



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

**ANÁLISIS DEL ALGORITMO DE VARIABLE
INSTRUMENTAL PARA ESTIMACIÓN DE
PARÁMETROS EN SISTEMAS
ESTOCÁSTICOS, MONOVARIABLES,
LINEALES Y ESTACIONARIOS.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:
ING. GABRIELA DE JESÚS LÓPEZ RUÍZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ DE JESÚS MEDEL JUÁREZ

CO- DIRECTOR DE TESIS:
DR. PEDRO GUEVARA LÓPEZ

MÉXICO, D. F.

JULIO DE 2005



INDICE

RELACIÓN DE GRÁFICAS Y TABLAS.....	II
GLOSARIO.....	III
RESUMEN.....	VI
ABSTRACT.....	VII
CAPÍTULO I. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	1
ESTADO DEL ARTE.....	6
I.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	11
I.2. OBJETIVO GENERAL.....	11
I.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	12
I.4. HIPÓTESIS.....	12
I.5. LÍMITES Y ALCANCES.....	12
I.6. JUSTIFICACIÓN.....	12
I.7. CONCLUSIONES.....	13
CAPÍTULO II. FILTRADO DIGITAL PARA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN SISTEMAS ESTOCÁSTICOS MONOVARIABLES, LINEALES Y ESTACIONARIOS.....	15
II.1. INTRODUCCIÓN.....	15
II.2. EL PROCESO DE FILTRADO DIGITAL.....	16
II.3. MODELO ARMA.....	17
II.3.1. MODELOS AUTOREGRESIVOS.....	18
II.3.2. MODELO CON PROMEDIOS MÓVILES.....	18
II.4. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS POR LA TÉCNICA DE VARIABLE INSTRUMENTAL.....	19
II.5. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS POR LA TÉCNICA DE MÍNIMOS CUADRADOS....	23
II.6. CONCLUSIONES.....	24
CAPÍTULO III. ESTIMACIÓN POR EL MÉTODO DE VARIABLE INSTRUMENTAL PARA SEGUIMIENTO DE LOS TIEMPOS DE EJECUCIÓN EN UNA TAREA EN TIEMPO REAL.....	25
III.1. INTRODUCCIÓN.....	25
III.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE TIEMPOS DE EJECUCIÓN PARA UNA TAREA EN TIEMPO REAL.....	26
III.3. EJEMPLO DE IMPLANTACIÓN DEL FILTRO DIGITAL EN TIEMPO REAL (FDTR) USANDO LA VARIABLE INSTRUMENTAL PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN UN MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA (C. C.).....	28
III.3.1. ANÁLISIS COMPUTACIONAL.....	28
III.4. RESULTADOS OBTENIDOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL ESTIMADOR DE “VARIABLE INSTRUMENTAL CON RUIDOS NO CORRELACIONADOS”.....	33
III.5. RESULTADOS OBTENIDOS DE LA SIMULACIÓN DEL ESTIMADOR DE “VARIABLE INSTRUMENTAL CON RUIDOS CORRELACIONADOS”.....	36
III.6. COMPARACIONES REALIZADAS DE LAS SIMULACIONES DEL ESTIMADOR “VARIABLE INSTRUMENTAL CON RUIDOS NO CORRELACIONADOS Y MÍNIMOS CUADRADOS”.....	39
III.7. COMPARACIONES REALIZADAS DE LAS SIMULACIONES DEL ESTIMADOR “VARIABLE INSTRUMENTAL CON RUIDOS CORRELACIONADOS Y MÍNIMOS CUADRADOS”.....	41
III.8. CONCLUSIONES.....	43
CAPITULO IV. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	45
BIBLIOGRAFÍA.....	48

APÉNDICE A. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO COMPUTACIONAL “VARIABLE INSTRUMENTAL”.....	52
APÉNDICE B. CÓDIGO DE LOS ALGORITMOS EN MATLAB® DEL MÉTODO VARIABLE INSTRUMENTAL.....	53
APÉNDICE C. VARIABLES ALEATORIAS Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS.....	59
APÉNDICE D. SISTEMAS LINEALES	62
APÉNDICE E. OBSERVABILIDAD.....	63

RELACIÓN DE GRÁFICAS Y TABLAS

FIGURA 1. SISTEMA CON RUIDOS INTERNOS Y EXTERNOS.....	1
FIGURA 2. PROCESO DE FILTRADO.	16
FIGURA 3. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS.	19
FIGURA 4. ESTIMACIÓN USANDO LA TÉCNICA DE VARIABLE INSTRUMENTAL.....	30
FIGURA 5. SIMULACIÓN: 100 PRUEBAS CON 300 ITERACIONES DEL ESTIMADOR, USANDO A LA VARIABLE INSTRUMENTAL	31
FIGURA 6. SIMULACIÓN: 100 PRUEBAS CON 300 ITERACIONES DEL ESTIMADOR, USANDO A LA VARIABLE INSTRUMENTAL.	32
FIGURA 7. RESULTADOS DE SIMULACIÓN (RUIDOS NO CORRELACIONADOS).	33
FIGURA 8. RESULTADOS DE SIMULACIÓN (600 PRUEBAS, PARA 100 ITERACIONES CADA UNA).	34
FIGURA 9. RESULTADOS DE SIMULACIÓN (600 PRUEBAS DE ESTIMACIÓN PARA 100 ITERACIONES CADA UNO).	35
FIGURA 10. RESULTADOS DE SIMULACIÓN (ESTIMACIÓN Y FUNCIONAL REPRESENTATIVOS).	35
FIGURA 11. RESULTADOS DE SIMULACIÓN (RUIDOS CORRELACIONADOS).	36
FIGURA 12. RESULTADOS DE SIMULACIÓN (600 PRUEBAS DE ESTIMACIÓN, PARA 100 ITERACIONES CADA UNO).	37
FIGURA 13. RESULTADOS DE SIMULACIÓN (ESTIMACIÓN Y FUNCIONAL REPRESENTATIVOS).	38
FIGURA 14. RESULTADOS DE SIMULACIÓN AL USAR LA VARIABLE INSTRUMENTAL CON RUIDOS CORRELACIONADOS.	39
FIGURA 15. ESTIMACIÓN USANDO MÍNIMOS CUADRADOS.	40
FIGURA 16. RESULTADOS DE SIMULACIÓN (RUIDOS CORRELACIONADOS).	41
FIGURA 17. ESTIMACIÓN USANDO MÍNIMOS CUADRADOS.	42

RESUMEN

En este documento se presentan los resultados al realizar el análisis del algoritmo de variable instrumental (ver: [20], [38] y [39]) para la estimación de parámetros en sistemas estocásticos monovariantes, lineales y estacionarios, estudiando a través del funcional de error su grado de estimación en dos casos:

- a) Sistemas con perturbaciones correlacionadas entre sí, y
- b) Sistemas con perturbaciones no correlacionadas.

Se utiliza Matlab® para la simulación del método de estimación en forma recursiva y se realiza el estudio numérico y gráfico sobre los Tiempos de ejecución de Tareas en Tiempo Real [5].

El desarrollo de varias simulaciones con la misma cantidad de iteraciones, permitió obtener la estimación ponderada para el sistema de Tiempos de ejecución de Tareas en Tiempo Real, con una varianza acotada.

El documento está organizado en cuatro capítulos: en el primero se presentan los antecedentes para el desarrollo de la tesis; el concepto de filtro digital, el proceso de filtrado, la modalidad de un filtro como estimador; posteriormente se presenta el problema, la justificación, los objetivos, hipótesis y limitaciones de la tesis. En el capítulo 2 se realiza el desarrollo del estimador a través del método de variable instrumental para un sistema estocástico, lineal, invariante en el tiempo y estacionario; se hace un análisis del error de convergencia para ruidos correlacionados entre sí y no correlacionados, se presenta el error calculado y el funcional correspondiente. En el tercer capítulo se propone la estimación de parámetros para reconstruir un modelo de tiempos de arribo para una tarea en tiempo real [5] y se realiza la simulación del estimador para ruidos con y sin correlación, se repite la ejecución del filtro digital para 600 experimentos y se obtiene el estimador más representativo, finalmente se muestran los resultados numéricos y gráficos, se realizó una comparación ilustrativa entre variable instrumental y mínimos cuadrados. El cuarto capítulo corresponde a las conclusiones generales de la tesis, resaltando los resultados de los errores debido a la correlación, los intervalos de convergencia del estimador y la construcción del filtro.

ABSTRACT

In this document present the set of results, obtained them using the instrumental variable (to see: [20], [38] y [39]) algorithm as parameter estimator in stochastic systems in SISO, linear and stationary, studying through the functional error, the level of converge in two cases:

- a) Systems with disturbances correlated between them, and
- b) Systems with disturbances uncorrelated.

Matlab® is used for the simulation of the method of estimation in recursive form and is made the numerical and graphical study by the Run times for Tasks in Real Time sense [5].

The development of several simulations with the same amount of iterations, allowing obtain estimation weighed for the system of Run Times for Tasks in Real Time, with an annotated variance.

The document is organized in four chapters: in the first, the antecedents appear for development of the thesis; the concept of digital filter, the filtrate process, the modality of a filter like estimator; later one appears problem, the justification, the objectives, hypothesis and limitations of thesis. In chapter 2, is development the estimator through method of instrumental variable for a stochastic, linear, invariant system in the stationary time and; an analysis becomes of the parallax error stops correlated noises between if and not correlated, the error appears calculated and functional the corresponding one. In the third chapter, one sets out estimation of parameters to reconstruct a model of times of arrival for one Task in Real Time [5] and is made the simulation of the estimator for noises with and without correlation, the execution of the digital filter for 600 experiments is repeated and the representative estimator is obtained but, finally they show the numerical and graphical results, comparing the instrumental variable and last square method in illustrative sense. The fourth chapter corresponds to general conclusions of the thesis, standing out the results of errors due to the correlation, the intervals of convergence of the estimator and the construction of the filter.

CAPÍTULO I. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El filtrado desde el punto de vista digital es un área dedicada para la extracción, selección, reconstrucción y predicción de información de acuerdo a un grupo de criterios, extrayendo la información deseada en un sentido preestablecido (ver: [58] y [31]). Este tipo de investigaciones ha servido a los sistemas de inteligencia de diversos países, ya que el análisis de la información permite tomar decisiones. Pero dentro del análisis requerimos seleccionar aquella información que realmente sea importante de acuerdo a algún criterio.

La teoría de filtrado contempla áreas descritas en [35], las cuales son: estimación e identificación. La primera área describe la dinámica interna del sistema en análisis; la segunda área describe el comportamiento de su dinámica externa, ambas contando con la opción de filtrar, reconstruir o predecir su comportamiento [60]. El filtrado lleva consigo diferentes aplicaciones [60], en la actualidad estas aplicaciones son del tipo digital [29], permitiendo a través de algoritmos recursivos seleccionar la información deseada de la no deseada de una manera dinámica [58]. Pensar en la teoría de filtrado lleva consigo planear el análisis para la selección del modelo que describa la respuesta del sistema lo más parecida posible (concepto de la caja negra), con lo cual no se altera el comportamiento del sistema real al pasarlo a través de un sistema digital [31].

Los Filtros Digitales en general tienen aplicaciones en los procesos industriales (ver la Figura 1) y de monitoreo, se encuentran en: Plantas químicas y nucleares, procesos de producción, bolsas de aire de seguridad para automóviles, sistemas de inyección de combustible, análisis de voz, sistemas de control de vuelo, adquisición de datos, aplicaciones médicas, sistemas de telecomunicación, análisis de trayectorias de misiles y cohetes espaciales, entre otras muchas aplicaciones, (ver: [20]).

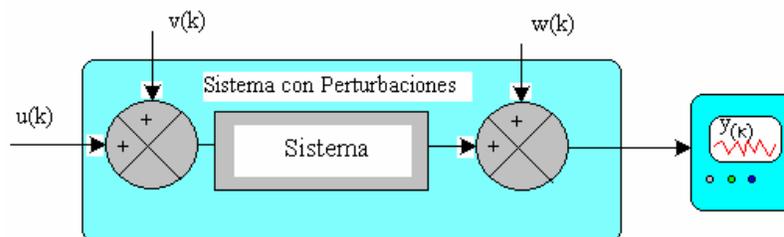


Figura 1. Sistema con ruidos internos y externos.

Balakrishnan [3] y Rozanov [64] comentan que un *filtro*, es un *descriptor* estocástico. De acuerdo a Haykin [20] y [17], el término filtro se utiliza para describir un dispositivo en forma de hardware o software que se aplica para:

- Eliminar el ruido de los datos de un sistema, es decir, filtrar la señal: En este caso observamos dos clases de situaciones: ventanas estáticas y ventanas dinámicas. Las

primeras son los tradicionales filtros preseleccionados para una banda (pasa bajas, pasa alta, supresor de banda, etc.), pero que en forma estática mantienen a través de toda su operación su condición: operar para una ventana con un ancho y largo preestablecidos [58]. Las ventanas dinámicas van actuando de tal forma que de acuerdo a un grupo de criterios dinámicos, se van autoajustando tanto en ancho como en largo; esto puede verse en los filtros recursivos permitiendo observar el comportamiento del sistema ya filtrado y la respuesta del filtro en línea o en tiempo real (ver: [58] y [58]).

- b. Extraer información de acuerdo a alguna característica del sistema a analizar: los filtros independientemente de su naturaleza, extraen información del sistema de acuerdo a un grupo de criterios preestablecidos (ver: [58] y [31]).
- c. Reconstruir el comportamiento del sistema a analizar: una vez que el filtro cuenta con un alto grado de convergencia, respecto a los criterios y funcionales en los que se observó su calidad de respuesta, y dada la información del presente se procede a reconstruir en forma hipotética el comportamiento de del sistema para un periodo de tiempo anterior, el cual está acotado (ver: [58] y [58]). Que permitirá detectar cuando el sistema sufrió cambios que hicieron que cambiara su dinámica en un sentido.
- d. Predecir el comportamiento del sistema a analizar: una vez que el filtro cuenta con un alto grado de convergencia, respecto a los criterios y funcionales en los que se observó su calidad de respuesta, y dada la información del presente se procede a predecir en forma hipotética el comportamiento de del sistema para un periodo de tiempo posterior, acotado. Que permitirá detectar cuando el sistema sufrirá cambios que harán que cambie su dinámica en un sentido (ver: [58] y [58]).

El proceso de filtrado se basa en (ver: [58] y [58]):

- a. Monitorear los estados que emite el sistema a analizar (simbólicamente son representados: $\{y(k)_i\}$, $k, i \in \mathbf{Z}^+$): el conjunto de respuestas del sistema dentro de un intervalo de tiempo, contarán con un comportamiento específico, del cual se obtienen un conjunto de propiedades que permitirán acotar la operación del filtrado.
- b. Predecir o describir las perturbaciones que alteran el desempeño de un sistema en un ambiente dado, requiere de hacer una serie de análisis tanto de reconstrucción como de predicción sobre el comportamiento del sistema dentro de un ambiente y que permita acercarse a las condiciones que lo alteran negativamente; esta clase de perturbaciones pueden ser originados por causas como:
 - b.1. Errores propiciados por el emisor: que es un error de lectura que se genera entre las respuestas del sistema y del filtro, en términos generales este error está acotado, cuenta con propiedades estadísticas.
 - b.2. Errores de lectura provocados en el receptor: es un error generado por el problema conocido del redondeo de cifras, lo cual provoca que se pierda o se de información al filtro que ya es estrictamente información parcial del sistema, siendo el filtrado un descriptor de una información manipulada.
 - b.3. Influencia del medio ambiente que rodea tanto al emisor como al receptor: como los experimentos para el proceso de filtrado se realizaron básicamente

sobre un modelo que describía el comportamiento aproximado del sistema dado los costos de implementación y de pruebas sobre el filtro sobre el sistema real, al acoplarlo al sistema real, se tiene el problema de la influencia del medio ambiente que afecta la expuesta del sistema así como las entradas al filtro, lo cual esta cambiando dinámicamente, lo que provoca un grado de incertidumbre sobre la respuesta del filtro.

Dentro de la teoría de filtrado existen dos áreas básicas (ver: [17] y [35]):

- a. *Estimación*. Es el área que se encarga de describir la dinámica de los parámetros del sistema a través de sus señales observables. Jazwinski [25].
- b. *Identificación*. Es el área que se encarga de describir la dinámica de los estados del sistema a través de sus señales observables.

Para realizar un filtrado se requiere pasar por cuatro pasos básicos para obtener un modelo que describa el comportamiento del sistema en forma en diferencias finitas, estos son (ver: [58] y [58]):

- a. **Planeación experimental**: el sistema deberá estar dentro de un ambiente en el cual se manipulen en un sentido de probabilidad, el conjunto de variables externas que en forma evidente provocan una respuesta del sistema, a esta condición se le conoce como en Vitro,
- b. **Selección de la estructura del modelo**: una vez que el sistema se encuentra en Vitro, se procede a seleccionar el modelo que describirá aproximadamente su comportamiento. En términos generales contamos con dos casos dada la información de la dinámica interna que se tenga del propio sistema: El primero de ellos consiste en no tener la posibilidad de conocer más allá de las señales de entrada y de salida del sistema, las causas para contar con este caso son muchas, pero el problema se resume a dadas un conjunto de señales de entrada al sistema describir las señales de salida. Sobre esta temática encontramos a los filtros digitales. En el segundo de ellos contamos con la posibilidad de describir al sistema a través de su propia estructura interna; en este caso se pueden utilizar diversas técnicas de modelado de sistemas dinámicos, buscando en pruebas de escritorio que las respuestas del modelo sean aproximadamente iguales a las del sistema real. Independientemente del caso se procede a realizar la discretización de ambos, el primero (el sistema) por medio de dispositivos de hardware y software que permitan monitorear tanto sus entradas como sus salidas desde un sistema digital; el segundo (el modelo) es la discretización analítica que como ejemplo encontramos a las diferencias finitas.
- c. **Estimación e Identificación**: independientemente del tipo de modelo obtenido, se procede a realizar una serie de experimentaciones que permitirán caracterizar con una mayor exactitud al propio sistema. Pero dentro de esta serie de pruebas es necesario construir herramientas que vayan monitoreando la dinámica tanto de los estados como de los parámetros del modelo, con el objetivo de que estas puedan realizar la predicción del comportamiento del sistema bajo una condición o que puedan darnos información de su grado de estacionariedad o de invarianza en una condición dada para un tiempo específico.

En básico contar con la teoría del filtrado con sus dos áreas básicas: estimación e identificación, a través de las cuales se puede lograr una serie de resultados a priori de lo que ocurrirá en un futuro cercano dada una serie de condiciones dentro del sistema y en su medio. Permitiendo así tomar las prevenciones necesarias que permitan evitar costos innecesarios.

- d. **Validación del filtrado:** la serie de pruebas realizadas en el modelo del sistema y dada el conjunto de respuestas, tanto el estimador como el identificador seleccionado requerirán de dar respuestas que estén acotadas en un sentido de probabilidad de acuerdo a un funcional de error previamente construido a la implementación de los filtros. En el caso de identificador está claramente acotado el comportamiento del filtro, sea identificador o estimador.

La estimación de parámetros es importante, ya que por ejemplo, dado un sistema modelado por $y_k = \varphi_k y_{k-1} + e_k$ donde e_k es un error generalizado sobre las perturbaciones tanto internas como externas que alteran el funcionamiento del sistema. Las condiciones internas del modelo están descritas por φ_k y que no pueden ser medidas de una manera directa, el caso contrario son y_{k-1} así como e_k , que son señales que pueden medirse directamente. La estimación de φ_k estará en función la velocidad de cambio de y_k y de e_k respecto a y_{k-1} . Pero en un sentido de probabilidad la estimación estará en función de los momentos de probabilidad que se consideren necesarios para la descripción de φ_k .

Un ejemplo de estimación es el método de mínimos cuadrados, tal que por medio del segundo momento de probabilidad respecto al propio estado medible del sistema se obtiene un estimador con grado de oscilación acotado por un funcional que contiene las varianzas del ruido generalizado así como la del propio estado medible. Otro ejemplo, es el uso de la variable instrumental presentada en [11], [19], [20] y [50] para sistemas estocásticos, y que de acuerdo a sus propiedades básicas podemos seleccionar aquella variable que de acuerdo a las necesidades del propio sistema puede tener diferentes grados de correlación.

Dentro de este trabajo se considera a un sistema estocástico, monovariante, lineal y estacionario; realizando el estudio de la magnitud del error de estimación en dos casos: a) para sistemas con perturbaciones correlacionadas entre si y b) para sistemas con perturbaciones no correlacionadas, mostrando el funcional de error de estimación descrito simbólicamente por $J = f(E\{\Delta_s \Delta_s^T\})$.

Se dice que un *estimador es lineal* (caso particular de esta tesis) si cumple con las siguientes condiciones:

a)
$$F(v + \omega) = F(v) + F(\omega),$$

b)
$$F(kv) = kF(v).$$

Considerando al sistema F , en función de un conjunto de entradas $\{u_i\}$, se dice que es lineal si para cualquier par de entradas $u_s, s=1,2$ pertenece a lo más a dos salidas $F(u_1)$ y $F(u_2)$, tal que se cumple [38]:

c)
$$F(c_1u_1+c_2u_2)=c_1F(u_1)+c_2F(u_2).$$

De acuerdo a la teoría de probabilidades, un *estimador es suavemente estacionario* si el primer momento de probabilidad de la señal filtrada es igual en cualquier intervalo τ [38] en el que evoluciona el sistema.

Se dice que un estimador es *invariante en el tiempo* (el caso de esta tesis) si las características de su señal de entrada y de salida no cambian con el tiempo. Si se tiene un sistema F y una señal $x(n)$ se tiene lo siguiente [28]:

$$\begin{aligned} x(n) &\xrightarrow{F} y(n) \\ x(n-k) &\xrightarrow{F} y(n-k) \end{aligned}$$

ALGUNAS APLICACIONES DEL FILTRADO DIGITAL

Sensor barométrico de altitud en aeronaves “Aeronáutica”. Un sensor barométrico de la presión del aire se utiliza en los sistemas de navegación aerotransportados para estabilizar la estimación de la altitud en el sistema de navegación de inercia. El sensor barométrico no es muy exacto, y da medidas de la altura con un error en la varianza; es entonces cuando debe reducirse el error a través de un filtro digital.

Activación de la bolsa de aire de los automóviles. Convencionalmente las bolsas de aire “airbag” de los automóviles explotan cuando el carro sufre un impacto o una desaceleración bruscamente, esto es por un seguro que en el carro trae para evitar que el conductor se golpee con el volante o que sufra un accidente por el impacto. En la primera generación de los airbag, era complicado resolver la situación de pesos en el asiento, así como las desaceleraciones y los impactos, el problema era ¿cómo detectar el momento adecuado para que los airbag funcionaran? Se debe de identificar la presión del conductor o pasajero con cada posible caso o situación que se puede dar e identificar el uso de los airbag. Una idea para mejorar el sistema, es monitoreando el peso sobre el asiento, esto es para detectar la presencia del conductor o pasajero, la posición, usar dos o más diferentes presiones de explosión o desaceleración, dependiendo del movimiento del conductor o pasajero (mediante simulaciones) y medidas de fuerza en el peso.

Aplicación de filtros digitales en econometría. Los filtros son importantes para ciertos datos económicos, para saber en la bolsa de valores los tipos de cambios si es malo o no, como para monitorear las ventas de productos particulares. Las conclusiones importantes están en los parámetros externos que influyen la venta que pueden ser graficados.

ESTADO DEL ARTE

Las dinámicas de los sistemas reales representados esquemáticamente en la Figura 1, pueden ser descritas a través de ecuaciones diferenciales o en diferencias [20], independiente de que puedan ser observadas o no sus propiedades internas.

Pero el comportamiento exterior de un sistema puede ser representado por un conjunto de modelos que darían un buen seguimiento al comportamiento de las dinámicas del sistema conforme a algún criterio previamente establecido. Es así como es necesario seleccionar de acuerdo a otro criterio aquel modelo que se aproxime “mejor” al comportamiento del sistema [20]. Para seleccionar el modelo adecuado se requiere pasar por las siguientes etapas básicas: 1.- Planeación y cotas experimentales: el sistema en análisis deberá estar dentro de un ambiente acotado, ambiente en el cual se manipulen en un sentido de probabilidad, el conjunto de variables externas que en forma evidente provocan una respuesta del sistema. 2.- Selección de la estructura del modelo: una vez que el sistema se encuentra dentro de un ambiente, se procede a seleccionar el modelo que describirá aproximadamente su comportamiento de acuerdo a un grupo de criterios previamente establecidos y son descritos por un funcional, el cual en un sentido de probabilidad debe de ser el mínimo respecto al conjunto de resultados del mismo funcional en los demás modelos seleccionados.

Es decir, es necesario monitorear al sistema real ya sea por un sistema analógico o digital, de acuerdo a la naturaleza del propio sistema. En el primer caso, es necesario discretizar su señal de respuesta, requiriendo en forma física de convertidores analógicos digitales así como de retenedores que de acuerdo al tipo de información pueden ser de orden cero, uno o dos, y en forma analítica de sus transformación a través de un núcleo de transformación como es la transformada Z o la transformada de Fourier discreta \mathfrak{S} , así como la transformación por el método de las diferencias finitas. Sin embargo, en cualquiera de los casos, “la discretización” de las señales, incluirá errores de conversión y perturbaciones del medio ambiente así como errores del acondicionamiento entre el sistema real y el sistema digital que a su vez tiene errores o perturbaciones que alteran a la señal transformada, en el caso de la transformación física, pero en el caso de la transformación analítica se incluirán los errores de redondeo, de aproximación, de ajuste y de transformación; por consiguiente a la salida del acondicionamiento, se tendrá la señal convertida con un conjunto de errores. En el caso de la transformación física, se requiere de una serie de filtros a la entrada del sistema digital, así como algoritmos de optimización para el redondeo de cifras; en la forma analítica, se usan filtros descritos analíticamente, pero ¿qué tipo de filtro digital usar? Según Haykin [20] y Young [68] se debe considerar un modelo matemático que describa la respuesta del sistema real en forma digital adicionado con perturbaciones, las cuales cumplan las mismas condiciones de probabilidad que las perturbaciones generadas por el acondicionamiento. De acuerdo a Davis [11], esta clase de modelos deben ser del tipo estocástico, con respuesta aproximada a la del sistema real, en un sentido de distribución y con sus dos momentos de probabilidad idealmente iguales a los de la respuesta del sistema real. Dentro de los

modelos estocásticos se puede encontrar a los *filtros estocásticos* ([6], [41]), donde *Melsa y Sage* [51] dicen que estos (los filtros estocásticos) son usados para “la identificación de la respuesta del sistema digital usando las técnicas de Haykin [20]. Esto significa, que al discretizar el modelo del sistema, es necesario adicionar un conjunto de perturbaciones que permitan comparar la respuesta del modelo discretizado con respecto a la del sistema real, buscando a través de diversos criterios que el error de convergencia del modelo discretizado respecto al sistema real, tienda a cero.

Para comparar la respuesta del modelo en diferencias (del filtro digital estocástico) respecto a la respuesta del sistema real discretizado, es necesario considerar la misma velocidad de cambio de sus estados [35], ya que de lo contrario, se perderían las propiedades de análisis del mismo, buscando que la dinámica del modelo, sea de una manera, lo más aproximada a la dinámica del sistema real.

Una vez lograda esta etapa, es realizar el filtrado para estimar o identificar una vez que se tiene una señal representativa del sistema real, y lograr propiamente una filtración con el objetivo de extraer información significativa del sistema real, así como una reconstrucción o una predicción. Podemos encontrar diversos filtros para esta etapa por ejemplo: Kalman [27], Poznyak [57], Medel [32], entre otros, respecto a una serie de requerimientos o criterios previamente establecidos. En todos los casos, estos filtros dan una respuesta respecto a un grupo de criterios bajo los cuales fueron diseñados y en muchos de los casos sus respuestas diferirán al haberse aplicado sobre el mismo sistema durante el mismo intervalo de tiempo.

Pero se puede establecer una métrica para medir el error del filtrado de una manera estándar, el cual es un modelo descrito a por medio de un funcional $J(k)$ (ya sea para la estimación y/o identificación) es desarrollado bajo un criterio de probabilidad para minimizar su valor medio [20] de tal manera que la convergencia a un valor se dé en un intervalo de tiempo acotado [20]. Este criterio en general queda definido por la diferencia entre la señal filtrada y la señal original: aplicando a este resultado el segundo momento de probabilidad de acuerdo a Haykin [20], resulta convertida en una minimización cuadrática media. Como ejemplo se puede ver: los filtros de Wiener y Kalman [27],[10], [9], [52] y [60], así como el de Poznyak [57].

Desde otro punto de vista el filtrado es una área de la ciencia que se utiliza de manera importante para eliminar cualquier perturbación que se presente con la información deseada, es por ello que se dice que es el arte de extraer esa información, separando de la información no deseada, esto lleva a poder reconstruir y clasificar la información, para un momento dado llegar a predecir el comportamiento que puede llegar a tener el sistema que se analiza por medio del filtrado, todo esto se considera criterios que se establecen para que el sistema digital sea lo mas real al proceso real a analizar [58] [31].

El filtrado lleva consigo diferentes aplicaciones [60], en la actualidad estas aplicaciones son de tipo monitoreo de los estados que tienen los procesos del sistema real que al

analizarlo son de manera digital, el filtrar sirve como estimador y predictor [29], esto es identificar la información deseada de la no deseada, es considerada como perturbaciones, las cuales son por causas de errores provocados al enviar o recibir información o por el mismo ambiente de envío o recepción de información, esta información se le considera como señales digitales [58] que se utiliza en sistemas digitales donde se aplica el arte de filtrar.

La teoría de filtrado tiene áreas [35], consideradas como principales, una de ellas es la estimación y la segunda es la identificación, la primer área surge de la necesidad de desear describir “el porque de este tipo de señal en el sistema”, esto quiere decir que describirá el comportamiento de los parámetros de dicho sistema, partiendo que los parámetros no se conocen, la segunda área de la teoría de filtrado surge de la necesidad de querer saber el comportamiento de los estados por el cual pasa el sistema [60], por lo tanto la señal, se observa considerando la información que entra así como la que sale, para esta área es necesario saber la primer parte que es el estimar dicho sistema.

Pensar en la teoría de filtrado lleva consigo planear el análisis y el modelo a utilizar para simular el sistema real y discretizarlo [31] sin alterar su comportamiento al pasarlo a un sistema digital, este modelo es seleccionado por su tipo de estructura, que tiene que ser similar al posible modelo del sistema real, una vez realizado estos pasos, se estima dicho sistema, para cerciorarse se valida el modelo que se selecciono.

Dentro de la teoría de los sistemas digitales encontramos a los filtros analógicos y los digitales, en este trabajo se enfoca solo en los filtros digitales [58] determinando propiedades o criterios [31] [58] para la propuesta de modelos. Estos modelos pueden ser lineales o no lineales [26], desde un punto de vista de su orden así como variantes o invariantes, considerando el tiempo, estacionarios o no estacionarios, desde un punto de vista estocástico [25] [60].

Dentro de los filtros digitales se encuentran varias técnicas de filtros para la realización de la estimación de parámetros en los sistemas digitales como son: Variable Instrumental [48][40] [43], Mínimos Cuadrados [57], Wiener, FIR de Fase Lineal [10], Peine, Ranura, Resonadores, Paso Alto, Paso Bajo, Paso Banda, Paso Todo, banda eliminada, Bessel, kalman [3][8], Medias Móviles, de Predicción Lineal, Inverso, Buterworth, Chebyshev, de Máximo Rizado, en Celosía, Elípticos, Para diezclado, por Interpolación, Espejo en Cuadratura, Filtro de aire, aceite, ultravioleta [58], entre muchos mas[60].

El filtrado digital [60] abarca muchas aplicaciones en la tecnología moderna. El primer avance en la era moderna en el que se vio una aplicación que hizo cambiar el futuro de la humanidad fue en la descripción de la trayectoria del Apolo 11 para que pudiera llegar a la luna. La Técnica empleada fue la de Kalman [10]. Otra aplicación es usado en el Centro espacial Esteres en Mississippi donde se hace uso de los filtros digitales en el área de geoprocésamiento, ya que usan mapas térmicos, para reducir el tiempo en búsquedas y eliminar datos no deseados llamados ruidos o perturbaciones, usando

dichos mapas para localización de peces para ayuda a la industria pesquera [66]. La técnica usada es variable instrumental que al recibir la información desde un satélite de EE.UU. este lo filtra por medio de un software donde es empleado la técnica de variable instrumental.

La variable instrumental para estimación de parámetros en sistemas estocásticos monovariantes, lineales y estacionarios es una técnica poco difundida en México, por lo tanto no es muy usada, esta técnica es estudiada y analizada con otra técnica mas bajo dos casos: sistemas con ruidos correlacionados o sistemas con ruidos no correlacionados, como antes dicho es comparada con otra técnica que es la de mínimos cuadrados, mostrando el error de estimación para cada caso [43].

En varios de los avances tecnológicos¹, se han aplicado conocimientos relacionados con el filtrado, por eso es importante referir sus orígenes y el porque de la necesidad de filtrar, esta teoría tuvo sus orígenes desde la descripción de las trayectorias de los planetas así como de los cometas por Galileo, Copernico, entre otros, los cuales consideraban que el movimiento de los cuerpos celestes se guía trayectorias que en “promedio” pasaban por una región del horizonte, y que en relación a esa región existían pequeñas variaciones en las que se encontraría ubicado el cuerpo celeste ya que en forma específica no se conocían todas las leyes de la naturaleza que en ellos intervienen para ubicarlos en tal o cual posición.

Los chinos hicieron sus viajes para llegar al medio oriente a través del mar sin perderse en el horizonte [66]. Los viajes realizados por Marco Polo en sus navíos considerando el uso de la rosa de los vientos basado en observaciones meteorológicas de las velocidades y direcciones del viento, también se considero la salida el sol y la puesta para su seguimiento en la travesía del mar al destino que Marco Polo había planeado llegar [66]. Los inventos que se produjeron en el inicio de la Edad Moderna, facilitaron la búsqueda de las deseadas rutas hacia los países de las especias, China y la India, y provocaron una total transformación de la vida europea.

A partir del siglo XI, dos inventos fueron vitales para el seguimiento: La brújula y el astrolabio. La primera, atribuida a los chinos, permitió a los navegantes orientarse mediante la aguja imantada que señala al Norte. El astrolabio es un instrumento para medir la altura y la posición de los cuerpos celestes, por lo que es útil para determinar la latitud y longitud, de ahí que jugó un papel de importancia en 1492. Estos grandes inventos hicieron posibles las exploraciones marítimas, y los españoles y portugueses fueron los precursores de la navegación oceánica.

Cuando ya se hubo controlado la forma de guiarse marítimamente, surge la necesidad de descubrir rutas mas cortas, de ahí surge el famoso viaje de Cristóbal Colon en el descubrimiento de América, observando así las nuevas necesidades para el seguimiento,

¹ Aplicaciones como las ya antes mencionadas.

la cual es no solo seguir una ruta sino saber cual es la mejor y que cumpla con todas las características que uno desea.

Durante el transcurso de los años ha cambiado las herramientas que usaban para realizar los seguimientos [31], conforme a los avances tecnológicos hechos a causa de las necesidades de los seres humanos, se ha empleado en la actualidad sistemas digitales [31] en los aeronaves como antes se ha mencionado, en los radares, en instrumentos médicos, aerogeneradores, en los carros en el uso de la bolsas de aire contra accidentes, en el metro para evitar coalición entre dos líneas, en las naves espaciales como antes se menciona el Apolo 11, en la trayectoria de misiles desde que surge la necesidad en la primera guerra mundial hasta la del golfo pérsico, etc. [68]

Debido a que existe una gran variedad de filtros [58], para seleccionar o identificar el más adecuado se tiene que considerar el tipo de señal, entendida esta como una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes. Matemáticamente se describe a la señal como una función de una o más variables independientes.

Así de manera natural, se define señal, como una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes, matemáticamente se define como una función de una o más variables independientes [58]. Cuando se pasa una señal a través de un sistema, como en el caso de filtrado, se dice que dicha señal se procesa, esto implica que en el procesamiento de señal pasa señal con interferencia o con ruido. El sistema se caracteriza por el tipo de operación que realiza sobre la señal, a lo que anteriormente se menciona como propiedades o criterio del sistema.

Las dinámicas de los sistemas reales representados esquemáticamente en la Fig. 1., pueden ser descritas a través de ecuaciones diferenciales o en diferencias [20]. Existe un conjunto de modelos que puede dar un buen seguimiento al comportamiento de las dinámicas del sistema, de tal forma que se tiene que seleccionar aquel que se aproxime “mejor” de acuerdo a algún criterio [20].

Previo a esto, es necesario monitorear al sistema real ya sea por un sistema analógico o digital. En el último caso, es necesario discretizar su señal de respuesta. Sin embargo, “la discretización” de las señales, incluirá errores de conversión y perturbaciones del medio ambiente así como errores del acondicionamiento entre el sistema real y el sistema digital que a su vez tiene errores o perturbaciones que alteran a la señal transformada; por consiguiente a la salida del acondicionamiento, se tendrá la señal convertida con un conjunto de errores. La pregunta obligada es: ¿Cómo eliminar esas perturbaciones? En forma sencilla se tiene el uso de filtros a la entra del sistema digital, pero ¿qué tipo de filtro digital usar? Según *Young [67] y [68] y Haykin [20] se debe considerar un modelo matemático que describa la respuesta del sistema real en forma digital adicionado con perturbaciones, las cuales cumplan las mismas condiciones de probabilidad que las perturbaciones generadas por el acondicionamiento.* De acuerdo a

Davis [11], esta clase de modelos deben ser del tipo estocástico, con respuesta aproximada a la del sistema real, en distribución y con sus dos momentos de probabilidad idealmente iguales a los de la respuesta del sistema real. Dentro de los modelos estocásticos se puede encontrar a los *filtros estocásticos* [41] [6], donde *Melsa y Sage* [51] dicen que estos (los filtros estocásticos) son usados para “*la identificación de la respuesta del sistema digital usando las técnicas de Haykin* [20].

Para comparar la respuesta del modelo en diferencias respecto a la respuesta del sistema real discretizado es necesario considerar la misma velocidad de cambio de sus estados [55], buscando que la dinámica del modelo describa de una manera lo más aproximadamente posible a la dinámica del sistema.

Siendo el objetivo de cada método de filtrado digital, el de optimizar la calidad de su respuesta (ver trabajos de: Kalman [10], Poznyak [57], Medel [29], entre otros), respecto a una serie de requerimientos pre-establecidos.

El error de filtrado descrito a través de un funcional $J(k)$ (error de estimación y/o error de identificación) es desarrollado bajo un criterio de probabilidad para minimizar su valor medio [20] de tal manera que la convergencia a un valor se dé en un tiempo finito y conocido [20]. Este criterio en general queda definido por la diferencia entre la señal filtrada y la señal original: aplicando a este resultado el segundo momento de probabilidad de acuerdo a Haykin [20], resulta convertida en una minimización cuadrática media. Como ejemplo se puede ver: los filtros de Wiener y Kalman [27], [52], [60],[9], el filtro de Medel y Poznyak [40].

I.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este trabajo el problema planteado es describir las propiedades del estimador de variable instrumental, tanto teóricas como prácticas para dos condiciones: a) ruidos correlacionados y b) ruidos no correlacionados, en sistemas estocásticos monovariantes, estacionarios e invariantes. La pregunta es ¿cuándo realiza la mejor estimación el filtro seleccionado dada las condiciones anteriores?

I.2. OBJETIVO GENERAL

Utilizar el método de variable instrumental como filtro estimador para un sistema lineal del tipo UEUS (una entrada, una salida) que considere tanto los ruidos de entrada como de salida para obtener su trayectoria lo mas próxima al parámetro real.

I.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Comparar la calidad de un filtro en convergencia y tiempo de respuesta con:
 - Ruidos correlacionados,
 - Ruidos no correlacionados.
- Representar el filtro en forma recursiva para garantizar un uso mínimo de recursos en el sistema digital y seguir la trayectoria en forma dinámica, de acuerdo a [57] y [32].
- Hacer una simulación para comparar los resultados en forma gráfica y numérica.

I.4. HIPÓTESIS

1. Se considera un sistema con una entrada ω_k y una salida y_k .
2. Se considera que el sistema tiene ruidos de entrada y salida con:
 - a. sin correlación entre ellos. i.e.:

$$E\{\omega_k v_k^T\} = 0.$$

- b. con correlación entre ellos. i.e.:

$$E\{\omega_k v_k^T\} = \sigma^2_{\omega v}.$$

I.5. LÍMITES Y ALCANCES

- Dentro de la teoría de filtrado se va a dedicar a la estimación de parámetros.
- Sólo se consideran modelos recursivos, discretos, de primer orden, lineales y estacionarios.
- Se simularán dos algoritmos en Matlab® comparando la calidad de respuesta en un sentido de probabilidad.
- Se compararan los resultados con un método de estimación tradicional.
- Se usa una PC con un solo procesador para la simulación.

I.6. JUSTIFICACIÓN

La estimación de parámetros permite construir la dinámica interna del sistema a analizar a través de un modelo propuesto; esto es, dado el sistema

$$x_k = ax_{k-1} + \omega_k,$$

con salida

$$y_k = x_k + v_k,$$

se puede tener en forma explícita a través de la salida la dinámica del sistema

$$y_k = ay_{k-1} + W_k, \quad W_k = f(w_k, v_k)$$

Donde para realizar la descripción de la señal de salida \hat{y}_k se requiere conocer la dinámica de los parámetros a , la cual requiere ser estimada ya que es una condición interna del sistema a analizar.

Una técnica comúnmente utilizada es la de mínimos cuadrados como puede verse en [20]. Pero no cuenta con altos valores de convergencia, sino con estimaciones obtenidas por ponderaciones pero con varianzas acotadas. Otra técnica de estimación es la de la variable instrumental, la cual nos permite manejar las condiciones de correlación entre estados y ruidos para una mejor estimación de acuerdo a [32] y [57].

Los resultados obtenidos por el estimador con variable instrumental permiten dar una alternativa a las aplicaciones en los procesos industriales ya que no es necesaria por esta técnica tener la matriz de transición para realizar una predicción o una reconstrucción y contribuir a la toma de decisiones en línea.

I.7. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentó una breve reseña de la teoría de filtrado digital y algunos conceptos básicos desarrollados por diferentes investigadores [3], [20], [35], [50], [64], comentando que un *filtro*, es un *descriptor* estocástico así como de acuerdo con [20] y [17], el término *filtro* se utiliza para describir un dispositivo en forma de hardware o software y que se aplica para: a) Eliminar el ruido de los datos de un sistema, es decir, filtrar la señal. b) Extraer información de acuerdo a alguna característica del sistema a analizar. c) Reconstruir el comportamiento del sistema a analizar. d) Predecir el comportamiento del sistema a analizar. Se comentó que el proceso de filtrado se basa en: e) Monitorear los estados que emite el sistema a analizar (representados simbólicamente por: $\{y(k)_i\}$, $k, i \in \mathbf{Z}^+$, respecto a la Figura 1). f) Predecir o identificar los ruidos que pueden ser originados por causas como: f₁) Errores propiciados por el emisor (el sistema), f₂) Errores de lectura provocados en el receptor, f₃) Influencia del medio ambiente que rodea tanto al emisor como al receptor. Además se dijo que en la teoría de filtrado existen dos áreas básicas (ver: [17] y [35]): g) *Estimación*. Es el área que se encarga de describir la dinámica de los parámetros del sistema a través de sus señales observables. Jazwinski [25]. h) *Identificación*. Es el área que se encarga de describir la dinámica de las señales que emite el sistema representadas simbólicamente por $\{y(k)_i\}$, $k, i \in \mathbf{Z}^+$, respecto a la Figura 1.

Pero para realizar el filtrado, se comentó que se requiere realizar los siguientes pasos con la idea básica de obtener un modelo que describa el comportamiento del sistema

discretizado, sin alterar la dinámica del mismo; requiriendo de: *i) Planeación experimental, j) Selección de la estructura del modelo, k) Estimación e Identificación, l) Validación del modelo.*

En este capítulo se propuso el uso de un modelo estocástico de primer orden, del tipo auto-regresivo con promedios móviles y en el proceso de filtrado; así como también al algoritmo de variable instrumental presentado en [11], [19], [20] y [50] para estimación de parámetros en sistemas estocásticos monovariantes, lineales y estacionarios, proponiendo para los siguientes capítulos el estudio de la magnitud del error de estimación en dos casos: m) para sistemas con perturbaciones correlacionadas entre sí y n) para sistemas con perturbaciones no correlacionadas, mostrando en el error de estimación descrito como Δ para cada caso respectivamente, proponiendo la comparación con el tradicional método de mínimos cuadrados ocupado para tal fin.

Como parte importante de este capítulo se realizó el planteamiento del problema, objetivos, límites, alcances así como la justificación del presente trabajo; obteniendo, el problema de investigación de la tesis.

CAPÍTULO II. FILTRADO DIGITAL PARA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN SISTEMAS ESTOCÁSTICOS MONOVARIABLES, LINEALES Y ESTACIONARIOS.

II.1. INTRODUCCIÓN

Los Filtros Digitales en general tienen aplicaciones en los procesos industriales (ver la Figura 1) y de monitoreo de acuerdo a [8] y [23]; por ejemplo, se encuentran en: *Plantas químicas y nucleares, procesos de producción, bolsas de aire de seguridad para automóviles, sistemas de inyección de combustible, análisis de voz, sistemas de control de vuelo, adquisición de datos, aplicaciones médicas, sistemas de telecomunicación, análisis de trayectorias de misiles y cohetes espaciales*, entre otras. Dentro de las áreas de filtrado encontramos a la estimación y a la identificación. En este capítulo se tratará tan solo de la estimación, considerando a un modelo recursivo con promedios móviles de una entrada una salida que representará la respuesta del sistema real. Este modelo, considera que tiene un solo parámetro, el cual requiere ser descrito de una manera dinámica. Dentro de la teoría de filtrado encontramos algunas acciones tales como la reconstrucción, la predicción o propiamente el filtrado o la descripción, siendo esta última acción la seleccionada dada la importancia que se tiene para describir dinámicamente el parámetro del modelo seleccionado. El filtrado en su área de estimación y su acción de filtrado o de descripción, en forma tradicional se ha usado al método de mínimos cuadrados, que proporciona información de la dinámica del parámetro dentro de dos fronteras que se encuentran alrededor del parámetro real, cotas que son generadas por las varianzas de los ruidos interno y externo que afectan al modelo. Pero existen otras técnicas de estimación tales como la variable instrumental, el filtro de Kalman, el filtro de Poznyak [57] en el cual se usa al factor de olvido para la estimación de parámetros variantes en el tiempo. Se considera que una opción es el uso del método de la variable instrumental, tanto para ruidos de entrada como de salida con las condiciones: a) correlacionados, b) no correlacionados. Siendo importante que este método sea comparado con el filtro tradicional. En este capítulo la comparativa será descriptivamente a través de las varianzas de los ruidos del modelo propuesto.

Se comienza este capítulo con una descripción del proceso de filtrado, con la descripción de los modelos recursivos, los modelos con promedios móviles, así como los modelos recursivos con promedios móviles. Se presenta un modelo básico en el cual se desarrollará el análisis de la estimación usando la variable instrumental con a) ruidos correlacionados, b) ruidos no correlacionados; presentando una relación del error de estimación para ambos casos. Se presenta también el error de estimación del método de mínimos cuadrados, así como las conclusiones correspondientes respecto a la comparativa con el método de la variable instrumental.

II.2. EL PROCESO DE FILTRADO DIGITAL

El proceso de filtrado digital se ilustra en forma esquema en la Figura 2:

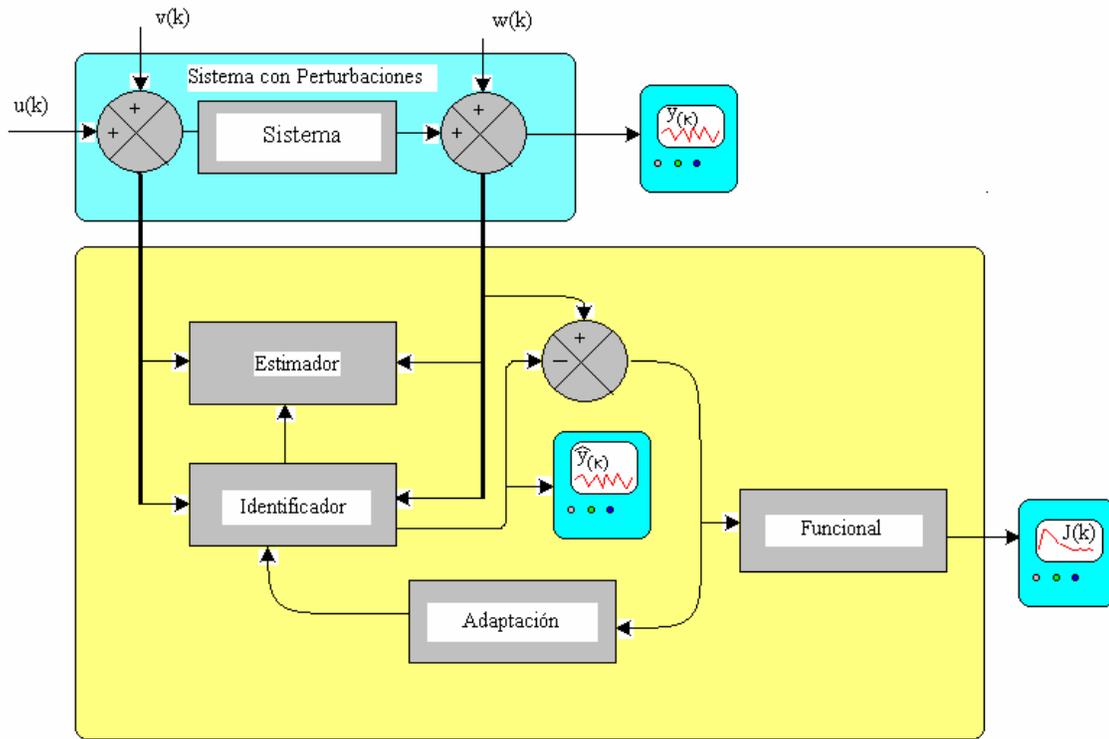


Figura 2. Proceso de Filtrado.

Donde u_k es la información que entra al proceso, y se envía de manera simultánea al estimador para su utilización en la estimación de los parámetros internos del proceso real ($\{\hat{a}_k\}$), que serán enviados al identificador que viene hacer la segunda etapa del proceso de filtrado y con el cual se da una descripción de la salida del proceso $\{\hat{y}_k\}$.

Se selecciona un modelo con el que se trabajara para simular al proceso real [20]. El estimador trabaja con ese modelo y procede a estimar los parámetros, enviando los resultados al identificador para que este describa el comportamiento de los estados del proceso real. Obteniendo éstos, se hace una comparación a la salida del sistema con la salida deseada obtenida por el estimador durante cada intervalo k

:

$$\Delta y_k = |\hat{y}_k - y_k| \quad (2-1)$$

La estructura del filtro estocástico es representada a través de un modelo que puede ser de tres tipos:

1. modelos autoregresivos, en los cuales el valor presente de la entrada $\{u(k)\}$ es usada para dar la evolución en él, descrito por $v(k) := F(k) \circ u(k)$.
2. modelos con promedios móviles, en los cuales los valores pasados de la salida del sistema son usados $\{u(k-n)^2\}_{\forall k=1, \dots, n-1}$. $v(k) = F(k) \circ \{u(k)\}$ donde $E\{v(k)\} \neq E\{v(i)\}$.
3. los modelos mezclados (modelos autoregresivos con promedios móviles). Esta clase de modelos estocásticos incluye a los modelos autoregresivos y de promedios móviles como casos especiales.

II.3. MODELO ARMA

Es un proceso estocástico que será representado por un modelo propuesto en [25]: La representación se realiza a través de una serie de tiempo* $\{u(n)\}$ que estadísticamente corresponde a la respuesta del proceso real. El concepto de [25] fue considerar que las trayectorias que describe el proceso son variables aleatorias que quedan acotadas por una función de distribución, que en forma usual es una distribución gaussiana con media cero y una varianza constante [25].

$$u_{(m)} + a_1 u_{(m-1)} + \dots + a_m u_{(m-n)} = v_{(n-1)} + w_n x_n + e_n^* \quad (2-2)$$

Con $e_n^* = e_n + e_{n-1}$, e_n es un error entre las secuencias, en donde x_n es la dinámica del sistema .

Específicamente se describe la entrada $\{u(n)\}$ con las siguientes propiedades:

$$E[u(n)] = 0, \quad \forall n \quad (2-3)$$

y

$$E[u(n)u(k)] = \begin{cases} \sigma_u^2 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2-4)$$

Donde σ_u^2 es la varianza de la entrada del tipo estocástica, $\{a_i, i = \overline{1, m-n}\}$ $\{w_n\}$ son llamados parámetros del modelo ARMA [36], el orden del proceso ARMA es (M, N) , $m \uparrow M$, $n \uparrow N$, v_n es la dinámica de las perturbaciones del sistema.

II.3.1. MODELOS AUTOREGRESIVOS

Dada la serie de tiempo* $\{u(m-i)\}$ $i = \overline{0, n}$ que satisface la ecuación en diferencias:

$$u_{(m)} + a_1 u_{(m-1)} + \dots + a_m u_{(m-n)} = v_{(n)} \quad (2-5)$$

donde $\{a_i\}$, $i = \overline{1, n}$ son constantes llamadas parámetros del modelo autoregresivo AR, con $a_i \in C$. El término $a_k u_{(m-k)}$, es la representación del producto interno* de $\langle a_k, u_{(m-k)} \rangle$, $k = \overline{1, s}$, $s < n$.

Para describir en forma “autoregresiva”, consideramos que:

$$v_n = \sum_{k=1}^n \omega_k x_k + e_n \quad (2-6)$$

De acuerdo a (2-5), y a (2-6) se tiene que $\omega_k = -a_k$ y e_n es un error de aproximación.

Al expresar (2-6) un intervalo de tiempo antes por inducción dado las condiciones estacionarias del sistema descrito en (2-11):

$$v_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k x_k + e_{n-1}, \quad (2-7)$$

Considerando las propiedades (2-3) y (2-4), para cada intervalo, permitirá obtener la forma recursiva para (2-6):

$$v_n = v_{n-1} + \omega_n x_n + e_n^*, \quad (2-8)$$

donde, $e_n^* = e_n + e_{n-1}$.

II.3.2. MODELO CON PROMEDIOS MÓVILES

Considerando a las ecuaciones expresadas en (2-6) y (2-7), con promedios móviles:

$$v_n = \sum_{i=0}^n b_i u_{n-i} \text{ así como } v_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{n-i}. \quad (2-9)$$

Tienen promedios ponderados distintos pero acotados por la misma función de distribución de u_n con una ganancia b_n ; puede ser que ambos lleguen a tener el mismo resultado, lo que significaría que es rígidamente estacionario.

De tal forma que v_{n-i} vista en (2-9) tendrá sus propiedades expresadas por el primero y segundo momento de probabilidad. Y la evolución de (2-8) tendrá en cada ocasión un valor de probabilidad, para cada instante i .

* Serie de tiempo: Es un conjunto de observaciones tomadas en instantes específicos, generalmente a intervalos iguales

* Producto Interno: Es el producto escalar de vectores, es decir, sobre parejas de vectores

II.4. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS POR LA TÉCNICA DE VARIABLE INSTRUMENTAL

Dadas las ecuaciones en espacio de estados de un sistema del tipo estocástico de una entrada y una salida (UEUS) [4]:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + w_k^I \\ y_k &= x_k + w_k^{II} \end{aligned} \quad (2-10)$$

Expresando en forma autoregresiva y con las propiedades de los promedios móviles se tiene que de acuerdo a las propiedades (2-6) y (2-7) aplicadas en (2-8); al considerar ellas a (2-10) se tiene:

$$y_k = ay_{k-1} + w_k, \quad (2-11)$$

Con los ruidos expresados de la siguiente manera:

$$w_k = -aw_{k-1}^I + w_{k-1}^I + w_k^{II}. \quad (2-12)$$

donde w_k es el ruido generalizado, w_{k-1}^{II} es el ruido externo y w_{k-1}^I es el ruido interno del sistema.

Del modelo expresado en (2-11) lo desconocido es la ganancia o parámetro “ a ” como se muestra en la Figura 3.

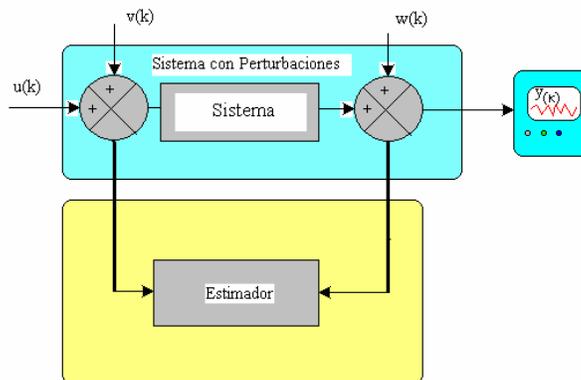


Figura 3. Estimación de parámetros.

Proposición 1: El estimador descrito a través de los segundos momentos respecto de las salidas del sistema es expresado en (2-11) como sistema estacionario de acuerdo a [21], [27] y [46]:

$$\hat{a}_n = E\{y_k \vartheta_k^T\} E\{y_{k-1} \vartheta_k^T\}^{-1}. \quad (2-13)$$

donde \hat{a}_n es el estimador, $E\{y_k \vartheta_k^T\}$ es la esperanza de la salida con la variable instrumental, $E\{y_{k-1} \vartheta_k^T\}$ es la esperanza de la salida en un instante anterior con respecto a la variable instrumental con ϑ_k es la variable instrumental y y_k es la salida del sistema.

Con ruidos no correlacionados^d entre si, es expresado como $\hat{a}_n = a + \Delta_n^d$ y

$$\Delta_n^d = \frac{-a\sigma_{w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^l}^2}{\frac{\sigma_{w_k^u}^2(2a^2 + 1 + a^2) + \sigma_{w_k^l}^2(1 + 2a)}{(1 - a^2)}} \quad (2-14)$$

Se Considera al sistema (2-11), y se saca sus segundos momentos respecto al estado de salida un tiempo anterior, cumpliendo que los ruidos están no correlacionados:

$$E\{w_{k-1}^u \vartheta_k^T\} = 0 \quad (2-15)$$

$$E\{w_k^u \vartheta_k^T\} = \sigma_{w_k^u}^2 \quad (2-16)$$

$$E\{w_k^l \vartheta_k^T\} = \sigma_{w_k^l}^2 \quad (2-17)$$

$$E\{w_k^u (w_k^u)^T\} = E\{w_k^u w_k^{u,T}\} = \sigma_{w_k^u}^2 \quad (2-18)$$

$$E\{w_k^l (w_k^l)^T\} = E\{w_k^l w_k^{l,T}\} = \sigma_{w_k^l}^2 \quad (2-19)$$

$$E\{w_k^l (w_k^u)^T\} = E\{w_k^l w_k^{u,T}\} = 0 \quad (2-20)$$

En forma simbólica se representó a $(w_k^u)^T$ por $w_k^{u,T}$, así como también a $(w_k^l)^T$ por $w_k^{l,T}$. Ahora se tiene que desarrollar a (2-13) al considerar a las propiedades (2-15) a (2-20):

El desarrollo del denominador de (2-13) considerando a (2-11):

$$\begin{aligned} E\{y_{k-1} \vartheta_k^T\} &= a^2 E\{y_{k-2} \vartheta_{k-1}^T\} + a^2 E\{w_{k-2}^u w_{k-2}^{u,T}\} + E\{w_{k-2}^l w_{k-2}^{l,T}\} + E\{w_{k-1}^u w_{k-1}^{u,T}\} \\ &= a^2 E\{y_{k-2} \vartheta_{k-1}^T\} + a E\{y_{k-2} w_{k-2}^{l,T}\} \end{aligned} \quad (2-21)$$

Lo cual puede reducirse a

$$E\{y_{k-1} \vartheta_{k-1}^T\} = \frac{\sigma_{w_k^u}^2(a^2 + 1 + 2a^2) + \sigma_{w_k^l}^2(1 + 2a)}{(1 - a^2)} \quad (2-22)$$

Se considera que el sistema es estacionario, entonces se tiene $E\{y_{k-1} \vartheta_k^T\} = E\{y_{k-2} \vartheta_{k-1}^T\}$.

Respecto al numerador expresado en (2-13), y al sustituir a (2-11) en él su segundo momento es:

$$E\{y_k \vartheta_k^T\} = a E\{y_{k-1} \vartheta_k^T\} - a E\{w_{k-1}^u \vartheta_k^T\} + E\{w_{k-1}^l \vartheta_k^T\} + a E\{w_k^u \vartheta_k^T\}, \quad (2-23)$$

y al considerar de (2-15) a (2-20) se reduce a la forma:

$$E\{y_k \vartheta_k^T\} = a E\{y_{k-1} \vartheta_k^T\} - a \sigma_{w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^l}^2. \quad (2-24)$$

^d indicativo de ruidos no correlacionados

Sustituyendo (2-22) en (2-24) se tiene:

$$E\{y_k \vartheta_k^T\} = a \frac{\sigma_{w_k^u}^2 (2a^2 + 1 + a^2) + \sigma_{w_k^l}^2 (1 + 2a)}{(1 - a^2)} - a \sigma_{w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^l}^2. \quad (2-25)$$

El parámetro “a” a través de su estimación al considerar (2-25) y (2-22) en (2-13), se tiene:

$$\hat{a}_n = \frac{a \frac{\sigma_{w_k^u}^2 (2a^2 + 1 + a^2) + \sigma_{w_k^l}^2 (1 + 2a)}{(1 - a^2)} - a \sigma_{w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^l}^2}{\frac{\sigma_{w_k^u}^2 (a^2 + 1 + 2a^2) + \sigma_{w_k^l}^2 (1 + 2a)}{(1 - a^2)}}. \quad (2-26)$$

Lo cual se reduce a:

$$\hat{a}_n = a + \frac{-a \sigma_{w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^l}^2}{\frac{\sigma_{w_k^u}^2 (2a^2 + 1 + a^2) + \sigma_{w_k^l}^2 (1 + 2a)}{(1 - a^2)}}, \quad (2-27)$$

Es decir:

$$\hat{a}_n = a + \Delta_n^d \spadesuit, \quad (2-28)$$

con Δ_n^d descrita en (2-14).

Proposición 2: Dado el sistema representado en (2-11) y considerando que tiene ruidos correlacionados (i. e.: la propiedad (2-20) cambia a $E\{w_w^l w_w^{u,T}\} = \sigma_{w_k^l w_k^u}^2$), el estimador expresado en (2-13), cuenta con el siguiente error de estimación

$$\Delta_n^c = \frac{(-a \sigma_{w_w^u}^2 + \sigma_{w_w^l}^2)(1 - a^2)}{\sigma_{w_k^u}^2 (2a^2 + 1 + a) + \sigma_{w_w^l}^2 (1 + a) + \sigma_{w_k^l w_k^u}^2}. \quad (2-29)$$

Dadas las propiedades del sistema expresado en (2-11) y cumpliendo las condiciones (2-15) a (2-19) y que la condición (2-20) quede expresada por $\sigma_{w_k^l w_k^u}^2$. Al desarrollar el numerador se obtiene la expresión (2-25). Al desarrollar el denominador se obtiene el siguiente desarrollo, en donde se puede observar la correlación o el término $\sigma_{w_k^l w_k^u}^2$:

$$E\{y_{k-1} \vartheta_k^T\} = a^2 E\{y_{k-2} \vartheta_{k-1}^T\} - 2a^2 \sigma_{w_k^u}^2 + 2a \sigma_{w_k^u}^2 + a^2 \sigma_{w_k^u}^2 - 2a \sigma_{w_k^l w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^l}^2 \quad (2-30)$$

Recordando que el sistema es estacionario:

$$E\{y_{k-1} \vartheta_k^T\} (1 - a^2) = -2a^2 \sigma_{w_k^u}^2 + 2a \sigma_{w_k^u}^2 + a^2 \sigma_{w_k^u}^2 - 2a \sigma_{w_k^l w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^l}^2 \quad (2-31)$$

Al simplificar se tiene:

$$E\{y_{k-1} \vartheta_k^T\} = \frac{\sigma_{w_k^u}^2 (2a + 1 - a^2) - 2a \sigma_{w_k^l w_k^u}^2 + \sigma_{w_k^l}^2}{(1 - a^2)} \quad (2-32)$$

$\spadesuit \Delta_n^d$ es el error de ruidos no correlacionados.

Al sustituir (2-25) y (2-31) en (2-13), se obtiene:

$$\hat{a}_n = a + \frac{-a\sigma_{w''}^2 + \sigma_{w'}^2}{\frac{\sigma_{w_k''}^2(2a^2 + 1 + a) + \sigma_{w_l}^2(1 + a) + \sigma_{w_k'w_l''}^2}{(1 - a^2)}}, \quad (2-33)$$

$$\hat{a}_n = a + \frac{(-a\sigma_{w''}^2 + \sigma_{w'}^2)(1 - a^2)}{\sigma_{w_k''}^2(2a^2 + 1 + a) + \sigma_{w_l}^2(1 + a) + \sigma_{w_k'w_l''}^2}, \quad (2-34)$$

Donde el estimador converge a:

$$\hat{a}_n = a + \Delta_n^c, \quad (2-35)$$

Y el error de estimación Δ_n^c queda descrito al considerar (2-34) en (2-33), y que será igual al expresado en (2-29).

Proposición 3: La diferencia entre los errores de estimación para sistemas con ruidos no correlacionados y ruidos correlacionados es descrita como:

$$\Delta^* = \frac{(B)b}{A(A+B)} \quad (2-36)$$

Donde

$$b = (-a\sigma_{w''}^2 + \sigma_{w'}^2), \quad (2-37)$$

$$A = \sigma_{w_k''}^2(2a^2 + 1 + a) + \sigma_{w_l}^2(1 + a), \quad (2-38)$$

$$B = \sigma_{w_k'w_l''}^2. \quad (2-39)$$

Se considera que Δ^* es definido por la diferencia entre (2-30) y (2-36) de la siguiente forma:

$$\Delta^* := \Delta_n^d - \Delta_n^c \quad (2-40)$$

Que al sustituir sus valores se tiene:

$$\Delta^* = \frac{(-a\sigma_{w''}^2 + \sigma_{w'}^2)}{\sigma_{w_k''}^2(2a^2 + 1 + a) + \sigma_{w_l}^2(1 + a)} - \frac{(-a\sigma_{w''}^2 + \sigma_{w'}^2)}{\sigma_{w_k''}^2(2a^2 + 1) + \sigma_{w_l}^2(1 + a) + \sigma_{w_k'w_l''}^2}, \quad (2-41)$$

Al considerar las igualdades de (2-37) a (2-39), el valor de Δ^* queda expresado

$$\Delta^* = \frac{b}{A} - \frac{b}{A+B}. \quad (2-42)$$

De donde se obtiene (2-36).

Comentario: El error del sistema para ruidos no correlacionados queda descrito:

$$\Delta_n^d = \Delta^* + \Delta_n^c, \quad (2-43)$$

El error del sistema para ruidos correlacionados queda descrito:

$$\Delta_n^c = \Delta^* - \Delta_n^d. \quad (2-44)$$

Proposición 4. El funcional del error simbólicamente expresado por J_n en forma recursiva es descrito:

$$J_n = \frac{1}{n} [\Delta_n^2 + (n-1)J_{n-1}] \quad (2-45)$$

Donde el error Δ_k es descrito usando el método de la variable instrumental por (2-14). (2-29) y en forma generalizada en (2-36).
Al considerar que el funcional del error es descrito por el segundo momento de probabilidad [36]

$$J_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2$$

y que el sistema descrito en (2-11) es estacionario, al considerar que se cuenta con índice anterior para expresar la forma recursiva, se tendrá

$$J_{n-1} := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k^2$$

De tal forma que al sustituir en J_n a J_{n-1} , se tiene

$$\frac{1}{n} \left[\Delta_n^2 + \left(\frac{1}{n-1} \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k^2 \right) (n-1) \right],$$

que será igual a (2-45).

II.5. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS POR LA TÉCNICA DE MÍNIMOS CUADRADOS

El estimador de mínimos cuadrados es descrito por [20]:

$$\hat{a}_n = E\{v_k y_k^T\} \left(E\{v_{k-1} y_k^T\} \right)^{-1}. \quad (2-46)$$

Para compararlo con el método de variable instrumental se requiere obtener su error de estimación, con las siguientes propiedades [20]:

$$E\{w_{k-1}^H y_k^T\} = \sigma^2 w^H, \quad (2-47)$$

$$E\{w_k^H y_k^T\} = \sigma_{w_k^H}^2, \quad (2-48)$$

$$E\{w_k^J y_k^T\} = \sigma_{w_k^J}^2, \quad (2-49)$$

$$E\{w_k^H (w_k^H)^T\} = E\{w_k^H w_k^{H,T}\} = \sigma_{w_k^H}^2, \quad (2-50)$$

$$E\{w_k^J (w_k^J)^T\} = E\{w_k^J (w_k^J)^T\} = \sigma_{w_k^J}^2, \quad (2-51)$$

$$E\{w_k^J (w_k^H)^T\} = E\{w_k^J w_k^{H,T}\} = 0. \quad (2-52)$$

El estimador por el método de mínimos cuadrados tiene la forma [20]:

$$\hat{a}_n = a + \frac{(1-a)\sigma_{w_k^H}^2 + \sigma_{w_k^J}^2}{\frac{\sigma_{w_k^H}^2(2a^2 + 1 + a^2) + \sigma_{w_k^J}^2(1 + 2a)}{(1-a^2)}} \quad (2-53)$$

Y su error de estimación es descrito simbólicamente por $\Delta_{mm_n}^c$, y analíticamente [20]:

$$\Delta_{mm_n}^c = \frac{((1-a)\sigma_{w_k^H}^2 + \sigma_{w_k^J}^2)(1-a^2)}{\sigma_{w_k^H}^2(2a^2 + 1 + a) + \sigma_{w_k^J}^2(1+a)} \quad (2-54)$$

Lo cual hace crecer el número de términos para describir su error de estimación, respecto del método de variable instrumental descrito en (2-29). Es decir, a través de las propiedades (2-47) a (2-52) observamos que en todo momento que por el método de mínimos cuadrados se depende del estado y_k^T y no así de una variable que nos permita seleccionar las mejores condiciones respecto a los ruidos del sistema como es descrito en (2-11).

II.6. CONCLUSIONES

En este capítulo se consideró un sistema dinámico representado por un modelo estocástico de primer orden con una entrada y una salida (UEUS) como puede verse en (2-11). El error de estimación para un sistema dinámico que tiene ruidos no correlacionados está descrito en (2-28) y con ruido correlacionado esta descrito en (2-35), con magnitudes descritas en (2-14) y en (2-29), respectivamente.

La diferencia entre (2-14) y (2-29) esta descrita en (2-36) lo que significa que el error $\Delta_n^c < \Delta_n^d$ por lo tanto existe una mejor convergencia para sistemas con ruidos descorrelacionados, siempre y cuando la función de covarianza σ_n^2 cumpla que es mayor a $(1 - a^2)$, pero menor a la unidad.

Para el sistema (2-11) puede guardar dos condiciones: tener ruidos correlacionados expresada en la propiedad (2-20) o en caso contrario cambiará a una covarianza $\sigma_{w_k^i w_k^u}^2$.

El método de mínimos cuadrados descrito en (2-46), tiene un error de estimación descrito en (2-54) acotado por las propiedades (2-47) a (2-52). Cuenta con un número mayor de términos respecto al método de variable instrumental descrito en (2-29) al considerar las propiedades (2-15) a (2-20) acotada esta última en $(1 - a^2) < \sigma_{w_k^i w_k^u}^2 < 1$. En el método de mínimos cuadrados no se permite dar cualidades al estimador, a diferencia del método de la variable instrumental, al seleccionar dicha variable.

CAPÍTULO III. ESTIMACIÓN POR EL MÉTODO DE VARIABLE INSTRUMENTAL PARA SEGUIMIENTO DE LOS TIEMPOS DE EJECUCIÓN EN UNA TAREA EN TIEMPO REAL

III.1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de tiempo real cuentan con tareas que requieren usar los recursos del hardware en el que se encuentran. Para que se le asignen recursos a una tarea, se requiere que exista un planificador de cuantos recursos y en que tiempo se debe de dar estos, ya que son finitos. Para resolver tal problema se requiere de un filtro predictor que le diga al planificador cuando llegará una tarea y con qué prioridad, para así planear los recursos a asignar. En la historia reciente encontramos, que se han desarrollado diversos métodos para la descripción tanto estática como dinámica de las tareas de tiempo real. Pero todo ha quedado en resultados que no son del todo confiables dada la complejidad de sus estructuras y de la metodología para desarrollar su implementación y así realizar la simulación sobre ellos para optimizar su operación en conjunto con el planificador.

En la actualidad es común escuchar que existen aplicaciones y sistemas en Tiempo Real[♦], sin embargo muchas veces el término Tiempo Real es confundido con sistemas en línea o sistemas rápidos. Existe una gran variedad de artículos sobre sistemas en Tiempo Real y cada uno de ellos trata a las tareas con una representación que es difícil de simularse, es más sencillo tomar un sistema y aplicar las condiciones necesarias para que el sistema funcione en Tiempo Real y después monitorearlo. Pero si consideramos que las tareas en forma dinámica pueden ser descritas por modelos recursivos con promedios móviles dado el origen de las mismas, nos enfrentamos al problema de que estos modelos sean los más próximos posibles a la dinámica real de la tarea de tiempo real a describir. Pero con respecto a la tarea de tiempo real, dentro de esta clase de modelos, el problema es el describir el parámetro interno del propio modelo.

En este capítulo se realiza la descripción del modelo del tiempo de ejecución de una tarea de tiempo real, y se utiliza a la variable instrumental como estimador para los casos de ruidos no correlacionados y ruidos correlacionados, y al igual que en el capítulo anterior, se realiza una comparativa entre ambos casos. Se procede a realizar la estimación del parámetro del modelo antes mencionado usando el método de mínimos cuadrados y se compara con el mejor estimador al usar a la variable instrumental, y se realiza una serie de conclusiones que permiten observar al mejor estimador. De tal forma que la respuesta del modelo de los tiempos de ejecución de una tarea de tiempo real se aproxima en un alto porcentaje al comportamiento del tiempo de ejecución de la tarea de tiempo real.

[♦] Sistema en Tiempo Real (STR) ver glosario

III.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE TIEMPOS DE EJECUCIÓN PARA UNA TAREA EN TIEMPO REAL

En esta tesis se utilizará el modelo de tiempos de ejecución para tareas en tiempo real propuesto en [5] y se le dará seguimiento a través del filtro digital sobre los parámetros del mismo. En este modelo, la correlación de los ruidos internos y externos afecta directamente el comportamiento de los tiempos de ejecución y se compara las respuestas y se presenta los resultados obtenidos entre ruidos correlacionados y ruidos no correlacionados. De igual manera, en [5] se proponen los siguientes conceptos y propuestas.

Una tarea en Tiempo Real es una entidad ejecutable de trabajo $J_{i,n}$ que al menos es caracterizada por un tiempo de arribo y una restricción temporal. Está formada por un conjunto de instancias j_k , tal que $J_{i,n} = \{j_k\}$ con $i, k, n \in Z^+$, $k \leq n$.

Una instancia j_k es una unidad de trabajo de una tarea J_i , queda definida con $j_{i,k} = (l_k, c_k, d_k)$ para $i, k \in Z^+$ donde l_k es el tiempo de arribo de cada instancia, " y_k " es el tiempo de ejecución de cada instancia y d_k es el plazo de cada instancia.

El tiempo de ejecución y_k (también denominado c_k dentro de la literatura tradicional de tareas de tiempo real) es el tiempo en que la instancia con índice k de una TTR* $J_{i,n}$ concluye sus operaciones sin considerar los desalojos de ésta en el procesador.

Dada las características de los sistemas de cómputo o procesamiento de señales, en general existen ciertas variaciones de tiempos de cálculo en los sistemas. Este dato es considerado en los STR♦ con el jitter◊, en donde por razones de Hardware existen ciertas variaciones en los tiempos de atención. Los tiempos de ejecución sufren también de esto, como se menciona en la mayoría de los artículos, de forma que la mayoría de los autores consideran los peores casos de tiempo de ejecución (WCET) como lo menciona Lehoczky para planificación de las tareas. Otros autores que consideran variaciones de los tiempos en los tiempos de ejecución como distribuidos probabilísticamente son T.S. Tia., Z. Deng., M. Storch., J. Sun., L.C. Wu., J.W.S. Liu., y Lehoczky [5].

Los tiempos de ejecución pueden cambiar el comportamiento de un sistema de forma significativa, por esto es de gran importancia el desarrollo de un modelo de descripción de Tiempos de Ejecución (TE). El modelo está representado por una ecuación de diferencias del tipo estocástico, con las siguientes propiedades: de primer orden y

* Tarea en Tiempo Real (TTR), ver Glosario.

♦ Sistema en Tiempo Real (STR), ver Glosario.

◊ Jitter, esta descrito como las variaciones de tiempos de cálculo en los sistemas [5].

primero grado, invariante en el tiempo y estacionario; considerando que las perturbaciones externas al procesador no están correlacionados y que obedecen a una función de distribución normal. El modelo propuesto es monovariable: sólo se caracteriza el tiempo de ejecución de una tarea para todas sus instancias.

Tiempo de ejecución de una TTR *El tiempo de ejecución y_k de una instancia con índice k de una TTR $J_{i,n}$ está definido por (ver: [5]):*

$$y_k = x_k + w_{2,k} \cdot \quad (3-1)$$

$$x_k = ax_{k-1} + w_{1,k} \cdot \quad (3-2)$$

Donde:

a es el parámetro del sistema,

x_k, x_{k-1} son los estados internos del sistema en los intervalos $k, k-1$, respectivamente,

$w_{1,k}$ son las perturbaciones internas del procesador, representadas a través de una variable aleatoria con distribución gaussiana,

$w_{2,k}$ son las perturbaciones internas del procesador, representadas a través de una variable aleatoria con distribución gaussiana,

Sustituyendo la ecuación (3-2) en la ecuación (3-1) el tiempo de ejecución de una tarea en tiempo real queda descrito por:

$$y_k = ac_{k-1} + w_k \cdot \quad (3-4)$$

con

$$w_k = -aw_{2k-1} + \delta_k + w_{2k} \cdot \quad (3-5)$$

El problema se enfoca ahora a encontrar el peso de la dinámica interna del parámetro ya que dado el modelo (3-4) lo desconocido es precisamente el parámetro del sistema. Para ello se sugiere el uso del método de variable instrumental con sus dos casos y el de mínimos cuadrados, ambos desarrollados en el capítulo anterior y que son ilustrados con los resultados de la simulación obtenidos al programar en Matlab® 5.2 (el código se anexa en el apéndice).

En forma recursiva se expresa el estimador de la siguiente manera:

$$\hat{a}_k = (\hat{a}_{k-1}y_{k-1} + x_k \vartheta_k^T) y_{k-1}^{-1} \cdot \quad (3-6)$$

III.3. EJEMPLO DE IMPLANTACIÓN DEL FILTRO DIGITAL EN TIEMPO REAL (FDTR) USANDO LA VARIABLE INSTRUMENTAL PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN UN MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA (C. C.)

El modelo y filtro propuestos consideran un sistema con las siguientes características [33]:

- El sistema (modelo del motor) es del tipo UEUS (una entrada una salida), lineal, estacionario e invariante en el tiempo, caracterizado por un modelo regresivo de acuerdo a [20] y [4], [21].*
- Entrada escalón de 20v al motor.*
- Algoritmo Variable Instrumental [37].*
- Los ruidos $v_{(k)}$ y $w_{(k)}$ están correlacionados con la señal observable $y_{(k)}$ pero no entre ellos.*

El modelo del motor de Corriente Continua (C. C.) se representa por un sistema lineal con parámetros invariantes en el tiempo; esto es posible ya que un sistema no lineal puede aproximarse a un sistema lineal por diferentes técnicas como las expuestas en [53]:

Las ecuaciones del proceso dinámico y de los filtros utilizadas para el experimento se expresan considerando las ecuaciones (2-10) y (2-11), con $w_k^I = v_k$, $w_k^{II} = w_k$, donde:

- $x_{(k+1)}$ es el estado del sistema,
- $y_{(k)}$ es la señal observable (velocidad angular),
- $v_{(k)}$, $w_{(k)}$ son las perturbaciones internas y externas respectivamente.
- a es el parámetro a estimar.

Las condiciones a cumplir son las de (2-15) a (2-20).

II.3.1. ANÁLISIS COMPUTACIONAL.

El estimador de variable instrumental para esta aplicación esta expresado [33]:

$$\hat{a}_{(k)} = P_{(k)} B_{(k)}^{-1}. \quad (3-7)$$

definido por:

$$P_{(k)} = \sum_{j=1, \dots, k} y_{(j)} z_{(j)}. \quad (3-8)$$

$$B_{(k)} = \sum_{j=1, \dots, k} y_{(j-1)} z_{(j)} \quad (3-9)$$

con $z_{(j)} = y_{(j-1)}$ de acuerdo a [33].

En forma recursiva (3-8) y (3-9), al considerar a [20]:

$$P_{(k)} = P_{(k-1)} + y_{(k)}z_{(k)}. \quad (3-10)$$

$$B_{(k)} = B_{(k-1)} + y_{(k-1)}z_{(k)} \quad (3-11)$$

El estimador en forma recursiva se describe como:

$$\hat{a}_{(k)} = (\hat{a}_{(k-1)}B_{(k-1)} + y_{(k)}z_{(k)})B_{(k)}^{-1}, \quad (3-12)$$

El error de estimación es definido por [20]:

$$\Delta_{(k)} = \hat{a}_{(k)} - a. \quad (3-13)$$

De acuerdo a [33] está descrito por:

$$\Delta_{(k)} = \frac{(-a\sigma_{w_{(k)}}^2 + \sigma_{v_{(k)}}^2)(1-a^2)}{\sigma_{w_{(k)}}^2(2a^2 + 1 + a^2) + \sigma_{w_{(k)}}^2(1+2a)}. \quad (3-14)$$

Así como el funcional del error de acuerdo a [20] y [4] :

$$J_k = E(\Delta_k^2). \quad (3-15)$$

Para el modelo del motor se consideraron como resultados de la validación del algoritmo de estimación los siguientes datos utilizados en [33]:

$$a = 0.35, \quad \sigma(v_k) = 0.95, \quad \sigma(w_k) = 0.99, \quad \Delta_0 = 0.178.$$

La decisión de implementar este FDTR a través de tareas concurrentes se basa en que idealmente cada actividad del sistema real se realiza en paralelo a ellas en [70], se comenta que en un sistema físico, las actividades se realizan en paralelo. Los resultados de la simulación se presentan en la Figura 4:

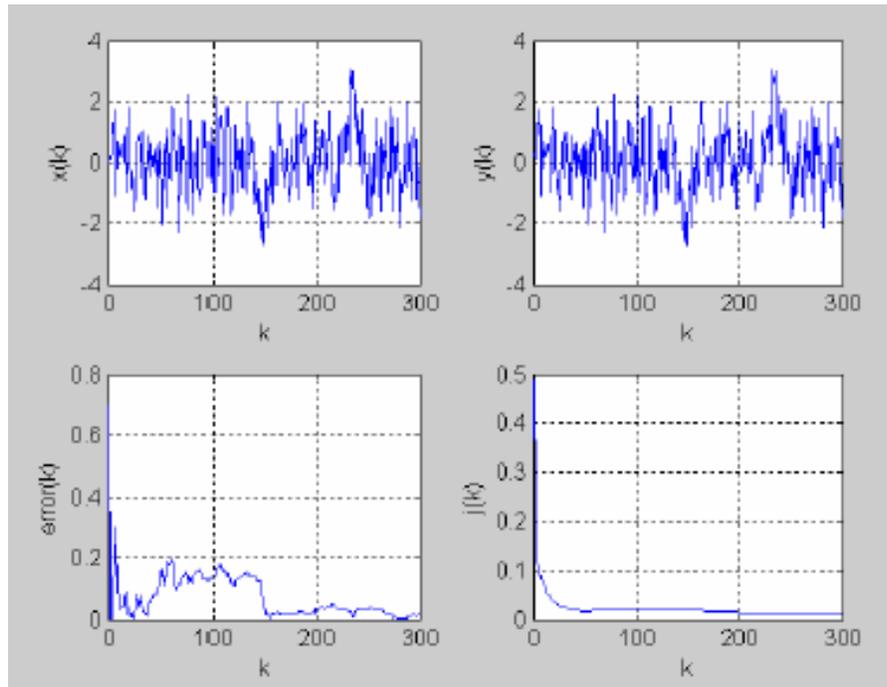


Figura 4. Estimación usando la técnica de variable instrumental.

Donde x_k el estado interno, y_k es la señal observable, J_k es el funcional del error de estimación.

En la Figura 5, se realizaron 100 experimentos para conocer los niveles de convergencia del estimador, respecto al valor real, lo que permitió observar que todas las estimaciones quedaron acotadas por la varianza de la señal y_k .

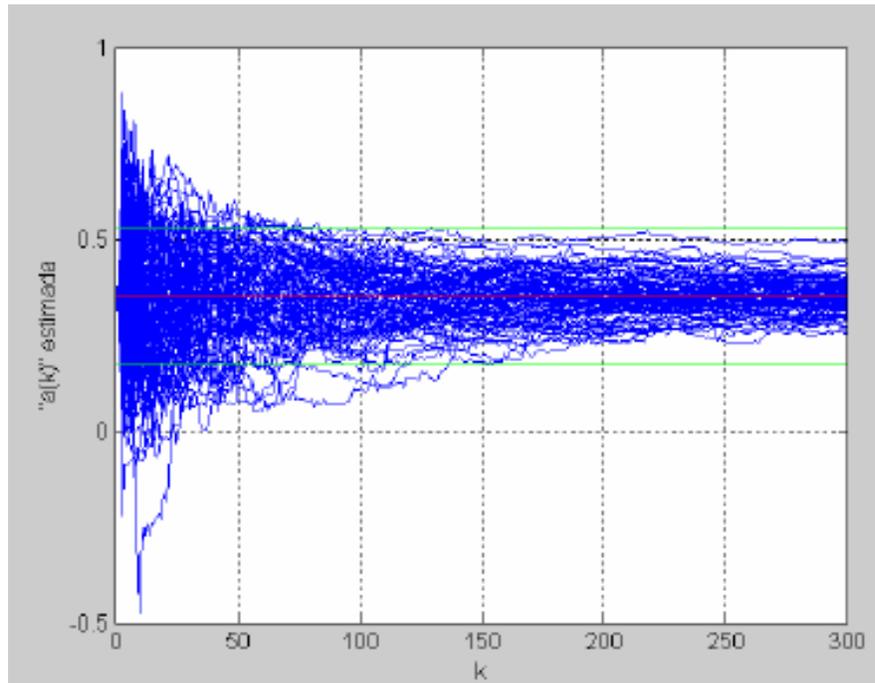


Figura 5. Simulación: 100 pruebas con 300 iteraciones del estimador, usando a la variable instrumental .

En la Figura 6, se muestra en forma ilustrativa al estado del sistema con la salida, así como el error de estimación y el funcional del error. En las dos últimas ilustraciones dentro de la figura, se encuentran las 100 pruebas con 300 iteraciones cada una de ellas.

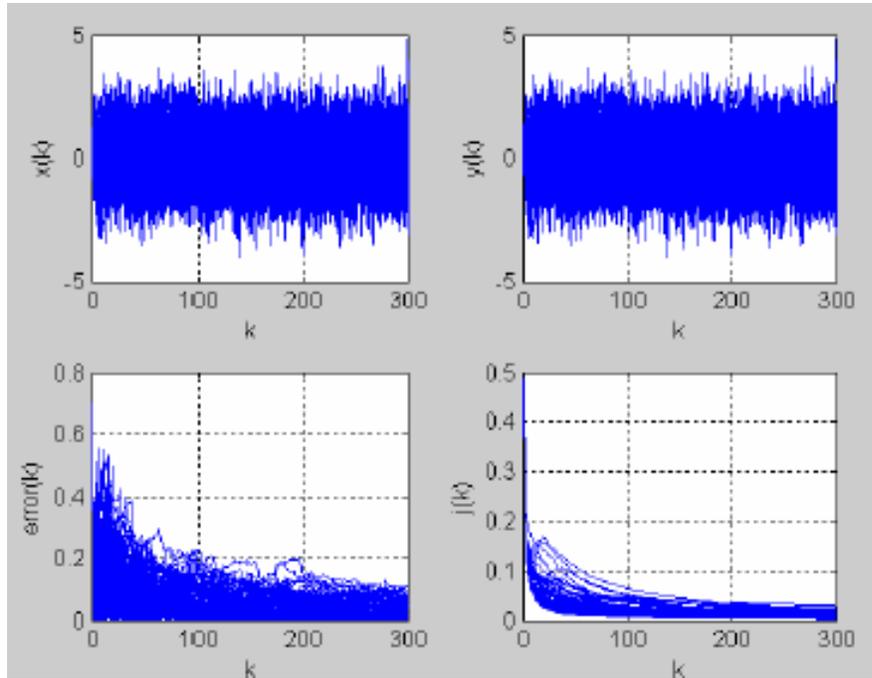


Figura 6. Simulación: 100 pruebas con 300 iteraciones del estimador, usando a la variable instrumental.

Como pudo observarse en las Figuras de la 4 a la 6, el estimador al usar el método de variable instrumental, permitió tener niveles de convergencia menores a 0.05 unidades, además de que los resultados de la estimación quedaron acotados por la varianza de y_k

III.4. RESULTADOS OBTENIDOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL ESTIMADOR DE “VARIABLE INSTRUMENTAL CON RUIDOS NO CORRELACIONADOS”

De acuerdo al modelo planteado (3-4) y al estimador descrito en (2-13), con una variable instrumental de $\vartheta_k = y_{k-2}$, y al realizar el desarrollo computacional del análisis del algoritmo de variable instrumental para estimación de parámetros en sistemas estocásticos, monovariantes, lineales y estacionarios se utilizó un dispositivo moderno: una computadora Intel Pentium 4, CPU 1500 MHz., AT/AT compatible a 261.616 Kb de RAM, bajo la plataforma Windows 2000, seleccionando al MATLAB® como una herramienta de simulación, obteniendo el archivo `varinstrumental2.m` del cual se tienen: el estado ($x(k)$), el estado de salida ($y(k)$), el histograma de frecuencias del estado de salida (Frecuencias), el funcional del error ($J(k)$) descrito en (2-45), así como el estimador del parámetro real ($ae(k)$) respecto al parámetro propuesto en el modelo, como se puede ver en la Figura 7, en forma respectiva.

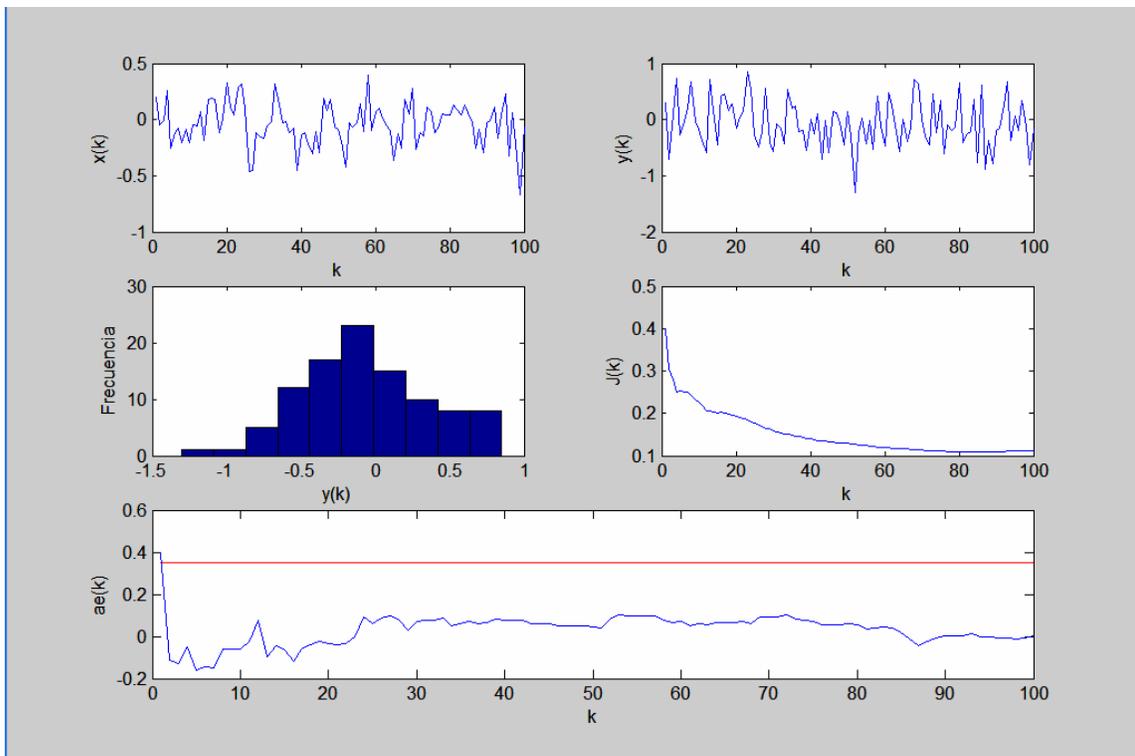


Figura 7. Resultados de simulación (ruidos no correlacionados).

En la Figura 8 se observan los resultados de la estimación de parámetros para 600 pruebas en el mismo sistema, cumpliendo las condiciones de estabilidad, ya que $|y_k| < \epsilon$, así como $|x_k| < \delta$ de acuerdo a [25]. Se muestra la última prueba para el sistema

descrito en (3-4), para el estado de salida x_k , para el tiempo de ejecución c_k , el histograma de frecuencias del estado y_k de acuerdo a [17], el funcional del error con una región de convergencia que decrece asintóticamente respecto a las iteraciones y la región de estimación respecto del parámetro real, el cual queda envuelto dentro de unas asíntotas que convergen a un valor de -0.35 , valor inferior al valor real que es de 0.4 unidades.

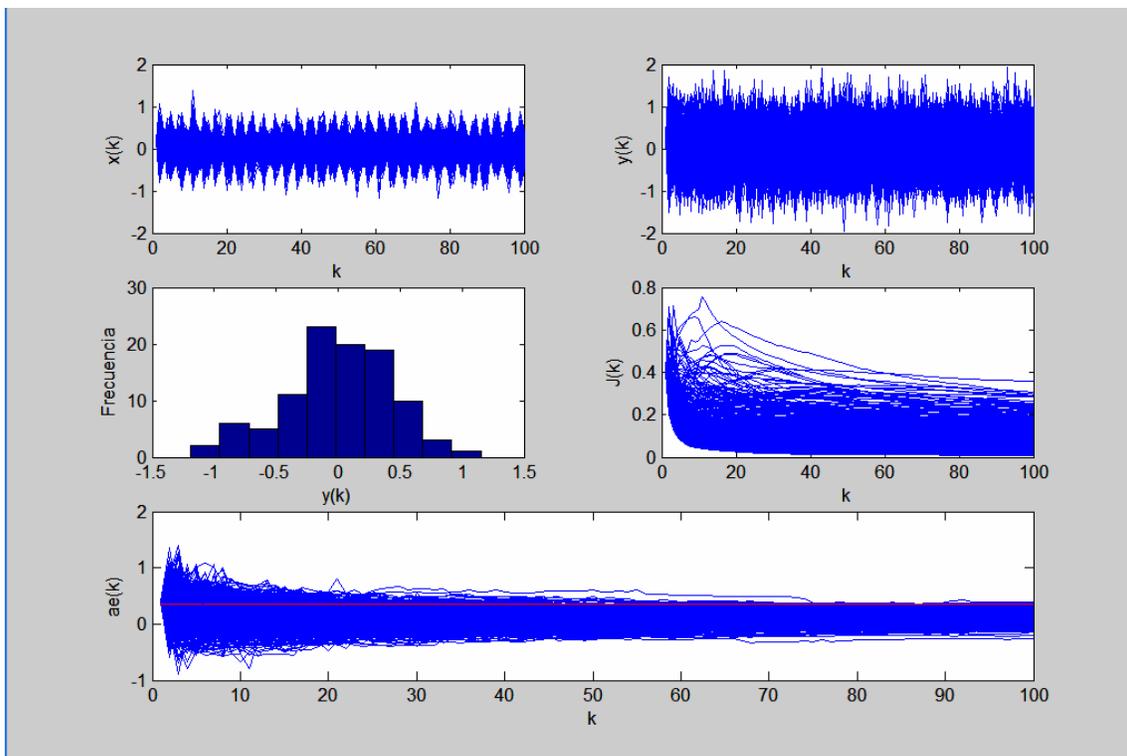


Figura 8. Resultados de simulación (600 pruebas, para 100 iteraciones cada una).

En la Figura 9, se muestra a las 600 pruebas de estimación con 100 iteraciones cada una para la obtención de una superficie con los valores de estimación.

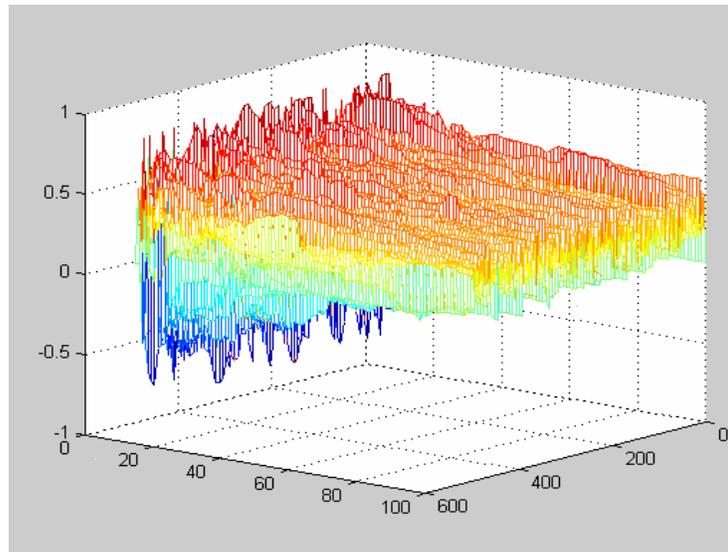


Figura 9. Resultados de simulación (600 pruebas de estimación para 100 iteraciones cada uno).

En la Figura 10 se presenta el comportamiento del estimador más representativo (en valor medio) en función de los 600 experimentos. Se observa que su diferencia respecto al parámetro real es de 0.17 unidades. Su funcional del error promedio converge a 0.1 unidades a las 100 iteraciones.

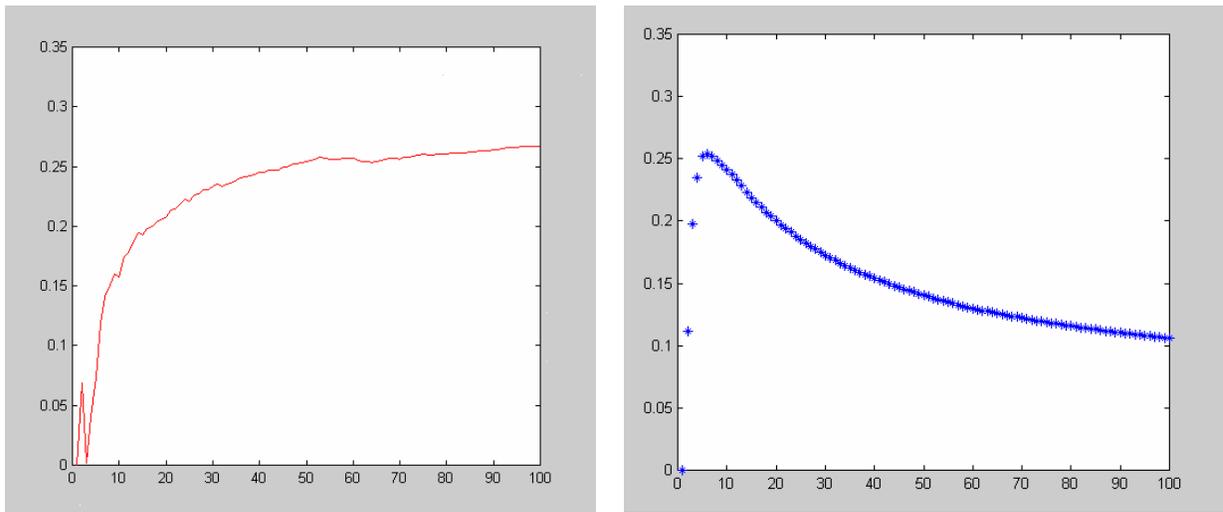


Figura 10. Resultados de simulación (estimación y funcional representativos).

III.5. RESULTADOS OBTENIDOS DE LA SIMULACIÓN DEL ESTIMADOR DE “VARIABLE INSTRUMENTAL CON RUIDOS CORRELACIONADOS”

De acuerdo al modelo planteado (3-4) y al estimador descrito en (2-13), para ruidos correlacionados, la condición de (2-20) cambia a $\sigma_{w_k^1 w_k^2}^2 < 1$. La Figura 11, presenta una simulación en donde se observan ilustrativamente el estado del sistema ($x(k)$), el tiempo de ejecución ($y(k)$), el histograma de frecuencias del estado, el funcional del error ($J(k)$) que es muy próximo a cero ya que el parámetro estimado del tiempo de ejecución ($ae(k)$) converge al valor real del parámetro que es de 0.37 unidades que de acuerdo a (2-29), su grado de convergencia está en función de las varianzas de los ruidos tanto interno como externo.

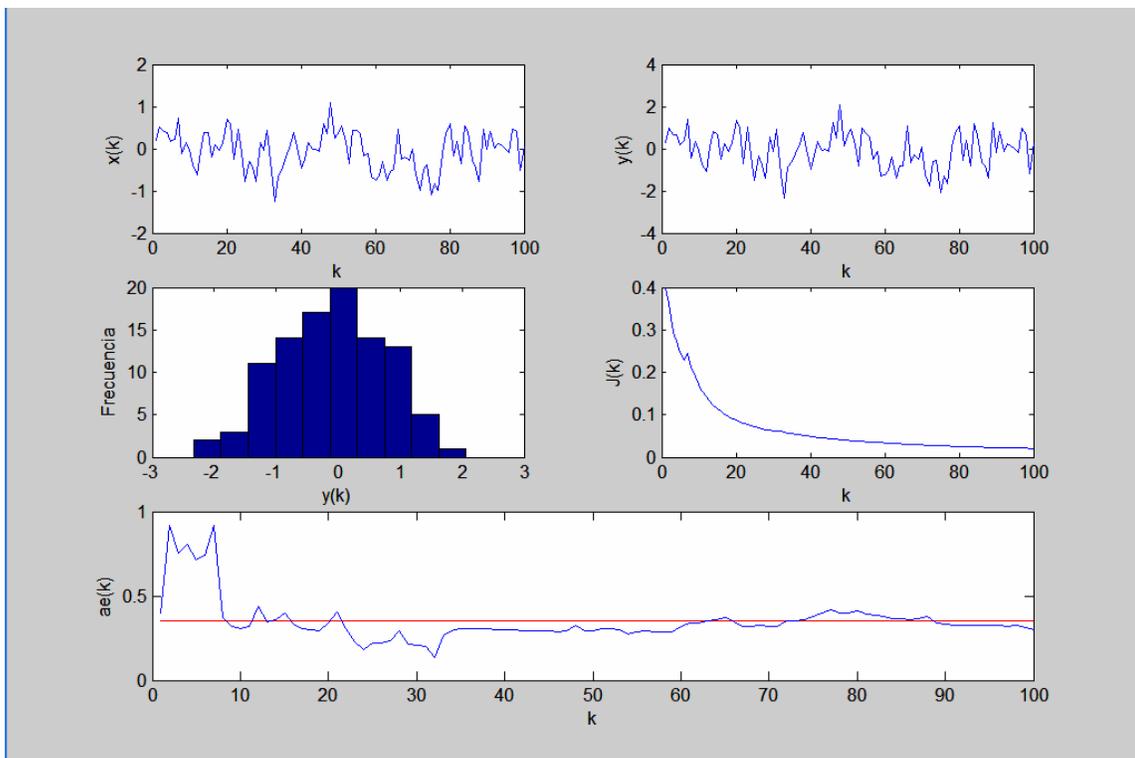


Figura 11. Resultados de simulación (ruidos correlacionados).

En la Figura 12, se muestra a las 600 pruebas de estimación con cien iteraciones cada una, observando que en ningún caso sus magnitudes en forma absoluta llegan a ser iguales a la unidad, de acuerdo a [17].

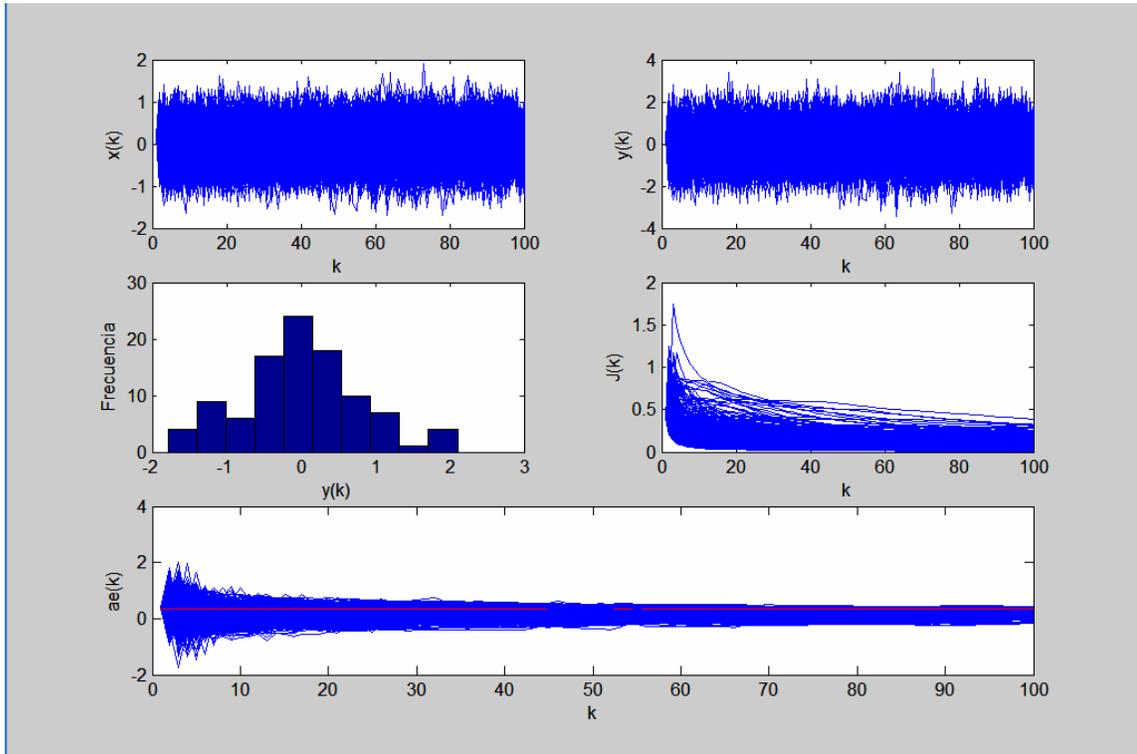


Figura 12. Resultados de simulación (600 pruebas de estimación, para 100 iteraciones cada uno).

En la Figura 13 se presenta al estimador promedio y el funcional promedio, respectivamente. Con respecto al valor del parámetro real de 0.37 unidades, podemos observar que su diferencia es de 0.01 unidades. Y respecto al funcional del error su cota se encuentra en 0.05 unidades a las 100 iteraciones.

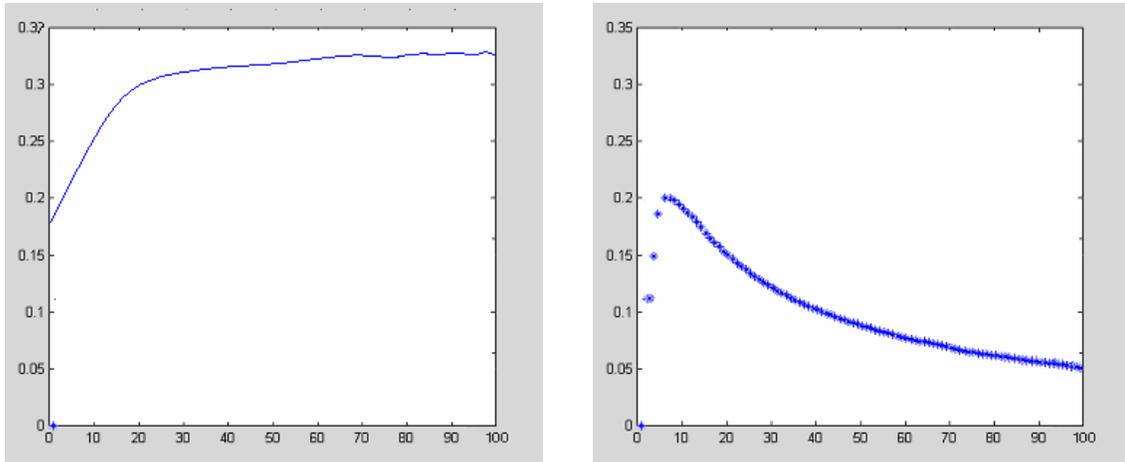


Figura 13. Resultados de simulación (estimación y funcional representativos).

Como pudimos observar, el mejor estimador usando el método de la variable instrumental resulta cuando los ruidos están correlacionados, es decir, cuando se cumple (2-20) cambia a $\sigma_{W_k^l W_k^u}^2$, para el sistema (3-4). Ya que la diferencia es casi del doble, entre los funcionales de error, respecto del sistema con ruidos no correlacionados, con una selección de variable instrumental de $\vartheta_k = y_{k-2}$.

Ahora, al cambiar a la variable instrumental por el tiempo de ejecución presente $\vartheta_k = y_k$ se tiene al método mínimos cuadrados tradicionales. Y al aplicarle estas condiciones al modelo descrito en (3-4), se observaran en la siguiente sección los resultados correspondientes. Los cuales se compararán con el método de variable instrumental con ruidos correlacionados.

III.6. COMPARACIONES REALIZADAS DE LAS SIMULACIONES DEL ESTIMADOR “VARIABLE INSTRUMENTAL CON RUIDOS NO CORRELACIONADOS Y MÍNIMOS CUADRADOS”

La versatilidad del filtro estimador al usar la Variable Instrumental $\vartheta_k = y_{k-i}$, $i = \overline{1, s}$, permite usar a aquella variable respecto de su salida, para lograr una alta convergencia del estimador al parámetro real. Para el presente ejemplo se seleccionó a la mejor variable instrumental que permitiera tener la mejor convergencia, la cual fue $\vartheta_k = y_{k-2}$.

Como puede verse en la Figura 14, el modelo planteado (3-4) y el estimador descrito en (3-6), para ruidos no correlacionados al considerar que las propiedades (2-15) y (2-16) con $\sigma_{w_k^i w_k^u}^2 = 0$, presenta el estado del sistema ($x(k)$), el histograma de frecuencias (Frecuencia), el funcional del error ($J(k)$) que converge a un valor menor a 0.05 unidades y el estimado del parámetro “ a ” del tiempo de ejecución ($ae(k)$), que de acuerdo a (2-14), está en función de las varianzas de los ruidos tanto interno como externo.

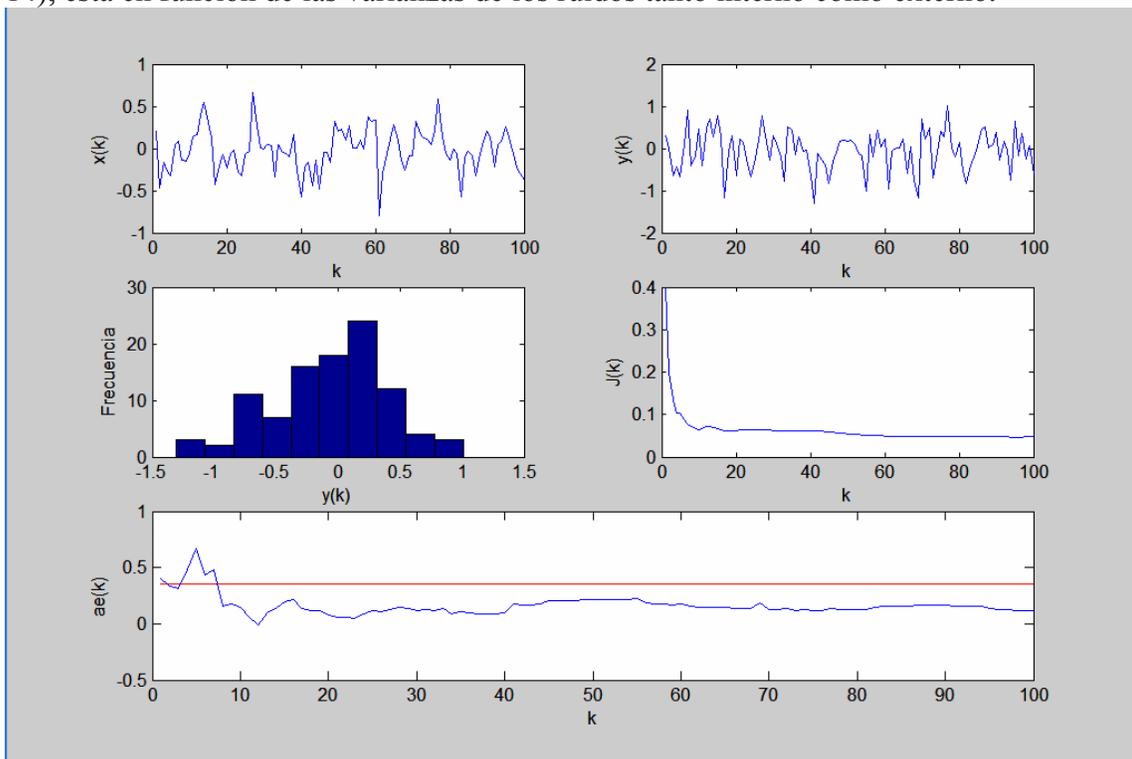


Figura 14. Resultados de simulación al usar la variable instrumental con ruidos correlacionados.

Ahora al usar el método de mínimos cuadrados para (3-6) considerando la mismas condiciones (2-16) y (2-17) con $\sigma_{w_k^l w_k^u}^2 = 0$, con $\vartheta_k = y_k$, en forma ilustrativa la podemos ver en la Figura 15. Ésta figura presenta el estado del sistema ($x(k)$), el tiempo de ejecución ($y(k)$), el histograma de frecuencias (Frecuencia), el funcional del error de estimación ($J(k)$) donde se puede observar su valor a las 100 iteraciones es mayor a la unidad, el cual está en función de las varianzas de los ruidos tanto interno como externo y el parámetro estimado del tiempo de ejecución ($ae(k)$) con una divergencia mayor a la unidad.

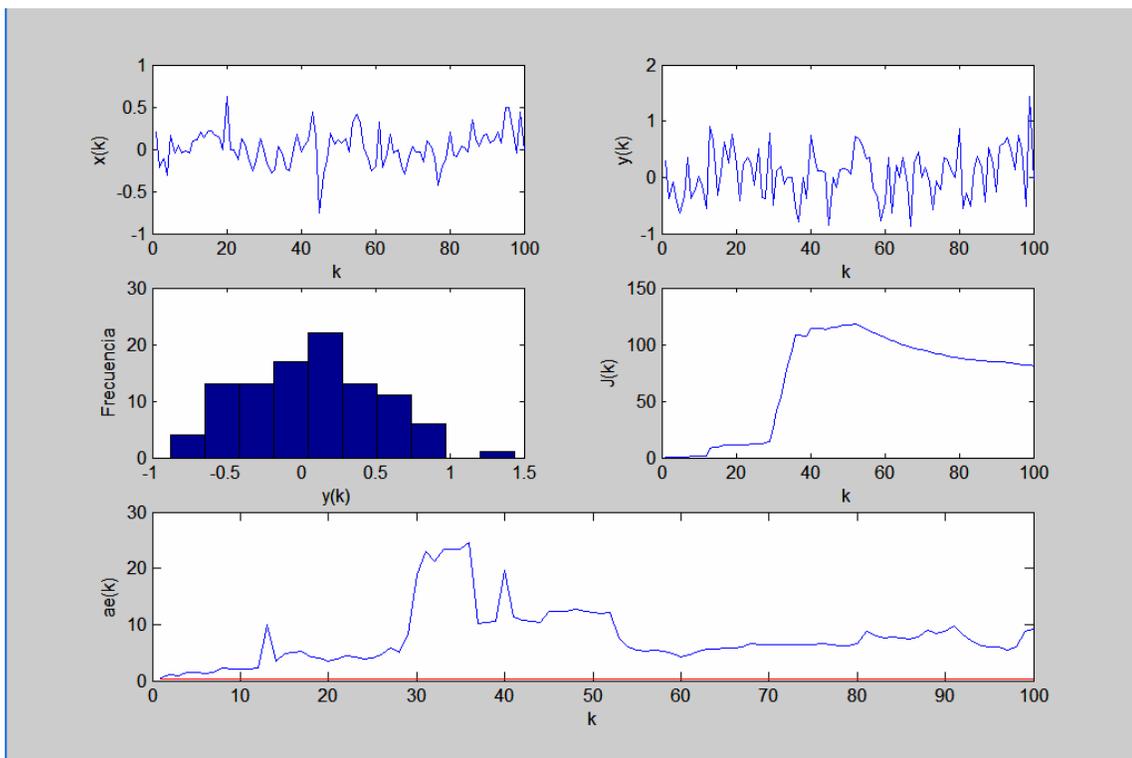


Figura 15. Estimación usando mínimos cuadrados.

Como conclusión de la comparación se puede decir, que el estimador al usar a la variable instrumental resulta ser mejor, es decir, con grado de convergencia menor a 0.05 unidad si se tiene $\vartheta_k = y_{k-2}$, logrando aproximarse lo mejor posible al valor real del sistema descrito en (3-4), el cual para este ejemplo fue de 0.37 unidades. A través de las ilustraciones puede observarse en las Figura 14 y Figura 15, el valor de los estimadores ($ae(k)$), favorece aquel que usa la variable instrumental (Figura 11), ya que se llega a una convergencia casi perfecta, lo contrario al usar el método de mínimos cuadrados que llega a valores mayores a la unidad.

III.7. COMPARACIONES REALIZADAS DE LAS SIMULACIONES DEL ESTIMADOR “VARIABLE INSTRUMENTAL CON RUIDOS CORRELACIONADOS Y MÍNIMOS CUADRADOS”

La versatilidad del filtro estimador al usar la Variable Instrumental $\vartheta_k = y_{k-i}$, $i = 1, \dots, s.$, permite usar a aquella variable respecto de su salida, para lograr una alta convergencia del estimador al parámetro real. Para el presente ejemplo se seleccionó a la mejor variable instrumental que permitiera tener la mejor convergencia, la cual fue $\vartheta_k = y_{k-2}$.

Como puede verse en la Figura 14, el modelo planteado (3-4) y el estimador descrito en (3-6), para ruidos correlacionados, al considerar las propiedades (2-15) y (2-16) con $\sigma_{W_k^l W_k^H}^2 < 1$, presenta el estado del sistema ($x(k)$), el histograma de frecuencias (Frecuencia), el funcional del error ($J(k)$) que converge a un valor menor a 0.01 unidades y el estimado del parámetro “ a ” del tiempo de ejecución ($ae(k)$), que de acuerdo a (2-29), está en función de las varianzas de los ruidos tanto interno como externo, así como de $\sigma_{W_k^l W_k^H}^2 < 1$.

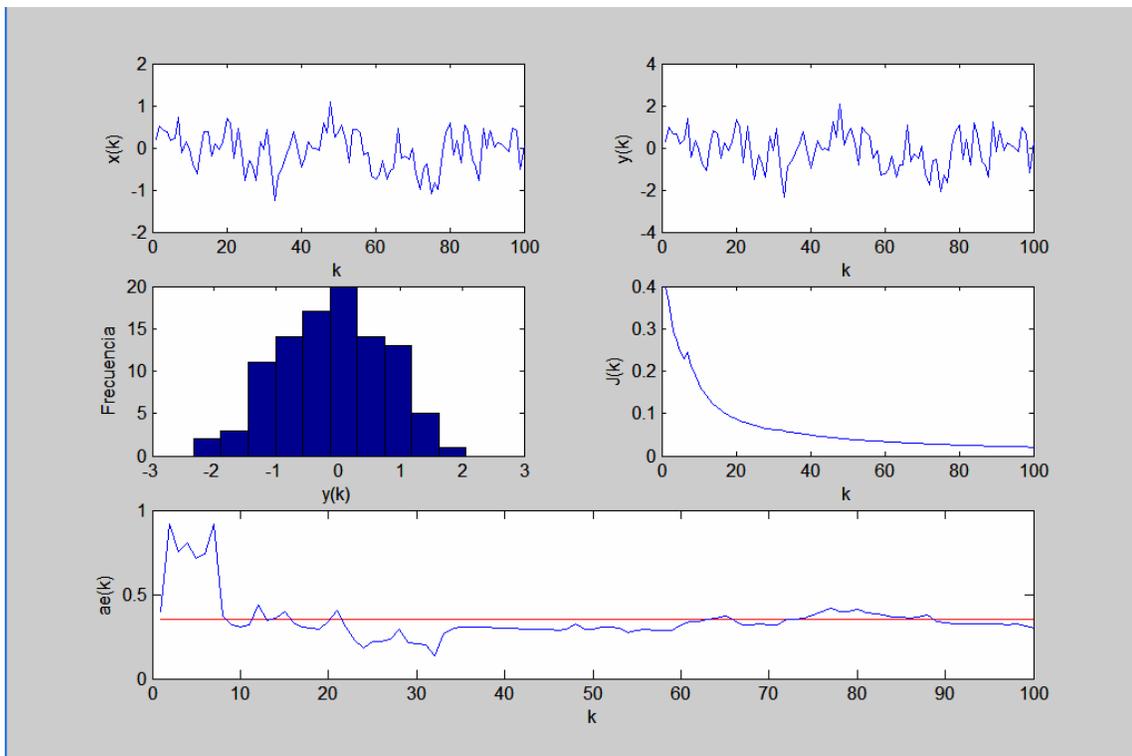


Figura 16. Resultados de simulación (ruidos correlacionados).

Al usar el método de mínimos cuadrados para (3-6) considerando la mismas condiciones (2-15) y (2-16) con $\sigma_{w_k^i w_k^i}^2 < 1$, pero con $\vartheta_k = y_k$, en forma ilustrativa la podemos ver en la Figura 15. Ésta figura presenta el estado del sistema ($x(k)$), el tiempo de ejecución ($y(k)$), el histograma de frecuencias (Frecuencia), el funcional del error de estimación ($J(k)$) donde se puede observar su valor a las 100 iteraciones es mayor a la unidad, el cual está en función de las varianzas de los ruidos tanto interno como externo y el parámetro estimado del tiempo de ejecución ($ae(k)$) con una convergencia de 0.05 unidades.

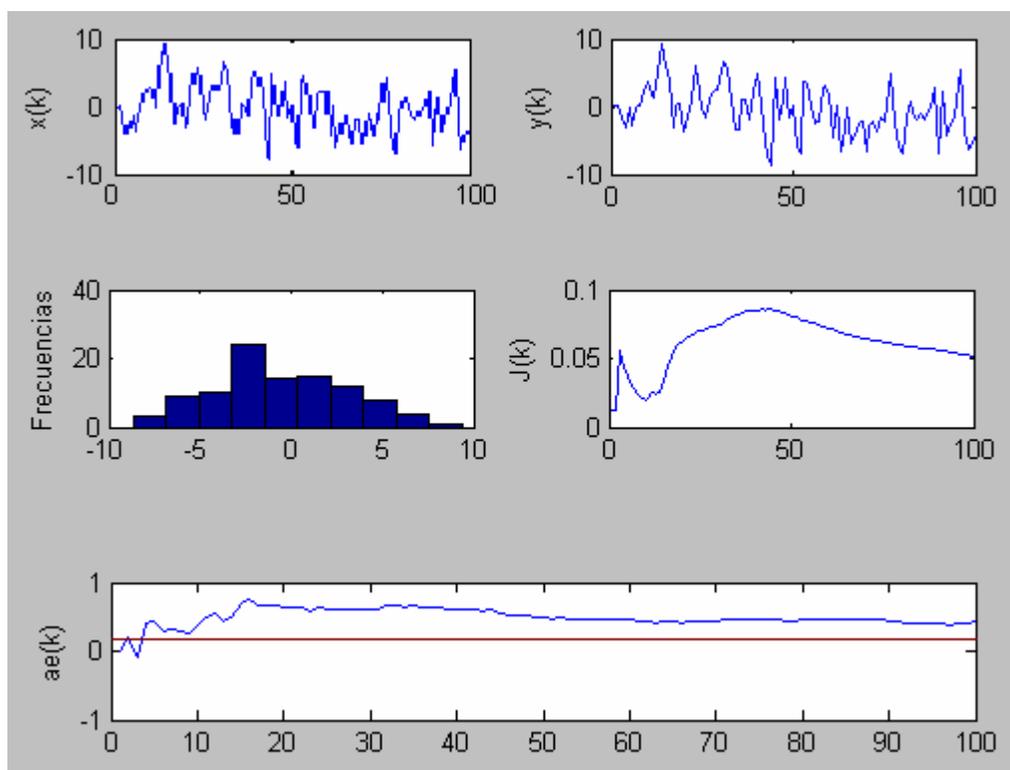


Figura 17. Estimación usando mínimos cuadrados.

Como conclusión de la comparación se puede decir, que el estimador al usar a la variable instrumental resulta ser mejor que el de mínimos cuadrados, es decir, con grado de convergencia menor a 0.01 unidad si se tiene $\vartheta_k = y_{k-2}$, logrando aproximarse lo mejor posible al valor real del sistema descrito en (3-4), el cual para este ejemplo fue de 0.34 unidades. A través de las ilustraciones puede observarse en las Figura 16 y Figura 17, el valor de los estimadores ($ae(k)$), favorece aquel que usa la variable instrumental (Figura 16), ya que se llega a una convergencia casi perfecta, lo contrario al usar el método de mínimos cuadrados, cuyo error esta alrededor de 0.05 unidades.

III.8. CONCLUSIONES

Como aplicación del método de variable instrumental para sistemas estocásticos monovariantes, invariantes en tiempo, podemos ver dos ejemplos: a) la estimación usando el método de variable instrumental descrito en la (3-7) que en forma recursiva quedó expresado en (3-12) fue ilustrado en sus niveles de estimación en las Figuras 1 a la 3, observando que la respuesta del estimador queda acotado por la varianza de y_k . b) la estimación de las ganancias de los tiempos de ejecución de una tarea de tiempo real descrita dentro de las ilustraciones como $(ae(k))$. Existe una gran variedad de artículos sobre sistemas en Tiempo Real (ver las referencias contenidas en [17] y [18]) y cada uno de ellos trata a las tareas con una representación que es difícil de simularse, es más sencillo tomar un sistema como el descrito en (2-11) y aplicar las condiciones necesarias para que el modelo describa en forma dinámica a la tarea de tiempo real, contando con la siguiente problemática: para que el modelo se aproxime lo mejor posible al tiempo de ejecución de una tarea de tiempo real, se requiere de la mejor estimación posible del parámetro del modelo.

De acuerdo a este análisis, el mejor estimador resulto cuando los ruidos están correlacionados, es decir, cuando se cumple con (2-15) y (2-16) cambia a $\sigma_{w_k^l w_k^u}^2 < 1$, conforme al modelo expresado en (3-4). Como Puede observarse en la Figura 4 respecto a la Figura 8, tenemos que el estimador (descrito simbólicamente como $(ae(k))$) cuenta con un una mejor convergencia que el estimador descrito en la Figura 4. Ya que su diferencia es casi del doble, entre los funcionales de error ($J(k)$) como se observa en las Figura 11 y la Figura 7. Ambas simulaciones se hicieron con una selección de variable instrumental de $\vartheta_k = y_{k-2}$ y un parámetro real de 0.37 unidades.

Al haber usado el método de mínimos cuadrados para (3-6) considerando las mismas condiciones (2-15) y (2-16) con $\sigma_{w_k^l w_k^u}^2 = 0$, pero con $\vartheta_k = y_k$, en forma ilustrativa se observó la respuesta del estimador $(ae(k))$ en la Figura 15. En esta figura se presentó el estado del sistema $(x(k))$, el tiempo de ejecución $(y(k))$, el histograma de frecuencias (Frecuencia), el funcional del error de estimación ($J(k)$) donde se pudo observar que el valor del estimador $(ae(k))$ es mayor a la unidad.

De igual forma al comparar el método de mínimos cuadrados para (3-6) considerando las mismas condiciones (2-15) y (2-16) con $\sigma_{w_k^l w_k^u}^2 < 1$, pero con $\vartheta_k = y_k$, en forma ilustrativa se observó la respuesta del estimador $(ae(k))$ en la Figura 15. En esta figura se presentó el estado del sistema $(x(k))$, el tiempo de ejecución $(y(k))$, el histograma de frecuencias (Frecuencia), el funcional del error de estimación ($J(k)$) donde se pudo observar que el valor del estimador $(ae(k))$ converge a 0.05, pero el de variable instrumental convergió a 0.01 unidades.

Como conclusión al haber comparado ambos métodos tanto con ruidos correlacionados como no correlacionados se puede comentar, que el estimador que uso a la variable instrumental resulto ser mejor, respecto al estimador al usar el método de mínimos cuadrados, es decir, cuando la convergencia observada en forma ilustrativa por el funcional de error ($J(k)$) del estimador de variable instrumental para ruidos no correlacionados es menor a 0.05 unidades al considerar que $\vartheta_k = y_{k-2}$, logrando ser la mejor aproximación al valor real del sistema descrito en (3-4), el cual para este ejemplo fue de 0.37 unidades, de igual forma para cuando se tiene correlación entre los ruidos, la convergencia fue de 0.01 unidades, que con respecto al mínimos cuadrados fue de más que la unidad y de 0.05 unidades, respectivamente. Todo ello puede observarse en las Figuras 14, 15, 16 y 17 y que en cualquiera de los casos favoreció aquel que usa la variable instrumental ya que se llega a una convergencia casi de 0.05 y 0.01 unidades respectivamente, lo contrario, al usar el método de mínimos cuadrados.

CAPITULO IV. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El problema de la estimación de parámetros dentro de la teoría de filtrado es importante, ya que, dado un sistema modelado por $y_k = \varphi_k y_{k-1} + \omega_k$ donde ω_k es un error generalizado sobre las perturbaciones tanto internas como externas que alteran el funcionamiento del sistema, descritas en (2-12), requiere de la descripción de la dinámica interna del modelo, descrita por φ_k y que no pueden ser medida de una manera directa; caso contrario es y_{k-1} así como ω_k , señales que pueden medirse directamente. Que al sustituir en (2-11) el estimador se tiene $\hat{y}_k = \hat{\varphi}_k y_{k-1} + \omega_k$. Buscando que el valor de convergencia descrito en la proposición cuatro respecto a $\Delta_y := |\hat{y}_k - y_k|$ tienda a cero en un sentido de probabilidad. Donde a través de los segundo momentos aplicados a (2-11), la estimación de φ_k estará en función la velocidad de cambio de y_k y de ω_k respecto a y_{k-1} .

En el capítulo uno se presentó una breve reseña de la teoría de filtrado digital y algunos conceptos básicos desarrollados por diferentes investigadores [3], [20], [35], [50], [64], comentando que un *filtro*, es un *descriptor* estocástico así como de acuerdo con [20] y [17], el término *filtro* se utiliza para describir un dispositivo en forma de hardware o software y que se aplica para: a) Eliminar el ruido de los datos de un sistema, es decir, filtrar la señal. b) Extraer información de acuerdo a alguna característica del sistema a analizar. c) Reconstruir el comportamiento del sistema a analizar. d) Predecir el comportamiento del sistema a analizar. Se comentó que el proceso de filtrado se basa en: e) Monitorear los estados que emite el sistema a analizar (representados simbólicamente por: $\{y(k)_i\}$, $k, i \in \mathbf{Z}^+$, respecto a la Figura 1). f) Predecir o identificar los ruidos que pueden ser originados por causas como: f₁) Errores propiciados por el emisor (el sistema), f₂) Errores de lectura provocados en el receptor, f₃) Influencia del medio ambiente que rodea tanto al emisor como al receptor. Además se dijo que en la teoría de filtrado existen dos áreas básicas (ver: [17] y [35]): g) *Estimación*. Es el área que se encarga de describir la dinámica de los parámetros del sistema a través de sus señales observables. Jazwinski [25]. h) *Identificación*. Es el área que se encarga de describir la dinámica de las señales que emite el sistema representadas simbólicamente por $\{y(k)_i\}$, $k, i \in \mathbf{Z}^+$, respecto a la Figura 1.

Para realizar el filtrado se requiere realizar los siguientes pasos con la idea básica de obtener un modelo que describa el comportamiento del sistema discretizado, sin alterar la dinámica del mismo; requiriendo de: i) *Planeación experimental*, j) *Selección de la estructura del modelo*, k) *Estimación e Identificación*, l) *Validación del modelo*.

En ese capítulo se propuso el uso de un modelo estocástico de primer orden, del tipo auto-regresivo con promedios móviles y en el proceso de filtrado; así como también al algoritmo de variable instrumental presentado en [11], [19], [20] y [50] para estimación

de parámetros en sistemas estocásticos monovariantes, lineales y estacionarios, proponiendo para los siguientes capítulos el estudio de la magnitud del error de estimación en dos casos: m) para sistemas con perturbaciones correlacionadas entre sí y n) para sistemas con perturbaciones no correlacionadas, mostrando en el error de estimación descrito como Δ para cada caso respectivamente, proponiendo la comparación con el tradicional método de mínimos cuadrados ocupado para tal fin.

Como parte importante de este capítulo se realizó el planteamiento del problema, objetivos, límites, alcances así como la justificación del presente trabajo; obteniendo, el problema de investigación de la presente tesis.

En este capítulo dos se consideró un sistema dinámico representado por un modelo estocástico de primer orden con una entrada y una salida (UEUS) como puede verse en (2-11). El error de estimación para un sistema dinámico que tiene ruidos no correlacionados está descrito en (2-28) y con ruido correlacionado está descrito en (2-35), con magnitudes descritas en (2-14) y en (2-29), respectivamente.

La diferencia entre (2-14) y (2-29) está descrita en (2-36) lo que significa que el error $\Delta_n^c < \Delta_n^d$ por lo tanto existe una mejor convergencia para sistemas con ruidos descorrelacionados, siempre y cuando la función de covarianza σ_n^2 cumpla que es mayor a $(1 - a^2)$, pero menor a la unidad.

Para el sistema (2-11) puede guardar dos condiciones: tener ruidos correlacionados expresada en la propiedad (2-20) o en caso contrario cambiará a una covarianza $\sigma_{W_k^l W_k^u}^2$.

Por otra parte el método de mínimos cuadrados descrito en (2-46), tiene un error de estimación descrito en (2-54) acotado por las propiedades (2-47) a (2-52). Cuenta con un número mayor de términos respecto al método de variable instrumental descrito en (2-29) al considerar las propiedades (2-15) a (2-20) acotada esta última en $(1 - a^2) < \sigma_{W_k^l W_k^u}^2 < 1$.

En el método de mínimos cuadrados no se permite dar cualidades al estimador, a diferencia del método de la variable instrumental, lo cual hace que el nivel de convergencia no sea lo más adecuado para la estimación de parámetros.

En el capítulo 3 se presentó como aplicación del método de variable instrumental para sistemas estocásticos monovariantes, invariantes en tiempo, podemos ver la estimación de las ganancias de los tiempos de ejecución de una tarea de tiempo real descrita dentro de las ilustraciones como $(ae(k))$. Existe una gran variedad de artículos sobre sistemas en Tiempo Real (ver las referencias contenidas en [17] y [18]) y cada uno de ellos trata a las tareas con una representación que es difícil de simularse, es más sencillo tomar un sistema como el descrito en (2-11) y aplicar las condiciones necesarias para que el modelo describa en forma dinámica a la tarea de tiempo real, contando con la siguiente problemática: para que el modelo se aproxime lo mejor posible al tiempo de ejecución

de una tarea de tiempo real, se requiere de la mejor estimación posible del parámetro del modelo.

De acuerdo al análisis realizado en el trabajo se concluye que el mejor estimador resulto cuando los ruidos están correlacionados, es decir, cuando se cumple que (2-20) cambia a $\sigma_{w_k^l w_k^u}^2 < 1$, conforme al modelo expresado en (3-4). Como Puede observarse en la Figura 7 respecto a la Figura 11, tenemos que el estimador (descrito simbólicamente como $(ae(k))$) cuenta con un una mejor convergencia que el estimador descrito en la Figura 7. Ya que su diferencia es casi del doble, entre los funcionales de error ($J(k)$) como se observa en las Figura 11 y la Figura 7, ambas simulaciones se hicieron con una selección de variable instrumental de $\vartheta_k = y_{k-2}$ y un parámetro real de 0.37 unidades, cuyo valor de convergencia se puede observar en la Figura 15, es de 0.01 unidades.

Al haber usado el método de mínimos cuadrados para (3-6) considerando la misma condición (2-20) con $\sigma_{w_k^l w_k^u}^2 < 1$, pero con $\vartheta_k = y_k$, en forma ilustrativa se observó la respuesta del estimador $(ae(k))$ en la Figura 15. En esta figura se presentó el estado del sistema $(x(k))$, el tiempo de ejecución $(y(k))$, el histograma de frecuencias (Frecuencia), el funcional del error de estimación $(J(k))$ donde se pudo observar que el valor del estimador $(ae(k))$ es de 0.05 unidades.

Un resultado importante fue haber comparado ambos métodos pudiendo comentar que el estimador que usó a la variable instrumental resulto ser mejor, respecto al estimador que usó al método de mínimos cuadrados, es decir, cuando la convergencia vista por el funcional de error $(J(k))$ del estimador de variable instrumental es menor a 0.01 unidades al considerar que $\vartheta_k = y_{k-2}$, logrando ser la mejor aproximación al valor real del sistema descrito en (3-4), el cual para este ejemplo fue de 0.37 unidades. A través de las ilustraciones puede observarse en las Figura 14 a la Figura 17, el valor de los estimadores $(ae(k))$, favoreció aquel que usa la variable instrumental (Figura 16), ya que se llega a una convergencia casi perfecta de 0.01 unidades.

Como trabajos futuros se propone probar diversas técnicas de estimación para mejorar los grados de convergencia de los mismos pero para parámetros variantes en el tiempo y posteriormente evolucionar a la identificación para describir trayectorias o estados de un sistema que puede ser de tiempo real. Ello permitirá el desarrollo de algoritmos de filtrado n-dimensional para describir trayectorias de sistemas móviles y en el mejor de los casos con restricciones de tiempo. Además, debido a la buena convergencia y velocidad de respuesta del estimador desarrollado, sería interesante implantarlo en forma multivariable pero dentro de sistemas mínimos para posibles usos en el seguimiento y reconstrucción de tareas en tiempo real concurrentes.

APÉNDICE A. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO COMPUTACIONAL “VARIABLE INSTRUMENTAL”

El valor de la variable “ a ” es el valor del parámetro que se va a estimar y $x(2)$ es el estado inicial del sistema que se simula, $y(1)$ es el estado de la salida del sistema, $l(1)$ son las condiciones del filtro mínimos cuadrados, $E2(1)$ es el numerador del filtro y $D(1)$ es la condición inicial de error.

Las iteraciones están condicionadas desde k igual a 2 hasta k igual a 100, donde k es el índice del intervalo y $x(k+1)$ es el estado en el intervalo $k+1$. Se toma el parámetro a estimar y se multiplica por el estado en el que se encuentra el sistema, según la iteración que este lleve; el ruido está caracterizado por una función *randn* normalizada, también en el caso de $y(k)$ en cuanto al *randn* que se le aplica, $y(k)$ será igual a la sumatoria de $x(k)$ más el *randn* como anteriormente se menciona.

```
for k=2:100
```

```
x(k+1)=(a*x(k))+randn;
```

```
y(k)=x(k)+randn;
```

el valor de convergencia en probabilidad varía según las iteraciones que a este se le aplique, es por ello que $l(k)$ representa es el denominador del estimador:

```
l(k)=y(k)*y(k-1)+l(k-1);
```

El denominador del estimador será representada por $E2(k)$ está descrito por:

```
E2(k)=y(k)*(y(k-1))+E2(k-1);
```

El parámetro estimado será representado por $ae(k)$, tal que:

```
ae(k)=E2(k)/l(k);
```

Si no se cumple la condicionante del estimador, el sistema se inestabiliza (círculo unitario).

```
if abs(ae(k))>=1
```

Posteriormente se calcula el error y sus condiciones en el que se puede encontrar el sistema, asignándole el error a $D(k)$, el cual es la diferencia de la salida obtenida con la salida deseada.

```
D(k)=(D(k-1)*(k-1)+(ae(k)-a)^2)/k;
```

APÉNDICE B. CÓDIGO DE LOS ALGORITMOS EN MATLAB® DEL MÉTODO VARIABLE INSTRUMENTAL

```
%varinstrumental.m
%variable instrumental con ruidos no correlacionados
%tesis Gabriela Lopez Ruiz
%-----
for k=2:100
    x(k+1)=(a*x(k))+randn;
    y(k)=x(k)+randn;
    l(k)=y(k)*y(k)+l(k-1);
    E2(k)=y(k)*(y(k-1))+E2(k-1);
    ae(k)=E2(k)/l(k);
    if abs(ae(k))>=1
        end
    D(k)=(D(k-1))^2+(ae(k)-a)^2;
end
hold on
figure
subplot 411
plot(x)
title('x')
subplot 412
plot(y)
title('y')
subplot 413
plot(ae)
title('ae')
subplot 414
plot(D)
title('D')
```

```

%varinstrumental1.m
%variable instrumental con ruidos correlacionados
%tesis Gabriela Lopez Ruiz
%-----

for k=2:100
    m(k)=randn;
    x(k+1)=(a*x(k))+m(k);
    y(k)=x(k)+m(k);
    l(k)=y(k)*y(k)+l(k-1);
    E2(k)=y(k)*(y(k-1))+E2(k-1);
    ae(k)=E2(k)/l(k);
    if abs(ae(k))>=1
    end
    D(k)=(D(k-1)*(k-1)+(ae(k)-a)^2)/k;
end
figure
subplot 411
plot(x)
title('x')
subplot 412
plot(y)
title('y')
subplot 413
plot(ae)
title('ae')
subplot 414
plot(D)
title('D')

```

```

%varinstrumental4.m
%variable instrumental con ruidos correlacionados,
%mostrando el estimador ideal, en tercera dimensi3n
%(22-abril-2004)
%tesis Gabriela L3pez Ruiz
%-----
close all;

clear all;
a=0.37;      % par3metro a estimar
x(2)=.001;  % el estado inicial del sistema
y(1)=.003;  % el estado inicial de la salida del sistema
l(1)=.005;  % condiciones del filtro
E2(1)=.004; % condiciones de algunos operadores dentro del
filtro
D(1)=.0123; % condiciones iniciales del error
saes([2:100],1)=0;% genera la grafica de
sds([2:100],1)=0;% genera la grafica de
sys([2:100],1)=0;% genera la grafica de
iin=2;
ifin=100;
iing=2;
ifing=500;
for j=iing:ifing
    for k=iin:ifin
        m(k)=randn;
        %n(k)=0.02*randn;
        x(k+1)=(a*x(k))+m(k);
        y(k)=x(k)+m(k);
        l(k)=y(k)*y(k)+l(k-1);
        E2(k)=y(k)*(y(k-1))+E2(k-1);
        ae(k)=E2(k)/l(k);

        if abs(ae(k))>=1
            ae(k)=0.002;
        end
        D(k)=(D(k-1)*(k-1)+(ae(k)-a)^2)/k;
    end
    sae([iin:ifin],j)=ae([iin:ifin])';
    saes([iin:ifin],j)=sae([iin:ifin],j)+saes([iin:ifin],j-
1);

    sd([iin:ifin],j)=D([iin:ifin])';
    sds([iin:ifin],j)=sd([iin:ifin],j)+sds([iin:ifin],j-1);

```

```

    sy([iin:ifin],j)=y([iin:ifin])';
    sys([iin:ifin],j)=sy([iin:ifin],j)+sys([iin:ifin],j-1);
end

saeid([iin:ifin],1)=saes([iin:ifin],ifing)/ifing;
sdid([iin:ifin],1)=sds([iin:ifin],ifing)/ifing;
syid([iin:ifin],1)=sys([iin:ifin],ifing)/ifing;
am([iin:ifin],1)=a;
    figure
    subplot 611
    plot(x)
    title('x')
    subplot 612
    plot(syid)
    title('y')
    subplot 613
    plot(sae)
    title('ae')
    subplot 614
    plot(saeid)
    title('ae ideal')
    subplot 615
    plot(sdid)
    title('D')
    subplot 616
    hist(syid)
    title('y')
figure %muestra la grafica de a estimada
mesh(sae)
figure %muestra la grafica
plot(saeid,'r-')
figure %muestra la grafica
plot(sdid,'b*')
figure %muestra la grafica
plot(syid,'b-')
figure %muestra histograma
hist(syid)

```

```

%varinstrumental5.m
%variable instrumental con ruidos no correlacionados,
%mostrando el estimador ideal, en tercera dimension
%(22-abril-2004)
%tesis Gabriela Lopez Ruiz
%-----
close all;

clear all;
a=0.37; %parametro a estimar
x(2)=.001; %el estado inicial del sistema
y(1)=.003; %el estado inicial de la salida del sistema
l(1)=.005; %condiciones del filtro
E2(1)=.004; %condiciones de algunos operadores dentro del
filtro
D(1)=.0123; %condiciones iniciales del error
saes([2:100],1)=0;%genera la grafica de
sds([2:100],1)=0;%genera la grafica de
sys([2:100],1)=0;%genera la grafica de
iin=2;
ifin=100;
iing=2;
ifing=500;
for j=iing:ifing
    for k=iin:ifin
        m(k)=randn;
        n(k)=0.02*randn;
        x(k+1)=(a*x(k))+m(k);
        y(k)=x(k)+n(k);
        l(k)=y(k)*y(k)+l(k-1);
        E2(k)=y(k)*(y(k-1))+E2(k-1);
        ae(k)=E2(k)/l(k);
        if abs(ae(k))>=1
            ae(k)=0.002;
        end
        D(k)=(D(k-1)*(k-1)+(ae(k)-a)^2)/k;
    end
    sae([iin:ifin],j)=ae([iin:ifin])';
    saes([iin:ifin],j)=sae([iin:ifin],j)+saes([iin:ifin],j-1);
    sd([iin:ifin],j)=D([iin:ifin])';
    sds([iin:ifin],j)=sd([iin:ifin],j)+sds([iin:ifin],j-1);

    sy([iin:ifin],j)=y([iin:ifin])';
    sys([iin:ifin],j)=sy([iin:ifin],j)+sys([iin:ifin],j-1);

```

```

end
saeid([iin:ifin],1)=saes([iin:ifin],ifing)/ifing;
sdid([iin:ifin],1)=sds([iin:ifin],ifing)/ifing;
syid([iin:ifin],1)=sys([iin:ifin],ifing)/ifing;
am([iin:ifin],1)=a;
    figure
    subplot 611
    plot(x)
    title('x')
    subplot 612
    plot(syid)
    title('y')
    subplot 613
    plot(sae)
    title('ae')
    subplot 614
    plot(saeid)
    title('ae ideal')
    subplot 615
    plot(sdid)
    title('D')
    subplot 616
    hist(syid)
    title('y')
figure %muestra grafica
mesh(sae)
figure %muestra grafica
plot(saeid,'r-')
figure %muestra grafica
plot(sdid,'b*')
figure %muestra grafica
plot(syid,'b-')
figure %muestra grafica
hist(syid)

```

APÉNDICE C. VARIABLES ALEATORIAS Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Variable aleatoria

Se llama variable *aleatoria* a toda variable que, como resultado de un experimento, no toma más que un valor cualquiera, y como resultado de varios experimentos, puede tomar valores diferentes [43].

Una *variable aleatoria* x es una función de valores reales $x: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ con la siguiente propiedad [11]:

$$\{\omega: x(\omega) < a\} \in B. \quad \text{con } a \in \mathfrak{R}$$

Donde: $\omega \in \Omega$, donde Ω Es el espacio básico de muestreo.
 ω Es un evento elemental.
 B Es un conjunto de Borel.

La variable aleatoria se llama discreta, si sólo puede tomar un número finito de valores o a lo sumo, un número infinito numerable de valores [43].

Función de distribución

La *función de distribución* es la probabilidad de que una variable aleatoria X tome valores menores que un número real arbitrario a [46]

$$F(x) = P\{x < a\} .$$

Momentos de probabilidad

Sea X una variable discreta aleatoria que toma los valores x_1, x_2, \dots, x_n con sus correspondientes probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n . La *media ponderada* o *esperanza* de X se define por [46]:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

El segundo momento central $\sigma^2 = E[(X - E(X))^2]$ se llama *varianza* de X , y su raíz cuadrada positiva es la *desviación estándar*. Este momento está relacionado con la dispersión de los datos respecto a la media.

$$E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

El tercer momento central $E[(X - E(X))^3]$ se llama *sesgo* de X . Este momento está relacionado con la asimetría de los datos respecto a la distribución ideal.

$$E(X - E(X))^3 = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2E^3(X)$$

El cuarto momento central $E[(X - E(X))^4]$ se llama *curtosis* de X . Este momento está relacionado con la cercanía de la información respecto a la media ponderada.

$$E(X - E(X))^4 = E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)E^2(X) - 3E^4(X)$$

Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Si $k > 0$, el número $E(X^k)$ es llamado el k -ésimo momento de X . $E[X - E^k(X)]$ es llamado el k -ésimo momento central; Los momentos centrales se definen cuando $E(X)$ es finito [1].

El primer momento ($k=1$) es $E(X)$, la *media ponderada*, y el primer momento central (si este existe) es siempre cero.

Tipos de convergencia

Se dice que un proceso estocástico $\{x_n\}$ converge en probabilidad a x , y se escribe $x_n \xrightarrow{prob.} x$ si para cualquier $\epsilon, \delta > 0$ existe $n_0(\epsilon, \delta)$ tal que $\forall n > n_0 : P(|x_n - x| > \epsilon) < \delta$.

Considerando que se tiene un proceso estocástico $\{x_n\}$, éste converge en distribución a una variable aleatoria x con función de distribución F si la secuencia $\{F_n\}$ converge a F . Lo cual se escribe $x_n \xrightarrow{ley} x$.

$\{x_n\}$ converge casi seguramente (con probabilidad 1) a una variable aleatoria x , y se escribe $x_n \xrightarrow{c.c.s} x$ si para cualquier $\epsilon, \delta > 0$ existe $n_0(\epsilon, \delta)$ tal que $\forall n > n_0 : P(|x_n - x| > \epsilon) > 1 - \delta$.

$\{x_n\}$ converge en media cuadrática a una variable aleatoria, y se escribe $x_n \xrightarrow{m.c} x$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} E[(x_n - x)^T (x_n - x)] = 0$.

Modelos determinísticos y procesos estocásticos.

Un *modelo determinístico* es aquel que contiene elementos activos o pasivos donde es posible conocer el curso futuro del sistema como su posición, velocidad, etc.; En algún punto en el tiempo t [1].

Los *procesos estocásticos* son modelos matemáticos de fenómenos *aleatorios* que involucran medidas en más que un número finito de puntos. Ejemplo de ello es el ruido en los equipos electrónicos, las fluctuaciones de ciertas cantidades en los sistemas de control, arribo de tareas en Tiempo Real, etc. Ninguno de estos sistemas pueden ser representados realmente por un modelo matemático determinístico.

Formalmente, un *proceso estocástico* X se define como una colección de *variables aleatorias* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ que obedecen a una ley de distribución $F(X)$, tal que $\{x_n : n \in N\}$ ordenados por un conjunto de parámetros n [39],[28].

Herramientas para el manejo de procesos estocásticos.

Una vez definido el concepto de procesos estocásticos, es necesario mencionar algunas herramientas para su estudio que serán de gran utilidad para el desarrollo de este trabajo.

Teorema del límite central.

Sin tener en cuenta la forma funcional de la población de donde se extrae la muestra, la distribución de las medias muestrales, calculadas con muestras de tamaño n , extraídas de

una población con media $E(X)$ y varianza finita σ^2 , se aproxima a una distribución normal con media m y varianza σ^2/n , cuando n aumenta. Si n es grande, la distribución de medias muestrales puede aproximarse mucho a una distribución normal [69].

El Teorema del límite central dice: sea x_1, x_2, \dots, x_n una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución de media $E(X)$ y varianza σ^2

$$Z_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma},$$

Entonces para un intervalo $\{a \leq x \leq b\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq Z_n \leq b) = P(a \leq \phi \leq b)$ tal que ϕ es la distribución normal estándar y Z_n es una variable aleatoria función de x_i llamada media muestral estandarizada [46].

APÉNDICE D. SISTEMAS LINEALES

Un sistema lineal tiene la propiedad de superposición, esto es si una entrada consiste de una suma de varias señales entonces la salida, es la suma de las respuestas del sistema a cada una de las señales de entrada.

Definición: Una ecuación diferencial se dice ser lineal si tiene la forma $a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)y = g(t)$, donde $a_i(t), i = \overline{0, n}, n \in Z^+$ y $g(t)$ son funciones dadas de t , $a_0(t)$ no es idéntica a 0. Las $a_i(t)$ son definidas como los coeficientes de la ecuación diferencial. La ecuación diferencial lineal se dice ser homogénea si $g(t) = 0$, en caso contrario es no homogénea.

Teorema: Suponga que los coeficientes $a_i(t), i = \overline{0, n}, n \in Z^+$ y la función $g(t)$ son continuos sobre el intervalo $0 > t > T$, entonces para algunos valores de $b_i, i = \overline{0, n}, n \in Z^+$ existe solución única para la ecuación diferencial lineal

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)y = g(t), \text{ que satisface las condiciones iniciales}$$
$$y(0) = b_0, \frac{dy(0)}{dt} = b_1, \frac{d^2y(0)}{dt^2} = b_2, \dots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = b_{n-1}.$$

Las condiciones iniciales en la ecuación diferencial determinan el comportamiento futuro de la solución. Considere la ecuación de orden 1 con coeficientes constantes

$\frac{dy}{dt} = ay + b$, una solución es $y(t) = -\frac{b}{a}$, y es una solución particular. Las otras soluciones pueden ser escritas como la solución particular más la solución correspondiente a la ecuación homogénea $\frac{dz}{dt} = az$, que tiene soluciones de la forma

$z(t) = Ce^{at}$, donde C es una constante arbitraria. La solución general de la ecuación no homogénea es $y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$.

Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

Si los elementos de la matriz de A son funciones continuas de t , el sistema posee una solución única correspondiente a cada uno de los vectores de estado inicial. Si el conjunto de soluciones evaluadas en el tiempo $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$, son linealmente independientes, las soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones. Si se ordenan estas soluciones como un conjunto de columnas, el resultado es una matriz $X(t)_{n \times n}$.

APÉNDICE E. OBSERVABILIDAD

Un sistema puede ser observable si a partir de las salidas y entradas del sistema es posible obtener las variables de estado (por el proceso de filtrado de reconstrucción).

Sea el sistema $\dot{x}(t) = f(x) + \sum u_i g_i(x)$ con función de salida $y(t) = h(x)$ y estados x_0 y x_1 son distinguibles si existe una función de entrada $u(\cdot)$ tal que $y(\cdot, x_0, u) \neq y(\cdot, x_1, u)$, con la condición inicial $x_0 = x(0)$.

El sistema se dice ser observable localmente en $x_0 \in X$ si existe una vecindad L respecto a x_0 tal que para toda $x_i \in N, i \in Z^+$ distinta de x_0 son distinguibles respecto de x_0 .

Por ejemplo, el sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t)$ con $u = 0$, es observable sí y sólo sí la matriz de $S = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T$, tiene rango pleno.

Considérese el sistema $\dot{x}(t) = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$, $y(t) = h(x)$, y suponiendo que $x_0 \in X$ es conocido. Se considera la forma $(\partial L_{z_s} \partial L_{z_{s-1}} \dots \partial L_{z_1} h_j)(x_0), s \geq 0, z_i \in \{f, g_1, \dots, g_n\}$, evaluada en x_0 . Si hay n vectores renglones linealmente independientes en este conjunto, entonces el sistema es localmente observable alrededor de x_0 .

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ash. R., “Real analysis and Probability”, University of Illinois, Academia Press, 1972.
- [2] Bailey, B., Witty, C., and Wright, A., “Dynamic object capture using fast vision tracking”, *Artificial Intelligence Magazine*, vol.18:1, pp. 65–72, 1997.
- [3] Balakrishnan, A. V., “Kalman Filtering Theory”, University Series in Modern Engineering, 1984.
- [4] Caines P. , “Linear Stochastic Systems”, Ed. Wiley, Canada, 1986
- [5] Cruz D., “Modelo Dinámico para tareas en Tiempo Real”, Tesis de Maestría en Ciencias de la Computación, CIC-IPN, México, 2004.
- [6] Chapman. H., Davis, M. H. A., “Linear Estimation and Stochastic Control”, A Halsted Press Book, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [7] Chui C. & Chen G., “Kalman Filtering with Real-Time Applications”, Ed. Springer, U.S.A., 1999.
- [8] Chui C. and Chen G., “Kalman Filtering with Real-time Applications”, Ed. Springer, 1999.
- [9] Chui C.K. & Chen G., Kalman Filtering, With Real-Time Applications, Edit. Springer, Third edition.
- [10] Dante Montiel Cornejo, Medel J. J., José Amadeo Argüelles, Pedro Guevara L., “Filtro FIR de Primer Orden implementado en un FPGA X4010-3C”, ISBN 970-18-4810-1, 2000.
- [11] Davis M. H. A., “Linear estimation and stochastic control”, University of London, Chapman and may, 1977.
- [12] Escobar Díaz Andrés, Peña Rodrigo, “Diseño, Arquitectura, Aplicación de un Filtro Digital IIR Supresor de banda”, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Cundinamarca, Colombia, 2001.
- [13] Gabel, R., Roberts, R., “Señales y sistemas lineales”, LIMUSA.
- [14] Gamboa Zúñiga Mariano, Reynel Iglesias Heberto, Salazar Pérez Moisés, García Margarita, “Introducción a la Física Electrónica”, Instituto Politécnico Nacional , pp.282-293 , 1989.
- [15] Grewal M. And Andrew A., “Kalman Filtering, theory and practice”, Prentice may information and system sciences series, 1993.
- [16] Grover Brown Robert, Patrick Y. C. Hwang, “Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, With MATLAB® excercises and solutions”, Edit. Wiley, third edition, 1998.
- [17] Guevara López Pedro, Medel J.J., López Chau Asdrúbal, “Estimación de parámetros en Tiempo Real”, CIC PRODIS, 2001.
- [18] Guevara López Pedro, Medel Juárez José de Jesús, Flores Rueda Alberto, “Modelo ARMA para caracterizar tareas en Tiempo Real”, CIC-INDI 2002.
- [19] Gustafsson F., “Adaptive filtering and change detection”, Ed. John Wiley & Sons, Linkoping University Sweden, 2000.
- [20] Haykin Simon, “Adaptive Filter Theory”, Prentice Hall, 2^a. Edition, pp. 478-

- 481, 1991.
- [21] Haykin Simon, "Adaptive Filter Theory", Prentice Hall, 2^a Edition, pp.89-93, 1991.
 - [22] Held Gilbert , "Diccionario de Tecnología de las comunicaciones", Edit. Paraninfo, 1997.
 - [23] Herrera, Comunicaciones I Señales, Modulación y Transmisión, Edit. Limusa
 - [24] Isermann, R., "Digital control systems", Edit. Springer-Verlag, 1991.
 - [25] Jazwinski, A.H., "Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press", A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1970.
 - [26] Kailath T. , "Linear Systems", Prentice may, U.S.A., 1980.
 - [27] Kalman, R. E., "A new approach to linear filtering and prediction problems", Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, pp. 34-45, 1960.
 - [28] Kannan D. , "An introduction to stochastic processes", University of Georgia, 1979.
 - [29] Katsuhiko Ogata, "Sistemas de Control en Tiempo Discreto", Edit. Prentice Hall, 2^a Edición, 1997.
 - [30] Kuo, Benjamín C. "Sistemas Automáticos de Control", C. E. C. S. A., 2^a Edición, 1982.
 - [31] Leon W. Couch II, "Sistemas de Comunicación Digital y Analógicos", 5^a Edición, Editorial Prentice, México, 1998.
 - [32] Medel and Poznyak, A. S., "Adaptive tracking for DC-Induction motor based on matrix forgetting control engineering practice", 1998.
 - [33] Medel J. J., "Análisis de dos métodos de estimación para sistemas lineales estacionarios e invariantes en el tiempo con perturbaciones correlacionadas con el estado observable del tipo: Una entrada una salida", Computación y Sistemas Volumen 6, Num. 1, México, 2002.
 - [34] Medel J. J. , Guevara López Pedro, "Análisis Restrictivo para Filtros Digitales en Tiempo Real Presentando para un SLIT tipo SISO", ISBN 970-18-9208-9, 2002.
 - [35] Medel J. J. , Guevara P., "Constraints for real-time digital filters", Automatic Control and Computer Sciences AVT No. 5, ISSN 0132-4160, 2003.
 - [36] Medel J. J., "Identificación de modelos tipo ARMA no estacionarios, basándose en la matriz del factor olvido", Centro de Investigación y de estudios avanzados del IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Control Automático, 1998.
 - [37] Medel J. J., "Comparación entre dos diferentes métodos de identificación para sistemas con perturbaciones correlacionadas con la señal observable", Congreso de Ingeniería Eléctrica, CIIE-99, 1999.
 - [38] Medel J. J., "Comparación entre dos diferentes métodos de identificación para sistemas con perturbaciones correlacionadas con la señal observable", Congreso Internacional de Ingeniería Eléctrica, CIIE-99, 1999.
 - [39] Medel J. J., "Identification of non stationary ARMA Models Based on Matrix Forgetting", Ph. D. Thesis CINVESTAV-IPN, 1998.
 - [40] Medel J. J., A. S. Poznyak, Guevara López Pedro, "Real-time Multivariable Digital Filter using Matrix Forgetting Factor and Instrumental Variable",

- 2004.
- [41] Medel J. J., Guevara López Pedro and Flores Rueda Alberto, “Constraints for real-time digital filters”, Automatic Control and Computer Sciences AVT No. 5 pages 63-69, ISSN 0132-4160, September 2003 Latvia, 2003.
 - [42] Medel J. J., Guevara López Pedro, “Análisis Restrictivo para Filtros Digitales en Tiempo Real presentando un ejemplo para un SLIT tipo SISO”, IBERAMIA 2002.
 - [43] Medel J. J., Guevara López Pedro, “Comparación de la dinámica en Tiempo Real de los Métodos Mínimos Cuadrados y Variable Instrumental para Estimación de Parámetros”, CACIC 2002.
 - [44] Medel J. J., Guevara López Pedro, Flores Rueda Alberto, “Caracterización de Filtros Digitales en Tiempo Real para Computadoras Digitales”, Revista Iberoamericana de Computación ISSN 1405-5546, 2004.
 - [45] Medel J. J., Guevara López Pedro, Flores Rueda Alberto, “Constraints for Real-time Digital Filtres”, ISSN 0.132-4160, 2003.
 - [46] Medel J. J., Guevara López Pedro, Ríos Suriano Francisco, “Estimación de Parámetros usando los conceptos de filtros de Kalman”, Vol. I, ISBN 970-18-8590-2, CIC 2002.
 - [47] Medel J. J., Guevara P., Flores A., “RTMDF: Real-Time Multivariable Digital Filter”, International IEEE Workshop Signal Processing, Poznan Polonia, 2003.
 - [48] Medel J. J., Guevara Pedro y Cruz Daniel., “Modelo dinámico para una tarea en tiempo real”, (proceso de revisión en la revista Computación y Sistemas), 2003.
 - [49] Medel J. J., Guevara-López P., Flores-Rueda A., “Filtro Digital Multivariante en Tiempo Real (Conceptos Básicos)”, CIIE 2003.
 - [50] Medel J. J., Pedro Guevara López, “Implementación de un Filtro Digital en Tiempo Real sobre plataforma QNX RTP 6.0”, CIIE 2002.
 - [51] Melsa, J. L., and Sage, A. P., “System identification, Academic Press”, New York and London, Vol. 80, 1971.
 - [52] Mohinder S. Grewa, I., Angus P. Andrews, “Kalman Filtering, Theory and Practice Using MATLAB®”, Edit. Prentice Hall, Second edition.
 - [53] Ogata, “System identification and control”, McGraw Hill, 1992.
 - [54] Ogata, Katsuhiko, "Sistemas de Control en tiempo discreto", 1997.
 - [55] Perez, F., and Kock, C., “Toward color image segmentation in analog VLSI: Algorithm and hardware”, International Journal of Computer Vision, vol. 12, pp.17–42, 1994.
 - [56] Phillip John McKerrow, “Introduction to Robotics”, Addison Wesley Publishing Company.
 - [57] Poznyak, A.S., “Estimating the parameters of autoregression processes by the method of least squares”, International Journal Systems Science, 1980.
 - [58] Proakis J. and Manolakis D., “Digital Signal Processing, Principles, algorithms and applications”, Prentice Hall, 1996.
 - [59] Pugachev V., “Introducción a la teoría de las probabilidades”, Mir Moscú, 1973.

- [60] Rao .W. H, “Digital Filters”, Ed. Dover, Third edition, 1970.
- [61] Ríos Suriano Francisco J., “Estabilización dinámica de Sistemas Triangulares, Programación Simbólica y Simulación Numérica”, Tesis de Maestría en Ciencias de la Computación, CIC-IPN, México, 2000.
- [62] Ríos Suriano Francisco J., “Estabilización dinámica de Sistemas Triangulares, Programación Simbólica y Simulación Numérica”, Tesis de Maestría en Ciencias de la Computación, CIC-IPN, México, 2000.
- [63] Rorabaugh, C.B., “Digital Filter Designer's Handbook” , McGraw-Hill,
- [64] Rozanov, Y. A., “Innovation Processes, A. Halsted Press Book”, John Wiley & Sons, Washington, D.C., 1977.
- [65] Rudín W., “Análisis Real y Complejo”, McGraw Hill, Universidad de Wisconsin, 1988.
- [66] Thuillier P., “En las fuentes de la Ciencia: Del arte a la Ciencia: El descubrimiento de la trayectoria parabólica. Mundo Científico”, V-7, nº 74, Noviembre 1987.
- [67] Young, P. C., “Recursive Estimation Time-series Analysis: an introduction”, Springer – verlag, Berlin, New York, 1984.
- [68] Young, P. C., “The theory and practice of systems modelling and identification”, 1984.
- [69] Yu. M. Korshunov, “Fundamentos Matemáticos de la Cibernética”, Ed. Mir Moscú, 1973.
- [70] Guevara López Pedro, “Filtrado Digital en Tiempo Real: Análisis Computacional para Estimación de Parámetros en Sistemas Estocásticos Lineales Estacionarios”, junio 2004.

GLOSARIO

Algoritmo: Nombre de cualquier procedimiento sistemático de cálculo con el que se halla el resultado deseado.

Correlación: Mide la relación que existe entre dos variables aleatorias, es decir, cómo afecta a una de las variables un cambio en la otra. La correlación es tanto mayor cuanto más estrecha es la relación entre las dos variables. Se habla de correlación positiva cuando al cambiar una de las variables en un sentido, y es negativa cuando las variables cambian en sentido opuestos, frecuentemente se utiliza el llamado coeficiente de correlación que se define como $\rho := \frac{Cov(A,B)}{\sqrt{Var(A)Var(B)}}$, se cumple $-1 \leq \rho \leq 1$.

Diferencias finitas: Aproximación de la derivada. Tangente a una curva, aproximada mediante valores de x muy pequeños donde la diferencia entre x_0 y x_1 (incremento Δx) no tiende a cero, sino a un valor significativo.

Eigenvalor: Es el valor propio de un sistema, tal que $\|\lambda_i I - A\| = 0$, donde $\{\lambda_i\}$ se le llama conjunto de valores propios del sistema $x_i = Ax_{i-1} + u_i$.

Estimación: Es el área que se encarga de describir la dinámica de los parámetros del sistema a través de sus señales observables.

Filtrado: Es la operación de extracción de información de interés del sistema en el intervalo k , a través de los datos adquiridos en el intervalo k por parte del receptor.

Filtro: El término filtro se usa para describir un dispositivo que en forma de hardware o software se aplica para: a) Eliminar el ruido de los datos de un sistema, b) Extraer información de acuerdo a alguna característica del sistema, c) Predecir el comportamiento del sistema a analizar y d) Reconstruir el comportamiento del sistema a analizar.

Funcional: Es una función cuyo argumento es otra función. Por ejemplo el funcional del error de un sistema de filtrado es

$$J_n = E\{\Delta_k \Delta_s^T\} = \begin{cases} \sigma_{\Delta_n}^2 = 0, & s \neq k \\ \sigma_{\Delta_n}^2 \neq 0, & s = k \end{cases}$$

donde

$$\Delta_k := \left| \hat{A}_k - A \right|,$$

matrices que respectivamente representan tanto la matriz estimada como la matriz de ganancias del sistema $x_i = Ax_{i-1} + u_i$. Entonces J_n es un funcional ya que es descrito como una función de $f(A, \hat{A}_k)$ a la cual se le aplica la esperanza matemática.

Identificación: Es el área que se encarga de describir la dinámica de los estados del sistema a través de sus señales observables.

Instancia: Es una unidad de trabajo $j(k)$ de una tarea J_i , que queda definida con $j(k) = f(l(k), c(k), d(k))$ para $i, k \in Z^+$ donde $l(k)$ es el tiempo de arribo de cada instancia, $c(k)$ es el tiempo de ejecución de cada instancia y $d(k)$ es el plazo de cada instancia; todo eso dentro de un intervalo de evolución con índice k .

Medida: Se llama *medida* a una función μ , definida en una σ -álgebra \mathfrak{S} con valores reales en $[0, \infty]$ y que es *numerablemente aditiva*.

Momento de probabilidad: Es la característica numérica de una magnitud aleatoria, el cual se divide en iniciales y centrales. El momento central de orden S de la magnitud aleatoria ω es determinado por las ecuaciones:

$$E_s(\omega) = \sum_z \omega^s p(\omega).$$

Para magnitudes aleatorias discretas.

Perturbación: Es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema.

Proceso Estocástico: Es una familia de variables aleatorias indexadas $\{x(\omega_i)\}$ donde el conjunto $\{\omega_i\}$ pertenece al un conjunto universo Ω i.e.: $\{x(\omega_i), \omega_i \in \Omega\}$

Reconstrucción: Es la operación de extracción de información de interés del sistema en un intervalo $(k-n)$ para todo $n \in \mathfrak{R}^+$; considerando la información recibida hasta el intervalo k .

Ruido Blanco o gaussiano: Conjunto de variables aleatorias que con respecto a una distribución normal se tiene que $N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 0$ y $\sigma^2 < \infty$, $N(\mu, \sigma^2)$.

Sistema en Tiempo Real (STR): Es aquel sistema digital que obedece tres condiciones: a) Interacción con el mundo físico, b) Emisión de una respuesta correcta de acuerdo a algún criterio preestablecido, c) Cumplimiento de las restricciones de tiempo del proceso físico con que interactúa.

Sistema Lineal (SL): Es aquel sistema que tiene una relación de entrada/salida y cumple las condiciones de causalidad y homogeneidad.

Tarea en Tiempo Real (TTR): Es una entidad ejecutable de trabajo J_i que al menos es caracterizada por un tiempo de arribo y una restricción temporal. Está formada por un conjunto de instancias $j(k)$, tal que $J_i = \{j(k)\}$ $i, k \in Z^+$.

Tarea en Tiempo Real Periódica (TTRP): Es aquella tarea donde todas sus instancias tienen tiempos de arribo relativo próximos a un período T y los tiempos de arribo absolutos crecen en forma monotonía respecto a la aparición de las instancias.

Tareas Concurrentes (TC): Son un conjunto de tareas que se ejecutan en un plazo máximo y en forma no secuencial en una computadora tomando recursos en instantes diferentes. No pueden existir tareas concurrentes sin un planificador predefinido.

Tiempo de ejecución: Es el tiempo que el procesador se encarga de ejecutar una instancia de una tarea.

Variable: Es un símbolo, tal como $X, Y, H, x \circ B$, que puede tomar un conjunto de valores en forma determinística o no determinística. Si la variable puede tomar un solo valor, se llama constante. Una variable que puede tomar cualquier valor entre dos valores dados, se dice que es una variable continua; en caso contrario se dice que la variable es discreta.

Variable aleatoria: Se llama variable aleatoria a toda variable que, como resultado de un experimento, no toma más que un valor cualquiera, y como resultado de varios experimentos, puede tomar valores diferentes.