



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

*ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA*



UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"

SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

***ANÁLISIS DEL CREEP CON TEMPERATURA  
VARIABLE APLICANDO ELEMENTOS DE FRONTERA.***

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS**

EN LA ESPECIALIDAD DE

**INGENIERÍA MECÁNICA**

P R E S E N T A

**ING. EDGAR AVALOS GAUNA**

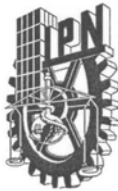
DIRECTORES DE TESIS

**DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA**

**DR. ERNESTO PINEDA LEON**

México D.F. 2011.





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14BIS

**ACTA DE REVISIÓN DE TESIS**

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 18:00 horas del día 3 del mes de Junio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis titulada:

**“ANÁLISIS DEL “CREEP” CON TEMPERATURA VARIABLE USANDO ELEMENTOS DE FRONTERA”.**

Presentada por el alumno:

**ÁVALOS**  
Apellido paterno

**GAUNA**  
Apellido materno

**EDGAR**  
Nombre (s)

Con registro: 

A	0	9	0	3	1	5
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

  
\_\_\_\_\_  
DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA

Presidente

  
\_\_\_\_\_  
DR. ERNESTO PINEDA LEÓN

Segundo Vocal

  
\_\_\_\_\_  
DR. ALEXANDER BALANKIN

Tercer Vocal

  
\_\_\_\_\_  
DR. ERNESTO PINEDA LEÓN

Secretario

  
\_\_\_\_\_  
DR. ALEJANDRO RODRÍGUEZ CASTELLANOS

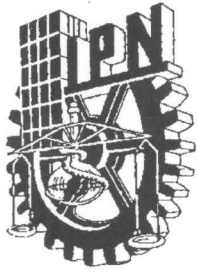
  
\_\_\_\_\_  
DR. ANDRIY KRYVKO

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

  
\_\_\_\_\_  
DR. JAIME ROBLES GARCÍA







**CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, Distrito Federal el día 03 del mes junio del año 2011, el que suscribe Edgar Avalos Gauna alumno de la Maestría en Ciencias en el Programa de posgrado en ingeniería mecánica con número de registro A090315, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME, Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Didier Samayoa Ochoa y Dr. Ernesto Pineda León y cede los derechos del trabajo intitulado Análisis del Creep con Temperatura Variable Aplicando Elementos de Frontera, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección electrónica [edgar.avalos.g@gmail.com](mailto:edgar.avalos.g@gmail.com).

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



# Agradecimientos

---

*Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo de muchas personas a las que me gustaría expresar mi gratitud hacia ellos.*

*Al **Dr. Didier Samayoa Ochoa** por aceptar ser mi profesor consejero durante mis estudios de maestría y haber dirigido esta tesis, además de compartir su tiempo, sus conocimientos y su amistad a lo largo de este periodo.*

*Al **Dr. Ernesto Pineda León** por compartir su tiempo y conocimientos en la parte final de la elaboración de este proyecto, así como sus experiencias profesionales, comentarios, revisiones y críticas para la elaboración de esta tesis.*

*A la Comisión Revisora conformada por: **Dr. Didier Samayoa Ochoa, Dr. Ernesto Pineda León, Dr. Alexander Balankin, Dr. Alejandro Rodríguez Castellanos, Dr. Andri Kryvko, Dr. Miguel Patiño Ortiz**, por la revisión y evaluación del presente trabajo.*

*A los **Profesores de la SEPI ESIME** por brindar en las horas de clase su conocimiento y darme la oportunidad de superarme en mis estudios, de entre los cuales me gustaría destacar al **Dr. Orlando Susarrey Huerta** del que no solamente recibí conocimiento si no también apoyo y tiempo valioso.*

*Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT** por la beca otorgada durante el tiempo de estudio con el registro CVU: 295877; así como al Instituto Politécnico Nacional por la beca PIFI.*

*Al **Instituto Politécnico Nacional** por haberme permitido estar utilizando sus instalaciones durante mi periodo de formación para este grado.*

*A quien le debo la mayor gratitud por la elaboración de este trabajo es a todas esas personas que siempre creyeron en mi y que son parte de mi familia: a mi madre **Amada B. Gauna***

**Ferreira**, a mi padre **Jaime Avalos Rangel**, a mi hermano **Jaime Avalos Gauna**, a mi hermana **Yesica B. Avalos Gauna** porque nunca dudaron de la culminación de este proyecto y siempre estuvieron a mi lado apoyándome en cada momento importante de mi vida, sin ellos no sería la persona que soy.

A una persona, que le debo más que solo gratitud, las palabras no alcanzan a explicar lo que siento por esta mujer, una persona digna de admiración y llena de virtudes, quien nunca dejo de apoyarme y siempre de alguna manera estuvo presente a lo largo de todo este proceso, y en general en casi todos los aspectos de mi vida, la maestra en dirección empresarial **Carolina Hernández Sabater**, te amo.

A mis amigos que me han acompañado en otras etapas de mi vida y con el paso del tiempo siguen aun presentes: **Pedro José Luis Pérez, Jonathan Galván, Erick Iggy Reyes, Sofía Herrera, Cristian Guzmán, Jonathan Torres, Melissa Ramos, Patricia Mejía, Emilio Domínguez, Joaquín Rojas, Joel Medina, Rosario Acosta, Isaac León.**

A mis amigos y compañeros de maestría **Juan Carlos Hernández, Juan Carlos Valdivia, Gabriel Reza, Francisco Hernández y todos mis compañeros que no fueron nombrados**, por haberme brindado su amistad, tiempo y compañerismo a lo largo de este trabajo.

A todas la personas que indirectamente aportaron algo para la elaboración de este trabajo y no hayan sido nombradas. "Es muy común recordar que alguien nos debe agradecimiento, pero es más común no pensar en quienes le debemos nuestra propia gratitud" (Johann Wolfgang Goethe).

Y finalmente me gustaría agradecer a todas aquellas personas que dudaron de este trabajo, "El hombre de talento es naturalmente inclinado a la crítica, porque ve más cosas que los otros hombres y las ve mejor" (Charles Louis de Secondat, "Montesquieu"), "Los grandes espíritus siempre han tenido que luchar contra la oposición feroz de mentes mediocres" (Albert Einstein).

**GRACIAS**

**Esta tesis está especialmente dedicada con  
mucho cariño a mi madre  
Amada Beatriz Gauna Ferreira,**

***Arekóva iñongatuhápe  
amo che anga ruguápe  
che sy ne mborayhumi,  
avave noĝuahēi hendápe  
ha pe kuarahy ratáicha  
ohesapéva ha omimbi.  
Aromandu'áne marangatu  
mombyry guive che symi porã,  
mbombe'upyrãmanteko ajuhu,  
nde rekovekue ysyry sakã.  
Kuña paraguái nde rekopete  
nde ndereikuaái jahéi, kane'õ,  
nde sýgui reru Residenta-kue  
ha che ne memby péina amono'õ.***

***Rojaiju eterei.***

*Lo tengo guardado  
allá en el fondo de mi alma  
tu amor madrecita,  
nadie llega hasta ello  
y es como el fuego del Sol  
que alumbra y titila.  
He de recordarte divina  
desde lejos mi linda madrecita  
encuentro cosas para contarlo  
tu vida como arroyo cristalino.  
Con tu espíritu de mujer paraguaya  
no conoces el dolor, el cansancio  
de tu madre has traído como ex-Residenta  
y yo hijo tuyo aquí lo recojo.*

**Esta tesis está dedicada a una persona  
que siempre encauzo mi trabajo para  
ser una persona de respeto, a mí  
padre Jaime Avalos Rangel,**

*Un padre es un hombre que espera que sus hijos  
sean tan buenos como él hubiera querido ser.*

*Cualquiera puede ser padre; pero  
sólo un hombre de verdad puede ser papá.*

**Esta tesis está dedicada con cariño a  
mis 2 hermanos Jaime y Yesica**

**A mi tío Amado Oscar Gauna Ferreira†**

*El alma del hombre es como el agua. Viene del  
cielo, se eleva hacia el cielo y vuelve después  
a la tierra, en un eterno ciclo.*

Johann Wolfgang Goethe



# CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS.....	X
Resumen.....	1
Abstract.....	4
Objetivos.....	6
Metas.....	6
Alcances.....	7
Introducción.....	8
<b>CAPITULO 1 MATEMÁTICAS PRELIMINARES .....</b>	<b>9</b>
1.1 Introducción.....	9
1.1.1 Método de diferencias finitas.....	11
1.1.2 Método de elemento finito.....	11
1.1.3 Método de elemento de frontera.....	12
1.2 Teorema de Gauss- Green.....	13
1.3 Teorema de la divergencia.....	17
1.4 Segunda identidad de Green.....	18
1.5 Función delta de Dirac.....	20
<b>CAPÍTULO 2 MECÁNICA DE SOLIDOS .....</b>	<b>23</b>

2.1 Notación índice.....	24
2.2 Convención de la sumatoria.....	26
2.3 Delta de Kronecker.....	26
2.4 Símbolo de permutación.....	28
2.5 Elasticidad.....	30
2.5.1 Significado Físico del Módulo de Young.....	31
2.5.2 Relación de Poisson.....	31
2.5.3 Módulo de Rigidez.....	32
2.6 Tensores cartesianos.....	32
2.7 Deformación.....	34
2.8 Tracción, esfuerzos y equilibrios.....	37
2.9 Leyes de esfuerzo-deformación.....	38
<b>CAPÍTULO 3 FORMULACIÓN DE FRONTERA EN MECÁNICA DE SÓLIDOS.....</b>	<b>42</b>
3.1 Ecuaciones de elasticidad de Navier.....	42
3.2 Vector de Galerkin.....	44
3.3 Problema de Kelvin.....	49
3.4 Formulación Integral.....	57
3.4.1 El principio del trabajo virtual.....	57

3.4.2 Teorema de reciprocidad.....	60
3.4.3 Identidad de Somigliana. ....	62
<b>CAPÍTULO 4 MÉTODO DE ELEMENTO DE FRONTERA.....</b>	<b>65</b>
4.1 Discretización de la formulación de frontera.....	66
4.2 Condiciones de frontera. ....	67
4.3 Método del Elemento Frontera (BEM).....	68
4.4 Singularidades.....	74
4.4.1 Procedimiento para tratar las singularidades.....	75
4.4.2 Integración del Dominio. ....	76
4.4.2 Integrales fuertemente singulares.....	77
<b>CAPÍTULO 5 TEORÍA DEL CREEP .....</b>	<b>81</b>
5.1 Introducción al Creep. ....	83
5.2 Ley de Potencia del Creep. (Power-Law Creep) .....	87
5.3 Comportamiento del Creep como función del tiempo. ....	88
5.4 Modelo de la Ley de potencia quinta del Creep. (Five Power- Law Creep.) .....	89
5.5 Mechanical Twinning – Dislocación por deslizamiento. ( <i>“Dislocation-Glide”</i> Plasticidad a baja temperatura.).....	91
5.6 Ley de Potencia del Creep aplicado al problema. (Power-Law Creep) .....	92

5.7 Transición de Creep por deslizamiento a Creep por escalamiento.....	94
<b>CAPÍTULO 6 FORMULACIÓN INTEGRAL DE FRONTERA PARA EL CREEP .....</b>	<b>95</b>
6.1 Esfuerzos equivalentes. ....	96
6.2 Integración Numérica. ....	96
6.3 Pseudocódigo para análisis e creep con temperatura variable. ....	98
<b>CAPÍTULO 7 APLICACIÓN A UN PROBLEMA PRÁCTICO .....</b>	<b>103</b>
7.1 Problema en el estado estable, primera parte. ( $600^{\circ}\text{C} \leq T \leq 800^{\circ}\text{C}$ ) .....	105
7.2 Estado estacionario Parte B. ( $550^{\circ}\text{C} \leq T \leq 600^{\circ}\text{C}$ ).....	109
7.3 Transición entre deslizamiento y escalamiento. ( $T = 600^{\circ}\text{C}$ ) .....	112
<b>CAPÍTULO 8 CONCLUSIONES.....</b>	<b>114</b>
Bibliografía.....	116

## *ÍNDICE DE FIGURAS.*

Figura 1 Métodos Numéricos para problemas Mecánicos .....	10
Figura 2 Área utilizada para derivar el teorema de Gauss-Green.....	14
Figura 3 Detalle de la Figura [2]. .....	15
Figura 4 Volumen utilizado para derivar el teorema de Gauss-Green. ....	17
Figura 5 Representación de una carga concentrada.....	20
Figura 6 Detalle de la Figura [5]. .....	21
Figura 7 Función de impulso de un rectángulo unitario. ....	21
Figura 8 Dos ejemplos de rectángulos unitarios. ....	22
Figura 9 Convención de signos asociada con el símbolo de permutación.....	29
Figura 10 Ejemplos de elementos normales/deformados.....	31
Figura 11 Vector del punto A al punto B. ....	33
Figura 12 Componentes rectangulares de un vector.....	34
Figura 13 Deformación de un elemento lineal infinitesimal.....	35
Figura 14 Cuerpo en equilibrio.....	37
Figura 15 Superficie esférica usada para resolver el problema de Kelvin. ....	49
Figura 16 Sistema de coordenadas esféricas. ....	50

Figura 17 Modelo de BEM.....	66
Figura 18 Condiciones de frontera en un Problema-ejemplo.....	68
Figura 19 Gráfica Esfuerzo-Deformación para el creep. ....	84
Figura 20 Gráfica Velocidad de deformación-Tiempo para creep. ....	85
Figura 21 Ejemplos experimentales de creep secundario a diferentes temperaturas. ....	88
Figura 22 Tipos de creep en función a la temperatura. ....	90
Figura 23 Velocidades de deformación por creep debido a dislocación por deslizamiento. ....	92
Figura 24 Velocidades de deformación por creep debido a escalamiento.....	93
Figura 25 Combinación de dos casos de creep a 600°C.....	94
Figura 26 Velocidad de deformación por Creep contra los esfuerzos a diferentes rangos de temperatura. ....	106
Figura 27 Esfuerzo contra la deformación por creep a diferentes temperaturas. ....	107
Figura 28 Gráfica de temperatura contra la ordenada al origen. ....	109
Figura 29 Velocidad de deformación por deslizamiento por dislocación.....	110
Figura 30 Comparación Simulaciones vs Experimental. ....	110
Figura 31 Gráfica de la Pendiente y Ordenada al origen contra la Temperatura. ....	112
Figura 32 Velocidad de deformación por creep, combinación de dos casos. ....	113



# ANALISIS DEL CREEP CON TEMPERATURA VARIABLE APLICANDO ELEMENTOS DE FRONTERA

---

## **Resumen.**

En cualquier industria siempre es indispensable conocer el tiempo de vida útil de los equipos, para así poder determinar su utilidad. Muchas veces esto no se refleja hasta el momento en el que el equipo falla completamente. También se pueden establecer parámetros con los cuales estar revisando la evolución en las pequeñas fallas y desperfectos de los mismos.

Ahora bien si reflejamos esto en los materiales que ocupamos podemos ver que existe una gran similitud con esta necesidad. Para conocer las propiedades elásticas de los materiales contamos con lo que son tablas y graficas de dos factores que tienen una gran afinidad: esfuerzo y deformación.

En la teoría básica es bien sabido que en la curva esfuerzo-deformación de un material existen dos regiones, la primera es la región elástica, donde generalmente el material tiene un comportamiento casi lineal y después esta la región plástica donde es un comportamiento de

tipo no lineal, ambas regiones se encuentran separadas por lo que es conocido como el esfuerzo de cedencia. Cuando el material alcanza esta región los cambios que comienzan a aparecer en el cuerpo ya no regresan a su estado original y es cuando se dice que se deforma plásticamente.

Pero, ¿Será posible que un cuerpo se deforme plásticamente aunque no haya sobrepasado el esfuerzo de cedencia? La respuesta es simple, y a lo largo de este trabajo se va a estar hablando de un tipo de deformación que actúa de esta manera.

Esta deformación se conoce con el nombre de Creep y como característica principal tiene que se da con esfuerzos menores al esfuerzo de cedencia, en periodos largos de tiempo como demuestra E. Pineda (1), y muchas veces afectado por temperaturas altas.

En este trabajo se presenta la implementación de dos ecuaciones para el cálculo de la velocidad de deformación por creep aplicando el método del elemento frontera (BEM), el cual como ha demostrado M. H. Aliabadi (2), se emplea para el cálculo de los esfuerzos que actúan sobre el cuerpo.

Todo este procedimiento se centra en predecir la velocidad de deformación por creep a diferentes temperaturas. El análisis del creep es básicamente aplicado a metales, pero parte de la atención se centra en la evaluación numérica de los componentes con creep sujetos a temperatura variable. El modelo constitutivo usado en el cálculo numérico es propio para las ecuaciones estándar de ley de potencias del creep.

Aunado a todo esto, se utiliza un método numérico para la realización de los cálculos, el cual es conocido como el Método de Elemento de Frontera (BEM por sus siglas en inglés), para resolver ecuaciones en derivadas parciales lineales que han sido formuladas como ecuaciones integrales (en forma de integral sobre la frontera), del cual sus fundamentos se pueden remontar a las formulaciones matemáticas hechas por Fredholm (3) y Mikhilin (4) en teoría de potencial y Kupradze (5) en elasticidad. En el contexto del BEM, también llamado ecuaciones integrales de frontera (BIE) (6),

las formulaciones son gracias a Jaswon (7), Hess y Smith (8), Massonet (9), Rizzo (10) y Cruse (11). Pero probablemente la contribución más significativa al BEM para convertirlo en una técnica numérica efectiva para resolver problemas que posean una configuración sofisticada sea debido a Lachat (12), y a Lachat y Watson (13).

El BEM puede ser usado en muchas áreas de la ingeniería y ciencias incluyendo mecánica de fluidos, acústica, electromagnetismo, y mecánica de la fractura.

En este trabajo se aplicó la formulación directa del BEM para problemas de Creep secundario en un análisis bidimensional. Para la aplicación de toda esta formulación, se uso un código computacional escrito en el lenguaje FORTRAN (14), en el cual se modificaron unas subrutinas para adaptar las nuevas ecuaciones.

Posteriormente se trabajó con los resultados ya existentes de un artículo para comparar los resultados que se obtuvieron de manera experimental con los que se obtuvieron por medio de esta técnica propuesta. Los resultados de dicha investigación son presentados en este trabajo, donde se aprecia que los cálculos numéricos son muy próximos a los resultados obtenidos de manera experimental que se encuentran en el artículo.

## Abstract.

In every industry it is always essential to know the time of life span of the equipment and machinery, to determinate the spare utility. Sometimes this is not appreciable until the equipment completely fails. Also we can establish parameters for monitoring and know the evolution of the small failures and damages of the materials.

Now on, if we reflex these in the materials that we use, we can see the existence of many features. To know the material's elastic properties we have charters and graphics of two concepts whit a great affinity: stress and strain.

It is well known that in the strain-stress curve of one material exist two regions, the first one is the elastic region, where generally the material has an almost lineal behavior and suddenly, when the slope starts to change, the second region starts and it is called the plastic region which has a no-linear behavior. Both regions are separated by the yielding point or yielding stress. When one material reaches this point, the changes appearing in the material cannot return to its original form and here we say that the material has been deformed plastically.

But, is it possible that a certain body deforms plastically even when the stresses don't reach the yielding point? The answer is easy; this deformation is known as creep, and although this investigation, we will be talking over this type of deformation that acts in this way.

Creep's principal feature appears with constant loads and stresses under the yielding point for long periods of time and maybe affected by high temperatures.

This work presents the implementation of two equations to estimate the creep rate using the boundary element method (BEM) which as reported by M. H. Aliabadi (2), computes the stresses acting over the surface of the body. All this procedure is based on predict the creep rate at different temperatures.

The creep analysis is basically applied to metals as reported by Pineda (1), but part of the attention is on the numerical evaluation of the creep components subjected to variable temperature. The constitutive model used for the numerical calculation is due to the standard equations of power-law creep.

Moreover, it is used a numerical method for computing, known as Boundary Element Method (BEM) in order to solve equations as lineal partials derivatives that have been formed as integral equations (in form of a frontier integral), the fundamental can be traced back to mathematical formulations by Fredholm (3), and Mikhilin (4) in potential theory and Kupradze (5) in elasticity. In the context of the BEM, also called Boundary Integral Equation (BIE) (6), the formulations are due to Jaswon (7), Hess and Smith (8), Massonet (9), Rizzo (10) and Cruse (11). But perhaps the most significant early contribution to BEM as an effective numerical technique is due to the work of Lachat (12) and Lachat and Watson (13). They developed an isoparametric formulation similar to the FEM and proved that the BEM can be used as an efficient tool for solving problems with sophisticated configurations.

The BEM can be used in many ways in engineering and sciences, including flow mechanics, acoustic, electromagnetism and fracture mechanics.

In this work, the direct formulation of BEM was used to solve steady state creep problems in a bidimensional analysis. For the application of all these formulations, a well-known software was used, FORTRAN (14), where new equations were added.

Then, experimental results obtained from the literature were used to compare the results obtained with this technique. The results of such investigation are shown in this work, where it is possible to see that the numerical results are much closer to the results obtained experimentally in the paper.

## **Objetivos.**

Desarrollar una nueva formulación numérica para determinar la velocidad de deformación por creep con temperatura variable de manera precisa y que sea capaz de predecir este comportamiento en metales sometidos a cargas constantes en donde el tiempo es el parámetro más importante a considerar.

## **Metas.**

Comprender el método de los elementos de frontera.

Deducir analíticamente los conceptos básicos sobre la teoría de Creep.

Modificar y adaptar un código en lenguaje FORTRAN en el que se programen dos ecuaciones de Creep a temperatura variable aplicado a metales.

Implementar este código como una subrutina a un programa de análisis de esfuerzos utilizando el método de los elementos de frontera.

Validar los resultados numéricos con un problema experimental publicado en la literatura sobre el tema.

Publicación de un artículo con los resultados obtenidos.

Presentar este trabajo en un congreso internacional en Brasil.

## **Alcances.**

Esta tesis se limita al cálculo de la velocidad del Creep para temperaturas dentro del siguiente rango  $550^{\circ}\text{C} \leq T \leq 800^{\circ}\text{C}$ .

La validación del código se realizó para el acero AISI 316 L(N) con esfuerzos no mayores a 300 MPa.

Los resultados de esta investigación fueron enviados a una revista indizada para su publicación.

Los resultados de esta investigación fueron enviados a un congreso internacional para su ponencia.

## Introducción.

En el diseño, la Mecánica juega un papel muy importante; ya que existen muchos problemas, si no es que todos, que están interconectados directamente con conceptos o situaciones relacionadas con esta área de la Física. Es por ello que es de gran utilidad poder contar con alguna herramienta la cual sistematice el análisis y los cálculos para así, poder realizar una correcta predicción y el diseño sea justo lo que se necesita.

En la actualidad, es posible conjuntar el análisis mecánico que se necesita con algún software para lograr que esta tarea sea mucho más simple.

En este trabajo, el principal objetivo es implementar un código en lenguaje FORTRAN para simular la velocidad de deformación producida por Creep en materiales metálicos de una manera eficiente, eficaz y precisa. Todo esto cabe señalar, mediante la aplicación de un programa que calcula los esfuerzos mediante el método de elementos de frontera.

Los datos mostrados provienen de simulaciones hechas para un material en específico obtenido de referencias (15), mismas que proporcionan toda la información necesaria y de mayor relevancia para el diseño de este trabajo.

Los resultados fueron comparados con valores reales ya existentes de pruebas experimentales hechas por otros investigadores sobre este tema.

# CAPITULO 1

## MATEMÁTICAS PRELIMINARES.

---

En este capítulo se estará tratando con relaciones matemáticas de gran importancia para la derivación y comprensión del análisis usando el método del elemento de frontera (BEM, por sus siglas en ingles), así como conceptos aplicados en el área de la mecánica, relacionados con la deformación en materiales sólidos, específicamente en metales. Es importante conocer estas relaciones para poder tener una mejor comprensión de lo que el elemento de frontera es (BEM). Estas serán usadas de manera iterativa para transformar la ecuación diferencial gobernadora del problema de la mecánica del medio continuo en ecuaciones integrales equivalentes de frontera. Estas son derivadas aquí con el fin de que el lector pueda tener la seguridad acerca de su uso subsecuente.

### **1.1 Introducción.**

Las técnicas numéricas para la solución de problemas en mecánica pueden ser resumidas a solamente 3 por su mayor aplicación dada su eficacia y eficiencia; estos son: Diferencias finitas, elemento finito y elemento de frontera. Los tres métodos involucran los siguientes pasos:

1. El reemplazamiento de las expresiones involucradas para el cálculo con aproximaciones algebraicas
2. El uso de una rejilla computacional (usualmente conocida como malla),
3. La solución de un conjunto de ecuaciones algebraicas simultaneas para determinar la distribución de la respuesta desconocida en la malla.

Estos tres métodos pueden ser contrastados entre ellos basado en las condiciones operacionales que siguen. Cada uno de los métodos ha sido muy satisfactorio en proporcionarles a los científicos e ingenieros (con ayuda de simulaciones computacionales) respuestas y soluciones a sistemas continuos. Todos estos métodos aun así requieren juicios considerablemente ingenieriles para una utilización efectiva.

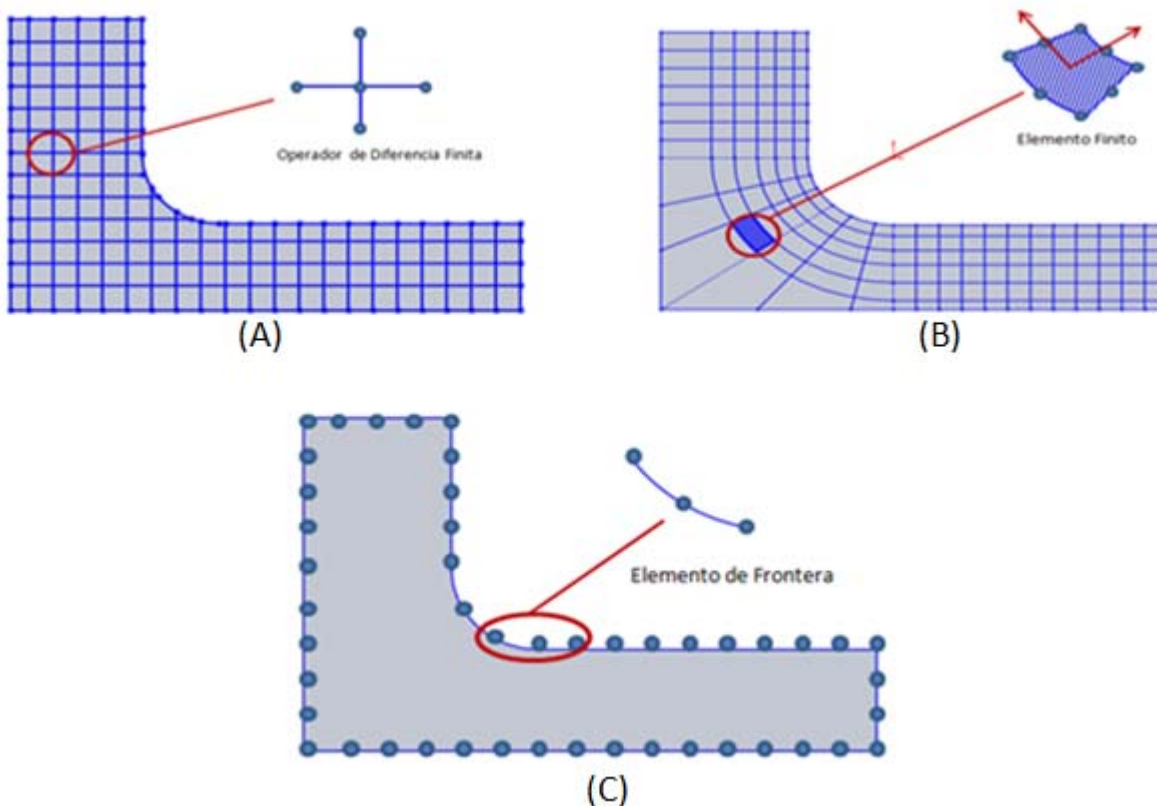


Figura 1 Métodos Numéricos para problemas Mecánicos

### **1.1.1 Método de diferencias finitas.**

Es un método utilizado para calcular de manera aproximada las soluciones a las ecuaciones diferenciales gobernadoras del problema usando ecuaciones diferenciales finitas para generar sistemas de ecuaciones algebraicas y aproximar derivadas. En la figura [1-A] se muestra el tipo de mallado usado en el método de diferencias finitas. En cada intersección de las líneas mostradas en el mallado por diferencias finitas, la ecuación diferencial gobernadoras es remplazada por una aproximación finita (16).

#### **Ventajas**

- *Extremadamente general.*
- *Usado extensivamente en mecánica de fluidos y problemas químicos, térmicos y aeroespaciales con turbulencia.*
- *Sin integración Numérica.*
- *Matrices poco densas.*
- *Manejo de la no homogeneidad.*
- *Menor tiempo de espera para nuevos problemas.*

#### **Desventajas**

- *Generalmente requiere de mallas estructuradas, ya que otro tipo de mallado genera más variables.*
- *Poco manejable para problemas infinitos*
- *Modelado de las fronteras y de las condiciones de frontera.*
- *Probable aproximación a las etapas finales de realización.*

### **1.1.2 Método de elemento finito.**

Este Método opera con la relación de integrales gobernadoras equivalentes usando interpolaciones simples (usualmente polinomiales) de pequeños elementos del dominio en estudio de las cantidades de respuesta en los nodos de puntos. En la figura [1-B] se muestra el tipo de mallado usado en el método de elemento finito. Este método trabaja transformando las ecuaciones diferenciales gobernadoras en una ecuación integral equivalente involucrando la respuesta desconocida (17). Estas ecuaciones integrales son aproximaciones de un conjunto similar de ecuaciones integrales discretizadas.

El método de elementos finitos se define como la división de un continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo (infinitos grados de libertad), que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, lineales o no.

#### **Ventajas**

- *Usado extensivamente en análisis térmicos y estructurales.*
- *Integración de funciones simples.*
- *Manejo de la no homogeneidad.*
- *Matrices poco densas, usualmente simétricas.*
- *Modelado de fronteras y condiciones de frontera.*
- *No requiere de mallas estructuradas, se puede combinar un amplio rango de elementos.*

#### **Desventajas**

- *Requiere malla de volumen.*
- *Requiere de una relación integral de los principios de variación o formulación de residuos de ponderación.*
- *La precisión de los resultados depende de la densidad de elementos utilizados.*
- *Comenzando a acercarse a las etapas finales de realización.*

### **1.1.3 Método de elemento de frontera.**

En la tercera figura [1-C] se muestra un mallado por el método de elemento frontera. En este método las ecuaciones diferenciales gobernadoras son transformadas en ecuaciones integrales equivalentes. Usando la relación de cálculo descrito en la ecuación de Gauss-Green o el teorema de la divergencia, estas ecuaciones integrales, involucran tanto las integrales de superficie como de volumen, estas luego transformadas en ecuaciones integrales (ecuaciones integrales de frontera) que no contienen integrales de volumen involucrando la respuesta desconocida. Es un método numérico para resolver ecuaciones en derivadas parciales lineales que han sido formuladas como ecuaciones integrales

### **Ventajas**

- *Modelado de fronteras y condiciones de frontera.*
- *Requiere solamente mallas de superficie.*
- *Reducido sistema de ecuaciones a resolver.*
- *Utilizado en estructura, análisis térmicos, acústica, Elastohidrodinámica y análisis de fluidos.*
- *Ideal para problemas infinitos.*
- *La resolución de los gradientes de respuesta no están atados al refinamiento de la malla.*
- *Solamente una manera a tratar algunos problemas.*

### **Desventajas**

- *para muchos problemas el método de elementos de frontera es significativamente menos eficiente que los métodos de discretización de volumen.*
- *elementos de frontera típicamente dan como resultado matrices que están completamente pobladas.*
- *Los Recursos de almacenamiento y tiempo computacional tienden a crecer proporcionalmente al cuadrado del tamaño del problema.*
- *Requiere de integración substancial numérica de funciones complejas.*
- *Matrices no simétricas.*
- *Problemas profundos de no homogeneidad.*

El método de elementos de frontera es en ocasiones más eficiente que otros métodos, esto es en función al número de variables que contenga el problema, la dimensionalidad, u otros aspectos que afecten directamente al problema. Las secciones que siguen, establecen algunas relaciones matemáticas de absoluta importancia para el cálculo y comprensión del método de elementos de frontera.

## **1.2 Teorema de Gauss- Green.**

El teorema de Green establece la relación entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple y una integral doble sobre la región plana limitada por la curva cerrada. El teorema de Green se llama así por el científico británico George Green y es un caso especial del teorema general de Stokes.

Es una identidad fundamental que relaciona la frontera de un área con la función derivativa de una integral de línea. Para poder tener una mejor comprensión de esta relación, consideremos la siguiente figura [2]:

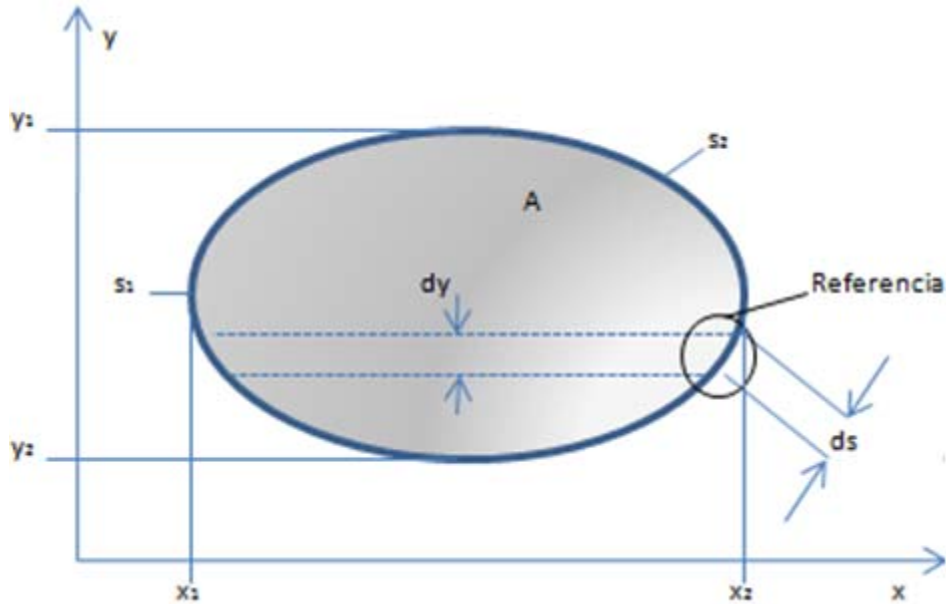


Figura 2 Área utilizada para derivar el teorema de Gauss-Green.

La figura [2] muestra una función de línea cerrada S la cual contiene un Área A; la integral del área formada por dicha función  $\oint_A \frac{\partial f}{\partial x} dA$ , puede ser escrita como una doble integral, primero con respecto a X y segundo con respecto a Y

$$\int_y \left( \int_x \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy \tag{1.1}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo (18) podemos reemplazar el término que se encuentra entre paréntesis para tener únicamente una integral, esto será evaluando la integral en sus valores superior  $x_2$  e inferior  $x_1$  de la superficie del cuerpo, lo cual nos deja la ecuación de la siguiente manera:

$$\int_y \{f(x_2) - f(x_1)\} dy \quad (1.2)$$

Ahora es importante identificar la parte que se forma por los diferenciales de área creados por el cálculo, primero en  $X$  y luego en  $Y$ . Estas diferenciales de área tienen diferenciales de arco la cual identificaremos como  $ds$  y de aquí podemos obtener el vector tangente  $t$  y normal  $n$  a estos arcos [3]:

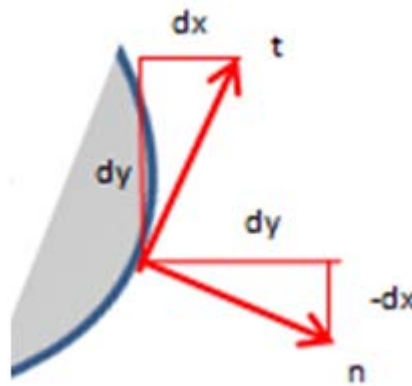


Figura 3 Detalle de la Figura [2].

Utilizando los conceptos anteriores, sustituiremos los términos  $dy$  por los de  $ds$ . Estas consideraciones deben de incluir a la normal unitaria de la frontera de línea:

$$t = \frac{dx}{ds} e_1 + \frac{dy}{ds} e_2 \quad ; \quad n = \frac{dy}{ds} e_1 - \frac{dx}{ds} e_2 = n_x e_1 + n_y e_2$$

Ó

$$\frac{dy}{ds} = n_x \Rightarrow dy = n_x ds \quad (1.3)$$

En esta expresión  $e_i$  son los vectores unitarios orientados a lo largo de los ejes. Substituyendo esta relación en la ecuación (1.2) tenemos:

$$\int_y \{f(x_2) - f(x_1)\} dy = \int_{s_2} f(x_2)n_x ds - \int_{s_1} f(x_1)n_x ds \quad (1.4)$$

En esta expresión el arco  $s_1$  se encuentra del lado izquierdo de la totalidad de la línea de frontera  $s$ , y el arco  $s_2$  está en el lado derecho de  $s$ . Podemos combinar ambos términos en la expresión anterior dado el signo negativo del segundo término como:

$$\oint_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_s f n_x ds \quad (1.5)$$

En esta ecuación, se asume la convención de que la integración ocurre a lo largo de toda la superficie y la normal externa es utilizada. Si se intercambian los ejes, la otra relación también resulta ser verdadera:

$$\oint_A \frac{\partial f}{\partial y} dA = \int_s f n_y ds \quad (1.6)$$

Estos argumentos pueden ser extrapolados en un contexto tridimensional, con la ayuda de la figura [4] se obtendrán resultados análogos:

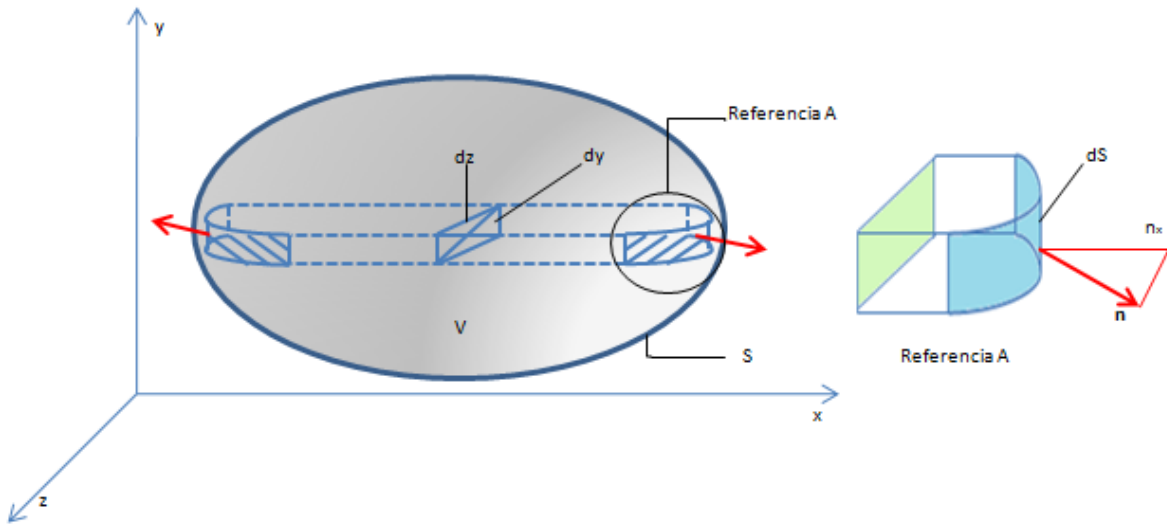


Figura 4 Volumen utilizado para derivar el teorema de Gauss-Green.

En esta ocasión el teorema de Gauss-Green representa la integral de volumen de una integral de superficie de una función. En esta ecuación  $x_i$  y  $n_i$  pueden adquirir valores para  $x, y, z$  y  $n_x, n_y, n_z$  dependiendo el valor de  $i$ :

$$\oint_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_z \int_y \left( \int_x \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy dz = \int_z \int_y \{f(x_2) - f(x_1)\} dy dz$$

ó

$$\oint_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_S f n_x ds ; \text{ generalizando } \oint_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_S f n_i ds \quad (1.7)$$

### 1.3 Teorema de la divergencia.

El teorema de la divergencia es una muy pequeña variación del teorema de Gauss-Green (19). Para poder expresar esta relación, dejemos que  $f = f_i$  sea la  $i$ -ésima componente de un vector función en la ecuación:

$$\oint_V \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dV = \int_s f_i n_i ds \quad (1.7)$$

Usando la formula (1.7) con  $i = 1,2,3$  y sumando los resultados obtenemos:

$$\int_V \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_s (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3) ds$$

Ó

$$\int_V (\nabla \cdot f) dV = \int_s (f \cdot n) ds \quad (1.8)$$

La ecuación (1.8) define la divergencia de un vector función como combinación de las derivadas mostradas. Esto puede notar que la ecuación puede también ser usada para representar el teorema de la divergencia si se asume la convención para la sumatoria de Einstein. Esto es que si en un término los dos índices subscritos se repiten, esto implica que el término debe ser sumado sobre un rango de subscritos. A continuación se muestra un ejemplo donde el rango de subscritos es 3:

$$f_j n_j = \sum_{j=1}^3 f_j n_j = f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3$$

### 1.4 Segunda identidad de Green.

Esta relación puede ser obtenida usando el teorema de la divergencia al sustraer las dos identidades (1.9, 1.10). La primer identidad se obtiene al dejar que  $f$  sea igual al producto escalar de una función  $b$  y al gradiente de otra función  $a$ .

$$f = b \nabla a$$

Y:

$$\nabla \cdot f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_3 \right) \cdot \left( b \frac{\partial a}{\partial x_1} e_1 + b \frac{\partial a}{\partial x_2} e_2 + b \frac{\partial a}{\partial x_3} e_3 \right)$$

Resultando:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial b}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial x_1} + b \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial b}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial x_2} + b \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial b}{\partial x_3} \frac{\partial a}{\partial x_3} + b \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2}$$

Ó:

$$\nabla \cdot f = \nabla a \cdot \nabla b + b \nabla^2 a$$

Donde:

$$\nabla^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2}$$

Ahora sustituyendo f en la ecuación (1.8):

$$\int_V (\nabla a \cdot \nabla b + b \nabla^2 a) dV = \int_S (b \nabla a \cdot n) ds \quad (1.9)$$

Esta relación puede ser reescrita con los roles de b y a intercambiados.

$$\int_V (\nabla b \cdot \nabla a + a \nabla^2 b) dV = \int_S (a \nabla b \cdot n) ds \quad (1.10)$$

Ahora podemos abstraer de la ecuación (1.9) la ecuación (1.10) para obtener la segunda identidad de Green:

$$\int_V (b\nabla^2 a - a\nabla^2 b) dV = \int_S (b \nabla a \cdot n - a \nabla b \cdot n) ds \quad (1.11)$$

### 1.5 Función delta de Dirac.

Existen muchas situaciones dentro de la ingeniería donde las excitaciones son idealizadas como si estas ocurrieran en un punto. Cargas concentradas en sólidos mecánicos y fuentes concentradas de generación de energía interna en análisis térmico son dos ejemplos de ello (20).

Físicamente, existen una cantidad bien definida de problemas con este concepto, en su forma pura. En nuestra imaginación, cuando nosotros pensamos en un punto con una carga, nosotros probablemente estemos pensando en una carga concentrada relativamente, como se muestra en la figura [5]:



Figura 5 Representación de una carga concentrada.

La calidad de nuestra idealización del punto cargado obviamente depende de que tan cercano ubiquemos la respuesta directamente en el punto de aplicación. El punto cargado en la viga funciona bien para determinar el esfuerzo cortante resultante y el momento en ella, y para la deflexión en el grosor utilizando teoría de las flexibilidades. Un análisis tridimensional del

contacto es requerido de cualquier modo, para obtener información detallada acerca de la respuesta del objeto directamente bajo la carga en el límite, mientras el radio de la curvatura de la carga rígida por el objeto mostrado en la figura [6] se contrae a cero, los esfuerzos se convertirán en ilimitados y el material fallara.

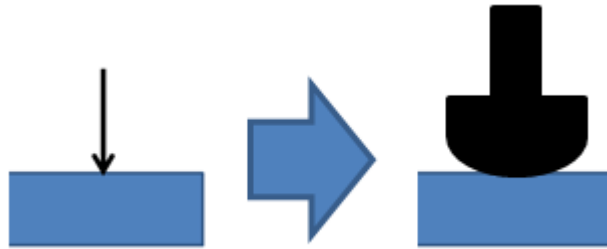


Figura 6 Detalle de la Figura [5].

Sin embargo esto es una abstracción matemática totalmente artificial, que bien podemos utilizar para poder dar solución a problemas prácticos.

Para lograr construir una descripción matemática de la fuente del punto de excitación, iniciamos con una función sencilla mostrada en la figura [7].

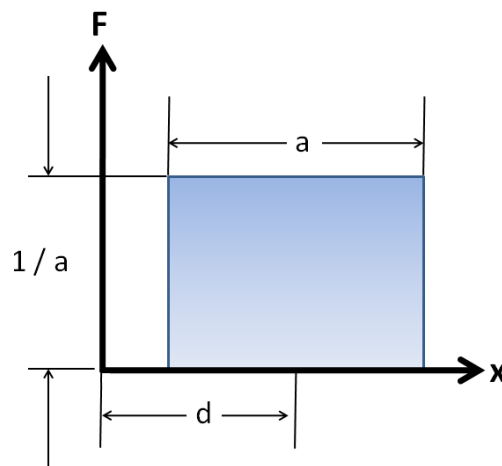


Figura 7 Función de impulso de un rectángulo unitario.

Esta función puede ser llamada como rectángulo unitario de impulso centrado en  $d$  de ancho  $a$ . Esta función está configurada de tal modo que la integral es igual a la unidad sobre cualquier dominio donde la función aparezca.

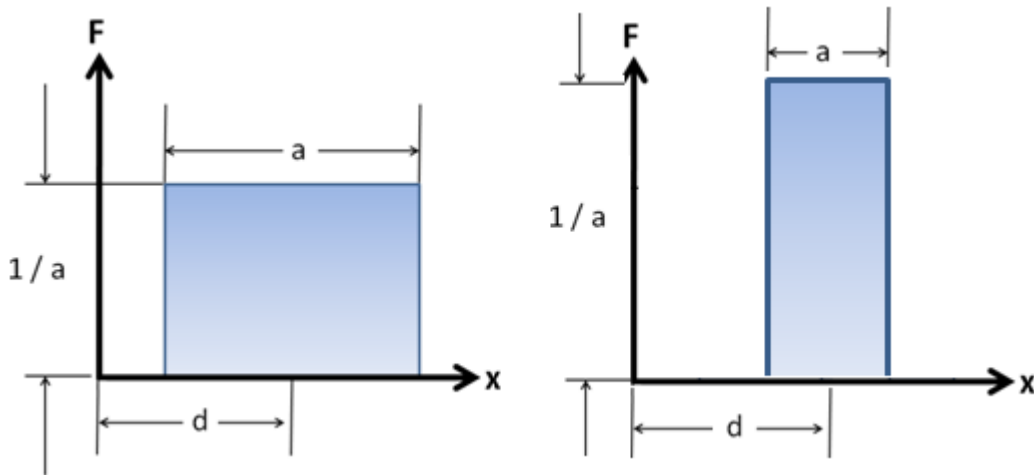


Figura 8 Dos ejemplos de rectángulos unitarios.

$$F(x, d, a) = \begin{cases} 0 ; & x < d - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a} ; & d - \frac{a}{2} \leq x \leq d + \frac{a}{2} \\ 0 ; & x > d + \frac{a}{2} \end{cases}$$

Ahora podemos definir la función delta como el límite de la función de impulso del rectángulo unitario cuando tiende a cero.

$$\delta(x - d) = \lim_{a \rightarrow 0} F(x, d, a) \tag{1.12}$$

Esta función se comporta como nuestro punto de carga. Es decir, una región sobre la cual la función que actúa se vuelve más chica, la intensidad incrementa de tal modo que la resultante (la integral de área) de la función permanece constante.

# CAPITULO 2

## MECÁNICA DE SÓLIDOS.

---

La mecánica de sólidos estudia el comportamiento de los cuerpos sólidos ante diferentes situaciones como la aplicación de cargas o efectos térmicos. Estos comportamientos, se estudian introduciendo los conceptos de deformación y de tensión.

En este capítulo se plantea el estudio de la mecánica de sólidos, la cual considera que los desplazamientos que ocurren en un cuerpo son producto de las condiciones de carga y soporte del mismo. Estos desplazamientos dan paso al aumento en las deformaciones y esfuerzos internos en el cuerpo.

Una aplicación típica de la mecánica de sólidos es determinar a partir de una cierta geometría original de sólido y unas fuerzas aplicadas sobre el mismo, si el cuerpo cumple ciertos requisitos de resistencia y rigidez. Para resolver ese problema, en general es necesario determinar el campo de tensiones y el campo de deformaciones del sólido (21). Las ecuaciones necesarias para ello son:

- **ecuaciones de equilibrio** (22), que relacionan tensiones internas del sólido con las cargas aplicadas. Las ecuaciones de la estática son deducibles de las ecuaciones de equilibrio.

- **ecuaciones constitutivas**, que relacionan tensión y deformación, y en las que pueden intervenir también otras magnitudes como temperatura, velocidad de deformación, deformaciones plásticas acumuladas, variables de endurecimiento, etc.
- **ecuaciones de compatibilidad**, a partir de la cual pueden calcularse los desplazamientos en función de las deformaciones y las condiciones de contorno o enlace con el exterior.

Estos campos de desplazamiento, deformación y esfuerzo no son cantidades escalares, pueden ser cantidades vectoriales o tensoriales. Es por ello que para el manejo de estas cantidades, se requiere emplear las técnicas de notación y manipulación de este tipo de cantidades. En este capítulo se explicará un poco sobre análisis cartesiano tensorial básico y notación índice (ó indiciada); seguido del estudio de deformaciones, equilibrio y tracción, la relación esfuerzo-deformación y finalmente teoría básica sobre elasticidad.

## 2.1 Notación índice.

Casi sin ninguna excepción, la notación usada en las expresiones contemporáneas de las relaciones en mecánica de sólidos incluye la notación índice. En problemas vectoriales como es el caso de la elasticidad, es necesario referirse constantemente a los componentes de tensores y vectores y las operaciones que se harán entre ellos. Para evitar la enumeración constante de las componentes de dichas cantidades, que finalmente tiende a ocultar los aspectos fundamentales de una formulación, se utiliza la notación índice o notación de Einstein en honor a su inventor. Ciertamente el concepto de un vector  $\vec{v}$  con componentes en  $x$  y  $y$ , las podemos expresar como  $v_x$  y  $v_y$  que es algo conocido por todos, y puede ser usado como una manera simple para expresar dichas cantidades. En la notación índice como su nombre lo dice, utilizamos índices para referirnos a cantidades dependiendo del valor que asume el índice, así por ejemplo (23):

$$F_i \quad i = 1,2,3 \rightarrow F = \{F_1, F_2, F_3\} \quad (2.1)$$

Donde  $F$  puede ser un vector fuerza y el sub-índice  $i$  que puede tomar los valores de 1, 2, 3 nos indica a cuál de las componentes del vector nos estamos refiriendo.

Consideremos otro ejemplo, revisemos la ecuación algebraica mostrada a continuación:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$$

La podemos expresar como una sumatoria de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^4 a_i x_i = b \quad (2.2)$$

La cual es una representación de mucho menor tamaño que la anterior, ahora bien este concepto se puede aplicar utilizando los dos ejemplos anteriores para poder representar un tensor, primero aplicando un sub-índice  $i$ :

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned} \right\} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 = b_i \quad (2.3)$$

$$i = 1,2,3$$

Y luego la sumatoria:

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.4)$$

Y de este modo podemos representar un sistema de 3 ecuaciones donde se incluyen hasta 5 términos de una manera más compacta.

## 2.2 Convención de la sumatoria.

La convención de la sumatoria, o convención de la sumatoria de Einstein propiamente dicho, es una regla que permite una representación todavía mucho más compacta en notación índice. Este tipo de convención permite escribir relaciones de suma sin el uso explícito del símbolo de sumatoria, esto es por:

***“Si cualquier índice aparece dos veces en cualquier termino, entonces está implícito que ese índice debe de ser una sumatoria para todos los valores en el rango de ese índice.”***

Un ejemplo de lo anterior sería:

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,2,3 \quad (2.4)$$

Usando el símbolo de sumatoria la ecuación se escribiría como:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 a_{ij}x_j = b_i \quad (2.5)$$

## 2.3 Delta de Kronecker.

La delta de Kronecker es un símbolo útil que permite la expresión sencilla de ciertos tipos de relaciones que incluyan notación índice (24). Por ejemplo, la formula en notación índice para la

longitud (cuadrática) de una línea segmentada con un extremo situado en el origen y el otro en las coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  es:

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_k x_k \quad (2.6)$$

De cualquier modo, esta expresión puede presentar una fórmula que también contenga un término como  $x_i x_j$ . La delta de Kronecker puede ser usada en esta situación para restringir:

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_k x_k = \delta_{ij} x_i x_j \quad (2.7)$$

Donde la definición actual de la delta de Kronecker es:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{si } i = j \\ 0; & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.8)$$

Aplicando esta definición a la expresión (2.7) resulta:

$$l^2 = \delta_{ij} x_i x_j = \delta_{11} x_1 x_1 + \delta_{12} x_1 x_2 + \delta_{13} x_1 x_3 + \delta_{21} x_2 x_1 + \delta_{22} x_2 x_2 + \delta_{23} x_2 x_3 + \delta_{31} x_3 x_1 + \delta_{32} x_3 x_2 + \delta_{33} x_3 x_3 \} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (2.9)$$

Es importante destacar que el valor de ambos índices debe ser el mismo en la delta de Kronecker. Este símbolo también puede llamarse como el tensor sustitución.

## 2.4 Símbolo de permutación.

Otro símbolo muy útil usado en la notación índice es el símbolo de permutación, también conocido como el tensor de Levi-Civita. Este símbolo mostrara ser muy útil en la representación de un producto vectorial:

$$e_{ABC} = \begin{cases} 1; & \text{si } ABC \text{ permuta como } 123123 \\ -1; & \text{si } ABC \text{ permuta como } 321321 \\ 0; & \text{si cualquier indice es repetido} \end{cases} \quad (2.10)$$

Una permutación no es nada más que una combinación de cosas donde el orden de sus ocurrencias es una característica distinguida. Esta por demás decir que la permutación ABC es diferente de ACB. Considere el uso de este símbolo para el próximo determinante de 3x3:

$$|[A]| = e_{rst} a_{r1} a_{s2} a_{t3} = \begin{array}{lll} e_{111} a_{11} a_{12} a_{13} & + e_{112} a_{11} a_{12} a_{23} & + e_{113} a_{11} a_{12} a_{33} \\ + e_{121} a_{11} a_{22} a_{13} & + e_{122} a_{11} a_{22} a_{23} & + e_{123} a_{11} a_{22} a_{33} \\ + e_{131} a_{11} a_{32} a_{13} & + e_{132} a_{11} a_{32} a_{23} & + e_{133} a_{11} a_{32} a_{33} \\ + e_{211} a_{21} a_{12} a_{13} & + e_{212} a_{21} a_{12} a_{23} & + e_{213} a_{21} a_{12} a_{33} \\ + e_{221} a_{21} a_{22} a_{13} & + e_{222} a_{21} a_{22} a_{23} & + e_{223} a_{21} a_{22} a_{33} \\ + e_{231} a_{21} a_{32} a_{13} & + e_{232} a_{21} a_{32} a_{23} & + e_{233} a_{21} a_{32} a_{33} \\ + e_{311} a_{31} a_{12} a_{13} & + e_{312} a_{31} a_{12} a_{23} & + e_{313} a_{31} a_{12} a_{33} \\ + e_{321} a_{31} a_{22} a_{13} & + e_{322} a_{31} a_{22} a_{23} & + e_{323} a_{31} a_{22} a_{33} \\ + e_{331} a_{31} a_{32} a_{13} & + e_{332} a_{31} a_{32} a_{23} & + e_{333} a_{31} a_{32} a_{33} \end{array} \quad (2.11)$$

Y:

$$e_{rst} a_{r1} a_{s2} a_{t3} = e_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + e_{132} a_{11} a_{32} a_{23} + e_{213} a_{21} a_{12} a_{33} + e_{231} a_{21} a_{32} a_{13} \\ + e_{312} a_{31} a_{12} a_{23} + e_{321} a_{31} a_{22} a_{13} \quad (2.12)$$

Ó:

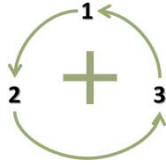


Figura 9 Convención de signos asociada con el símbolo de permutación.

$$e_{rst}a_{r1}a_{s2}a_{t3} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \quad (2.13)$$

La figura [9] puede ser usada para entender mejor y ayudar a determinar los signos asociados con la permutación particular de los índices.

Es una simple cuestión, usando la ecuación (2.13) verificar que el vector producto de los dos vectores  $a$  y  $b$  es:

$$a \times b = e_{rst}e_r a_s b_t = \left. \begin{array}{ll} +e_1 a_2 b_3 & -e_1 a_3 b_2 \\ -e_2 a_1 b_3 & +e_2 a_3 b_1 \\ +e_3 a_1 b_2 & -e_3 a_2 b_1 \end{array} \right\} = e_{rst} a_r b_s e_t \quad (2.14)$$

Donde:

$$a = a_k e_k \quad y \quad b = b_k e_k$$

Nótese que las componentes del vector unitario  $e$  son usadas en estas expresiones, aunado a la convención de la sumatoria.

La ultima relación calculada, involucra los términos de la delta de Kronecker y el símbolo de permutación. Esta relación, es normalmente referida como la identidad  $e - \delta$ . Se ha observado que la siguiente relación existe.

$$e_{ijk}e_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks} \quad (2.15)$$

## 2.5 Elasticidad.

Cuando un objeto se somete a fuerzas externas, sufre cambios de tamaño o de forma, o de ambos. Esos cambios dependen del arreglo de los átomos y su enlace en el material.

Los materiales elásticos se deforman bajo la acción de esfuerzos pero regresan a su forma original cuando el esfuerzo es retirado. No hay una deformación permanente. Algunas deformaciones elásticas, como en los derivados del hule pueden ser grandes, y en otros materiales como minerales o metales son mucho más pequeñas hasta llegarse a considerar infinitesimales.

Muchos materiales obedecen un comportamiento dado por la **ley de Hooke**, la cual dice que la deformación es directamente proporcional al esfuerzo.

Para estos materiales entonces, la ley de Hooke (25) se define:

$$\sigma = E\delta \quad (2.16)$$

De donde podemos establecer una relación para el valor de E:

$$E = \frac{\sigma}{\delta} \quad (2.17)$$

Donde  $\sigma$  es el esfuerzo,  $\delta$  la deformación y finalmente  $E$  es conocido como el módulo de Young.

### 2.5.1 Significado Físico del Módulo de Young.

Si la deformación es igual a 1, entonces el esfuerzo es igual a E. Por lo tanto, el módulo de Young puede ser considerado (teóricamente) como el esfuerzo necesario para producir un 100 % de estiramiento o compresión.

### 2.5.2 Relación de Poisson

Cuando un material es sometido a una prueba de compresión, este tiende a deformar y aumentar sus dimensiones axiales; del mismo modo, cuando es sometido a una prueba a tensión, nuevamente ocurre una deformación, pero contraria a la anterior, el cuerpo disminuye sus dimensiones axiales. La relación de Poisson está definida como la razón de la deformación transversal comparada con la deformación longitudinal.

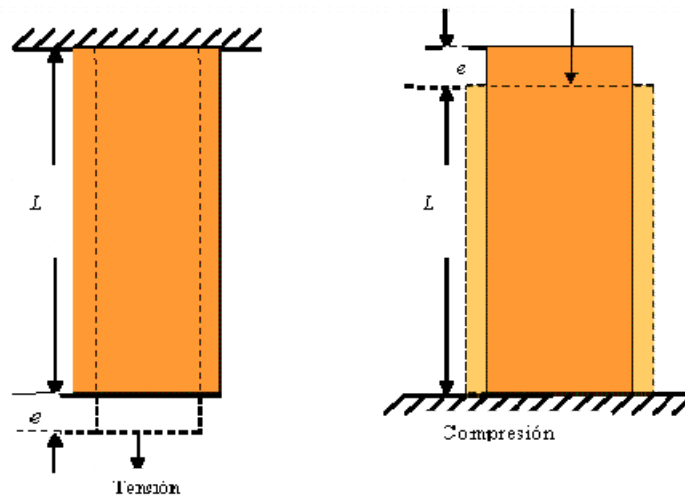


Figura 10 Ejemplos de elementos normales/deformados.

Nótese que la razón es para las deformaciones, no para las dimensiones. No podemos esperar que una varilla delgada se ensanche del mismo modo y en la misma cantidad que un cilindro grueso.

Para la mayoría de los metales ferrosos, la relación de Poisson anda alrededor de 0.3 y usualmente está representada por la letra griega nu  $\nu$ .

### 2.5.3 Módulo de Rigidez

La relación de Poisson describe la deformación transversal, por lo tanto tiene una conexión con el cortante. El módulo de rigidez, usualmente abreviado como  $G$ , juega el mismo rol al describir el cortante como el módulo de Young describe la deformación longitudinal. Esta relación está definida por:

$$G = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{deformación por cortante}} \quad (2.18)$$

$G$  Puede calcularse en términos de  $E$  y  $\nu$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.19)$$

## 2.6 Tensores cartesianos.

Los conceptos de notación índice descritos anteriormente pueden ser aplicados a diferentes aspectos, algunos de los cuales son matemáticos y no están relacionados a las cantidades físicas. Las matrices por ejemplo, son cantidades matemáticas y no necesariamente relacionadas con objetos físicos. El concepto de tensor cartesiano, por otro lado, es una idea estrictamente física. Para comenzar a analizar este concepto considere un vector  $\vec{v}$  como se muestra en la figura [11]. Este vector puede ser, por ejemplo el vector desplazamiento del

punto A hacia el punto B. Ciertamente este desplazamiento es una cantidad física, independientemente de cómo nosotros podamos decidir cómo describirlo.

Sería conveniente representar este vector como la suma de una componente horizontal y una componente vertical como:

$$\vec{v} = 0.866e_1 + 0.500e_2$$

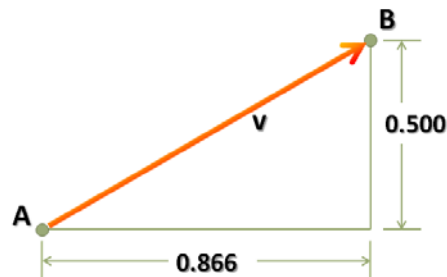


Figura 11 Vector del punto A al punto B.

De cualquier modo, también sería conveniente representar el vector como la suma de una componente tangencial y una componente normal como:

$$\vec{v} = 1.000t + 0.000n$$

Donde  $t$  es un vector unitario tangente a  $\vec{v}$ , y  $n$  es un vector unitario normal a  $\vec{v}$ . Ahora uno debe admitir que el vector  $\vec{v}$  puede ser representado por cualquiera de las dos representaciones mostradas con anterioridad. El vector  $\vec{v}$ , de cualquier modo, es el mismo objeto físico en ambas circunstancias. Las componentes en tensores cartesianos son las descripciones de estos objetos físicos. Por ejemplo un vector puede representarse por sus componentes.

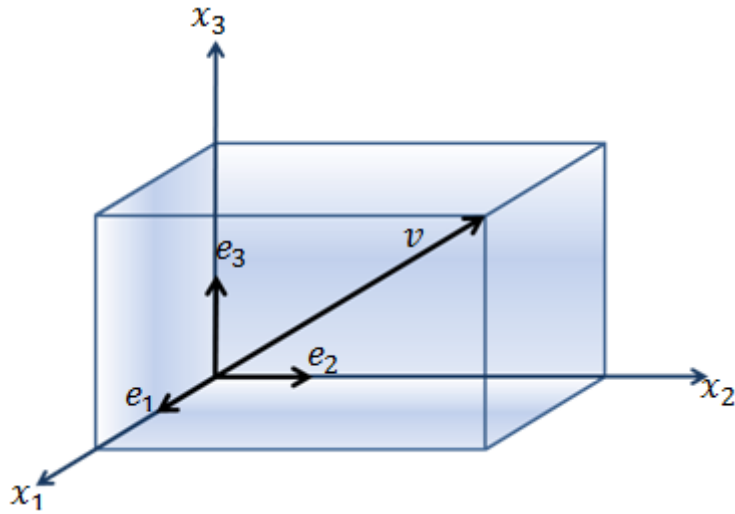


Figura 12 Componentes rectangulares de un vector.

## 2.7 Deformación.

Cuando un objeto sólido es sometido a esfuerzos este tiende a deformarse mecánicamente. La desviación de algunos puntos del cuerpo con respecto a la forma original descargada se le conoce como desplazamiento. La descripción de la deformación de un objeto está dada por el campo de desplazamientos asociado con cada punto en el objeto. Obviamente este cambio en la posición es un vector de campo. Usando los conceptos que previamente se mencionaron este campo de vectores puede definirse como un tensor de rango uno. Si el campo de desplazamientos está descrito en términos de las coordenadas sin deformar  $x_i$  de cada punto, entonces a este tensor se le conoce como la representación de la deformación del material. Esto también hace referencia a un lagrangiano que describe el movimiento. Será de mucha utilidad tener una expresión para el cambio diferencial del campo de desplazamientos  $u_i$  que ocurre entre los puntos originales del material localizados a diferentes distancias entre ellos. Para el cálculo de funciones de muchas variables, tenemos una fórmula para este tipo de cambios diferenciales en cualquier función:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (2.20)$$

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = u_{i,j} dx_j \quad (2.21)$$

Nótese el uso de la notación índice descrita en las secciones anteriores.

Dentro de un objeto, es posible imaginar una línea infinitesimal, como la mostrada en la figura [13], que originalmente vaya del punto  $A$  en la posición  $x_i$  al punto  $B$  en la posición  $x_i + dx_i$ . Después de que ocurre la deformación, esta línea ira del punto  $A^*$  en  $x_i + u_i$  al punto  $B^*$  en la posición  $(x_i + dx_i) + (u_i + du_i)$ .

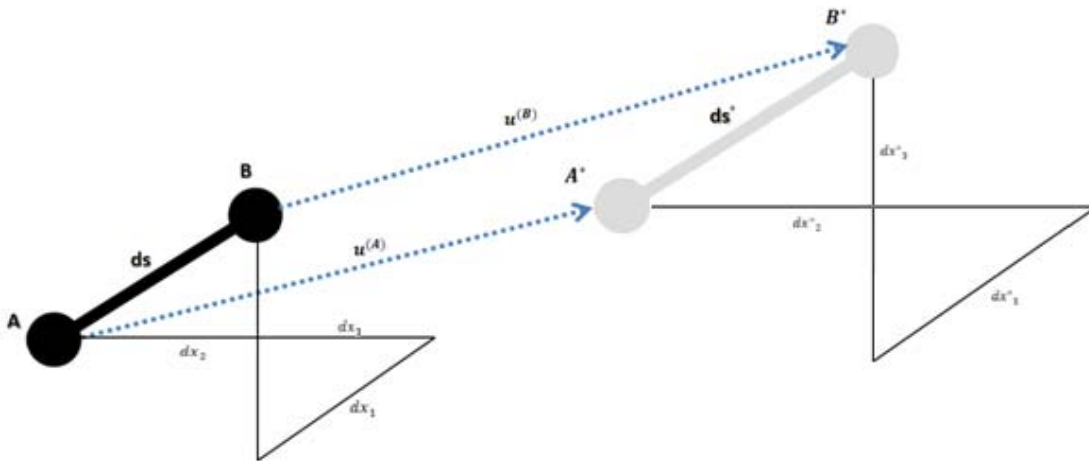


Figura 13 Deformación de un elemento lineal infinitesimal.

Las componentes y la longitud de este elemento lineal infinitesimal antes y después de la deformación pueden determinarse por medio de la siguiente relación:

$$x_i^* = x_i + u_i \quad (2.22)$$

$$dx_i^* = dx_i + du_i = dx_i + u_{i'j}dx_j = \delta_{ij}dx_j + u_{i'j}dx_j = (\delta_{ij} + u_{i'j})dx_j \quad (2.23)$$

Y:

$$ds^2 = dx_i dx_i \quad (2.24)$$

$$(ds^*)^2 = dx_i^* dx_i^* = (\delta_{ij} + u_{i'j})dx_j (\delta_{ik} + u_{i'k})dx_k \quad (2.25)$$

La razón por la que la longitud del elemento lineal infinitesimal antes y después de la deformación, es importante en mecánica de sólidos porque provee la información necesaria para calcular la deformación que ocurre en cualquier punto del cuerpo. Para comenzar a determinar el campo de deformación en un cuerpo deformado, considere la diferencia de cuadrados de la longitud infinitesimal mostrada antes.

$$\begin{aligned} (ds^*)^2 - ds^2 &= (\delta_{ij} + u_{i'j})(\delta_{ik} + u_{i'k})dx_j dx_k - dx_i dx_i \\ &= (\delta_{ij} + u_{i'j})(\delta_{ik} + u_{i'k})dx_j dx_k - \delta_{ij} dx_i dx_j \\ &= \delta_{ij} \{ (\delta_{ik} + u_{i'k})(\delta_{jl} + u_{j'l})dx_k dx_l - dx_i dx_j \} \\ &= \delta_{ij} \{ [\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ik}u_{j'l} + \delta_{jl}u_{i'k} + u_{i'k}u_{j'l}]dx_k dx_l - dx_i dx_j \} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pero:

$$\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl}dx_k dx_l = \delta_{jk}\delta_{jl}dx_k dx_l = \delta_{kl}dx_k dx_l = dx_A dx_A$$

$$\delta_{ij}\delta_{ik}u_{j'l}dx_k dx_l = \delta_{jk}u_{j'l}dx_k dx_l = u_{j'l}dx_k dx_l$$

$$\delta_{ij}\delta_{jl}u_{i'k}dx_k dx_l = \delta_{il}u_{i'k}dx_k dx_l = u_{i'k}dx_k dx_l$$

$$\delta_{ij}u_{i'k}u_{j'l}dx_k dx_l = u_{j'k}u_{j'l}dx_k dx_l$$

$$-\delta_{ij}dx_i dx_j = -dx_A dx_A$$

Y:

$$(ds^*)^2 - ds^2 = 2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j \quad (2.27)$$

Donde:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} + u_{k,j}\} \quad (2.28)$$

La cantidad definida en la ecuación es llamada tensor deformación, o más precisamente el *lagrangiano o tensor de deformación de Green-San Venant*.

## 2.8 Tracción, esfuerzos y equilibrios.

Con el fin de entender mejor el concepto de intensidad de la fuerza, considere el cuerpo solido en la figura [14].

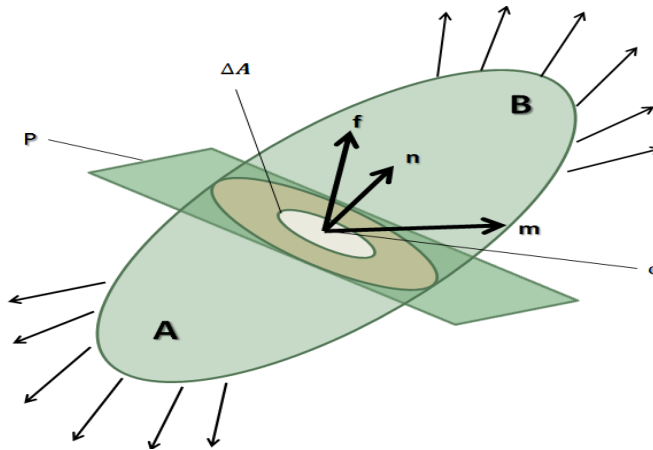


Figura 14 Cuerpo en equilibrio.

Asumiendo que el cuerpo está en equilibrio bajo las fuerzas que se muestran, uno puede imaginar un plano  $P$  a través del cuerpo que también atraviesa el punto "o". Este plano divide al cuerpo original en dos partes: "A" y "B". Centrándose en la parte A, uno puede decir que se encuentra también en equilibrio, aun cuando estén actuando las fuerzas externas, también existen las acciones internas que la parte B ejerce sobre A. En mecánica se asume que estas acciones son distribuidas y continuas. Para cuantificar el concepto de estas acciones internas, consideremos una parte pequeña en la superficie del área de la parte A. Denominaremos esta parte como  $\Delta A$  con un vector unitario hacia el exterior  $n$ . El efecto resultante de la parte B en  $\Delta A$  puede ser caracterizada por un vector fuerza  $f$  y un momento de torsión  $m$ . Los dos condicionales fundamentales de la mecánica deben relacionarse con los límites de la fuerza resultante y el momento actuantes en  $\Delta A$ . Estas dos condicionales serían:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{f}{\Delta A} = t \quad ; \quad y \quad \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{m}{\Delta A} = 0 \quad (2.29)$$

La primera ecuación declara que la fuerza resultante por unidad de área actuando sobre  $\Delta A$  alcanzará un límite definido (ambas magnitud y dirección) como el tamaño del elemento se aproxima a cero. Este vector es llamado vector tracción. Es por ello que el vector tracción  $t$  es el vector fuerza por unidad de área que actúa en el plano  $P$  con normal  $n$  en el punto "o".

## 2.9 Leyes de esfuerzo-deformación.

Un cuerpo elástico se define como un cuerpo que se deforma cuando está sujeto a esfuerzos de cierta manera que cuando los esfuerzos son retirados del cuerpo, las deformaciones desaparecen.

La ley de Hooke que se muestra a continuación, es una relación lineal obtenida experimentalmente entre las componentes del esfuerzo y el tensor deformación para un

material elástico. Para un material isotrópico, el material responde exactamente igual sin importar la dirección de la carga. Para este caso de isotropía, la ley de Hooke puede ser escrita en términos de dos constantes:

$$\sigma_{kl} = C_{klmn}e_{mn} \quad (2.30)$$

Y

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (2.31)$$

Los dos símbolos griegos mostrados arriba son conocidos como “Lame’s constants”, y están relacionadas al módulo de elasticidad  $E$ , la relación de Poisson  $\nu$ , y el módulo cortante  $G$  como:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad ; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.32.r)$$

Por lo tanto la ecuación quedaría como:

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E \delta_{ij} e_{kk}}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} + \frac{E e_{ij}}{(1 + \nu)} \quad (2.32)$$

La ecuación de arriba describe los componentes de un tensor de esfuerzos en términos de las componentes de la deformación. Esta relación puede invertirse para lograr la descripción de las componentes de la deformación en términos de los esfuerzos. El proceso de inversión es expedito mediante la obtención de una expresión para  $\sigma_{kk}$  primero como:

$$\sigma_{kk} = \lambda\delta_{kk}e_{nn} + 2\mu e_{kk} = \lambda(3)e_{nn} + 2\mu e_{nn}$$

Ó

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)e_{nn} \quad (2.33)$$

Y

$$e_{nn} = \frac{\sigma_{kk}}{(3\lambda + 2\mu)} \quad (2.34)$$

Las expresiones de arriba pueden sustituirse en la ecuación (2.31) para  $\sigma_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{(3\lambda + 2\mu)} + 2\mu e_{ij}$$

Ó

$$e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda\delta_{ij}\sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (2.35)$$

El método de elemento frontera es ideal para resolver problemas que involucren efectos termo-elásticos. Este tipo de problemas existen cuando un sólido está sujeto a condiciones de cambio de temperatura que provoca un aumento en la distribución de la temperatura a lo largo de su volumen. Esta distribución de temperatura produce una expansión térmica en el objeto considerado como se muestra más adelante. En un material isotrópico, a una temperatura uniforme de referencia  $T_o$ ; un pequeño incremento en la temperatura se sabe que produce una expansión pura en el volumen, si el objeto no está trabajado contra este tipo de movimientos. Esta expansión puede ser expresada como la deformación térmica:

$$e_{ij}^T = \delta_{ij}\alpha\Delta T = \delta_{ij}\alpha(T - T_o) \quad (2.36)$$

Donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica del material. Nótese que este tipo de expansión puede ocurrir sin la necesidad de que se esté aplicando esfuerzo alguno al sólido. Por lo tanto es posible tener deformación sin esfuerzos. También es sabido que esfuerzos muy grandes pueden ser soportados en un objeto trabajado, debido a los efectos de la expansión térmica. Para estos casos por lo tanto, se puede tener esfuerzos sin que produzcan alguna deformación. En un contexto más general, la deformación total o actual, que ocurre en un cuerpo será la suma de su deformación térmica y la deformación producida por los esfuerzos que estén actuando en el material. Escribiendo la ley de esfuerzo-deformación en términos de constantes ingenieriles, esta relación puede ser expresada como:

$$e_{ij} = e_{ij}^M + e_{ij}^T = \frac{1}{E}\{(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\} + \delta_{ij}\alpha\Delta T \quad (2.37)$$

Esta ecuación también puede ser invertida para quedar:

$$\sigma_{ij} = \left\{ \frac{E e_{ij}}{(1 + \nu)} + \frac{\nu E \delta_{ij} e_{kk}}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \right\} - \frac{E \delta_{ij} \alpha \Delta T}{(1 - 2\nu)} \quad (2.38)$$

# CAPITULO 3

## FORMULACIÓN DE FRONTERA EN MECÁNICA DE SÓLIDOS.

---

Con el propósito de tratar de describir completamente como el método del BEM trabaja en mecánica de sólidos, es necesario presentar las soluciones fundamentales asociadas y emplearlas en las derivadas de las ecuaciones integrales gobernadoras de frontera. El grupo de ecuaciones fundamentales descritas anteriormente, son combinadas para dar paso a la célebre ecuación de elasticidad de Navier. Será entonces que utilizando el concepto del vector de Galerkin, podremos disgregar totalmente las ecuaciones de Navier. A lo largo de este capítulo se irán utilizando más conceptos para finalmente obtener las formulaciones de frontera buscadas.

### **3.1 Ecuaciones de elasticidad de Navier.**

En elasticidad lineal para un problema en 3D, el inconveniente es encontrar las 3 componentes de los desplazamientos, las 6 deformaciones, y las 6 componentes únicas del tensor de esfuerzos, tracciones en la superficie, y desplazamientos en la superficie. En un problema bien formulado, para cada dirección; cualquiera, ya sea los desplazamientos o las tracciones en la

superficie serán especificados, mientras que las otras cantidades serán desconocidas. El total de 15 incógnitas (tres desplazamientos, seis deformaciones y seis esfuerzos) son regidos por 6 relaciones esfuerzo-desplazamiento, 6 relaciones esfuerzo-deformación, y 3 ecuaciones de equilibrio:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i'j} + u_{j'i}) \quad (3.1)$$

*deformación – desplazamiento*

$$\sigma_{kl} = C_{klmn}e_{mn} \quad (3.2)$$

*esfuerzo – deformación*

ó

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ji'j} + f_i = 0 \quad (3.4)$$

*equilibrio*

A continuación procedemos a reformular las ecuaciones y calcular el problema íntegramente en términos de los desplazamientos. Primero, la ley de esfuerzo deformación dada en la ecuación (3.3) puede ser sustituida en la ecuación (3.4) para resultar en una ecuación de equilibrio en términos de las deformaciones. Después, la relación de deformación-desplazamientos puede ser usada para transformar esta expresión en una ecuación de equilibrio en términos de los desplazamientos.

$$(2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{kk})_{,j} + f_i = 0$$

Ó

$$2\mu e_{ij,j} + \lambda e_{kk,j} + f_i = 0 \quad (3.5)$$

Y

$$2\mu \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji})_{,j} + \lambda \frac{1}{2} (u_{k,k} + u_{k,k})_{,i} + f_i = 0$$

Ó

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} + f_i = 0 \quad (3.6)$$

La forma vectorial de esta expresión es:

$$\mu \nabla^2 u + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot u) + f = 0 \quad (3.7)$$

La ecuación de equilibrio en términos de los desplazamientos mostrada previamente es conocida como la ecuación de elasticidad de Navier.

### 3.2 Vector de Galerkin.

Existen varios enfoques para la disociación de las ecuaciones de Navier. Generalmente la disociación es lograda por la inteligente sustitución de algunas otras funciones para los componentes de los desplazamientos y los esfuerzos. El único que será analizado en esta

sección será el enfoque del vector de Galerkin. En este punto la componente del desplazamiento  $u_i$  es reemplazado en la ecuación (3.6) por una expresión que incluya segundas derivadas de otro (Galerkin) vector  $g$ .

$$2\mu u_i = c g_{i,jj} - g_{j,i} \quad (3.8)$$

Es importante percatarse que el factor  $2\mu$  ha sido escrito en el lado izquierdo de la ecuación (3.8). Esto fue hecho exclusivamente para conveniencia en la notación. Además que la constante  $c$  aun no ha sido determinada. Antes de hacer esta sustitución, el segundo término en la ecuación (3.6) es reescrito en términos de  $\mu$  y  $\nu$ , usando las relaciones en la ecuación (2.32.r):

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{\nu}{(1-2\nu)} \cdot \frac{2E}{(1+\nu)} = \frac{2\nu\mu}{(1-2\nu)}$$

Y:

$$\lambda + \mu = \frac{2\nu\mu + \mu(1-2\nu)}{(1-2\nu)} = \frac{\mu}{(1-2\nu)} \quad (3.9)$$

Por lo tanto:

$$\mu u_{i,jj} + \frac{\mu}{(1-2\nu)} u_{j,i} + f_i = 0 \quad (3.10)$$

Sustituyendo la ecuación (3.8) en (3.10) resulta:

$$\left\{ \frac{c}{2} g_{i'kk} - \frac{1}{2} g_{k'ki} \right\}_{,jj} + \frac{1}{(1-2\nu)} \left\{ \frac{c}{2} g_{j'kk} - \frac{1}{2} g_{k'kj} \right\}_{,ji} + f_i = 0$$

Ó:

$$\frac{c}{2} g_{i'kkjj} + g_{k'kjj} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{c}{2(1-2\nu)} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \right\} + f_i = 0 \quad (3.11)$$

Nótese que la derivación arriba mencionada hace uso del hecho que  $g_{k'kijj} = g_{j'kkji} = g_{k'kjj}$ . La constante  $c$  puede ahora ser determinada como la constante que hace que la cantidad entre paréntesis en la ecuación (3.11) sea igual a cero:

$$-\frac{1}{2} + \frac{c}{2(1-2\nu)} - \frac{1}{2(1-2\nu)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \frac{c-1}{(1-2\nu)} - 1 \right\} = 0$$

Ó:

$$c - 1 = 1 - 2\nu \Rightarrow c = 2(1 - \nu) \quad (3.12)$$

Y:

$$2\mu u_i = 2(1 - \nu) g_{i'jj} - g_{j'ji} \quad (3.13)$$

Con este valor en particular usado para la constante  $c$ , la ecuación de equilibrio en términos del vector de Galerkin se convierte en:

$$(1 - \nu) g_{i'kkjj} + f_i = 0 \quad (3.14)$$

La característica distintiva de la ecuación (3.14) es que es completamente dissociada. Está por demás decir que el índice libre  $i$  ocurre únicamente en el subscrito, indicando los componentes

del vector de Galerkin. La última expresión mencionada puede ser escrita en su forma expandida como:

$$(g_{i11} + g_{i22} + g_{i33})_{,ij} + \frac{1}{(1-\nu)} f_i = 0$$

Ó:

$$\begin{aligned} &g_{i'1111} + g_{i'2211} + g_{i'3311} \\ &+ g_{i'1122} + g_{i'2222} + g_{i'3322} \\ &+ g_{i'1133} + g_{i'2233} + g_{i'3333} + \frac{1}{(1-\nu)} f_i = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

La forma del vector de la ecuación (3.14) es:

$$\nabla^2(\nabla^2 g) + \frac{1}{(1-\nu)} f = 0 \quad (3.16)$$

El operador mostrado en esta (3.16) (El laplaciano) es llamado el “operador bi-armónico”. Cuando la fuerza aplicada al cuerpo es cero, la ecuación (3.14) es llamada la ecuación *bi-armónica*.

Por lo tanto, se ha mostrado que cualquier solución al problema elástico puede ser descrito en términos de la ecuación (3.14) y ecuación (3.13). La ecuación (3.14) es un grupo de 3 desacopladas ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden. Una vez que los componentes de  $g$  se ha encontrado que satisfacen la ecuación (3.14), la ecuación (3.13) puede ser usada para determinar los componentes de  $u$  mediante la realización de las diferenciales indicadas.

Recordemos que las componentes del desplazamiento no son las únicas cantidades de interés en un problema de mecánica de sólidos. Con el fin de obtener una expresión para las componentes del esfuerzo en términos del vector de Galerkin, sustituimos la relación

deformación-desplazamiento dada en la ecuación (3.1) por la ley esfuerzo-deformación representada en la ecuación (3.3) para originar una ley esfuerzo-desplazamiento.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{1}{2} (u_{k'lk} + u_{k'lk}) + 2\mu \frac{1}{2} (u_{i'j} + u_{j'i})$$

Ó:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k'lk} + \mu (u_{i'j} + u_{j'i}) \quad (3.17)$$

Sustituyendo ecuación (3.13) en esta expresión resulta en:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} \delta_{ij} (2\mu u_k)_{,k} + \frac{1}{2} (2\mu u_i)_{,j} + \frac{1}{2} (2\mu u_j)_{,i} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} \delta_{ij} [2(1-\nu)g_{k'lk} - g_{l'lk}]_{,k} + \frac{1}{2} [2(1-\nu)g_{i'kk} - g_{k'ki}]_{,j} + \frac{1}{2} [2(1-\nu)g_{j'kk} - g_{k'kj}]_{,i} \end{aligned}$$

Ó:

$$\sigma_{ij} = (1-\nu)[g_{i'kkj} - g_{j'kki}] - g_{k'kij} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} \delta_{ij} (1-2\nu)g_{k'lkl} \quad (3.18)$$

La forma final de la relación entre esfuerzo-Vector de Galerkin se obtiene removiendo  $\lambda$  de la expresión antes mencionada mediante el uso de la ecuación (3.9):

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= \frac{\mu}{(1-2\nu)} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} + 1 = \frac{1}{(1-2\nu)} \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{(1-2\nu)} - 1 = \frac{1 - (1-2\nu)}{(1-2\nu)} \\ &= \frac{2\nu}{(1-2\nu)} \end{aligned}$$

Y:

$$\sigma_{ij} = (1 - \nu)[g_{i'kkj} - g_{j'kki}] - g_{k'kij} + \nu\delta_{ij}(1 - 2\nu)g_{k'kll} \quad (3.19)$$

### 3.3 Problema de Kelvin.

El problema de Kelvin en 3D involucra la respuesta de un infinito, homogéneo, isotrópico, medio elástico a un punto de carga (26). El origen del sistema coordenado puede ser remplazado en el punto fuerza y la axial  $x_3$  alineado con la dirección de la fuerza como se muestra en la figura [15].

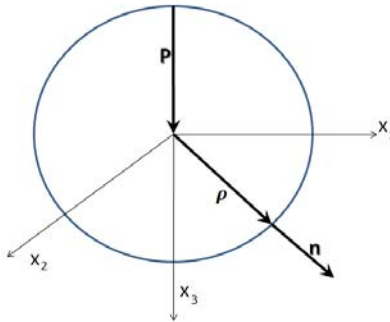


Figura 15 Superficie esférica usada para resolver el problema de Kelvin.

Esta fuerza puede ser considerada como el caso limitante de una fuerza en el cuerpo  $f_3$  actuando sobre una esfera mientras el radio de la esfera se reduce a cero y la intensidad de la fuerza en el cuerpo se incrementa tanto mientras que la carga resultante  $P$  permanece constante. Este concepto es consistente con el concepto de la delta de Dirak.

La figura [15] representa una esfera centrada en el punto de aplicación del punto de carga. Sobre la superficie de esta esfera un vector tracción debe actuar de tal manera que la esfera permanezca en equilibrio. Esta declaración esta cuantificada de la siguiente manera:

$$\sum F_3 = 0 = P + \int_{\Gamma} t_3 d\Gamma = P + \int_{\Gamma} \sigma_{j3} n_j d\Gamma = P + \int_{\Gamma} \sigma_{j3} \frac{x_j}{\rho} d\Gamma \quad (3.20)$$

En el desarrollo de la ecuación (3.20), se ha hecho uso de la transformación de esfuerzos de Cauchy y de la forma simple del vector unitario normal a la superficie de la esfera. Las componentes del esfuerzo que aparecen en esta ecuación pueden ser remplazadas por su representación en términos del vector de Galerkin mostrado en la ecuación (3.19).

$$P + \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j \{ (1 - \nu) [g_{3lkkj} - g_{j'kk3}] - g_{k'k3j} + \nu \delta_{3j} g_{l1kk} \} d\Gamma = 0 \quad (3.21)$$

La figura [16] puede ser usada para visualizar la transformación de la cantidad  $d\Gamma$  en un sistema de coordenadas esféricas.

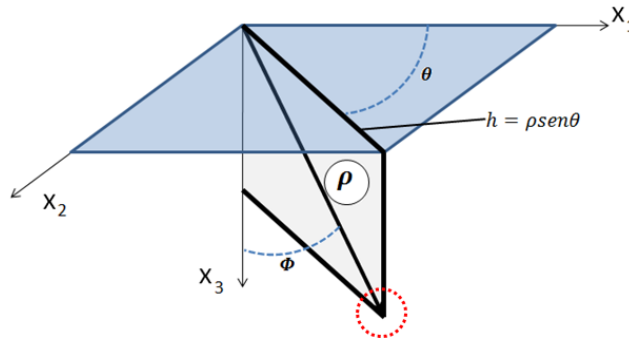


Figura 16 Sistema de coordenadas esféricas.

$$x_1 = h \cos \theta \quad ; \quad x_2 = h \sin \theta \quad ; \quad x_3 = \rho \cos \theta \quad ; \quad h = \rho \sin \theta$$

Ó:

$$x_1 = \rho \sin \Phi \cos \theta \quad ; \quad x_2 = \rho \sin \Phi \sin \theta \quad ; \quad x_3 = \rho \cos \theta \quad (3.22)$$

Y:

$$d\Gamma = \text{sen}\Phi \rho^2 d\theta d\Phi \quad (3.23)$$

Sustituyendo la ecuación (3.23) en (3.21) resulta:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho x_j \{ (1 - \nu) [g_{3'kkj} - g_{j'kk3}] - g_{k'k3j} + \nu \delta_{3j} g_{l'lkk} \} \text{sen}\Phi d\theta d\Phi = -P \quad (3.24)$$

El hecho de que la integral mostrada en la ecuación (3.24) debe de ser independiente de  $\rho$  puede ser usada para especular acerca de la forma del vector de Galerkin para este problema. Claramente este problema posee simetría cilíndrica con respecto al eje axial  $x_3$ . Nótese que el producto de los dos primeros símbolos mostrados en la ecuación (3.24) tiene una dimensión de longitud cuadrática.

Para mantener la independencia de la integral con respecto de  $\rho$ , la tercera derivada del vector de Galerkin que aparece en esta expresión debe tener la dimensión de la longitud cuadrática reciproca. Estas pasos deben de ser utilizados para lograr al menos un caso plausible para la explicación de que el vector de Galerkin para este problema debe ser proporcional a  $\rho$ .

Es por ello que una suposición para la solución a este problema es:

$$g_1 = g_2 = 0 \quad ; \quad g_3 = b\rho \quad (3.25)$$

Donde  $b$  es una constante por ser determinada. La sustitución de la ecuación (3.25) en la ecuación (3.24) requiere el desarrollo de relaciones para la tercera derivada de  $\rho$ . Estas relaciones son derivadas a continuación:

$$\rho = (x_1 x_1)^{1/2} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1} = \rho_{1i} = \frac{1}{2} (x_1 x_1)^{-1/2} (x_{1i} x_1 + x_1 x_{1i}) = \rho^{-1} (x_{1i} x_1) = \rho^{-1} (\delta_{1i} x_1) = x_i \rho^{-1} \quad (3.27)$$

En la última expresión nótese el uso que se dio al hecho de que una derivada de la coordenada  $x_1$  con respecto a la coordenada  $x_i$  es la delta de Kronecker  $\delta_{1i}$ . La segunda y tercera derivada pueden ser ahora tomadas:

$$\rho_{rij} = \delta_{ij} \rho^{-1} + x_i (-1 \rho^{-2} \rho_{1j}) = \rho^{-1} (\delta_{ij} - x_i \rho^{-1} \rho_{1j}) = \rho^{-1} (\delta_{ij} - \rho_{1i} \rho_{1j}) \quad (3.28)$$

Y:

$$\rho_{rijk} = -1 \rho^{-2} \rho_{1k} (\delta_{ij} - \rho_{1i} \rho_{1j}) + \rho^{-1} (0 - \rho_{1ik} \rho_{1j} - \rho_{1i} \rho_{1jk})$$

$$\rho_{rijk} = -\rho^{-2} \rho_{1k} (\delta_{ij} - \rho_{1i} \rho_{1j}) - \rho^{-1} (\rho^{-1} [\delta_{ik} - \rho_{1i} \rho_{1k}] \rho_{1j} + \rho_{1i} \rho^{-1} [\delta_{jk} - \rho_{1j} \rho_{1k}])$$

Ó:

$$\rho_{rijk} = \rho^{-2} [3 \rho_{1i} \rho_{1j} \rho_{1k} - (\rho_{1i} \delta_{jk} + \rho_{1j} \delta_{ki} + \rho_{1k} \delta_{ij})] \quad (3.29)$$

Con la sustitución de la ecuación (3.26) y (3.27) en la ecuación (3.29), se puede derivar una simple fórmula para esta cantidad:

$$\rho_{rijk} = \rho^{-2} [3 x_i x_j x_k \rho^{-3} - \rho^{-1} (x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ki} + x_k \delta_{ij})]$$

Ó:

$$\rho_{ijk} = \rho^{-3} [3x_i x_j x_k \rho^{-2} - (x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ki} + x_k \delta_{ij})] \quad (3.30)$$

Y:

$$\rho_{ilm} = \rho^{-3} [3\{x_l x_l\} x_m \rho^{-2} - (x_l \delta_{lm} + x_l \delta_{ml} + x_m \delta_{ll})] = \rho^{-3} [3\rho^2 x_m \rho^{-2} - 5x_m]$$

Ó:

$$\rho_{ilm} = -2x_m \rho^{-3} \quad (3.31)$$

Ecuaciones (3.30) y (3.31) pueden ahora ser sustituidas en la integral (3.21) de cuatro términos:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j (1 - \nu) g_{3'kkj} d\Gamma = b(1 - \nu) \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j g_{'kkj} d\Gamma \\ &= b(1 - \nu) \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j (-2x_j \rho^{-3}) d\Gamma \end{aligned}$$

Ó:

$$I_1 = -2b(1 - \nu) \int_{\Gamma} \rho^{-1} (x_j x_j) \rho^{-3} d\Gamma = -2b(1 - \nu) \int_{\Gamma} \rho^{-2} d\Gamma \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j (1 - \nu) g_{3'kkj} d\Gamma = b(1 - \nu) \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j g_{'kkj} d\Gamma \\ &= b(1 - \nu) \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j (-2x_j \rho^{-3}) d\Gamma \end{aligned}$$

Ó:

$$I_2 = -2b(1 - \nu) \int_{\Gamma} \left(\frac{x_3}{\rho}\right) \rho^{-2} d\Gamma \quad (3.33)$$

$$I_4 = \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j \nu \delta_{3j} g_{l'lkk} d\Gamma = \nu \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_3 g_{3'3kk} d\Gamma = -2b\nu \int_{\Gamma} \left(\frac{x_3}{\rho}\right) \rho^{-2} d\Gamma \quad (3.34)$$

Y:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j (-g_{k'k3j}) d\Gamma = -b \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j \rho_{i33j} d\Gamma \\ &= -b \int_{\Gamma} \rho^{-1} x_j \rho^{-3} [3x_3 x_3 x_j \rho^{-2} - (x_3 x_3 + x_3 x_3 + \{x_j x_j\} 1)] d\Gamma \\ &= -b \int_{\Gamma} \rho^{-4} [3(x_j x_j) x_3 x_3 \rho^{-2} - (x_3 x_3 + x_3 x_3 + \{x_j x_j\} 1)] d\Gamma \\ &= -b \int_{\Gamma} \left[ 3 \left(\frac{x_3}{\rho}\right)^2 \rho^{-2} - 2 \left(\frac{x_3}{\rho}\right)^2 \rho^{-2} - \rho^{-2} \right] d\Gamma \\ &= -b \int_{\Gamma} \left[ \left(\frac{x_3}{\rho}\right)^2 \rho^{-2} - \rho^{-2} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.35)$$

Estas cuatro relaciones pueden colocarse juntas para resultar en:

$$-P = b \int_{\Gamma} \rho^{-2} [-2(1 - \nu) + 1] + \left(\frac{x_3}{\rho}\right)^2 \rho^{-2} [-2(1 - \nu) + 1 - 2\nu] d\Gamma$$

Ó:

$$-P = (2\nu - 1)b \int_{\Gamma} \rho^{-2} d\Gamma - 3b \int_{\Gamma} \left(\frac{x_3}{\rho}\right)^2 \rho^{-2} d\Gamma = J_1 + J_2 \quad (3.36)$$

Finalmente estas dos integrales pueden ser desarrolladas en el sistema de coordenadas esféricas con la ayuda de las ecuaciones (3.22) y (3.23):

$$\begin{aligned} J_1 &= (2\nu - 1)b \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \rho^{-2} \operatorname{sen}\Phi d\theta \right) d\Phi = (2\nu - 1)b \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\Phi \left( \int_0^{2\pi} \rho^{-2} d\theta \right) d\Phi \\ &= (2\nu - 1)b(2\pi) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\Phi d\Phi = (2\nu - 1)b(2\pi)(-\cos\Phi) \Big|_0^{\pi} = 4\pi(2\nu - 1)b \end{aligned} \quad (3.37)$$

Y:

$$\begin{aligned} J_2 &= -3b \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left(\frac{x_3}{\rho}\right)^2 \rho^{-2} \rho^2 \operatorname{sen}\Phi d\theta \right) d\Phi = -3b \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2\pi} (\cos\Phi)^2 \operatorname{sen}\Phi d\theta \right) d\Phi \\ &= -3b \int_0^{\pi} (\cos\Phi)^2 \operatorname{sen}\Phi \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) d\Phi = -3b(2\pi) \int_0^{\pi} (\cos\Phi)^2 \operatorname{sen}\Phi d\Phi \\ &= -3b(2\pi) \frac{(\cos\Phi)^3}{3} \Big|_0^{\pi} = -b(2\pi)(2) = -4\pi b \end{aligned} \quad (3.38)$$

Colocando estos dos resultados juntos resulta en:

$$-P = 4\pi(2\nu - 1)b - 4\pi b = 4\pi b[2\nu - 1 - 1] = 8\pi b[\nu - 1]$$

Ó:

$$b = \frac{-P}{8\pi b(\nu - 1)} \quad (3.39)$$

La integral de las componentes de la tracción actuando en la superficie de una esfera centrada en el punto de aplicación de la carga concentrada, ha sido realizada para cuantificar el hecho de que esta parte en el medio elástico esta en equilibrio. Estas tracciones fueron relacionadas a la distribución de esfuerzos mediante la transformación de esfuerzos de Cauchy, y los esfuerzos en turno, fueron escritos en términos del vector de Galerkin. Fue demostrado en la integral de antes mencionada que empleando el vector particular de Galerkin  $g$  siendo  $g_1 = g_2 = 0$ , y  $g_3 = b\rho$ , es de hecho independiente del tamaño de la esfera. Como cualquier vector de Galerkin satisface las ecuaciones de elasticidad de Navier, y particularmente este vector de Galerkin satisface las condiciones de frontera (esfera en equilibrio independientemente de su tamaño), este vector de Galerkin, es particularmente, el vector de Galerkin que resuelve el problema de Kelvin. Es importante recordar que durante el proceso de resolución, la constante  $b$  ya fue determinada.

Recordemos que un punto de carga en la dirección  $x_3$  fue considerado en este problema y aplicado mediante una fuerza en el cuerpo en la forma de la función de delta de Dirac. Regresando a la ecuación (3.13) y sustituyéndole la ecuación (3.25), las componentes de respuesta de desplazamiento de Kelvin pueden ser escritas como:

$$2\mu u_i = 2(1 - \nu)g_{ijj} - g_{jji} = 2(1 - \nu)\delta_{i3}g_{3rjj} - g_{3r3i} = b\{2(1 - \nu)\delta_{i3}\rho_{rjj} - \rho_{r3i}\} \quad (3.39)$$

Es importante destacar en este punto, que la expresión (3.39) se refiere a la  $i$ -ésima componente de desplazamiento del vector correspondiente al punto de carga en la dirección "3". En análisis de BEM, las componentes de respuesta de desplazamiento correspondientes a la carga concentrada en la dirección "2" también serán requeridas.

Es una simple suposición el reconocer que la respuesta a los puntos de carga en estas otras direcciones (dirección  $k$ ) puede ser escrita al reemplazar el “3” en la ecuación (3.39) por “ $k$ ”.

$$2\mu u_{ik} = b\{2(1 - \nu)\delta_{ik}\rho_{ljj} - \rho_{lki}\} \quad (3.40)$$

### 3.4 Formulación Integral.

Antes en este capítulo, se presentó una formulación para el desplazamiento de la ecuación fundamental de elasticidad. Esta resulta ser la ecuación de Navier. Estas ecuaciones fueron reformuladas en términos del vector de Galerkin, produciendo un grupo desajustado de ecuaciones diferenciales gobernantes.

#### 3.4.1 El principio del trabajo virtual.

Una declaración equivalente integral a la ecuación de equilibrio puede obtenerse al multiplicar la ecuación (3.4) por una función escalar arbitraria del peso  $W$  e integrando sobre el dominio (volumen)  $\Omega$  del cuerpo bajo análisis. Resultando la integral en cero, porque la cantidad en paréntesis también es cero:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + f_i)W d\Omega = 0 \quad (3.41)$$

Como la ecuación de equilibrio en sí, la expresión de arriba contiene índices libres  $i$  y por lo tanto representa 3 ecuaciones. Dado que la función  $W$  es arbitraria, las 3 ecuaciones de los componentes (con diferentes pesos) pueden ser agregados de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + f_i) W_i d\Omega = 0 \quad (3.42)$$

Revisando la ecuación, nos podemos percatar de que el primer término de la ecuación involucra una derivada. Esta característica puede ser utilizada para reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$0 = \int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} W_i + f_i W_i) d\Omega = \int_{\Omega} ([\sigma_{ji} W_i]_{,j} - \sigma_{ij} W_{i,j} + f_i W_i) d\Omega \quad (3.43)$$

El término  $[\sigma_{ji} W_i]_{,j}$  puede ser reorganizado como la divergencia de  $[\sigma_{ij} W_i]$  y aplicar el teorema de la divergencia (1.7) para reescribir la expresión en términos de integrales de superficie y volumen:

$$0 = \int_{\Gamma} (\sigma_{ji} W_i) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} W_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} f_i W_i d\Omega \quad (3.44)$$

La transformación de esfuerzos puede ser usada ahora para reescribir esta expresión en términos de las componentes de la tracción en la superficie de  $\Gamma$ :

$$\int_{\Gamma} t_i W_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i W_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} W_{i,j} d\Omega \quad (3.45)$$

Sería conveniente convertir el lado derecho de la ecuación a una forma que involucre únicamente la parte simétrica de  $W_{i,j}$

La parte simétrica  $s_{ij}$  y la parte anti simétrica  $a_{ij}$  están definidas como:

$$W_{ij} = \frac{1}{2}W_{ij} + \frac{1}{2}W_{ij} + \frac{1}{2}W_{ji} - \frac{1}{2}W_{ji} = \frac{1}{2}(W_{ij} + W_{ji}) - \frac{1}{2}(W_{ij} + W_{ji})$$

Ó:

$$W_{ij} = s_{ij} + a_{ij} \quad (3.46)$$

Cuando los tensores simétrico y anti simétrico están involucrados en lo que se llama una contracción. El resultado es cero. Una contracción se puede definir como la especialización del producto tensorial que ocurre cuando índices repetidos son introducidos (i.e.  $a_i b_j$  es reemplazado por  $a_i b_i$ ). Para probar la expresión hecha acerca de la contracción de un tensor simétrico y anti simétrico considere:

$$s_{ij}a_{ij} = s_{ij}(-a_{ji}) = -s_{ik}a_{kl} = -s_{ji}a_{ij} = -(s_{ij})a_{ij} = 0 \quad (3.47)$$

Este resultado, además del hecho de que el tensor de esfuerzo es simétrico, puede ser utilizado para reescribir la ecuación (3.45) como:

$$\int_{\Gamma} t_i W_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i W_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (W_{ij} + W_{ji}) d\Omega \quad (3.48)$$

La ecuación (3.45) o (3.48) puede conceptualizarse como una ecuación integral, equivalente a la ecuación de equilibrio, que gobierna el comportamiento de un objeto solido que está en equilibrio bajo la acción de tracciones en la superficie  $t_i$ , fuerzas en el cuerpo  $f_i$ , y obteniendo

un equilibrio resultante de distribución de esfuerzos  $s_{ij}$ . Esta ecuación fue derivada usando la ecuación de equilibrio, la transformada de esfuerzos de Cauchy, y el teorema de la divergencia.

### 3.4.2 Teorema de reciprocidad.

Bajo la acción de fuerzas en el cuerpo y tracciones en la superficie, el cuerpo en cuestión se deformara. Las cantidades relacionadas con las fuerzas (tracciones en la superficie, fuerzas en el cuerpo y esfuerzos) han sido llamadas cantidades estáticas. Las cantidades relacionadas con la descripción de la deformación (desplazamiento y deformación) son por lo tanto cantidades cinemáticas.

Cada término en el principio del trabajo virtual se vio que involucra el producto de una cantidad cinemática y una estática. De hecho el principio se muestra en su forma final mediante la interpretación de funciones de peso arbitrarias y sus derivadas aparecen en la ecuación (3.48) como un grupo de cantidades virtuales cinemáticas. Todo lo que se necesita para hacer que el principio del trabajo virtual sea verdadero es que las cantidades estáticas presentes en la ecuación integral correspondan a una distribución del equilibrio de estas cantidades. Considere un objeto con dominio  $\Omega$  y superficie  $\Gamma$ , sujeto a dos diferentes sistemas de cargas, y con dos grupos de equilibrio correspondientes de deformación. Como las cantidades estáticas asociadas con el primer grupo de condiciones de carga son en equilibrio, el principio del trabajo virtual puede ser escrito usando estas cantidades estáticas y cualquier grupo de cantidades cinemáticas. Por ejemplo, las cantidades cinemáticas de equilibrio presentes en el cuerpo sujeto al segundo grupo de carga puede ser usado para este propósito:

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} d\Omega \quad (3.49)$$

Es importante destacar que el símbolo virtual  $\delta$  no está escrito explícitamente en frente de cada cantidad cinemática presentes en esta expresión. Otra expresión valida del trabajo virtual puede ser hecha mediante el uso de las cantidades estáticas de equilibrio asociadas al segundo grupo del sistema de cargas, con las cantidades cinemáticas correspondientes al primer grupo de carga.

$$\int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)} d\Omega \quad (3.50)$$

Para materiales isotrópicos, con comportamiento linealmente elástico, la parte derecha de las ecuaciones (3.49) y (3.50) puede mostrarse que son iguales con la ayuda de la ecuación (3.2) y con la simetría del tensor constitutivo  $C_{ijnm}$

$$\sigma_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} = C_{ijnm} e_{mn}^{(1)} e_{ij}^{(2)} = C_{ijnm} e_{ij}^{(2)} e_{mn}^{(1)} = C_{nmij} e_{ij}^{(2)} e_{mn}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)} \quad (3.51)$$

De hecho, estas expresiones pueden ser demostradas que son iguales para el comportamiento de otros materiales con comportamiento diferente al lineal elástico. Como el lado derecho de estas dos ecuaciones son iguales, el lado izquierdo necesariamente debe ser igual.

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega \quad (3.52)$$

Esta identidad es conocida como “El teorema de reciprocidad” o teorema de Betti. Este declara que el trabajo hecho por un grupo en equilibrio de tracciones en la superficie y las fuerzas en el cuerpo en una deformación hipotética asociada con un segundo grupo en equilibrio de

tracciones y fuerzas en el cuerpo es igual al trabajo hecho si el rol de las cantidades estáticas y cinemáticas son invertibles.

### 3.4.3 Identidad de Somigliana.

Nótese que la ecuación (3.52) contiene ambas integrales, superficie y frontera, y que hay dos sistemas de cargas y respuesta presentes. Esta ecuación puede ser transformada en una ecuación integral de frontera (BIE por sus siglas en ingles) mediante la apropiada especialización de uno de estos dos sistemas. Es importante recordar que ambos sistemas deben de ser sistemas en equilibrio. Es decir, las cantidades estáticas y cinemáticas no son arbitrarias, pero deben de representar una solución válida para un problema de mecánica de sólidos. En este capítulo se ha presentado una solución: la solución de Kelvin. Esta ha demostrado ser una solución para un problema elástico, para una carga puntual en una ubicación  $d$  en un medio infinito. Estos grupos de carga y respuesta serán tomados como sistema "2". El sistema "1" será el grupo de carga y respuesta para el problema que es en este momento bajo consideración. Estas sustituciones pueden ser hechas en la ecuación (3.52). La notación súper-escrita puede ser reducida durante este proceso de sustitución, porque otros medios para identificar las cantidades del sistema-1 y el sistema-2 son variables. Todas las cantidades del sistema-2 (las soluciones fundamentales) tienen un índice subscrito extra. Todas las cantidades con el número normal de índices subscritos son cantidades del sistema-1.

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i u_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta_{ik}(x - d) u_i d\Omega \quad (3.53)$$

Es importante recordar que la carga concentrada en el problema de Kelvin se asumió que sería una carga aplicada como una fuerza en el cuerpo en forma de una función delta. La apropiada

selección de la función delta de Dirak puede ser usada para determinar la contribución de la integral de volumen al lado derecho de la ecuación previamente descrita.

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i u_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + c_{ik} u_i(d) \quad (3.54)$$

En este punto el símbolo  $c_{ik}$  ha sido usado para considerar los casos donde la ubicación  $d$  de la carga concentrada es cualquiera de las dos, por dentro o por fuera de  $\Gamma$ . El caso singular que ocurre cuando  $d$  esté ubicado precisamente sobre  $\Gamma$  será examinado en una sección subsecuente.

$$c_{ik} = \begin{cases} 0 & ; d \text{ esta fuera de } \Gamma \\ \delta_{ik} & ; d \text{ esta dentro de } \Gamma \end{cases} \quad (3.55)$$

Del lado izquierdo de la ecuación (3.54) aun resta una integral de volumen. Esta integral de volumen, de cualquier modo, no involucra ninguna de las incógnitas, porque ambas la solución fundamental  $u_{ik}$  y la distribución de fuerzas en el cuerpo  $f_i$  serán conocidas.

Para los problemas de esfuerzos en 2D, la ecuación (3.54) degenera en una que involucra únicamente integrales de frontera.

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + c_{ik} u_i(d) \quad (3.56)$$

La ecuación integral de frontera (BIE) mostrada en la ecuación (3.56) es llamada la identidad de Somigliana (27). La cual dictamina que los componentes del desplazamiento de un cuerpo en un punto  $d$  está dada por la integración de frontera mostrada en las tracciones de la superficie

y los desplazamientos multiplicado por la solución fundamental con la carga puntual ubicada en  $d$ .

# CAPITULO 4

## MÉTODO DE ELEMENTO DE FRONTERA.

---

Es un método numérico para resolver ecuaciones en derivadas parciales lineales que han sido formuladas como ecuaciones integrales (en forma de *integral sobre la frontera*). La ecuación integral se puede considerar como una solución exacta de la ecuación diferencial parcial. El método de los elementos de frontera usa las condiciones de frontera dadas para resolver una ecuación integral en la frontera, en lugar de tomarse valores en todo el espacio definido por una ecuación diferencial parcial.

BEM es aplicable a problemas para los cuales se conoce una función de Green. Esto usualmente implica campos lineales en medios homogéneos. Esto restringe la generalidad de los problemas en los que el método se puede aplicar. En la formulación se pueden incluir también no-linealidades, pero esto en general introduce integrales de volumen que requieren que se discretice el dominio, quitando una de las ventajas más resaltadas del método. La forma de resolver el problema es discretizando la frontera en trozos denominados "elementos" y luego se forma un sistema de ecuaciones que se organiza en forma matricial y se soluciona numéricamente.

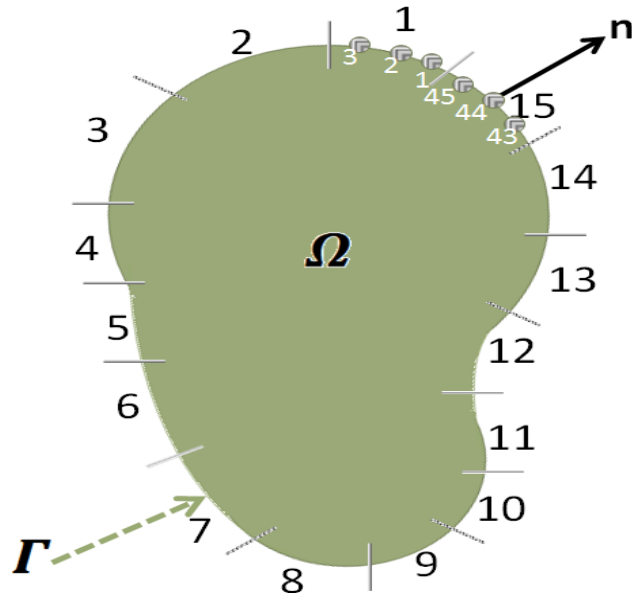


Figura 17 Modelo de BEM.

#### 4.1 Discretización de la formulación de frontera.

El proceso de discretización es el primer paso para buscar la solución. Como su nombre lo indica este proceso permite pasar de funciones continuas como incógnitas a valores discretos. Supongamos en modelo en 3D donde la superficie de la estructura es dividida en subregiones  $\Gamma_e$  donde  $\Gamma = \cup \Gamma_e$ . Tanto la geometría de la superficie como el valor de las variables: desplazamientos y tracciones, pueden aproximarse dentro de un elemento.

La figura [17] representa un problema físico común de esfuerzo plano en el que se está aplicando la técnica de BEM para solucionarlo. La superficie  $\Gamma$  ha sido discretizada en 15 elementos curvos, cada uno compuesto por 3 nodos. El primer nivel de discretización ocurre al reescribir la identidad de Somigliana (3.54), tomando en cuenta que la integral de superficie en cuestión debe ser hecha un elemento  $\Gamma_E$  a la vez.

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i u_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + c_{ik} u_i(d) \quad (3.54)$$

$$\sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} t_i(x) u_{ik}(x, d) d\Gamma = \sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} t_{ik}(x, d) u_i(x) d\Gamma + c_{ik} u_i(d) \quad (4.1)$$

Es importante destacar que la notación explícita ha sido empleada en esta ecuación, mostrando que las soluciones fundamentales son dos funciones al punto de carga puntual  $d$  y al punto en la superficie muestra  $x$ .

Sin embargo es importante recordar que el método BEM, al tratarse de un método numérico, la solución es aproximada y no exacta. Aunque es una aproximación de calidad muy alta.

## 4.2 Condiciones de frontera.

En cualquier problema de Mecánica de sólidos, habrá lugares donde las componentes del desplazamiento son señaladas y otros lugares donde las tracciones son especificadas. La figura [18] muestra este tipo de problemas.

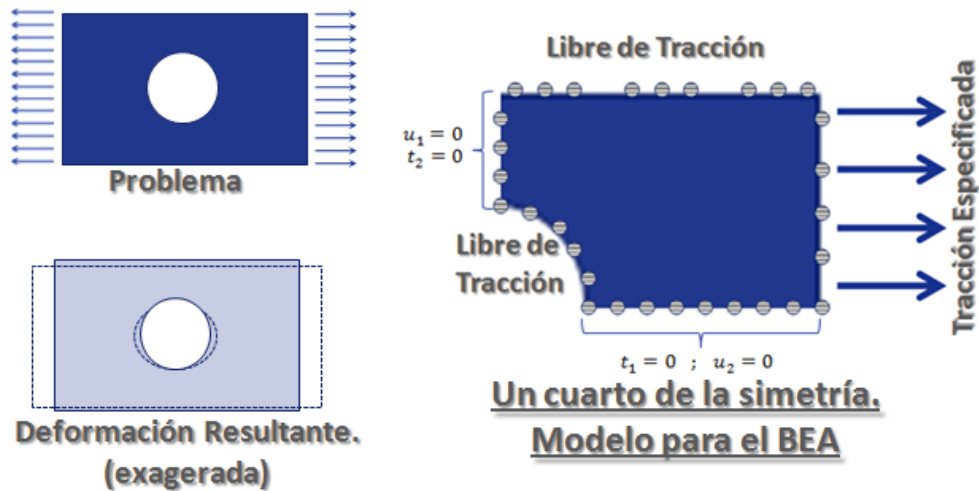


Figura 18 Condiciones de frontera en un Problema-ejemplo.

Este modelo es usado para simular una placa rectangular con un agujero circular al centro sujeta a una tensión conocida que es uniforme y horizontal, la cual está ubicada en sus bordes.

Dada la geometría del cuerpo, es posible reducir el análisis únicamente a un cuarto de la dimensión, lo cual reduce en gran medida la cantidad de ecuaciones a trabajar.

### 4.3 Método del Elemento Frontera (BEM).

BEM ha surgido como una técnica de simulación computacional muy importante, con una gran aceptación para el diseño por su alta calidad en la proximidad de los resultados de una inmensa clase de problemas de mecánica continua que ocurren en ingeniería.

Estas condiciones de equilibrio que deben de ser satisfechas a lo largo del dominio pueden ser representadas en términos de velocidad como se muestra a continuación:

$$\dot{\sigma}_{i,j,j} + \dot{b}_j = 0 \quad (4.2)$$

Y las condiciones en la frontera como sigue:

$$\dot{t}_i - \dot{\sigma}_{ij}n_j = 0 \quad (4.3)$$

Donde  $\dot{b}_j$  son las fuerzas en el cuerpo y  $n_j$  son las componentes de la normal externa a la frontera.

La relación para el cálculo total de esfuerzos y deformaciones, tanto en la parte elástica como en la parte plástica, en términos de valores de velocidad; se puede representar de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}^e_{ij} + \dot{\sigma}^a_{ij} \quad (4.4)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^a_{ij} \quad (4.5)$$

Donde  $\dot{\sigma}_{ij}$  y  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  son los tensores de esfuerzo y de deformación respectivamente; mientras que la  $e$  denota que se está tratando de la parte elástica del problema y la  $a$  sería la parte inelástica restante. El tensor de esfuerzos inelástico se puede definir mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{\sigma}^a_{ij} = 2\mu\dot{\varepsilon}^a_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}^a_{kk}\delta_{ij} \quad (4.6)$$

Donde  $\dot{\varepsilon}^a_{kk}$  es la velocidad de deformación inelástica de la diagonal principal y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

La parte inelástica del esfuerzo y la velocidad de deformación ( $\dot{\sigma}^a_{ij}, \dot{\varepsilon}^a_{ij}$ ) pueden incluir cualquier tipo de deformación inelástica como también plástica, creep u otras. El índice  $a$  es

usado, en lugar de  $c$ , con el fin de indicar que la formulación es general, incluso aunque el trabajo realizado en todo este proceso trata exclusivamente con deformaciones inelásticas causadas por creep. En términos de desplazamiento, la ecuación de Navier para análisis no lineales puede ser desarrollada como si fuese un caso elástico, de tal manera que se pueda obtener las ecuaciones diferenciales gobernadoras del problema, pero ahora en la forma de la ecuación de la velocidad. La sustitución de la relación entre el esfuerzo y la velocidad de deformación en términos de desplazamiento dentro de ecuaciones de equilibrio nos da:

$$\left(2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}^a + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk}^a\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^a\right)_{,i} + \dot{b}_j = 0 \quad (4.7)$$

Al aplicar la delta de Kronecker y sustituyendo  $\dot{\sigma}_{ij}^a$  es posible obtener:

$$\mu\dot{u}_{j,jl} + \mu\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)\dot{u}_{j,jl} - 2\mu\dot{\varepsilon}_{jj,l}^a - \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\dot{e}_{,l} + \dot{b}_j = 0 \quad (4.8)$$

Donde  $\dot{e}_{,l} = \dot{\varepsilon}_{kk}^a$  i. e. ("id est") la velocidad de deformación inelástica. Esta ecuación es para los puntos internos, sin embargo las condiciones de la frontera deben de ser satisfechas. Las condiciones de la frontera en términos de velocidad son: para los desplazamientos  $\dot{u}_i = \ddot{u}_i$  y para las tracciones  $\dot{t}_i = \ddot{t}_i$ ; por lo tanto la ecuación representante de las condiciones de la frontera para la tracción es:

$$\dot{t}_i + 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^a + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{e}\right)n_j = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{l,l}n_i + \mu(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})n_j \quad (4.9)$$

Las dos ecuaciones (4.8) y (4.9) son para problemas tridimensionales. Ahora bien, si se quiere trabajar con problemas bidimensionales para un estado de esfuerzos planos, es necesario remover la deformación en la dirección  $z$ , por lo tanto:  $\dot{\varepsilon}_{zz}^a = 0$

Hasta este punto, el problema no lineal no ha sido analizado, lo cual significa que no es posible resolver las ecuaciones gobernadoras directamente como en la región elástica. Es posible resolver el problema no lineal mediante el uso de un método que involucra esencialmente la solución de un problema elástico para cada iteración; este método es llamado la solución sucesiva elástica y es la misma que es usada en este trabajo.

La ecuación integral para los desplazamientos en la frontera para inelasticidades puede ser resumida como se muestra a continuación:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}'_{ij,j} \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{\sigma}'_{ij} n_j \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{\sigma}'_{ij,j} \dot{\epsilon}^a_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}'_{ij,j} \dot{u}'_j d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{\sigma}'_{ij,j} n_j \dot{u}'_i d\Gamma \quad (4.10)$$

Donde  $\Omega'$  es un dominio que contiene  $\Omega$ , y  $\Gamma$  es la frontera contenida en el dominio  $\Omega$ . Las ecuaciones de equilibrio y la definición de la tracción ( $\dot{t}_i = \dot{\sigma}'_{ij} n_j$ ) pueden ser sustituidas dentro de la última integral para obtener:

$$\int_{\Omega} \dot{b}'_i \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{t}'_i \dot{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{\sigma}'_{ij} \dot{\epsilon}^a_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{b}_i \dot{u}'_i d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{t}_i \dot{u}'_i d\Gamma \quad (4.11)$$

Donde  $\dot{u}_i$ ,  $\dot{t}_i$ ,  $\dot{\sigma}'_{ij}$ , y  $\dot{\epsilon}'_{ij}$  son las velocidades del desplazamiento, la tracción, el esfuerzo y la deformación respectivamente, que pertenecen al dominio  $\Omega$ . Además de que  $\dot{u}'_i$ ,  $\dot{t}'_i$ ,  $\dot{\sigma}'_{ij}$ , y  $\dot{\epsilon}'_{ij}$  son los campos correspondientes al dominio  $\Omega'$ . Esto nos lleva a la siguiente representación integral de los desplazamientos en la frontera cuando el enfoque de la deformación inicial es utilizado para la solución de problemas inelásticos:

$$c_{ij}\dot{u}_j + \oint_{\Gamma} \dot{u}_j t_{ij} d\Gamma = \int_{\Gamma} \dot{u}_j t_i d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{\sigma}'_{ijk} \varepsilon^a_{jk} d\Omega \quad (4.12)$$

Donde el término  $c_{ij}$  es conocido como el término para el salto, entre los puntos internos utilizados en el cuerpo y los valores de la frontera; el cual depende de la geometría y es calculado en términos del sistema de coordenadas polares como se muestra a continuación:

$$c_{ij}(x') = \delta_{ij}(x') + \alpha_{ij}(x') \quad (4.12a)$$

Considerando la distancia entre el punto  $x'$  y el punto en el campo de estudio  $x$  sobre el arco  $S_{\varepsilon}^+$  como  $r$ . Usando el sistema de coordenadas polares, se puede mostrar que:

$$r = \varepsilon \cos \theta \hat{i} + \varepsilon \sin \theta \hat{j} \quad (4.12b)$$

$$dS_{\varepsilon}^+ = \varepsilon d\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{n \cdot r}{r} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1 \quad (4.12c)$$

Nótese que  $r = \varepsilon n$  mientras que  $n$  se encuentre en la misma dirección de  $r$ .

$$r_{,1} = \cos \theta \quad (4.12d)$$

$$r_{,2} = \sin \theta$$

Usando las relaciones (4.12b, 4.12c, 4.12d) podemos evaluar la constante  $\alpha_{ij}$  como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^+} \frac{1}{\varepsilon} [(1-2\nu) + 2r_1 r_1] \varepsilon d\theta \\
&= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi [(1-2\nu) + 2 \cos^2 \theta] d\theta = -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{4.12d}$$

Y similarmente:

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\
\alpha_{21} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\
\alpha_{22} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\pi [(1-2\nu) + 2 \sin^2 \theta] d\theta = -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{4.12d}$$

Para una frontera sencilla podemos determinar el valor del salto igual a  $-1/2$ .

De una manera similar, la ecuación integral en la frontera para los esfuerzos internos se expresa por medio de:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \int_{\Gamma} D_{ijk} \dot{t}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk} \dot{u}_j d\Gamma + \oint_{\Omega} \sum_{ijk} \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega + f_{ij} \dot{\varepsilon}_{jk}^a \tag{4.13}$$

Donde  $\oint$  es una integral de Cauchy,  $D_{ijk}$  y  $S_{ijk}$  son términos que contienen las derivadas de los desplazamientos y las tracciones,  $f_{ij}$  es el término libre y  $\sum_{ijk}$  es la solución fundamental para el dominio.

La solución para la ecuación diferencial de Navier mediante el uso del vector de Galerking es llamado la solución fundamental para una fuerza unitaria puntual aplicada al cuerpo en un punto d. Las soluciones fundamentales para los desplazamientos y las tracciones, para la ecuación de desplazamientos en la frontera en el plano bidimensional son:

$$\dot{u}'_i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] \quad (4.14)$$

$$\dot{t}'_i = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad (4.15)$$

$$\dot{\sigma}'_{ijk} = \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad (4.16)$$

Donde  $r_i$  son las componentes de la distancia  $r = \sqrt{r_i r_i}$  entre el punto de acción y el punto en el campo del dominio, y  $n_j$  es la componente de la normal externa. La ecuación de Somigliana (3.54) puede ser obtenida al dejar las fuerzas en el cuerpo, substituyendo la propiedad de la delta de Dirac en la ecuación

#### 4.4 Singularidades.

El principal problema en la formulación del BEM es el tipo de singularidades que aparecen en las ecuaciones de tracción. Esta ecuación incluye la integración de Cauchy y la integral del valor principal de Hadamard porque para ambas integrales, dominio y frontera que aparecen en las

ecuaciones de tracción, el orden de la singularidad incrementa por uno en relación con las singularidades de las integrales de las ecuaciones de desplazamiento. El desarrollo de un proceso de modelado generalizado y preciso es la principal dificultad para tratar de eliminar tales singularidades dado que la técnica del movimiento del cuerpo-rígido usada para el cálculo de la diagonal de términos en la matriz resultante de la aplicación de la ecuación del desplazamiento no puede ser utilizada para la ecuación de la tracción. El método clásico de la substracción de la singularidad, el cual lleva a la definición natural de integrales ordinarias de partes finitas, fácilmente maneja la integral de frontera irregular derivadas de las ecuaciones de integración dual. En los alrededores de la colocación del punto, la parte regular de la integración esta expresada como una serie de expansión de Taylor. Si suficientes términos de la expansión son sustraídos de la parte regular de la integración y después agregados nuevamente, es posible aislar la singularidad. La integral irregular original es por lo tanto transformada en una sumatoria de integrales regulares y una integral de la función regular.

Esta última integral es entonces evaluada analíticamente, mientras la cuadratura estándar Gaussiana es utilizada para la integración numérica de la parte regular.

El procedimiento para las integrales de dominio es similar al utilizado para las integrales de frontera en el que necesariamente las integrales singulares son transformadas en una sumatoria de una integral regular unidimensional y una regular bidimensional; la primera al sustraer un número suficiente de términos de la integración y agregándolos nuevamente de manera particular; sin embargo para un mejor entendimiento de esto, a continuación se analizan los diferentes tipos de singularidades presentes en el BEM.

#### *4.4.1 Procedimiento para tratar las singularidades.*

Los diferentes tipos de singularidades dependen de la ubicación del punto de colocación. Con el fin de resolver las integrales descritas en BEM, necesitamos poder tratar con estas

singularidades. Las integrales de BEM pueden ser clasificadas en: regulares (sin singularidad), cuando el punto de acción esta cerca del elemento pero este no pertenece a él; y en singulares, cuando el punto de acción está ubicado en los nodos del elemento o celda sobre los cuales se lleva a cabo la integración. Las técnicas para tratar con las integrales de frontera son las mismas en elasticidad. Para el caso de la singularidad  $\ln r$  la cuadratura logarítmica Gaussiana es utilizada. La técnica del movimiento del cuerpo rígido es utilizada para resolver la integración de la singularidad  $\frac{1}{r}$ . Otra técnica usada ampliamente para la integración singular es la de la eliminación de las regiones alrededor del punto singular.

#### ***4.4.2 Integración del Dominio.***

Las integrales del dominio que contienen integrales singulares pueden ser identificadas de acuerdo a la naturaleza de su núcleo, similar a la frontera en diferentes categorías como se muestra a continuación:

- Cercanamente singular (*“Nearly singular”*): Es cuando la colocación del punto es cercano a la celda pero no está situado en la celda de integración. Estas integrales son computadas usando una cuadratura estándar de Gauss con una técnica de subdivisión para la celda.
- Débilmente singular (*“Weakly singular”*); El caso de la solución fundamental de esfuerzos  $\sigma_{ij}$  dado en la ecuación (4.16) la cual aparece en la integral en la ecuación (6.8) con singularidad del orden  $\frac{1}{r}$  y  $\frac{1}{r^2}$  para problemas de dos y tres dimensiones, representa el caso de este tipo de singularidad. Es posible tratar con estas singularidades usando una técnica de cambio de variable análoga a la que se uso para la integración de frontera.

- Fuertemente singular (“*Strongly singular*”): Las singularidades de orden  $\frac{1}{r^2}$  para las celdas bidimensionales, corresponde a las singularidades conocidas como fuertemente singular. Para este tipo de casos, la celda requiere técnicas especiales para poder tratar con ellas.

#### 4.4.2 Integrales fuertemente singulares.

Estas integrales son computadas usando una técnica de substracción de la singularidad. La técnica se lleva a cabo en problemas elasto-plásticos en dos dimensiones del BEM. Esta técnica transforma la integral fuertemente singular derivada en una sumatoria de integrales regulares unidimensionales y una bidimensional regular. Mediante la aplicación de límites a la forma original de la integral cerrada de la ecuación (4.13) podemos obtener esta transformación como se muestra a continuación:

$$\int_{\Omega} \Sigma_{ijkl} \varepsilon_{ij}^g d\Omega = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_s} \Sigma_{ijkl} \varepsilon_{ij}^g d\Omega \quad (4.17)$$

En esta ecuación  $\Omega$  es el dominio completo y  $\Omega_s$  es un pequeño dominio en la celda que contenga el punto de colocación. Si realizamos la discretización en este dominio la transformación para las coordenadas locales es:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{N_c} \int_{R-R_n} \sigma^*_{ijkl} \varepsilon_{ij}^g \Psi J d\xi d\eta \quad (4.18)$$

Donde  $N_c$  es el número de celdas que contienen el punto de colocación.  $\Psi$  Son las funciones de forma para las celdas,  $J$  es usado para transformar al sistema de coordenadas global. Finalmente  $R - R_n$  son los dominios después de asignar los dominios originales al sistema local.

Con el fin de substraer la singularidad, es conveniente seguir dos pasos; primero utilizaremos coordenadas polares como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \rho \cos \theta \\ \eta &= \eta_0 + \rho \sin \theta\end{aligned}\tag{4.19}$$

$\xi_0$  y  $\eta_0$  representan las coordenadas locales del punto de colocación. Mediante la aplicación de series de Taylor en el área del punto de colocación para las componentes de la distancia  $r$  obtenemos:

$$\begin{aligned}r_1 = x_1 - x_2 &= \left( \left. \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} \cos \theta + \left. \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0} \sin \theta \right) \rho + o(\rho^2) \\ r_2 = y_1 - y_2 &= \left( \left. \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} \cos \theta + \left. \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0} \sin \theta \right) \rho + o(\rho^2)\end{aligned}\tag{4.20}$$

Y:

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}\tag{4.21}$$

Donde  $o$  representa el término sobrante de la expansión de Taylor. Si utilizamos una nueva variable  $E_i(\theta)$  como:

$$\begin{aligned}
E_1(\theta) &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \cos \theta + \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} \sin \theta \right) \\
E_2(\theta) &= \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \cos \theta + \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} \sin \theta \right)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

De tal modo que la derivación de  $r$  es:

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r} = \frac{E_i(\theta)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 E_k(\theta)^2}} + o(\rho) \tag{4.23}$$

La transformación del sistema global de coordenadas al local y luego al sistema de coordenadas polares lleva a la ecuación (4.18) a la forma:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{N_c} \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_{\alpha^m(s,\theta)}^{\bar{\rho}^m(\theta)} F_{ijkl}^m(\rho, \theta) d\rho d\theta \tag{4.24}$$

En esta ecuación la función  $F$  es la multiplicación de la solución fundamental de esfuerzos, el tensor inicial de deformación, la función de forma, el Jacobiano de ambas transformaciones.  $\theta_1^m$  y  $\theta_2^m$  son los ángulos iniciales y finales.  $\alpha$  y  $\bar{\rho}$  son el radio inicial y final, el cual depende de  $\theta$ .

La función  $f_{ijkl}(\theta)$  está definida al utilizar la expansión de Taylor la cual está dividida por  $\rho$  y su asíntota es la misma que la integración de la función  $F_{ijkl}^m(\rho, \theta)$  donde  $\rho \rightarrow 0$ .

Si separamos los términos de la singularidad de orden  $\frac{1}{r}$  del resto de la integral, se obtiene la siguiente expresión:

$$F_{ijkl}^m(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} [f_{ijkl}^m(\theta) + o(\rho)] \quad (4.25)$$

Es sencillo ver que:

$$F_{ijkl}^m(\rho, \theta) - \frac{1}{\rho} f_{ijkl}^m(\theta) = o(1) \quad \text{mientras que } \rho \rightarrow 0 \quad (4.26)$$

Como  $f_{ijkl}$  que es una función auxiliar en la proximidad de la singularidad tiene un comportamiento que hace posible la regularización de la integral.

Es posible reemplazar la función  $F_{ijkl}^m$  en la ecuación (4.26) y esta ecuación en coordenadas polares puede representarse:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{N_c} \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_{\alpha^m(s, \theta)}^{\bar{\rho}^m(\theta)} \left( F_{ijkl}^m(\rho, \theta) - \frac{1}{\rho} f_{ijkl}^m(\theta) \right) d\rho d\theta + \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_{\alpha^m(s, \theta)}^{\bar{\rho}^m(\theta)} \frac{1}{\rho} f_{ijkl}^m(\theta) d\rho d\theta \quad (4.24)$$

Donde la función asintótica  $f_{ijkl}(\theta)$  fue substraída y agregada de regreso.

# CAPITULO 5

## TEORÍA DEL CREEP.

---

La mayoría de los materiales utilizados en ingeniería deben de trabajar bajo la influencia de diferentes tipos de esfuerzos, e incluso muchas veces dependen de diferentes factores bajo los cuales también deben de seguir funcionando tales como tiempo, temperatura, corrosión, etc. Es por ello la importancia de conocer las propiedades del material que estemos por ocupar.

Uno de los aspectos más críticos que determinan la integridad estructural del material a temperaturas muy altas es su comportamiento de Creep.

En muchas aplicaciones los componentes se ven obligados a soportar cargas constantes durante lapsos prolongados, como por ejemplo álabes de rotor de turbina, filamento de tubos y válvulas, cables de acero, etc. En tales circunstancias el material puede continuar deformándose hasta que su utilidad se ve seriamente perjudicada. Tales tipos de deformaciones dependientes del tiempo pueden ser casi imperceptibles, pero crecen durante toda la vida útil de la pieza y llevan a la rotura, aún sin que la carga haya aumentado.

La deformación por Creep en los materiales, es de un cierto tipo de deformación plástica que se asocia con una dependencia directa con el tiempo, que trabaja bajo la acción de diferentes tipos de esfuerzos.

El fenómeno conocido como "creep", se define como: "la parte dependiente del tiempo de las deformaciones provenientes de tensiones".

Básicamente, es la tendencia de un material sólido a deformarse permanentemente, de una manera lenta bajo la influencia de los dos factores ya mencionados; temperatura y esfuerzo. Esto ocurre como resultado de una exposición por un periodo largo de tiempo a niveles muy altos de esfuerzos que no sobrepasan el esfuerzo de cedencia del material. Esto es porque la deformación por creep no ocurre repentinamente por la aplicación de un esfuerzo. En lugar de eso, la deformación se va acumulando como resultado de un esfuerzo prolongado.

Debido a su estrecha conexión con altas temperaturas en aplicaciones importantes, se suele asociar al creep con problemas vinculados con temperaturas elevadas. Esto es cierto únicamente si las temperaturas elevadas se definen relativas al punto de fusión.

Este fenómeno puede ocurrir en metales sometidos a muy altas temperaturas, muchas veces a valores próximos  $\approx 0.6T_m$ , donde  $T_m$  es la temperatura absoluta de fusión del material. La temperatura a la que este fenómeno puede ocurrir es muy distinta en los diferentes tipos de materiales, ya sean metales, cerámicos, polímeros, etc.

Por ejemplo, para los vidrios y polímeros la temperatura a la cual los fenómenos de creep se tornan importantes se encuentra alrededor de la temperatura de transición vítrea del material. De manera que mientras los metales en general no sufrirán efectos de creep a temperatura ambiente, muchos vidrios y polímeros lo harán. La adecuada selección de materiales para servicio a alta temperatura es un factor esencial en el diseño resistente al creep. En general, las aleaciones metálicas empleadas contienen elementos tales como Cr, Ni, y Co en distintas proporciones según las características específicas buscadas.

El objetivo principal de este trabajo es el de desarrollar una nueva formulación, la cual sea capaz de calcular la velocidad de deformación por creep de una manera precisa y de esta

manera poder predecir su comportamiento en el estado estable cuando el material está trabajando bajo la influencia de diferentes rangos de temperatura.

Es por ello, que para poder modelar el comportamiento de este análisis de esfuerzo en dichos materiales, se implementaron diferentes técnicas de análisis. Estas técnicas son necesarias para resolver problemas elásticos, pero a su vez también para poder modelar el fenómeno no-elástico como son la plasticidad y la deformación por creep.

El Método de Elementos Frontera (BEM) es una técnica que ha alcanzado un nivel de desarrollo en ciertos campos de estudio que se ha convertido en una herramienta esencial para los diseños en ingeniería. En contraste con otros métodos como es el de Elementos Finitos; el BEM tiene muchas ventajas para este tipo de análisis.

Una de las ventajas de este método, es la reducción de la dimensionalidad del problema, siendo esto uno de las características más importantes de esta técnica; en el caso de dos dimensiones, únicamente la frontera del dominio necesita ser discretizada para completar el análisis, pero para completar un análisis de Creep, es necesario que utilicemos un cierto número de celdas atreves del dominio; sin embargo este número sigue siendo un orden mucho menor al utilizado por el FEM.

## **5.1 Introducción al Creep.**

Cuando un material es sujeto a esfuerzos que son mayores o iguales al esfuerzo de cedencia, el cuerpo comienza a deformarse de manera plástica. Cuando el esfuerzo se encuentra por debajo de este nivel, entonces en principio solo debería deformarse de manera elástica y sobre de él actuaría la ley de Hooke.

Sin embargo, si durante este proceso, la temperatura a la que se está aplicando el esfuerzo es relativamente alta, cierto tipo de deformación plástica puede ocurrir sin importar que el

esfuerzo se encuentre por debajo del esfuerzo de cedencia. El mismo fenómeno puede ocurrir si el esfuerzo es constante y se aplica durante periodos largos de tiempo. A este comportamiento, que depende del tiempo y la temperatura se le conoce como Creep.

Es por ello, que el fenómeno del Creep, de manera experimental se logra a partir de la exposición de algún espécimen a un esfuerzo constante durante un periodo largo de tiempo; y todo esto a su vez, se le puede considerar diferentes niveles de temperatura, las cuales tendrían que ser relativamente altas; esto vendría a estar definido por el punto de fusión del material.

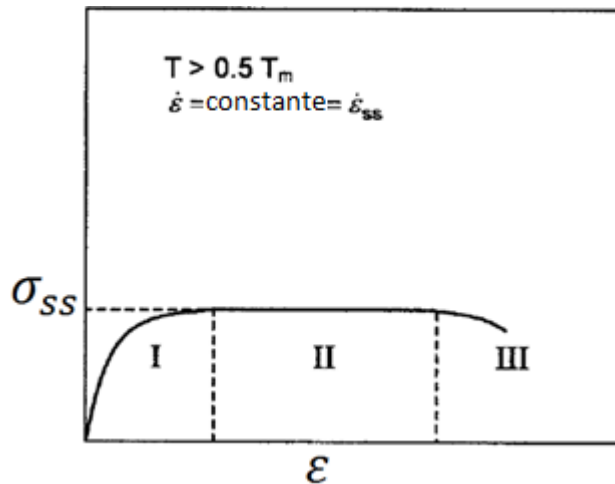


Figura 19 Gráfica Esfuerzo-Deformación para el creep.

La mayoría de los estudios hechos en temas relacionados con este tipo de deformación son acerca del estado estable del Creep, el cual de manera técnica es conocido como el estado secundario del Creep. Para poder tener un mejor entendimiento de todo lo relacionado con esto, sería indispensable considerar la siguiente gráfica la cual muestra el comportamiento del Creep en sus tres estados, Creep primario, secundario y terciario. Durante la etapa 1 o de creep primario, la velocidad de deformación  $\frac{d\epsilon}{dt}$  disminuye progresivamente hasta alcanzar un valor constante que marca el comienzo de la etapa 2 de creep secundario también llamada de creep

estacionario o de estado estable. Finalizada esta etapa se observa un aumento de la velocidad de deformación que conduce a fenómenos de estricción y rotura.

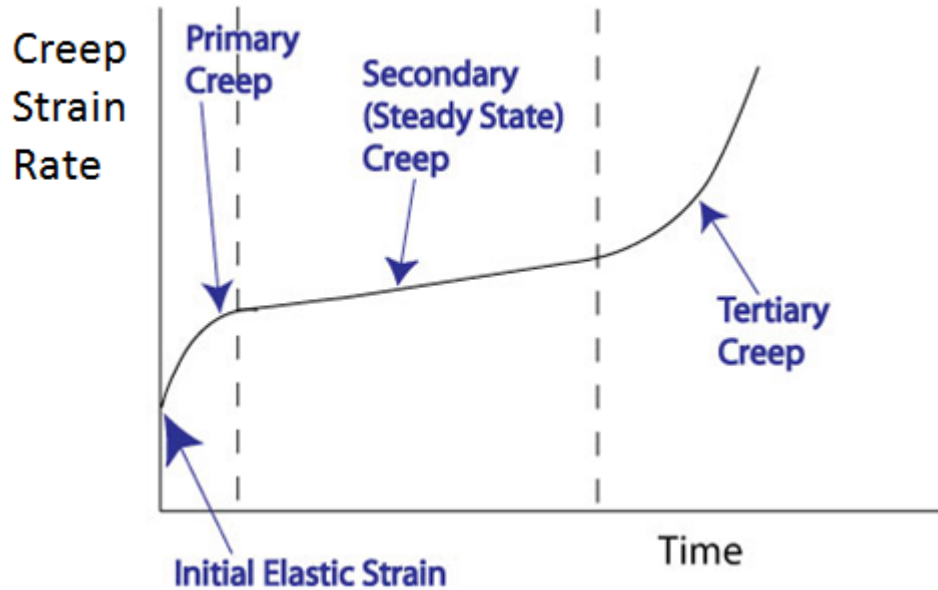


Figura 20 Gráfica Velocidad de deformación-Tiempo para creep.

La gráfica en la figura [20], y muestra lo que es la velocidad de deformación por Creep resultante al aplicar esfuerzos durante un periodo largo de tiempo. La grafica está dividida de manera vertical en 3 secciones, siendo cada una de estas los estados del Creep.

Durante el estado primario del Creep, la pendiente de la curva del Creep tiende a disminuir, este fenómeno se atribuye al endurecimiento por deformación. Después el Creep secundario, puede ser explicado en términos de equilibrio entre el endurecimiento por deformación, ablandamiento del material y procesos de fatiga; resultando en una velocidad constante de deformación por Creep.

El ultimo estado del Creep, o Creep terciario tiene como atributo principal la aparición de daños, tanto externos como internos del material, aunado con el ablandamiento del cuerpo,

conllevando a un proceso en el que la resistencia a la carga disminuye hasta llegar a la falla del material.

La razón principal por la que la mayoría de los estudios y análisis se centran en la etapa secundaria del Creep, es porque esta etapa es la que domina en mayor medida al comportamiento del material cuando se deforma por Creep.

No siempre aparecen las tres etapas. Si la fractura es frágil, la tercera etapa puede desaparecer completamente. Debe recalcarse que las altas temperaturas pueden producir otras alteraciones no explicitadas en las curvas, comúnmente no incluidas en los efectos de creep. Así, los metales pueden sufrir transformaciones en las estructuras cristalinas, tal como la transformación en los aceros de ferrita en austenita, recristalización y crecimiento de grano. En plásticos, maderas y cerámicas, las altas temperaturas pueden inducir cambios químicos y aun desintegración (como en el caso de algunos polímeros).

Es más difícil analizar el creep que otros comportamientos mecánicos debido a que su predicción es a largo plazo, por lo cual se debe extrapolar a partir de resultados obtenidos en ensayos de corto tiempo. Debe tenerse en cuenta que mientras un ensayo de creep está limitado usualmente a 1000 horas (6 semanas), las vidas en servicio de los materiales o piezas pueden ser de 10.000 hs., 100.000 hs., y aún más (350.000 hs. representa la vida de una planta de poder). Por lo tanto, una comprensión teórica es aun más deseable en creep que en otros tipos de comportamientos, aunque el entendimiento teórico del creep aún no es completo.

Aunado a esto las variables implicadas cuentan con cierto grado de complejidad al tratar de relacionarlas; estas son: deformación por creep, tiempo, tensión y temperatura. En este análisis se considerará la curva de velocidad de deformación por creep en su estado secundario, y se estudiarán los efectos de la tensión y la temperatura sobre ella.

## 5.2 Ley de Potencia del Creep. (Power-Law Creep)

El comportamiento del Creep en estado estable muestra una relación que podría considerarse que es casi de tipo lineal entre lo que es el tiempo y la velocidad de deformación.

Dado que tanto la vida al creep de un material como la deformación total es fuertemente dependiente de la velocidad de creep estacionario, es importante analizar las variables que afectan a ésta. En general puede escribirse

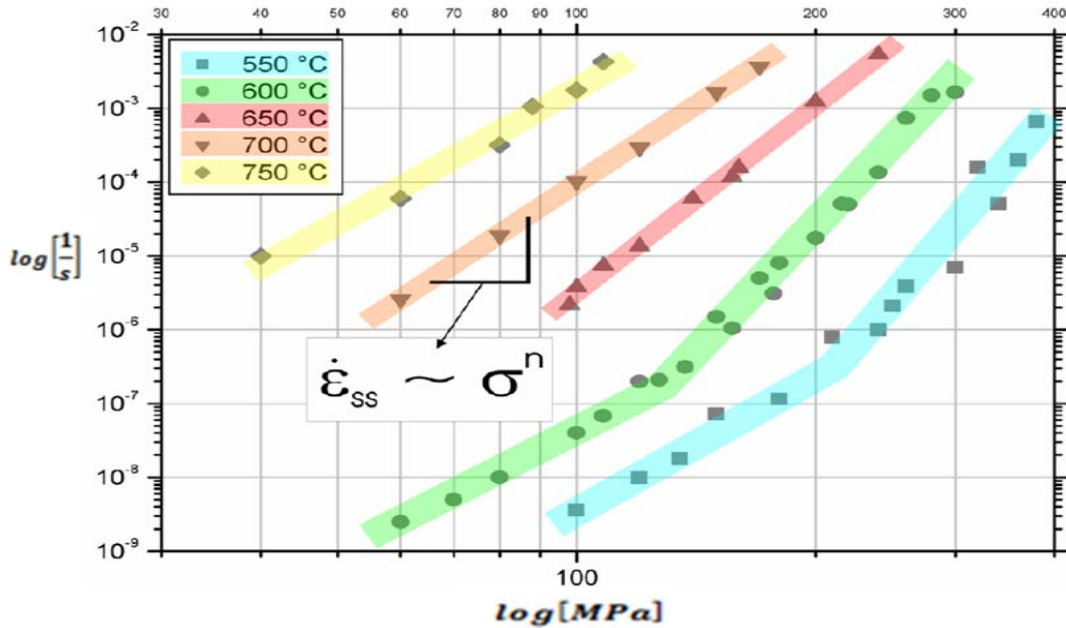
$$\dot{\epsilon} = f(T, \sigma, \epsilon, m) \quad (5.1)$$

En el que las variables involucradas aparecen en el orden de influencia con esta velocidad de deformación. Donde  $T$  es la temperatura,  $\sigma$  el esfuerzo,  $\epsilon$  la deformación y finalmente  $m$  propiedades del material tales como la red cristalina del material, el módulo de corte, y la estructura cristalina.

Sin embargo, este fenómeno es considerado como no lineal; es por ello que para este tipo de análisis existe una ecuación que proporciona las bases para la relación con la ley de potencia del Creep (Power-Law Creep), al aplicar una temperatura constante. La expresión usada para predecir de manera precisa este comportamiento es por lo tanto:

$$\dot{\epsilon}^c = \sigma^n \quad (5.2)$$

Donde  $n$  es una constante del material que indica el estado en el que se encuentra el Creep, ( $n = 5$  cuando es el estado secundario);  $\dot{\epsilon}^c$  es la velocidad de deformación del Creep puesto que la notación (.) indica que se trata de la primer derivada con respecto al tiempo de la deformación por Creep.



1

Figura 21 Ejemplos experimentales de creep secundario a diferentes temperaturas.

Cuando trabajamos con muy altas temperaturas, los materiales muestran una velocidad de deformación plástica que varía en función a la temperatura como se ve en la figura [21], por lo que se considera dependiente. Las altas temperaturas se consideran por encima de  $0.3T_m$  para metales puros y de  $0.4T_m$  para las aleaciones (28) ya que estas últimas en general el propósito de combinar los metales con ciertos elementos es el de mejorar sus propiedades mecánicas. Esta dependencia puede ser expresada como se muestra a continuación:

$$\dot{\epsilon} \sim \left(\frac{\sigma_s}{\mu}\right)^n \quad (5.3)$$

### 5.3 Comportamiento del Creep como función del tiempo.

En general, las propiedades mecánicas y desempeño de los materiales cambian con el incremento de la temperatura. Algunas propiedades como modulo de elasticidad y fuerza,

disminuye con el incremento de la temperatura. Otras, como es ductilidad, aumenta con este mismo cambio de temperatura. Es importante notar que la movilidad atómica está relacionada a la difusión la cual puede ser descrita utilizando la ley de difusión de Fick (29; 30), la cual, por experimentación se ha encontrado que la dependencia de la temperatura, velocidad ó difusión de muchos sistemas puede ser expresada por el siguiente tipo de ecuación de Arrhenius:

$$D = D_0 e^{\left(-\frac{Q}{RT}\right)} \quad (5.4)$$

Donde  $D$  es la velocidad de difusión,  $D_0$  es una constante,  $Q$  es la energía de activación de movimiento a nivel atómico,  $R$  es la constante universal de los gases la cual tiene un valor de  $8.314 \frac{J}{molK}$  y  $T$  es la temperatura que esté actuando en la escala absoluta.

Por lo tanto, los mecanismos de difusión controlados tendrán un efecto significativo en las propiedades mecánicas y desempeño a muy altas temperaturas, como sería la dislocación por escalamiento, deslizamiento, concentración de vacantes, y afectaran el comportamiento de los materiales a altas temperaturas.

#### **5.4 Modelo de la Ley de potencia quinta del Creep. (Five Power- Law Creep.)**

Para metales puros y aleaciones, existe una muy bien establecida, largamente fenomenológica, relación entre la velocidad de deformación por Creep en el estado estable  $\dot{\epsilon}_{ss}$  y el esfuerzo  $\sigma_{ss}$ , y dado que el movimiento de átomos, vacancias, dislocaciones o moléculas en un material sólido se produce por difusión. La cinética de estos fenómenos está controlada por la ecuación de Arrhenius, aunado a la ley de potencia del creep obtenemos el sistema completo para el cálculo de la velocidad del creep como se muestra a continuación:

$$\dot{\epsilon}_{ss} = A_0 e^{\left[-\frac{Q_c}{kT}\right]} \left(\frac{\sigma_{ss}}{\mu}\right)^n \quad (5.5)$$

Donde  $A_0$  es una constante,  $k$  es la constante de Boltzmann.  $Q_c$  Es la energía de activación para el creep. El exponente  $n$  es una constante y es igual a 5 para el caso de creep secundario, sobre una gama relativamente amplia de temperaturas y velocidades de deformación (Por consiguiente un comportamiento de ley de potencia quinta, “five-power-law”) hasta que la temperatura disminuya abruptamente por debajo de  $0.5 - 0.6T_m$ , donde la ley de potencia se “rompe” (PLB, por sus siglas en inglés), y  $n$  incrementa, y  $Q_c$  generalmente disminuye.

La figura [22] nos da información sobre los mecanismos dominantes a distintas combinaciones de tensión y temperatura. Los detalles de la figura [22] variaran de acuerdo al material en particular y a su vez las propiedades del mismo variarán con los detalles específicos de su procesamiento, por ejemplo con el tamaño de grano.

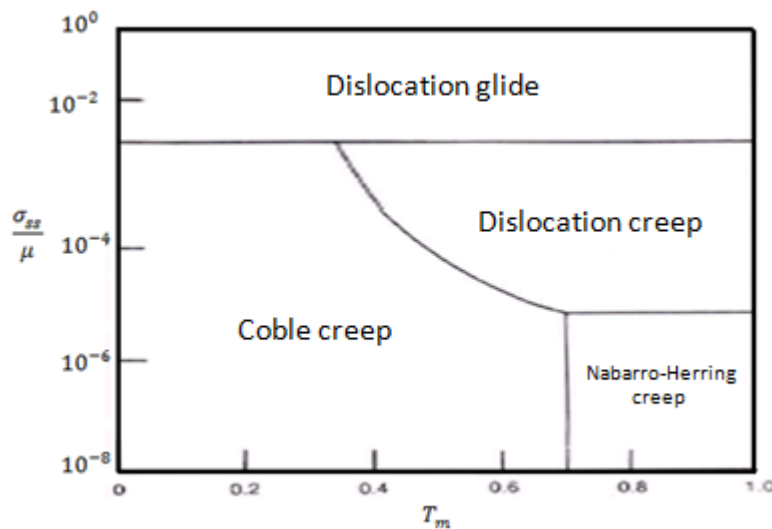


Figura 22 Tipos de creep en función a la temperatura.

A bajas tensiones, dos mecanismos de deformación se desarrollan: el de Coble y el de Navarro-Herring. A tensiones intermedias, el mecanismo de súper-plasticidad es el que controla el creep.

A tensiones elevadas, el creep es controlado por el mecanismo de trepado de dislocaciones y todos los puntos convergen en una sola línea, independientemente del tamaño de grano.

### 5.5 Mechanical Twinning – Dislocación por deslizamiento. (*“Dislocation-Glide”* Plasticidad a baja temperatura.)

Twinning es un mecanismo importante de deformación a baja temperatura en metales con estructura cristalina HCP y BCC. En metales FCC es mucho menos importante y ocurre únicamente a temperaturas bajas.

Twinning es una variedad de dislocación por deslizamiento que involucra el movimiento parcial de las dislocaciones, dicho comportamiento se puede ver en la figura [23]. Es posible describir la velocidad de deformación por medio de la ecuación:

$$\dot{\gamma}_{SP} = \dot{\gamma}_o e^{\left[ -\frac{Q_p}{RT} \left( 1 - \frac{\sigma_s}{\tau} \right) \right]} \quad (5.6)$$

Con

$$\dot{\gamma}_o = \alpha \beta \gamma \left( \frac{\sigma_{ss}}{\mu} \right)^2 = 10^6 \frac{1}{s} \quad (5.7)$$

Y es importante recordar que para el desarrollo de este trabajo asignaremos el siguiente cambio de variable:

$$\dot{\gamma} = \dot{\epsilon}$$

Donde ambas representan la velocidad por deformación por Creep.

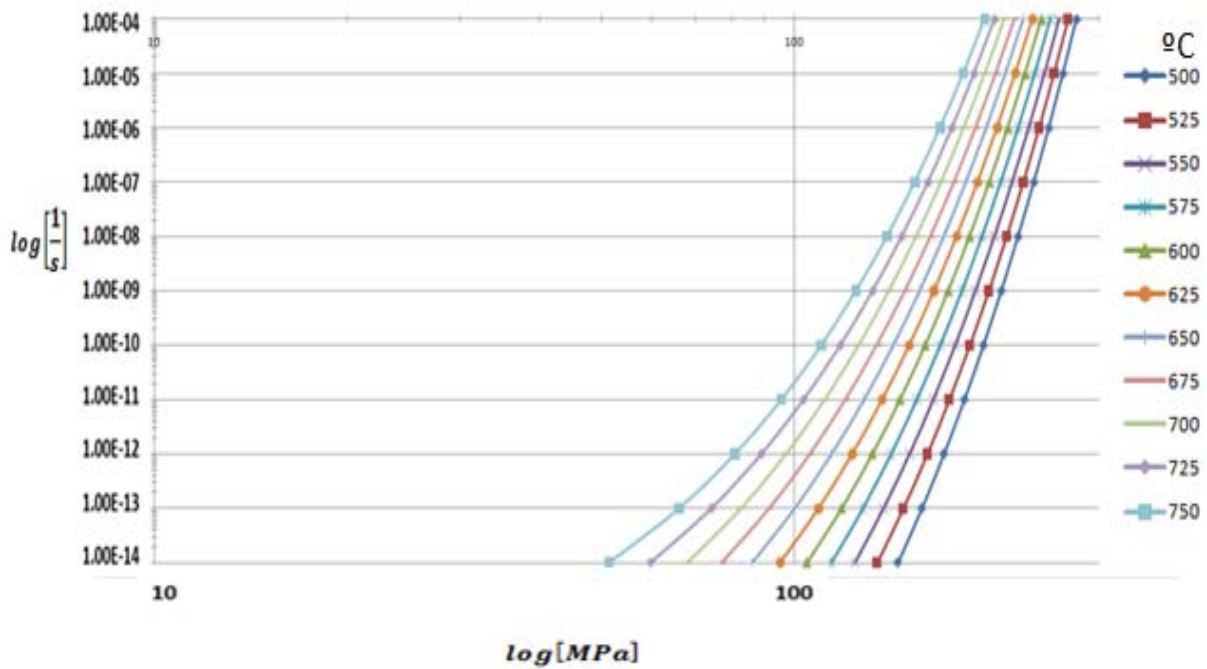


Figura 23 Velocidades de deformación por creep debido a dislocación por deslizamiento.

Donde  $Q_p$  es la energía de activación,  $R$  es la constante de los gases,  $\alpha\beta\gamma$  son constantes y  $\hat{\tau}$  es el esfuerzo de corte a  $0^\circ K$ .

Siendo esta la primer ecuación para el cálculo de la velocidad del creep que será usada.

## 5.6 Ley de Potencia del Creep aplicado al problema. (Power-Law Creep)

Agrupando los conceptos hechos sobre la ley de potencia del creep, más la ecuación de difusión y valores obtenidos experimentalmente dentro de las referencias, una de las ecuaciones a tratar dentro de este trabajo se reduce a la siguiente forma:

$$\dot{\gamma}_{sPL} = c_3 \frac{\mu b}{kT} \left( \frac{\sigma_s}{\mu} \right)^{n+2} D_c \quad (5.8)$$

Siendo:

$$\mu = \mu(T) = \mu_0 \left( 1 - 0.85 \frac{T - 300^\circ\text{K}}{T_M} \right) \quad (5.9)$$

Donde el valor de  $D_c$  esta dado por la ecuación (5.4) y las variables son:  $c_3$  es una pre-constante,  $\mu_0$  es el modulo cortante at  $0^\circ\text{K}$ ,  $b$  es la magnitud del vector de Burger, y  $k$  es la constante de Boltzmann; con todo esto la figura [24] nos muestra varios ejemplos sobre la aplicación de la ecuación (5.8).

Esta será la segunda ecuación que utilizaremos para poder predecir la velocidad del creep por medio de una simulación en Fortran y usando el BEM para determinar los esfuerzos que actúan en el cuerpo.

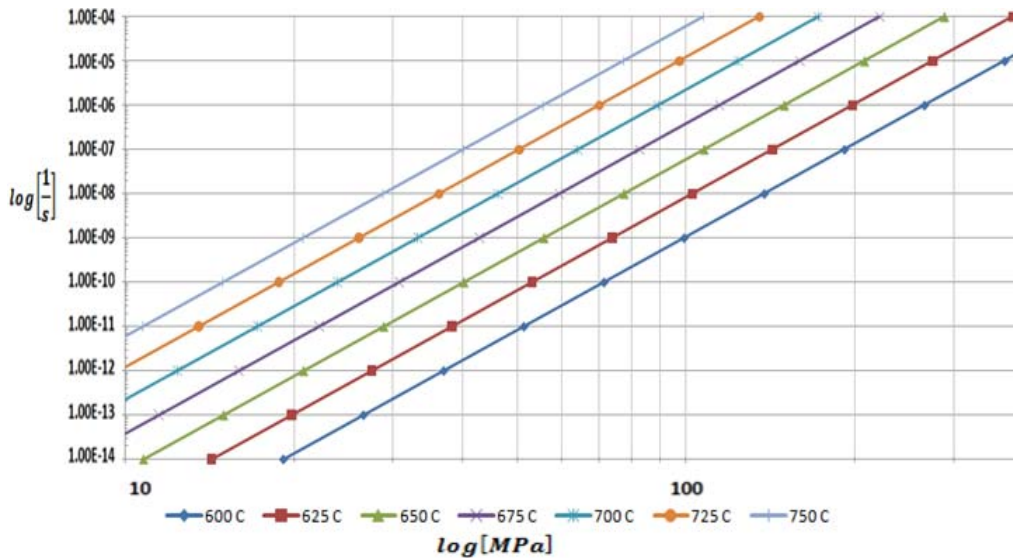


Figura 24 Velocidades de deformación por creep debido a escalamiento.

## 5.7 Transición de Creep por deslizamiento a Creep por escalamiento.

Para rangos de temperatura aproximados o iguales a 600°C ocurre un fenómeno el cual involucra los dos procesos previos. Primero ocurre una deformación plástica a baja temperatura como resultado de las dislocaciones por deslizamiento, y posteriormente ocurren las dislocaciones por escalamiento. Este efecto es visible en el cambio de la pendiente en la grafica para el cálculo de la velocidad a esta temperatura como se muestra en la figura [25]. Es aquí donde podemos encontrar esta fase de transición debida al rango de temperatura que no es muy alto, pero sin embargo los esfuerzos si son muy grandes, provocando este cambio.

En este punto las imperfecciones en el material juegan un papel de suma importancia, El creep de dislocaciones involucra el movimiento de dislocaciones además del de vacancias. Consecuentemente se requieren altas tensiones pero el proceso puede desarrollarse a temperaturas intermedias en las que el flujo difusional es escaso. El mecanismo es complejo y no está totalmente comprendido aunque se estima que el movimiento no conservativo de dislocaciones por trepado debe jugar un papel importante en el mismo.

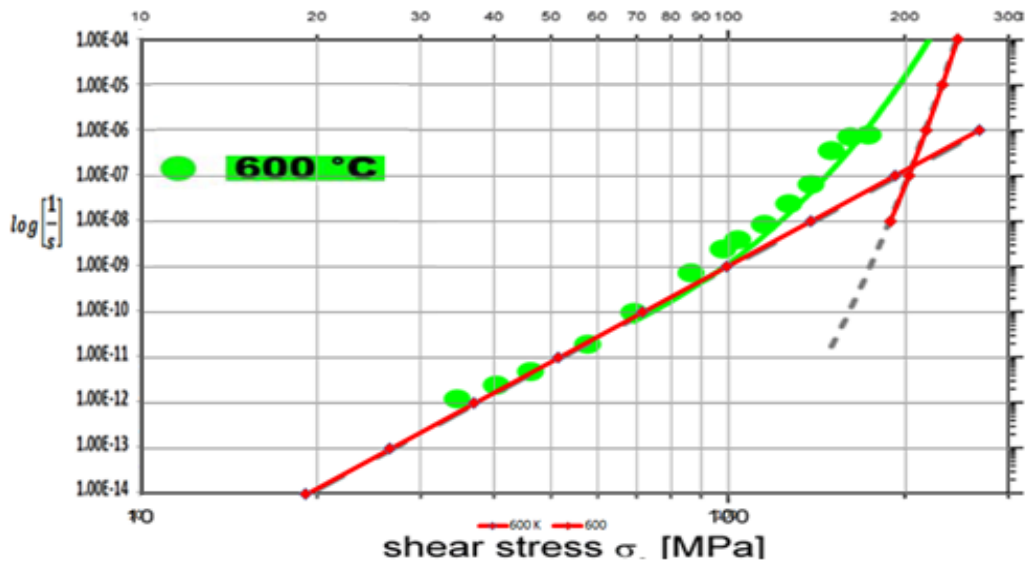


Figura 25 Combinación de dos casos de creep a 600°C

# CAPITULO 6

## FORMULACIÓN INTEGRAL DE FRONTERA PARA EL CREEP.

---

En análisis de creep, como en plasticidad, el enfoque de deformación inicial será aplicado y la ecuación integral para calcular los desplazamientos en la frontera es básicamente la misma; la única diferencia es que la deformación plástica  $\varepsilon^P_{ij}$  es remplazada con la velocidad de deformación por creep  $\dot{\varepsilon}^C_{ij}$ . Por lo tanto la ecuación integral para los desplazamientos puede reescribirse como (6.1):

$$c_{ij}(x')\dot{u}_j(x') + \int_{\Gamma} t'_{ij}(x', x)\dot{u}_j(x')d\Gamma = \int_{\Gamma} u'_{ij}(x', x)t_j(x')d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{\sigma}'_{ij}(x', z)\dot{\varepsilon}^c_{ij}(z)d\Omega \quad (6.1)$$

Donde  $\dot{u}_i$ ,  $t_i$  y  $\dot{\varepsilon}^c_{ij}$  son las velocidades de desplazamiento, tracción y deformación por creep, respectivamente,  $t'_{ij}$ ,  $u'_{ij}$  y  $\dot{\sigma}'_{ij}$  son el desplazamiento, tracción y solución fundamental de tercer orden, respectivamente, las cuales son funciones de la posición de los puntos de colocación  $x'$  y el punto de la región  $x$ el cual pertenece a la frontera, o el punto interno  $z$  y las propiedades del material. Es importante recordar que con el objetivo de poder distinguir la

ecuación general de velocidad de deformación por Creep y la utilizada en este trabajo tenemos la siguiente identidad:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\gamma} \quad (6.2)$$

Por el cambio de variable que ya se había determinado.

### 6.1 Esfuerzos equivalentes.

Así como las propiedades del material, tal como los parámetros de endurecimiento y el esfuerzo de cedencia son obtenidos de pruebas de carga uniaxiales, es necesario declarar una relación entre ellos y el estado de esfuerzos multiaxial.

Esto puede ser a través las cantidades equivalentes nombradas: el esfuerzo efectivo o equivalente. El esfuerzo efectivo o equivalente puede ser definido como (31):

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} \quad (6.3)$$

Donde  $J_2$  es el tensor deviatorico de esfuerzos y esta dado por:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (6.4)$$

### 6.2 Integración Numérica.

El dominio  $\Omega_y$  es dividido en  $N_c$  celdas como se muestra a continuación:

$$\Omega_y = \bigcup_{n=1}^{N_c} \Omega_n \quad (6.5)$$

En términos de plasticidad para los tensores de las velocidades de deformación y de esfuerzos, están dados para cada celda  $\Omega_n$ , por:

$$\dot{\varepsilon}^a_{ij} = \sum_{L=1}^{n_c} \Psi_L \dot{\varepsilon}^{a,k}_{ij} \quad (6.6)$$

$$\dot{\sigma}^a_i = \sum_{L=1}^{N_c} \Psi_L \dot{\sigma}^{a,k}_{ij} \quad (6.7)$$

Donde  $n_c$  es el número de nodos en la celda,  $N_c$  es el número de celdas y  $\Psi_L$  son las funciones de forma. La expresión numérica para los desplazamientos en la frontera es:

$$c\dot{u} + \sum_{n=1}^{N_{el}} \left( \int_{\Gamma} T\Phi d\Gamma \right) \dot{u}^n = \sum_{n=1}^{N_{el}} \left( \int_{\Gamma} U\Phi d\Gamma \right) \dot{t}^n + \sum_{n=1}^{N_c} \left( \int_{\Omega_N} \sigma\Psi d\Omega \dot{\varepsilon}^{g,n} \right) \quad (6.8)$$

Los términos  $T$ ,  $U$  son  $\sigma$  en esta ecuación son sub-matrices contenedoras de las soluciones fundamentales.  $N_{el}$  es el número de elementos de integración. Muy parecido a la frontera, la expresión discretizada para los esfuerzos en el dominio puede obtenerse por:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{N_{el}} \int_{\Gamma} D t d\Gamma - \sum_{n=1}^{N_{el}} \int_{\Gamma} S \dot{u} d\Gamma + \sum_{n=1}^{N_{el}} \int_{\Omega} \Sigma \Psi d\Omega \dot{\varepsilon}^{g,n} + f_{ij}(\dot{\varepsilon}^g) \quad (6.9)$$

Las cantidades  $D$ ,  $S$  y  $\Sigma$  son sub-matrices contenedoras de las derivadas de las soluciones fundamentales, y  $\Psi$  son las funciones de forma correspondientes a los elementos en la frontera y las celdas respectivamente.

### 6.3 Pseudocódigo para análisis e creep con temperatura variable.

Las ecuaciones (5.6, 5.8) que describen el comportamiento del creep en un rango de temperatura en el rango  $550^{\circ}\text{C} \leq T \leq 800^{\circ}\text{C}$  se programaron en el lenguaje FORTRAN y se implementaron como una subrutina a un programa de análisis de esfuerzos utilizando el método de los elementos de frontera; la subrutina contiene la siguiente estructura:

```
SUBROUTINE CREEPSZ

INCLUDE 'PARDUBE.F'
INCLUDE 'COMCOM.F'
INCLUDE 'COMDUBE.F'
INCLUDE 'COMDUAL.F'

DIMENSION ECTOT(MDI1),EVPR2IN(MDI1)

REAL*8 CONSTBOLTZ, CONSGAS, BURG,QP, GAMA0, TEMP, MELTT,L, MU, TAO
REAL*8 EXPONENTE1, EXPONENTE2,EXPONENTE3, EXPONENTE4
REAL*8 PLC, QC, CTRES, D0C, KED

C DIMENSION EVPR2(MDI1),EPE2(MDI1),DEPE2(MDI1)
C Ecuaciones programadas por Edgar, para el calculo de la velocidad del Creep a temperatura variable.
c EPSBA4(0)=0.0

DO 100 I=1,NTOTCELL

II=3*(I-1)
```

$$IK=4*(I-1)$$

$$IK1=4*(I-1)$$

$$SIGLOC(1)=SIGMA(IK+1)$$

$$SIGLOC(2)=SIGMA(IK+2)$$

$$SIGLOC(3)=SIGMA(IK+3)$$

$$SIGLOC(4)=SIGMA(IK+4)$$

$$S11=SIGLOC(1)-SIGLOC(2)$$

$$S22=SIGLOC(2)-SIGLOC(4)$$

$$S12=SIGLOC(3)$$

$$S33=SIGLOC(4)-SIGLOC(1)$$

$$RJ2=(S11**2+S22**2+6.*S12**2+S33**2)$$

$$SIG01=SQRT(0.5*RJ2)$$

*c THE MEAN STRESS*

$$SMEAN=(SIGLOC(1)+SIGLOC(2)+SIGLOC(4))/3.0$$

$$DEVST(1)=SIGLOC(1)-SMEAN$$

$$DEVST(2)=SIGLOC(2)-SMEAN$$

$$DEVST(3)=SIGLOC(3)$$

$$DEVST(4)=SIGLOC(4)-SMEAN$$

*c The Constants for the material are:*

$$CONSMAT=3.0/2.0$$

$$CONSTEQ=SIG01**(CM-1.0)$$

*c THE CREEP STRAIN FOR EVERY DIRECTION IS*  
 $EC=CONS*M*CONSTB*CONSTEQ*DEVST(1)*TTIME$

$$EC(IK1+1)=(3.0/2.0)*CNN*CONSB*CONSTEQ*DEVST(1)*TOTIME1**(CNN-1.0)$$

$$EC(IK1+2)=(3.0/2.0)*CNN*CONSB*CONSTEQ*DEVST(2)*TOTIME1**(CNN-1.0)$$

$$EC(IK1+3)=(3.0/2.0)*CNN*CONSB*CONSTEQ*DEVST(3)*TOTIME1**(CNN-1.0)$$

```

EC(IK1+4)=(3.0/2.0)*CNN*CONSB*CONSTEQ*DEVST(4)*TOTIME1**(CNN-1.0)
C THE INCREMENT OF THE CREEP STRAIN RATE FOR ALL THE DIRECTIONS IS EDELTAi
c WRITE(*,*)'CREEP STRAINS:'
c WRITE(*,*)EC(IK1+1),EC(IK1+2),EC(IK1+3),EC(IK1+4)
WORK4=SIGLOC(1)*EC(IK1+1)+SIGLOC(2)*EC(IK1+2)+SIGLOC(3)*EC(IK1+3)
+ +SIGLOC(4)*EC(IK1+4)
EPSBA4=WORK4/SIG01
c WRITE(*,*)'EFFECTIVE CREEP STRAIN IS'
c WRITE(*,*)EPSBA4
C CHECKING THE CONVERGENCE
EVPR2(I)=EPSBA4
C THE INCREMENT OF THE CREEP STRAIN IS:DELEP2=DELTAT*EvpRate
100 CONTINUE

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

C CALCULO DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACION

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

C CONSTANTE DE LOS GASES

CONSGAS=8.314

C CONSTANTE DE BOLTZMANN

CONSTBOLTZ=1.381E-23

C MAGNITUD DEL VECTOR DE BURGUER

BURG=2.58E-10

C ENERGIA DE ACTIVACION

QP=460000

```

C            *ENERGIA DE ACTIVACION DE LA DIFUSION DEL NUCLEO*

$$QC = 520000$$

C            *PRE EXPONENETE DEPENDIENTE DE LOS ESFUERZOS*

$$GAMA0 = 10^{**6}$$

C            *TEMPERATURA*

$$TEMP = 700 + 273.15$$

C            *PUNTO DE FUSION*

$$MELTT = 1810$$

C            *ESPACIAMIENTO DEL OBSTACULO*

$$L = 40.0E-9$$

C            *MODULO CORTANTE INICIAL*

$$MUO = 81000$$

C            *PRE CONSTANTE C3*

$$CTRES = 2.0E20$$

C            *COEFICIENTE DE DIFUSION DEL NUCLEO*

$$D0C = 10.0E-6$$

$$LAMDA = 1.64E11$$

C            *CALCULOS DEL CREEP*

$$S11 = SIGLOC(1) - SIGLOC(2)$$

$$S22 = SIGLOC(2) - SIGLOC(4)$$

$$S33 = SIGLOC(4) - SIGLOC(1)$$

$$RJS = (S11^{**2} + S22^{**2} + S33^{**2})$$

$$SIG0S = SQRT(0.1666667 * RJS)$$

C            *THE TEMPERATURE DEPENDANT SHEAR MODULUS*

$$MU = MUO * (1 - (0.85 * ((TEMP - 300) / MELTT)))$$

```

C      CALCULOS DEL CREEP A 550 GRADOS CELCIUS
      IF (TEMP.EQ.823.15) THEN
C          CALCULO DE LA FUERZA CORTANTE TAO
          TAO=MU*BURG/L
          GAMAPUNTO=GAMAO*EXP((-1*QP/(TEMP*CONSGAS))*(1-(SIGOS/TAO)))
      ENDIF
C      CALCULOS DEL CREEP A TEMPERATURAS MAYORES DE 550 GRADOS CELCIUS
      IF (TEMP.GT.823.15.NE.873.15) THEN
          DC=D0C*EXP(-QC/(CONSGAS*TEMP))
          N=5
          PLC=((SIGOS/MU)**(N+2))*DC
          GAMAPUNTO=CTRES*(MU*BURG/(CONSTBOLTZ*TEMP))*PLC*LAMDA
      ENDIF
      IF (IDEBUG.EQ.1) CALL OUTPUTITERA
c      TOTIME1=TOTIME1+TINCRE
      RETURN
      END

```

Con esta modificación y adaptación al código original ya se puede conocer numéricamente la velocidad de deformación por creep con temperatura variable de manera precisa y predecir su comportamiento en metales sometidos a cargas constantes en función del tiempo.

En el capítulo siguiente se validó esta implementación numérica mediante el uso de datos experimentales publicados en la literatura científica sobre el tema.

# CAPÍTULO 7

## APLICACIÓN A UN PROBLEMA

### PRÁCTICO

---

Para validar la implementación numérica y el código presentado en el capítulo anterior, se utilizan los resultados experimentales publicados por M. Rieth (15) sobre análisis del creep con temperatura variable en un acero AISI 316 L(N). En este trabajo experimental se llevaron a cabo varias pruebas a especímenes hechos con este material, a los cuales se les aplicaron diversos rangos de esfuerzos de acuerdo a la temperatura a la cual fueran sometidos, pudiendo fluctuar entre  $60MPa \leq \sigma \leq 250MPa$ . Por ejemplo para el rango de temperatura de  $T = 550^{\circ}C$  se realizaron 7 pruebas en las cuales se ocupó un rango de esfuerzos de  $100MPa \leq \sigma \leq 250MPa$ , mientras que para la temperatura de  $T = 600^{\circ}C$  únicamente se realizaron 6 pruebas en un rango de esfuerzo de  $60MPa \leq \sigma \leq 170MPa$ .

Los resultados numéricos obtenidos con el programa implementado, se calcularon en dos diferentes grupos de simulaciones, debido a la ruptura de la ley de potencia del Creep (PLB). Con el propósito de explicar completamente el comportamiento de Creep en estado estable en

rangos diversos de temperatura (550°C – 800°C), ambas simulaciones son incluidas, explicando la variación en la temperatura.

Se realizaron múltiples simulaciones, con el propósito de obtener la información necesaria para graficarlas, considerando una diferencia de 25 grados entre cada una de las simulaciones dentro del rango ya establecido. Los esfuerzos utilizados para la simulación fueron entre un rango de 50 a 300 mega pascales [MPa], sin embargo solo aquellos resultados que muestran una velocidad de deformación por creep menor a  $1e-4 \left[ \frac{1}{s} \right]$  fueron considerados para este análisis debido a que fue el resultado menor alcanzado en el análisis experimental.

Las propiedades del material utilizadas en estas simulaciones fueron obtenidas de referencias (15) y son las siguientes:

$$b: \text{Vector de Burgers.} = 2.58 \times 10^{-10} [\text{m}]$$

$$\mu_0: \text{Modulo cortante a } 0^\circ\text{K} = 81000 \left[ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right]$$

$$T_M: \text{Punto de fusión.} = 1810 [^\circ\text{K}]$$

$$k: \text{Constante de Boltzmann.} = 1.381 \times 10^{-23} \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}} \right]$$

$$R: \text{Constante de los Gases.} = 8.314 \left[ \frac{\text{J}}{(\text{molK})} \right]$$

$$D_{0c}: \text{Coeficiente de difusión del núcleo.} = 1 \times 10^{-5} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

$$Q_c: \text{Energía de activación.} = 520 \left[ \frac{\text{kJ}}{(\text{mol})} \right]$$

$$c_3: \text{Pré-constante.} = 2 \times 10^{20} [\text{adimensional}]$$

$$n: \text{Exponente del Creep.} = 5$$

La geometría utilizada fue adaptada para ajustarla a un análisis bidimensional de una placa metálica de 8[mm]x200[mm], a fin de que las dimensiones en el análisis numérico sean las mismas que las probetas utilizadas en el análisis experimental(15).

Para obtener los resultados de los experimentos, se normalizaron los resultados de la velocidad al ser multiplicados por un valor  $\lambda_i$ , donde el subíndice indica las ecuaciones (5.6, 5.8) respectivamente.  $\lambda_1 = e^{35.6}$  ;  $\lambda_2 = (40)^7$

### 7.1 Problema en el estado estable, primera parte. ( $600^{\circ}\text{C} \leq T \leq 800^{\circ}\text{C}$ )

En la subrutina desarrollada para el problema del estado estable, mediante un condicional se aplica la ecuación (5.6) de ley de potencia del creep con el siguiente rango de temperatura  $600^{\circ}\text{C} \leq T \leq 800^{\circ}\text{C}$ , debido a que este rango de temperatura es para el acero AISI 316 L(N), se encuentra próximo al valor medio del punto de fusión ( $0.5T_m$ ).

La deformación plástica por creep ocurre bajo la presencia de mecanismos de esfuerzos constantes en un rango  $60\text{ MPa} \leq \sigma \leq 300\text{ MPa}$ , sin embargo, es importante recordar la existencia de otros tipos de deformaciones de creep, tal es el caso de la deformación por deslizamiento por dislocación o *Twinning*, ocurre a los 120 MPa pero en otro rango de temperatura.

Para este caso, los resultados de los esfuerzos contra la velocidad de deformación fueron trabajados en una hoja de cálculo, y mediante una regresión lineal, se obtuvieron las ecuaciones que describen su comportamiento, donde todas fueron tipo potencial con una pendiente  $m = 7$ . Si el valor de la temperatura aumenta, el esfuerzo para producir la misma velocidad de deformación por creep se reduce de manera potencial con la siguiente relación:  $\dot{\gamma} = 4 \times 10^{-160} T^{49.123}$ . En la figura [26], se ilustra la velocidad de deformación por creep a diferentes temperaturas ( $600^{\circ}\text{C}, 650^{\circ}\text{C}, 700^{\circ}\text{C}, 750^{\circ}\text{C}$ ) contra los valores de los esfuerzos

actuando sobre la superficie del espécimen en cuestión; sin embargo, solo se consideraron los resultados que están dentro del rango de velocidad de deformación entre  $1 \times 10^{-14} \leq \dot{\gamma} \leq 1 \times 10^{-4}$ .

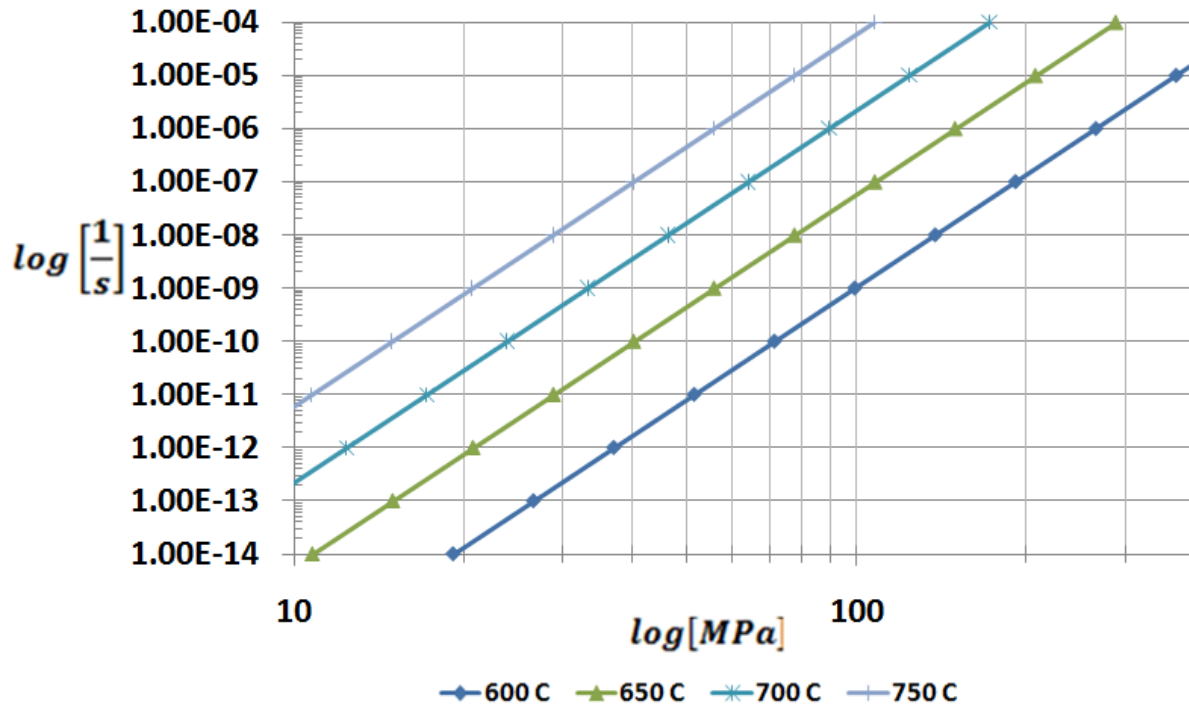


Figura 26 Velocidad de deformación por Creep contra los esfuerzos a diferentes rangos de temperatura.

Ahora bien, para calcular la deformación global por creep, debido a que en la subrutina anterior se simuló esfuerzos durante un tiempo  $t = 1000 \text{ hr}$ , basta solamente integrar los resultados de la velocidad del creep con respecto al tiempo con los límites  $0 \leq t \leq 3600000 \text{ seg}$  como se muestra a continuación:

$$\int_t \dot{\gamma} dt = \dot{\gamma} t = 3600000 \dot{\gamma} \tag{7.1}$$

Los resultados de la ecuación (7.1) para todas las velocidades y temperaturas computadas, tienen también un comportamiento potencial, con una pendiente  $m = 7$  y la deformación como se muestra en la figura [27].

Y teniendo como único valor diferente entre todas ellas, la ordenada al origen. Para todas las temperaturas, siendo los valores de los esfuerzos aplicados contra la deformación global del problema en un tiempo  $t$  en una escala  $\log - \log$ .

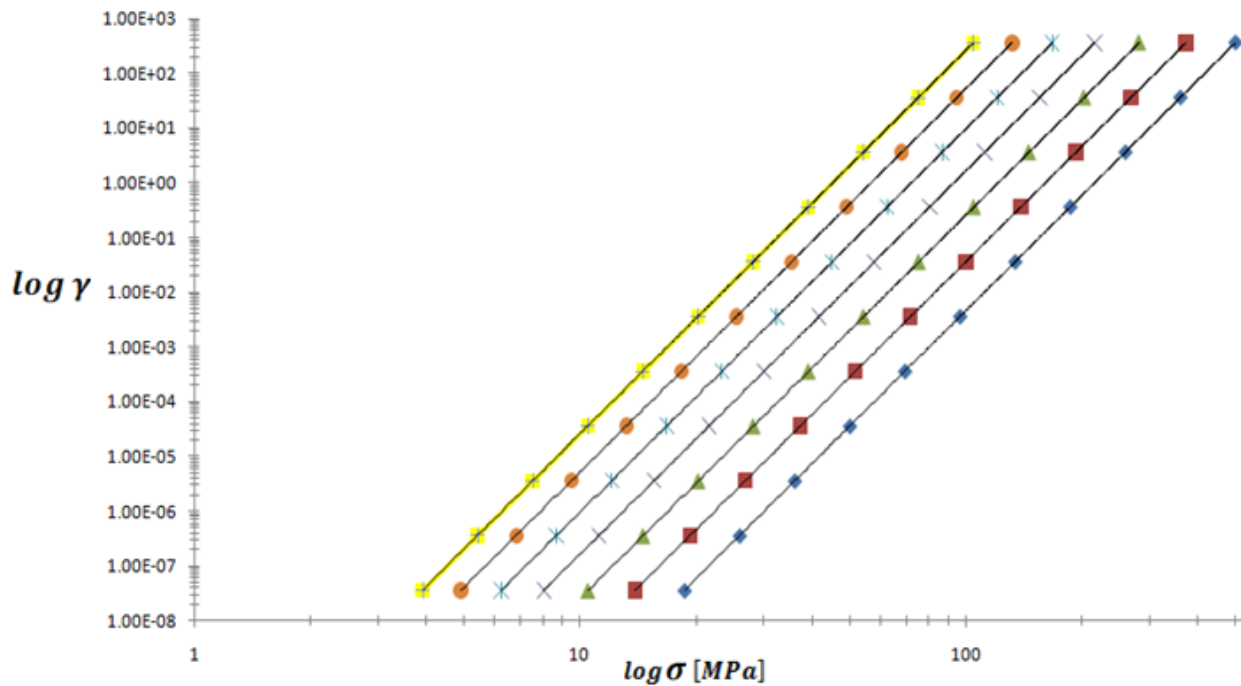


Figura 27 Esfuerzo contra la deformación por creep a diferentes temperaturas.

En la figura [26] y [27] se ve una relación existente entre el cambio de la temperatura y el esfuerzo necesario para producir una deformación; se podría pensar que esta relación es lineal dado que la pendiente es la misma, de la ecuación (7.2) al utilizar una gráfica de tipo  $\log - \log$ , la ecuación se convierte en:

$$\log y = \log(bx^m)$$

$$\log y = \log(x^m) + \log(b)$$

$$\log y = m \log(x) + \log(b) \quad (7.3)$$

Y en la siguiente tabla se muestra el cálculo de las líneas de tendencia de las gráficas y se determino el valor de la ordenada al origen de cada una de ellas:

Temperatura	Ecuación de correlación	b
600	$y = 5 \times 10^{17} x^7$	5.00E-17
625	$y = 4 \times 10^{16} x^7$	4.00E-16
650	$y = 3 \times 10^{15} x^7$	3.00E-15
675	$y = 2 \times 10^{14} x^7$	2.00E-14
700	$y = 1 \times 10^{13} x^7$	1.00E-13
725	$y = 5 \times 10^{13} x^7$	5.00E-13
750	$y = 3 \times 10^{12} x^7$	3.00E-12

Donde podemos observar como la relación entre cada una de las tendencias efectivamente es del tipo potencial, y que el valor de la pendiente en todas ellas es el mismo, como se indica en la figura [28] al graficar la relación entre el valor de la ordenada al origen de las ecuaciones de tendencia y la temperatura, nos muestra el cambio que existe al momento de hacer variarla; gracias a esto es más simple apreciar como el incremento de la temperatura tiene un cambio al esfuerzo aplicado necesario para iniciar la deformación, y que esta relación es una del tipo potencial también, la cual de acuerdo a la relación calculada es:  $\gamma = 1 \times 10^{-152} T^{48.826}$

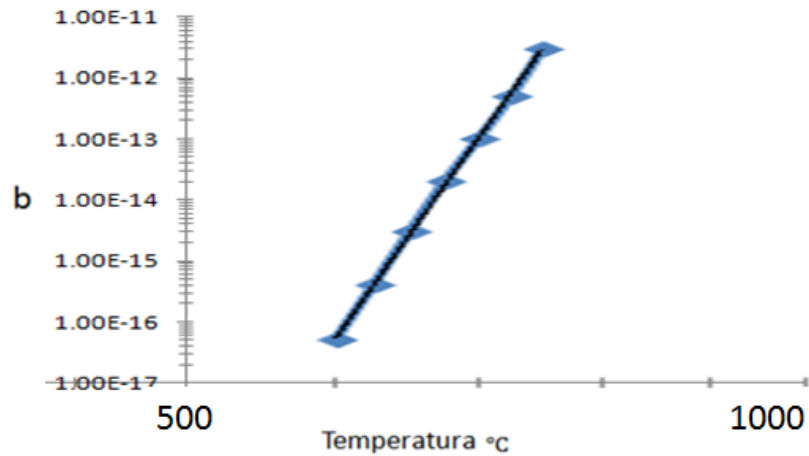


Figura 28 Gráfica de temperatura contra la ordenada al origen.

## 7.2 Estado estacionario Parte B. ( $550^{\circ}\text{C} \leq T \leq 600^{\circ}\text{C}$ )

Para esta segunda parte de análisis, las simulaciones fueron hechas con la ecuación de deslizamiento por dislocación (5.6), debido al hecho de que el rango de la temperatura es menor a  $0.3T_m$  y la deformación plástica ocurrirá bajo la presencia de mecanismos de grandes esfuerzos.

En la figura [29] a continuación se muestra la velocidad de deformación por creep a temperaturas menores a  $600^{\circ}\text{C}$  contra los valores de los esfuerzos actuando sobre la superficie del espécimen revisado.

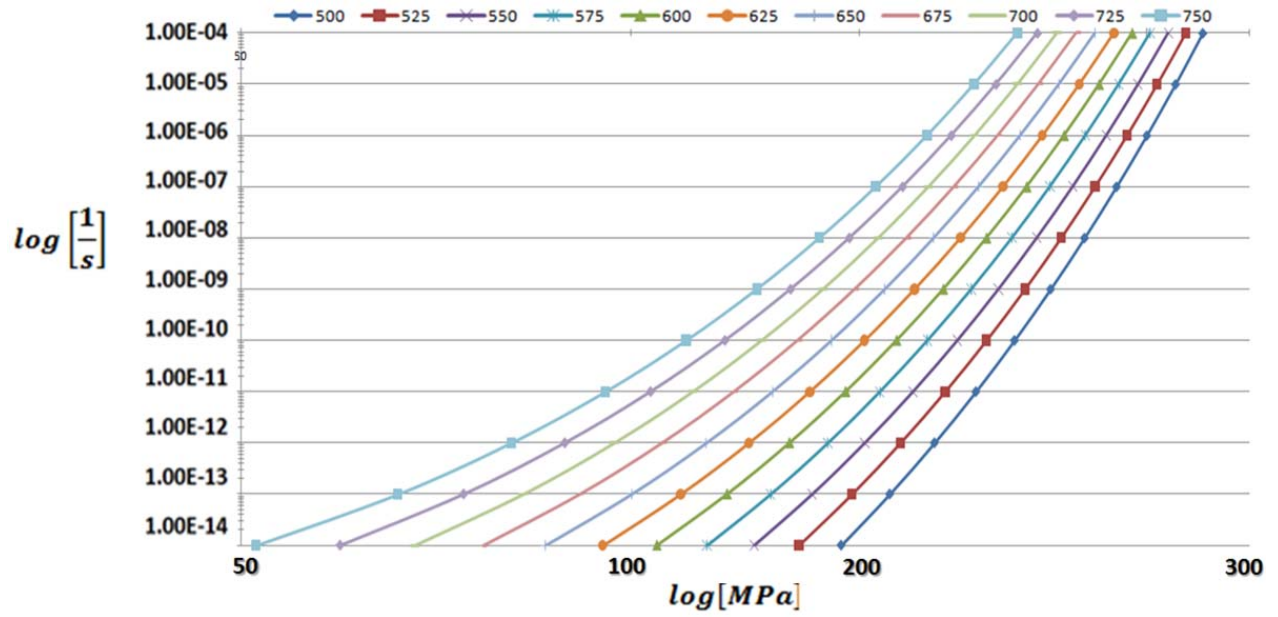


Figura 29 Velocidad de deformación por deslizamiento por dislocación.

Estos resultados al ser comparados con los obtenidos de las referencias demuestran estar muy próximos como se muestra en la figura [30], además de ser más fáciles de obtener.

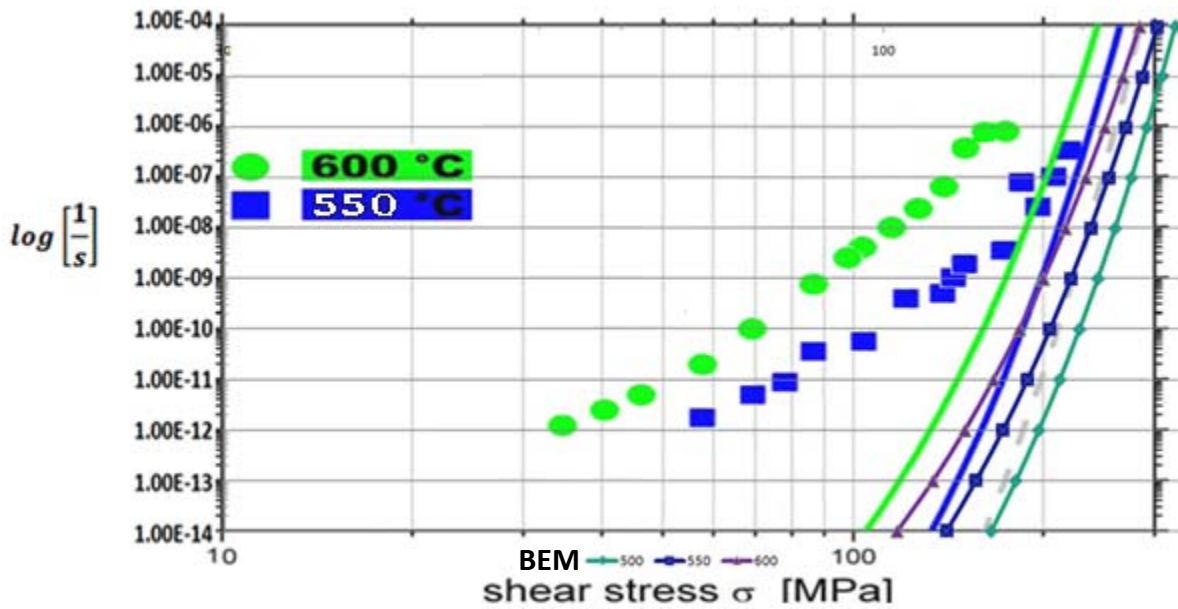


Figura 30 Comparación Simulaciones vs Experimental.

Cabe resaltar que estas velocidades de deformación no deben satisfacer por completo los valores experimentales obtenidos en referencias; únicamente deben de satisfacer los valores finales que son los que se consideran que entran en lo que es la deformación por creep de deslizamiento por dislocación, que al tratar de establecer la relación entre el cambio de temperatura y la velocidad de deformación, se observa que la relación no es lineal; esto se puede apreciar en el cambio que existe en la pendiente de las gráficas; al tratar de determinarlas como se hizo con la ecuación (7.2) se obtuvo que la relación no era potencial, y estaba dado por la siguiente ecuación exponencial:

$$y = be^{(mx)} \tag{7.4}$$

La siguiente tabla para los valores de la ordenada al origen y la pendiente:

Temperatura °C	B	M
500	8.00E-26	0.1756
525	8.00E-25	0.1727
550	6.00E-24	0.17
575	5.00E-23	0.1676
600	3.00E-22	0.1655
625	2.00E-21	0.1635
650	9.00E-21	0.1617

En la tabla anterior, únicamente se consideraron valores hasta 650°C con propósitos de poder apreciar mejor el comportamiento de la gráfica, ya que como se explico anteriormente, este tipo de comportamiento solo ocurre en un rango de temperatura.

Al graficar tanto la pendiente como la ordenada al origen obtenemos el cambio que ocurre entre ambas con respecto al cambio de temperatura como se muestra en la figura [31]:

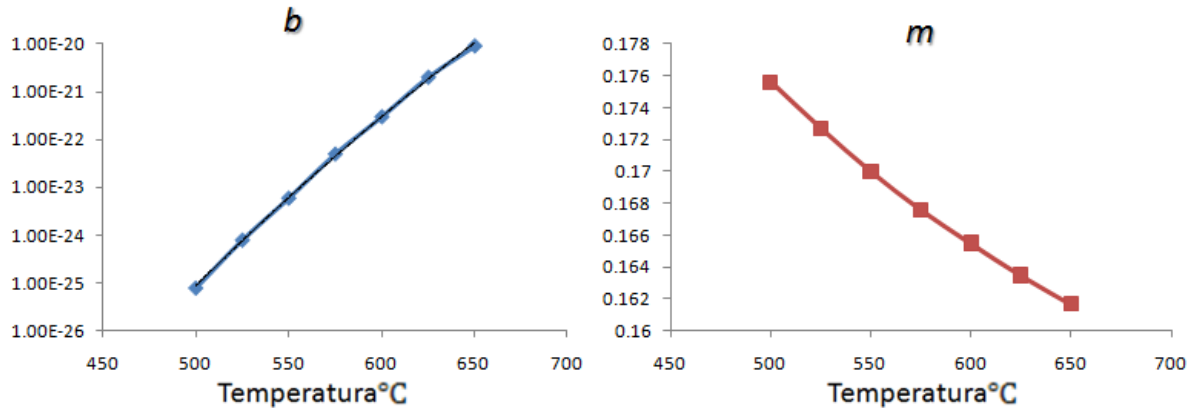


Figura 31 Gráfica de la Pendiente y Ordenada al origen contra la Temperatura.

Como se puede ver con el incremento de la temperatura existen dos cambios significativos en la relación de las gráficas, y esto es que aunque aumenta el valor de la ordenada al origen, la pendiente disminuye, debido a que llegara el momento en que la temperatura alcance el valor necesario para transformarse de un Creep debido al deslizamiento por dislocación a un Creep por escalamiento, el cual como ya se explico en el capítulo 5, se comporta de acuerdo a la ley de potencia, todo esto se explicara continuación.

### 7.3 Transición entre deslizamiento y escalamiento. (T = 600°C)

Finalmente, hace falta revisar el caso particular del espécimen analizado a 600°C debido al hecho de que existe un cambio considerable en la pendiente mostrada para la velocidad de deformación por creep. Para realizar este análisis se combino los dos casos vistos de deformación por creep para obtener una representación gráfica muy similar a la existente en las referencias vistas como se aprecia en la figura [32].

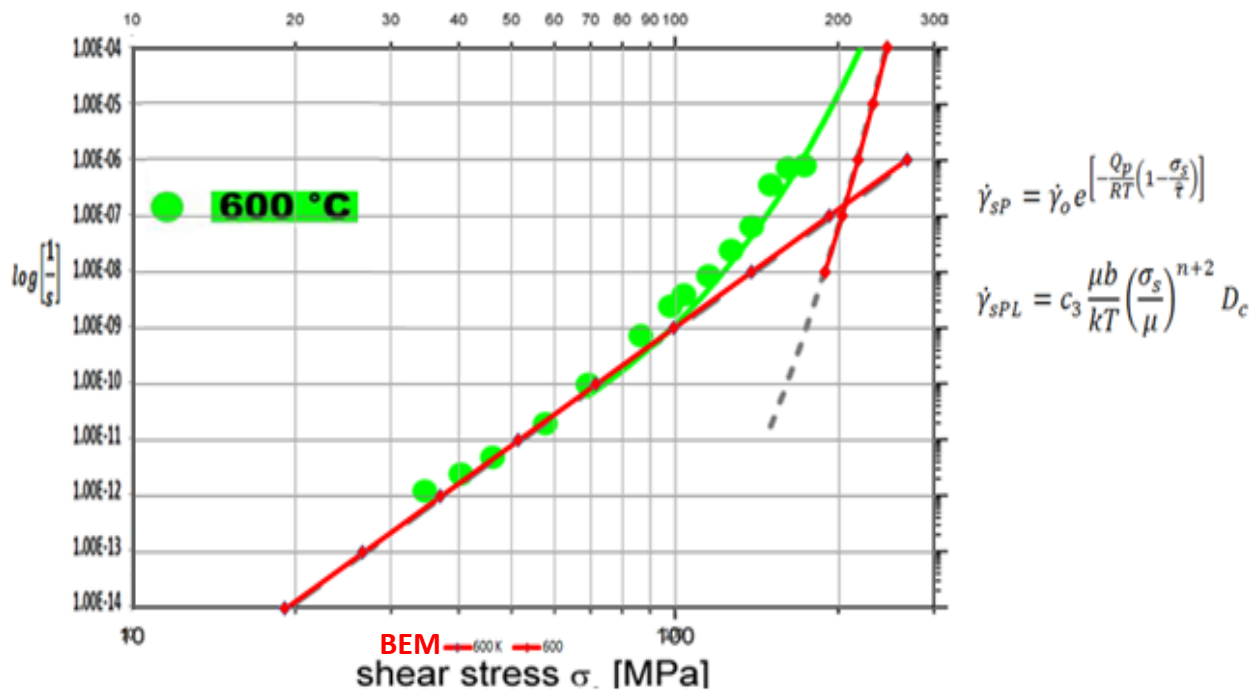


Figura 32 Velocidad de deformación por creep, combinación de dos casos.

Este fenómeno es más visible que en otros intervalos de temperatura debido al cambio de plasticidad sufrida por el material a los 600°C que en relación al punto de fusión del material esta es aproximadamente de  $0.3T_m$ . Sin embargo esta transición existe para cualquier rango de temperatura, solo que el esfuerzo en cuestión también juega un papel importante, aunque esta relación no es lineal.

# CAPITULO 8

## CONCLUSIONES.

---

El objetivo principal de este trabajo fue el de desarrollar una nueva formulación para el cálculo de la velocidad de deformación por creep utilizando el BEM, únicamente para problemas de estado estacionario. Con esta formulación obtuvimos velocidades de deformación a diferentes temperaturas dentro de un rango de 550°C a 750°C usando intervalos de 25°C; y también las deformaciones totales del sistema al ser expuesto a esfuerzos constantes durante un periodo de 10000 horas.

Los resultados provistos en este trabajo para el cálculo de la velocidad demostraron gráficamente, un comportamiento el cual, por lo que se menciona en este trabajo, se considera como estado estacionario del creep y es muy similar al provisto por las referencias.

Durante cada incremento de temperatura, los dos parámetros, deformación y velocidad de deformación, tienen un crecimiento considerable y que se considera que es una relación lineal dado que la pendiente al determinar la relación de cada gráfica era la misma y tiene un valor de  $m = 0.1429$ . Los resultados también muestran que la magnitud de los esfuerzos es menor cada

vez que la temperatura sufría un cambio, sin embargo este decremento no lo podemos considerar como una relación lineal por el comportamiento que muestra en la gráfica.

También los resultados muestran que este procedimiento es una herramienta eficiente y precisa para resolver problemas relacionados con el análisis del estado estable del creep, ya que las pruebas experimentales para un análisis de este tipo debe al menos durar un tiempo de 5000 horas, y cada simulación se desarrolla en menos de una hora; y en comparación con las gráficas existentes, podemos ver la semejanza tanto para la deformación como para la velocidad de deformación del creep en el comportamiento estándar del estado estacionario.

Es importante destacar que los valores mostrados en este trabajo, fueron normalizados para poder obtener resultados próximos a los existentes en las referencias y a un comportamiento estándar conocido para el creep en su estado estacionario.

Durante el desarrollo de este trabajo, las simulaciones hechas, fueron únicamente para cierto tipo de acero, es por ello que es importante recordar los alcances de este estudio, y que para futuros análisis es necesario el conocimiento de diversas propiedades del material a analizar las cuales fueron proporcionadas para esta investigación.

Por lo tanto, las velocidades de deformación por creep obtenidas en este proyecto están muy acorde con las que fueron obtenidas del artículo de Michael Rieth (16), las cuales fueron obtenidas de manera experimental, y las pendientes de las graficas describen de buen modo el comportamiento del creep en su estado secundario o estado estacionario.

## Bibliografía.

1. *Boundary element analysis for primary and secondary creep problems.* **Pineda, E.** Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Instituto Politécnico Nacional, U.P. Adolfo López Mateos, Zacatenco, 07738, México D.F., México : s.n., October 2008.
2. **Aliabadi, M.H.** *The Boundary Element Method. Applications in Solids and Structures.* England : John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex, 2002.
3. *Acta Mathematica 27-390 (1903) 365.* **Fredholm.**
4. *Integral Equation .* **Mikhlin, S.G.** Pergamon Press, London : s.n., 1957.
5. *Potential Methods in the Theory of Elasticity .* **Kupradze, V.D.** Israel Programms for Scientific Translations, Jerusalem : s.n., 1965.
6. *International Journal of Solids and Structures 5.* **Cruse, T.A.** 1969.
7. *Proceedings of the Royal Society of London.* **Jaswon, M.A.** 1963.
8. *Calculation of Potential Flows About Arbitrary Bodies, Progress in Aeronautical Sciences.* **Smith, J.L. Hess and A.M.O.** Pergamon Press, London : s.n., 1967.
9. **Massonet, C.E.** *In Stress Analysis.* London : s.n., 1965.
10. *Quarter Journal of Applied Mathematics 25.* **Rizzo, F.J.** 1967.
11. *Mathematical Foundations of The Boundary Integral Equation Method in Solid Mechanics.* **Cruse, T.A.** 1977.

12. **Lachat, J.C.** A Further Development of the Boundary Integral Techniques for Elastostatics (PhD thesis, University of Southampton. England : s.n., 1975.
13. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10. **Watson, J.C. Lachat and J.O.** 1976.
14. **Adams, Jeanne C.** *Fortran 90 Handbook*. s.l. : McGraw-Hill, 1992.
15. *Creep of the austenitic steel AISI 316 L(N) – Experimental and Models-*. **Rieth, M.** Institut für Materialforschung, Programm Kernfusion : s.n., November 2004.
16. **Kane, James H.** *Boundary Element Analysis, in Engineering Continuum Mechanics*. s.l. : Prentice Hall, 1994.
17. **Zienkiewicz, O. C.** *The Finite Element Method*. New York : McGraw-Hill, 1971.
18. **Edwin Joseph Purcell, Steven E. Rigdon, Dale E. Varberg.** *Cálculo*. s.l. : Prentice Hall, 2007.
19. **Stewart, James.** *Calculo de una variable trascendentes tempranas*. s.l. : Thomson Learning, 2001.
20. **R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider.** *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* . s.l. : Pearson education, 2005.
21. **Gubert, Xavier Ayneto.** *Mecánica del medio continuo en la ingeniería* . s.l. : Edicions UPS, 2010.
22. **Cela, Juan José López.** *Mecánica de los medios continuos* . s.l. : Ediciones de la universidad de Castilla-La Mancha, 1999.
23. *Introducción a los elementos de Frontera*. **Perez-Gavilán, J J.** 10 de julio de 2006.

24. **Frederic P Miller, Agnes F Vandome, John McBrewster.** *Kronecker Delta*. s.l. : VDM Publishing House Ltd., 2010.
25. **Tippens, Paul E.** *Física conceptos y aplicaciones*. s.l. : Mc Graw Hill, 2001.
26. **Brebbia, C. A.** *Boundary Element Techniques*. Berlin : Springer-Verlag, 1984.
27. **Somigliana, C.** *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope, Il Nuovo Cimento*. 1886.
28. *Fundamentals of Creep in metals and alloys*. **Kassner, M. E.** Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Southern California : s.n., 2004.
29. **H. J. Frost, M. F. Ashby.** *Deformation-mechanism Maps*. Oxford : Pergamon Press, 1982.
30. *Creep deformation and monotonic stress-strain behavior of Haynes alloy 556 at elevated temperatures*. **Abu-Haiba, M. S.** Department of Mechanical, Industrial and Manufacturing Engineering, The University of Toledo : s.n., 2002.
31. **Leon, Ernesto Pineda.** *Dual Boundary Element Analysis for Creep Fracture*. Queen Mary, University of London : s.n., 2005.