



Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Una introducción a la difusión anómala

Tesis que para obtener el Título de
Licenciada en Física y Matemáticas

PRESENTA:

Edith Jurado Galicia

Asesor de Tesis:

Dr. Pablo Lam Estrada

A

mis padres *Agustina Galicia Aguilar* y *Odilón Jurado Gutiérrez*[†],

mis hermanos *Rocío* y *Marco Antonio*,

que me han dado los fundamentos y el cariño para mi desarrollo personal.

Agradecimientos

Con infinita gratitud a:

Pedro Miramontes por su valioso apoyo y orientación en la realización de esta tesis.

Los sinodales:

Manuel Robles Bernal

Pablo Lam Estrada

Salvador Quintín Flores García

Myriam Rosalía Maldonado Ramírez

María Elizabeth de la Cruz Santiago

por su apoyo en la conclusión de este trabajo.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Introducción	1
1. Difusión	5
1.1. Antecedentes históricos	6
1.2. Teoría microscópica. Caminatas aleatorias y desplazamiento	8
1.3. Teoría macroscópica, leyes de Fick	12
2. Movimiento browniano	17
2.1. Antecedentes históricos	18
2.2. Proceso estocástico	20
2.3. Movimiento browniano (Descripción matemática)	22
2.4. El movimiento browniano y Einstein	26
2.5. Ecuación de difusión	31
3. Leyes de potencias	33
3.1. La ley de Zipf	34
3.2. Bach y las leyes de potencias	35
3.3. Existen ruidos de colores	36
3.4. La Ley de la Gravitación Universal	44
3.5. El oscilador armónico	45
3.6. Entropía	45

4. Difusión anómala	47
4.1. La densidad espectral y su relación con las leyes de potencias	47
4.2. Exponente de Hurst	49
4.3. Procesos de Lévy de caminatas aleatorias y memoria larga	53
4.4. Difusión anómala	57
Conclusiones	60
Bibliografía	61
Índice	63

Introducción

Este trabajo de tesis es una investigación sobre el recuento de los hechos y teorías que llevaron a desarrollar la Teoría de la Difusión hasta llegar a lo que se conoce hoy en día como la Teoría de la Difusión Anómala.

En principio, la Teoría de la Difusión se desarrolló para tratar de resolver problemas de la conducción de calor, pero luego fue dirigido hacia el Movimiento Browniano que, en aquel momento, no se imaginaban si ciertos fenómenos de la naturaleza tan dispar tuvieran algo en común, o alguna relación con los fractales y los llamados vuelos de Lévy.

Joseph Fourier (1768-1830) publicó la “Théorie Analytique de la Chaleur” en 1822 y estableció la ecuación diferencial parcial que gobierna la *difusión* del calor usando series infinitas de funciones trigonométricas. Introdujo la representación de una función como una serie de senos y cosenos, ahora conocidas como las series de Fourier. A lo largo de su vida, Fourier siguió su interés en las matemáticas y en la física matemática. Aunque estas series habían sido usadas antes, Fourier las investigó de una manera más detallada. Su investigación, inicialmente criticada por su falta de rigor, fue más tarde mostrada para ratificar su valor. Proveyó el ímpetu para trabajar más tarde en series trigonométricas y la teoría de funciones de variables reales; además de motivar el desarrollo de la Teoría de Difusión.

El Movimiento Browniano fue descrito por primera vez por el botánico inglés Robert Brown en 1827. Si trazamos líneas rectas entre dos posiciones distintas en el tiempo de la partícula browniana, se observa que realiza un movimiento desordenado e irregular. Se mueve siguiendo una trayectoria en forma de zig-zag. Por ejemplo, en un cine, en el haz de luz que envía el proyector hacia la pantalla, se puede ver que las partículas de polvo que flotan en el aire

realizan también un movimiento en zig-zag. En la siguiente figura, la línea negra muestra la forma en que se mueve una partícula a determinado tiempo; mientras que la clara muestra a la misma partícula pero tomando tiempos de más cortos.

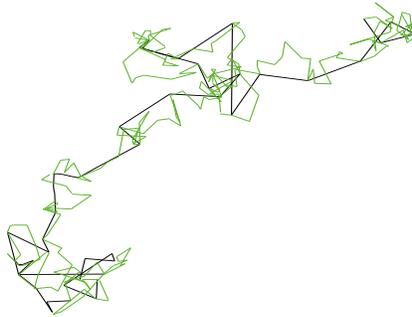


Figura 1: Movimiento browniano

La trayectoria es irregular y azarosa, y la trayectoria es tal que mantiene una estructura similar al cambiar la escala de tiempos de la observación.

En 1905, casi un siglo después, Albert Einstein construyó un modelo matemático para explicar ese fenómeno, y lo llamó “movimiento Browniano” en honor a su descubridor.

Las hipótesis básicas de ese modelo de Einstein eran que el desplazamiento de la partícula entre dos instantes es independiente de las posiciones anteriores que haya tenido, y que la ley de probabilidad que rige el movimiento de la partícula sólo depende de distancia temporal. Con estas hipótesis, Einstein llegó a demostrar que la función de distribución f de la posición de la partícula tenía que verificar la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

donde x es la variable espacial, t la variable temporal y D es una constante adecuada. Esta ecuación, ya era conocida como la *ecuación de difusión*.

En 1906, el físico francés *Jean Perrin* se había dado cuenta de este tipo de comportamiento. En particular, había hecho notar que si uno toma un punto de la trayectoria que sigue una partícula browniana entonces, en rigor, no se puede trazar una línea tangente a ella, y apuntó entonces: “*usando lenguaje geométrico, las curvas que no tienen tangente constituyen la regla, y curvas regulares, tales como el círculo, son interesantes pero especiales*”.

Nadie hizo caso a los comentarios de Perrin, y este asunto quedó en el olvido hasta finales del periodo 1960-1970, cuando Mandelbrot lo retomó, y después él mismo se dedicó a estudiar el mercado de valores usando las teorías de la difusión anómala.

Este trabajo de tesis está constituido de cuatro capítulos. En el Capítulo 1, trataremos la Teoría de la Difusión en el cual daremos su marco histórico y la relación que existe con las caminatas aleatorias; estas últimas permiten establecer las ecuaciones de Fick. Luego, en el Capítulo 2, abordaremos el Movimiento Browniano en el cual daremos su descripción matemática y la manera como Einstein concibió esta teoría; además de establecer la Ecuación de Difusión. Las leyes de potencias son tratados en el Capítulo 3, en el cual daremos varios ejemplos en el que se manifiestan, como por ejemplo en la música, el ruido de colores, la gravitación universal, etc. Finalmente, en el Capítulo 4 se trata la Teoría de la Difusión Anómala en el que la densidad espectral, las leyes de potencias y el exponente de Hurst son herramienta fundamental para su entendimiento; así como las caminatas de Lévy, caminatas aleatorias y memoria larga.

Capítulo 1

Difusión

En general, el fenómeno que nos ayuda a entender la Difusión es el *Transporte*. La palabra “transporte” viene del latín “trans” que significa a través de, y “portare” que significa llevar.

En Física, Química e Ingeniería, el fenómeno de “transporte” comprende la variedad de mecanismos por los cuales las partículas u otras cantidades se mueven de un lugar a otro. Tres ejemplos comunes de transporte son: la difusión, la convección y la radiación.

Por sus características existen tres tipos principales de transporte: transferencia de calor, transferencia de masa y dinámica de fluidos (o transferencia de momento).

Un aspecto importante en el estudio del fenómeno de transporte es la analogía entre los fenómenos; por ejemplo, masa, energía y momento todos pueden ser transportados por difusión.

En este momento es importante aclarar el término de difusión. En general, *difusión* es la propagación espontánea de la materia, calor o momento. Se entiende también por difusión al movimiento de partículas desde una concentración alta hacia una concentración baja.

Las diferentes formas de difusión pueden ser medidas cuantitativamente usando las ecuaciones de difusión, las cuales llevan diferentes nombres de acuerdo

con la situación que se presenta en física. Por ejemplo, la difusión del estado estable bimolecular es gobernado por la Primera Ley de Fick, la difusión del estado estable térmico por la Ley de Fourier y la difusión de los electrones en un campo eléctrico es conducido esencialmente por la Ley de Ohm. Es de notar que la ecuación de difusión depende del tiempo, es decir, también se aplica a los estados no estables.

La difusión ocurre como resultado de la Segunda Ley de la Termodinámica, la cual establece que la *entropía* o desorden de cualquier sistema cerrado siempre debe incrementarse con el tiempo, porque las sustancias se difunden desde una región de alta concentración hacia regiones de baja concentración, es decir, ellos van de un estado de alto orden a un estado de bajo orden, esto en concordancia con la Segunda Ley de la Termodinámica. Así pues, la difusión es un proceso natural y espontáneo. Respecto a la importancia que cobra la Segunda Ley de la Termodinámica hablaremos extensamente en el siguiente capítulo para analizar el movimiento browniano.

1.1. Antecedentes históricos

A principios del siglo XIX, aquellos que se dedicaban a la investigación de los fenómenos químicos pretendían dar una explicación al comportamiento de los gases a través de sus experimentos. Además, se sentía la preocupación por entender los procesos de transporte en las células de las plantas y los animales, lo cual fue decisivo en las investigaciones para entender y descubrir el fenómeno de la ósmosis. Las dos corrientes, tanto la del estudio de los gases y las soluciones, como la del estudio de la célula y sus intercambios, se entrecruzan y se influyen mutuamente y, a su vez, ambas motivan la comprensión del estudio del átomo.

Los primeros estudios sobre la difusión fueron realizados por Thomas Graham, químico británico de origen escocés, quien mediante experimentos efectuados entre los años de 1828 y 1833, descubrió que la velocidad de difusión de un gas a través de un tabique poroso es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su densidad. Este hecho fue tan impresionante para su época, que le valió su elección para ingresar a la Royal Society a la edad de treinta años. Así, estuvo muy cerca de emitir la ley que ahora se conoce como Ley

de Fick, la cual implica una relación lineal entre el flujo de difusión y la diferencia de concentraciones que produce dicho flujo.

Adolf Eugen Fick (1829-1901) fue un fisiólogo alemán e inventor, quien realizó estudios de la difusión en Zurich en 1855 cuando tenía 26 años de edad. Él planteó los experimentos de Graham sobre bases cuantitativas y descubrió la Ley de la Difusión. Fick sugirió en su publicación una comparación de la difusión de un material disuelto con la Ley de Ohm ($I = V/R$) para conductores eléctricos, y también con la Ley de la Transferencia de Calor en conductores sometidos a una diferencia de temperatura. Esta confrontación daba la clave para la formalización matemática de la Ley de Difusión.

Pero la presentación de este trabajo produjo a Fick grandes incertidumbres, y escribió entonces una obra con el fin de reforzar sus ideas de la difusión. Este nuevo trabajo combinaba argumentos de la Teoría Cinética de los gases, con la que reconocía a la difusión como un proceso de dinámica molecular. Pero los casos por él tratados eran procesos biológicos, así que se consideró dicho trabajo por la fisiología y las ciencias médicas como el primer texto de biofísica. Esto ocurrió en el año de 1856.

Hasta ese momento, Fick sólo sugería una ley, haciendo notar que la presencia de un flujo de difusión es debido a una diferencia de concentraciones, de tal manera que son directamente proporcionales y, la constante de proporcionalidad, es precisamente una cantidad que depende de la naturaleza de las sustancias empleadas. Esta constante es similar a la resistencia eléctrica, que relaciona la diferencia de potencial entre dos puntos y el flujo de corriente presente entre ellos. Sin embargo, fue la analogía con la Ley de Difusión del Calor como Fick trató de demostrar que efectivamente la difusión molecular seguía el mismo patrón matemático. Fick encontró en esta formulación la clave para expresar la Ley del Flujo de Difusión, que se ajustaba a una descripción muy exacta de algunos de los experimentos de la difusión. Después de todo, su triunfo no fue completo, porque surgió una dificultad relacionada con los datos obtenidos por Graham, los cuales seguían un comportamiento no lineal, y mostraban que la analogía de la difusión con la conductividad térmica no era muy exacta. Para aclarar este punto, Fick se puso a trabajar de nuevo en el laboratorio repitiendo los experimentos de Graham e ideando un nuevo método para demostrar dónde estaba la discrepancia; descubrió que residía en la geometría de los dispositivos experimentales que usó Graham, los cuales introducen efectos de fronteras (efectos de paredes), desvirtuando

la relación lineal válida para un medio homogéneo. Con lo anterior, el camino para la aceptación plena de la Ley de Fick quedaba establecido.

La presentación de los trabajos de Fick causaron conmoción inmediata en la comunidad científica. Sus trabajos fueron realizados con tal discreción que cuando los dio a conocer se encontró de súbito con que el tratamiento cuantitativo de la difusión ya estaba hecho. No obstante, estos progresos, tanto los experimentos de Graham como los conceptos derivados del tratamiento de Fick, no quedaban aclarados del todo debido a que el concepto mismo de flujo de difusión era impreciso y provocaba grandes confusiones cuando se relacionaba con experimentos donde había agitación masiva de un gas o de un líquido. Este asunto fue vivamente discutido en 1860 por toda la comunidad científica interesada, y fue J. C. Maxwell (1831-1879) quien dio la clave de la solución al problema, al señalar que la difusión se debe tanto al movimiento de translación de las moléculas como a la agitación masiva en un movimiento convectivo. Así, Maxwell introdujo el concepto de velocidad relativa, donde el flujo de difusión debe definirse. Volveremos a revisar estos conceptos cuando tratemos la relación entre el flujo de difusión y el flujo osmótico [2].

1.2. Teoría microscópica.

Caminatas aleatorias y desplazamiento

Una caminata aleatoria tanto en física como en matemáticas, es la formalización de la idea intuitiva de llevar una acción tomando pasos sucesivos, cada uno en una dirección indeterminada o aleatoria.

Las caminatas aleatorias también pueden verse como una Cadena de Markov la cual tiene la propiedad de que dado el estado actual, los estados previos son irrelevantes para la predicción de futuros estados.

Consideremos una secuencia de juegos tales que durante la n -ésima jugada la variable aleatoria X_n se observa, y algún jugador recibe en ese momento la cantidad X_n de “la casa”, en donde, por supuesto, si la variable $X_n < 0$ el jugador en realidad tendrá que pagar $-X_n$ a “la casa”. También, suponemos que en el desarrollo de un jugador empezó con un capital inicial, digamos x .

1.2. Teoría microscópica.

Caminatas aleatorias y desplazamiento

9

Sea S_n , con $n > 0$, la variable que denote el capital del jugador después de n jugadas; así pues, $S_0 = x$ y

$$S_n = x + X_1 + \cdots + X_n, \quad n > 1.$$

La colección de X_0, X_1, \dots, X_n es un ejemplo de lo que se llama un **proceso estocástico**.

Asumiremos que las variables X_1, X_2, \dots son independientes e idénticamente distribuidas. Así, bajo esta suposición, a los procesos S_0, S_1, \dots se le llama **caminata aleatoria** [1].

A partir de la definición de lo que es una caminata aleatoria, podemos construir las leyes de Fick de la siguiente manera:

Primero enumeraremos las reglas que seguirá nuestra caminata aleatoria.

1. Cada partícula se mueve a la derecha (o a la izquierda) una sólo vez cada Δt segundos, moviéndose a una velocidad de $\pm v_x$ una distancia de $\delta \pm v_x \Delta t$, donde tanto δ como t serán constantes.
2. La probabilidad de que las partículas vayan a la derecha (o a la izquierda) es la misma y tendrá el valor de $1/2$.
3. Cada partícula se mueve independientemente de las otras, y las partículas no interactúan unas con otras.

Ahora, consideremos un conjunto de N partículas que cumplen las condiciones anteriores. Llamemos $X_i(n)$ a la posición de la i -ésima partícula después de n pasos, en donde de acuerdo con la primera regla, la posición de la partícula después del n -ésimo paso, difiere de la posición del $(n - 1)$ -ésimo paso por $\pm \delta$. Así, tenemos que

$$X_i(n) = X_i(n - 1) \pm \delta \tag{1.1}$$

Los signos \pm se deben a que la partícula tiene la misma probabilidad de ir hacia la izquierda o hacia la derecha.

El desplazamiento medio de las partículas en el n -ésimo paso se puede hallar sumando sobre el índice de las partículas y dividiendo entre el número de ellas, es decir, tomando el promedio de los desplazamientos totales sobre todas la partículas. O sea,

$$\langle X(n) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(n) \quad (1.2)$$

Por otro lado, podemos poner la expresión anterior en términos de $X_i(n-1)$ como sigue:

$$\langle X(n) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X_i(n-1) \pm \delta] \quad (1.3)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(n-1) + \delta_N \quad (1.4)$$

$$= \langle X(n-1) \rangle + \delta_N. \quad (1.5)$$

donde $\delta_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\pm\delta]$ y éste tiende a cero cuando n es suficientemente grande, pues hay $1/2$ de probabilidad de que cada molécula vaya a la derecha o a la izquierda. Así, de la ecuación anterior, vemos que el desplazamiento medio básicamente no cambia de una posición a otra. Dado que estamos suponiendo que todas las partículas parten del mismo origen, entonces el desplazamiento medio es cero, así que la posición media siempre es cero, de modo que las partículas se extienden simétricamente con respecto del origen. Luego, podemos expresar que

$$\langle X(n) \rangle \approx \langle X(n-1) \rangle$$

cuando n es suficientemente grande. Si no existe posibilidad de confusión, podremos la igualdad $\langle X(n) \rangle = \langle X(n-1) \rangle$.

Aún queda la pregunta de ¿qué tanto se desplazaban dichas partículas? Como observamos en el párrafo anterior, el desplazamiento medio no nos propor-

cional información acerca de esta pregunta, así que una medida tal vez conveniente puede ser el cálculo de la raíz cuadrada del desplazamiento cuadrático medio, es decir, $\langle X^2(n) \rangle^{1/2}$. Observemos que en esta medida, los desplazamientos no pueden ser cero, pues el cuadrado de cualquier número ya sea positivo o negativo siempre es positivo y finito. Así que el resultado debe ser finito pues se hace en un número finito de elementos.

Entonces, hallemos el valor del desplazamiento cuadrático medio. Escribimos a $X_i(n)$ en términos de $X_i(n-1)$ usando la ecuación (1.1), tenemos que:

$$\begin{aligned} X_i(n)^2 &= (X_i(n-1) \pm \delta)^2 \\ &= X_i(n-1)^2 \pm 2\delta X_i(n-1) + \delta^2 \end{aligned}$$

Así, el desplazamiento cuadrático medio es:

$$\begin{aligned} \langle X(n)^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(n)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X_i(n-1) \pm \delta]^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X_i(n-1)^2 \pm 2\delta X_i(n-1) + \delta^2] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(n-1)^2 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N [\pm \delta X_i(n-1)] + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta^2 \\ &= \langle X(n-1)^2 \rangle + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N [\pm \delta X_i(n-1)] + \delta^2, \end{aligned}$$

donde el término $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\pm \delta X_i(n-1)]$ de nuevo promedia cero para n suficientemente grande, porque la probabilidad de que las partículas se vayan hacia la izquierda o derecha es la misma: $1/2$; así que, podemos expresar la relación:

$$\langle X(n)^2 \rangle \approx \langle X(n-1)^2 \rangle + \delta^2$$

para n suficientemente grande. De nuevo, si no existe riesgo de confusión, escribiremos la igualdad $\langle X(n)^2 \rangle = \langle X(n-1)^2 \rangle + \delta^2$.

Dado que todas las partículas parten del origen 0, $X_i(0) = 0$ para todo i ($0 \leq i \leq N$). Así que, $\langle X(0)^2 \rangle = 0$ y, entonces, $\langle X(1)^2 \rangle = \delta^2$, $\langle X(2)^2 \rangle = 2\delta^2, \dots, \langle X(n)^2 \rangle = n\delta^2$, por inducción. Por lo tanto, la raíz cuadrada del desplazamiento cuadrático medio aumenta de acuerdo al número de pasos, incrementándose en $\sqrt{n}\delta$. Por otro lado, de acuerdo con nuestra primera regla, el tiempo t total que se tarda cada partícula en dar n pasos es $t = n\Delta t$, de donde vemos que el número de pasos es proporcional al tiempo total o bien en notación matemática $n = t/\Delta t$; sustituyendo esto en la última expresión de la ecuación, se tiene que $\langle X(n)^2 \rangle^{1/2} = n^{1/2}\delta$, o equivalentemente, se obtiene que $\langle X(n)^2 \rangle^{1/2} = (t/\Delta t)^{1/2}\delta$, de lo cual concluimos que la *raíz cuadrada del desplazamiento cuadrático medio es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo total*.

El desplazamiento cuadrático medio o varianza se expresa por:

$$\begin{aligned} \langle X(n)^2 \rangle &= (t/\Delta t)\delta^2 \\ &= (\delta^2/\Delta t)t \end{aligned}$$

donde preferiremos escribir, a partir de este momento, $X(t)$ en lugar de $X(n)$ para expresar que la posición depende directamente del tiempo t .

1.3. Teoría macroscópica, leyes de Fick

La difusión aparece como consecuencia de la no-existencia de equilibrio. Las ecuaciones de Fick son ecuaciones diferenciales que describen la distribución no uniforme espacial y temporal de las partículas. Estas ecuaciones son dos, las cuales enmarcan la Primera y Segunda Ley de Fick. Empezaremos por deducir la primera de ellas.

La Primera Ley de Fick puede deducirse de varias maneras, aquí será deducida a través del concepto de caminata aleatoria, que a lo largo de esta

tesis nos servirá en varias ocasiones para describir los diferentes modelos de transporte a estudiar.

Recreemos el escenario que estudiaremos. Se trata de N partículas que se liberan desde un punto al que llamamos origen y que dado el tiempo transcurrido t se han dispersado a lo largo de un eje imaginario al que llamamos “ x ”; supongamos que podemos contar el número de partículas a lo largo de cada punto del eje x a dicho tiempo t , y que está dada una unidad de intervalo de tiempo, digamos Δt , y una unidad de longitud, digamos δ . Ahora, imaginemos que trazamos una pared de área A que separa a estos dos estados de tal manera que podemos contar cuantas partículas se moverán a través de la unidad de área en una Δt unidad de tiempo; así que, deseamos saber el flujo neto que pasa por dicha pared. Recordemos que en la sección anterior, describimos tres reglas que nuestra caminata aleatoria deberá de cumplir y, entonces, dado el intervalo tiempo Δt sabemos que existe $1/2$ de probabilidad de que la mitad de las partículas que se encuentren en la posición x en el tiempo t estén ahora en la posición $x + \delta$ a intervalo de tiempo Δt , es decir, el total de partículas que cruzarán a través del área A está dado por:

$$-\frac{1}{2} \left[N(x + \delta) - N(x) \right]$$

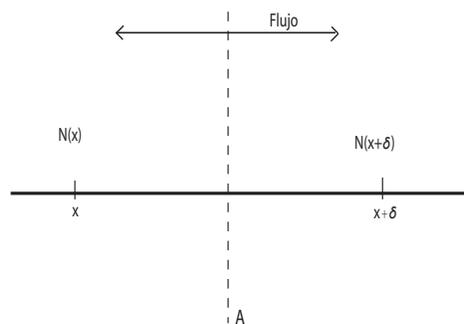


Figura 1.1: Ilustración del movimiento de las partículas.

Nuestro interés se centra en saber cómo las partículas se mueven a través del tiempo. Estudiaremos el movimiento o flujo de las partículas a través del área

antes mencionada. Más precisamente, para obtener el flujo neto J_x dividimos la cantidad anterior por el área y el intervalo de tiempo Δt . Esto es,

$$J_x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{N(x + \delta) - N(x)}{A\Delta t}$$

Ahora, multiplicamos por δ^2/δ^2 y obtenemos que:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\delta^2}{\delta^2} \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{N(x + \delta) - N(x)}{A\Delta t} \right\} \\ &= -\frac{\delta^2}{2\Delta t} \left\{ \frac{1}{\delta} \cdot \frac{N(x + \delta) - N(x)}{A\delta} \right\} \\ &= -\frac{\delta^2}{2\Delta t} \left\{ \frac{1}{\delta} \left[\frac{N(x + \delta)}{A\delta} - \frac{N(x)}{A\delta} \right] \right\} \end{aligned}$$

La constante $\frac{\delta^2}{2\Delta t}$ es llamada el **coeficiente de difusión** “ D ” y la cantidad $\frac{N(x)}{A\delta}$ es el número de partículas por unidad de volumen en el punto x , es decir, la concentración $C(x)$. Bajo estas notaciones, la ecuación anterior nos queda como sigue:

$$J_x = -D \cdot \frac{C(x + \delta) - C(x)}{\delta}$$

Haciendo tender $\delta \rightarrow 0$ obtenemos que:

$$J_x = -D \cdot \frac{\partial C(x)}{\partial x} \tag{1.6}$$

Que es precisamente la Primera Ley de Fick. Y nos dice que *el flujo total a la posición x en el tiempo t es proporcional a la pendiente de la función de concentración, con una constante de proporcionalidad igual a $-D$* . Así que, el flujo depende de cómo la función de concentración se comporta con respecto a la posición.

La Segunda Ley de Fick se deduce de la primera y del hecho que suponemos que el número de partículas se conserva, es decir, se conserva la masa. Para

deducirla empleamos el mismo escenario anterior para la deducción de la primera ley (1.2).

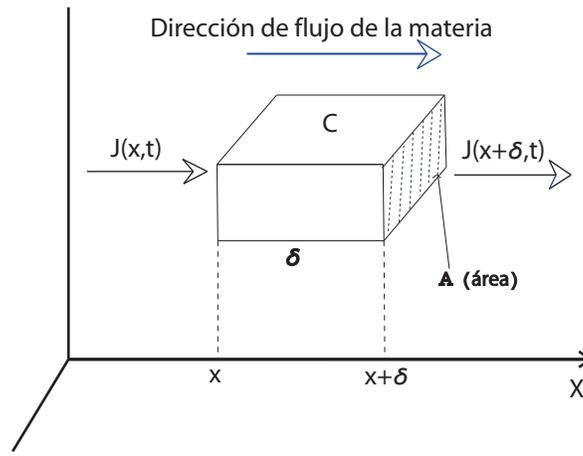


Figura 1.2: Ilustración del cambio de concentración.

Ahora, usaremos los incrementos de tiempo, y tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} &= -\frac{J_x(x + \delta) - J_x(x)}{\Delta t} \cdot \frac{A\Delta t}{A\delta} \\ &= -\frac{J_x(x + \delta) - J_x(x)}{\delta} \end{aligned}$$

Tomando límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\delta \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(t)}{\partial t} &= -\frac{\partial J_x(x)}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-D \cdot \frac{\partial C(x)}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Y así que

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}$$

o equivalentemente

$$C_t = DC_{xx} \tag{1.7}$$

Capítulo 2

Movimiento browniano

En Física, el movimiento browniano es fundamental en la Teoría Cinética Molecular; se trata del movimiento de partículas separadas de una sustancia por la acción de choques de las moléculas del medio que se encuentran en movimiento térmico. Desde el punto de vista matemático, se llama *movimiento browniano* al modelo matemático que se usa para describir dichos movimientos aleatorios. Pero, regresando al hecho físico, estas partículas, desde el punto de vista molecular, son cuerpos macroscópicos que, sin embargo, desde el punto de vista de nuestras escalas corrientes, éstas son muy pequeñas. Como resultado de los choques aleatorios no compensados de las moléculas, las partículas brownianas realizan desplazamientos caóticos.

La razón por la cual las partículas brownianas deben ser relativamente pequeñas se explica principalmente por dos causas. La primera es porque el número de choques de las moléculas contra la superficie de la partícula es proporcional al volumen de la misma; de esta manera al aumentar el tamaño R (radio) de la partícula, el número de choques de las moléculas contra la superficie de aquella crece como a R^2 . Mientras que la masa de la partícula es proporcional al volumen de ésta. De esta manera, la masa de la partícula, la cual debe desplazarse por la acción del choque, crece como a R^3 . Por esta razón, a las moléculas cada vez se les hace más difícil mover la partícula.

En segundo lugar, hay la existencia de choques de las moléculas que no compensan su movimiento, es decir, el número de choques en la unidad de

tiempo contra la partícula sobre el lado izquierdo y sobre el lado derecho deben ser considerablemente diferentes [3].

2.1. Antecedentes históricos

A principios del siglo XVIII los europeos estaban fascinados por la botánica; en Inglaterra, este interés estuvo lleno de exploraciones a todas las esquinas del imperio creciente, particularmente en Australia o “Nueva Holanda” como se conocía en aquel tiempo. Ahí fue donde Robert Brown (pionero de la botánica como ciencia) centró sus estudios. Brown invirtió cuatro años explorando las costas Australianas y de Tasmania antes de regresar a Londres con cientos de especímenes de nuevas especies. En el verano de 1827 empezó a hacer observaciones microscópicas de suspensiones de granos y observó que en una solución de agua, el polen de cierta hierba (*Clarkia pulchella*) realizaba un movimiento constante, muy accidentado, en zig-zag, el cual no parecía disminuir o terminar.

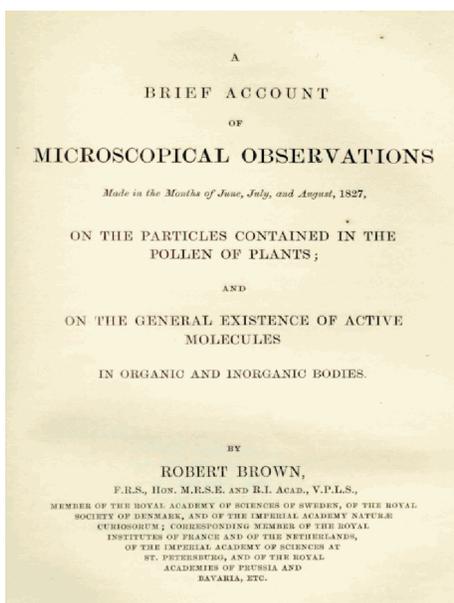


Figura 2.1: Portada de la publicación de Robert Brown de 1827

Él señalaba que antes otros investigadores ya habían notado este movimiento. En particular, menciona los trabajos de F. W. Von Gleichen realizados unos 60 años antes, y de J. T. Needham. Sin embargo, Brown fue el primero que hizo una investigación detallada del fenómeno. En primer lugar, quiso saber cuál era la causa de que el polen se estuviera moviendo todo el tiempo. Como primera hipótesis de trabajo sugirió la posibilidad de que se debiera a que el polen tenía vida. En consecuencia, puso dentro de un recipiente con agua el polen de plantas que habían muerto cien años antes. Observó que este polen también realizaba el mismo tipo de movimiento. Brown relata su sorpresa de la forma siguiente: “... me llamó la atención este hecho tan inesperado de aparente vitalidad retenida por estas moléculas tanto tiempo después de la muerte de la planta.” Posteriormente, el mismo Brown volvió a repetir sus experimentos pero utilizando pequeñísimas partículas de cuerpos inanimados, como minerales. Se dio cuenta que éstas realizaban el mismo tipo de movimiento. Más adelante repitió sus experiencias con humo, obteniendo el mismo resultado. Llegó de esta manera a la conclusión de que el movimiento no se debía a que la partícula tuviera vida. De todo este trabajo, sacó la conclusión de que tal fenómeno es característico de cualquier tipo de suspensión en el que las partículas tengan dimensiones muy pequeñas. El trabajo de Brown atrajo mucho la atención de otros científicos europeos, quienes lo criticaron duramente, pues en él se proponía que el movimiento era autoanimado. Sugirieron en cambio todo tipo de explicaciones físicas como, por ejemplo, diferencias de temperatura en el agua iluminada, evaporación, corrientes de aire, flujo de calor, capilaridad, etcétera. El famoso físico inglés Michael Faraday defendió las ideas de Brown, señalando que este movimiento no se podía explicar por ninguna de las causas propuestas. Tanto Faraday como Brown admitieron, sin embargo, que no sabían cómo explicar este fenómeno [4].

El 11 de mayo de 1905, el famoso físico Albert Einstein (1879-1955) publicó un célebre trabajo en el que propuso la explicación del movimiento browniano. Cabe señalar que en ese mismo año, Einstein publicó otros famosos trabajos como el del efecto fotoeléctrico el 18 de marzo de 1905 (que le valdría el premio Nobel de Física en 1923), la Relatividad Especial el 30 de junio de 1905 y el artículo sobre la equivalencia entre masa y energía el 27 de septiembre de 1905 .

Para apreciar la contribución de Einstein hay que mencionar que hasta ese momento todos los argumentos propuestos para el movimiento browniano

habían sido sólo cualitativos.

En su trabajo, Einstein contrastó las predicciones de las Leyes de la Termodinámica con las de la Teoría Cinética, que estaba basada en la suposición atómica. En particular, se interesó por las conclusiones que se obtendrían si el movimiento browniano se tratara de explicar por medio de la hipótesis atómica.

Un escollo importante fue la objeción hecha por Nägeli, que ya mencionamos antes, acerca de la posibilidad de que el movimiento browniano se pudiera explicar como efecto de las colisiones entre la partícula browniana y los átomos que componen el fluido. Se hizo ver que el argumento de Nägeli no era correcto. En efecto, en primer lugar, según había mostrado Maxwell, las partículas del fluido no tenían todas la misma velocidad, sino que tenían muchas velocidades, es decir, tenían una distribución de velocidades. Además, estas velocidades tienen todas las posibles direcciones. En segundo lugar, el número de colisiones que experimenta una partícula en un fluido es extraordinariamente grande, del orden de 10^{20} colisiones en cada segundo. Entonces, y a pesar de que en cada colisión con un átomo del fluido una partícula suspendida en él cambia su velocidad en una cantidad extremadamente pequeña (tal y como lo calculó Nägeli), puesto que la partícula suspendida experimenta un número extraordinariamente grande de colisiones, el efecto acumulado de todas las colisiones resulta ser apreciable [4].

Otra objeción que se resolvió fue la siguiente: si las partículas del fluido chocan por todos lados con la partícula suspendida, puede ocurrir que dos de ellas choquen en forma opuesta, de tal manera que el pequeño efecto que cada una de ellas hace sobre la partícula suspendida se cancele. Sin embargo, dado que es altamente improbable que dos partículas del fluido que chocan en sentidos diametralmente opuestos con la suspendida tengan justamente las mismas magnitudes de sus velocidades, esta cancelación de efectos no ocurre.

2.2. Proceso estocástico

Antes de iniciar la descripción matemática del movimiento browniano, necesitamos recordar lo que es un proceso estocástico. Así que, tenemos la siguiente:

Definición 2.2.1 Sea $\underline{X} = \{X(t) \mid t \in T\}$ una colección arbitraria de variables aleatorias. Si el conjunto de índices T es un conjunto contable, entonces decimos que \underline{X} es un **proceso estocástico a tiempo discreto**, y si T es continuo, entonces decimos que \underline{X} es un **proceso estocástico a tiempo continuo**.

Cada variable aleatoria $X(t)$ es llamada el **estado del proceso a dicho tiempo t** .

Como observamos en la definición anterior, con frecuencia se interpreta a t como variable del tiempo.

El siguiente teorema es uno de los más conocidos y usados en procesos estocásticos, cuya demostración la omitiremos.

Teorema 2.2.1 (Teorema del Límite Central) Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media μ y variancia σ^2 . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma n^{1/2}} \right\} \leq a = \int_{-\infty}^a \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp^{-x^2/2} dx \quad (2.1)$$

Si tomamos $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, donde X_1, X_2, \dots son independientes e idénticamente distribuidas, entonces la ley de los grandes números establece que, con probabilidad 1, S_n converge a $E[X_i]$; mientras que el límite central establece que S_n tendrá una distribución normal asintótica cuando $n \rightarrow \infty$.

2.3. Movimiento browniano (Descripción matemática)

Empecemos considerando una caminata aleatoria simétrica, es decir, en la cual cada unidad de tiempo es igualmente probable que la partícula se desplace hacia la izquierda o a la derecha. También, supongamos que cada vez que tomamos unidades de tiempo más pequeñas y, por lo tanto, pasos cada vez más pequeños. Si vamos al límite de la manera correcta, lo que obtenemos es el Movimiento Browniano.

Más precisamente, supongamos que a cada Δt unidades de tiempo tomamos un paso de tamaño Δx , ya sea a la derecha o a la izquierda, ambos con las mismas probabilidades. Si definimos a la función $X(t)$ como aquella que denote la posición de la partícula al tiempo t , entonces

$$X(t) = \Delta x(X_1 + \cdots + X_{t/\Delta t}) \quad (2.2)$$

donde

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{si el } i\text{-ésimo paso es a la izquierda} \\ -1 & \text{si el } i\text{-ésimo paso es a la derecha} \end{cases}$$

y X_i se supone independiente con

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Como $E[X_i] = 0$, $Var(X_i) = E[X_i^2] = 1$, vemos de (2.2) que

$$E[X(t)] = 0, \quad Var(X(t)) = (\Delta x)^2 \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \quad (2.3)$$

Ahora, por supuesto haremos que Δx y Δt tiendan a cero; sin embargo, debemos hacerlo de la manera que nos asegure que el resultado sea un proceso límite no trivial. Por ejemplo, si tomamos $\Delta x = \Delta t$ y hacemos $\Delta t \rightarrow 0$ entonces, de (2.3), observamos que $E[X(t)]$ y $Var(X(t))$ convergerán a 0 y $X(t)$ sería igual a 0 con probabilidad 1. Si tomamos $\Delta x = c\Delta t^{1/2}$ para alguna

constante positiva c entonces, de (2.3), vemos que cuando $\Delta t \rightarrow 0$

$$E[X(t)] = 0 \quad \text{y}$$

$$\text{Var}(X_i) \rightarrow c^2 t$$

Vamos a enumerar algunas propiedades de este límite, el cual se obtuvo de tomar $\Delta x = c(\Delta t)^{1/2}$ y hacer $\Delta t \rightarrow 0$. De (2.2) y de (2.1) obtenemos que:

1. $X(t)$ es normal con media 0 y variancia $c^2 t$. Además, como los cambios de posición de la caminata aleatoria no se traslapan, los intervalos de tiempo son independientes. Así tenemos:
2. $X(t)$, $t \geq 0$, tiene incrementos independientes.

Finalmente, como la distribución del cambio en la posición de la caminata aleatoria sobre cualquier intervalo de tiempo depende sólo de la longitud de dicho intervalo, puede parecer que:

3. $X(t)$, $t \geq 0$, tiene incrementos estacionarios.

Ahora estamos listos para la siguiente:

Definición 2.3.1 (Proceso del Movimiento Browniano) *Un proceso estocástico $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ se dice que es un **proceso del movimiento browniano** si:*

- 1 $X(0) = 0$;
- 2 $X(t) \mid t \geq 0$ tiene incrementos estacionarios independientes;
- 3 para cada $t > 0$, $X(t)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $c^2 t$.

Este proceso de movimiento browniano es algunas veces llamado el *proceso de Weiner* y la definición anterior fue dada precisamente por Weiner en una serie de artículos publicados en 1918. Además, de ser uno de los procesos estocásticos más usados en la Teoría de la Probabilidad Aplicada.

Cuando $c = 1$, el proceso es usualmente llamado el *movimiento browniano estándar*. Cualquier movimiento browniano puede ser convertido en un proceso estándar con sólo tomar $X(t)/c$; por esto, supondremos que $c = 1$.

La interpretación del movimiento browniano, como el límite de las caminatas aleatorias definidas en (2.2) nos sugiere que $X(t)$ puede ser una función continua de t , en donde este es el caso, y puede demostrarse que, con probabilidad 1, $X(t)$ es efectivamente una función continua de $X(t)$. Este hecho es algo profundo y no daremos demostración. También, notaremos que la trayectoria de $X(t)$ es continua y que de ninguna manera es una función ordinaria, ya que $X(t)$ no es en ningún punto “suave” y no diferenciable en ningún punto.

La suposición de los incrementos independientes implica que el cambio en la posición entre dos tiempos, digamos s y $t + s$, o sea $X(t + s) - X(s)$, es independiente de todos los valores anteriores al tiempo s del proceso. Entonces,

$$\begin{aligned} P\{X(t + s) \leq a \mid X(s) = x, X(u), 0 \leq u < s\} \\ &= P\{X(t + s) - X(s) \leq a - x \mid X(s) = x, X(u), 0 \leq u < s\} \\ &= P\{X(t + s) - X(s) \leq a - x\} \\ &= P\{X(t + s) \leq a \mid X(s) = x\} \end{aligned}$$

la cual establece que la distribución condicional del futuro estado $X(t + s)$, dado el estado presente $X(s)$ y el estado pasado $X(u)$, $0 < u < s$, depende sólo del presente.

Dado que $X(t)$ es normal con media 0 y varianza t , su función de densidad esta dada por:

$$f_t(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp^{-x^2/2t}$$

De la suposición de que los incrementos estacionarios son independientes, se sigue que la densidad conjunta de $X(t_1), \dots, X(t_n)$ está dada por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1)f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \quad (2.4)$$

Usemos (2.4) para calcular la distribución condicional de $X(s)$ dado $X(t) = B$, donde $s < t$. Entonces, la densidad condicional es:

$$\begin{aligned} f_{s/t}(x | B) &= \frac{f_s(x)f_{t-s}(B-x)}{f_t(B)} \\ &= K_1 \exp \left\{ -\frac{x^2}{2s} - \frac{(B-x)^2}{2(t-s)} \right\} \\ &= K_1 \exp \left\{ -\frac{t(x - Bs/t^2)^2}{2s(t-s)} \right\} \end{aligned}$$

Así, de la expresión de la distribución condicional de $X(s)$ dado que $X(t) = B$, con $s < t$, se tiene que la distribución es normal con media y varianza dadas por las expresiones:

$$E[X(s) | X(t) = B] = Bs/t, \quad (2.5)$$

$$Var(X(s) | X(t) = B) = s(t-s)/t \quad (2.6)$$

Notemos que la varianza condicional no depende de B .

De la ecuación (2.4), se tiene que $X(t_1), \dots, X(t_n)$ posee una distribución conjunta que es normal multivariada, y así el proceso del movimiento browniano es un *proceso de Gauss*, esto es:

Definición 2.3.2 *Un proceso estocástico $\{X(t) | t \geq 0\}$ se llama **proceso gaussiano** si $X(t_1), \dots, X(t_n)$ tiene una distribución multivariada normal para todo t_1, \dots, t_n .*

Como la distribución normal multivariada está completamente determinada por los valores de la media marginal y de la covarianza, se sigue que el Movimiento Browniano puede ser establecido como un proceso Gaussiano tomando $E[X(t)] = 0$ y, para $s < t$,

$$\begin{aligned}
Cov(X(s), X(t)) &= Cov(X(s), X(s) + X(t) - X(t)) \\
&= Cov(X(s), X(s)) + Cov(X(s), X(t) - X(s)) \\
&= s
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de la propiedad de los incrementos independientes y de que $Var(X(s)) = s$ [5].

2.4. El movimiento browniano y Einstein

En esta sección explicaremos la deducción de la fórmula de Einstein para el desplazamiento cuadrático medio, según su Cuarto Artículo.

El antecedente para desarrollar dicha teoría, son las leyes de los gases que relacionan la presión p , la temperatura T y el volumen V de un gas ideal con una masa determinada, dichas leyes son: Ley de Boyle (1662) $pV/T = k$ (la temperatura T permanece constante), Ley de Charles (1787-1802) $V/T = k_1$ (la presión p permanece constante) y Ley de Gay-Lussac (1809) $p/T = k_2$ (el volumen V permanece constante). Estas leyes se combinan para llegar a la fórmula $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$, junto con la Ley de Avogadro (1811), la cual nos dice que todo gas a igual volumen, presión y temperatura que contenga el mismo número de partículas o moléculas, entonces, el número de partículas o moléculas en un volumen específico de gas es independiente de la masa del gas, la cual se expresa como $V/n = a$, donde a es una constante, n es el número de moléculas en el gas.

Todas estas leyes combinadas nos da la Ley de los Gases Ideales:

$$pV = nRT$$

donde p es la presión en Pascales, V es el volumen en metros cúbicos, n es el número de moles del gas, R es la constante de los gases ideales ($8,3145 \text{ m}^3\text{Pa}/(\text{mol K})$) y T es la temperatura en kelvins.

Fórmula de van't Hoff para la presión osmótica (1885), se deriva de la fórmula anterior:

$$p = cRT \quad (2.7)$$

$$c = \frac{n}{V} \quad (2.8)$$

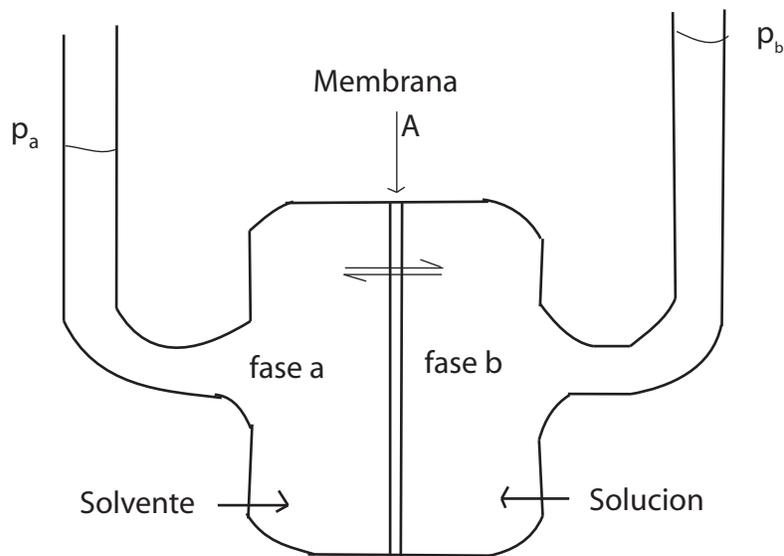


Figura 2.2: presión osmótica

Si $c_a > c_b$, entonces $p_a > p_b$. Se requiere una fuerza externa para mantener el sistema en equilibrio. Si no hay fuerza externa, el pistón se mueve hacia la derecha hasta que eventualmente $c_a = c_b$.

Sea K la fuerza de presión osmótica neta sobre el soluto por unidad de volumen (Fuerza Activa)

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Ap|_x - Ap|_{x+\Delta x}}{A\Delta x} \\ &= -\frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

De la fórmula anterior, para K , sustituimos el valor de p obtenida de la ecuación (2.7) para tener

$$p = cRT \quad \Rightarrow \quad K = -RT \frac{dc}{dx}$$

Primeramente, analicemos el fluido por cada partícula. Si R_ν es la fuerza de resistencia viscosa del líquido sobre la partícula (fuerza de arrastre), k la fuerza de la presión osmótica ejercida a una sola partícula y ν la velocidad impartida por la fuerza activa k a una partícula, entonces

$$\nu^* = \frac{K}{R_\nu}$$

con ν la velocidad impartida por la fuerza activa a cN_A partículas, donde N_A es el número de partículas que están en contacto con el área A (ver Figura 2.2). Así, la velocidad total impartida por la fuerza activa es:

$$\nu = \frac{k/R_\nu}{cN_A}$$

Haciendo las sustituciones, se obtiene la primera Ley de Fick (aquí se le llama a J el flujo molar de difusión del soluto):

$$\begin{aligned} K &= -RT \frac{dc}{dx} \\ \nu &= \frac{K/R_\nu}{cN_A}, \quad \Rightarrow \\ \nu &= -\frac{RT}{cN_A R_\nu} \frac{dc}{dx}, \quad \Rightarrow \\ J &= c\nu = -\frac{RT}{N_A R_\nu} \frac{dc}{dx} \end{aligned}$$

la cual se puede representar por

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.9)$$

con

$$D = \frac{RT}{N_A R_\nu} \quad (2.10)$$

el coeficiente de difusión.

Recordando la Ley de Stokes de la Hidrodinámica (1851), $F = 6p\eta r\nu$, tenemos entonces que:

$$R_\nu = 6p\eta r \quad (2.11)$$

Así, de (2.10) y de (2.11), se obtiene la fórmula que dio Einstein para el coeficiente de difusión:

$$D = \frac{RT}{6p\eta r N_A} \quad (2.12)$$

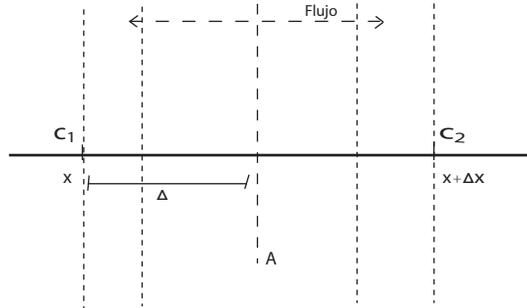


Figura 2.3: Ilustración del movimiento de las partículas.

Analizando el número de partículas de acuerdo a la diferencia en las concentraciones c_1 y c_2 de izquierda a derecha $\frac{1}{2}c_1A\Delta$ y de derecha a izquierda $\frac{1}{2}c_2A\Delta$, tenemos que el número total de partículas es

$$N_{total} = \frac{1}{2}(c_1 - c_2)A\Delta;$$

así

$$\frac{c_1 - c_2}{\Delta} = \frac{c_{|x} - c_{|x+\Delta x}}{\Delta x}$$

Luego, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos que

$$c_1 - c_2 = -\Delta \frac{dc}{dx}$$

y

$$N_{total} = -\frac{1}{2} \Delta^2 A \frac{dc}{dx}$$

Por lo tanto, el flujo total está dado por:

$$J = \frac{N_{total}}{A\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\tau} \frac{dc}{dx} = -D \frac{dc}{dx} \quad (2.13)$$

que es precisamente la Primera Ley de Fick, con $D = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\tau}$, y de esto se obtiene que

$$\Delta = \sqrt{2D\tau}$$

De la expresión anterior y de la ecuación (2.12) y, haciendo las sustituciones pertinentes, se llega a la fórmula que dio Einstein para el desplazamiento cuadrático medio:

$$\Delta = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{RT}{3p\eta r N_A}} \sqrt{\tau} \quad (2.14)$$

con rango de validez $\tau \gg \frac{m}{6p\eta r}$.

La distribución de probabilidad para los desplazamientos de las partículas suspendidas en el líquido que dio Einstein en su Primer Artículo está dada por:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{-\exp(x^2/4D\tau)}{2\sqrt{pD\tau}}, \\ \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx = 2D\tau \\ \langle r^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle \end{aligned}$$

como $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$, entonces $\langle r^2 \rangle = 3\langle x^2 \rangle$. De la ecuación (2.14) se concluye que

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{3}\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{3}\Delta = \sqrt{\frac{RT}{p\eta r N_A}}\sqrt{t} \quad (2.15)$$

2.5. Ecuación de difusión

La deducción de la ecuación de difusión se puede hacer directamente de la ecuación de continuidad, la cual establece que el cambio en la densidad de cualquier parte del sistema es debido a la aglomeración y flujo del material dentro y fuera de esa parte del sistema, es decir, la materia se conserva.

Así pues, procederemos a deducir la ecuación de continuidad, para lo cual usaremos dos leyes de Maxwell.

1. La ecuación de Maxwell, llamada la *ley de Ampère* (con extensión de Maxwell) establece que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

donde \mathbf{H} es el campo magnético, \mathbf{J} es la densidad de corriente, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ es el cambio de la densidad de campo eléctrico a través del tiempo.

Tomamos la divergencia en ambos lados, resulta:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t}$$

donde la divergencia de un rotacional es cero; así, la parte izquierda de la ecuación es cero.

Entonces nos queda:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (2.16)$$

2. Otra ecuación de Maxwell, llamada la *ley de Gauss*, establece que la divergencia de la densidad de campo eléctrico D es igual a la densidad de carga eléctrica ρ :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Sustituyendo en (2.16) obtenemos precisamente la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

donde, ahora, J es el flujo del material en difusión. Se expresa en más de una dimensión como $\vec{J} = -D(\rho)\nabla\rho(\vec{r}, t)$.

De la ecuación de continuidad, y aplicando la Primera Ley de Fick (2.9), se explica la deducción de la ecuación de difusión.

La *ecuación de difusión* es una ecuación diferencial parcial no lineal, la cual describe la densidad de las fluctuaciones en un material que está en un proceso difusivo. Ilustramos la ecuación en seguida:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot D(\rho)\nabla\rho(\vec{r}, t)$$

ρ es la función de densidad del material en difusión, t es el tiempo, D es el coeficiente de difusión que depende de la densidad del material y \vec{r} el vector de posición. Si el coeficiente de difusión es constante, entonces la ecuación se expresa como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho(\vec{r}, t) \quad (2.18)$$

Capítulo 3

Leyes de potencias

En general, la similitud no sólo se puede ver a través de figuras o en cosas que existen físicamente, también se puede ver expresada en relaciones matemáticas como son las *leyes de potencias* las cuales se aplican a diferentes campos del conocimiento como son: la Física, Biología, Geografía, Sociología, Economía, y otras más.

Las leyes de potencias son las leyes más frecuentes en las que el escalamiento describe la invariación de la relación encontrada en muchos fenómenos naturales. Matemáticamente se puede expresar como

$$f(x) = cx^\alpha$$

donde c es la constante de proporcionalidad y α es el exponente (constante) de la ley de potencia. Las leyes de potencias pueden ser expresada por medio de una línea recta si usamos la función logaritmo a ambos lados de la expresión:

$$\begin{aligned}\log f(x) &= \log cx^\alpha \\ &= \alpha \log x + \log c\end{aligned}$$

Así, la pendiente de la recta resulta ser el logaritmo del exponente (o potencia). Dicho exponente o potencia caracteriza al fenómeno, y la ordenada al origen es el logaritmo de la constante de proporcionalidad. Veremos algunos ejemplos en las siguientes secciones.

Algunas veces se les llama *leyes de potencias homegéneas*, pues si se reescalan, permanecen con el mismo exponente; dichas leyes se dice que son por definición *auto-similares* puesto que son ciertas en “todas las escalas”; esto, obviamente, sólo es cierto desde un punto de vista matemático puesto que en el mundo real las escalas están limitadas por las dimensiones físicas. Por ejemplo, una roca no es mas grande que la magnitud de un continente, ni más pequeña que un átomo; la rama de un árbol no es más grande que el árbol mismo, ni más pequeña que una hoja.

A continuación mencionaremos algunos casos de leyes de potencias.

3.1. La ley de Zipf

En todo texto de cualquier idioma hay palabras que se repiten. Por ejemplo en el idioma español, la preposición “de” aparece con cierta periodicidad, de modo que se puede contar cuántas veces aparece “de”. Si éste numero se divide entre el número total de palabras del texto, se obtiene su *frecuencia* y, de esta manera, la frecuencia de cada palabra que aparece en un escrito. Ahora, se enlistan las palabras del texto ordenando de mayor a menor frecuencia; al lugar que ocupa una palabra en ese texto se denominará *rango* de la palabra. Del estudio de diferentes textos en varios idiomas se encuentra que *existe una relación entre la frecuencia de una palabra y su rango*. En efecto, mientras mayor sea el rango de una palabra, menor será la frecuencia con la que aparece en el texto. Esto es claro, ya que mientras mayor sea su rango, más abajo estará la palabra en la lista, lo que significa que menor será su frecuencia. ¿Cómo depende la frecuencia del rango? Pues resulta que *depende en forma inversa de la primera potencia del rango*, porque disminuye a medida que el rango aumenta. Si denotamos con la letra f la frecuencia y con la letra r al rango, entonces la relación matemática es:

$$f \sim \frac{1}{r}$$

Este resultado se llama la *Ley de Zipf*. Esta dependencia se puede encontrar también asociada a otros fenómenos, y recibe el nombre de dependencia $1/f$. Esta dependencia es claramente una ley de potencias; en este caso, la potencia -1 , matemáticamente hablando. Y ya sabemos que dada una ley de potencias implica un comportamiento auto-similar. La Ley de Zipf también

da la dependencia de la frecuencia de ocurrencia de una palabra con respecto al número de palabras que se usen, o sea, a la amplitud del vocabulario utilizado. Mientras menor sea el vocabulario, mayor será la frecuencia de las palabras en los primeros rangos [6].

3.2. Bach y las leyes de potencias

Johann Sebastian Bach, que vivió de 1685 a 1750, compuso sus conciertos de Brandemburgo usando una ley de potencias para seleccionar sus notas. Por supuesto, esto no lo hizo deliberadamente, pero el análisis de la estructura de diferentes obras musicales ha demostrado que la selección de las notas que han hecho él y otros compositores, en distintas épocas, tiene algunos elementos comunes; dichas obras tienen la misma forma si se considera la estructura en términos de frecuencias. Explicaremos esto a continuación.

El análisis auditivo de dichas obras ha sugerido que la cantidad a estudiar es la potencia de audio de la música. El espectro de potencia (que es la raíz de la magnitud de la transformada de Fourier, la cual explicaremos más adelante) al cual nombramos $f(x)$ del intervalo de frecuencia relativa x entre notas sucesivas, puede ser aproximado sobre un rango largo por una función de potencias con el exponente -1 [7]

$$f(x) = c \frac{1}{x}$$

Esta cantidad es, en esencia, la energía que se emite en forma de ondas sonoras cada segundo, cuando se ejecuta la obra musical. Al analizar cómo está estructurada esta cantidad, en términos de la frecuencia, se obtiene lo que se llama su *espectro*; este espectro es auto-similar y, por lo tanto, contiene una estructura fractal. Este espectro recibe el nombre de *espectro rosa*.

¿Y aquella música que no es clásica, tiene una ley de potencias asociada? ¿Cómo dependen de la frecuencia los espectros de las diferentes tipos de música? Respecto a este tema hablaremos en el siguiente ejemplo.

3.3. Existen ruidos de colores

Toda onda u oscilación se caracteriza por su número de oscilaciones por unidad de tiempo, es decir, por su *frecuencia* (se mide en ciclos por segundo, unidades llamadas Hertz en honor a Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894)), y una *amplitud* que es el tamaño de las crestas de las ondas. Otra magnitud importante es la llamada *longitud de onda*, que es la distancia entre cresta y cresta o valle y valle de ondas consecutivas, la cual es una variable inversamente proporcional a la frecuencia: longitudes de onda pequeñas corresponden a frecuencias altas, y viceversa.

La luz (del latín *lux, lucis*) es una onda electromagnética capaz de ser percibida por el ojo humano (esto sólo es cierto para algunas frecuencias) y cuya frecuencia determina su color.

$$c = f \cdot \lambda$$

donde c es la velocidad de la luz 299,792,458 metros por segundo, f es la frecuencia y λ es la longitud de onda.

Cada uno de los colores en el espectro corresponde a una frecuencia. Por ejemplo, el color rojo tiene una longitud de onda de 650 nanómetros, la longitud de onda más corta que podemos percibir es el violeta profundo con una longitud de 380 nanómetros. De todas las frecuencias posibles, sólo un intervalo es accesible a nuestra vista y se conoce como el *visible*.

Color	$\lambda \times 10^{-9}$ [nm]
violeta	400 - 430
azul	440 - 490
verde	500 - 550
amarillo	560 - 580
rojo	590 - 670
rojo oscuro	680 - 700

Cuadro 3.1: Espectro visible.

Frecuencias mayores y menores no son detectables a través del ojo humano, pero su existencia quedó fuera de toda duda cuando, en 1800, Wilhem Frie-

drich Herschel, mediante un experimento que consiste en medir con un termómetro sumamente sensible a los cambios de temperatura que se producen al desplazar el termómetro a lo largo del espectro, encontró que había luz que no se podía mirar a la izquierda del rojo, pero que el termómetro detectaba. Esta radiación infrarroja escapa al sentido de la vista, pero se percibe en la piel como una sensación de calor [10].

Clasificación	Longitud de onda λ [cm]	Frecuencia
rayos gamma	-1×10^{-9}	-10^{18}
rayos X	$1 \times 10^{-11} - 1 \times 10^{-6}$	$10^{21}-10^{16}$
ultravioleta	$1 \times 10^{-8} - 1 \times 10^{-6}$	$10^{17}-10^{15}$
infrarrojo	$1 \times 10^{-6} - 1 \times 10^{-3}$	$10^{14}-10^{12}$
radio (cortas)	$1 \times 10^{-2} - 1 \times 10^3$	$10^{11}-10^7$
radio (largas)	$1 \times 10^5 - 1 \times 10^9$	10^6-10

Cuadro 3.2: Espectro de ondas electromagnéticas con valores aproximados

Un año más tarde, en 1801, y seguramente inspirado por los experimentos de Herschel, Johann Wilhem Ritter descubrió que más allá del violeta del arcoiris existe una luz invisible que oscurece un papel impregnado de sales de plata aún más rápido que la porción violeta del arcoiris. Tanto el infrarrojo como el ultravioleta son formas de luz (invisible para nosotros), así como lo son las oscilaciones que se extienden a altas frecuencias (rayos X, rayos gamma, etc.) o bien, que prolongan el infrarrojo hacia las bajas frecuencias (ondas de radio y microondas).

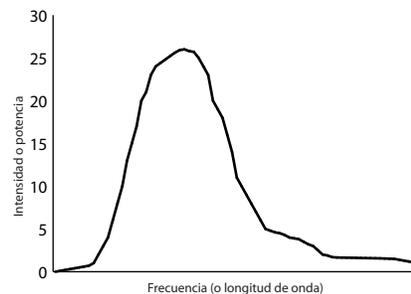


Figura 3.1: Ejemplo de espectro o densidad espectral

Una gráfica (3.1) de la frecuencia (o longitud de onda) en el eje de las abscisas contra la intensidad (esta cantidad es, en esencia, la energía que se emite en forma de ondas cada segundo) de cada una de las frecuencias en el eje vertical, se llama *espectro o densidad espectral*[10].

También los sonidos son ondas, es decir, vibraciones que, en este caso, son mecánicas y se propagan longitudinalmente. Las vibraciones corren a lo largo de la dirección de propagación, las zonas de compresión y rarefacción que se alejan de la fuente. El sonido, al igual que la luz, se puede caracterizar mediante una frecuencia o longitud de onda y una amplitud. La diferencia entre un sonido grave y uno agudo se debe a la frecuencia de las ondas sonoras, mientras que la intensidad o volumen del sonido se debe a la amplitud de la onda.

Cada una de las notas musicales corresponde a una frecuencia bien determinada y esto nos conduce a hablar de un espectro acústico. Así, por ejemplo, 440 oscilaciones por segundo dan la nota La. El doble de la frecuencia, 880 Hz, también es La pero una octava más alta; en esa octava caben el resto de las notas musicales (La, Si, Do, Re, Mi, Fa, Sol) con frecuencias ordenadas en orden ascendente. Al igual que con la luz, también el rango de frecuencias sonoras accesibles a nuestro oído es relativamente pequeño: el rango auditivo para el ser humano es de 20 a 20 000 Hz. De hecho, solamente los oídos jóvenes pueden escuchar este intervalo; conforme envejecemos, nuestro tímpano se endurece y disminuye el rango de frecuencias que podemos percibir.

Y, ¿Qué pasó con los ruidos de colores? Intuímos que el ruido es una combinación desordenada e incoherente de sonidos, sin regularidades ni periodicidades. En acústica, el ruido es cualquier sonido indeseable o que interfiere con otros sonidos que tienen algún interés o valor intrínseco. En electrónica, el ruido es la presencia de señales impredecibles y aleatorias que contaminan la señal principal. En el medio científico, este término se usa como connotación negativa, como algo que perturba y altera lo que, en su ausencia, sería ordenado o regular. Sin embargo, más adelante veremos que hay de ruidos a ruidos y que algunos de ellos son muy útiles [10].

Recapitulando, si la luz se puede representar en una gráfica espectral, entonces los sonidos también, ya que las características de los sonidos se pueden apreciar en una densidad espectral y, así como la luz blanca es la combinación

de todos los colores del espectro, el sonido lo es de todas las frecuencias; olvidándonos del fin armónico, una forma sería como sigue: “cada nota que se escribe es tal que su posición y duración no dependen para nada de las notas anteriores”, es decir, es al *azar*. Entonces, se dice que dicho ruido es un ruido blanco, ya que están presentes todas las frecuencias de los agentes individuales posibles. Igualmente, es ruido blanco la estática que se escuchaba en los radios antiguos. Este ruido no tiene ninguna periodicidad ni patrón reconocible, ninguna regularidad; también se le llama *ruido gaussiano* o *ruido de Johnson* [10]. El espectro de la potencia de audio de este tipo de música es el mismo para cualquier valor de la frecuencia, lo que significa que el valor de la potencia es el mismo para cualesquiera valores de la frecuencia, o sea, que se trata de una cantidad constante. Matemáticamente, el espectro depende de la frecuencia $(1/f)^0$, ya que $f^0 = 1$. A un espectro de este tipo se le llama *blanco*. Si se tocara este tipo de música en un instrumento, la oiríamos sin estructura; además, daría la impresión de que de una nota a otra siempre habría una sorpresa [10].

Como ya mencionábamos en nuestro ejemplo anterior, obras musicales como las de Bach pueden analizarse desde el punto de vista de su *espectro de potencia*, densidad espectral de potencia o densidad espectral de energía; y como el espectro depende de sólo una cantidad física, que es la energía emitida por cada segundo, entonces, de casi cualquier sonido se puede hacer un análisis análogo. Así, ¿será que Bach y muchos otros compositores escogieron el espectro rosa? La respuesta es que ninguno de ellos conocía este concepto, ni estas ideas. Para entender lo que sucede explicaremos cómo se haría música con otro tipo de espectro [10].

La posibilidad de descomponer cualquier onda en la suma de oscilaciones periódicas, la debemos a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático, físico, historiador, ingeniero, egiptólogo, administrador, funcionario, profesor y activista político que estuvo cerca de perder la vida en varias ocasiones durante la revolución francesa. El método que él inventó se llama, “*la transformada de Fourier*” y es una de las técnicas más bellas de la matemática. Así como el prisma de cristal nos descompone la luz blanca en todas sus componentes elementales, la transformada de Fourier es el prisma matemático con el que se puede descomponer cualquier sonido y que nos faculta para representar en un espectro una serie de tiempo [10].

Las series de tiempo son secuencias de datos de cualquier variable de interés

tomados a intervalos regulares de tiempo, ya sea el índice diario de la Bolsa de Valores, la intensidad de las manchas solares, la densidad de la población de un cultivo de bacteria, el registro de temperaturas en la Ciudad de México y todo lo que a usted se le pueda ocurrir. Para encontrar el espectro de una serie de tiempo, se toma su gráfica como si fuera una onda (más correctamente, una superposición de oscilaciones) y se somete al análisis de Fourier; esto es, se buscan todas sus componentes “puras”. Así resulta que podremos hacer una analogía entre los conceptos de la teoría de la acústica y óptica para analizar cualquier fenómeno que se pueda representar como una serie de tiempo, es decir, que se pueda representar por medio de una gráfica que dependa del tiempo [10].

La analogía newtoniana de entre la luz y el sonido se extiende entonces a las series de tiempo; hay luz blanca, ruido blanco y series de tiempo blancas, y ¡también las habrá de todos los colores! [10].

La analogía nos llevará a extremos interesantes e incluso divertidos. Por ejemplo, si tenemos una fuente de sonido que emita ruido blanco (una mezcla de todas las frecuencias) pero en un medio de propagación que absorba las ondas con frecuencias altas, como es el caso del mar, entonces queda el llamado *ruido rojo*, concepto que se usa a veces en oceanografía y en el estudio de la dinámica de poblaciones en ecología. Entonces, ¿por qué no hablar de una jornada roja en la Bolsa de Valores? Aquí quiere decir que las fluctuaciones de un día del índice de precios y de valores predominaron las pequeñas, en número, sobre las grandes, y eso se miraría en una gráfica espectral como una curva que desciende de valores grandes en las frecuencias bajas a pequeñas en frecuencias altas. ¿Y series de tiempo azules? ¿Y de qué color es el registro de temperaturas de la Ciudad de México? Existe también el ruido azul. Es el simétrico al ruido rojo que vimos arriba. Ruido que se propaga en un medio que absorbe las frecuencias bajas. Aquellos que se dedican a la computación visual usan este tipo de ruido para el diseño de un tipo de filtraje llamado *dithering*. La finalidad de esta técnica es minimizar los efectos de la percepción falsa del contorno de un objeto debido a la cuantización de las imágenes en los dispositivos discretos del display de las computadoras. Los especialistas se han dado cuenta que el ojo humano usa mayormente las frecuencias altas de la luz para discernir los contornos de los objetos y las bajas para representar texturas. Cuando lo importante en el diseño de filtros para arreglar los bordes, se da preferencia a las frecuencias altas, es decir, al

ruido azul [10].

Si ya captamos la idea de interpretar en términos de colores los espectros de sonidos y de series de datos, entonces podemos hacer un catálogo cromático de fenómenos según su espectro.

Otro tipo de espectro, yéndose al otro extremo, es el que depende de la frecuencia ($1/f^2$). Pensemos en una serie de números totalmente al azar y, a partir de ella, construyamos una segunda, en la cual cada número sea el promedio del que ocupaba la misma posición en la serie original con sus vecinos cercanos. Entonces, tenemos una nueva serie que sigue siendo aleatoria, pero cuyos componentes tiene correlaciones con los anteriores. La transformada de Fourier nos permite calcular su espectro y se observa que éste disminuye como una hipérbola con exponente dos: $1/f^2$. A este ruido se le llama *ruido café*, esto por que esta relacionado con el movimiento browniano. La sensación que se tiene al escuchar la música de este tipo es que después de haber tocado unas notas, las que siguen son previsibles [10].

Hay un par de definiciones para el ruido negro. La de Manfred Schroeder, que es estrictamente técnica, es la llamada “*ruido negro*” y es aquel cuyo espectro es una hipérbola con exponente tres: $1/f^3$ [7]. Un espectro que descienda con la rapidez de una hipérbola cúbica, refleja un dominio de las frecuencias bajas sobre las altas, esto es, muchas fluctuaciones de tamaño grande y pocas pequeñas. Schroeder nos dice que este espectro es característico de los desastres naturales y artificiales, como puede ser por ejemplo las inundaciones y los apagones. Por otra parte, también se le llama ruido negro a los sonidos que no podemos escuchar (ruidos ultravioleta) como los de los silbatos para perros [10].

Los ruidos blanco, rosa, café y negro tienen espectros que disminuyen como hipérbolas $1/f^\alpha$ los cuales se distinguen por el valor de α , el cual toma los valores cero, uno, dos y tres, respectivamente.

El ruido rosa, que es una mezcla de un poco de rojo y de blanco, este último debido a que todas las frecuencias se hallan representadas, es tal que las bajas frecuencias están en mayor proporción que las altas. Su espectro es una hipérbola de la forma $1/f$. Este tipo de ruido parece ser omnipresente en la naturaleza, aparece lo mismo en las fluctuaciones de la radiación solar que en las de la Casa de Bolsa, el tráfico ciudadano, los disparos de las neuronas en el sistema nervioso central, la variación de la luminosidad de las estrellas

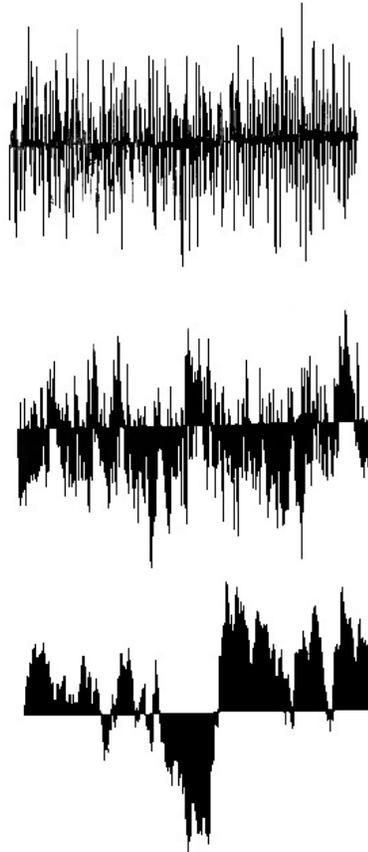


Figura 3.2: Ejemplos de ruidos blanco, rosa y café.

y las correlaciones entre palabras de distinta longitud en el idioma inglés. Fue descubierto en 1925, cuando J. B. Johnson estudiaba las fluctuaciones en la corriente de la emisión termoiónica en un tubo al vacío. W. Schotky intentó una explicación teórica, en 1926, para el caso particular de la emisión citada. A partir de ese momento, la lista de publicaciones acerca del también llamado “*ruido de centelleo*” (flicker noise) ha crecido de manera explosiva, pero aún hoy no existe una explicación teórica de la razón de su ubicuidad en la naturaleza [10].

Si no se ha podido elaborar una teoría general es por que el estilo dominante de hacer ciencia no funciona en este caso. El ruido rosa es una manifestación

común de una gran cantidad de fenómenos tan disímiles como los que mencionábamos arriba, esto quiere decir que debe de ser independiente de la composición material de éstos y que, más bien se dan entre los componentes de los sistemas y no de su naturaleza.

Procesos, no cosas. Este ha sido el pensamiento heraclitiano en la ciencia, pero desgraciadamente no es el estilo más popular entre nuestros científicos, pues es más redituable en términos de artículos de investigación el adoptar una estrategia reduccionista para desmenuzar un problema en subproblemas más simples. Una de las razones de la impotencia del método reduccionista, en el caso del ruido rosa, es que los miembros de la familia de las funciones $1/f^\alpha$ son invariantes ante cambios de escala. Así, si un proceso se amplifica mediante un factor a , su espectro se amplifica por su recíproco $1/a$. Es decir, los subproblemas resultantes de partir el problema original tiene el mismo nivel de complejidad [10].

En 1987, el físico danés Per Bak y sus colaboradores propusieron el concepto de *criticalidad auto-organizada* como un intento de explicación al problema del ruido $1/f$. La auto-organización es un fenómeno conocido desde hace muchos años y es la capacidad que tiene algunos sistemas, lejos del equilibrio termodinámico, de generar estructuras y patrones sin necesidad de la acción de agentes externos; es decir, son sistemas que pueden crear y mantener formas de manera espontánea. Veamos dos ejemplos; el primero es el vapor de agua en la atmósfera no se distribuye uniformemente, sino que se agrega como nubes que tienen formas conspicuas y clasificables. Si la atmósfera estuviera en equilibrio termodinámico (si se apagara el sol), el vapor tendría una distribución uniforme. El segundo, en la fase temprana del desarrollo embrionario de los animales, en un momento se rompe la simetría esférica del agregado celular (la mórula) y las células se organizan especialmente en lo que será la forma final del individuo. Adicionalmente, las células se diferencian, esto es, dejan de ser todas iguales para especializarse según el tejido al que darán lugar [10].

Por otra parte, la *criticalidad* es una noción asociada a las transiciones de fase; el tránsito de vapor a líquido, de líquido a sólido, etc. Cuando se tiene una sustancia en equilibrio, lejos del punto de transición de fase, una perturbación externa únicamente tiene efectos locales, mientras que en el punto justo de la transición de fase, se dice que el sistema se encuentra en un estado crítico,

pues las mismas perturbaciones tienen efectos globales, es decir se sienten en el sistema entero.

La propuesta de Bak y sus colaboradores es que los sistemas dinámicos formados por un número grande de componentes interactuando de manera no lineal (donde los efectos no son proporcionales a las causas), tienen la tendencia espontánea a organizarse a sí mismos en estados críticos de equilibrio dinámico en los cuales ocurren fluctuaciones de todos los tamaños, pero siguiendo leyes de distribución bien precisas. Estas distribuciones son las “*leyes de potencias*”, puesto que la relación funcional entre la magnitud de las fluctuaciones y su abundancia relativa es, ni más ni menos, del tipo $1/f^\alpha$, es decir, una ley de decrecimiento hiperbólico como las que hemos visto.

Existe una amplia evidencia de que muchos fenómenos naturales siguen leyes $1/f$. Además de los mencionados, uno de los que mejor lo ilustra es la distribución de las magnitudes de los terremotos, la ley de Richter y Gutenberg. Hay muchos terremotos de magnitud pequeña, regular de magnitud mediana y muy pocos de magnitud catastrófica; esto se refleja en un espectro decreciente que podría ser rojo, café o negro, pero se ha observado que la potencia de la hipérbola es exactamente uno.

Quizá lo más relevante del mundo color de rosa es que se ha demostrado que el espectro $1/f$ es una indicación de que el fenómeno tiene un origen dinámico y, por lo tanto, se excluye la posibilidad de que haya sido causado por algún evento aleatorio. Si los eventos tienen un origen dinámico común independientemente de su magnitud, entonces no necesitamos hipótesis diferentes para explicar tanto los de gran magnitud como los pequeños.

3.4. La Ley de la Gravitación Universal

Uno de los muchos notables descubrimientos de Newton fue la Ley de la Gravitación Universal

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2},$$

según la cual dados dos cuerpos de masa M y m , la fuerza de atracción entre ellos es proporcional al cuadrado inverso de la distancia. Así, por ejemplo, la

Tierra atrae a la Luna y el Sol a la Tierra. Mientras mayor sea la distancia entre los cuerpos, menor será la fuerza entre ellos, ya que a medida que la distancia entre dos cuerpos sea mayor, menor será el efecto que uno ejerza sobre el otro. Así, la Ley de la Gravitación Universal nos indica cómo depende la fuerza de la distancia. De igual manera, el comportamiento ocurre sin importar la escala, por lo cual este fenómeno es auto-similar. Existen otros fenómenos en la naturaleza en los que la dependencia es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

3.5. El oscilador armónico

Por ejemplo, podemos considerar un resorte, cuya ecuación está dada por:

$$x'' = a \cdot x$$

es decir, la fuerza es proporcional a la primera potencia de la distancia. Si éste se estira, sabemos entonces que ejerce una fuerza que trata de regresarlo a su posición original (o sea, de equilibrio). Mientras mayor sea la distancia que se estire, mayor será la fuerza que el resorte ejerza; de la misma manera, cuando se comprime, mientras mayor sea la distancia que se le comprima, mayor será la fuerza que ejerza. En este caso, vemos que la fuerza aumenta a medida que se incrementa la distancia; es decir, la ley de potencias es directa y depende linealmente de la posición. En este caso, también hay auto-similitud. Aquí hemos hablado de relación entre fuerzas y distancias.

3.6. Entropía

El concepto de *entropía* tiene su origen en la Física, en donde la Ley de la Conservación de la Energía es una de las leyes en Física más fundamentales y útiles, y que ahora se usa para explicar sucesos que van desde la fusión del átomo de hidrógeno hasta el por qué los planetas orbitan alrededor del sol. Así pues, es precisamente por la energía que en Física se necesita la entropía, para entender cómo las diversas manifestaciones de la energía cambian.

La teoría fue desarrollada en la termodinámica a fines del siglo XIX. Gracias al desarrollo de la Teoría de la Probabilidad y la Teoría de la Informa-

ción, poco a poco fue adentrándose en diversas áreas de la matemática, al punto que hoy en día se puede afirmar que, de entre los conceptos relativamente modernos de la Física, uno de los que ha sido mejor asimilado por las matemáticas es precisamente el de la entropía.

Nos interesaremos en sistemas evolutivos que presentan un comportamiento difícil de predecir. En este contexto, la entropía corresponde a un parámetro que puede ser asociado de manera natural a una amplia gama de sistemas, permitiendo “medir” el grado de caoticidad de ellos: a sistemas más complejos se les asocia una mayor entropía, y los sistemas “equivalentes” tienen la misma entropía. Los sistemas de entropía nula corresponden así a sistemas relativamente simples.

Capítulo 4

Difusión anómala

4.1. La densidad espectral y su relación con las leyes de potencias

La *densidad espectral* se aplica en general a una señal que tiene como unidad de medida una dimensión física como unidades de potencia por unidades de frecuencia o unidades de energía por unidades de frecuencia.

En Física, la señal es generalmente una onda, tal como una onda electromagnética, o una onda acústica. La densidad espectral de la onda, cuando es multiplicada por un factor apropiado, dará la energía llevada por la onda, por frecuencia de la unidad. Esto, entonces, se conoce como la densidad espectral de la energía (PSD por sus siglas en inglés: *power spectral density*) o distribución de energía espectral de la señal (SPD *spectral power density*). Las unidades de la densidad de energía espectral se expresan frecuentemente en watts por los hertzs (W/Hz) o watts por el nanómetro (W/nm) (para una medida contra longitud de onda en lugar de la frecuencia).

La densidad espectral de la energía describe cómo la energía (o la variación) de una señal, o de una serie de tiempo, se distribuye respecto a su frecuencia. Si el $f(t)$ es una señal de energía finita (cuadrado integrable, es decir que esté en \mathcal{L}^2), entonces la densidad espectral $\Phi(\omega)$ de la señal es el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier continua de la señal:

$$\Phi(\omega) = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \frac{F(\omega)F^*(\omega)}{2\pi}$$

donde ω es la frecuencia angular (2π veces la frecuencia cíclica) y $F(\omega)$ es la transformada de Fourier continua de $f(t)$.

Si la señal es discreta con componentes f_n , sobre una infinidad de elementos, aún tenemos densidad espectral de la energía:

$$\Phi(\omega) = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega n} \right|^2 = \frac{F(\omega)F^*(\omega)}{2\pi}$$

y $F(\omega)$ es la transformada discreta de Fourier de las f_n 's.

Se ha demostrado que, bajo ciertas circunstancias, la densidad espectral se puede aproximar por la función $\frac{1}{f^\alpha}$ para una α adecuada, esto es

$$\Phi(\omega) \propto \frac{1}{f^\alpha}$$

Observamos que esto obedece a una ley de potencias y además, aún más específico, es una ley hiperbólica con exponente α , como las tratadas en el capítulo anterior.

La densidad espectral de $f(t)$ y su autocorrelación forman un par de transformadas de Fourier (densidad espectral de potencia contra densidad espectral de energía). La densidad espectral es usualmente estimada usando las diversas técnicas de las transformadas de Fourier, pero algunas otras técnicas como el Método de Welch y el Método de Máxima Entropía también pueden ser usados. Uno de los resultados del análisis de Fourier es el Teorema de Parseval, el cual establece que el área bajo la curva de la energía espectral es igual al área bajo el cuadrado de la magnitud de la señal, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega$$

4.2. Exponente de Hurst

El exponente de Hurst se aplica a diversas áreas de las matemáticas aplicadas como son la teoría del caos, análisis espectral, etc., y su estimación es importante para diversas áreas desde la biofísica hasta la conexión de redes computacionales. La estimación de dicho exponente fue desarrollada en hidrología, en 1951, cuando Harold Edwin Hurst estudió el cauce del río Nilo para resolver problemas de almacenamiento de agua. Inventó un nuevo sistema estadístico que es llamado *análisis del rango de reescalamiento*, o en inglés “rescaled range analysis (R/S analysis)”, que describió a detalle en su libro *Long-Term Storage: An Experimental Study* (Hurst et al., 1965), método que describiremos más adelante. Sin embargo, las nuevas técnicas para calcular el exponente de Hurst provienen de la teoría de los fractales en matemáticas que son las matemáticas e imágenes que se derivan de la geometría fractal.

El exponente de Hurst está íntimamente ligado a la dimensión fractal, la cual nos da una medida de la rugosidad de una superficie. La relación entre la dimensión fractal y el exponente de Hurst está dado por:

$$D = 2 - H \tag{4.1}$$

Esta es también una forma de similitud o similitud, aunque no sea geométrica pero sí es estadística, como ya lo explicaremos en seguida.

Análisis del rango de reescalamiento (Rescaled range analysis)

Así pues, Harold Edwin Hurst desarrolló el método de análisis del rango de reescalamiento, método estadístico para el análisis de fenómenos naturales con vastos registros. Existen dos factores que se usan en este tipo de análisis: uno es, por supuesto, el rango R el cual es la diferencia entre el máximo y el mínimo de los valores acumulados, o las “sumas acumulativas” de $X(t, \tau)$ del fenómeno en cuestión; dicha suma se realiza a tiempo discreto t sobre la duración del evento expresado por τ y, en segundo término, la desviación

estándar S estimada de los valores observados $X_i(t)$. Hurst halló que la razón R/S puede ser descrita para una gran cantidad de fenómenos por la relación:

$$R/S = (c\tau)^H \quad (4.2)$$

donde τ es el periodo y H el exponente de Hurst. El coeficiente c fue tomado por Hurst como la constante de valor 0.5. Además, R es la diferencia del máximo menos el mínimo de las sumas de la desviación media y S se definen como:

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau)$$

y

$$S = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{\xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau}\}^2 \right)^{1/2}$$

donde

$$\langle \xi \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t);$$

$$X(t, \tau) = \sum_{t=1}^{\tau} \{\xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau}\}$$

y $\xi(t)$ los datos.

La medida de lisura, suavidad de una serie de tiempo fractal, está basada en el comportamiento asintótico del proceso de rango de escalamiento. El exponente H de Hurst se calcula de la relación (4.2):

$$H := \log(R/S) / \log(c\tau)$$

donde τ es la duración del conjunto de datos y R/S el valor correspondiente del rango de reescalamiento. De esta manera, Hurst generalizó una ecuación válida para el movimiento browniano con el propósito de incluir una clase más amplia de series de tiempo, de hecho, Einstein estudió las propiedades del movimiento browniano y halló que la distancia R cubierta por una partícula que experimenta colisiones al azar es directamente proporcional a la raíz

cuadrada del tiempo τ :

$$R = k \cdot \tau^{1/2}$$

donde k es la constante que depende de la serie de tiempo.

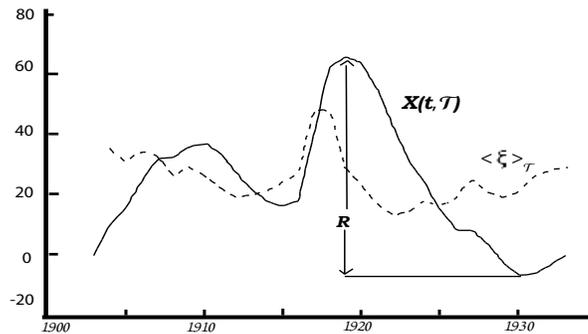


Figura 4.1: muestra de análisis de reescalamiento

La generalización propuesta por Hurst fue

$$R/S = k \cdot \tau^H$$

donde H es el exponente de Hurst.

En estas condiciones, se tiene el siguiente comportamiento:

1. Si $H = 1/2$, entonces el comportamiento de la serie de tiempo es similar a una caminata aleatoria.
2. Si $H < 1/2$, la serie de tiempo tiene la propiedad de cubrir menos “distancia” que una caminata aleatoria (si la serie de tiempo aumenta, es más probable que continuará aumentando, y viceversa).
3. Si el exponente de Hurst está entre $1/2 < H < 1$, la serie de tiempo tiene la propiedad de cubrir más “distancia” que una caminata aleatoria; es decir, será un proceso de memoria larga.

De la relación $D = 2 - H$, se observa que mientras más pequeño sea el exponente de Hurst, el comportamiento se vuelve más rugoso, como se puede ver en la Figura 4.2.

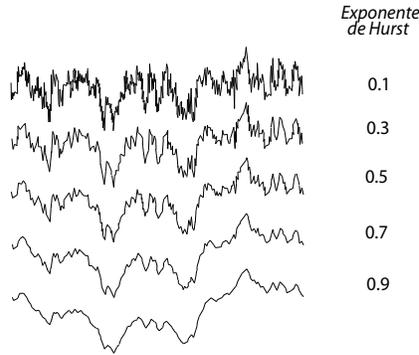


Figura 4.2: *Tipo de ruido de acuerdo con su exponente de Hurst.*

Dado un $x(n)$ de la serie de tiempo, $n = 1, \dots, N$, H puede ser estimado tomando la pendiente que resulta de graficar R/S contra n en una escala logaritmo contra logaritmo.

H se relaciona con la dimensión fractal D por la ecuación

$$H = E + 1 - D$$

donde E la dimensión euclidiana ($E = 0$ para un punto, 1 para una línea, 2 para una superficie). Para las señales unidimensionales, $H = 2 - D$ que es precisamente la relación (4.1). H también se relaciona con la pendiente espectral “ $1/f^\alpha$ ”.

El Exponente de Hurst y el Movimiento Browniano Fraccional

Dado un exponente de Hurst, se puede definir una “*Caminata Browniana.*” Si el exponente de Hurst cumple que $1/2 < H < 1$, la caminata aleatoria

denotará un proceso de memoria larga. A los sistemas de datos o señales que se comportan de esta manera es a lo que se llama “*Movimiento Browniano Fraccional*” (o fBm por sus siglas en inglés). Dicho movimiento puede ser generado por una variedad de métodos, con síntesis espectral se puede usar la transformada de Fourier o la transformada Wavelet. En este caso, la densidad espectral es:

$$\Phi(\omega) \propto \frac{1}{f^\alpha}$$

donde el exponente $\alpha = 2H - 1$; con $\alpha = 1$, tenemos el Movimiento Browniano Fraccional o también llamado ruido blanco $\frac{1}{f}$. Por otro lado, como estas caminatas aleatorias son generadas por variables aleatorias con distribución Gaussiana, también es llamado “*Ruido Fraccional Gaussiano*” (o fGn por su siglas en inglés).

La dimensión fractal nos indica que tan “rugosa” es la superficie que, como lo mencionamos en la introducción del capítulo, la relación de la dimensión fractal y el exponente de Hurst está dada por la ecuación (4.1). De dicha relación deducimos que si el exponente de Hurst es pequeño, entonces tiene una dimensión fractal más grande y, por lo tanto, una superficie más rugosa. Por otro lado, si el exponente de Hurst es grande, entonces tiene una dimensión fractal pequeña y, en consecuencia, una superficie más lisa.

4.3. Procesos de Lévy de caminatas aleatorias y memoria larga

Un *Proceso de Lévy* es un proceso aleatorio sobre un espacio Euclidiano que es estocásticamente continuo y tiene incrementos independientes estacionarios. Estos y sus integrales estocásticas, se han transformado en valiosas herramientas en una variedad de aplicaciones, incluyendo la estimación de la densidad, análisis de sobrevivencia, regresiones, y modelamiento espacial.

Una caminata aleatoria unidimensional puede ser generada iniciando de cero y de manera aleatoria seleccionando un número gausseano aleatorio para sumarlo a cero, después seleccionamos otro número y lo sumamos al primero, y así sucesivamente.

¿En qué casos se puede pensar en memoria larga? Hay un acuerdo en probabilidad de que la noción de memoria larga debe ser considerada sólo en aplicación a los procesos estacionarios, es decir, sólo en el contexto de que el fenómeno esté en “estado estacionario”. Sin embargo, el punto es delicado. Primero, porque en varias aplicaciones del modelado estocástico, este término se aplica a los procesos no estacionarios; por ejemplo, el movimiento browniano usual es algunas veces visto como un proceso de memoria larga debido a que en realidad nunca se olvida donde empieza; esto es, sin embargo, muy irrazonable para un probabilista que piensa inmediatamente en los incrementos independientes del movimiento browniano. En segundo lugar, un proceso estacionario de memoria larga, en cualquier sentido, algunas veces se parece a su homólogo no estacionario, como veremos a continuación. Por lo tanto, por esto es que es posible pensar los procesos de memoria larga como lo que delimitan a los procesos estacionarios con los no estacionarios, esto es, “en la frontera”, o como la capa que separa los procesos no estacionarios de los “bien portados usuales” procesos estacionarios.

¿Qué es entonces lo que hace la diferencia entre los usuales procesos estacionarios y los procesos de memoria larga? Lo primero que viene a la mente es, obviamente, las correlaciones.

Suponga que X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, es un proceso estocástico estacionario con media $\mu = EX_0$ y $0 < EX_0^2 < \infty$. Consideraremos procesos a tiempo discreto, pero las formulaciones correspondientes para procesos estacionarios con varianza finita en tiempo continuo son obvias. Sea $\rho_n = \text{Corr}(X_0, X_n)$, $n = 0, 1, \dots$, sus funciones de correlación. ¿Cómo se comporta la correlación de la función del “usual” proceso estacionario? Eso requiere destreza y conocimientos para construir un ejemplo donde la función de correlación decaiga a cero a una tasa menor que la exponencial, mientras el lapso incrementa; por ejemplo, el proceso lineal común ARMA (Autoregressive Moving Average Model) es un modelo que se constituye en dos partes; una parte Auto-Regresiva y otra de movimiento en promedio. Usualmente dicho modelo es referido como “ARMA (p,q)” donde p es el orden de la parte auto-regresiva y q es el orden de la parte de movimiento en promedio; en el proceso GARCH, todas las cadenas de Markov de estado finito llevan exponencialmente el decaimiento rápido de las correlaciones. Un proceso en donde sus correlaciones decaigan más lentamente que la exponencial es, entonces, inusual. Si las correlaciones no son aún absolutamente sumables, entonces el término de memoria larga

es frecuentemente usado [8].

El Teorema del Límite Central es un potente teorema relacionado con las caminatas aleatorias y establece que la “mayoría” de las caminatas aleatorias se dispersan como la difusión normal. Matemáticamente, la difusión normal se define como el crecimiento lineal en el tiempo de la varianza de un grupo de caminatas aleatorias, es decir

$$\langle X^2 \rangle = Dt \tag{4.3}$$

La varianza es como un tamaño estándar de marca de los caminantes aleatorios y, matemáticamente, se define como el promedio de los cuadrados de la distancia que recorren los caminantes.

La constante de difusión es el promedio al cual la varianza crece. Si ponemos unas gotas de color en un líquido, digamos agua, el color se dispersará más rápido (constante de difusión grande) comparado con otro medio, digamos aceite (constante de difusión pequeña). El Teorema del Límite Central dice que en la mayoría de las caminatas, los detalles de la caminata aleatoria sólo cambian con respecto a la constante de difusión pero, en general, el comportamiento del fenómeno es el mismo, es decir, está determinado por la ecuación (4.4).

Por ejemplo, una pregunta razonable es que si un caminante aleatorio da un paso cada segundo, entonces ¿la constante de difusión puede depender del tamaño del paso? Para el caso en el que el tamaño del paso es aleatorio, la constante de difusión en realidad depende del promedio del cuadrado del tamaño del paso más que del promedio del tamaño del mismo. También, si el caminante aleatorio da un paso cada dos segundos, es razonable pensar que la constante de difusión puede ser menor, lo cual es correcto. Entonces, la fórmula para el coeficiente de difusión es $D = \langle X^2 \rangle / T$, donde T se establece como el promedio del tiempo entre cada paso. ¿Por qué el Teorema del Límite Central es importante? Bueno, pues se puede observar que existen varias maneras posibles de tener un tamaño de paso aleatorio que tendrá el mismo valor $\langle X^2 \rangle$, la misma constante D y, entonces, el Teorema del Límite Central nos indica que tendrán el mismo comportamiento. Por cierto, el teorema nos da el resultado anterior sólo si se trata de una cantidad enorme de caminantes, así como también de los pasos de cada uno de ellos; entonces, pequeños números tanto de caminantes como de pasos no obedecen a este teorema.

¿Qué pasa si $\langle X^2 \rangle$ es infinito? Esto puede pasar para ciertas caminatas aleatorias conocidas como *vuelos de Lévy*. En este caso, la constante de difusión se vuelve infinita. A primera vista, esto puede ser paradójico considerar caminatas aleatorias que poseen el tamaño del cuadrado del paso en promedio ¡infinito! Antes que todo, cada paso debe de ser de longitud finita. Que el promedio del cuadrado del tamaño del paso sea infinito, sólo significa que mientras pasos largos son raros, no son suficientemente raros, tanto que $D = \langle X^2 \rangle / T$ es infinito. Por ejemplo, consideremos el caso donde un paso de longitud N ocurre con una probabilidad proporcional a $1/N^2$, donde N toma valores en el conjunto de los naturales. La probabilidad de cada paso es calculable y la suma de los números $1/N^2$ de uno a infinito es finita; es razonable escoger la forma de los pasos aleatoriamente, donde la probabilidad total sea uno. Sin embargo, al considerar

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{N^2} N^2 = \infty$$

la suma del promedio del cuadrado de la longitud, el paso es infinito; lo cual implica que este no es del tipo de caminata considerada en el Teorema de Límite Central. Por supuesto, se han omitido detalles, pero en esencia la idea es esta.

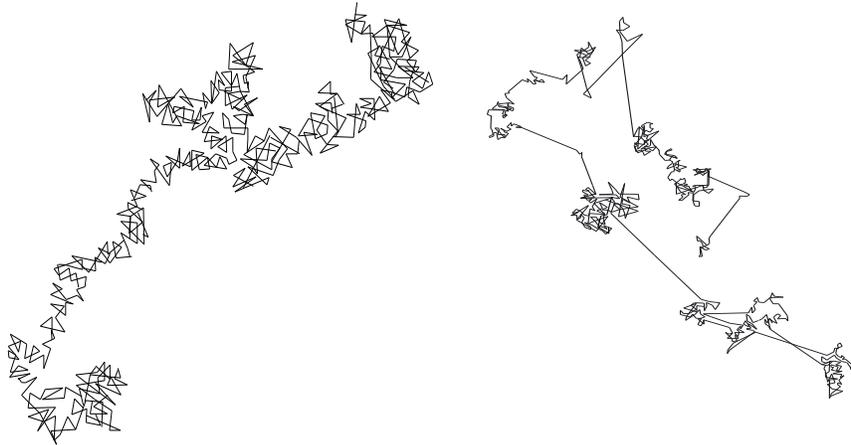


Figura 4.3: Movimiento browniano contra vuelo de Lévy.

Finalmente, consideremos una caminata aleatoria normal y un vuelo de Lévy, donde cada caminata tiene una longitud de paso aleatoria. Con una caminata aleatoria normal con probabilidad de longitud de paso proporcional a $X^{-3.8}$ y en el vuelo de Levy proporcional a $X^{-2.2}$, entonces su longitud es más probable que en el caso de caminata aleatoria. Si seguimos a una caminata aleatoria por un tiempo suficientemente largo, veremos un comportamiento “normal”; el movimiento, en general, está determinado por el promedio de todos los pasos. Pero en un vuelo de Lévy, toda la posición está determinada casi por los pasos y que no son tan frecuentes “los vuelos” y, entonces, no hay promedio de los pasos individuales.

4.4. Difusión anómala

Hay casos en los que los vuelos de Lévy nos conducen a la difusión anómala: la varianza crece más rápidamente que una función lineal. De hecho, matemáticamente, se tiene

$$\langle X^2 \rangle \sim t^\gamma \quad (4.4)$$

El exponente γ , en la ecuación anterior, es igual a uno para el caso de difusión normal. Para los vuelos de Lévy se cumple que $1 < \gamma < 2$, la cual es llamada *superdifusión*. $\gamma = 2$ corresponde al movimiento balístico, como en las partículas de una bomba cuando explota, que es el caso donde todos los caminantes se mueven alejándose unos de otros a una velocidad constante. En algunos casos, si $\gamma < 1$ se llama *subdifusión*, la cual corresponde al caso donde el promedio entre los pasos, al cual llamamos T anteriormente, se vuelve infinito.

La ecuación de difusión $D\phi = D\nabla^2\phi(\vec{r}, t)$ y la ecuación $D^2\phi = \mu\nabla^2\phi(\vec{r}, t)$ pertenecen a la familia de ecuaciones fraccionales de un parámetro $D^\alpha\phi = \mu\nabla^2\phi(\vec{r}, t)$, con $0 < \alpha < 2$, donde D^α es la derivada fraccional de Caputo y D denota $\frac{\partial}{\partial t}$. El Laplaciano $\Delta = \nabla^2$ puede reemplazarse por $-(-\bar{\Delta})^\nu$ de orden 2ν , con $0 < \nu < 1$, lo cual origina la clase de ecuaciones fraccionales de espacio tiempo

$$D^\alpha\phi = -(-\bar{\Delta})^\nu\phi$$

donde $\bar{\Delta}$ denota la cerradura del Laplaciano en un espacio de Banach apropiado. Para $0 < \alpha < 1$, dichas ecuaciones representa un proceso de difusión. Para $\nu = 1$, tal proceso de difusión cae en la categoría de subdifusión. La subdifusión se caracteriza por la dependencia sublineal del desplazamiento cuadrático medio $\langle [x(T+t) - x(t)]^2 \rangle = AT^\gamma$, $\gamma < 1$, $A =$ constante mayor que cero, contrario a la difusión normal (movimiento Browniano), para la cual $\gamma = 1$. Esto significa que en la subdifusión las partículas se mueven en promedio más lento que en la difusión ordinaria. En el nivel de movimientos individuales de partículas, la subdifusión se modela a través de una clase de caminatas aleatorias generalizadas conocidas como caminatas aleatorias de tiempo continuo, con un tiempo de espera aleatorio entre saltos sucesivos.

Las soluciones de las ecuaciones de difusión fraccional presentan propiedades asintóticas de las densidades de probabilidad derivadas del modelo CTRW para distancias de propagación y tiempos prolongados.

Otro fenómeno frecuentemente asociado con la subdifusión es la difusión en fractales, en vista de la dependencia sublineal del desplazamiento cuadrático medio en un lapso de tiempo. Sin embargo, la formulación correcta es $D\phi = L\phi$, donde L denota el laplaciano sobre un fractal. Una formulación simplificada derivada de un argumento de renormalización de grupo involucra un operador local en R^d generalizando al Laplaciano y una derivada temporal de primer orden.

Otro tipo de difusión anómala conocida como *Superdifusión*, corresponde a $\gamma > 1$. Algunas veces se asocia con las ecuaciones de difusión espacio fraccionales $0 < \nu < 1$, pero las soluciones de las ecuaciones de difusión espacio fraccionales, incluyendo las ecuaciones de difusión de espacio tiempo fraccional con $\alpha \leq 1$, tienen momentos de segundo orden divergentes. Sin embargo, la relación $\langle [x(T+t) - x(t)]^\mu \rangle = DT^{\mu\gamma}$, para alguna $\mu < 2$ y $\gamma > 1$, permanece válida. A fin evitar la controversia de una identificación correcta de superdifusión, llamaremos a la difusión que satisfaga esta última relación una *superdifusión generalizada*. En superdifusión y en superdifusión generalizada, una partícula tiende a moverse más rápido que en el movimiento browniano.

La superdifusión es alternativamente modelada por CTRWs (Continuous Time Random Walks). Con el fin de obtener un modelo de superdifusión con un momento de segundo orden finito, se debe suponer que las dos variables

aleatorias involucradas, el tiempo de espera y la longitud del salto, no son independientes. Dichas CTRW son llamadas acopladas. Sin embargo, se sabe que las propiedades asintóticas de un CTRW acoplado son muy distintas de las soluciones de las ecuaciones de difusión fraccional de espacio-tiempo.

Conclusiones

Tanto la Física como la Matemática se han retroalimentado a través de sus desarrollos. Han sido parte común de la evolución inagotable del conocimiento humano. Y, en particular, la Teoría de la Difusión representa un ejemplo de esto, como lo es en otros casos. Los procesos de transporte, y en especial los procesos de difusión, nos ha llevado a conocer las nuevas teorías y las diversas herramientas matemáticas que de ellas emanan, con el único fin dar una explicación a éstos; como lo es el caso del movimiento browniano, pero sin que la teoría y el desarrollo de la misma quede sólo para la explicación de dicho fenómeno.

Ampliando el panorama, se ha observado que existen fenómenos que si bien se comportan de manera “similar”, estos no pueden ser completamente explicados apegándose a dicha teoría, lo que nos lleva a usar cada vez herramienta matemática más poderosa para explicar los mismos. Así es como nos llevó a tratar la difusión anómala, que en esta breve exposición, no hemos llegado a desmenuzar por completo la teoría. Sin embargo, si se ha podido vislumbrar las posibilidades enormes de poder aplicarla.

Por supuesto, quedan muchas preguntas abiertas en cuanto a la teoría y las aplicaciones de la difusión anómala que serán tal vez resueltas en un futuro. En lo que a mí compete, mi objetivo será el de dar seguimiento a este conocimiento para mi desarrollo personal.

Bibliografía

- [1] Hoel, P. G.; *Estadística Elemental*, Compañía Editorial Continental, S. A. de C. V., 1979.
- [2] Del Castillo, Luis Felipe; *El Fenómeno Mágico De La Ósmosis*; Fondo de Cultura Económica, Segunda edición (La Ciencia para Todos) 1997
- [3] Tarásov; *Preguntas y Problemas de Física*; Mir; págs. 128-141
- [4] Eliezer, Braun; *Un Movimiento en Zigzag*; Fondo de Cultura Económica, Primera edición (La Ciencia para Todos) 1986
- [5] Sheldon, M. Ross; *Stochastic Processes*, Jhon Wiley and Sons, Inc.; 1983.
- [6] Eliezer Braun; *Caos, fractales y cosas raras*; Fondo de Cultura Económica, Primera edición, (La Ciencia para Todos) 1996
- [7] Manfred Robert Schroeder; *Fractals, Chaos, Power Laws “Minutes from an infinite paradise”*; W.H. Freeman and Company, New York; first edition; 1991
- [8] Gennady Samorodnitsky “*Long memory and self similar processes*”; School of Operations Research and Industrial Engineering, and Department of Statistical Science, Cornell University, Ithaca, NY 14853; e-mail address: gennady@orie.cornell.edu
- [9] Andrzej Hanyga *Fractional Diffusion and Wave Equations* Institute of Solid Earth Physics; University of Bergen, Allégaten 41, Bergen, Norway.

- [10] Miramontes, Pedro “*El color del ruido*”; Ciencias, revista de difusión. Núm. 54, pág. 4; Facultad de Ciencias, UNAM; abril-junio 1999.

Referencias en la WEB

- [11] *Random Walks and Anomalous Diffusion*; <http://www.springer-ny.com/nst/nsarticles.html>
- [12] *Stochastic Processes : An Elementary Introduction*; <http://srikant.org/thesis/node7.html>

Índice alfabético

- Albert Einstein, 19
 Cadena de Markov, 8
 Caminata aleatoria, 8
 Caminata Browniana, 52
 densidad espectral, 47
 desplazamiento cuadrático medio,
 11
 Difusión, 5
 Difusión anómala, 57
 dimensión fractal, 52
 ecuación de continuidad, 31
 ecuación de difusión, 32
 entropía, 6
 Exponente de Hurst, 50, 52
 La Ley de Zipf, 34
 leyes de potencias, 33
 Memoria larga, 54
 Movimiento Browniano, 22
 Movimiento Browniano Fraccional,
 53
 Proceso de Lévy, 53
 Proceso del Movimiento Browniano,
 23
 Proceso estocástico, 9, 21
 proceso estocástico a tiempo con-
 tinuo, 21
 proceso estocástico a tiempo dis-
 creto, 21
 proceso gaussiano, 25
 Robert Brown, 18
 Ruido Fraccional Gaussiano, 53
 Teorema del Límite Central, 21
 Transporte, 5
 vuelos de Lévy, 56