

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA Y ARQUITECTURA
UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"



SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

**MODELO PROBABILISTA DE DAÑO POR CORROSIÓN EN DUCTOS
TERRESTRES DE TRANSPORTE DE HIDROCARBUROS**

TESIS DE GRADO QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS
PRESENTA

CORTES YAH KARINA GUADALUPE

DIRECTORES: FRANCISCO CASANOVA DEL ANGEL
ESTEBAN FLORES MENDEZ

MÉXICO, D. F.

2008



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

SIP-14

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. Siendo las 19:00 horas del día 03 del mes de Julio del 2008 Se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada Por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.A.- U.Z. Para examinar la tesis de grado titulada "MODELO PROBABILISTA DE DAÑO POR CORROSIÓN EN DUCTOS TERRESTRES DE TRANSPORTE DE HIDROCARBUROS".

Presentada por el alumno:

CORTÉS

YAH

KARINA GUADALUPE

Apellido paterno

materno

nombre(s)

Con registro:

A	0	6	0	0	3	4
---	---	---	---	---	---	---

Aspirante al grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN ESTRUCTURAS.

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA
 Director de Tesis

DR. FRANCISCO CASANOVA DEL ANGEL

Director de Tesis

DR. ESTEBAN FLORES MÉNDEZ

DR. JORGE LUIS ALAMILA LÓPEZ

DR. HÉCTOR AURELIANO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

DR. RAMSÉS RODRÍGUEZ ROCHA

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. HÉCTOR AURELIANO SÁNCHEZ SÁNCHEZ





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 04 del mes de septiembre del año 2008, la que suscribe Karina Guadalupe Cortés Yah, alumna del Programa de Maestría en Ciencias en Estructuras con número de registro A060034, adscrito a la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura Unidad Adolfo López Mateos, manifiesta que es autora intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Francisco Casanova del Angel y del Dr. Esteban Flores Méndez y cede los derechos del trabajo intitulado *Modelo Probabilista de Daño por Corrosión en Ductos Terrestres de Transporte de Hidrocarburos*, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección kcortesy0600@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Karina Guadalupe Cortés Yah

DEDICATORIA

A mis padres por ser un ejemplo en mi vida.

A mi familia por su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

Al Instituto Politécnico Nacional, por medio de la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura Unidad Adolfo López Mateos por mi formación académica.

A mis directores de tesis, Dr. Francisco Casanova del Angel y Dr. Esteban Flores Méndez por su apoyo, tiempo y dedicación para la realización de esta tesis.

Al Dr. Héctor Aureliano Sánchez Sánchez, Dr. Jorge Luis Alamilla López, Dr. Ramsés Rodríguez Rocha y Dr. Norberto Domínguez Ramírez por sus valiosos comentarios durante el desarrollo de la tesis y puntuales observaciones para el mejoramiento del trabajo.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo probabilista de daño acumulado, basado en la teoría de cadenas de Markov, para modelar la propagación de la profundidad de corrosión interna localizada en un ducto de transporte de hidrocarburos, del cual se tiene un solo reporte de inspección. El modelo de daño acumulado es un proceso de Markov estacionario, de tiempo discreto y estados finitos. El mecanismo de acumulación de daño es del tipo salto unitario y es dependiente del estado. Se usa la idea de un modelo de choque, basado en ensayos de Bernoulli y probabilidades de permanecer en el mismo estado o pasar al siguiente. Para obtener las probabilidades de la matriz de transición fue necesario realizar un análisis estadístico de los datos obtenidos de la inspección de un ducto, ajustar la función de distribución y obtener probabilidades de estar en los diferentes estados discretos de daño. Los datos se ajustaron a la distribución Lognormal, y se comprobó con una prueba Kolmogorov-Smirnov. Se desarrolló el vector obtenido de multiplicar el vector de estado inicial por la matriz de transición, y se resolvió el sistema de ecuaciones para encontrar cada una de las probabilidades de transición. Para calcular la propagación de la corrosión interna posterior a la inspección se propuso una ecuación exponencial y se ajustó un parámetro a los datos. De esta manera fue posible obtener las probabilidades de transición hasta la falla y determinar el tiempo medio esperado en cada estado, utilizando la teoría de daño acumulado de Bogdanoff y Kozin. El tiempo esperado a la falla se obtuvo sumando el tiempo esperado en cada estado de daño. El tiempo usado en cada estado se comparó con simulaciones de Monte Carlo y se obtuvieron valores similares, con lo que se demuestra que el modelo es consistente. Cada paso de tiempo fue ajustado al tiempo real, a través de la media de los datos y el tiempo conocido de funcionamiento de la tubería hasta la inspección. Los tiempos de nucleación están implícitos en la matriz de transición, por lo que el tiempo esperado a la falla se cuenta desde que se pone en operación la tubería.

ABSTRACT

In this work is presented a probabilistic model of cumulative damage, it is based on Markov chains theory to model the depth pitting inside corrosion propagation in a hydrocarbon transport pipeline that have an inspection report. The cumulative damage model is a stationary Markov process, of discrete time and finite states. The damage cumulating mechanism is unit-jump type and depends of the state. Is used the idea of the shock model, based on Bernoulli trials and probabilities to stay in a state or to go to the next. To obtain the transition probability matrix was necessary to analyze the inspection data, to fit the distribution function and to obtain probabilities to stay in the different discrete damage states measured to inspection time. The data was fit to Lognormal distribution, and it was checked with a Kolmogorov-Smirnov test. It was developed the equation that result from multiply the initial state vector by the matrix transition and was result the equation system to find everyone to transition probabilities. To known the inside corrosion propagation after to the inspection was proposed an equation and was fit to the tendencies known at that moment. So it was possible to calculate the transition probabilities until the failure and to know the mean of the time spent in every state using the Bogdanoff and Kozin theory of cumulative damage. To know the mean of the time spent in every state is possible to know the mean of the time of failure. The time spent in every state was compared with Monte Carlo simulations and was find similar values, and it is possible to say the model is consistent. Every step of time was fit to the real time with the data mean and the known time of pipeline operation.

MODELO PROBABILISTA DE DAÑO POR CORROSIÓN EN DUCTOS TERRESTRES DE TRANSPORTE DE HIDROCARBUROS

CONTENIDO GENERAL

	Página
Dedicatoria y agradecimientos	i
Resumen	ii
Abstract	iii
Lista de figuras	v
Lista de tablas	vii
Simbología	viii
Capítulo I. Generalidades de la corrosión en ductos terrestres	
I.1 Introducción	1
I.2 Estado del arte	3
I.3 Objetivo	6
I.4 Metas	6
I.5 Justificación	6
Capítulo II. Desarrollo del modelo probabilista de daño por corrosión	
II.1 Análisis de los procesos estocásticos	7
II.1.1 Proceso de Poisson	7
II.1.2 Cadenas de Markov	14
II.2 Planteamiento del modelo de daño por corrosión	22
II.2.1 Aspectos cualitativos de los modelos de daño acumulado	23
II.2.1.1 Punto de vista de la función muestra	23
II.2.1.2 Modelo de choque	28
II.2.2 Versión simple de un modelo estocástico estacionario de daño acumulado	33
II.2.3 Obtención de probabilidades de transición	55
Capítulo III. Aplicación del modelo probabilista de daño	
III.1 Aplicación del modelo con datos de inspección	57
III.2 Discusión de resultados	73
III.3 Trabajos a futuro	74
Conclusiones	74
Bibliografía	75
Apéndice A. Distribuciones de probabilidad	76
Apéndice B. Función característica	83

LISTA DE FIGURAS

		Página
Capítulo I		
I.1	Las diferentes formas de corrosión.	2
Capítulo II		
II.1	Intervalos independientes $(0, t]$ y $(t, t + \Delta t]$.	8
II.2	Eventos aleatorios en el tiempo.	11
II.3	Función de muestra de un proceso de Poisson.	13
II.4	Simulación de tres procesos de Poisson.	14
II.1.1	Diagrama de flujo de la matriz de transición de probabilidad P .	17
II.2.1	Función de muestra de acumulación de daño d_t a la falla en d_f .	24
II.2.2	Funciones de muestra de acumulación de daño d_t a la falla en d_f .	24
II.2.3	Funciones de muestra de acumulación de daño d_t a la falla en diferentes d_f 's con diferente daño inicial.	25
II.2.4	Funciones de muestra de acumulación de daño con inspecciones en x_1, x_2, \dots y reemplazo.	27
II.2.5	Función de muestra típica de un modelo B de daño.	33
II.2.6	Evolución de la función de masa de probabilidad de acumulación de daño.	36
II.2.7	Dos diferentes funciones de muestra de acumulación de daño.	36
II.2.8	Función de distribución acumulada $F_W(x;1,b)$ y $h_W(x;1,b)$ con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.	39
II.2.9	Función de distribución acumulada $F_W(x;1,b)$ y $h_W(x;1,b)$ con $\pi_1 \neq 0, \pi_{12} \neq 0, \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.	40
II.2.10	Función de distribución acumulada $F_W(x;1,b)$ y $h_W(x;1,b)$ con $\pi_j \neq 0, j=1, \dots, b-1, \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.	41
II.2.11	Funciones de distribución acumulada con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j = \text{variable}$.	41
II.2.12	r_j 's de las ecuaciones (II.2.13) y (II.2.15) para $\alpha = 0.10$	43
II.2.13	Funciones de distribución acumulada de D_x en diferentes tiempos x 's con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.	43
II.2.14 (a)	Media de D_x con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.	44
II.2.14 (b)	Desviación estándar de D_x con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.	45

		Página
II.2.15	Representación gráfica de $W_{1,j}$ y D_x .	53
Capítulo III		
III.1	Histograma de los datos de inspección.	58
III.2	Probabilidad de cada intervalo.	58
III.3	Función de distribución de probabilidad acumulada empírica.	60
III.4	Ajuste a la curva función de distribución de probabilidad acumulada.	61
III.5.	Comparación entre probabilidades medidas (grueso) y con ajuste Lognormal (delgado).	61
III.6.	Comparación entre probabilidades medidas (grueso) y con ajuste Birnbaum-Saunders (delgado).	62
III.7.	Variación de p y r (Lognormal).	62
III.8.	Variación de p y r (Birnbaum-Saunders).	63
III.9.	Comparación de q_j calculada con los datos (medida) y con la función de λ (modelada).	65
III.10.	Comparación de r_j calculada en función de λ (modelada) y calculada de los datos (medida).	66
III.11.	Función de distribución acumulada $F_W(x;1,b)$ y $h_W(x;1,b)$ del ducto en estudio.	67
III.12.	Media de D_x del ducto en estudio.	67
III.13.	Varianza de D_x del ducto en estudio.	68
III.14.	Evolución de $E\{T_j\}=1+r_j$ calculada en función de λ (modelada).	69
III.15.	Dos funciones muestrales simuladas con Monte Carlo y su media, considerando los siete estados de daño medidos.	69
III.16.	Cinco funciones muestrales simuladas con Monte Carlo y su media, considerando los siete estados de daño medidos.	70
III.17.	Comparación de $E\{T_j\}=1+r_j$ (rojo) con la media de un modelo de Monte Carlo (negro) usando 1000 funciones muestrales (azul) considerando los siete estados de daño medidos.	70
III.18.	Comparación de $E\{T_j\}=1+r_j$ (rojo) con la media de un modelo de Monte Carlo (negro) usando 1000 funciones muestrales (azul) considerando los 80 estados de daño medidos.	71
III.19.	Histograma de los datos de inspección y media (línea vertical).	72

LISTA DE TABLAS

		Página
	Capítulo III	
III.1.	Probabilidades de cada estado al tiempo $x=7$.	59
III.2.	Probabilidades de transición para la matriz P al tiempo $x=6$.	59
III.3.	Probabilidades de cada estado al tiempo $x=7$.	63
III.4.	Probabilidades de transición para la matriz P al tiempo $x=7$.	64
III.5.	Relación $r = p/j$ al tiempo $x=7$.	64

SIMBOLOGIA

$N(t)$	Variable aleatoria que describe las apariciones aleatorias de defectos por corrosión en el tiempo
t	Tiempo
R_N	Rango de espacio de $N(t)$
$p_k(t)$	Probabilidad de que k defectos hayan aparecido en el intervalo $(0, t]$
$P\{\cdot\}$	Probabilidad de que suceda un fenómeno aleatorio
$N(t_2) - N(t_1)$	Número de ocurrencias en el intervalo $(t_1, t_2]$
λ	Tasa media de ocurrencias por unidad de tiempo
$o(\Delta t)$	Orden de Δt
Δt	Incremento infinitesimal
$\Delta t \rightarrow 0$	Δt tiende a cero
\cap	Intersección de eventos
\cup	Unión de eventos
$n!$	Factorial de un número n
$E\{\cdot\}$	Esperanza de una variable aleatoria
$\text{var}\cdot$	Varianza de una variable aleatoria
T_j	Tiempos entre arribos
W_k	Tiempo al k -ésimo evento
$f_T(t)$	Función de densidad de probabilidad de T
$F_T(t)$	Función de distribución de probabilidad de T
$\phi_T(u)$	Función característica de T
W_b	Variable aleatoria que representa el tiempo a la falla
b	Estado de falla
E_j	Salida de un experimento aleatorio
$P\{E_{j_1} E_{j_0}\}$	Probabilidad condicional
$P = [\cdot]$	Matriz de transición de probabilidad
$p_0 = \{\cdot\}$	Vector de probabilidad inicial
x	Paso de tiempo

z^x	Transformada z
$\psi_{j,k}(z)$	Elementos de la matriz $\Psi(z)$, funciones generadoras de probabilidad de estar en el estado k , dado que se estuvo en el estado j al principio
$p(y; z)$	Elementos de la matriz $\chi(z)$, funciones generadoras de la probabilidad de estar en el estado y
p_j	Probabilidad de permanecer en el estado j , dado que se inició en el estado j
q_j	Probabilidad de pasar al estado $j+1$, dado que se inició en el estado j
j	Estado de daño
$\phi_{y,b}(z)$	Función generadora de la función de masa probabilidad de una variable aleatoria discreta
e^{iu}	Base e elevada a iu
d_0	Estado inicial de daño de la función de muestra
d_f	Estado de la función de muestra en el que la pieza es retirada o falla
π_j	Probabilidad de que el estado j esté ocupado al inicio
ρ_j	Probabilidad de falla en el estado j
D_x	Estado de daño ocupado en el tiempo x
$p_x(j)$	Función de masa de probabilidad en el tiempo x en los estados de daño
$\bar{F}_w(x; b)$	Función de confiabilidad del tiempo a la falla
$h_w(x; b)$	Tasa de la función de falla
$F_w(x; 1, b)$	Función de distribución acumulada
$\psi_w(z; 1, b)$	Transformada geométrica de la función de distribución acumulada de $W_{1,b}$
$\phi_w(z; 1, b)$	Transformada de la función de masa de probabilidad $p_w(x; 1, b)$

CAPITULO I

GENERALIDADES DE LA CORROSIÓN EN DUCTOS TERRESTRES

I.1 Introducción

A lo largo del territorio nacional mexicano se mantienen en operación alrededor de cincuenta y cuatro mil kilómetros de ductos terrestres por donde se transporta petróleo crudo, gas natural, gas amargo, gas dulce, gasolina, diesel y otros productos refinados. Existen, además, dos mil kilómetros localizados en zonas submarinas. Cerca de la mitad de los ductos tienen más de treinta años en operación y a pesar del constante mantenimiento, inspección y patrullaje, se presentan problemas ocasionados por la corrosión, daños por terceras partes, errores de operación y diseño, los cuales pueden conducir a la falla del sistema. Las fallas de estos sistemas de tuberías representan pérdidas económicas de importancia y en el peor de los casos, pérdidas de vidas humanas y daños al medio ambiente. Una falla puede deberse a varias causas y puede ocurrir en un área muy pequeña de la tubería. Es posible, sin embargo, identificar los factores importantes que pueden contribuir a las fallas en tuberías.

Los accidentes por corrosión en tuberías de transporte de hidrocarburos son los más frecuentes.

La corrosión es el daño que sufren los materiales por el transporte de iones debido a la diferencia de potencial, en el material mismo o entre éste y el medio que lo rodea. Es una reacción interfacial irreversible de un material, generalmente un metal, con el medio que le rodea y que deteriora o modifica las propiedades de dicho material **(Costa, 2005)**.

La corrosión produce pérdidas en las propiedades mecánicas de resistencia del material, lo que da lugar a cambios en la geometría de las estructuras y

componentes que les hacen perder la función para la cual estaban determinadas, ocasionando:

- pérdidas directas, debidas al cambio de estructuras tubulares corroídas,
- pérdidas indirectas, debidas a la pérdida de producción por suspensión temporal de los sistemas productivos y las instalaciones, y la contaminación de los bienes creados,
- pérdidas de bienestar y vidas humanas,
- pérdidas de eficiencia, y
- aumento de los costos de explotación.

La corrosión es de interés ya que la pérdida de metal invariablemente significa una reducción en la integridad estructural del ducto y un incremento en el riesgo de falla.

Dos factores importantes que intervienen en el proceso de corrosión son el tipo de material y el ambiente. El ambiente incluye las condiciones que impactan la pared interna y externa del tubo. Dado que la mayoría de los ductos atraviesan diferentes condiciones ambientales, la evaluación debe permitir seccionar o considerar apropiadamente cada tipo de ambiente dentro de cada segmento dado.

La corrosión, además, puede dividirse en corrosión uniforme y localizada, figura I.1. La corrosión uniforme se desarrolla a una misma velocidad en toda la superficie del material, mientras que la localizada es un ataque acelerado de una posición superficial determinada, debido generalmente a la separación de las zonas anódica y catódica, originada por desigualdades de la estructura o composición del material que se corroe o por diferencias del medio. La corrosión por picadura es un tipo especial de corrosión localizada y se define como una forma de ataque muy localizado, de metales pasivos que da lugar a cavidades muy estrechas y profundas (**Costa, 2005**).

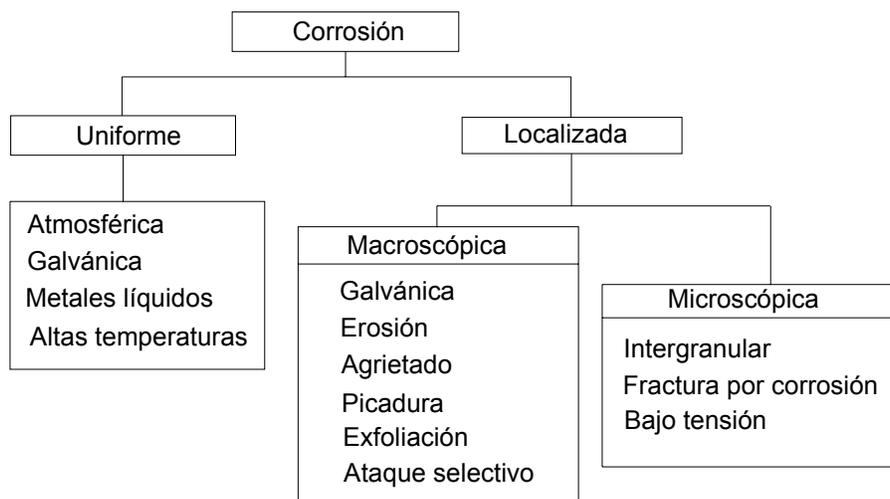


Figura I.1. Las diferentes formas de corrosión.

I.2 Estado del arte

El estudio de la corrosión había estado basado principalmente en enfoques deterministas, particularmente en la teoría electroquímica de corrosión. La corrosión localizada, sin embargo, no puede ser explicada sin puntos de vista estadísticos y estocásticos por la gran dispersión de datos de laboratorio y de campo (**Shibata, 1996**).

La evaluación de la integridad y confiabilidad en ductos se ha estudiado de diversas maneras en los últimos años y se han aplicado análisis de riesgo y confiabilidad para determinar las probabilidades de falla.

Un análisis formal en la evaluación del riesgo de falla, se realiza usando técnicas de confiabilidad. Así, desde el punto de vista estructural, la confiabilidad o probabilidad de éxito es la probabilidad de que una estructura, un elemento o un sistema estructural satisfaga las condiciones límites y de servicio para las que fue proyectada. De este modo, la evaluación de riesgo de falla en ductos basados en métodos de confiabilidad mecánica o estructural, presenta mejores aproximaciones en la evaluación de la seguridad, brindando una herramienta analítica que permite evaluar el riesgo con métodos más razonables, verificables y siempre susceptibles a la aplicación de mejoras.

Los métodos de confiabilidad aportan elementos para poder diseñar un sistema estructural y también se utilizan para conocer las condiciones actuales de algún sistema, esto tiene gran importancia en las decisiones de mantenimiento, reparación o sustitución de alguno de los elementos estructurales que forman el sistema, para así devolverle al sistema estructural el nivel necesario de seguridad especificado.

En la industria petrolera mexicana, se tienen datos de corrosión de tuberías de transporte de hidrocarburos, obtenidos de inspecciones realizadas; sin embargo, la información es escasa debido al costo y a otros factores, por lo que es importante contar con modelos matemáticos que permitan describir y predecir el estado del sistema, con los datos disponibles y con un nivel de confianza aceptable.

Ya se ha especificado que en este trabajo se estudiará la corrosión en los elementos estructurales, por lo que ésta se trabajará desde el punto de vista de daño acumulado y de los procesos estocásticos.

El daño acumulado es la acumulación irreversible de daño a través de la vida del elemento que finalmente conduce a la degradación y a la falla. Un proceso estocástico es un modelo matemático de un proceso dinámico cuya evolución en el tiempo está gobernada por leyes probabilistas (**Bogdanoff y Kozin, 1985**).

El desarrollo de la ciencia y la tecnología exige el estudio de los problemas que tienen lugar en el tiempo y que su resultado depende a lo sumo del resultado inmediato precedente.

La teoría de las probabilidades no tenía procedimientos generales, ni esquemas particulares para resolver estos tipos de problemas. Esto trajo consigo una teoría general de los procesos aleatorios para el estudio de estos problemas.

Cualquier conocimiento sobre los estados de un sistema nos lleva a estudiar esta clase de procesos estocásticos llamados proceso sin efecto posterior, o por analogía, cadenas de Markov o procesos de Markov.

Andrei Andreyevich Markov fue un matemático ruso conocido por sus trabajos en la teoría de los números y la teoría de probabilidades.

El modelo que se propondrá asume un estado finito y discreto del tiempo usando procesos de Markov, el cual asume que la probabilidad de lo que ocurrirá en un determinado instante dependerá exclusivamente del pasado inmediatamente anterior.

J.L. Bogdanoff y F. Kozin iniciaron su estudio de modelos de Markov de daño acumulado en 1978. Inicialmente había cierta duda en que fuera una herramienta útil en la aplicación de la ingeniería y en su valor práctico. Posteriormente se cambió el punto de vista, ya que el campo de aplicación en el fenómeno de daño acumulado es extenso. Estos modelos han sido capaces de describir y analizar exitosamente datos de vida de diferentes fenómenos, incluyendo fatiga, crecimiento de grietas por fatiga, corrosión, cambio de propiedades de material, entre otros. Además, han permitido un profundo conocimiento acerca de un gran número de problemas de interés en ingeniería **(Bogdanoff y Kozin, 1985)**.

Los modelos de los fenómenos pueden ser deterministas o probabilistas. El interés de los investigadores antes mencionados está centrado en la evolución en el tiempo, bajo usos cíclicos, daño por fatiga, longitudes de grieta y pérdida de material. Un modelo probabilista es apropiado para fenómenos de daño acumulado, en el cual, las incertidumbres para la estimación media de vida no puedan ser ignoradas.

La corrosión localizada es conocida por mostrar una gran variación en los parámetros medibles tal como tasa de corrosión, máxima profundidad de picadura, tiempo de perforación, entre otros. La variación en los resultados viene de la influencia de las heterogeneidades en la superficie del metal durante el desarrollo de la picadura y de las variaciones del ambiente corrosivo a través del tiempo. Todos estos hechos sugieren que la aleatoriedad es una característica inherente e inevitable de la corrosión por picadura a través del tiempo, así que los modelos estocásticos son mejor alternativa para describir la corrosión por picadura que los modelos deterministas **(Shibata, 1996)**.

Provan y Rodríguez usaron por primera vez un proceso de Markov no homogéneo para modelar el crecimiento de la profundidad de picadura sin tomar en cuenta el proceso de generación. Ese modelo intenta describir el crecimiento de picaduras como una función del tiempo de exposición, considerando un espacio discreto de estados de posibles profundidades de picadura. Ellos compararon los resultados estimados con los datos experimentales reportados para el aluminio y dirigieron sus propias experiencias en corrosión por picadura a aceros inoxidables **(Provan y Rodríguez, 1989)**.

H. P. Hong consideró la corrosión por picadura como una combinación de dos procesos estocásticos: al proceso de generación de la picadura lo modeló como un proceso de Poisson y al proceso de propagación de la profundidad lo consideró un proceso de Markov. La distribución de probabilidad de la profundidad de picadura por corrosión y la probabilidad del tiempo de falla son obtenidas al combinar ambos procesos. Para la utilización del método se desarrollaron ejemplos de acuerdo con datos experimentales. En ese trabajo, la intensidad de transición usada para describir el crecimiento de una profundidad específica en el proceso de Markov homogéneo depende del número total de estados usados, y no define el número de estados óptimo para describir un conjunto dado de datos experimentales **(Hong, 1999)**.

Valor y su equipo de investigación desarrollaron un modelo estocástico para simular corrosión localizada. La corrosión localizada fue modelada como un proceso de Poisson no homogéneo, en el cual, el tiempo de inducción para la iniciación de la picadura fue simulado como la realización de un proceso de Weibull. Para simular el crecimiento de la picadura usaron un proceso de Markov no homogéneo. El modelo propuesto es validado usando datos de experimentos publicados de corrosión localizada **(Valor et al., 2007)**.

Un modelo estocástico de predicción de la evolución del daño por corrosión en sitios activos, aplicable bajo condiciones de práctica profesional es presentado por J.L. Alamilla y E. Sosa, usando análisis de integridad y análisis de confiabilidad estructural. El daño de un material y su evolución está determinado por el estado de daño en un instante de tiempo dado y una tasa de ocurrencia de daño. Para lograr esto, se estima la función de densidad de probabilidad de la profundidad del daño por corrosión del sistema. Su aplicación depende de la cantidad de reportes de inspección disponibles. Se presentan dos escenarios, cuando existe un reporte de inspección, y cuando hay dos reportes. En éste último, existe la variación de si los mismos defectos pueden ser identificados en las dos inspecciones o no **(Alamilla y Sosa, 2008)**.

En este trabajo se estudiará la corrosión localizada por picadura interna, ya que al depender de un menor número de factores que la externa, es posible desarrollar modelos matemáticos más simples. La corrosión que aquí se analiza está enfocada a la *pérdida de metal del tubo*. Además se hace un análisis probabilista de acumulación de daño por corrosión.

El daño acumulado reduce la confiabilidad cuando el tiempo aumenta. Manteniendo altos niveles de confiabilidad, realizando inspecciones, reparaciones, sustituciones parciales y manteniendo las condiciones de operación adecuadas puede aumentar el costo del ciclo de vida del sistema. La utilidad de este estudio es crear una herramienta que permita predecir el estado de corrosión en un determinado instante de tiempo, de tal manera que se puedan optimar los recursos para programas de inspección, mantenimiento y reparación.

I.3 Objetivo

Establecer una metodología, basada en un modelo de daño probabilista y procesos estocásticos de Poisson y Markov, que permita describir y predecir el estado de corrosión en ductos terrestres de transporte de hidrocarburos en un tiempo dado.

I.4 Metas

Las metas de este trabajo son:

- ✓ plantear el modelo de daño acumulado basado en los procesos de Poisson y de Markov,
- ✓ analizar estadísticamente los datos de inspección del ducto,
- ✓ definir los estados límite de la variable *profundidad del defecto de corrosión*,
- ✓ determinar la probabilidad inicial y de transición del modelo, y
- ✓ evaluar la corrosión de ductos de transporte de hidrocarburos en diferentes instantes de tiempo y calcular el tiempo esperado a la falla.

I.5 Justificación

En la actualidad existe una gran red de ductos terrestres para la recolección y el transporte de hidrocarburos distribuidos a lo largo de la República Mexicana. La seguridad en la operación de estos sistemas es de vital importancia, por lo que el ducto se debe inspeccionar, evaluar su integridad y dar respuesta a esta evaluación, utilizando métodos aceptados por la industria petrolera internacional de tal manera que se garantice la integridad mecánica durante toda la vida útil del sistema.

Es vital contar con la información adecuada y confiable para que se asignen eficientemente los recursos para el desarrollo de programas efectivos para la jerarquización, prevención, detección y mitigación, que resultarán en el mejoramiento de la seguridad y una reducción en el número de incidentes.

CAPITULO II

DESARROLLO DEL MODELO PROBABILISTA DE DAÑO POR CORROSIÓN

II.1 Análisis de los procesos estocásticos

Un proceso estocástico es un modelo matemático de un proceso dinámico cuya evolución en el tiempo está gobernada por leyes probabilistas. Un proceso estocástico es llamado también proceso aleatorio (**Bogdanoff y Kozin, 1985**).

En este trabajo, al proceso de corrosión en ductos de transporte de hidrocarburos se le considera un proceso estocástico.

II.1.1 Proceso de Poisson

La aparición de defectos por corrosión en un ducto de transporte de hidrocarburos obedece a un proceso estacionario de Poisson $\{N(t); t \geq 0\}$, es decir, a un proceso que describe las apariciones aleatorias de defectos por corrosión en el tiempo.

$N(t)$ es una variable aleatoria que depende del tiempo, con rango de espacio $R_N = 0, 1, 2, \dots$. El parámetro t es el tiempo.

Así, se introduce la siguiente notación

$$p_k(t) = P\{N(t) = k\} \quad \forall \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.1.1})$$

donde, $p_k(t)$ es la probabilidad de que k defectos hayan aparecido en el intervalo $(0, t]$ y $P\{\cdot\}$ es la función de probabilidad que describe el fenómeno aleatorio. Si $0 < t_1 < t_2$, entonces la variable aleatoria $N(t_2) - N(t_1)$ es el número de ocurrencias en el intervalo $(t_1, t_2]$ (**Bogdanoff y Kozin, 1985**).

El proceso de Poisson está basado en los siguientes axiomas:

1. $N(0) = 0$ ó $p_0(0) = 1$; así, el conteo inicia en cero,
2. el número de eventos en intervalos que no se traslapan son variables aleatorias independientes,
3. sea $N(t)$ definida como se mencionó anteriormente, y $N(t_1+t) - N(t_1)$ el número de ocurrencias en $(t_1, t_1+t]$, donde $t_1 \geq 0$. Entonces $N(t)$ y $N(t_1+t) - N(t_1)$ tienen la misma distribución de probabilidad para cada t_1 . Esto significa que se asume que el número de ocurrencias depende únicamente de la longitud del intervalo y no de su localización.
4. $p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, $\lambda > 0$, donde $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} o(\Delta t) / \Delta t = 0$ para $\Delta t > 0$ y λ es una constante de proporcionalidad y $o(\Delta t)$ es el orden de Δt . Es decir, la probabilidad de una ocurrencia en un intervalo de longitud Δt es proporcional a Δt para Δt suficientemente pequeño.
5. $\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) = o(\Delta t)$, significa que la probabilidad de dos o más ocurrencias en Δt se vuelve insignificante para un Δt suficientemente pequeño.

Considerando los dos intervalos que no se traslapan $(0, t]$ y $(t, t+\Delta t]$ como se muestra en la figura II.1.

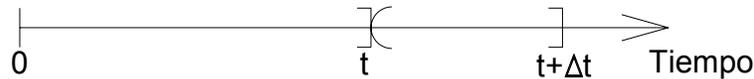


Figura II.1. Intervalos independientes $(0, t]$ y $(t, t+\Delta t]$.

$$p_0(t + \Delta t) = P\{N(t + \Delta t) = 0\} = P\{(N(t) = 0) \cap (N(t + \Delta t) - N(t) = 0)\} \quad (\text{II.1.2})$$

$N(t)$ y $N(t_1+t) - N(t_1)$ con $t_1 \geq 0$ tienen la misma distribución de probabilidad y son independientes. De los axiomas 4 y 5 se tiene que

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} = P\{N(\Delta t) = 0\} = p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (\text{II.1.3})$$

ya que $p_0(\Delta t) + p_1(\Delta t) + \dots + p_r(\Delta t) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\Delta t) = 1$, y al despejar $p_0(\Delta t)$ y sustituir $p_r(\Delta t)$ resulta $p_0(\Delta t) = 1 - p_1(\Delta t) - p_2(\Delta t) - \dots = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

La ecuación (II.1.2), puede ser escrita como

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)p_0(\Delta t) \quad (\text{II.1.4})$$

Sustituyendo (II.1.3) en la ecuación anterior se tiene

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)] = p_0(t) - p_0(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t) \quad (\text{II.1.5})$$

dado que $p_0(t)o(\Delta t) = o(\Delta t)$.

Pasando al otro lado $p_0(t)$ y dividiendo por el incremento infinitesimal Δt ,

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (\text{II.1.6})$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene,

$$\frac{dp_0}{dt} \equiv p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \quad (\text{II.1.7})$$

La solución a esta ecuación diferencial lineal, tomando el axioma 1 como condición inicial, es,

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \quad \forall \quad t \geq 0 \quad (\text{II.1.8})$$

Considérese ahora $p_1(t + \Delta t)$.

$$p_1(t + \Delta t) = P\{N(t + \Delta t) = 1\} = P\{(N(t) = 0) \cap (N(t + \Delta t) - N(t) = 1)\} \cup P\{(N(t) = 1) \cap (N(t + \Delta t) - N(t) = 0)\} \quad (\text{II.1.9})$$

Los dos eventos anteriores son excluyentes e independientes, así que

$$p_1(t + \Delta t) = P\{N(t) = 0\}P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} + P\{N(t) = 1\}P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} \quad (\text{II.1.10})$$

Con los axiomas 3 y 4 se puede escribir como

$$p_1(t + \Delta t) = p_0(t)p_1(\Delta t) + p_1(t)p_0(\Delta t) \quad (\text{II.1.11})$$

Y por los axiomas 4 y 5 se tiene

$$p_1(t + \Delta t) = p_0(t)(\lambda\Delta t) + p_1(t)(1 - \lambda\Delta t) + o(\Delta t) \quad (\text{II.1.12})$$

Pasando al otro lado $p_1(t)$ y dividiendo por el incremento infinitesimal Δt ,

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (\text{II.1.13})$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene,

$$p'_1(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t) \quad (\text{II.1.14})$$

Tomando en cuenta (II.1.8) y $p_1(0) = 0$, la solución de la ecuación diferencial lineal anterior es

$$p_1(t) = (\lambda t)e^{-\lambda t} \quad \forall \quad t \geq 0 \quad (\text{II.1.15})$$

Considérese ahora $p_2(t + \Delta t)$.

$$p_2(t + \Delta t) = P\{N(t + \Delta t) = 2\} = P\{(N(t) = 0) \cap (N(t + \Delta t) - N(t) = 2)\} \cup P\{(N(t) = 1) \cap (N(t + \Delta t) - N(t) = 1)\} \cup P\{(N(t) = 2) \cap (N(t + \Delta t) - N(t) = 0)\} \quad (\text{II.1.16})$$

Por el axioma 5 se sabe que $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 2\} = p_2(\Delta t) = o(\Delta t)$. Entonces, repitiendo el argumento aplicado anteriormente a II.1.7 y $p_2(t + \Delta t)$ se tiene

$$p_2(t + \Delta t) = p_1(t)(\lambda \Delta t) + p_2(t)(1 - \lambda \Delta t) + o(\Delta t) \quad (\text{II.1.17})$$

Pasando al otro lado $p_2(t)$ y dividiendo entre el incremento infinitesimal Δt ,

$$\frac{p_2(t + \Delta t) - p_2(t)}{\Delta t} = -\lambda p_2(t) + \lambda p_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (\text{II.1.18})$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene,

$$p'_2(t) = -\lambda p_2(t) + \lambda p_1(t) \quad (\text{II.1.19})$$

Tomando en cuenta (II.1.15) y que por el axioma 1 $p_2(0) = 0$, la solución de la ecuación diferencial lineal anterior es

$$p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} \quad \forall \quad t \geq 0 \quad (\text{II.1.20})$$

Siguiendo este procedimiento se encuentra que:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad \forall \quad k = 0, 1, \dots \quad \text{y} \quad t \geq 0 \quad (\text{II.1.21})$$

es la función de masa de probabilidad para $N(t)$ en $t \geq 0$; es decir, $N(t)$ tiene distribución de Poisson con parámetro λt , $E\{N(t)\} = \lambda t$ y $\text{var} N(t) = \lambda t$, donde λ es la tasa media de ocurrencias por unidad de tiempo.

Sea la variable aleatoria T el tiempo de cero a la primera ocurrencia.

$$P\{T > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t} \quad (\text{II.1.22})$$

Así, $F_T(t)$ es la función de distribución de probabilidad de T ,

$$F_T(t) = P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\text{II.1.23})$$

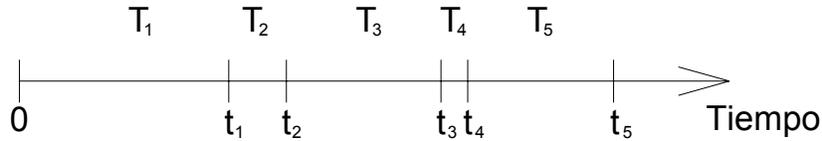


Figura II.2. Eventos aleatorios en el tiempo.

Considérese la figura II.2, en la cual t_1, t_2, \dots indican puntos aleatorios ó instantes en el tiempo, con subíndices denotando el número de evento. La aleatoriedad se puede observar en el diagrama por la diferencia de longitud de los intervalos. Así t_1 es el tiempo al primer evento ocurrido, t_2 el tiempo al segundo evento y así sucesivamente. Sea:

T_1 el tiempo de 0 al primer evento,

T_2 el tiempo del primer evento al segundo,

T_3 el tiempo del segundo al tercer evento, y así sucesivamente.

Entonces, T_1, T_2, \dots son variables aleatorias independientes y con la misma función de distribución de probabilidad acumulada, dada por (II.1.23), y son llamados tiempos entre arribos. Sea W_k el tiempo al k -ésimo evento. De esta manera se tiene que

$$W_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k \quad \forall \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{II.1.24})$$

W_k y $N(t)$ se relacionan a través de sus distribuciones.

Considérese el evento $N(t) \leq k$, que quiere decir que k ó menos ocurrencias tienen lugar en $(0, t]$. Para que esto ocurra, el tiempo a la $(k+1)$ -ésima ocurrencia debe ser mayor que t , por el contrario, si $W_{k+1} > t$, entonces no más de k ocurrencias pueden tener lugar en $(0, t]$. Así se tiene que $\{N(t) \leq k\}$ y $\{W_{k+1} > t\}$ son eventos equivalentes, y sus funciones de distribución de probabilidad acumulada son $F_N(k; t) = P\{N(t) \leq k\}$ y $F_W(t; k) = P\{W_k \leq t\}$, respectivamente.

Los eventos y probabilidades anteriores se relacionan de la siguiente manera:

$$F_N(k; t) = 1 - F_W(t; k + 1) \quad (\text{II.1.25})$$

ya que

$$F_N(k; t) = P\{N(t) \leq k\} = P\{W_{k+1} > t\} = 1 - P\{W_{k+1} \leq t\} = 1 - F_W(t; k + 1) \quad (\text{II.1.26})$$

La función de densidad de probabilidad de T_j es exponencial

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \forall t > 0 \\ 0 & \forall t \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.27})$$

la cual tiene función característica

$$\phi_T(u) = \left(1 - \frac{iu}{\lambda}\right)^{-1} \quad (\text{II.1.28})$$

De la teoría de probabilidad se sabe que la función característica de la suma de n variables independientes igualmente distribuidas, es el producto de la función característica individual.

$$\phi_W(u) = \prod_1^n \phi_j(u) \quad (\text{II.1.29})$$

Dado que las variables T_j son independientes e idénticamente distribuidas, la función característica de W_{k+1} es

$$\phi_W(u; k + 1) = \left(1 - \frac{iu}{\lambda}\right)^{-(k+1)} \quad (\text{II.1.30})$$

la cual es la función característica de la distribución gamma. Así, la función de densidad de probabilidad de W_{k+1} es

$$f_W(t; k + 1) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} & \forall t > 0 \\ 0 & \forall t \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.31})$$

y la función de distribución acumulada es

$$F_W(t; k + 1) = \frac{\lambda}{k!} \int_0^t (\lambda \tau)^k e^{-\lambda \tau} d\tau \quad (\text{II.1.32})$$

En la figura II.3 se ilustran las diferentes formas para caracterizar la ocurrencia de arribos aleatorios sobre una escala positiva de tiempo.

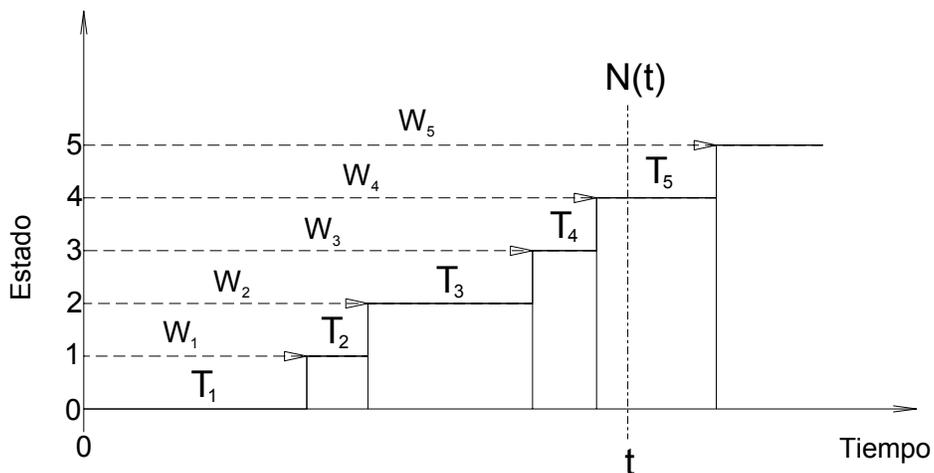


Figura II.3. Función de muestra de un proceso de Poisson.

En el caso de un proceso de daño acumulado, un punto de tiempo puede estar en cualquiera de los estados de daño $1, 2, \dots, b$ si se supone que el estado de daño inicial del punto es el estado 1, y que la falla ocurre cuando el estado b es alcanzado. Se asume que el proceso de daño es tal que sólo saltos unitarios están permitidos. Si los puntos en el tiempo en el cual estos saltos unitarios de daño pueden ocurrir son distribuidos de acuerdo al proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$, entonces el tiempo a la falla W_b es la variable aleatoria definida por

$$W_b = T_1 + T_2 + \dots + T_{b-1} \quad (II.1.33)$$

donde T_j es el tiempo usado en el estado j . Como sabemos, las T_j 's son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente con parámetro λ . Por lo tanto, W_b tiene distribución gamma con función de densidad de probabilidad

$$f_w(t; 1, b) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda t)^{b-2} e^{-\lambda t}}{\Gamma(b-1)} & \forall t > 0 \\ 0 & \forall t \leq 0 \end{cases} \quad (II.1.34)$$

donde λ es la media de ocurrencias en el tiempo, $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1) = (r-1)!$ es la función gamma, y b es el estado de falla.

Ahora es posible relacionar el proceso de Poisson con el proceso de daño acumulado, a través de las funciones de muestra del proceso. Éstas son procesos

de Poisson, y pueden ser generadas numéricamente, tomando números aleatorios. Varias realizaciones de este tipo se muestran en la figura II.4.

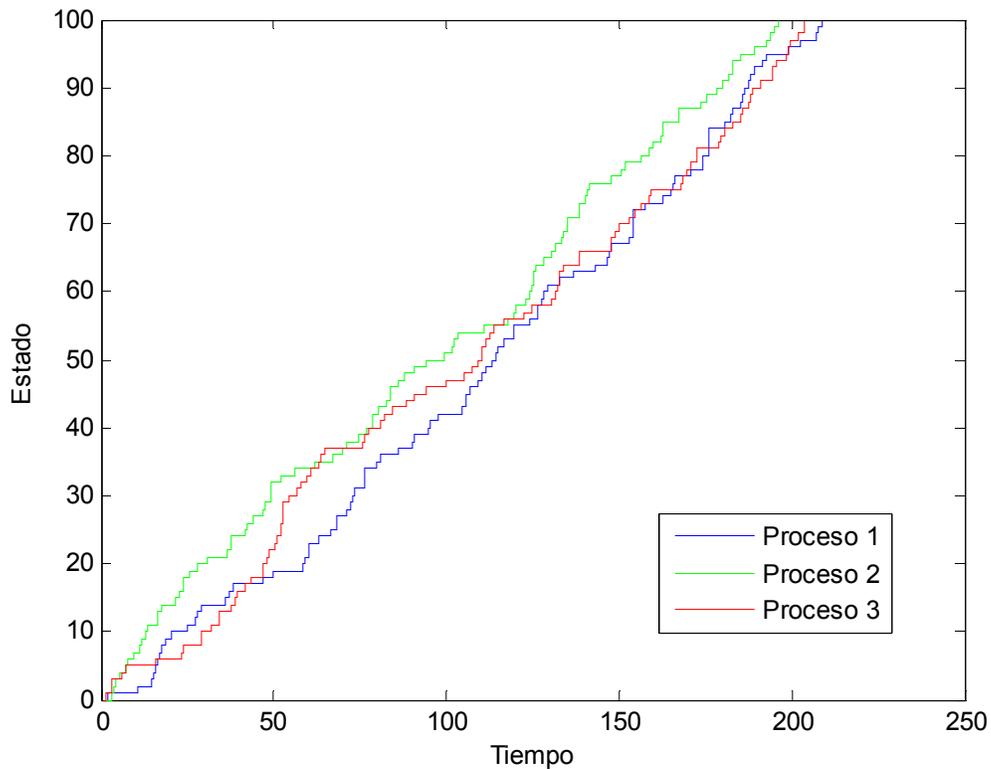


Figura II.4. Simulación de tres procesos de Poisson.

II.1.2 Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov juegan un papel fundamental en el desarrollo del modelo que aquí se presenta. El interés principal en este trabajo es el comportamiento en el tiempo finito de cadenas transitorias.

Considérese una secuencia de ensayos de un experimento en el cual los resultados posibles son E_1, E_2, \dots, E_m , donde las E_j 's son mutuamente excluyentes y exhaustivas. Esto significa, desde luego, que una y sólo una de las E_j 's puede ocurrir en cada ensayo (**Bogdanoff y Kozin, 1985**).

Se empieza la secuencia de tiros o ensayos de un estado inicial. Se necesita, entonces, la probabilidad de estar en algún estado al inicio; estas probabilidades están dadas por

$$P\{E_{j_0}\} = a_{j_0} \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum a_{j_0} = 1 \quad (\text{II.1.35})$$

En el primer ensayo, en el segundo y así sucesivamente, el estado ocupado está representado por E_{j_1} , E_{j_2} , y así, sucesivamente. Supóngase que se empieza en E_3 , en el primer ensayo se cae en E_2 , en el segundo ensayo la salida es E_{m-1} , y así, sucesivamente. Entonces se tiene la siguiente secuencia de salidas: $E_3 E_2 E_{m-1} \dots$

Si se conectan las salidas contiguas con segmentos de línea, se tiene una presentación gráfica de una secuencia de salidas. Se llamará trayectoria de muestra de salidas a esta gráfica obtenida de una secuencia de ensayos. Se representa la secuencia genérica de salidas por $E_{j_0} E_{j_1} E_{j_2} E_{j_3} \dots$

El interés de este trabajo se centra en $P\{E_{j_0} E_{j_1} E_{j_2} E_{j_3} \dots\}$ y $P\{E_{j_n}\}$, donde la primera denota la probabilidad de que ocurra una trayectoria de muestra específica, y la segunda denota la probabilidad de que una salida específica ocurra en el n -ésimo ensayo.

Se sabe que $P\{E_{j_0}\} = a_{j_0}$, si se evalúa $P\{E_{j_0} E_{j_1} E_{j_2} \dots E_{j_n}\}$, es posible encontrar $P\{E_{j_n}\}$, ya que

$$P\{E_{j_n}\} = \sum_{j_0} \sum_{j_1} \dots \sum_{j_{n-1}} P\{E_{j_0} E_{j_1} E_{j_2} \dots E_{j_n}\} \quad (\text{II.1.36})$$

Se puede continuar evaluando estas probabilidades si el proceso es completamente independiente o de Markov. El primer caso no es de interés en este trabajo, aunque lleva a modelos simples de falla. El segundo caso es el que aquí interesa. Se asume que el proceso es Markoviano, entonces

$$\begin{aligned} P\{E_{j_0} E_{j_1}\} &= P\{E_{j_0}\} P\{E_{j_1} | E_{j_0}\} \\ P\{E_{j_0} E_{j_1} E_{j_2}\} &= P\{E_{j_0}\} P\{E_{j_1} | E_{j_0}\} P\{E_{j_2} | E_{j_1}\} \end{aligned} \quad (\text{II.1.37})$$

y así, sucesivamente, por la propiedad de Markov. Denotamos las probabilidades de transición de un paso

$$P\{E_{j_k} | E_{j_{k-1}}\}$$

por

$$P\{E_{j_k} | E_{j_0}\} = p_{j_0 j_1}, \dots, P\{E_{j_k} | E_{j_{k-1}}\} = p_{j_{k-1} j_k} \quad (\text{II.1.38})$$

y se asume que las $p_{j_{k-1}j_k} \forall k = 1, 2, \dots$, son constantes. Entonces se puede escribir que

$$\begin{aligned} P\{E_{j_0} E_{j_1}\} &= a_{j_0} p_{j_0 j_1} \\ P\{E_{j_0} E_{j_1} E_{j_2}\} &= a_{j_0} p_{j_0 j_1} p_{j_1 j_2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (II.1.39)$$

Si queremos conocer $P\{E_{j_k}\}$ en el k -ésimo paso, se obtiene

$$P\{E_{j_k}\} = \sum_{j_{j-1}} \cdots \sum_{j_0} a_{j_0} p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{k-1} j_k} \quad (II.1.40)$$

Una secuencia de ensayos de un experimento con posibles salidas $E_1 E_2, \dots, E_m$ será llamado un estado finito de cadenas de Markov con probabilidades de transición constante si la probabilidad de secuencias de muestra (trayectorias) de estados son definidas por (II.1.39) en términos de una probabilidad de distribución inicial $\{a_j\}$ y probabilidades condicionales fijas $\{p_{jk}\}$ de que E_k ocurra en un ensayo, dado que E_j ocurrió en el ensayo previo (**Feller, 1957**).

Una cadena de Markov se denomina estacionaria de estado finito si las p_{jk} 's no dependen del número de ensayos, de lo contrario la cadena de Markov es llamada no estacionaria.

Es útil introducir la siguiente notación: sea

$$p_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \quad (II.1.41)$$

un vector fila (1 x m),

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado final} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \\ \left[\begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} \\ \text{Estado inicial} \end{array} \end{array} \quad (II.1.42)$$

una matriz de transición de probabilidad ($m \times m$)

$$p_k = \{PE_{1k}, PE_{2k}, \dots, PE_{mk}\}$$

$$p_k = \{p_k(1), p_k(2), \dots, p_k(m)\} \quad (\text{II.1.43})$$

un vector fila ($1 \times m$). Reconociendo que (II.1.40) es una multiplicación matricial, dicha ecuación se puede reemplazar por

$$p_k = p_0 P^k \quad (\text{II.1.44})$$

Obviamente debemos tener

$$\sum_{j=1}^m p_k(j) = 1 \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^m p_{jk} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (\text{II.1.45})$$

La forma de la matriz que aquí interesa se muestra a continuación, donde el signo “+” es una entrada diferente de cero en la matriz P . Considérese

$$P = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.46})$$

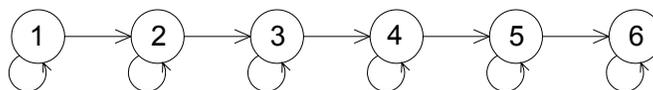


Figura II.1.1. Diagrama de flujo de la matriz de transición de probabilidad P .

El diagrama de flujo para esta matriz de transición de probabilidad P se muestra en la figura II.1.1, en la cual se ha reemplazado E_j por j . Se puede observar de (II.1.46) o de su diagrama de flujo asociado que, si se está en uno de los estados o salidas 1, 2, 3, 4, o 5 en el principio de un ensayo, se puede permanecer en ese estado o brincar al siguiente. Una vez que se deja uno de esos estados, no se puede entrar ahí otra vez. Debido a lo anterior, los estados 1, 2, 3, 4 y 5, son llamados *estados de transición*. El estado 6 es interesante, ya que una vez que se entra ahí ya no se puede salir de él; es llamado *estado absorbente*, es por eso que se observa el 1 en (II.1.46). Estas observaciones explican la notación en el diagrama de flujo. La suma en las filas en (II.1.46) debe ser unitaria por (II.1.45). Dado que sólo están permitidos saltos unitarios en (II.1.46), se llamará a P una matriz de transición de probabilidad de salto unitario.

Dadas $\{a_j\}$ y p_{jk} , es posible generar trayectorias de muestras usando la computadora. La ecuación (II.1.44) es apropiada para cálculos numéricos en la computadora. Sin embargo, también se necesitan fórmulas explícitas para las

distribuciones de tiempos de ir de un estado a otro, momentos de esos tiempos, entre otros.

Se pueden obtener resultados analíticos para cadenas de Markov estacionarias de manera directa para ciertas formas de P si se usan transformadas geométricas y funciones características.

Es conveniente en este punto cambiar un poco la notación para facilitar su manejo. Se denotará el estado E_j simplemente por j ; además, los estados serán ahora $1, 2, \dots, b$, es decir, se reemplazará m por b . Para una secuencia ordenada de los estados E_{j_0}, E_{j_1}, \dots , los subíndices $0, 1, \dots$ denotan el tiempo x ; así, E_{j_k} representa el estado ocupado en el tiempo $x = k$. Se asume el tiempo $x = 0, 1, 2, \dots$; así, el tiempo es discreto y está indicado en números no negativos. Se asocia el estado inicial de la cadena E_{j_0} con $x = 0$, el estado E_{j_1} después del primer ensayo con $x = 1$, el estado E_{j_2} después del segundo ensayo con $x = 2$, y así, sucesivamente. P es ahora una matriz $(b \times b)$,

$$p_0 = \{a_1, \dots, a_m\} \equiv \{\pi_1, \dots, \pi_b\},$$

$$p_x = \{p_x(1), \dots, p_x(b)\}, \quad (\text{II.1.47})$$

También se ha reemplazado a_j por π_j . Entonces (II.1.44) se convierte en

$$p_x = p_0 P^x \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.1.48})$$

donde $P^0 = I$, la matriz identidad $(b \times b)$. La ecuación (II.1.48) se multiplica por z^x y se suma en x . Si se tiene

$$\sum_0^{\infty} p_x z^x = \chi(z) \quad \text{y} \quad \sum_0^{\infty} P^x z^x = \Psi(z) \quad (\text{II.1.49})$$

se obtiene

$$\chi(z) = p_0 \Psi(z) \quad (\text{II.1.50})$$

Un componente $p(y; z)$ de $\chi(z)$ es la función generadora de la probabilidad de estar en el estado y . El elemento $\psi_{j,k}(z)$ de la matriz $(b \times b)$ $\Psi(z)$ es la función generadora de probabilidad de estar en el estado k , dado que se estuvo en el estado j al principio. Obviamente, de (II.1.50) se obtiene:

$$p(y; z) = \sum_{j=1}^b \pi_j \psi_{j,k}(z) \quad \forall \quad y = 1, \dots, b \quad (\text{II.1.51})$$

La segunda fórmula de (II.1.49) puede escribirse como

$$\Psi(z) = \sum_0^{\infty} P^x z^x = (I - Pz)^{-1} \quad (\text{II.1.52})$$

Como ya se sabe, se puede escribir

$$\psi_{j,k}(z) = (-1)^{j+k} \frac{(k, j) \text{cofactor de } |I - Pz|}{|I - Pz|} \quad (\text{II.1.53})$$

donde $|I - Pz|$ es el determinante de la matriz $I - Pz$.

Se observa que las $\psi_{j,k}(z)$'s son funciones generadoras de las probabilidades de los tiempos de pasar de un estado a otro.

Se asume que P tiene la siguiente forma

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & q_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{b-1} & q_{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.54})$$

donde $p_j, q_j > 0, p_j + q_j = 1, j = 1, \dots, b-1$.

Al evaluar (II.1.53) para varios j, k se tiene

$$\begin{aligned} \psi_{1,y}(z) &= \frac{q_1 \cdots q_{y-1} z^{y-1}}{(1-p_1 z) \cdots (1-p_y z)} \quad \forall \quad 1 < y \leq b-1, \\ \psi_{1,b}(z) &= \frac{q_1 \cdots q_{b-1} z^{b-1}}{(1-p_1 z) \cdots (1-p_{b-1} z)(1-z)}, \\ \psi_{y,b}(z) &= \frac{q_y \cdots q_{b-1} z^{b-y}}{(1-p_y z) \cdots (1-p_{b-1} z)(1-z)} \quad \forall \quad y = 1, \dots, b-1, \\ \psi_{j,y}(z) &= \frac{q_j \cdots q_{y-1} z^{y-j}}{(1-p_j z) \cdots (1-p_y z)} \quad \forall \quad 1 \leq j < y \leq b-1, \\ \psi_{j,j}(z) &= \frac{1}{1-p_j z} \quad \forall \quad j = 1, \dots, b-1 \end{aligned} \quad (\text{II.1.55})$$

Al examinar las expresiones anteriores se puede observar que la primera, cuarta y quinta tienen la misma forma general. $\psi_{1,y}(z)$ es la función generadora de probabilidad de estar en el estado y en el tiempo x dado que se estuvo en el estado 1 en $x=0$. $\psi_{j,y}(z)$ tiene un significado similar, $\psi_{j,j}(z)$ es la función generadora de probabilidad de estar en el estado j en el tiempo x dado que se estuvo en el estado j en $x=0$. Estas funciones generadoras no generan una función de masa de probabilidad. Para ver esto recordemos que si una función $P_X(z)$ es la función generadora de la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta X , se tiene que $P_X(1)=1$. Sin embargo, $\psi_{j,j}(1)=1/q_j$; así, $\psi_{j,j}(z)$, $\psi_{1,y}(z)$, $\psi_{j,y}(z)$, no son funciones generadoras de la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Esto significa que no podemos usar $\psi_{j,j}(z)$, $\psi_{1,y}(z)$ y $\psi_{j,y}(z)$ para calcular los momentos de los tiempos correspondientes para alcanzar el estado y (ó j) $< b$ dado que se está en $1 \leq j (\leq y)$ en $x=0$.

Sea $T_{j,y}$ el tiempo para alcanzar el estado $y (< b)$ dado que se está en el estado $1 \leq j (< y)$ en el tiempo $x=0$. Entonces, ya que $\psi_{j,y}(z)$ es la función generadora de $T_{j,y}$,

$$P\{T_{j,y} = x\} = \text{coeficiente de } z^x \text{ en } \psi_{j,y}(z) \quad (\text{II.1.56})$$

Para encontrar la expansión en potencias de z de $\psi_{j,y}(z)$ con $j < y$, se usan fracciones parciales. Para facilidad en los cálculos, se asume primero que $1 > p_1 > p_2 > \dots > p_{b-1} > 0$, se encuentra que

$$\psi_{j,y}(z) = q_j \dots q_{y-1} \left[\frac{1}{(p_j - p_{j+1}) \dots (p_j - p_y)} \frac{1}{1 - p_j z} + \dots + (-1)^{y-j} \frac{1}{(p_j - p_y) \dots (p_{y-1} - p_y)} \frac{1}{1 - p_y z} \right] \quad (\text{II.1.57})$$

La expansión en fracciones parciales se vuelve más compleja si sólo algunas de las p_j 's son igual en valores; aquí no escribiremos este caso. Sin embargo, si $1 > p_1 = \dots = p_{b-1} = p > 0$, $q = 1 - p$, se encuentra

$$\psi_{j,y}(z) = \frac{q^{y-j} z^{y-j}}{(1 - pz)^{y-j+1}} \quad (\text{II.1.58})$$

Se define una nueva función generadora $\phi_{y,b}(z)$ por medio de la fórmula

$$\phi_{y,b}(z) = (1-z)\psi_{y,b}(z) \quad (\text{II.1.59})$$

Se tiene de (II.1.55) que

$$\phi_{y,b}(z) = \frac{q_y \cdots q_{b-1} z^{b-y}}{(1-p_y z) \cdots (1-p_{b-1} z)} \quad (\text{II.1.60})$$

Se puede ver que $\phi_{y,b}(1) = 1$; por ello, $\phi_{y,b}(z)$ es la función generadora de la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Se denota esta variable aleatoria por $W_{y,b}$.

Usando fracciones parciales cuando $1 > p_1 > p_2 > \cdots > p_{b-1} > 0$, se tiene que

$$P\{W_{y,b} = x\} = \begin{cases} q_y \cdots q_{b-1} \left[\frac{p_y^x}{(p_y - p_{y+1}) \cdots (p_y - p_{b-1})} + \cdots + (-1)^{b-y} \frac{p_{b-1}^x}{(p_y - p_{b-1}) \cdots (p_{b-2} - p_{b-1})} \right] & \forall x \geq b-y \\ 0 & \forall x < b-y \end{cases} \quad (\text{II.1.61})$$

En el caso que $1 > p_1 = \cdots = p_{b-1} = p > 0$, $q = 1 - p$, como se dijo antes, se usa la expansión binomial de $(1 - pz)^{-(b-y)}$,

$$P\{W_{y,b} = x\} = \begin{cases} \binom{x-1}{x-b-y} p^{x-b+y} q^{b-y} & \forall x \geq b-y \\ 0 & \forall x < b-y \end{cases} \quad (\text{II.1.62})$$

Las ecuaciones (II.1.61) y (II.1.62) definen la función de masa de probabilidad de $W_{y,b}$. Se puede escribir

$$P\{W_{y,b} = x\} = p_{y,b}(x) \quad (\text{II.1.63})$$

y, ya que,

$$\begin{aligned} \phi_{y,b}(z) &= \sum_0^{\infty} p_{y,b}(x) z^x \\ (1-z)^{-1} &= 1 + z + z^2 + \cdots \end{aligned} \quad (\text{II.1.64})$$

se obtiene

$$\psi_{y,b}(z) = p_{y,b}(0) + [p_{y,b}(0) + p_{y,b}(1)]z + \cdots + [p_{y,b}(0) + \cdots + p_{y,b}(k)]z^k + \cdots \quad (\text{II.1.65})$$

Pero

$$F_W(x; y, b) = P\{W_{y,b} \leq x\} = \sum_{k=0}^x p_{y,b}(k) \quad (II.1.66)$$

Así

$$\psi_{y,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_W(x; y, b) z^x \quad (II.1.67)$$

Además, $\psi_{y,b}(z)$ es la función generadora de la función de distribución acumulada de $F_W(x; y, b)$ de $W_{y,b}$.

Es posible, ahora, encontrar las expresiones para los momentos de $W_{y,b}$, usando la función generadora de probabilidad $\phi_{y,b}(z)$ o la función característica

$$\phi_{y,b}(u) \equiv \phi_{y,b}(e^{iu}) = \frac{q_y \cdots q_{b-1} e^{i(b-y)u}}{(1 - p_y e^{iu}) \cdots (1 - p_{b-1} e^{iu})} \quad (II.1.68)$$

Los momentos de $W_{y,b}$ son

$$\begin{aligned} E\{W_{y,b}\} &= \sum_y^{b-1} (1 + r_j) \\ \text{var } W_{y,b} &= \sum_y^{b-1} r_j (1 + r_j) \\ \mu_3\{W_{y,b}\} &= \sum_y^{b-1} r_j (1 + r_j) (1 + 2r_j) \\ \psi_4\{W_{y,b}\} &= 3[\text{var } W_{y,b}]^2 + \sum_y^{b-1} r_j (1 + r_j) (1 + 2r_j) (1 + 3r_j) + \sum_y^{b-1} r_j^2 (1 + r_j) \end{aligned} \quad (II.1.69)$$

donde $r_j = \frac{p_j}{q_j}$.

II.2 Planteamiento del modelo de daño por corrosión

En esta parte del trabajo se plantea el modelo de daño acumulado por corrosión, usando las ideas de cadenas finitas de Markov.

Se empieza dando dos descripciones cualitativas del proceso de daño acumulado y se discuten las características del modelo. Después se usa la herramienta matemática de transformada geométrica para proveer un modelo general cuantitativo de un proceso de daño acumulado.

II.2.1 Aspectos cualitativos de los modelos de daño acumulado

II.2.1.1 Punto de vista de la función muestra

La situación física que se considera para el modelo es la siguiente: una unidad está en operación en un cierto ambiente, y durante el ciclo de operación ocurren cambios irreversibles. Estos cambios irreversibles se acumulan hasta que la unidad ya no puede funcionar satisfactoriamente; se dice, entonces, que la unidad ha fallado; el tiempo en el cual la unidad cesa de funcionar satisfactoriamente es llamado el tiempo a la falla o tiempo de vida de la unidad; el proceso por el cual se acumula daño irreversible, es llamado un proceso de daño acumulado. La corrosión es un proceso de este tipo, aunque también lo son fatiga, desgaste, crecimiento de grietas, entre otros.

Considérese en este caso, el desgaste en un ducto de transporte de hidrocarburos. Se asume que el ducto es inicialmente nuevo. Las profundidades de los diferentes defectos son medidos en varios lugares a lo largo la tubería. Como la tubería se desgasta, habrá un *gradual aumento en la profundidad* del defecto; la pérdida de material o el aumento de profundidad es un proceso de daño acumulado *observable*. Se pueden obtener datos en varios tiempos, de la pérdida de material en varios puntos de la tubería, que están siendo monitoreados. Un tramo es retirado (o ha fallado) de su servicio normal cuando estas observaciones alcanzan un valor prescrito en uno o más de los puntos monitoreados. Sea d_t la profundidad del defecto que está siendo usada para determinar cuándo debe ser retirado de servicio un tramo. d_t es una función definida del aumento de profundidad de defectos en los puntos monitoreados. Sea d_f el valor de d_t en el cual la pieza es retirada.

La figura II.2.1 muestra la evolución de d_t para un defecto como función de t . t_1 denota el tiempo en el cual $d_{t_1} = d_f$. Cuando más piezas son puestas en operación y su desgaste es monitoreado, obtenemos más curvas d_t contra t , como se muestra en la figura II.2.2, en la cual se observa que todas parten del mismo nivel de daño inicial.

Las curvas d_t contra t son llamadas funciones de muestra del proceso de daño acumulado. Cada pieza tiene su propia función de muestra; se tienen tantas funciones de prueba como piezas probadas. La probabilidad de que dos funciones de muestra coincidan es insignificante, debido a la variabilidad inherente en las condiciones de servicio y en las operaciones de manufactura.

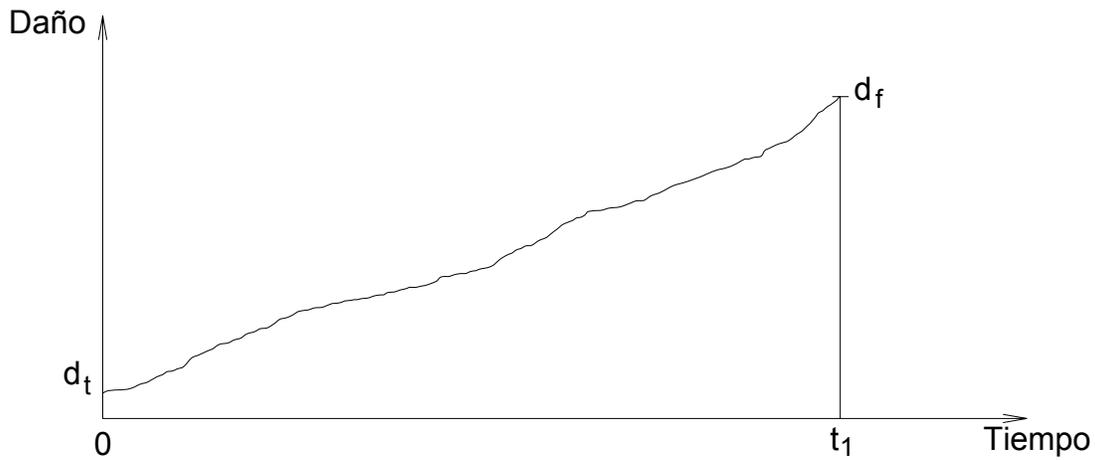


Figura II.2.1. Función de muestra de acumulación de daño d_t a la falla en d_f .

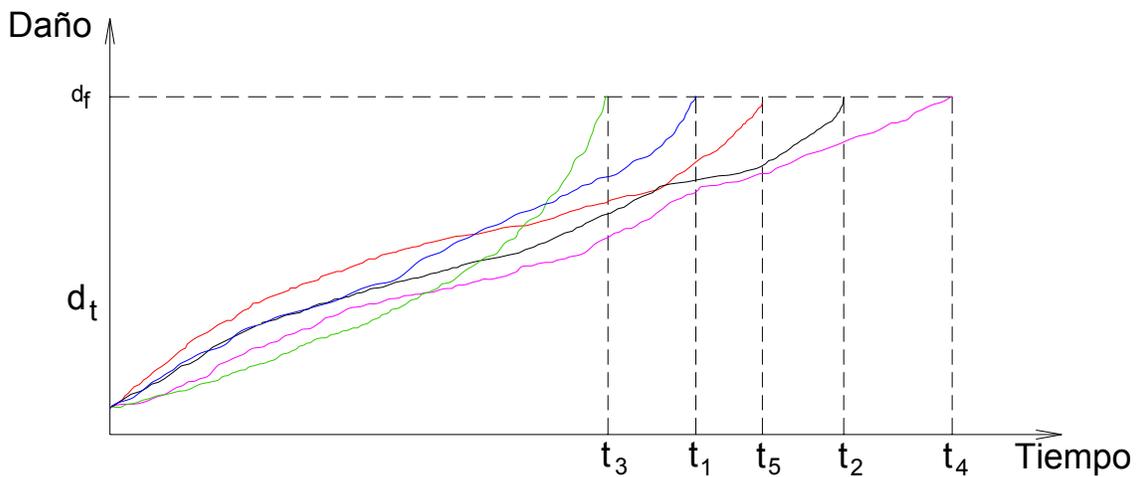


Figura II.2.2. Funciones de muestra de acumulación de daño d_t a la falla en d_f .

Los tiempos t_1, t_2, \dots, t_n en los cuales las piezas son retiradas, también serán, en general, diferentes, por la inherente variabilidad; sin embargo, algunas de estas t 's pueden coincidir. Se reordenan las t 's así,

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots < t_n$$

Estas t 's son las t_j 's originales puestas en orden ascendente. La función de distribución empírica del tiempo a la falla se denota por $F_n(t)$, y está definida como sigue:

$$\begin{aligned}
 F_n(t) &= 0 & \forall & \quad t < t_1 \\
 F_n(t) &= \frac{1}{n} & \forall & \quad t_1 \leq t < t_2 \\
 F_n(t) &= \frac{2}{n} & \forall & \quad t_2 \leq t < t_3 \\
 & \vdots & & \\
 F_n(t) &= 1 & \forall & \quad t \geq t_n
 \end{aligned}$$

donde n representa el número de muestras en la prueba. Ya que $F_n(t)$ es una función de los datos, es un *estadístico*, y ya que los datos están ordenados, es un *estadístico de orden*. Cada vez que se hace la prueba con un tamaño de muestra n se obtienen diferentes $F_n(t)$. Habrá una considerable variabilidad entre las $F_n(t)$'s cuando n es pequeño y la variabilidad disminuye al incrementarse n .

Es sabido que bajo condiciones razonables, las fluctuaciones entre las $F_n(t)$'s se aproximan a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

$F_n(t)$ resume los datos de la prueba en el tiempo de falla, pero no define cómo evoluciona el proceso de desgaste en el tiempo, esto es, el comportamiento de función de muestra como función del tiempo. Las funciones de muestra son monótonamente crecientes, figuras II.2.1 y II.2.2, ya que una vez que se inicia el proceso no puede recuperarse mientras esté en operación. Este es un rasgo característico de un proceso de daño acumulado.

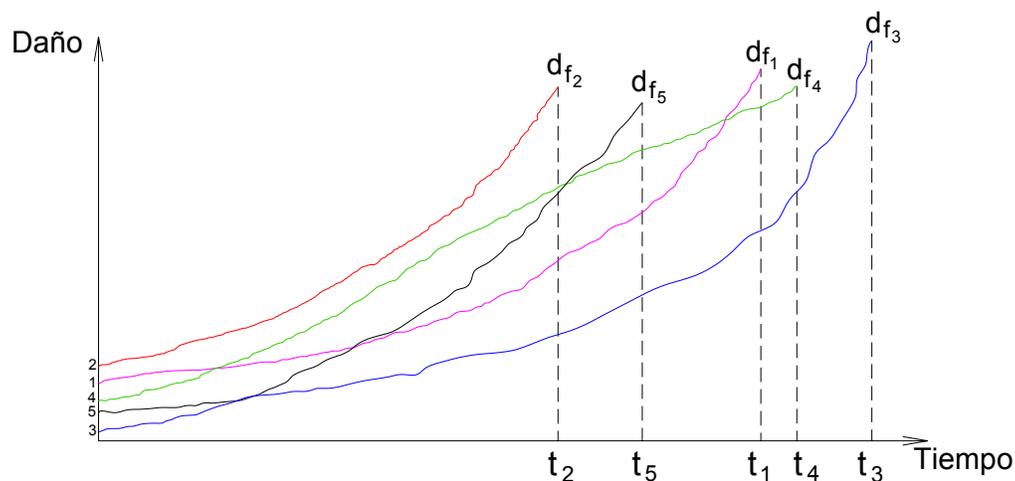


Figura II.2.3. Funciones de muestra de acumulación de daño d_i a la falla en diferentes d_f 's con diferente daño inicial.

El comportamiento de la función de muestra puede ser diferente al mostrado en las figuras anteriores. Considérese el comportamiento de la función muestra mostrada en la figura II.2.3. Aquí, el estado inicial de daño d_0 es diferente para cada función de muestra; el valor de d_f en el cual la pieza es retirada o falla es también diferente para cada función. Este tipo de comportamiento de la función de muestra es físicamente admisible. Por ejemplo, al iniciarse el proceso se pueden tener diferentes profundidades de defectos, provocando diferentes d_0 's.

Las variaciones en los daños iniciales pueden deberse al variable control de calidad en la manufactura de nuevos artículos, deterioro variable durante el almacenamiento hasta que el artículo es puesto en servicio, entre otras causas. En especímenes de prueba con cuidadosa manufactura, puede ser razonable esperar pequeña variabilidad inicial; y si no hay calidad en la manufactura o no puede ser estrictamente controlada, o si hay diferentes fabricantes, puede esperarse considerablemente más variabilidad. En todos los eventos, el estado inicial de daño puede tener variabilidad, que en un modelo matemático puede ser especificado por una distribución de probabilidad.

Los variables niveles de daño en los cuales la falla o el retiro ocurren pueden surgir de varias formas. Una herramienta de cortar puede ser considerada agotada cuando corta deficientemente, donde *deficientemente* determina un sub intervalo de valores sobre el rango de desgaste de la herramienta. Una pieza en fatiga o corrosión puede ser retirada la primera vez que en la inspección se detecte una grieta que rebase la longitud especificada. Estos ejemplos son suficientes para indicar que el nivel de daño en el cual ocurre la falla o el retiro puede tener variabilidad, que también puede ser incluido en un modelo matemático.

Hay otro tipo de comportamiento de función de muestra. Aquí hay un corto periodo de entrada durante el cual el daño, corrosión, por ejemplo, se acumula rápidamente. Después de este periodo inicial, la acumulación de daño tiene una tasa medianamente constante, que está reflejada en la pendiente más o menos constante de la función de muestra; esto puede ser visto como un periodo de acumulación de daño estable. Este tipo de comportamiento de función de muestra es el que ocurre en el proceso de corrosión.

Los procedimientos de inspección y reemplazo son usados frecuentemente para asegurar, tanto como sea posible, la operación libre de fallas por periodos extendidos. La figura II.2.4 muestra el comportamiento de la función de muestra cuando el daño por encima del nivel d_i es siempre detectado, la pieza sustituida es reemplazada por una nueva, y los periodos de inspección son regularmente espaciados.

Es conveniente obtener gráficos detallados de las funciones de muestra, para ello, el daño de interés (aumento en la profundidad del defecto) debería ser monitoreado frecuentemente.

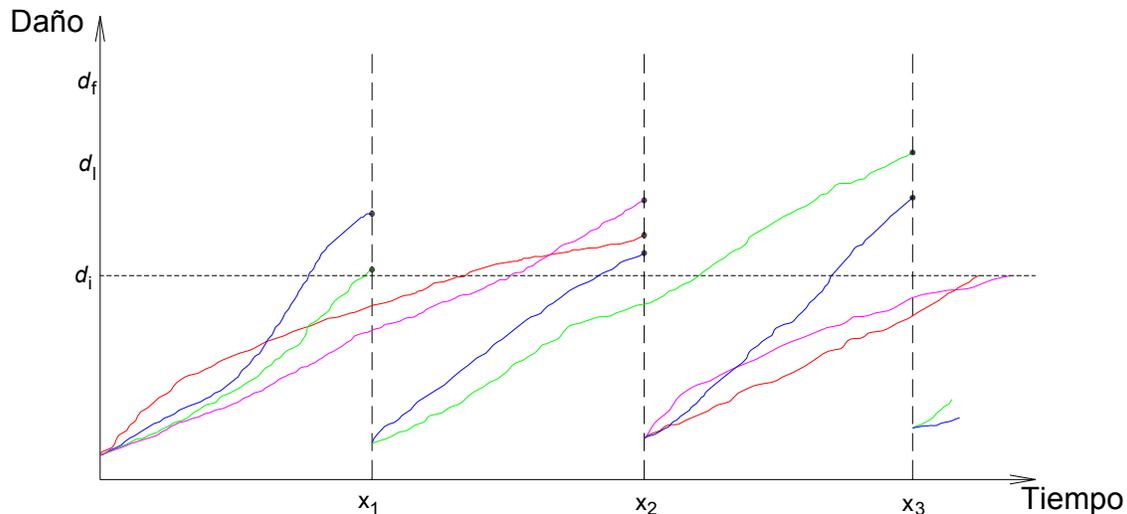


Figura II.2.4. Funciones de muestra de acumulación de daño con inspecciones en x_1, x_2, \dots y reemplazo.

Se pueden hacer numerosas observaciones acerca del proceso de daño acumulado, basado en lo que se ha mencionado:

1. hay un ciclo en el modo de operación,
2. el valor inicial de daño puede ser aleatorio,
3. el daño a la falla puede ser aleatorio,
4. la acumulación de daño en un ciclo es no decreciente, y es aleatorio,
5. si el ascenso inicial en una función de muestra es lento, un cambio en el daño inicial tiene una profunda influencia en la magnitud de las t_j 's,
6. si el ascenso final de una función de muestra a la falla es rápido, un cambio en el daño en la falla tiene poca influencia en la magnitud de t_j ,
7. una función de distribución empírica del tiempo a la falla no necesariamente caracteriza el comportamiento de la función de muestra, y
8. los procedimientos de inspección y reemplazo terminan una función de muestra y empieza otra.

El punto de vista de la función de muestra proporciona una idea para comprender cómo es la acumulación de daño en el tiempo. Es un poco más complicado pasar de las observaciones físicas de las funciones de muestra a un modelo matemático del proceso de daño acumulado. Sin embargo, partiendo de un modelo matemático como el modelo de choque que se considera a continuación, se sigue fácilmente a un modelo del proceso con funciones de muestra no decrecientes.

II.2.1.2 Modelo de choque

Un ciclo de servicio es un periodo repetitivo de operación en la vida de un componente durante el cual puede acumularse daño. El tiempo x es medido en número de ciclos de servicio y es discreto, es decir, $x=0,1,2,\dots$. Se supone también, que el daño es discreto con estados $d=0,1,2,\dots,b$, donde el estado b representa, ya sea *reemplazo si es necesario* u *ocurrencia de la falla*.

A primera vista puede parecer muy restrictivo asumir que el daño es discreto en lugar de continuo. Sin embargo, la restricción impuesta es sencilla en términos de pérdida de realidad física cuando es comparada con la ventaja computacional ganada. Una situación análoga existe en mecánica continua cuando se introducen elementos finitos discretos, ya que proveen una potente herramienta computacional con un ligero costo en la realidad física. Si todos los componentes son hechos e inspeccionados cuidadosamente, y puestos en operación sin ninguna acumulación de daño en el almacenamiento debido a la corrosión y otros fenómenos, es frecuentemente satisfactorio asumir que el estado inicial es 1. Obviamente habrá casos en los que no sea posible asumir esto.

Las dos primeras suposiciones son equivalentes a decir que se supone que el daño acumulado puede ser modelado como un proceso de estados finitos y tiempo discreto.

Se asume que el daño está en el estado 1 en $x=0$, y que durante un ciclo de servicio, un golpe o impacto ocurre. Si el impacto está por debajo de algún nivel crítico, ningún daño es adquirido; si el impacto está arriba del nivel crítico, una unidad de daño ocurre. A continuación se introduce la probabilidad o aleatoriedad en el modelo.

Sea p_1 la probabilidad de que un golpe esté por debajo del nivel crítico, dado que el daño está inicialmente en el estado 1, y sea $q_1=1-p_1$ la probabilidad de que el golpe exceda el nivel crítico, dado que el daño está inicialmente en el estado 1. Se asume, básicamente, una secuencia de ensayos de Bernoulli hasta la primera vez que el valor crítico es excedido, donde q_1 es la probabilidad de *éxito* en una sola prueba. Se supone independencia entre tiros en los ensayos de Bernoulli. Empezando en $x=0$ en el estado de daño 1, el daño permanece en el estado 1 hasta la primera vez que el golpe excede el valor crítico; entonces el daño pasa al estado 2. p_1 y q_1 no dependen de x , sin embargo, la dependencia de x puede ocurrir. La distribución del tiempo hasta que el golpe excede el valor crítico es la distribución geométrica.

Ahora se supone que el daño ha entrado al estado 2. Sea p_2 la probabilidad de que el golpe no exceda el nivel crítico, dado que el daño está inicialmente en el estado 2, y sea $q_2=1-p_2$ la probabilidad de que el golpe exceda el nivel crítico, dado que el daño está inicialmente en el estado 2. Nótese que p_2 y q_2 dependen

sólo de estar inicialmente en el estado 2, y no de cómo se pasó del estado 1 al 2. Otra vez se supone una secuencia de ensayos de Bernoulli hasta la primera vez que el segundo valor crítico es alcanzado. Una vez que se ha entrado en el estado 2, el daño permanece en el estado 2 hasta la primera vez que ocurre un golpe que excede el nivel crítico; entonces el daño va al estado 3, y así sucesivamente.

De manera más general, se considera que el daño acaba de entrar al estado j . Sea p_j y $q_j = 1 - p_j$, la probabilidad de que un golpe no exceda un nivel crítico, dado que el daño está inicialmente en el estado j ($j = 1, 2, \dots, b - 1$) y la probabilidad de que el golpe exceda el nivel crítico, respectivamente, dado que el componente está inicialmente en el estado j . Nuevamente nótese que p_j y q_j dependen solamente de estar inicialmente en el estado j ; no importa saber cómo fue alcanzado el estado j . Así, la historia del proceso es resumida por el presente estado ocupado. Se introduce la usual suposición de la secuencia de los ensayos de Bernoulli. Una vez que el daño entra al estado j , permanece en ese estado hasta la primera vez que un golpe excede el nivel crítico; entonces el daño va al estado $j+1$.

Continuando de esta manera, el daño se incrementa en una unidad en el tiempo, hasta que el estado b es alcanzado, y entonces, el modelo es detenido, ya sea debido al reemplazo o a la falla. Se supone que p_j y $q_j = 1 - p_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, b - 1$, son independientes de x ; esto significa que se tiene un modelo independiente del tiempo o estacionario. Cuando p_j y q_j dependen de x , se tiene un modelo no estacionario. Si las probabilidades p_j y q_j dependen de j , se tiene un modelo de daño acumulado dependiente del estado; si p_j es constante para $j = 1, 2, \dots, b - 1$, el proceso es, obviamente, independiente del estado. La suposición de que la historia del proceso es resumida en el presente, es la suposición básica para la mayoría de los modelos dinámicos; en el presente enfoque probabilista, ésta es la bien conocida suposición de Markov.

Cuando hay un proceso de daño acumulado físico observable, los estados del modelo serán una función de lo observable. En este caso, en el proceso de corrosión, los estados del modelo son función de la profundidad del daño, que son obtenidas durante la inspección.

La versión del modelo de choque, que se acaba de dar, es descriptiva de un modelo de daño acumulado de salto unitario.

Considérense los siguientes casos particulares. Se supone que $1 > p_1 > p_2 > \dots > p_{b-1}$, o, de manera equivalente, $q_1 < q_2 < \dots < q_{b-1}$. Esta suposición indica, enfocando la atención a las q_j 's, que la probabilidad de que un golpe exceda el nivel crítico se incrementa al incrementarse el estado de daño. Así, la capacidad de resistir los efectos del daño del golpe decrece a medida que

el daño se incrementa. Si en lugar de eso, asumimos $q_1 > q_2 > \dots > q_{b-1}$, entonces, la capacidad para resistir los efectos del daño por el golpe se incrementan en la medida que el estado de daño se incrementa. Finalmente, se puede observar que si $q_1 = \dots = q_{b-1}$, significa que la capacidad de resistir los efectos del daño por los golpes no depende del estado de daño ocupado.

Obviamente, p_j y q_j , son probabilidades condicionales, dado que dan las probabilidades de estar en, o dejar el estado j , dado que se inició en el estado j :

$$p_j = \text{prob}\{\text{permanecer en el estado } j \mid \text{inició en el estado } j\},$$

$$q_j = \text{prob}\{\text{ir al estado } j+1 \mid \text{inició en el estado } j\}$$

En todos los eventos, p_j y q_j definen la evolución del proceso de acumulación de daño del estado 1 al estado b .

La suposición de que p_j y q_j son independientes de x significa que no hay cambios ambientales, cambios severos a través del tiempo en el ciclo de servicio, cambios químicos en los componentes, entre otros; esta suposición puede corresponder a muchos procesos físicos de acumulación de daño. Sin embargo, es fácil identificar procesos físicos en los cuales hay cambios ambientales, cambios en la severidad del ciclo de servicio, entre otros. Para adecuar dichos procesos es necesario que p_j y q_j cambien con el tiempo.

Ya se ha mencionado anteriormente que, para una manufactura cuidadosa de los componentes que son puestos en servicio inmediatamente después de la fabricación o que son cuidadosamente protegidos en el almacenamiento antes de ser puestos en servicio, la suposición de que el estado 1 es el ocupado inicialmente por todos los componentes es razonable. Si, por otro lado, la manufactura e inspección no mantienen estrictos estándares, o la degradación ocurre en el almacenamiento antes del uso, la suposición de que sólo el estado 1 es inicialmente ocupado, no es realista.

La presencia de variabilidad en la calidad inicial de los componentes pueden ser manejados por el modelo de una manera simple. Se asigna una probabilidad de distribución a los estados iniciales ocupados como sigue:

$$\pi_j = \text{prob}\{\text{el estado } j \text{ esté inicialmente ocupado}\} \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, b-1,$$

$$\pi_b = 0$$

Se sabe que $\sum_1^b \pi_j = 1$. La suposición de que $\pi_b = 0$ significa que ningún componente esté en estado de falla b inicialmente. Así, la distribución de probabilidad

$$p_0 = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{b-1}, 0\}$$

hace posible contar la variabilidad en la manufactura y los estándares en la inspección inicial, degradación de calidad debido al almacenamiento, entre otras causas.

En el presente trabajo se considera que la acumulación de daño inicia en el primer estado, es decir,

$$p_0 = \{1, 0, \dots, 0\}$$

La descripción inicial indica que el estado b corresponde a la falla o al reemplazo. En algunas situaciones físicas no es posible dar una definición precisa del estado que corresponde a la *falla* o al *reemplazo*. Por ejemplo, supóngase cuando en el estado j ocurre una repentina sobrecarga que causa la falla, o una cortadura ocurre en una llanta que causa la falla. Nótese que aquí se ha usado *falla* en el sentido que el componente deba ser removido o reemplazado por alguna causa. El modelo satisface la situación asignando una probabilidad de falla a un estado, tan pronto como el estado es ocupado:

$$\rho_j = \text{prob}\{\text{falla}|\text{en el estado } j\}$$

entonces la distribución de probabilidad

$$\rho = \{0, \rho_2, \dots, \rho_b\}, \quad \sum_1^b \rho_j = 1$$

expresa cómo están especificados *falla* o *reemplazo* en los estados $j = 1, 2, \dots, b$.

La suposición $\rho_b = 1$ significa que *falla* o *reemplazo* ocurren sólo cuando es alcanzado el estado b . En muchas situaciones físicas, la suposición $\rho_b = 1$ es requerida porque la falla corresponde a la rotura o algo observable, por ejemplo, la profundidad del daño alcanza un valor especificado.

Se supone $\rho_1 = 0$ ya que debe haber al menos un estado al empezar que no corresponde a la falla. Entonces, el modelo puede contar con la variabilidad inherente en la definición de *falla* o *reemplazo* que ocurre en muchas situaciones físicas.

Basado en el modelo descrito y con relación a lo observable, se puede resumir ahora lo que se ha dicho, usando el punto de vista del modelo de choque:

1. estándares de manufactura y control de calidad, degradación en el almacenamiento, entre otros, pueden ser fuente significativa de variabilidad. Esta fuente de variabilidad es descrita por una distribución de probabilidad en los estados y es denotada por una distribución de probabilidad inicial p_0 en el modelo de golpe que tiene estados de daño discretos $1, 2, \dots, b$,
2. la severidad del ciclo de servicio, cambios ambientales, envejecimiento, y otros, pueden ser una segunda fuente significativa de variabilidad. Esta fuente de variabilidad es descrita por distribuciones de probabilidad $p_j(x)$, $q_j(x)$, en el modelo de choque que se modela en tiempo discreto $x = 0, 1, 2, \dots$, y
3. el estado en el cual ocurren el reemplazo o la falla, puede ser una tercera fuente de variabilidad. Se describe esta fuente por medio de la distribución de probabilidad ρ sobre los estados discretos de tiempo.

Nótese que los puntos anteriores pueden ser caracterizados cuantitativamente por medio de los parámetros establecidos.

El modelo de choque puede explicarse con un modelo matemático probabilista, el cual, está basado en las funciones de muestra.

Las funciones de muestra están construidas usando p_0 , p_j y q_j para un modelo de salto unitario, así como ρ .

Primero, se muestrea una variable aleatoria con distribución p_0 para determinar el estado inicial de la primera función de muestra; supóngase que se empieza en el estado k . Posteriormente, se muestrea una variable aleatoria con distribución p_k y q_k , como ya fueron descritas, hasta que se ingresa al estado $k+1$, se muestrea una variable aleatoria con distribución p_{k+1} y q_{k+1} hasta que se ingresa al estado $k+2$, y así sucesivamente. Esto produce una función creciente que tiene saltos unitarios en tiempos aleatorios. Finalmente, se muestrea una variable aleatoria con distribución ρ para determinar el estado, digamos l , en el cual la función de muestra termina. Por lo tanto, la primera función de muestra empieza en el estado k , es creciente, y termina cuando se ingresa por primera vez al estado l . Al repetir este proceso, se encuentra la segunda función de muestra, tercera función de muestra, y así sucesivamente, hasta tener tantas como se deseen construir. El tiempo a la falla es el tiempo en el cual se ingresa por primera vez al estado terminal. La figura II.2.5 expone la forma típica de las funciones de muestra aquí utilizadas.

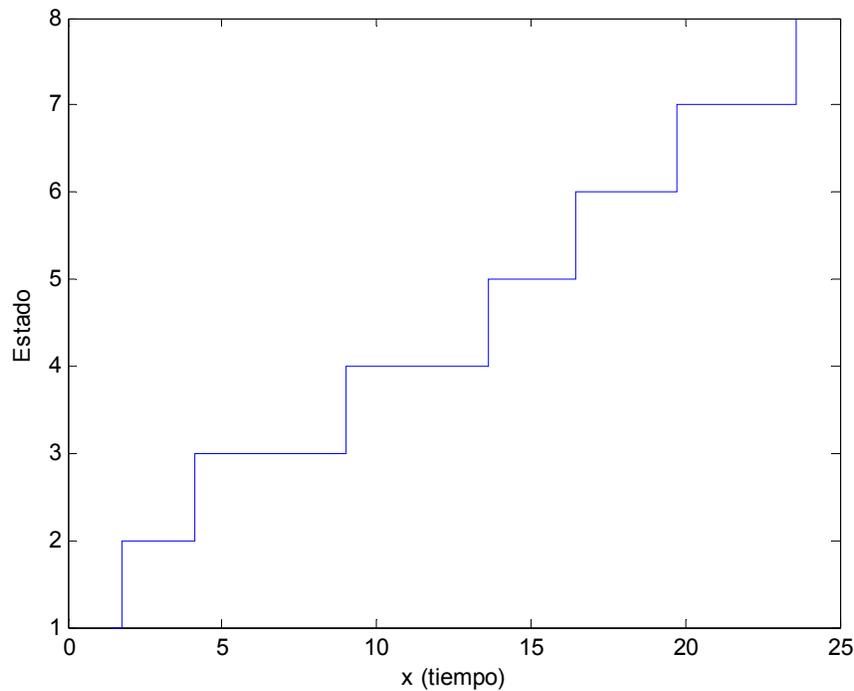


Figura II.2.5. Función de muestra típica de un modelo B de daño.

Por lo tanto, el modelo de choque sigue funciones de muestra crecientes, como es requerido.

Estas características pueden ser unidas en un solo modelo matemático.

II.2.2 Versión simple de un modelo estocástico estacionario de daño acumulado

En este modelo se supone lo siguiente:

1. la severidad del ciclo de servicio es repetitiva y constante,
2. los estados de daño son discretos y denominados $1, 2, \dots, j, \dots, b$ (falla),
3. la acumulación de daño en un ciclo de servicio depende solamente del ciclo de servicio y del estado de daño al inicio del ciclo, y
4. el daño sólo puede incrementarse en un ciclo de servicio, del estado ocupado al principio del ciclo al estado de una unidad mayor.

El tiempo x es discretizado por la suposición 1; así que, $x = 0, 1, 2, \dots$. Los estados permisibles de daño han sido discretizados en la suposición 2. De esta manera, el modelo tiene estados finitos (discretos) de daño y tiempo discreto, como se debe usar en las ideas de Cadenas de Markov.

La suposición de ciclos de servicio de severidad constante significa que se considera que cualquier cosa que pase en un ciclo de servicio ocurre en cada uno de los otros ciclos.

La tercera suposición declara que el daño solamente es considerado al principio y al final del ciclo de servicio. El modelo no menciona nada acerca de detalles cuantitativos de lo que ocurre dentro de un ciclo de servicio. Por lo tanto, el modelo es llevado en el sentido de que solamente son de interés los inicios y finales de los ciclos de servicio.

Esta tercera suposición es la de Markov, que es la acumulación de daño en un ciclo de servicio, solamente depende del ciclo de servicio en que se esté y del estado de daño en el que se inició el ciclo. En el modelo no es relevante saber cómo fue alcanzado el estado de daño al principio.

Cuando el estado b es alcanzado, el retiro o la falla ocurren; así, el estado b es un estado absorbente y $\rho_b = 1$. La suposición 4 implica que se tiene un modelo de salto unitario y que el permanecer en los estados $1, 2, \dots, b-1$ debe ser transitorio, ya que, una vez que el daño se mueve de un estado al siguiente, nunca regresa al estado que acaba de dejar.

Esta versión del modelo de daño acumulado es un proceso de Markov estacionario, de tiempo discreto y de estados finitos. El mecanismo de acumulación de daño es del tipo salto unitario y es dependiente del estado.

A continuación se exponen estas ideas en términos matemáticos. Sea la variable aleatoria D_0 el estado que ocupa el daño en el tiempo $x=0$. La distribución de probabilidad inicial p_0 sobre los estados de daño en $x=0$ serán especificados por el vector renglón $(1 \times b)$

$$p_0 = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{b-1}, 0\} \quad (II.2.1)$$

donde $P\{D_0 = j\} = \pi_j \geq 0$ y $\sum_1^{b-1} \pi_j = 1$. Nótese que se considera que en ningún caso se inicia en el estado de falla, ya que se tiene $\pi_b = 0$. Las π 's forman una función de masa de probabilidad de D_0 .

Se asocia la matriz de transición P de probabilidad constante si cada ciclo de servicio es de severidad constante; además, por la cuarta suposición, sólo se puede ir de un estado a otro superior, entonces se tiene

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & q_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{b-1} & q_{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.2})$$

donde $1 > p_j > 0$ y $p_j + q_j = 1$. p_j es la probabilidad de permanecer en el estado j durante un paso; q_j es la probabilidad de que en un paso, el daño vaya del estado j al estado $j + 1$. Se puede observar que por (II.2.2) todos los estados de daño $1, \dots, b-1$ son transitorios y el estado b es absorbente.

D_x el estado de daño ocupado en el tiempo x . Sea

$$P\{D_x = j\} = p_x(j) \quad \forall \quad j = 1, \dots, b \quad (\text{II.2.3})$$

la probabilidad de que el daño ocupe el estado j al tiempo x .

Se sabe que $p_x(j) \geq 0$ y $\sum_1^b p_x(j) = 1$, las $p_x(j)$ forman una función de masa de probabilidad en el tiempo x en los estados de daño $1, \dots, b$. Se usa el vector renglón ($1 \times b$)

$$p_x = \{p_x(1), \dots, p_x(b)\} \quad (\text{II.2.4})$$

para representar esta función de masa de probabilidad.

Se sabe, de la teoría de Cadenas de Markov que

$$p_x = p_0 P^x = p_{x-1} P \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.5})$$

Como sabemos, $P^0 = I$, donde I es la matriz identidad ($b \times b$).

Antes de ir al análisis, veamos lo que dice gráficamente (II.2.5); lo cual se puede ver en la figura II.2.6. Las barras verticales representan $p_x(j)$, donde se tiene que x está en el eje del tiempo en intervalos regularmente espaciados. Se puede observar que, cuando x se incrementa, la masa de probabilidad se desplaza de los estados menores a los estados mayores, y, gradualmente se desvían hacia el estado b . En última instancia, todas las masas se acumulan en el estado b . La forma precisa de esta gráfica depende, desde luego, de p_0 y p_j , sin embargo, la

figura II.2.6 muestra lo esencial de la dinámica de la probabilidad de masa. Es importante notar que $p_x(b)$ es una función de distribución acumulada en el tiempo x , debido a que el límite $x \rightarrow \infty$ es $p_x(b)=1$, ya que todas las masas en última instancia llegan al estado b y permanecen ahí. Se observa que $p_x(j)$ da la probabilidad de que D_x esté en el estado j en el tiempo x ; esto no es una función de distribución acumulada, ya que el límite $x \rightarrow \infty$ es $p_x(j)=0$.

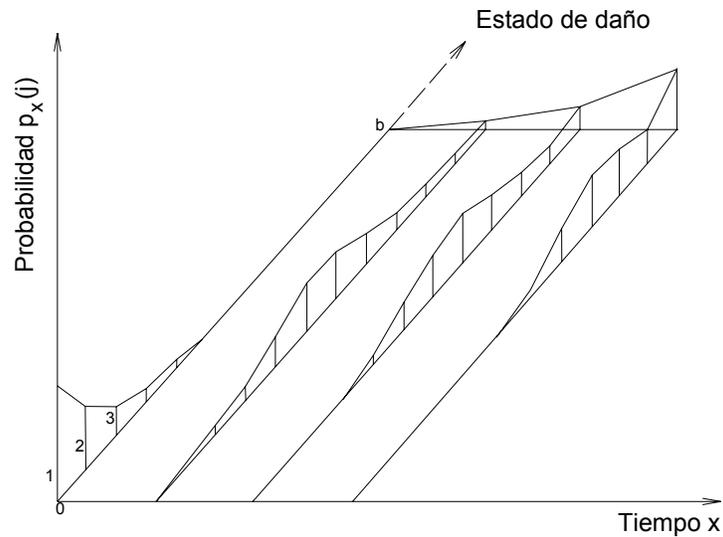


Figura II.2.6. Evolución de la función de masa de probabilidad de acumulación de daño.

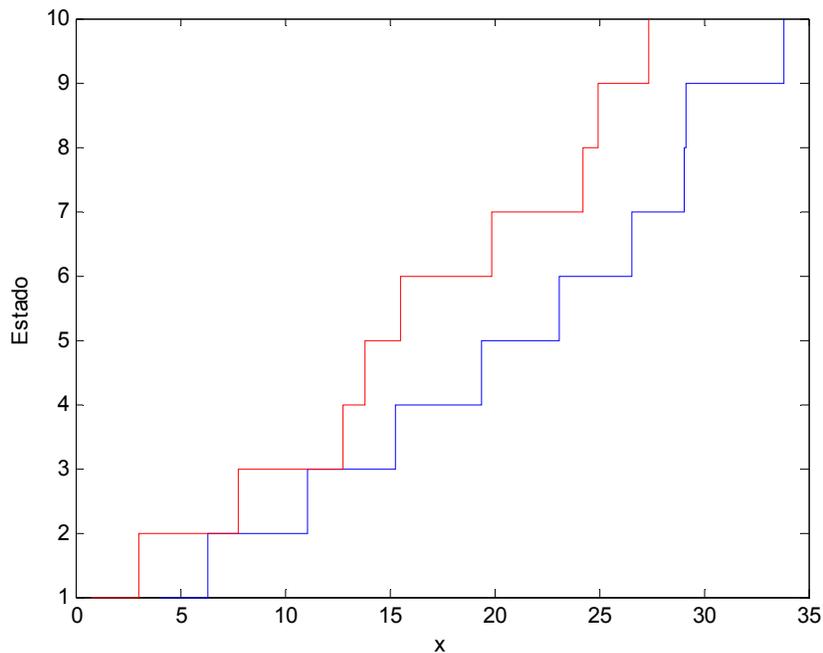


Figura II.2.7. Dos diferentes funciones de muestra de acumulación de daño.

Existe otra forma de ver lo que pasa en las ecuaciones, y es a través del comportamiento de la función de muestra. Se asume que $\pi_1 = 1$, por simplicidad. Entonces, todas las funciones de muestra empiezan en el estado 1. Se usan los procedimientos de muestreo vistos en la sección II.2.1.2. Se repite este procedimiento hasta que se alcanza el estado b , donde la función de muestra se detiene. La figura II.2.7 expresa dos funciones de muestra generadas de esta manera para $b = 10$. Con esta técnica se puede generar cualquier número de funciones de muestra. p_x es la distribución de probabilidad de que las funciones de muestra estén en un estado permisible de daño en el tiempo x . Si $\pi_1 < 1$, entonces se debe muestrear la función de masa de probabilidad dada por p_0 para determinar el estado inicial que se ocupa en $x=0$, como se mencionó anteriormente.

Dado p_0 y P , se usa (II.2.5) para el cálculo de $p_x = \{p_x(1), \dots, p_x(b)\}$. Se sabe que la función de distribución acumulada del tiempo W_b a la absorción en el estado b ($\rho_b = 1$) es $p_x(b)$. W_b se convierte en el tiempo a la falla en el modelo de daño acumulado. La función de distribución acumulada de W_b está dada por

$$F_w(x; b) = P\{W_b \leq x\} = p_x(b) \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.6})$$

La función de confiabilidad $\bar{F}_w(x; b)$ es

$$\bar{F}_w(x; b) = 1 - F_w(x; b) \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.7})$$

La función de la tasa de falla $h_w(x; b)$ es

$$h_w(x; b) = 1 - \frac{\bar{F}_w(x; b)}{\bar{F}_w(x-1; b)} \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.8})$$

La media y la varianza de W_b , son

$$E\{W_b\} = \sum_0^{\infty} \bar{F}_w(x; b) \quad \text{y} \quad \text{var } W_b = 2 \sum_0^{\infty} x \bar{F}_w(x; b) + E\{W_b\} - [E\{W_b\}]^2 \quad (\text{II.2.9})$$

La probabilidad de que el daño D_x esté en el estado j en el tiempo x está determinada por $p_x(j)$, como se estableció antes,

$$P\{D_x = j\} = p_x(j) \quad \forall \quad j = 1, \dots, b \quad (II.2.10)$$

Y la función de distribución acumulada de D_x es

$$F_D(j; x) = P\{D_x \leq j\} = \sum_{k=1}^j p_x(k) \quad \forall \quad j = 1, \dots, b \quad (II.2.11)$$

La media y la varianza de D_x están dadas por

$$E\{D_x\} = \sum_{j=1}^b j p_x(j) \quad \text{y} \quad \text{var } D_x = \sum_{j=1}^b j^2 p_x(j) - [E\{D_x\}]^2 \quad (II.2.12)$$

Por lo tanto, la ecuación (II.2.5) provee los resultados necesarios para determinar la información básica probabilista para el modelo de daño acumulado, en el que ocurre la falla cuando se llega al estado b .

La ecuación (II.2.5) es fácil de programar usando rutinas estándar para multiplicación de matrices. Si se toma la ventaja de la forma de P , los cálculos pueden ser manejados eficientemente. A continuación se muestran varios ejemplos, con datos no reales, para analizar varios casos de funciones de distribución acumulada.

Una gráfica típica de la función de distribución acumulada del tiempo de falla se muestra en la figura II.2.8. En esta figura, se supone $\pi_1 = 1$ y la falla ocurre cuando se alcanza el estado b ($\rho_b = 1$). En este caso, se denota con $W_{1,b}$ al tiempo a la falla, y su función de distribución acumulada y función de riesgo por $F_W(x; 1, b)$ y $h_W(x; 1, b)$, respectivamente, donde se muestra explícitamente que se inicia en el estado 1 y se termina en el estado b . También se considera en la figura que $p_1 = p_2 = \dots = p_{b-1}$.

La función de distribución acumulada asciende más abruptamente de cero que cuando va hacia 1 de manera asintótica. También se muestra la correspondiente función de la tasa de falla, y ésta tiene un comportamiento similar a la función de distribución acumulada. La función de la tasa de falla es creciente.

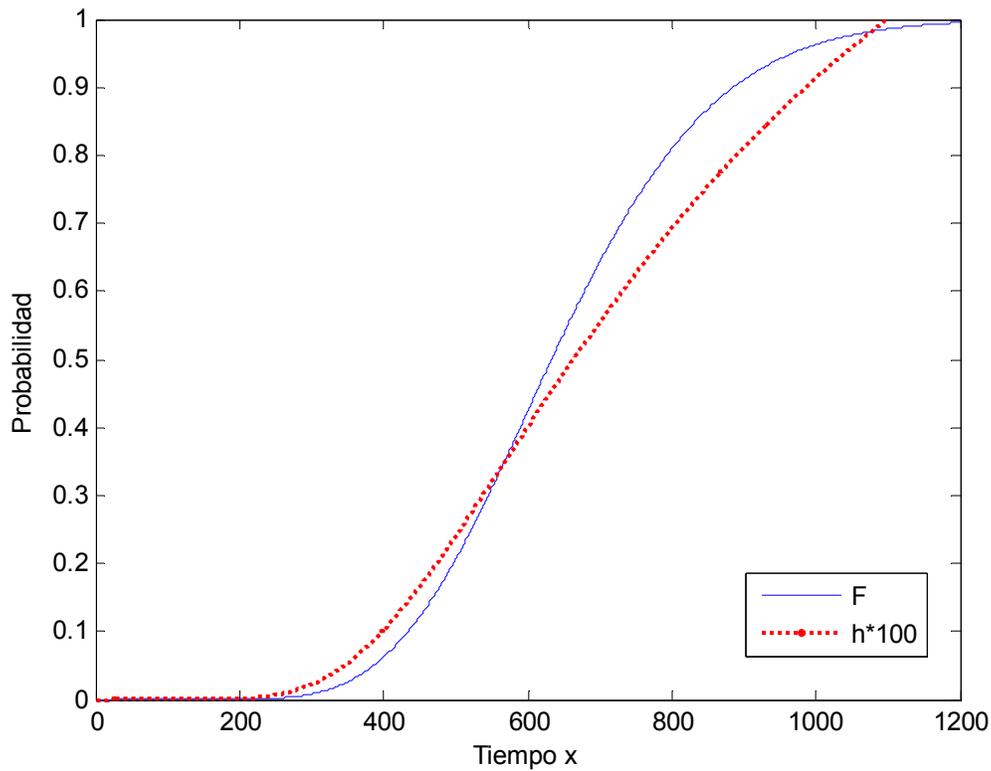


Figura II.2.8. Función de distribución acumulada $F_w(x;1,b)$ y $h_w(x;1,b)$ con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.

En la figura II.2.9, en una primera etapa, $F_w(x;1,b)$ asciende rápidamente, ya que en el vector de probabilidad inicial $\pi_1 \neq 0$, es decir, puede tener daño al inicio. Después asciende lentamente (en más tiempo), debido a que no hay probabilidad de que exista daño inicial en los siguientes estados, además, r_j es constante. En una última etapa vuelve a ascender rápidamente debido a que $\pi_{12} \neq 0$, es decir, el daño inicial puede ocupar el estado 12. La tasa de falla inicia en cero, ya que $\rho_b = 1$ y no puede fallar al inicio. Después crece y tiene una parte decreciente porque r_j es constante y la probabilidad inicial en los siguientes estados es cero. Por último, la función de la tasa de falla asciende rápidamente ya que cercano al último estado, existe probabilidad de daño inicial.

En la figura II.2.10, $F_w(x;1,b)$ crece rápidamente ya que los componentes del vector de probabilidad inicial son diferentes de cero y esto hace que el tiempo a la

falla sea menor. La función de la tasa de falla no inicia en cero debido a que se considera que puede haber daño al inicio.

Las figuras II.2.9 y II.2.10 muestran la profunda diferencia que p_0 puede hacer en $F_w(x;b)$ y $h_w(x;b)$. En cada figura se indican los parámetros usados. Se puede observar en la figura II.2.9, que la tasa de la función de falla tiene una parte decreciente. De acuerdo con las figuras anteriores, es posible ver que existe un amplio rango de formas posibles que F_w y h_w pueden tener, debido a los cambios en p_0 . Se pueden considerar diferentes suposiciones para p_j y q_j .

La figura II.2.11 muestra las funciones de distribución acumulada para un modelo con $\pi_1 = 1$, $\rho_b = 1$, $b = 15$, $\alpha = 0.05, 0.10, 0.15$, y

$$q_j = \alpha \left(\frac{j}{b} \right)^2 \quad \forall \quad j = 1, \dots, 14 \quad (\text{II.2.13})$$

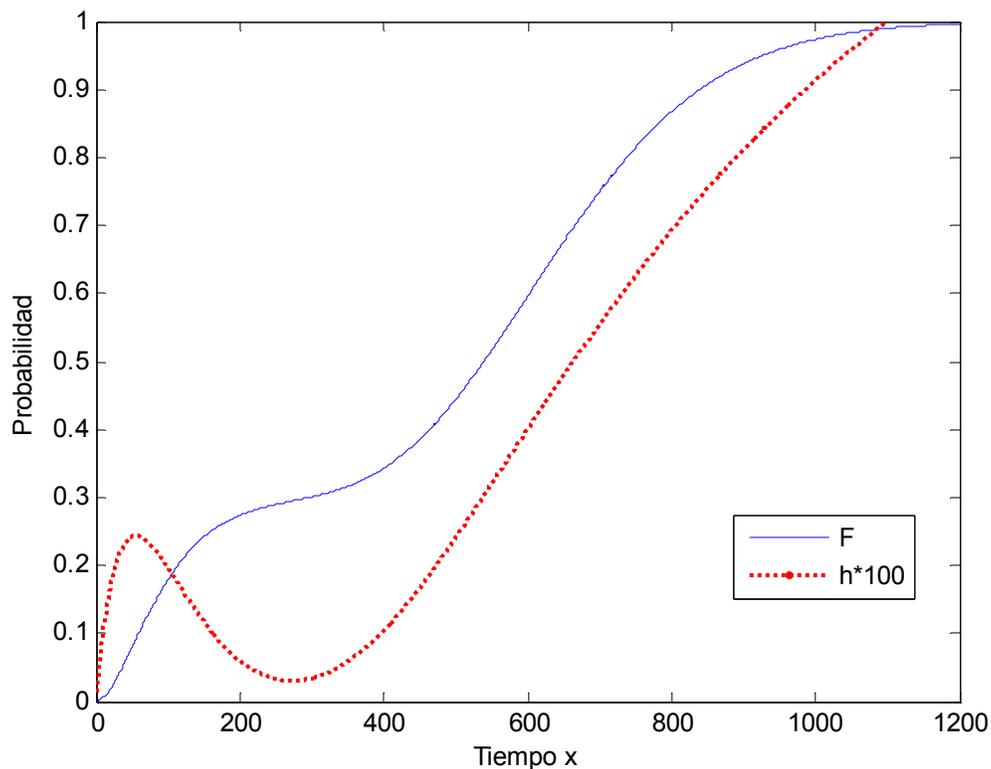


Figura II.2.9. Función de distribución acumulada $F_w(x;1,b)$ y $h_w(x;1,b)$ con $\pi_1 \neq 0$, $\pi_{12} \neq 0$, $\rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.

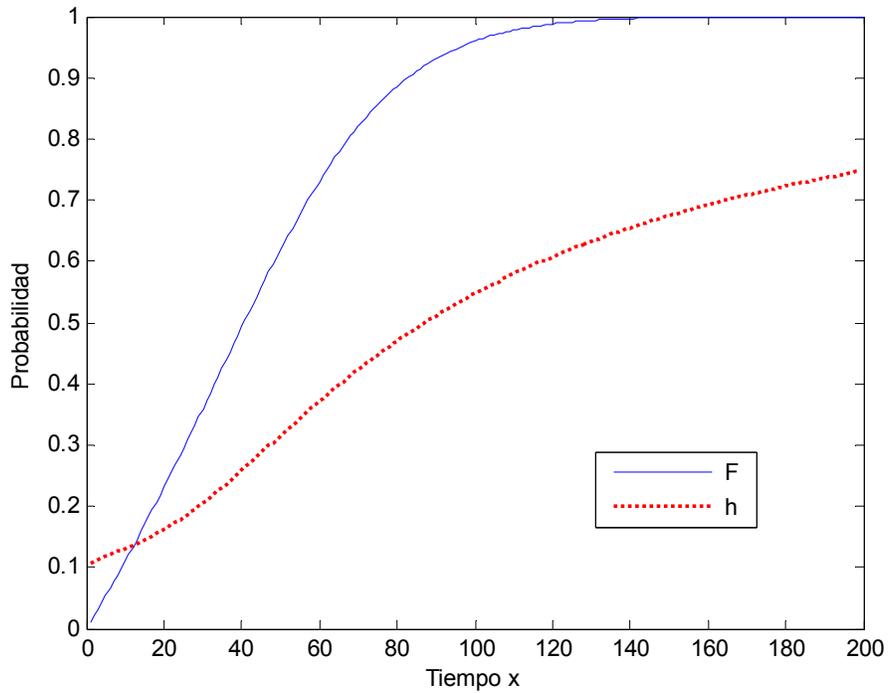


Figura II.2.10. Función de distribución acumulada $F_w(x;1,b)$ y $h_w(x;1,b)$ con $\pi_j \neq 0$, $j=1, \dots, b-1$, $\rho_b=1$ y $r_j=\text{constante}$.

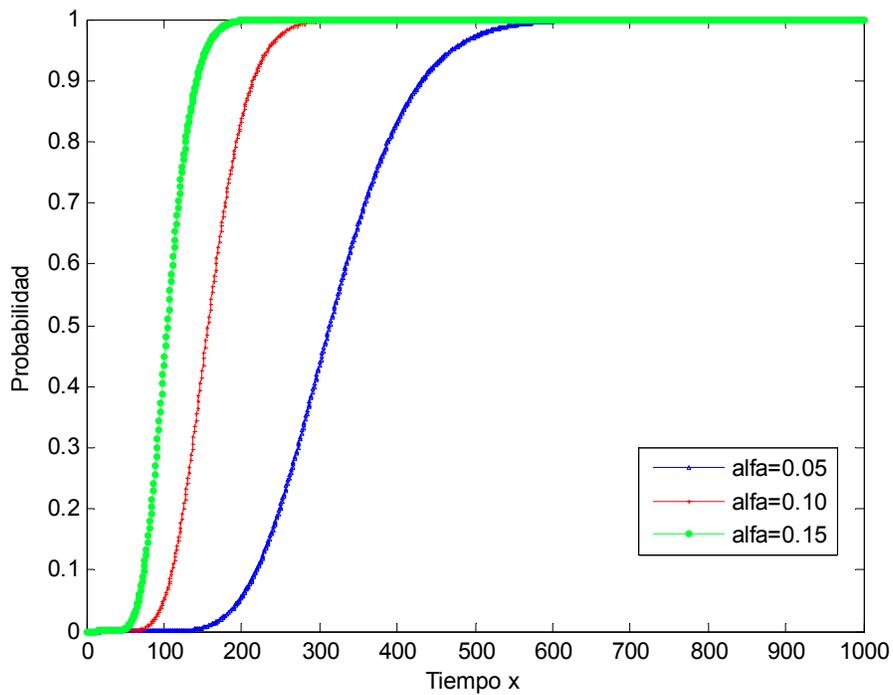


Figura II.2.11. Funciones de distribución acumulada con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j=\text{variable}$.

La figura II.2.12 muestra la gráfica de

$$r_j = \frac{p_j}{q_j} = \frac{1}{q_j} - 1 \quad \forall \quad j=1, 2, \dots, b-1 \quad (\text{II.2.14})$$

para la figura II.2.11, calculada con (II.2.13) y la función de distribución acumulada para un modelo con $\pi_1 = 1$, $\rho_b = 1$, $b = 15$, $\alpha = 0.05, 0.10, 0.15$, y

$$q_j = \frac{2\alpha}{b} \left(j - \frac{j^2}{2b} \right) \quad \forall \quad j=1, \dots, 14 \quad (\text{II.2.15})$$

los dos casos con $\alpha = 0.10$. Los altos valores de r_j para pequeños j de (II.2.13) relativos a los correspondientes r_j de (II.2.15) implica que le toma mucho más tiempo a la masa de probabilidad moverse del estado 1 en el primer caso que en el último. Es válido decir que r_j describe en cierta forma el proceso de daño acumulado en este modelo.

Comparando las figuras anteriores se observa que las escalas del tiempo son diferentes.

Para valores de x muy grandes, puede ser inconveniente usar (II.2.5) directamente. Se puede cambiar la escala del tiempo en esa situación. Considérese

$$x = \beta y \quad \forall \quad y = 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.16})$$

donde β es un integrando positivo. Se puede, entonces, escribir (II.2.5) como

$$p_x = p_0 P^{\beta y} = p_0 (P^\beta)^y = p_y, \quad (\text{II.2.17})$$

Si se permite

$$P^\beta = P_\beta, \quad (\text{II.2.18})$$

entonces, (II.2.17) se puede escribir como

$$p_y = p_0 P_\beta^y, \quad (\text{II.2.19})$$

Esta ecuación provee un método para escalar el tiempo de x a y , a través de (II.2.16).

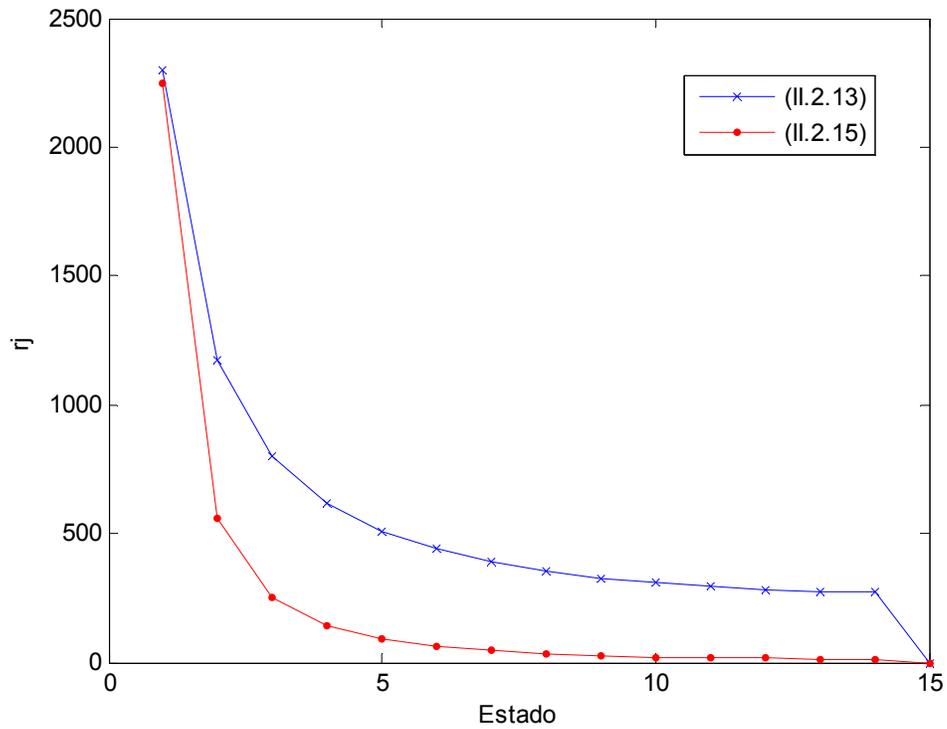


Figura II.2.12. r_j 's de las ecuaciones (II.2.13) y (II.2.15) para $\alpha = 0.10$.

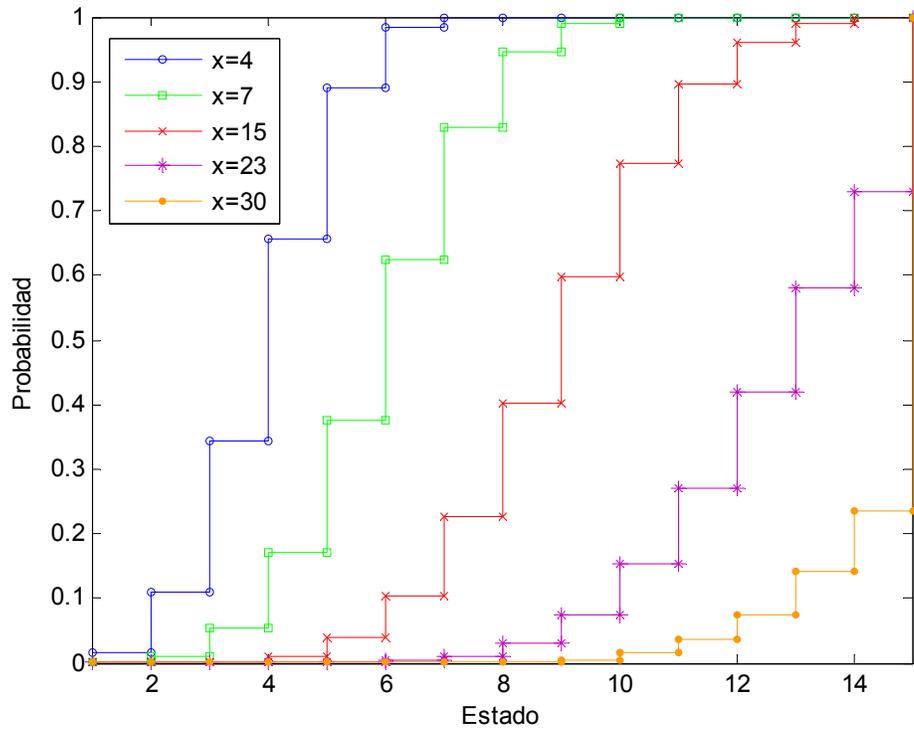


Figura II.2.13. Funciones de distribución acumulada de D_x en diferentes tiempos x 's con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.

La figura II.2.13 muestra algunas de las $F_D(j; x)$ para diferentes valores de x . Se han usado $\pi_1 = 1$ y $\rho_b = 1$ para construir dicha figura. La masa de probabilidad se acumula gradualmente en b , conforme el movimiento de la masa sale de los estados más bajos. Es decir, cuando x aumenta la probabilidad de que el daño esté en los estados más bajos disminuye. Por ejemplo, de la figura II.2.13 se tiene que la probabilidad de que en $x = 4$ el daño esté en el estado 6 es 0.98. La probabilidad de que ocurra el mismo evento al tiempo $x = 7$ es 0.6, con $x = 15$ es 0.1 y se vuelve cero cuando $x > 23$. Los mismos resultados pueden ser observados en la figura II.2.6. Las figuras II.2.14(a) y II.2.14(b) muestran $ED(X)$ (media) y $SDD(X)$ (desviación estándar), respectivamente, para el caso $x = 25$.

Los resultados presentados son adecuados para propósitos computacionales. Para comprender el significado del modelo, es necesario obtener algunos resultados analíticos. Afortunadamente, esto es relativamente fácil usando Cadenas de Markov obtenidas con transformadas geométricas.

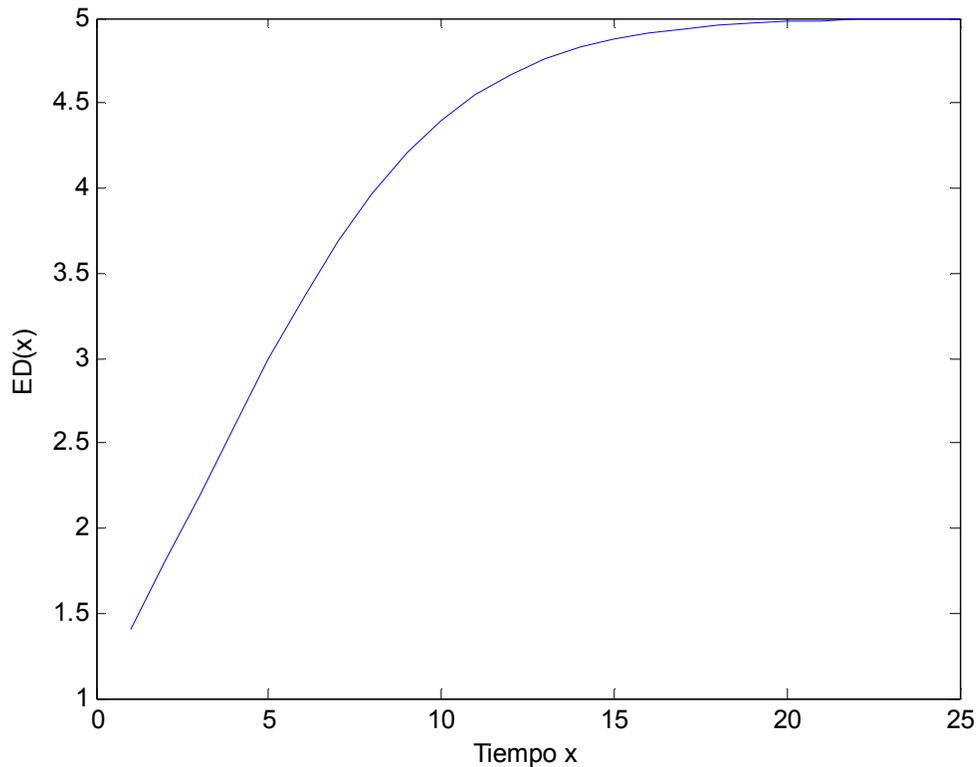


Figura II.2.14 (a). Media de D_x con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.

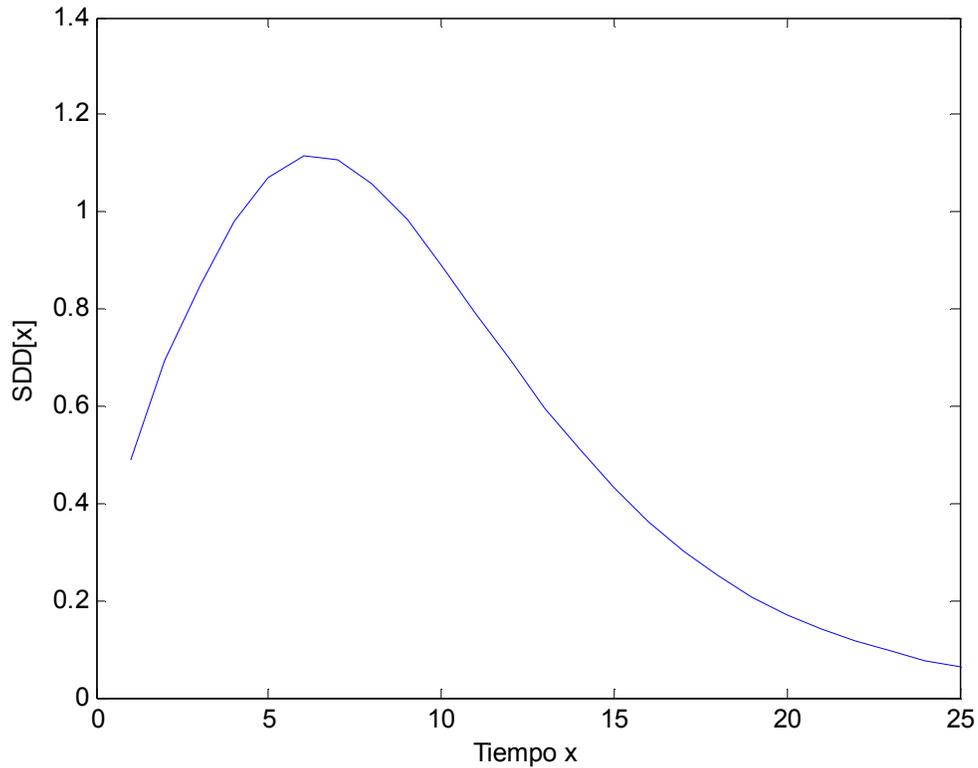


Figura II.2.14 (b). Desviación estándar de D_x con $\pi_1 = \rho_b = 1$ y $r_j = \text{constante}$.

Se considera para el caso presente que $\rho_b = 1$ y $\pi_1 = 1$. Esto significa que el proceso de daño acumulado empieza en el estado 1 en $x=0$. Sea la variable aleatoria $W_{1,b}$, el tiempo a la falla en el estado b dado que se inició en el estado 1 en $x=0$. La transformada geométrica de la función de distribución acumulada $F_W(x;1,b)$ de $W_{1,b}$ se encuentra y queda de la siguiente manera:

$$\psi_W(z;1,b) = \frac{q_1 \cdots q_{b-1} z^{b-1}}{(1-p_1 z)(1-p_2 z) \cdots (1-p_{b-1} z)(1-z)} \quad (\text{II.2.20})$$

y la transformada de la función de masa de probabilidad $p_W(x;1,b)$ es

$$\phi_W(z;1,b) = (1-z)\psi_W(z;1,b) \quad (\text{II.2.21})$$

La inversión de éstas dos transformadas es directa, si se supone

$$1 > p_1 > p_2 > \cdots > p_{b-1} > 0 \quad (\text{II.2.22})$$

se encuentra, entonces

$$F_W(x;1,b) = 1 - g_1(1,b)p_1^x + g_2(1,b)p_2^x - \dots + (-1)^{b-1} g_{b-1}(1,b)p_{b-1}^x \quad (\text{II.2.23})$$

donde

$$\begin{aligned} g_1(1,b) &= \frac{q_2 q_3 \dots q_{b-1}}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3) \dots (p_1 - p_{b-1})} \\ &\vdots \\ g_j(1,b) &= \frac{q_1 \dots q_{j-1} q_{j+1} \dots q_{b-1}}{(p_1 - p_j)(p_2 - p_j) \dots (p_{j-1} - p_j)(p_j - p_{j+1}) \dots (p_j - p_{b-1})} \\ &\vdots \\ g_{b-1}(1,b) &= \frac{q_1 q_2 \dots q_{b-2}}{(p_1 - p_{b-1})(p_2 - p_{b-1}) \dots (p_{b-2} - p_{b-1})} \end{aligned} \quad (\text{II.2.24})$$

Nótese que

$$F_W(x;1,b) = 0 \quad \forall \quad x = 0, 1, \dots, b-2 \quad (\text{II.2.25})$$

ya que un modelo de salto unitario no puede alcanzar el estado b desde 1 en menos de $b - 1$ pasos. Por lo tanto, las $g_j(1,b)$ satisfacen ciertas relaciones implicadas en (II.2.25).

La inversa de (II.2.21) da la función de masa de probabilidad $p_W(x;1,b)$ de $W_{1,b}$; y se encuentra, usando la técnica empleada para obtener (II.2.23),

$$p_W(x;1,b) = q_1 g_1(1,b)p_1^{x-1} - \dots + (-1)^{b-1} q_{b-1} g_{b-1}(1,b)p_{b-1}^{x-1} \quad (\text{II.2.26})$$

Esta ecuación puede ser obtenida también notando que

$$p_W(x;1,b) = F_W(x;1,b) - F_W(x-1;1,b) \quad (\text{II.2.27})$$

$p_W(x;1,b)$ se iguala a cero para $x = 0, 1, \dots, b-2$.

En las figuras II.2.6 a II.2.11 se muestran funciones de distribución acumulada cuando x es grande, por lo tanto, cuando es graficada con una computadora, las funciones de distribución acumulada aparecen como curvas suaves monótonamente crecientes.

La media y los primeros momentos centrales de $W_{1,b}$ son encontrados de la función característica formada de (II.2.21), usando la técnica de diferenciación; éstos son

$$\begin{aligned}
 E\{W_{1,b}\} &= \sum_1^{b-1} (1+r_j) \\
 \text{var } W_{1,b} &= \sum_1^{b-1} r_j (1+r_j) \\
 \mu_3\{W_{1,b}\} &= \sum_1^{b-1} r_j (1+r_j)(1+2r_j) \\
 \mu_4\{W_{1,b}\} &= 3[\text{var } W_{1,b}]^2 + \sum_1^{b-1} r_j (1+r_j)(1+2r_j)(1+3r_j) + \sum_1^{b-1} r_j^2 (1+r_j)
 \end{aligned}
 \tag{II.2.28}$$

donde

$$r_j = \frac{p_j}{q_j} = \frac{1}{q_j} - 1 \quad \text{y} \quad p_j = \frac{r_j}{1+r_j}
 \tag{II.2.29}$$

La función de confiabilidad $F_w^-(x;1,b)$ correspondiente a la función de distribución acumulada de (II.2.23) es

$$F_w^-(x;1,b) = g_1(1,b)p_1^x - g_2(1,b)p_2^x + \dots + (-1)^{b-1} g_{b-1}(1,b)p_{b-1}^x
 \tag{II.2.30}$$

La función de riesgo $h_w(x;1,b)$ es obtenida usando (II.2.26), (II.2.27), y (II.2.30); ésta es

$$h_w(x;1,b) = 1 - \frac{g_1(1,b)p_1^x - \dots + (-1)^{b-1} g_{b-1}(1,b)p_{b-1}^x}{g_1(1,b)p_1^{x-1} - \dots + (-1)^{b-1} g_{b-1}(1,b)p_{b-1}^{x-1}}
 \tag{II.2.31}$$

En la figura II.2.8 se muestra una gráfica de $h_w(x;1,b)$, y la correspondiente función de distribución acumulada. La tasa de la función de falla siempre se mostrará en versión suavizada. De (II.2.31) se tiene que

$$h_w(x;1,b) \rightarrow 1 - p_1 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty
 \tag{II.2.32}$$

ya que $1 > p_1 > p_2 > \dots > p_{b-1}$. Esta h_w es creciente en x .

El daño en el tiempo x ha sido indicado por la variable aleatoria D_x . Se sabe de la definición de p_x que

$$P\{D_x = j | D_0 = 1\} \equiv p_D(1, j; x) = p_x(1, j) \quad (\text{II.2.33})$$

La transformada geométrica de $p_x(1, j)$ está dada por

$$\psi_{1,j}(z) = \frac{q_1 \cdots q_{j-1} z_{j-1}}{(1-p_1 z) \cdots (1-p_j z)} \quad \forall \quad 1 \leq j < b-1 \quad (\text{II.2.34})$$

Al calcular la inversa se obtiene

$$p_D(1, j; x) = g_1(1, j) p_1^x - \dots + (-1)^{j-1} g_j(1, j) p_j^x \quad (\text{II.2.35})$$

donde para $j < b-1$

$$g_1(1, j) = \frac{q_1 \cdots q_{j-1}}{(p_1 - p_2) \cdots (p_1 - p_j)} \quad (\text{II.2.36})$$

$$g_j(1, j) = \frac{q_1 \cdots q_{j-1}}{(p_1 - p_j) \cdots (p_{j-1} - p_j)}$$

La ecuación (II.2.25) es válida para $x \geq j-1$; para $x < j-1$, $p_D(1, j; x)$ es igual a cero. De (II.2.33) y (II.2.6) se tiene que

$$p_D(1, b; x) = F_w(x; 1, b) \quad (\text{II.2.37})$$

De (II.2.35) y (II.2.37), se puede ver que

$$p_D(1, j; x) \rightarrow 0 \quad \forall \quad j = 1, \dots, b-1$$

$$p_D(1, j; x) \rightarrow 1 \quad \forall \quad j = b \quad (\text{II.2.38})$$

cuando $x \rightarrow \infty$; esto también viene del hecho de que todos los estados, excepto b , son transitorios. Ahora es posible escribir (II.2.11) como

$$F_D(1, j; x) = \sum_{k=1}^j p_D(1, k; x) \quad \forall \quad 1 \leq j \leq b-1$$

$$F_D(1, j; x) = 1 \quad \forall \quad j = b \quad (\text{II.2.39})$$

Se usó la condición $1 > p_1 > p_2 > \dots > p_{b-1} > 0$ para obtener las fórmulas (II.2.23) a (II.2.38). Se pueden obtener resultados explícitos si

$$1 > p_1 = p_2 = \dots = p_{b-1} = p, \quad (\text{II.2.40})$$

lo cual da

$$q_j = 1 - p = q \quad \text{y} \quad r_j = \frac{p}{q} = r \quad \forall \quad j = 1, \dots, b-1 \quad (\text{II.2.41})$$

Se encuentra de (II.2.20) y (II.2.21) que

$$\phi_W(z; 1, b) = \frac{q^{b-1} z^{b-1}}{(1 - pz)^{b-1}} \quad (\text{II.2.42})$$

Se observa que $\phi(e^{iu}; 1, b)$ es la función característica de la distribución binomial negativa. La expansión de (II.2.42) es:

$$p_W(x; 1, b) = \begin{cases} \binom{x-1}{x-b+1} p^{x-b+1} q^{b-1} & \forall \quad x \geq b-1 \\ 0 & \forall \quad 0 \leq x < b-1 \end{cases}, \quad (\text{II.2.43})$$

la cual es la función de masa de probabilidad binomial negativa. La ecuación (II.2.34) se convierte en

$$\psi_{1,j}(z) = \frac{q^{j-1} z^{j-1}}{(1 - pz)^j} \quad (\text{II.2.44})$$

Al invertirla, se obtiene

$$p_D(1, j; x) = \begin{cases} \binom{x}{x-j+1} p^{x-j+1} q^{j-1} & \forall \quad x \geq j-1 \\ 0 & \forall \quad 0 \leq x < j-1 \end{cases} \quad (\text{II.2.45})$$

para $j = 1, \dots, b-1$. Entonces es posible ver que

$$F_W(x;1,b) = \begin{cases} \sum_{k=b-1}^x \binom{k-1}{k-b+1} p^{k-b+1} q^{b-1} & \forall x \geq b-1 \\ 0 & \forall 0 \leq x < b-1 \end{cases} \quad (\text{II.2.46})$$

$$E\{W_{1,b}\} = (b-1)(1+r)$$

$$\text{var } W_{1,b} = (b-1)r(1+r)$$

$$\mu_3\{W_{1,b}\} = (b-1)r(1+r)(1+2r)$$

$$\mu_4\{W_{1,b}\} = 3(b-1)^2 r^2 (1+r)^2 + (b-1)r(1+r)(1+2r)(1+3r) + (b-1)r^2(1+r)$$

$$h_w(x;1,b) = \frac{\binom{x-1}{x-b+1} p^{x-b+1} q^{b-1}}{1 - \sum_{k=b-1}^{x-1} \binom{k-1}{k-b+1} p^{k-b+1} q^{b-1}} \quad \forall x \geq b-1 \quad (\text{II.2.47})$$

Sea T_1 el tiempo utilizado en el estado 1. Recordando que p_1 en P , descrito en (II.2.2), es la probabilidad de que en un sólo ciclo de servicio, el daño permanezca en el estado 1 dado que se estuvo en el estado 1 al principio del ciclo, y q_1 es la probabilidad de ir al estado 2 en un solo paso dado que el daño estuvo en el estado 1 al principio del ciclo. Se supone que los ciclos tienen la forma de una secuencia de ensayos de Bernoulli hasta que el estado 2 es alcanzado. Esto conduce a

$$P\{T_1 = x\} = q_1 p_1^{x-1} \quad \forall x = 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.48})$$

Por lo que T_1 tiene distribución geométrica con parámetro p_1 . Sea T_j el tiempo que se ocupa en el estado j . Siguiendo con el argumento anterior, se tiene que para $j = 1, \dots, b-1$,

$$P\{T_j = x\} = q_j p_j^{x-1} \quad \forall x = 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.49})$$

lo cual significa que cada T_j tiene distribución geométrica.

$W_{1,b}$ es el tiempo requerido para alcanzar el estado b dado que se empezó en el estado 1 al tiempo $x = 0$. Dado que

$$W_{1,b} = T_1 + \dots + T_{b-1} \quad (\text{II.2.50})$$

donde los T_j 's son independientes, y al sumar la función característica de T_j ,

$$\phi_j(u) = \frac{q_j e^{iu}}{(1 - p_j e^{iu})} \quad (\text{II.2.51})$$

se tiene que la función característica de $W_{1,b}$ es

$$\phi_W(u; 1, b) = \prod_1^{b-1} \frac{q_j e^{iu}}{(1 - p_j e^{iu})} \quad (\text{II.2.52})$$

Si se reemplaza e^{iu} por z , se obtiene la transformada geométrica de la función de masa de probabilidad de $W_{1,b}$,

$$\phi_W(z; 1, b) = \frac{q_1 \cdots q_{b-1} z^{b-1}}{(1 - p_1 z)(1 - p_2 z) \cdots (1 - p_{b-1} z)} \quad (\text{II.2.53})$$

Esta fórmula es la misma que la obtenida en (II.2.21), usando (II.2.20).

Ahora, sea

$$W_{1,j} = T_1 + T_2 + \cdots + T_{j-1} \quad (\text{II.2.54})$$

$W_{1,j}$ es el tiempo requerido para alcanzar el estado j por primera vez dado que se empieza en el estado 1 en $x=0$. Se encuentra fácilmente de (II.2.20), reemplazando b por j que

$$\phi_W(z; 1, j) = \frac{q_1 \cdots q_{j-1} z^{j-1}}{(1 - p_1 z) \cdots (1 - p_{j-1} z)} = \psi_W(z; 1, j)(1 - z) \quad (\text{II.2.55})$$

Entonces

$$\psi_W(z; 1, j) = \frac{q_1 \cdots q_{j-1} z^{j-1}}{(1 - p_1 z) \cdots (1 - p_{j-1} z)(1 - z)} \quad (\text{II.2.56})$$

Invirtiendo se obtiene

$$F_W(x; 1, j) = 1 - g_1(1, j-1)p_1^x + \cdots + (-1)^{j-1} g_{j-1}(1, j-1)p_{j-1}^x \quad (\text{II.2.57})$$

donde las $g(1; j-1)$ están definidas por una serie de fórmulas similares a (II.2.24), y se ha asumido $1 > p_1 > p_2 > \dots > p_{b-1} > 0$.

Es necesario recordar que la variable aleatoria D_x representa el estado de daño ocupado al tiempo x y $W_{1,j+1}$ es la variable aleatoria para el tiempo requerido en alcanzar el estado $j+1$ por primera vez dado que se inició en el estado 1 en $x=0$. Considérense los eventos $D_x \leq j$ y $W_{1,j+1} > x$. Se observa que si el primero se mantiene, también lo hace el segundo; y si el segundo se mantiene, también lo hace el primero. Por lo tanto, estos eventos son equivalentes y es posible escribir

$$\{D_x \leq j\} \quad \text{si} \quad \{W_{1,j+1} > x\} \quad (\text{II.2.58})$$

Cambiando la notación

$$P\{D_x \leq j\} = F_D(1, j; x), \quad P\{W_{1,j+1} > x\} = \bar{F}(x; 1, j+1) \quad (\text{II.2.59})$$

Entonces, (II.2.58) puede escribirse como

$$F_D(1, j; x) = 1 - F_W(x; 1, j+1) \quad (\text{II.2.60})$$

La ecuación anterior indica que D_x y $W_{1,j}$ describen diferentes aspectos del modelo del mismo proceso de acumulación de daño.

Los diferentes aspectos del modelo pueden observarse en la figura II.2.15. $W_{1,j}$ es definido por (II.2.54). Los T_k son los tiempos usados en los estados k . Así, $W_{1,j}$ indica cómo se está desarrollando el proceso de daño acumulado en un corte horizontal del proceso en el estado j . Por otro lado, D_x describe el estado del sistema en el tiempo x . D_x muestra cómo se está desarrollando el proceso en un corte vertical del proceso en el tiempo x . Así tenemos que D_x y $W_{1,j}$ describen diferentes vistas del mismo proceso de daño, y se muestra la relación de las distribuciones de D_x y $W_{1,j}$ en (II.2.59). Es importante hacer notar que una descripción completa del proceso de daño acumulado requiere también la función de distribución acumulada de D_x para toda x ó las funciones de distribución acumulada de $W_{1,j}$ para toda $1 \leq j \leq b$.

Las ecuaciones (II.2.23) y (II.2.24), son válidas para $1 > p_1 > p_2 > \dots > p_{b-1} > 0$.

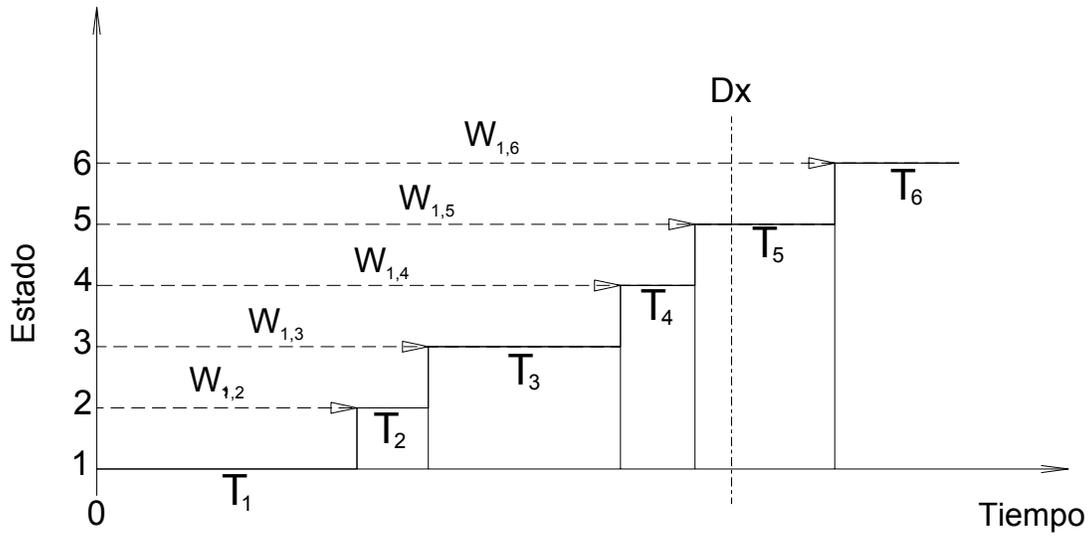


Figura II.2.15. Representación gráfica de $W_{1,j}$ y D_x .

Supóngase que $p'_1, p'_2, \dots, p'_{b-1}$ es una permutación de p_1, p_2, \dots, p_{b-1} . Entonces (II.2.20) se convierte en

$$\psi_w(z; 1, b) = \frac{q'_1 q'_2 \cdots q'_{b-1} z^{b-1}}{(1 - p'_1 z)(1 - p'_2 z) \cdots (1 - p'_{b-1} z)(1 - z)} \quad (\text{II.2.61})$$

Es posible invertir esta ecuación para encontrar $F_w(x; 1, b)$, y se obtiene que $F_w(x; 1, b)$ es exactamente la misma que la definida en (II.2.23), por lo que se puede decir que hay $(b-1)!$ permutaciones de p_j . Por lo tanto, hay $(b-1)!$ modelos que tienen la misma función de distribución acumulada $F_w(x; 1, b)$ de $W_{1,b}$. Para saber cómo difieren entre sí estos modelos, es necesario introducir la noción de media de la función de muestra.

El tiempo utilizado en el estado j es la variable aleatoria T_j , cuya función característica está dada en (II.2.51). Se encuentra de (II.2.28), que el valor esperado del tiempo utilizado en cada estado está dado por

$$E\{T_j\} = 1 + r_j \quad (\text{II.2.62})$$

En la sucesión del tiempo medio utilizado en cada estado, se unen los puntos adyacentes con segmentos de línea; esta curva segmentada es la media de la función de muestra, ya que indica el comportamiento de la media de la función de

muestra. En realidad, la familia de funciones de muestra forma una nube propagada que va desde el estado 1 en $x=0$. La función de muestra media es la posición de la media de esta nube en los diferentes estados. El tiempo en el cual la media de la función de muestra alcanza b es, en el caso de salto unitario, $E\{W_{1,b}\}$.

Ahora, es posible saber la diferencia entre los modelos. Mientras todos los $(b-1)!$ modelos tienen la misma $F_W(x;1,b)$, cada uno tiene diferente media de la función de muestra. Este es un punto muy importante, ya que explica que la función de distribución acumulada $F_W(x;1,b)$ de $W_{1,b}$ no define la evolución del proceso de daño acumulado.

Considérese el conjunto de funciones de distribución acumulada $F_W(x;1,j)$ para $j=2, \dots, b$. Este conjunto depende del orden de r_j . Si el conjunto es especificado, éste define de manera única la evolución del proceso de daño acumulado aún cuando en cada conjunto $F_W(x;1,b)$ es el mismo.

Las observaciones hechas anteriormente aplican al caso de $\pi_1=1$. Supóngase que $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ son diferentes de cero ó uno, donde $k < b-1$. Entonces p_1, \dots, p_k no puede ser reordenado sin cambiar $F_W(x;b)$, ya que $F_W(x;j,b)$ depende del orden de p_j para $j=1, \dots, k$. Sin embargo, p_{k+1}, \dots, p_{b-1} pueden ser reordenadas sin alterar $F_W(x;b)$. Así, a menos que todas las π_j para $j=1, \dots, b-1$ sean diferentes de cero, $F_W(x;b)$ no especifica de manera única el proceso de daño acumulado del modelo.

En esta sección se presentó un estudio de los momentos y distribuciones de un modelo simple estacionario de salto unitario con matriz de transición de probabilidad dada por (II.2.2). Los puntos más importantes de este modelo son:

1. la distribución inicial de daño puede ser incorporada al modelo,
2. la severidad variable en los ciclos de servicio puede ser incorporada al modelo cambiando las matrices de transición P en el tiempo,
3. pueden obtenerse formas explícitas para los momentos de W_b ,
4. el orden de las r_j 's no cambia la función de distribución acumulada de $W_{1,b}$,
y
5. conocer la función de distribución acumulada $F_W(x;1,b)$ no determina la evolución de D_x .

II.2.3 Obtención de las probabilidades de transición

En la industria mexicana de transporte de hidrocarburos, es común que sólo se cuente con un reporte de inspección, por lo que no es posible obtener las probabilidades p_j 's y q_j 's con los momentos estadísticos de la variable a la falla, por lo tanto, es necesario aplicar otras técnicas matemáticas para obtener la información de la matriz de transición.

La forma que se propone en este trabajo para obtener la matriz de transición P es usando la teoría de Cadenas de Markov. Se tiene que

$$p_x = p_0 P^x \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.5})$$

Si se aplica y se desarrolla para $x = 0, 1, 2, \dots$ se tiene

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad p_0 = p_0 P^0 = p_0 \\ x = 1 & \quad p_1 = p_0 P^1 = p_0 P \\ x = 2 & \quad p_2 = p_0 P^2 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Sustituyendo el vector de probabilidades iniciales y la matriz P

$$p_0 = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_6 & q_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_7 \end{bmatrix}$$

y al desarrollar las ecuaciones anteriores al tiempo $x = 7$ resultan ecuaciones en función de $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ y p_7 , las cuales están dadas por el vector

$$p_x = \{p_x(1), p_x(2), p_x(3), p_x(4), p_x(5), p_x(6), p_x(7)\}$$

Es fundamental analizar y tomar en cuenta la información de la inspección, ya que ésta permite conocer el estado de daño del sistema y es la referencia para conocer la evolución de la corrosión desde que se puso en operación el sistema, y con ello poder inferir su comportamiento hasta la falla. Es necesario analizar los datos estadísticamente para obtener su función de probabilidad a partir de su

histograma y obtener la probabilidad en cada estado de daño al tiempo x deseado.

Al igualar cada término del vector p_x , que como sabemos es una ecuación, con su correspondiente valor de probabilidad obtenida a partir de los datos, es posible resolver el sistema de ecuaciones y encontrar así las incógnitas p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 , p_6 y p_7 para llenar la matriz de transición de probabilidad, y poder conocer la evolución del daño.

CAPITULO III

APLICACIÓN DEL MODELO PROBABILISTA DE DAÑO

III.1 Aplicación del modelo con datos de inspección

En este capítulo se aplica el modelo para el caso en que se cuenta con un solo reporte de inspección y se analizan los defectos por corrosión interna localizada de un ducto que transporta hidrocarburos.

En seguida se presentan algunas observaciones acerca de las bases del modelo de daño acumulado:

1. el tiempo es discreto $x = 0, 1, 2, 3, \dots$. Cada x representa un intervalo de tiempo real. Al final del capítulo se describe esta correspondencia,
2. los estados de daño son finitos y discretos denominados $1, 2, \dots, j, \dots, b$ (falla). Cada uno de los estados está representado por un cierto espesor de la pared de la tubería,
3. el valor inicial de daño puede ser aleatorio, pero en este trabajo se considera que la tubería está inicialmente sin daño, por lo que la probabilidad de estar en el estado 1 al tiempo $x = 0$ es uno, es decir, el vector de daño inicial es $p_0 = \{1, 0, \dots, 0\}$,
4. el estado en el cual ocurre la falla está dado por $\rho_b = 1$, es decir, que la falla ocurre en el último estado, el estado b , y no antes, y
5. la acumulación de daño en un paso de tiempo x es constante y no decreciente.

A continuación se presentan los resultados del análisis y aplicación del modelo.

Se tienen los datos de profundidades de picaduras de corrosión interna en una tubería de 155,500.34 m de longitud, de 5.6 mm de espesor, que transporta diesel. La inspección reportó 96 picaduras de corrosión. Al realizar un análisis estadístico

se obtiene el histograma, mostrado en la figura III.1. Cada intervalo de clase del histograma se considera un estado de daño del modelo.

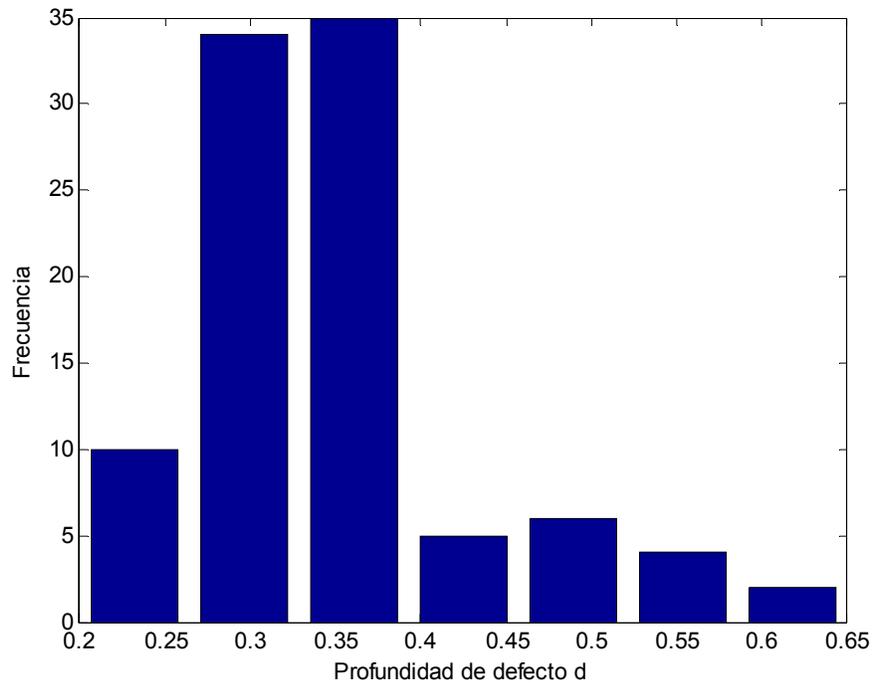


Figura III.1. Histograma de los datos de inspección.

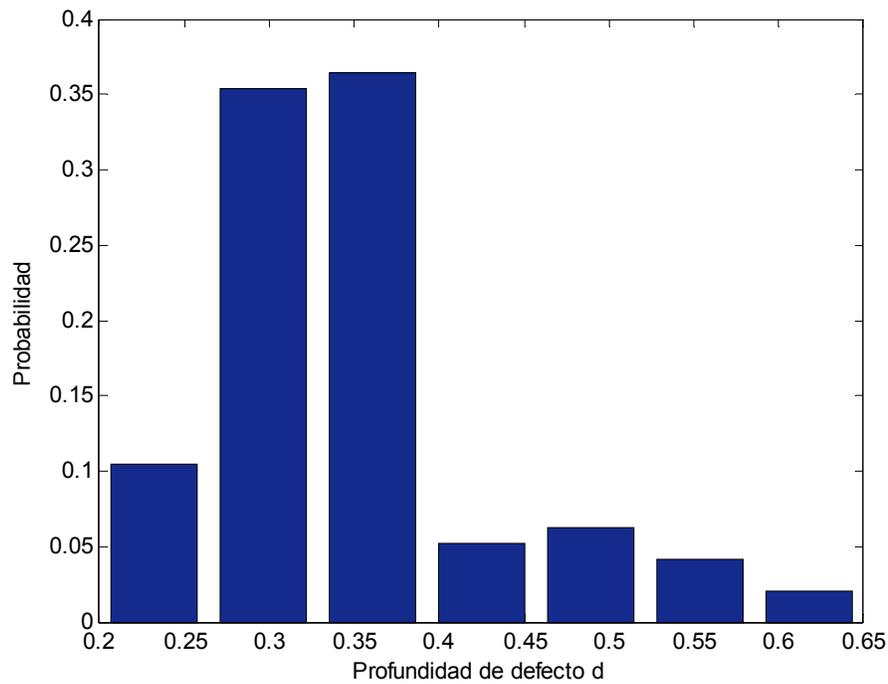


Figura III.2. Probabilidad de cada intervalo.

La probabilidad de cada intervalo se obtiene al dividir el número de defectos de cada intervalo entre el número total de defectos, figura III.2, y así se obtiene el vector de probabilidad $p_x = \{p_x(1), \dots, p_x(7)\}$.

Las probabilidades obtenidas de la función de densidad de probabilidad se muestran en la tabla III.1.

Tabla III.1. Probabilidades de cada estado al tiempo $x=7$.

$p_x(1)$	$p_x(2)$	$p_x(3)$	$p_x(4)$	$p_x(5)$	$p_x(6)$	$p_x(7)$
0.1042	0.3542	0.3646	0.0521	0.0625	0.0417	0.0208

Como se planteó en el capítulo II, para obtener las probabilidades de transición, se usan las ecuaciones que resultan de desarrollar la ecuación (II.2.5) para los tiempos $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Se multiplica el vector de probabilidad inicial $p_0 = \{1, 0, \dots, 0\}$, por la matriz de transición P descrita en (II.2.2), elevada a la potencia x .

Al igualar las probabilidades de la tabla III.1 con las ecuaciones que involucran a $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ y p_7 resulta,

$$p_x(1) = p_1^7 = 0.1042$$

$$p_x(2) = p_1(p_1(p_1(p_1(p_1(p_1 p_1 + q_1 p_2) + q_1 p_2^2) + q_1 p_2^3) + q_1 p_2^4) + q_1 p_2^5) + q_1 p_2^6 = 0.3542$$

⋮

al resolver las ecuaciones anteriores se encontraron los valores mostrados en la tabla III.2.

Tabla III.2. Probabilidades de transición para la matriz P al tiempo $x=7$.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
0.6859	0.7450	0.7930	0.0000	0.1950	0.7040	---

Como se puede observar, en este caso no es posible encontrar con el histograma todos los valores de p_j debido a que su forma conduce a problemas numéricos.

Una solución a este problema es calcular la función de distribución acumulada de los datos, hacer un ajuste, y obtener las probabilidades de cada intervalo. La figura III.3 muestra la distribución acumulada que se obtuvo de los datos.

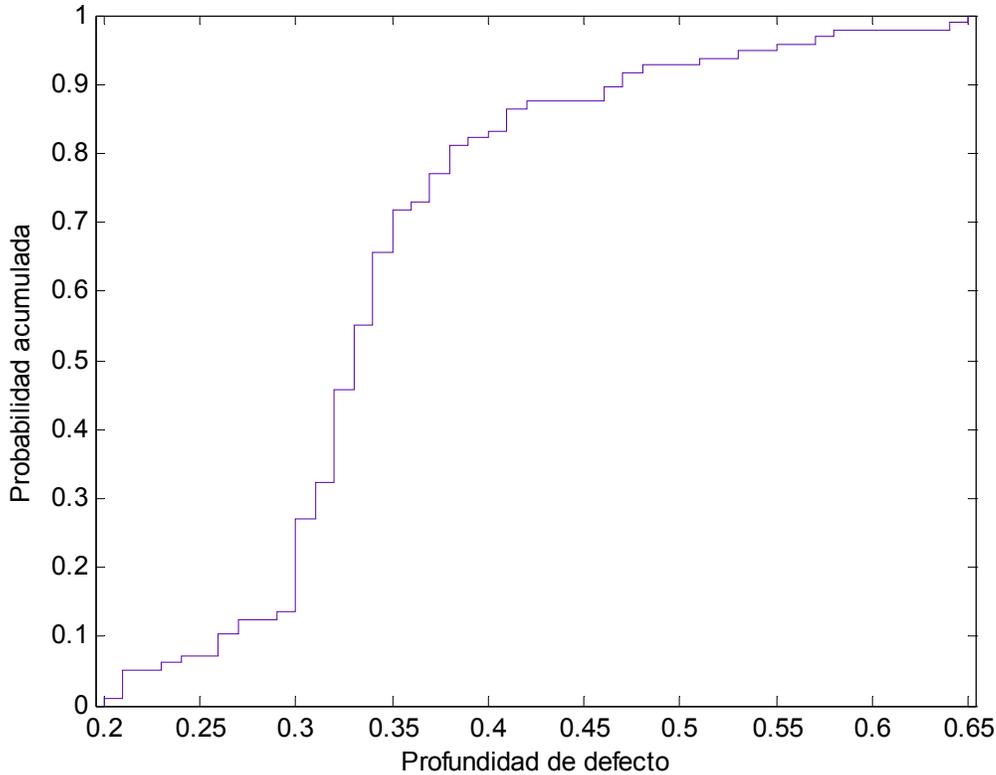


Figura III.3. Función de distribución de probabilidad acumulada empírica.

Se realizaron varios ajustes a los datos con diferentes funciones de probabilidad. La figura III.4 muestra los diferentes ajustes que se hicieron. Se percibió que los ajustes con las distribuciones Lognormal y Birnbaum-Saunders son los que permiten librar los problemas numéricos. En las figuras III.5 y III.6 se hace una comparación de los histogramas con los dos ajustes.

Se eligió utilizar la distribución Lognormal para representar la función de distribución de probabilidad de las picaduras de corrosión. A simple vista se pueden apreciar diferencias entre los histogramas y las funciones de distribución de probabilidad. Sin embargo, la probabilidad cuenta con teoría para saber si el conjunto de datos producto del muestreo de una variable aleatoria se puede representar con una cierta función de distribución. Por lo anterior es necesario saber si, efectivamente, los datos se ajustan a la distribución propuesta con un nivel aceptable de confianza. Para ello se realizó una prueba de hipótesis Kolmogorov - Smirnov. El ajuste propuesto pasó esta prueba con un nivel de significancia del 1%, por lo que es posible usar la distribución Lognormal para los cálculos siguientes.

En las figuras III.7 y III.8 se muestra la evolución de las probabilidades de transición p_j , y de la relación r_j , con ambos ajustes.

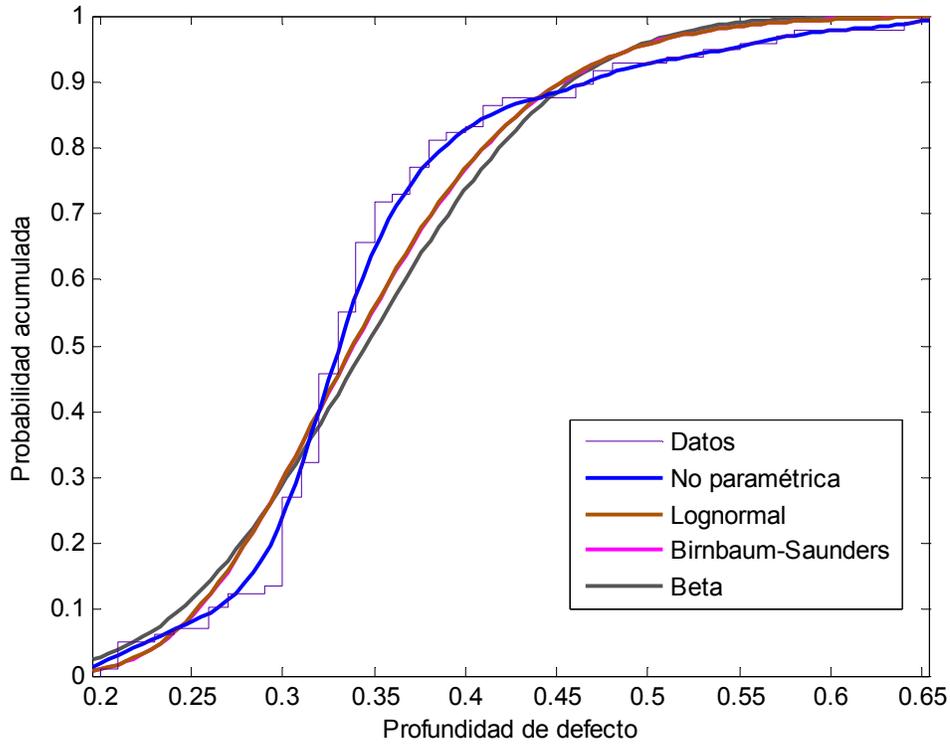


Figura III.4. Ajuste a la curva función de distribución de probabilidad acumulada.

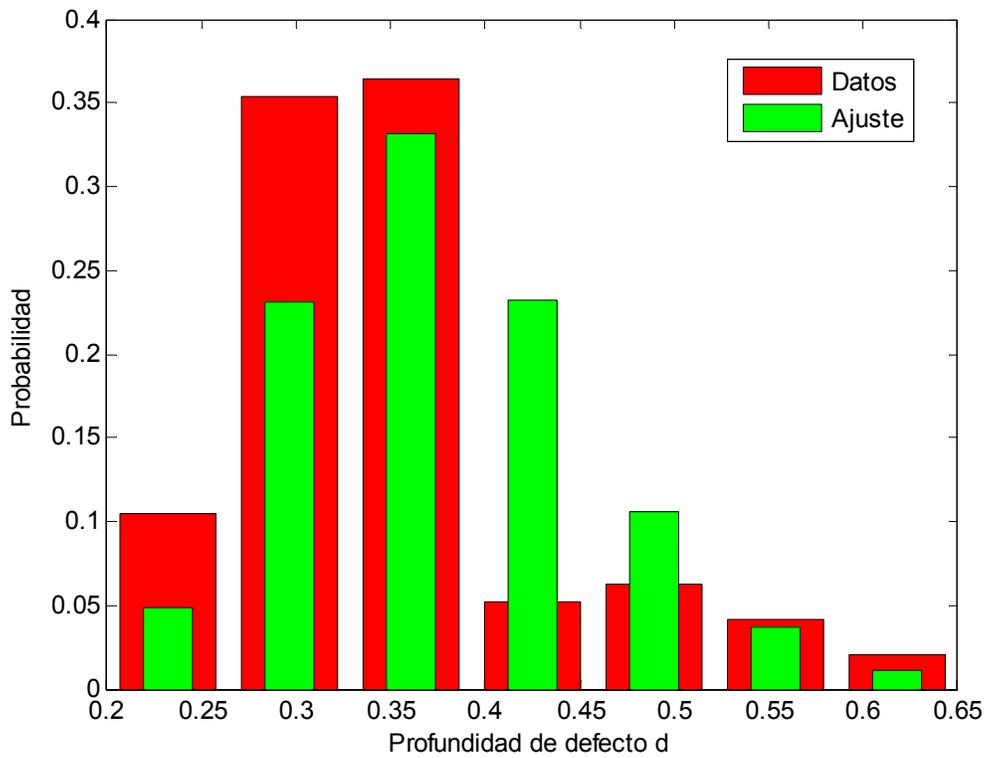


Figura III.5. Comparación entre probabilidades medidas (grueso) y con ajuste Lognormal (delgado).

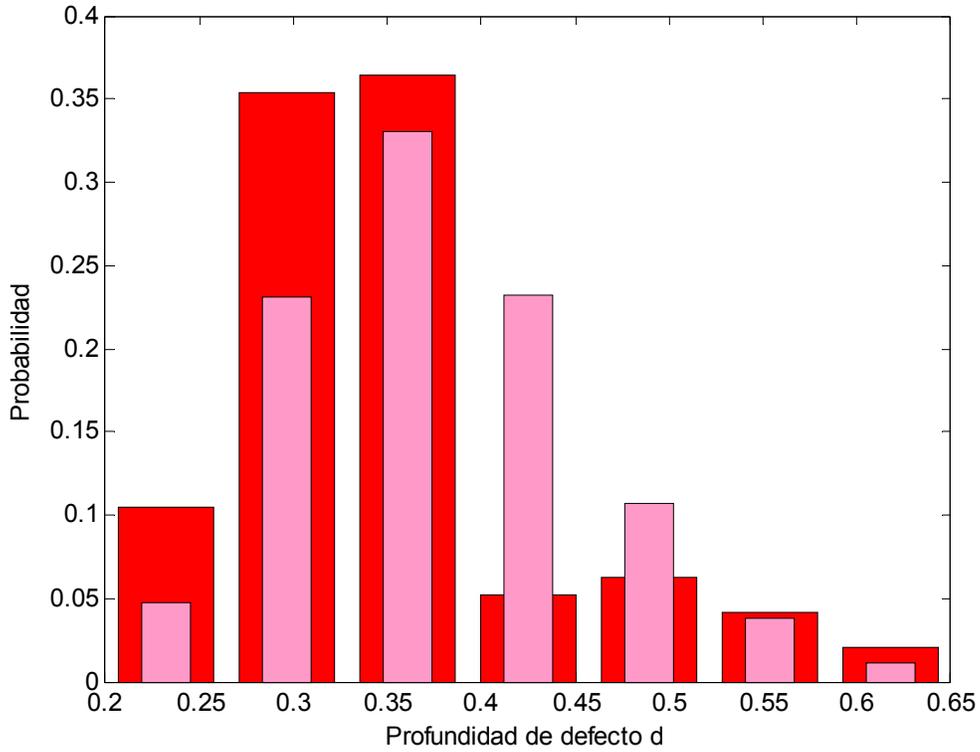


Figura III.6. Comparación entre probabilidades medidas (grueso) y con ajuste Birnbaum-Saunders (delgado).

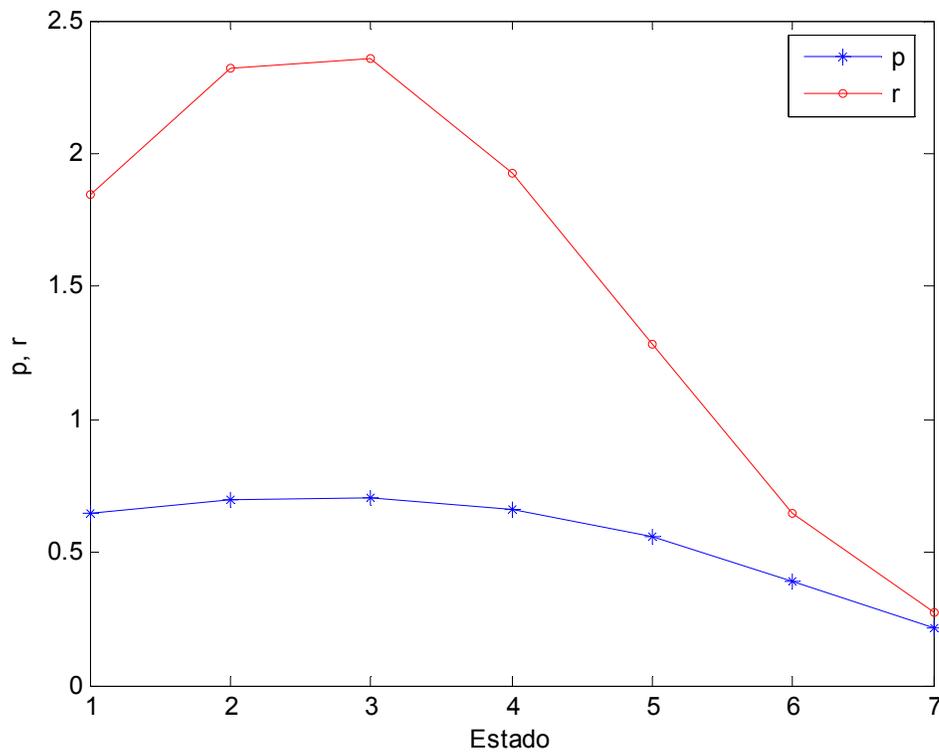


Figura III.7. Variación de p y r (Lognormal).

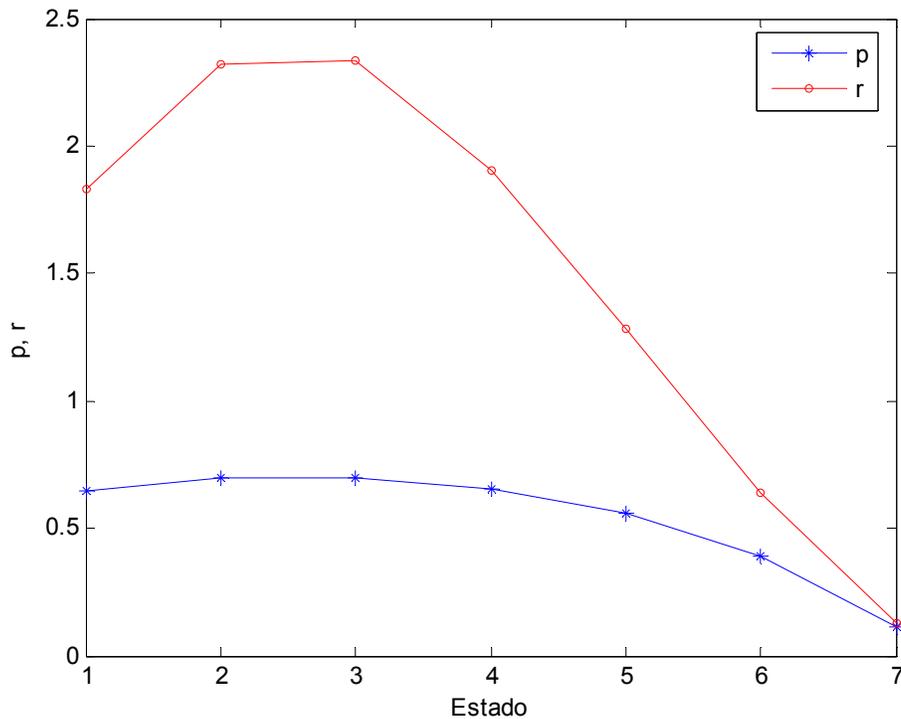


Figura III.8. Variación de p y r (Birnbbaum-Saunders).

Los valores de probabilidad de estar en cada uno de los estados en el tiempo $x = 7$ a partir del histograma ajustado con la función Lognormal se muestran en la tabla III.3.

Tabla III.3. Probabilidades de cada estado al tiempo $x=7$.

$p_x(1)$	$p_x(2)$	$p_x(3)$	$p_x(4)$	$p_x(5)$	$p_x(6)$	$p_x(7)$
0.0481	0.2309	0.3311	0.2319	0.1058	0.0372	0.0111

Nuevamente se realiza el procedimiento para encontrar las probabilidades de transición. Las ecuaciones resultantes de multiplicar el estado inicial por la matriz de transición elevada a la potencia $x=7$ es el vector

$$p_x = \{p_x(1), p_x(2), p_x(3), p_x(4), p_x(5), p_x(6), p_x(7)\}$$

Al igualar cada una de las $p_x(j)$ con los valores numéricos de probabilidad y resolver las ecuaciones es posible encontrar las p_j , en la tabla III.4 se muestran dichos valores. Los valores de r_j , recordando que $r_j = p_j / q_j$, se muestran en la tabla III.5.

Tabla III.4. Probabilidades de transición para la matriz P al tiempo $x=7$.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
0.6483	0.6990	0.7020	0.6580	0.5620	0.3940	0.2130

Tabla III.5. Relación $r_j = p_j / q_j$ al tiempo $x=7$.

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7
1.8431	2.3223	2.3557	1.9240	1.2831	0.6502	0.2706

Se puede observar que con el ajuste Lognormal sí es posible encontrar las probabilidades de transición hasta $x=7$. Hasta ahora se ha obtenido la información necesaria hasta el tiempo de la inspección. Se han obtenido las probabilidades para llenar la matriz de transición, así como la relación r . Esta información es imprescindible para conocer el tiempo esperado a la falla, ya que el siguiente paso es observar y evaluar las tendencias de las probabilidades encontradas para extrapolar la información hasta la falla.

Una manera de usar la información que se tiene hasta el tiempo de la inspección para obtener las probabilidades de transición a la falla es usando una ecuación, que sea función de un parámetro y que se ajuste a los datos. De esta manera es posible conocer las probabilidades en los tiempos posteriores a la inspección.

Tomando en cuenta la forma de la evolución de q_j para los diferentes estados, se propone la siguiente ecuación:

$$q_j = 1 - (1 - Y_q) e^{-\lambda(j - I_q)^2} \quad \forall \quad j = 1, \dots, 7$$

donde Y_q es el valor mínimo de q , I_q es el estado en donde se encuentra el valor mínimo de q y λ es un parámetro que ajusta a los datos.

Dado que el espesor del ducto en estudio es de 5.6 mm y los intervalos de clase del histograma son de 0.0643 mm, se deduce que el número de estados b , a la falla, debe ser

$$b = \frac{t}{\Delta x} = \frac{5.6}{0.0643} = 87.111$$

donde t es el espesor del ducto igual a 5.6 mm y Δx es el intervalo de clase igual a 0.0643 mm.

Con los datos conocidos hasta el tiempo de la inspección se encuentra el valor de λ , calculando el error cuadrático medio. El valor de λ que minimiza el error es $\lambda = 0.055$. Al conocer este valor es posible calcular las q_j hasta la falla. En la figura III.9 se muestra una comparación de q_j medida de los datos y la calculada con la función de λ . Es posible observar que se tiene un buen ajuste de la función. De esta manera se ha calculado q_j hasta la falla. En la figura III.10 se presenta la comparación de la variación de r_j calculada en función de λ y la que fue calculada con los datos.

Con los ajustes anteriores es posible obtener todas las probabilidades de transición de pasar de un estado a otro, considerando todos los estados, hasta la falla.

Ahora que se tiene la matriz de transición se calcula la función de distribución acumulada de D_x . Recuerdese que la ecuación (II.2.11) es:

$$F_D(j; x) = P\{D_x \leq j\} = \sum_{k=1}^j p_x(k) \quad \forall \quad j=1, \dots, b$$

y la media y la varianza de D_x están dadas por (II.2.12):

$$E\{D_x\} = \sum_{j=1}^b j p_x(j) \quad \text{y} \quad \text{var } D_x = \sum_{j=1}^b j^2 p_x(j) - [E\{D_x\}]^2$$

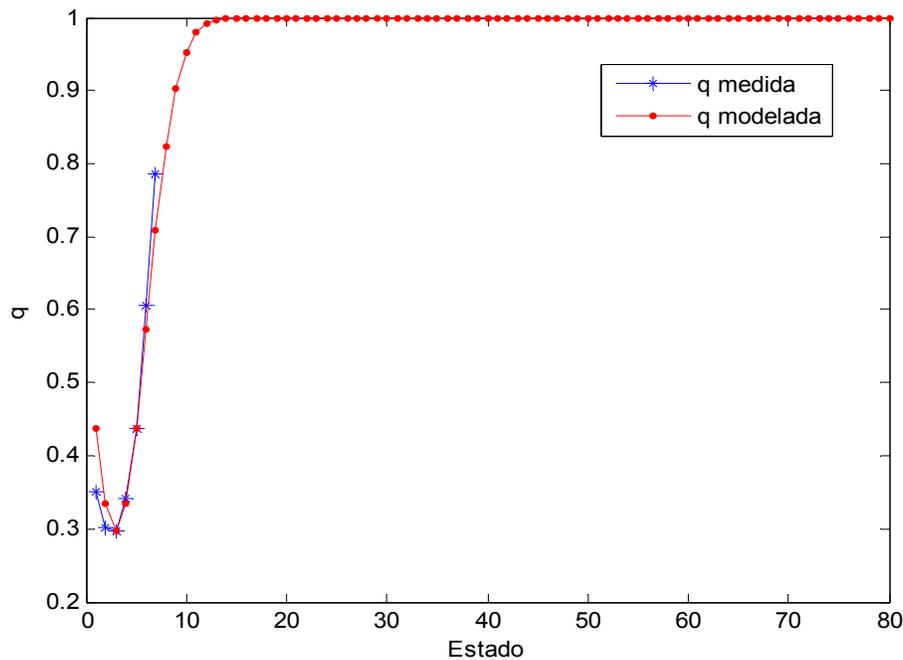


Figura III.9. Comparación de q_j calculada con los datos (medida) y con la función de λ (modelada).

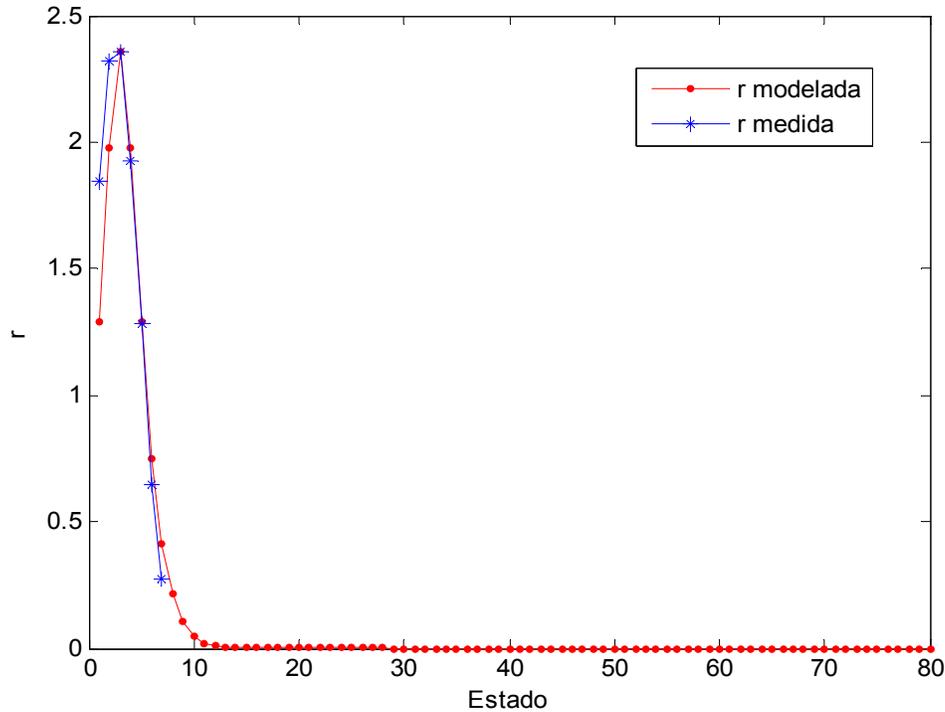


Figura III.10. Comparación de r_j calculada en función de λ (modelada) y calculada de los datos (medida).

La función de distribución acumulada del daño con datos reales del ducto en estudio se muestra en la figura III.11. En ella se puede ver que, como se había visto en (II.2.25) en el capítulo anterior, se cumple, es decir:

$$F_w(x;1,b)=0 \quad \forall \quad x = 0, 1, \dots, b - 2$$

ya que un modelo de salto unitario no puede alcanzar el estado b desde 1 en menos de $b - 1$ pasos. Debido a lo anterior, la curva de distribución empieza a ser diferente de cero en el estado 79. Se observa que asciende rápidamente y la probabilidad de que el tiempo a la falla sea menor o igual a 120 es uno, por lo que a ese tiempo, el sistema ha fallado.

De la función de falla se puede observar que inicia desde cero, al mismo tiempo que la función de distribución, debido a que se considera la tubería inicialmente sin daño, y asciende hasta llegar a ser constate en un valor de 0.3. De lo anterior puede decirse que la probabilidad de que la tubería falle, si ha funcionado en un periodo dado, es baja.

Las figuras III.12 y III.13 muestran la media y la varianza del ducto en estudio, respectivamente.

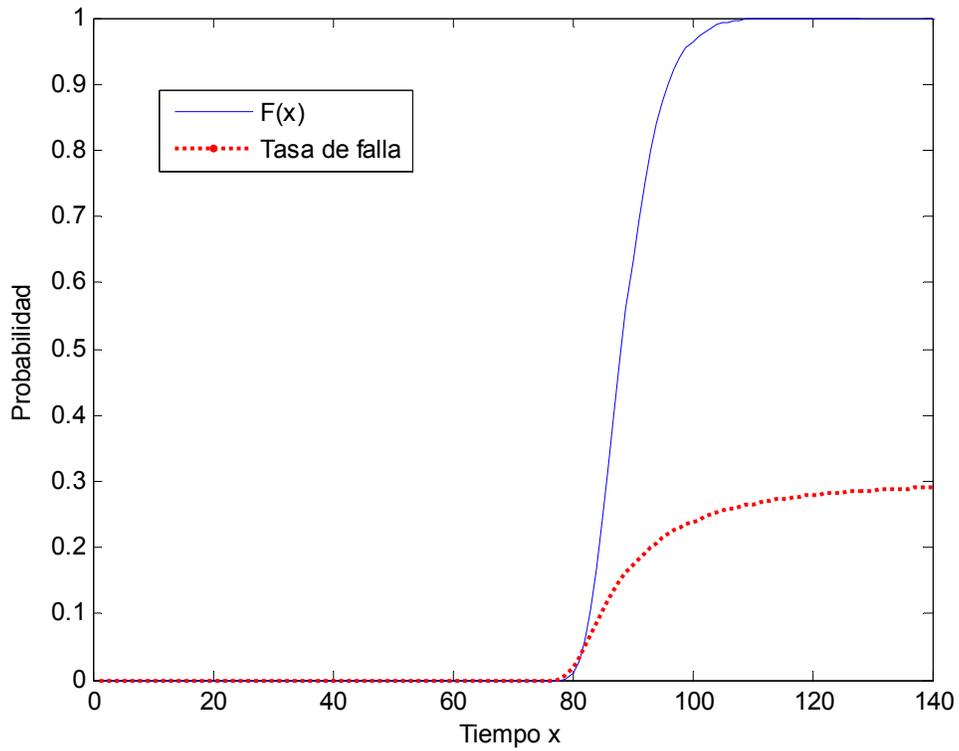


Figura III.11. Función de distribución acumulada $F_w(x;1,b)$ y $h_w(x;1,b)$ del ducto en estudio.

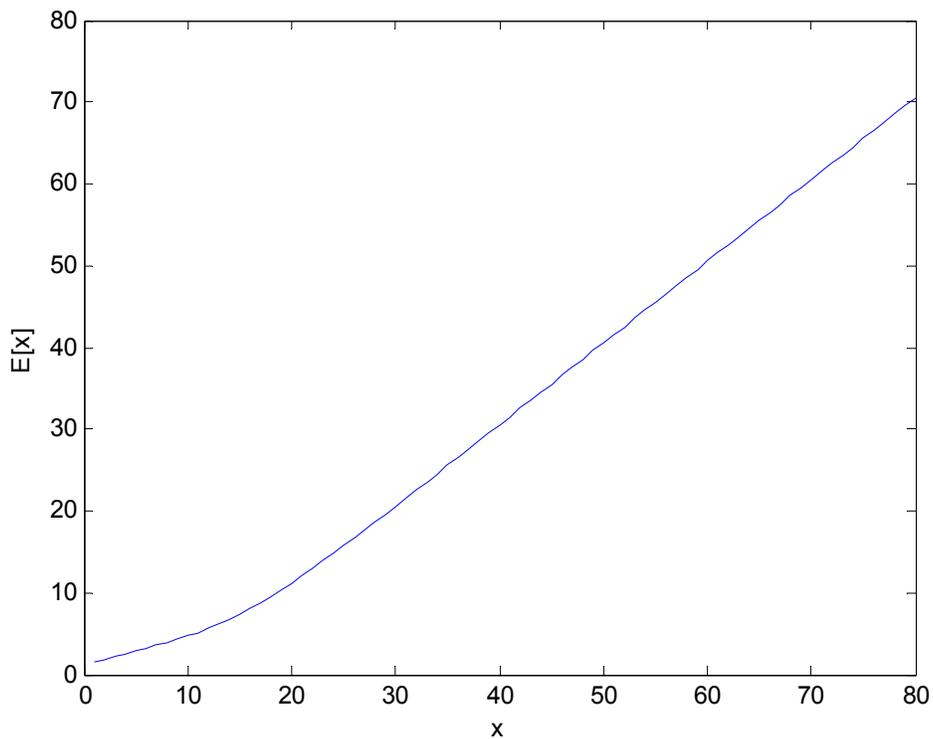


Figura III.12. Media de D_x del ducto en estudio.

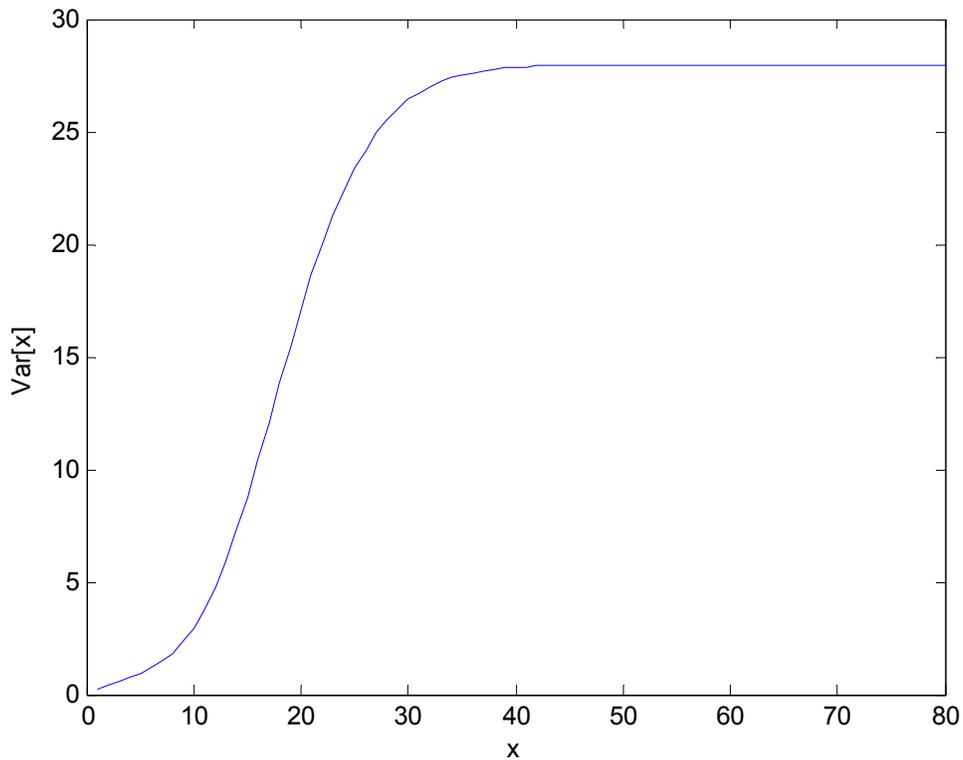


Figura III.13. Varianza de D_x del ducto en estudio.

La media indica el valor esperado de estado de daño para cada paso de tiempo x . En una primera etapa, la variación no es lineal, pero a partir del estado 20 la variación de la media es constante. La varianza nos da el promedio de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. En este caso, va aumentando hasta mantenerse constante en un valor menor a 30, lo que nos indica que no existe mucha variación y que el modelo es confiable.

Para conocer el tiempo de falla del ducto se usa la teoría presentada al final del capítulo anterior. Dado que el tiempo utilizado en el estado j es la variable aleatoria T_j , es posible aplicar la ecuación (II.2.62) con las r_j hasta la falla, y así conocer el tiempo medio utilizado en cada estado, así como su sucesión. La figura III.14 es la curva que representa la media de la función de muestra $E\{T_j\}=1+r_j$.

A manera de comprobación y para tener una idea de cómo funciona la teoría se realizaron simulaciones utilizando simulaciones de Monte Carlo. Es decir, se usó una distribución uniforme para obtener tiempos aleatorios en cada estado siguiendo una distribución geométrica. El procedimiento consiste en simular funciones muestrales y obtener su media, para compararla con la de la teoría.

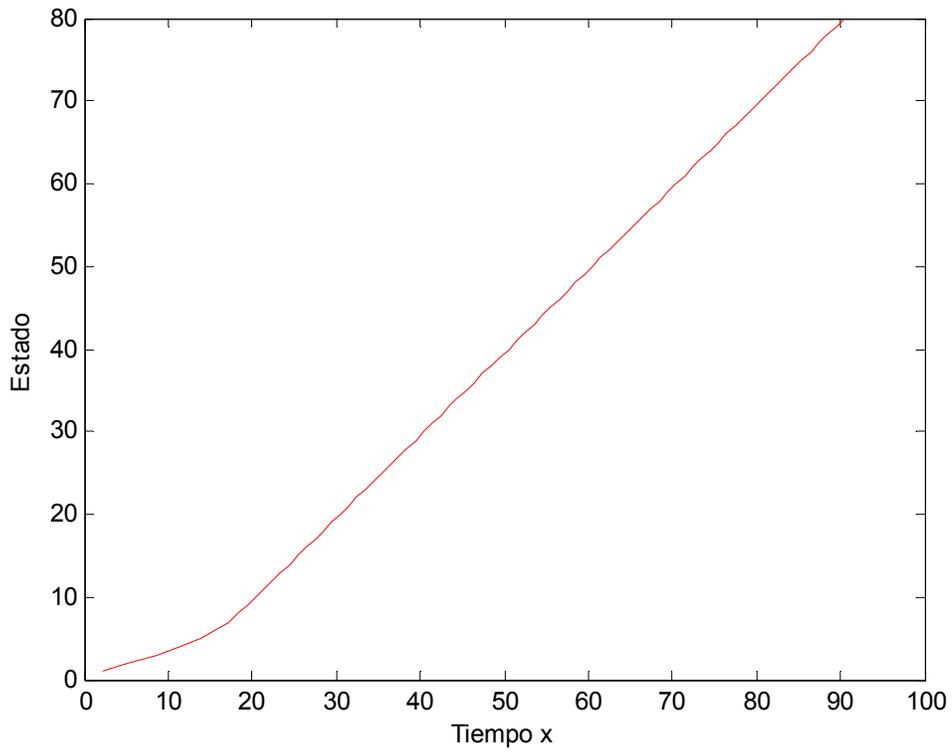


Figura III.14. Evolución de $E\{T_j\}=1+r_j$ calculada en función de λ (modelada).

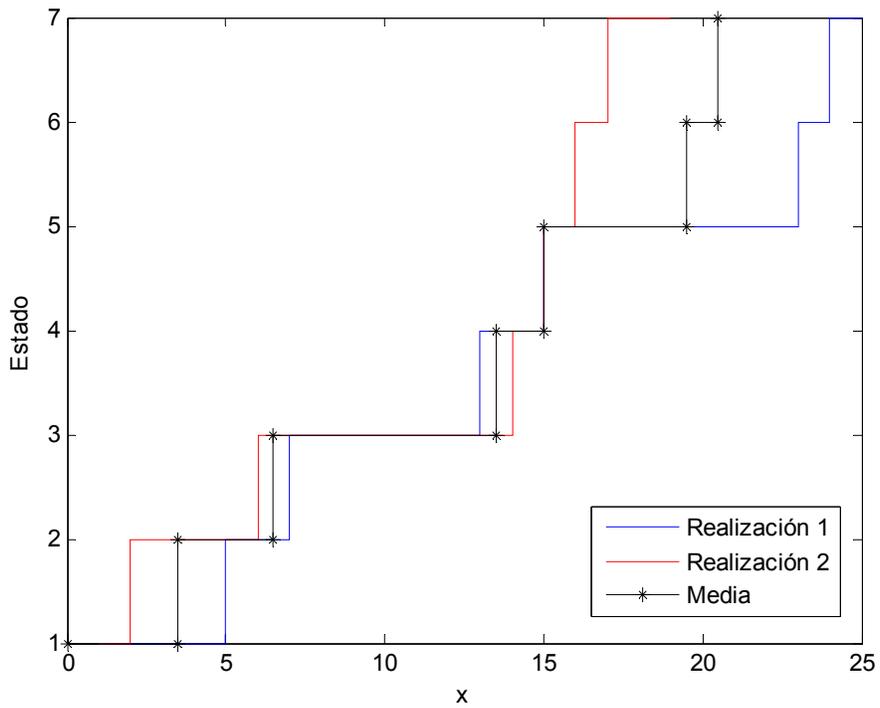


Figura III.15. Dos funciones muestrales simuladas con Monte Carlo y su media, considerando los siete estados de daño medidos.

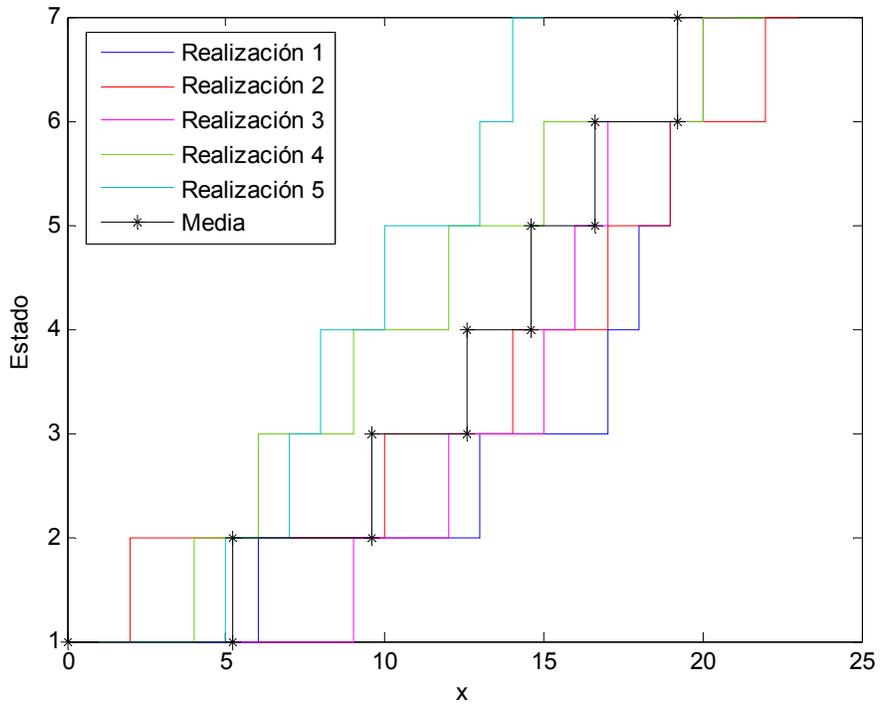


Figura III.16. Cinco funciones muestrales simuladas con Monte Carlo y su media, considerando los siete estados de daño medidos.

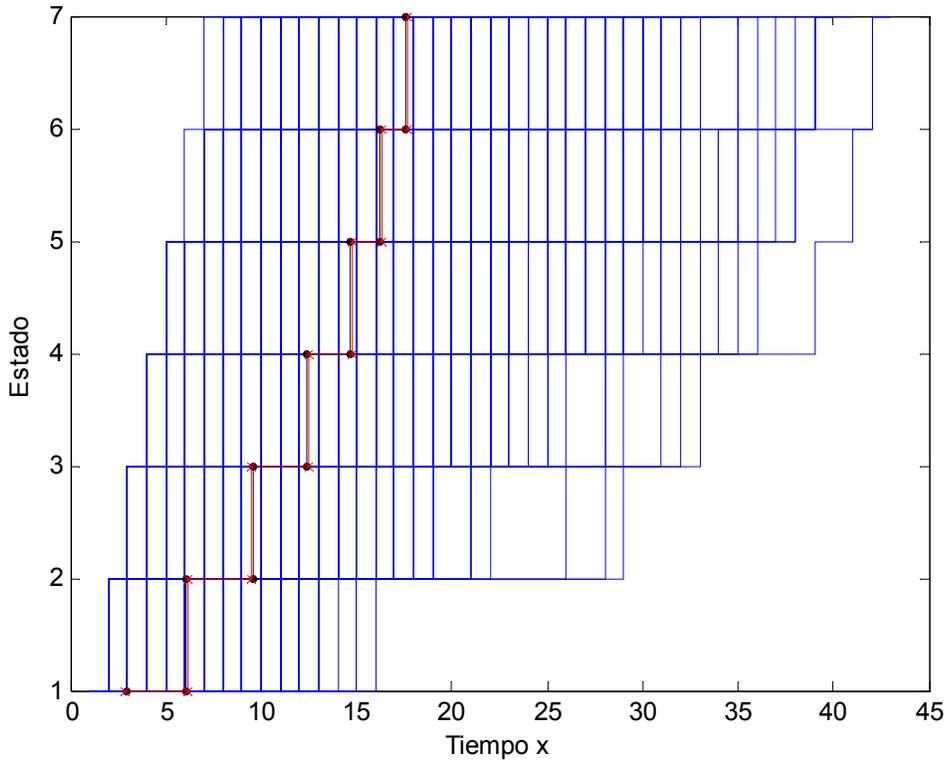


Figura III.17. Comparación de $E\{T_j\}=1+r_j$ (rojo) con la media de un modelo de Monte Carlo (negro) usando 1000 funciones muestrales (azul) considerando los siete estados de daño medidos.

En la figura III.15 se presenta la simulación de dos funciones muestrales y su media hasta el estado 7. Obsérvese que la media está, en efecto, a la mitad de las dos realizaciones. Continuando de esta manera, se presentan en la figura III.16 cinco realizaciones, considerando los siete estados de daño medido.

La figura III.17 muestra 1000 funciones muestrales simuladas y su media en color negro. Además se obtuvo el tiempo esperado con la ecuación (II.2.62), y en la misma figura III.17, se muestra en color rojo. Se pudo observar que la diferencia entre la media obtenida de las realizaciones y la obtenida con los datos se reduce a medida que se incrementa el número de simulaciones, por lo que puede decirse que el método es consistente.

En la figura III.18 se muestra la comparación de la media del tiempo en cada estado usando la ecuación (II.2.62) y el modelo de Monte Carlo usando 1000 funciones muestrales y considerando los 80 estados de daño. En la figura se muestra que las líneas de las medias prácticamente son las mismas, por lo que es posible decir que las simulaciones y la teoría arrojan resultados similares.

De esta manera se puede obtener el tiempo en el cual la media de la función de muestra alcanza b , en este caso $E\{W_{1,b}\}$, es decir, el tiempo esperado a la falla. Así por ejemplo, para alcanzar el estado 20 el tiempo medio esperado es $E\{W_{1,20}\}=30$ pasos de tiempo, y para llegar a la falla $E\{W_{1,b}\}=90$ pasos de tiempo.

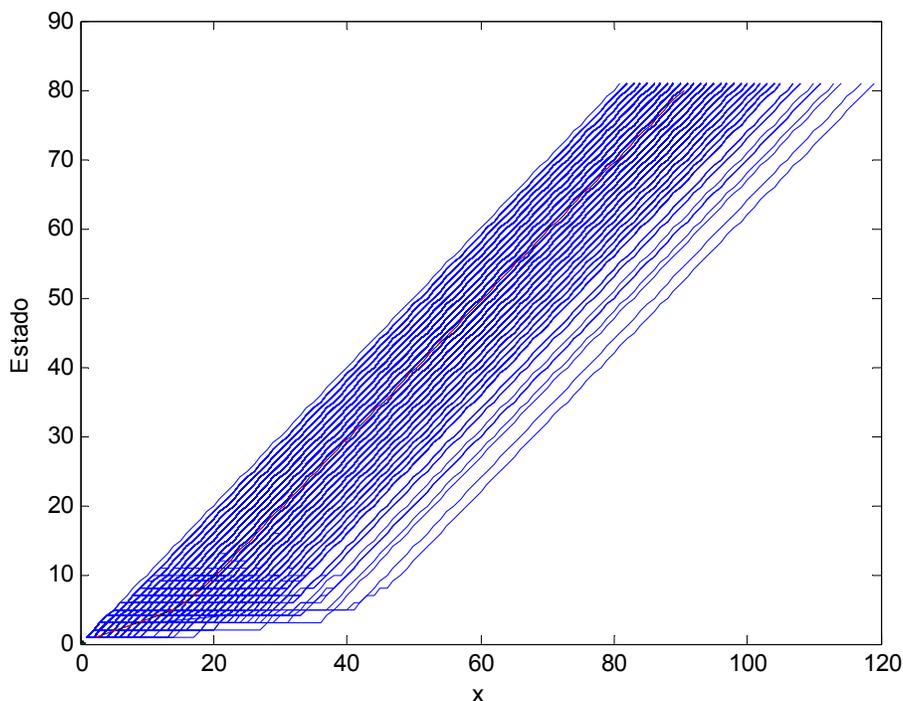


Figura III.18. Comparación de $E\{T_j\}=1+r_j$ (rojo) con la media de un modelo de Monte Carlo (negro) usando 1000 funciones muestrales (azul) considerando los 80 estados de daño medidos.

Hasta ahora se conocen los pasos de tiempo en que la tubería llega a la falla. Una observación importante es que en todo el cálculo y análisis se han considerado pasos de tiempo $x = 1, 2, 3, \dots$, sin embargo, es necesario recordar que cada paso de tiempo manejado hasta ahora tiene una equivalencia en el tiempo real. A continuación se calculará el tiempo real equivalente a un paso de tiempo x .

Recuérdese que se consideró $x = 7$ para realizar las ecuaciones $p_x = p_0 P^x$; sin embargo, este número de estados fue arbitrario y puede variar de acuerdo a ciertas consideraciones que dependen de cada conjunto de datos. Por ello, es mejor obtenerlo directamente de los datos. Se calcula la media y el estado en el que se encuentra. Posteriormente se busca el valor esperado del tiempo en el que se llega a dicho estado.

La media de este conjunto de datos es 0.3767 y se encuentra en el tercer estado, figura III.19.

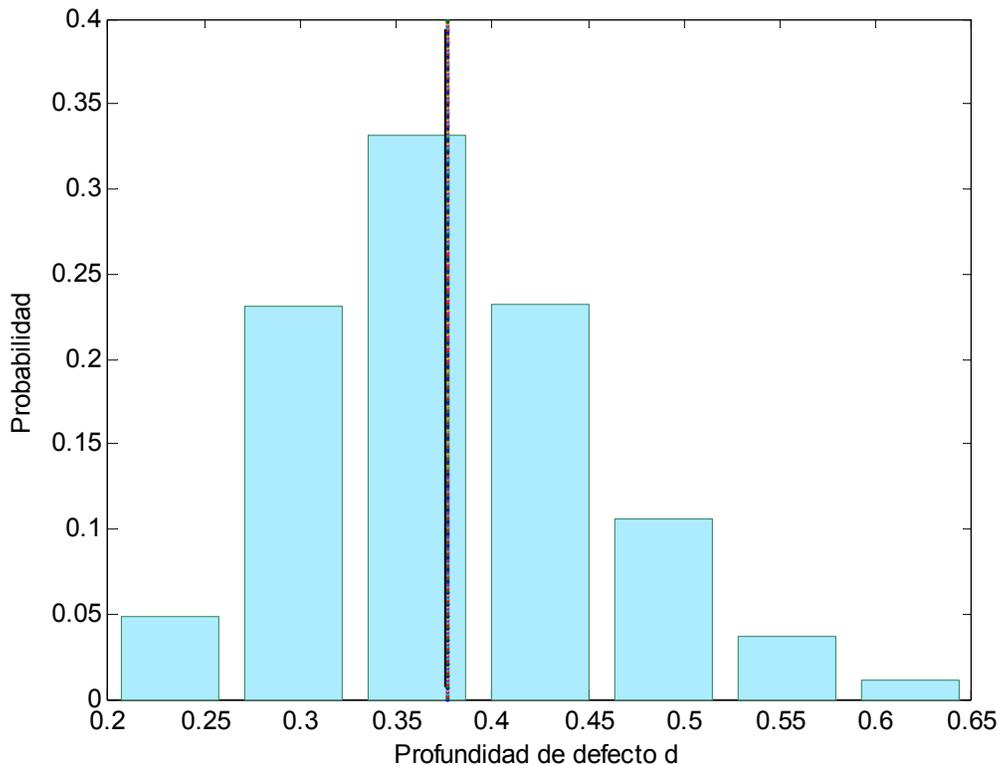


Figura III.19. Histograma de los datos de inspección y media (línea vertical).

Al buscar el estado en el que está la media en el eje vertical de la figura III.17 y proyectarlo en el eje horizontal, se encuentra que el tiempo transcurrido para alcanzar ese estado es $x = 12.5$. Relacionando el tiempo real de cuatro años, al cual se realizó la inspección con el tiempo $x = 12.5$ teórico, se obtiene que un paso de tiempo equivale a 0.32 años de tiempo real.

Con este dato es posible conocer el tiempo real a la falla. De acuerdo al análisis, el tiempo medio teórico a la falla es $E\{W_{1,b}\} = 90$ pasos de tiempo, y en tiempo real es $90 * 0.32 = 28.8$ años.

De esta manera es posible conocer el tiempo medio a la falla de cualquier tubería de la que se tenga un reporte de inspección, utilizando la teoría de cadenas de Markov.

III.2 Discusión de resultados

Es importante observar la propagación de la corrosión que se muestra en la figura III.14, ya que ésta representa el valor esperado de la evolución de picaduras en la tubería. Se puede ver que en una primera etapa, la velocidad de corrosión es menor y posteriormente aumenta y se vuelve constante hasta la falla.

Lo anterior puede explicarse de la siguiente manera. Debido a que es el promedio (media) del tiempo que permanece en cada estado, y dado que el sistema parte de que no hay daño al inicio, se puede decir que en este análisis está implícito el tiempo de nucleación. La nucleación es el tiempo en el que se empieza a formar, a una escala microscópica, la picadura por corrosión. Debido a que es un promedio y a que se asume que el sistema inicia sin daño pasa más tiempo en que se generen todas las picaduras. Después existe otra etapa en que se mantiene constante, esto es debido a que una vez que se han generado las picaduras y se forma la película, la velocidad de corrosión se mantiene constante.

De acuerdo al fenómeno de corrosión localizada descrito en la literatura (**Frankel, 2001**), el comportamiento de la velocidad de corrosión se debe al hecho de que en una etapa temprana, la región del metal atacada está completamente expuesta a altas concentraciones de especies corrosivas, mientras que en tiempos mayores se forma una capa de óxido con propiedades pasivas entre el metal y el ambiente corrosivo, y sirve como una barrera protectora contra la corrosión (**Engelhardt y Macdonald, 2004**). Esto muestra que el proceso de corrosión en una tubería es casi estable si no hay cambios repentinos y radicales que afecten la cinética del proceso (**Alamilla y Sosa, 2008**).

Las etapas descritas anteriormente también se observan en arcilla marina y arena (**Katano et al., 2003**), así como en medio marino, en el cual además se observan otras etapas (**Melchers, 2005**).

Con lo anterior se puede explicar el comportamiento de las picaduras de corrosión en la tubería estudiada.

III.3 Trabajos a futuro

- Hacer un estudio más amplio de los problemas numéricos que se suscitan al desarrollar las ecuaciones.
- Probar con diferentes ajustes para encontrar las probabilidades de transición posteriores a la inspección.
- Estudiar por separado el tiempo de nucleación en el modelo, y su impacto en la matriz de transición y en el tiempo esperado a la falla.

CONCLUSIONES

- El modelo que se presenta en este trabajo, representa la evolución en el tiempo de los daños por picaduras de corrosión interna en un ducto de transporte de hidrocarburos, y permite conocer con detalle la propagación de la profundidad de corrosión en diferentes instantes de tiempo a partir de los datos de un reporte de inspección.
- Se obtuvo la matriz de transición a partir de un solo reporte de inspección.
- El ajuste de los datos a una distribución de probabilidad Lognormal evitó problemas numéricos. Sin embargo, se debe realizar una prueba Kolmogorov–Smirnov al 1% de nivel de significancia, que indique si se puede utilizar la distribución Lognormal con un nivel aceptable de confianza.
- El tiempo de nucleación de la corrosión queda implícito en la matriz de transición.
- Con el modelo presentado es posible calcular el valor esperado del tiempo a la falla de cualquier tubería que cuente con un reporte de inspección, lo que resulta muy útil a la industria para programar inspecciones y mantenimiento.
- La comparación del tiempo usado en cada estado de daño, según la teoría de daño acumulado y con simulaciones de Monte Carlo, proporciona valores similares, por lo que se puede afirmar que el modelo es consistente.
- Se encontró la relación entre los pasos de tiempo teórico y el tiempo real para conocer el tiempo real en cada estado y a la falla.

BIBLIOGRAFÍA

- Alamilla, J. L. y Sosa, E. 2008.** Stochastic modelling of corrosion damage propagation in active sites from field inspection data, *Corrosion Science*. Vol. 50, No.7, July.
- Bogdanoff, J. L. y Kozin, F. 1985.** Probabilistic Models of Cumulative Damage. Ed. John Wiley and Sons. USA.
- Costa, J. M. 2005.** Diccionario de Química Física. Ed. Díaz de Santos. España.
- Engelhardt, G. y Macdonald, D. 2004.** Unification of the deterministic and statistical approaches for predicting localized corrosion damage. I. Theoretical foundation, *Corrosion Science*. Vol. 46, November.
- Frankel, G. S. 2001.** Localized Corrosion of Metals; A Review of the Rate-Controlling Factors in Initiation and Growth, in *Passivity of Metals and Semiconductors*. The Electrochemical Society Proceedings Vol. 99-42.
- Feller, W. 1957.** An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1, Second edition, Ed. Wiley. USA.
- Hong, H. P. 1999.** Application of the Stochastic Process to Pitting Corrosion. *Corrosion Science*. Vol. 55, No.1, January.
- Katano, Y., Miyata, K., Shimizu, H., Isogai, T. 2003.** Predictive Model for Pit Growth on Underground Pipes, *Corrosion: Journal of Science and Engineering*. Vol. 59, No.2, July.
- Melchers, Robert. 2003.** Effect on marine immersion corrosion of carbon content of low alloy steels, *Corrosion Science*. Vol. 45, No.11, November.
- Papoulis, Athanasios. 1984.** Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. Second edition. Internacional Student Edition. Singapore.
- Provan J. W. y Rodríguez E. S. 1989.** Development of a Markov Description of Pitting Corrosion, *Corrosion*. Vol.45, No.3, March.
- Shibata, T. 1996.** W.R. Whitney Award Lecture: Statistical and Stochastic Approaches to Localized Corrosion, *Corrosion Science*. Vol. 52, No. 11, November.
- Valor, A., Caleyó, F., Alfonso, L., Rivas, D. y Hallen, J. M. 2007.** Stochastic modeling of pitting corrosion: A new model for initiation and growth of multiple corrosion pits, *Corrosion Science*. Vol. 49, No.2, February.

APÉNDICE A

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Distribución de probabilidad

La distribución de probabilidad $F(x)$ es una función de la probabilidad que representa los resultados que se van obteniendo en un experimento aleatorio. A $F(x)$ se le denomina Función de Distribución de Probabilidad de la variable \mathbf{x} y representa la probabilidad de que la variable tome el valor desde cero hasta x . También se puede definir como la acumulada de la función de densidad de probabilidad, esta última más comúnmente conocida como función de densidad. Una vez conocida la función de distribución $F(x)$, para todos los valores de la variable aleatoria \mathbf{x} se conoce completamente la distribución de probabilidad de la variable. Como la probabilidad es siempre un número positivo, entonces la función de distribución será una función no decreciente. Es decir, la probabilidad de todo el espacio muestral es uno, tal y como establece la teoría de la probabilidad. Es decir, la probabilidad del suceso nulo es cero. A continuación se presenta una definición.

Los elementos del conjunto L que están contenidos en el evento $\{\mathbf{x} \leq x\}$ cambian conforme x toma diferentes valores. La probabilidad $P\{\mathbf{x} \leq x\}$ del evento $\{\mathbf{x} \leq x\}$ es, por lo tanto, un número que depende de x . Este número está representado por $F_x(x)$ y se denomina función de distribución (acumulada) de la variable aleatoria \mathbf{x} (**Papoulis, 1984**).

Definición. La función de distribución de la variable aleatoria \mathbf{x} es la función

$$F_x(x) = P\{\mathbf{x} \leq x\} \quad (\text{A-1})$$

definida para cada x de $-\infty$ a ∞ .

Las funciones de distribución de las variables aleatorias x , y y z se denotan por $F_x(x)$, $F_y(y)$ y $F_z(z)$, respectivamente. En esta notación, las variables x , y y z pueden ser identificadas con cualquier letra. Se podría, por ejemplo, usar la notación $F_x(w)$, $F_y(w)$ y $F_z(w)$ para representar las funciones anteriores. Específicamente

$$F_x(w) = P\{\mathbf{x} \leq w\}$$

es la función de distribución de la variable aleatoria x . Sin embargo, si no hay riesgo de ambigüedad, se identificarán las variables aleatorias antes consideradas por la variable independiente en (A-1) omitiendo el subíndice. Así, las funciones de distribución de las variables aleatorias x , y y z se denotan por $F(x)$, $F(y)$ y $F(z)$, respectivamente (**Papoulis, 1984**).

Función de distribución de probabilidad discreta

Se denomina variable discreta aquella que sólo puede tomar determinados valores. El conjunto de valores que toma dicha variable, x , es finito o numerable. En este caso, la Distribución de Probabilidad es la sumatoria de la función de densidad. Y como corresponde a la definición de distribución de probabilidad, esta expresión representa la suma de todas las probabilidades. Algunas distribuciones de variable discreta son las siguientes: distribución binomial, de Poisson, geométrica, hipergeométrica. En este caso la función de distribución acumulada está dada como sigue:

$$F(x) = \sum_{x \leq x_i} p(x_i) \quad (\text{A-2})$$

donde $p(x_i)$ se conoce como función de masa de probabilidad y satisface las siguientes propiedades

$$P[X = x_i] = p(x_i) \quad (\text{A-2a})$$

$$P(x_i) \geq 0 \quad (\text{A-2b})$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(x_i) = 1 \quad (\text{A-2c})$$

Función de distribución de probabilidad continua

Se denomina variable continua aquella que puede tomar cualquiera de los infinitos valores existentes dentro de un intervalo finito. En el caso de variable continua, la distribución de probabilidad es la integral de la función de densidad. Algunas

distribuciones de variable continua son las siguientes: distribución uniforme, normal (gaussiana), gamma, exponencial, de Pareto, Chi-cuadrada, t de Student, f de Snedecor. $F(x)$ se expresa como

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (\text{A-3})$$

donde $f(x)$, se conoce como función de densidad de probabilidad y satisface las siguientes relaciones:

$$f(x_i) \geq 0 \quad (\text{A-3a})$$

$$f(x) \text{ es integrable sobre cada valor del espacio muestral} \quad (\text{A-3b})$$

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = 1 \quad (\text{A-3c})$$

Distribución Uniforme

Su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall \quad a \leq x \leq b$$

La media es $E(x) = \frac{a+b}{2}$, y la varianza $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Su función característica es $\phi_x(u) = \frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}$.

Distribución Normal o Gaussiana

Su función de densidad de probabilidad se expresa como

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right]$$

donde $\mu_x = E[X]$ y $\sigma_x = \sqrt{\text{var}(X)}$ son la media y la desviación estándar, respectivamente.

Su función de distribución acumulada se expresa como

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] dz$$

La distribución Normal es comúnmente denotada como $N(\mu, \sigma)$, e indica que posee media μ y desviación estándar σ .

Su función característica es $\phi_X(u) = e^{iu\mu_X} - \frac{\sigma_X^2 u^2}{2}$.

Distribución Lognormal

Si la variable aleatoria $Y = \ln X$ se distribuye normalmente $N(\lambda, \xi)$, entonces se dice que la distribución de variable aleatoria X es Logarítmico Normal o simplemente Lognormal con media λ y desviación estándar ξ . La función de densidad de probabilidad Lognormal se define como

$$f_X(x) = \frac{1}{\xi \sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right)^2\right] \quad \forall \quad x \geq 0$$

La media y desviación estándar de X están dadas por

$$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2} \xi^2\right)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mu_X^2 (e^{\xi^2} - 1)}$$

La distribución de X está dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \Phi\left[\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right]$$

Distribución gamma

$$f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \quad \forall \quad x > 0, \quad r > 0, \quad \lambda > 0$$

donde $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$, con media $E[X] = \frac{r}{\lambda}$ y $\text{var}(X) = \frac{r}{\lambda^2}$ y función

característica $\phi_X(u) = \left(1 - \frac{iu}{\lambda}\right)^{-r}$.

Distribución de Bernoulli

Una variable aleatoria X se dice que es de Bernoulli si solo puede tomar dos valores. Por ejemplo

$$\begin{aligned} X = 1 & \quad \text{si se observa un éxito} \\ X = 0 & \quad \text{si se observa un fracaso} \end{aligned}$$

De aquí que la función de masa de probabilidad está dada por la función

$$p_x(x) = \begin{cases} p & \forall x = 1 \\ 1 - p & \forall x = 0 \end{cases}$$

Esta variable aleatoria tiene media $E[X] = p$ y varianza $\text{var}(X) = (1 - p)p$.

Distribución Binomial

Una variable aleatoria Binomial surge de repeticiones de pruebas de Bernoulli. Esta distribución representa el número total de éxitos ocurridos en una secuencia finita de n ensayos independientes de Bernoulli, cada uno con una probabilidad de éxito p .

En general, si se tienen n pruebas de Bernoulli la función de densidad de probabilidad de masa se escribe como

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$$

La media y varianza de esta variable aleatoria son $E[X] = np$ y $\text{var}(X) = np(1 - p)$, respectivamente.

Su función característica es $\phi_X(u) = (pe^{iu} + q)^n$.

Distribución Geométrica

Si se asume independencia entre pruebas, cada uno con una probabilidad de éxito p , y estamos interesados en el número de pruebas $X = k$ hasta que ocurra el primer éxito, entonces estamos hablando de una variable aleatoria con distribución geométrica. El primer éxito ocurrirá en la k -ésima prueba si y solo si han ocurrido $k - 1$ fracasos. Por tanto la función de densidad de probabilidad de masa está dada por

$$P(X = k) = qp^{k-1} \quad \forall \quad k = 1, 2, \dots$$

donde $q = 1 - p$.

Esta variable aleatoria tiene media $E[X] = \frac{1}{q}$ y varianza $\text{var}(X) = p/q^2$.

Su función característica es $\phi_X(u) = \frac{qe^{iu}}{1 - pe^{iu}}$.

Distribución Binomial negativa o de Pascal

Representa el número de la prueba en que se obtiene el n -ésimo éxito en una secuencia de k ensayos independientes, cada uno con una probabilidad de éxito p .

$$P(X = k) = \binom{-r}{k} q^r (-p)^k \quad \forall \quad k = 0, 1, \dots, \quad r > 0 \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} q^r p^k$$

donde $q = 1 - p$. Con media $E(X) = \frac{rp}{q}$, $\text{var}(X) = \frac{rp}{q^2}$ y función característica

$$\phi_X(u) = \left[\frac{qe^{iu}}{1 - pe^{iu}} \right]^r.$$

Distribución de Poisson

Una distribución útil para representar el número de sucesos de una variable aleatoria es la distribución de Poisson, que puede demostrarse que surge de la distribución Binomial si el número de pruebas crece $n \rightarrow \infty$ y la probabilidad p decrece $p \rightarrow 0$, pero el número de éxitos en el intervalo total debe permanecer constante igual a $\nu = np$. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria X de Poisson está dada por

$$p_X(x) = \frac{\nu^x e^{-\nu}}{x!} \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

La media y la varianza de la variable aleatoria están dadas por $E[X] = \text{var}(X) = \nu$.

Si $\nu = \lambda t$, entonces es posible asociar la distribución de Poisson con el proceso de Poisson

$$p_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad \forall \quad x = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Su función característica es

$$\phi_X(u) = \exp[\lambda(e^{iu} - 1)]$$

Distribución Exponencial

Si T es variable aleatoria que denota el tiempo para que ocurra el primer arribo, entonces la probabilidad de que T exceda algún valor t , es igual a la probabilidad de que no ocurra ningún suceso en ese intervalo de tiempo de longitud t . La primera probabilidad es $1 - F_T(t)$. La última probabilidad es $p_X(0)$, probabilidad de que una variable aleatoria X de Poisson con parámetro λt sea cero, es decir

$$1 - F_T(t) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t} \quad \forall \quad t \geq 0$$

Por tanto, la función de distribución es

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \forall \quad t \geq 0$$

y la función de densidad de probabilidad es

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \forall \quad t \geq 0.$$

La media y la varianza de esta variable aleatoria están dadas respectivamente por

$$E[T] = 1/\lambda \quad \text{y} \quad \text{var}(T) = 1/\lambda^2.$$

y su función característica es

$$\phi_X(u) = \left(1 - \frac{iu}{\lambda}\right)^{-1}$$

APÉNDICE B

FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

La función característica de una variable aleatoria está definida por la integral

$$\phi_X(u) = E\{e^{iuX}\}$$

Para el caso discreto se tiene

$$\phi_X(u) = \sum_k e^{iux_k} p_X(x_k)$$

donde $p_X(x_k)$ es la función de masa de probabilidad de X .

Si la variable aleatoria es continua,

$$\phi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_X(x) dx$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad de probabilidad X

En las ecuaciones anteriores u es una variable real. $\phi_X(u)$ es, en general, una función compleja (**Papoulis, 1984**).

$\phi_X(u)$ es máxima en el origen, ya que, $f_X(x) \geq 0$

$$|\phi_X(u)| \leq \phi_X(0) = 1$$

Si iu es cambiado por s , resulta la integral

$$\phi_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx$$

Llamada la función generadora de momentos de X .

Como se puede observar, $\phi_X(-u)$ es la transformada de Fourier de $f_X(x)$. Así, las propiedades de las funciones características son esencialmente las mismas que las de las transformadas de Fourier. Nótese, en particular, que $f_X(x)$ puede ser expresada en términos de $\phi_X(u)$,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \phi_X(u) du$$

Sea X una variable aleatoria discreta con $R_X = 0, 1, 2, \dots$, y

$$P\{X = k\} = p_k$$

donde $p_k > 0$, $\sum p_k = 1$; las p_k definen la función de masa de probabilidad de X . La función generadora de probabilidad para esta variable aleatoria discreta, la cual asume valores no negativos, está definida por la ecuación

$$P_X(z) = E\{z^X\} = \sum_0^{\infty} p_k z^k$$

Si se reemplaza z por e^{iu} , se obtiene la función característica de la variable X .

La función generadora de probabilidad es usada en lugar de la función característica cuando se desea evitar números complejos, ya que z puede ser tratado como real.