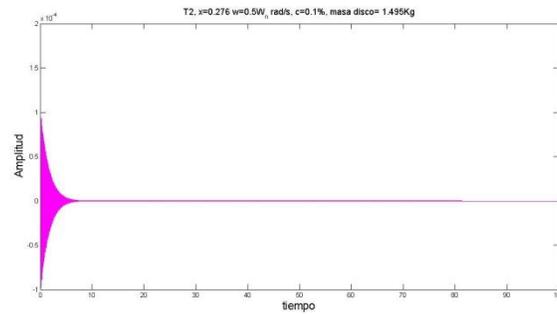


fig. 4 11 Desplazamiento del eje V,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=108/1000$ ,  $\Delta k=0.25$

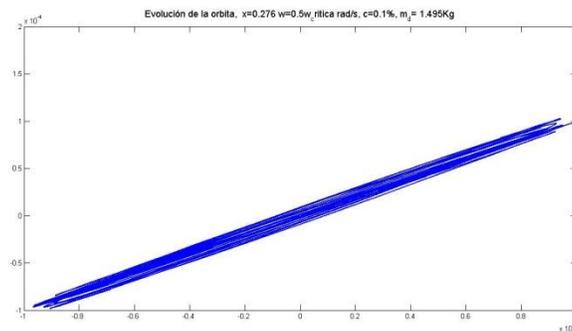
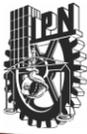


fig. 4 12 Evolución de la órbita,  $\omega=0.5\omega_n$ ,  $C=108/100$ ,  $\Delta k=0.25$





Simulando a una velocidad de  $\omega=\omega_n$  y a una profundidad de fisura  $\Delta K=0.1$ , se puede ver la inestabilidad

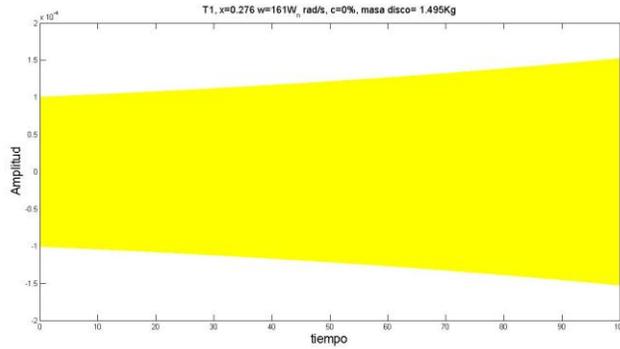


fig. 4 13 Desplazamiento del eje W,  $\omega=\omega_n$ , C=0,  $\Delta k=0.1$

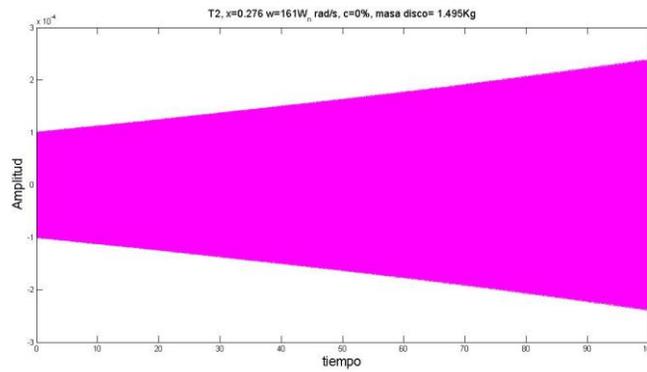


fig. 4 14 Desplazamiento del eje V,  $\omega=\omega_n$ , C=0,  $\Delta k=0.1$

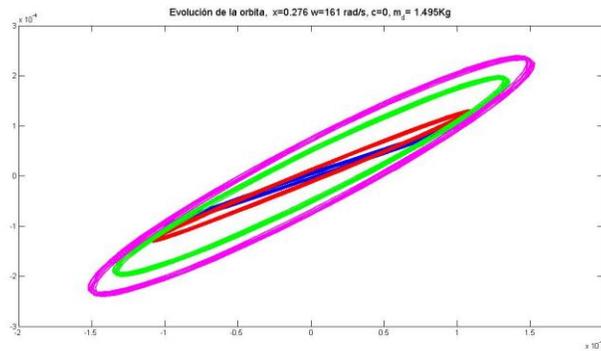
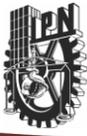


fig. 4 15 Evolución de la órbita,  $\omega=\omega_n$ , C=0,  $\Delta k=0.1$

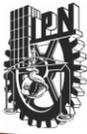




# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajos Futuros

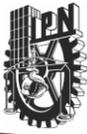




## 5.1 CONCLUSIONES

1. Se obtuvieron las tres primeras formas modales, para nuestro modelo compuesto por dos elementos viga, teniendo en cuenta la presencia de un disco entre los dos elementos y sus efectos, los resultados obtenidos fueron los esperados para las formas modales.
2. En cuanto a la modelación de la fisura, en las simulaciones se pudo observar que el sistema se vuelve inestable en la velocidad crítica y la  $1/2x$ . Esto dependiendo de la profundidad de la fisura, para poder observar los efectos inestables en frecuencias subsíncronas se debe tener una fisura relativamente grande y esto es una desventaja porque cuando se presentan fisuras considerables pueden llegar a ser accidentes considerables.
3. El termino de amortiguamiento es demasiado fuerte, hasta llegar al caso que la inestabilidad ocasionada por la fisura desaparece, sin importar que la fisura tenga dimensiones considerables.



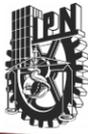


## 5.2 TRABAJOS FUTUROS.

Se vio que los resultados obtenidos para las formas modales tienen una gran influencia por los errores numéricos, esto debido a que la solución del sistema contiene potencias las cuales nos conducen a grandes errores, se tendrá que encontrar una forma de resolver el eigen problema que nos conduzca a una reducción de estos errores.

Encontrar una manera de simular la fisura considerando una formulación de la variación del momento de inercia, es decir se tendrá que utilizar la función de delta de Dirac para considerar exactamente el punto donde se encuentra ubicada la fisura, esto para obtener un modelo más apegado a lo real. Encontrar la forma de hacer que el sistema sea más sensible a la fisura, es decir que fisuras pequeñas puedan ser detectadas.

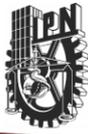




## REFERENCIAS

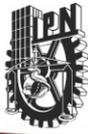
1. **Han, S.M., Benayora, H. et Wei, T.** 1995. Dynamics of transversely vibrating beams. Journal of Sound and Vibrations Vol. 225.
2. **Love, A-E-H.** 1927. Treatise on Mathematical theory of Elasticity. New York: Dover Publications.
3. **Timoshenko, S.P.** 1953. History of Strength of Materials. New York: Dover publications, Incorporations.
4. **Strutt, J. W.** 1877. Theory and Sound London: Mc Millan Publications Co, Incorporations.
5. **Davies, R. M.** 1937. The frequency of f transverse vibrations of a loaded fixed-free bar III. The effect of rotatory inertia of the bar. 563, S.L.: Philosophical magazine.
6. **Timoshenko, S.P.** 1921. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bar for uniforms cross-section: Philosophical magazine.
7. **Timoshenko, S.P.** 1922. On the transverse vibrations on bar son uniform cross section. 125. Philosophical magazine.
8. **Kruszewski, E. T.** 1909, 1949. Effects of transverse shear and rotary initial of the natural frequencies of a uniform beam. National Advisory Committee for Aeronautics.
9. **Traill-Nash, R.W. et Collar, A. R.** 1953. The effect of shear flexibility a rotatory inertia of the bending vibrations of beams. Quarterly Journal of Mechanics and applied Mathematics.
10. **Dolph, C.L.** 1954. On the Timoshenko theory of the transverse beam vibrations. Quarterly Journal of Mechanics and applied Mathematics.
11. **Huang, T.C.** 1961. The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and the normal mode equations of uniform beams with simple ends condition. Journal of applied mechanics.





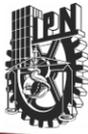
12. **Herrman, G.** 1955. Forced motion of Timoshenko beam theory. Journal of applied mechanics. Transactions of ASME 77.
13. **Dimarogonas, AD.** 1996. Vibration of crack structures: a state of the art review. Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55.
14. **Wauer, J.** 1990. On the dynamics of crack rotors: a literature survey. Applied mechanics Review. Vol. 43.
15. **Gash, R.** 1993. A survey of the dynamics behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack. Journal of Sound and Vibrations. Vol. 160.
16. **Papadopoulos, C.A. et Dimarogonas, A.D.** 1988. Stability of cracked rotors in a couple vibration mode. Journal of vibration Acoustics Stress and Reliability in Design-Transactions of ASME. Vol. 110.
17. **Huang, S.C., Huang, Y.M. et Shieh, S.M.** 1993. Vibration and stability of rotating shaft containing a transverse crack. Journal of Sound and vibration, Vol. 162.
18. **Lee, Y. et Chung, M.** 2000. A study of Crack Detection. Computers and Structures. Vol. 64.
19. **Lele, S.P. et Maiti, S.K.** 2002. Modeling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension. Journal of Sound and Vibration.
20. **Imam, I. Azzaro, S.H. et banker, R.J.** 1989. Development of an on-line rotor crack detection and monitoring system. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. Vol. 111.
21. **Seibold, S. et Weinert, K.** 1996. A time Domain method for the localization of cracks rotors. Journal of Sound and Vibration.
22. **Dong, G.M., Chen, J. et Zou, J.** 2004. Parameter Identification of a rotor with an open crack. European Journal of Mechanics. Vol. 23.
23. **Papadopoulos, C.A. et Dimarogonas, A.D.** 1987. Coupling of bending and torsional vibrations of a cracked Timoshenko shaft. Archive of Applied Mechanics. Vol. 57.





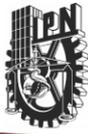
24. **Gounaris, G.D., Papadopoulos, C.A., et Dimarogonas, A.D.** 1996. Crack identification in beams in couple response measurements. Computers and Structures.
25. **Wauer, J.** 1990. Modeling and formulation of equations of motion for crack rotating shafts. International Journal of Solids and Structures.
26. **Yamamoto, Tshio and Ishida, Yukio.** 2001. Linear and Nonlinear Rotordynamics, A modern Treatment with Applications. New York: John Wiley & Sons.
27. **Ishida, Y. et Inoue, J.T.** 2006. Detection of a rotor crack using using and harmonic excitation and nonlinear vibration analysis. Journal of vibration and Acoustics, Transactions of the ASME. Vol. 128.
28. **Gómez Mancilla, J.C. et al.** 2004. The influence of crack imbalance orientation and orbital evolution for and extended cracked Jeffcott rotor. Comptes Rendus Mécanique. Vol. 332
29. **Nataraj Chandrasekhar.** 1984. The Simulation of Crack Shaft Dynamics. Master Degree Thesis, Arizona State University.
30. **Gash, R.** 1993. A survey of the Dynamics Behavior of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack. Journal of Sound and Vibration. Vol. 160.
31. **Nilsson, L.R.K.** 1982. On the vibration Behavior of a Crack Rotor. IFMTToMM. Interational Conference Rotordynamics problems in Power Plants. Rome, Italy.
32. **Dimarogonas, A.D., Papadopoulos, C.A.** 1983. Vibration of Cracked of Shafts in Bending. Journal of Sound and Vibration. Vol. 91
33. **Tamura, A.** 1988, Unstable Vibration of a Rotor with a transverse Crack. IMechE, Institution of Mechanical Engineers Conference Publication Vibration in Rotating Machinery. United Kingdom.
34. **Gash, R.** 1976. Dynamic Behavior of a Simple Rotor with a Cross Sectional Crack. IMechE, Institution of Mechanical Engineers Conference Publication Vibration in Rotating Machinery. London.





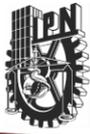
35. **Mayes, I.W., Davies W.G.R.** 1976. Analysis of a Response of a Multi-Root Bearing System Containing a Transverse Crack in a Rotor. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. Vol. 106.
36. **Meng, G., Gash, R.** 2000. Stability and Stability Degree of a Cracked Flexible Rotor Supported on a Journal Bearings. ASME, Journal of Vibration and Acoustics. Vol. 122.
37. **Penny, J.E., Friswell, M.I.** 2003. Simplified Modelling of a Rotor Cracks in the Coupled Vibrations. Key Engineering Materials. Vols. 245-246.
38. **Kucherenko, V.V et Gomez Mancilla, J.C.** 2000. Bifurcations of an Exactly solvable Model of Rotordynamics. International Journal of Bifurcation and Chaos. Vol. 10.
39. **Antonio García, A., Gómez Mancilla, J.C., et Nossov, V.R.** 2002. Calculo de la Velocidad Umbral de Estabilidad Utilizando Configuraciones del Modelo Jeffcott para Rotores de eje Rígido y Rotores de Eje Flexible.
40. **Gómez Mancilla, J.C., Nossov, V.R.** 2002. Perturbed Pressure Field Solution for Misaligned Short Journal Bearings. International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery. Honolulu, Hawaii.
41. **Ramírez Vargas, I., Nossov, V.R.** 2004. Modelo de una Chumacera Corta con la Puerta de Presurización Puntual. 8° Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas.
42. **Torres Cedillo, S.G.** 2010. Experimentación en el laboratorio y análisis del comportamiento del sistema chumacera híbrida presurizada con control activo. Tesis de Maestría. SEPI-ESIME, IPN.
43. **Gómez Mancilla, J.C. et al.** 2009. Model Derivation and Numerical Simulation for a Pivoted Rigid Rotor Bearing System. Applied Mechanics and Materials. Vol. 15.
44. **Domínguez-Vázquez A.,** Investigación de Chumaceras Híbridas Largas con Puertos Lineales de Presurización. México, Tesis de Maestría de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, U.P. Adolfo López Mateos, 2011.





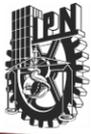
45. **Pacheco-Lara J.L.**, Diseño de Detalle, Instrumentación y Experimentación de Sistema Chumacera Híbrida. México, D.F. Tesis de Maestría de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, U.P. Adolfo López Mateos, 2011.
46. **Hernández-Salgado J.C.**, Validación Numérica del Amortiguamiento Crítico para el Tercer Modo de Vibración. México, D.F. Tesis de Maestría de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, U.P. Adolfo López Mateos, 2011.
47. **Balankin, A. et Gomez Mancilla, J.C.** 2000. Fractal Properties of Fracture Surfaces in Steel. International Journal of Fracture. Vol. 106.
48. **García Illescas, R.** 2001. Análisis de vibración para caracterizar el comportamiento de rotores operando en línea. Tesis de Maestría. SEPI-ESIME, IPN.
49. **Gómez Mancilla, J.C., García Illescas, R. et Nossov, V. R.** 2002. New Modeling Approach for detection and Behavioral Characterization of Cracked Rotating Shafts. Honolulu, Hawaii.
50. **Gómez Mancilla, J.C., García Illescas, R.** 2002. Vibrations Analysis in the Characterization on the Dynamic Behavior of a Cracked Rotating Shafts. Sydney, IFToMM.
51. **Gómez Mancilla, J.C., García Illescas, R.** Detection of Steady crack Growth on Rotating Shafts. Gdansk, Poland. ISCORMA-2.
52. **Gómez Mancilla, J. C. et al.** 2004. The Influence of Crack-imbalance Orientation and Orbital Evolution for and Extend Cracked Jeffcott Rotor. Comptes Rendus Mécanique. Vol. 332.
53. **Gómez Mancilla, J. C. et Zambrano Reyes, A.** 2005. A Local Resonance of Crack-imbalance Orientation and Orbital Evolution to Detect Rotor Cracks: Part 1, Numerical Analysis. Orlando: International Modal Analysis.
54. **Zambrano Reyes, A. et al.** 2004. La influencia de la Orientación de la Grieta y Desbalance y la Evolución Orbital para un Rotor Jeffcott Extendido Fisurado. 8° Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas.





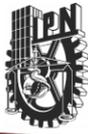
- 55. Gómez Mancilla, J. C. et Machorro López, J. M.** 2005. Local Resonance of Crack-Imbalance Orientation and Orbital Evolution to Detect Mid-span Rotor Cracks. Part 2. Experimental Validation. Orlando: International Modal Analysis.
- 56. Machorro López, J.M.** 2005. Experimentación y Validación de Modelos Dinámicos Para Detectar Fisuras En Ejes Rotatorios en maquinaria en Operación. Tesis de Maestría SEPI-ESIME, IPN.
- 57. Zambrano Reyes, A. et al.** 2004. Modelo del Rotor Jeffcott Extendido desbalanceado y Fisurado sobre Soportes Flexibles. 8° Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de sistemas.
- 58. Machorro López, J.M.** 2009. Desarrollo de Técnicas de Diagnóstico de Rotores Fisurados solo Monitoreando y Analizando su Dinámica. Tesis de Maestría, SEPI-ESIME, IPN.





# Anexos





## ANEXO A

### Resolución de un eigen problema y graficas de modos caso para una viga simplemente apoyada

En este apéndice se explicará cómo graficar los modos a partir de una solución calculada a mano. Después, en un segundo tiempo, se explicará en detalle como solucionar el eigen problema con MATLAB, y se graficarán las soluciones.

En la resolución a mano, los modos se determinaron como siendo las funciones siguientes:

$$W_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

En el caso  $L = 1$  ( $L$  longitud de la viga), se grafica de 0 a  $L = 1$ .

### Código de Matlab

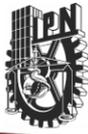
```
clc
clear all

%Definición de un vector de colores para las graficas
col=[0 0 0;0 0 1;0 1 0;1 0 0;0 1 1;1 0 1;1 1 0;0 0 0.5; ...
    0 0.5 0;0.5 0 0;0 0.5 0.5;0.5 0 0.5;0.5 0.5 0;0.5 0.5 0.5];

%Definición del vector posición
x=0:0.001:1;

%Gráfica de los 4 primeros modos
figure(1)
clf(1,'reset')
for i=1:4 %para 4 modos
    plot(x,sin(i*pi*x),'color',col(ceil(i+1),:))
        set(findobj(gca,'Type','Line'),'LineWidth',2)
    hold on
end
legend('Modo 1', 'Modo 2', 'Modo 3', 'Modo 4','Location','SouthWest')
axis([0 1 -1.1 1.1])
xlabel('Posición en la viga','FontSize',17)
ylabel('Amplitud','FontSize',17)
```





En la resolución numérica con MATLAB, la primera etapa es calcular el determinante de la matriz siguiente:

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ \cos(\lambda L) & \sin(\lambda L) & \cosh(\lambda L) & \sinh(\lambda L) \\ -\lambda^2 \cos(\lambda L) & -\lambda^2 \sin(\lambda L) & \lambda^2 \cosh(\lambda L) & \lambda^2 \sinh(\lambda L) \end{bmatrix}$$

## Código en Matlab

```
clear all

syms lambda x L

%Matriz del sistema de ecuaciones
M=[1 0 1 0;...
   -lambda^2 0 lambda^2 0;...
   cos(lambda*L) sin(lambda*L) cosh(lambda*L) sinh(lambda*L);...
   -lambda^2*cos(lambda*L) -lambda^2*sin(lambda*L)...
   lambda^2*cosh(lambda*L) lambda^2*sinh(lambda*L)]

%Cálculo del determinante
det(M)
```

El resultado siguiente aparece:

$$\det(M(\lambda)) = -4\lambda^4 \sin(\lambda L) \sinh(\lambda L)$$

En caso de que el determinante este muy simple, como aquí, se puede buscar a mano los valores de  $\lambda$  que lo hacen 0. En casos más complicados (la mayoría), se puede graficar el determinante en función de  $\lambda$  y buscar gráficamente para qué valores se hace 0. Es lo que se hará en el caso siguiente.

Una vez obtenidos los valores de  $\lambda$ , se aplica la metodología explicada en el capítulo correspondiente. El código Matlab a continuación resuelve el nuevo sistema de ecuaciones, y grafica los modos de vibración.

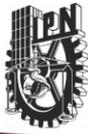
## Código en Matlab

```
clear all
clc

%Definición de un vector de colores para las graficas
col=[0 0 0;0 0 1;0 1 0;1 0 0;0 1 1;1 0 1;1 1 0;0 0 0.5; ...
     0 0.5 0;0.5 0 0;0 0.5 0.5;0.5 0 0.5;0.5 0.5 0;0.5 0.5 0.5];

syms lambda x %variables simbólicas
```





```

n=4; %Numero de modos a graficar

L=1; %Longitud de la viga

%Matriz simplificada del sistema a resolver
M=[1 1 0; -lambda^2 lambda^2 0;...
   cos(lambda*L) cosh(lambda*L) sinh(lambda*L)]

%Vector B, del otro lado del signo igual en la ecuación
B=-[0 ; 0; sin(lambda*L)]

%Frecuencias propias
lamb=pi/L:pi/L:n*pi/L;

%Resolucion del sistema para los 6 primeros modos
for i=1:n
    M1=subs(M,lambda,lamb(i)); %sustitucion de Lambda en la matriz
    B1=subs(B,lambda,lamb(i)); %sustitucion de Lambda en B
    Sol(:,i)=bicg(M1,B1,[],100); %Resolucion del sistema
    W(i)=Sol(1,i)*cos(lamb(i)*x)+sin(lamb(i)*x)+...
        Sol(2,i)*cosh(lamb(i)*x)+Sol(3,i)*sinh(lamb(i)*x); %Solucion espacial
end

%Vector espacial para las graficas
vecx=0:0.001:1;

%Gráfica de los n primeros modos
figure(1)
clf(1,'reset')
for i=1:n
    plot(vecx,subs(W(i),x,vecx),'Color',col(ceil(i+1),:))
    set(findobj(gca,'Type','Line'),'LineWidth',2)
    hold on
end
legend('Modo 1', 'Modo 2', 'Modo 3', 'Modo 4', 'Modo 5', 'Modo 6',...
       'Modo 7', 'Modo 8', 'Modo 9', 'Modo 10','Location','SouthWest')
axis([0 1 -1.1 1.1])
xlabel('Posición en la viga','FontSize',17)
ylabel('Amplitud','FontSize',17)

```

Los vectores propios aparecen en la variable **Sol**. Esta variable es una matriz, sus  $i$  columnas siendo los  $i$  vectores propios  $A^i$ .

**Sol =**

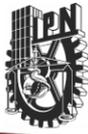
**1.0e-016 \***

**0 0 0 0**

**0 0 0 0**

**-0.1060 0.0091 -0.0006 0.0000**





## ANEXO B

### Resolución de un eigen problema y graficas de modos Caso de una viga simplemente apoyada, formada de dos elementos sin disco.

La metodología sigue siendo la misma que en los apéndices anteriores. En una primera parte se calcula el determinante de la matriz del sistema de dos vigas conectadas, formando una entera, simplemente apoyada.

En una segunda parte, utilizando los valores de  $\lambda$  que hacen el determinante 0, se calculan los vectores propios y se grafican los modos.

#### Código de Matlab

Calculo del determinante:

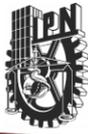
```
clc
clear all

syms lambda x L L1

%Matriz del sistema de ecuaciones
M=[0 0 cos(lambda*L) sin(lambda*L) cosh(lambda*L) sinh(lambda*L);...
  0 0 -lambda^2*cos(lambda*L) -lambda^2*sin(lambda*L)...
  lambda^2*cosh(lambda*L) lambda^2*sinh(lambda*L);...
  -sin(lambda*L1) -sinh(lambda*L1) cos(lambda*L1) sin(lambda*L1)...
  cosh(lambda*L1) sinh(lambda*L1);...
  -lambda*cos(lambda*L1) -lambda*cosh(lambda*L1)...
  -lambda*sin(lambda*L1) lambda*cos(lambda*L1) lambda*sinh(lambda*L1)...
  lambda*cosh(lambda*L1);...
  lambda^2*sin(lambda*L1) -lambda^2*sinh(lambda*L1)...
  -lambda^2*cos(lambda*L1) -lambda^2*sin(lambda*L1)...
  lambda^2*cosh(lambda*L1) lambda^2*sinh(lambda*L1);...
  lambda^3*cos(lambda*L1) -lambda^3*cosh(lambda*L1)...
  lambda^3*sin(lambda*L1) -lambda^3*cos(lambda*L1)...
  lambda^3*sinh(lambda*L1) lambda^3*cosh(lambda*L1)]

%Cálculo del determinante
S=simplify(det(M))
```





## Calculo de vectores propios y grafica de los modos de vibración

```
clc
clear all

%Definición de un vector de colores para las graficas
col=[0 0 0;0 0 1;0 1 0;1 0 0;0 1 1;1 0 1;1 1 0;0 0 0.5; ...
    0 0.5 0;0.5 0 0;0 0.5 0.5;0.5 0 0.5;0.5 0.5 0;0.5 0.5 0.5];

syms lambda x L1 %variables simbólicas

n=6; %Numero de modos a graficar (1<=n<=6)

L=1; %Longitud de la viga
L1=L/2; %Longitud de la primera viga

%Matriz del sistema de ecuaciones
M=[-sinh(lambda*L1) cos(lambda*L1) sin(lambda*L1) cosh(lambda*L1)...
    sinh(lambda*L1);...
    -lambda*cosh(lambda*L1) -lambda*sin(lambda*L1) lambda*cos(lambda*L1)...
    lambda*sinh(lambda*L1) lambda*cosh(lambda*L1);...
    -lambda^2*sinh(lambda*L1) -lambda^2*cos(lambda*L1)...
    -lambda^2*sin(lambda*L1) lambda^2*cosh(lambda*L1)...
    lambda^2*sinh(lambda*L1);...
    0 cos(lambda*L) sin(lambda*L) cosh(lambda*L) sinh(lambda*L);...
    0 -lambda^2*cos(lambda*L) -lambda^2*sin(lambda*L)...
    lambda^2*cosh(lambda*L) lambda^2*sinh(lambda*L)]

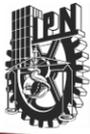
%Vector B, del otro lado del signo igual en la ecuación
B=-[-sin(lambda*L1) ;-lambda*cos(lambda*L1); lambda^2*sin(lambda*L1);0; 0]

%Frecuencias propias
lamb=pi/L:pi/L:n*pi/L; %Valores de frecuencias naturales espaciales

%Solución del sistema para los n primeros modos
for i=1:n
    M1=subs(M,lambda,lamb(i)); %sustitución de Lambda en la matriz
    B1=subs(B,lambda,lamb(i)); %sustitución de Lambda en B
    Sol(:,i)=bicg(M1,B1,[],100); %Solución del sistema
    %Solución espacial viga a
    Wa(i)=sin(lamb(i)*x)+Sol(1,i)*sinh(lamb(i)*x);
    %Solución espacial viga b
    Wb(i)=Sol(2,i)*cos(lamb(i)*x)+Sol(3,i)*sin(lamb(i)*x)+...
        Sol(4,i)*cosh(lamb(i)*x)+Sol(5,i)*sinh(lamb(i)*x);
end

%Vectores espacial para las gráficas
vecx1=0:L1/1000:L1;
vecx2=L1:(L-L1)/1000:L;
```

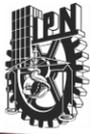




%Gráfica de los n primeros modos

```
figure(1)
clf(1,'reset')
for i=1:n
    plot(vecx1,subs(Wa(i),x,vecx1),'Color',col(ceil(i+1),:))
    hold on
    plot(vecx2,subs(Wb(i),x,vecx2),'Color',col(ceil(i+1),:),'LineStyle','--')
end
set(findobj(gca,'Type','Line'),'LineWidth',2)
legend('Modo 1 Viga a', 'Modo 1 Viga b', 'Modo 2 Viga a', ...
    'Modo 2 Viga b', 'Modo 3 Viga a', 'Modo 3 Viga b', 'Modo 4 Viga a', ...
    'Modo 4 Viga b', 'Modo 5 Viga a', 'Modo 5 Viga b', 'Modo 6 Viga a', ...
    'Modo 6 Viga b', 'Location','EastOutside')
xlabel('Posición en la viga','FontSize',17)
ylabel('Amplitud','FontSize',17)
```





## ANEXO C

**Resolución de un eigen problema para una viga simplemente apoyada, formada de dos elementos con un disco entre los elementos viga.**

### Código de Matlab

Cálculo del determinante:

```
clc
clear all

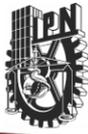
syms lambda p L L1 c1 c2

E=210e9; %Módulo de Young del acero del eje, en Pascales
r=6.35e-3; %Radio del eje, en metros
I=pi*r^4/4; %Momento de inercia del eje en m^4
m=1.495*1; %Masa del disco, en kg
Meje=0.895; %Masa del eje, en Kg
rd=0.0635; %Radio del disco, en metros
J=(0.5*m*rd^2); %Momento de inercia para el disco,
l=0.69; %longitud de la viga entre apoyos en metros.
ltot=0.915; % longitud total del eje en metros
lspam=0.69; % longitud efectiva en metros
l1=1/2*l; %Longitud de las dos vigas,
rho=7920*(1+(1.55*(lspam/ltot))); %Densidad equivalente del acero en kg/m^3
A=pi*r^2; %Área de la sección transversal del eje, en m^2
c=0; %Amortiguamiento

beta=0.06;%Factor de variación de rigidez por efecto de rodamientos
deltaK=16714.54;%Rigidez agregada por efecto de los valeros
c3=(beta*deltaK)/(E*I);

%Variables que dependen de p
c1=(-J*p^2)/(E*I);
c2=(m*p^2)/(E*I);
```





```
%Matriz del sistema de ecuaciones
M=[1 0 1 0 0 0 0 0;...
-lambda^2 -lambda*c3 lambda^2 -lambda*c3 0 0 0 0;...
-cos(lambda*L1) -sin(lambda*L1) -cosh(lambda*L1) -sinh(lambda*L1)...
cos(lambda*L1) sin(lambda*L1) cosh(lambda*L1) sinh(lambda*L1);...
lambda*sin(lambda*L1) -lambda*cos(lambda*L1) -lambda*sinh(lambda*L1)...
-lambda*cosh(lambda*L1) -lambda*sin(lambda*L1) lambda*cos(lambda*L1)...
lambda*sinh(lambda*L1) lambda*cosh(lambda*L1);...
lambda^2*cos(lambda*L1)+c1*lambda*sin(lambda*L1)...
lambda^2*sin(lambda*L1)-c1*lambda*cos(lambda*L1)...
-lambda^2*cosh(lambda*L1)-c1*lambda*sinh(lambda*L1)...
-lambda^2*sinh(lambda*L1)-c1*lambda*cosh(lambda*L1)...
-lambda^2*cos(lambda*L1) -lambda^2*sin(lambda*L1)...
lambda^2*cosh(lambda*L1) lambda^2*sinh(lambda*L1);...
-lambda^3*sin(lambda*L1)-c2*cos(lambda*L1)...
lambda^3*cos(lambda*L1)-c2*sin(lambda*L1)...
-lambda^3*sinh(lambda*L1)-c2*cosh(lambda*L1)...
-lambda^3*cosh(lambda*L1)-c2*sinh(lambda*L1)...
lambda^3*sin(lambda*L1) -lambda^3*cos(lambda*L1)...
lambda^3*sinh(lambda*L1) lambda^3*cosh(lambda*L1);...
0 0 0 0 cos(lambda*L) sin(lambda*L) cosh(lambda*L) sinh(lambda*L);...
0 0 0 0 -lambda^2*cos(lambda*L)+c3*lambda*sin(lambda*L) -
lambda^2*sin(lambda*L)+c3*lambda*cos(lambda*L)...
lambda^2*cosh(lambda*L)+c3*lambda*sinh(lambda*L)
lambda^2*sinh(lambda*L)+c3*lambda*cosh(lambda*L)];

%Cálculo del determinante
D=simplify(det(M))/(50*lambda^11*sinh(lambda*L))

%Substitución de lambda en el determinante
Lambda=(rho*A*p^2-i*c*p)/(E*I)^(1/4);
D=subs(D,lambda,Lambda);

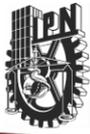
%Substitución de las otras variables
D=subs(D,{L,L1},{l,l1});

exR=2000; %rango de p real a graficar
exI=150i; %rango de p imaginario a graficar
max=2000; %número de puntos

%Gráfica del determinante parte real únicamente
preal=exR/max:exR/max:exR;

figure(6)
clf(6,'reset')
plot(preal,zeros(1,max),'r',preal,subs(D,p,preal),'k');
set(findobj(gca,'Type','Line'),'LineWidth',2)
xlabel('p (rad/s)','FontSize',17)
ylabel('Determinante','FontSize',17)
title(['Frecuencia temporal para un discos de 1.495Kg'],'FontSize',13)
legend('Eje de las abscisas',...
'Det(M(p))','Location','SouthEast')
```





## ANEXO D

### Formas modales para una viga simplemente apoyada, formada de dos elementos con un disco en el centro.

```

clc
clear all

syms lambda x L1 %variables simbólicas

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PRIMER MODO

n=1; %Número de modos a graficar (1<=n<=6)
p=64.7364; % Valor de la frecuencia temporal
E=210e9; %Módulo de Young del acero del eje, en Pascales
r=6.35e-3; %Radio del eje, en metros
I=pi*r^4/4; %Momento de inercia del eje
m=1.495*5; %Masa del disco
rd=0.063; %radio del disco
Ig=(0.5*m*rd^2); %Momento de inercia del disco
C1=(-Ig*p^2)/(E*I);
C2=(m*p^2)/(E*I);

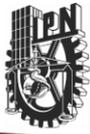
beta=0.06;
deltaK=16714.54;
C3=(beta*deltaK)/(E*I);

L=0.69; %Longitud de la viga
L1=L/2; %Longitud de la primera viga

%Matriz del sistema de ecuaciones
M=[ 1 1 0 0 0 0 0;
    -C3*lambda^2 -C3*lambda^2 0 0 0 0 0;
    -cos(lambda*L1) -cosh(lambda*L1) -sinh(lambda*L1) cos(lambda*L1)
sin(lambda*L1) cosh(lambda*L1) sinh(lambda*L1);
    lambda*sin(lambda*L1) -lambda*sinh(lambda*L1) -lambda*cosh(lambda*L1) -
lambda*sin(lambda*L1) lambda*cos(lambda*L1) lambda*sinh(lambda*L1)
lambda*cosh(lambda*L1);
    -lambda^2*cos(lambda*L1)+C1*lambda*sin(lambda*L1) -
lambda^2*cosh(lambda*L1)-C1*lambda*sinh(lambda*L1)
lambda^2*sinh(lambda*L1)-C1*lambda*cosh(lambda*L1) ...
    lambda^2*cos(lambda*L1)+C1*lambda*sin(lambda*L1) -
lambda^2*sin(lambda*L1)-C1*lambda*cos(lambda*L1) lambda^2*cosh(lambda*L1)-
C1*lambda*sinh(lambda*L1) ...
    lambda^2*sinh(lambda*L1)-C1*cosh(lambda*L1);
    lambda^3*sin(lambda*L1)-C2*cos(lambda*L1) lambda^3*sinh(lambda*L1)-
C2*cosh(lambda*L1) lambda^3*cosh(lambda*L1)-C2*sinh(lambda*L1) ...

```





```
lambda^3*sin(lambda*L1)-C2*cos(lambda*L1) -lambda^3*cos(lambda*L1)-
C2*sin(lambda*L1) lambda^3*sinh(lambda*L1)-C2*cosh(lambda*L1)...
lambda^3*cosh(lambda*L1)-C2*sinh(lambda*L1);
0 0 0 -lambda^2*cos(lambda*L)+C3*lambda*sin(lambda*L) -
lambda^2*sin(lambda*L)-C3*lambda*cos(lambda*L) lambda^2*cosh(lambda*L)-
C3*lambda*sinh(lambda*L) lambda^2*sinh(lambda*L)-C3*lambda*cosh(lambda*L)];

%Vector B, del otro lado del signo igual
B=-[0;0;-sin(lambda*L1);-lambda*cos(lambda*L1);lambda^2*sin(lambda*L1)-
C1*lambda*cos(lambda*L);lambda^3*cos(lambda*L1)+C2*sin(lambda*L1);0];

%Frecuencia espacial
lamb=(2.29003629121162); %Valores de frecuencias naturales espaciales

%Solución del sistema para los n primeros modos
for i=1:n
    M1=subs(M,lambda,lamb(i)); %sustitucion de Lambda en la matriz
    B1=subs(B,lambda,lamb(i)); %sustitucion de Lambda en B
    Sol(:,i)=bicg(M1,B1,[],500); %Resolucion del sistema
    %Solucion espacial viga a

Wa(i)=Sol(1,i)*cos(lamb(i)*x)+sin(lamb(i)*x)+Sol(2,i)*cosh(lamb(i)*x)+Sol(3
,i)*sinh(lamb(i)*x);
    %Solución espacial viga b

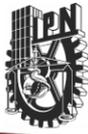
Wb(i)=Sol(4,i)*cos(lamb(i)*x)+Sol(5,i)*sin(lamb(i)*x)+Sol(6,i)*cosh(lamb(i)
*x)+Sol(7,i)*sinh(lamb(i)*x);
end

%Vectores espacial para las gráficas
vecx1=0:0.001:L1;
vecx2=L1:0.001:L;

%Gráfica de los n primeros modos
figure(1)

for i=1:n
    plot(vecx1,subs(Wa(i),x,vecx1))
    hold on
    plot(vecx2,subs(Wb(i),x,vecx2),'LineStyle','--')
end
set(findobj(gca,'Type','Line'),'LineWidth',2)
```





## ANEXO E

### Solución de las ecuaciones de movimiento con efecto de fisura mediante Simulink.

En MATLAB es posible desarrollar funciones, para poder utilizarla en la solución de Simulink.

```
function dx = Nuevo_dos03_mfs(t,x1,x2,x3,x4)
dx = zeros(4,1); % vector columna

x(1)=x1;
x(2)=x2;
x(3)=x3;
x(4)=x4;

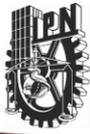
%% Características del eje
lspam=0.69; % longitud efectiva en metros
ltot=0.915; % longitud total del eje en metros
rho=7920*(1+(1.55*(lspam/ltot))); %Densidad en kg/m^3
E=210e9; %Modulo de Young del acero del eje, en Pascales
r=6.35e-3; %Radio del eje, en metros
A=pi*r^2; %Área de una sección transversal del eje
L=0.69;% longitud del eje
c=0;%108*(1/1000); %Amortiguamiento
omega=161; % Velocidad de Giro del eje rad/seg
H=0.4*L; %valor donde se avalúa la posición x
Iint=(pi*r^4)/4; % Momento de Inercia integro

%% Cambio de rigidez
deltaF=0.1;
Kint=(48*E*Iint)/L^3;%% Rigidez eje
deltaK1=deltaF*Kint; % Cambio de Rigidez plano x
deltaK2=deltaK1/4; % Cambio de Rigidez plano z

%% modificación por rigidez

beta=0.06; %% porcentaje de rigidez por rodamientos
deltak=16714.54; %% rigidez obtenida de experimentación
c3=deltak*beta;
```





```
%% dependiendo del modo
alfa1=0;
alfa2=1;
alfa3=0;
alfa4=-0.1743127940228;
alfa5=-0.6636425036521;
alfa6=0.6837831444591;
alfa7=1.8106305966489;
alfa8=-1.9908163925206;

lambda=3.62253058768319; %%frecuencia natural espacial

%% Definición de las Ecuaciones

W1=alfa1*cos(lambda*H)+alfa2*sin(lambda*H)+alfa3*cosh(lambda*H)+alfa4*sinh(
lambda*H);
V1=alfa5*cos(lambda*H)+alfa6*sin(lambda*H)+alfa7*cosh(lambda*H)+alfa8*sinh(
lambda*H);

G=(1+cos(omega*t))/2;

F1=c*x(3);
F2=(E*Iint)*(lambda^4*x(1));
F3=(1/2)*G*((x(1)*(deltaK1+deltaK2*cos(2*omega*t)))-
((x(2)*V1/W1)*deltaK2*sin(2*omega*t)));

F4=c*x(4);
F5=(E*Iint)*(lambda^4*x(2));
F6=(1/2)*G*((x(1)*W1/V1)*(deltaK1*sin(2*omega*t))+((x(2)*(deltaK1-
deltaK2*cos(2*omega*t)))));

dx(1)=x(3);
dx(2)=x(4);
dx(3)=(1/(rho*A))*(-F1-F2+F3);
dx(4)=(1/(rho*A))*(-F4-F5+F6);
```

