Instituto Politécnico Nacional

CECyT No. 1 “Gonzalo Vázquez Vela”

Cálculo Diferencial

Temario de Segundo Corte

Prof. Martha Guadalupe Escoto Villaseñor

Derivada de los 4 pasos

Si la variable independiente “x” con un valor inicial “a” que le da un valor final “b” a la diferencia “b-a” se le llama ■ incremento de la variable y se simboliza con la letra delta .

La derivada de la función con respecto a una variable es el limite del incremento de la función entre el incremento de la variable cuando el incremento de la variable 0.

DERIVADA POR EL METODO DE LOS 4 PASOS

- 1.- INCREMENTAR LA FUNCION(A TODAS LAS VARIABLES SE LES
- AGREGARA EL INCREMENTO)
- $Y = \sqrt{2x - 6}$
- $Y + \Delta \mathbf{Y} = \sqrt{2(x + \Delta \mathbf{x}) - 6}$
- 2.-RESTAR LA FUNCIÓN ORIGINAL DE LA INCREMENTADA
- $Y + \Delta Y - \mathbf{Y} = \sqrt{2(x + \Delta x) - 6} - \mathbf{\sqrt{2x - 6}}$
- 3.-DIVIDIR TODO ENTRE EL INCREMENTO DE LA VARIABLE

$$\Delta Y / \mathbf{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\sqrt{2(x + \Delta x) - 6} + \sqrt{2x - 6}\ (\mathbf{\Delta x})}$$

$$\Delta Y / \Delta x = \frac{2}{\sqrt{2(x + \Delta x) - 6} + \sqrt{2x - 6}}$$

4.-SACAR EL LIMITE CUANDO X TIENDE A SER 0

$$\Delta Y / \Delta x = \frac{2}{\sqrt{2(x + [0]) - 6} + \sqrt{2x - 6}}$$

$$\Delta Y / \Delta x = \frac{2}{\sqrt{2(x - 6} + \sqrt{2x - 6}}$$

$$\Delta Y / \Delta x = \frac{2}{2\sqrt{2x - 6}}$$

$$\Delta Y / \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2x - 6}}$$

Pasos para obtener la derivada de una función por el método de los 4 pasos.

1) Incremento de la función.
2) Se resta la función original.
3) Dividir todo entre el■ de la variable.
4) Limite.

Ejemplo:

$$y = 3x^2 - 5x$$

1)

$$y = \Delta y$$

2)

$$y + \Delta y - y = 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x) - 5x - 5\Delta x - (3x^2 - 5x)$$

$$\Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta^2 x - 5x\Delta x - 3x^2 + 5x$$

$$\Delta y = 6x\Delta x + \Delta x + 3\Delta^2 x - 5\Delta x$$

3)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3\Delta^2 x - 5\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x - 5)}{\Delta x}$$

4) lim

$$6x - 3\Delta x - 5$$

$$6x - 3(0) - 5$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x - 5$$

Derivada Algebraicas

Ejemplo 1

$$y=\frac{ax}{\sqrt[3]{x}}+\frac{b}{x\sqrt{x}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$$

Recordemos la formula de integración a considerar.

$$\frac{df[(x)+g(x)+h(x)]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dh(x)}{dx}$$

Por lo que:

$$y'=\frac{d}{dx}\frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{d}{dx}\frac{b}{x\sqrt{x}}-\frac{d}{dx}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=a\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x^{1/3}}\right)+b\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{1/6}}\right)=$$

$$=a\left(\frac{d}{dx}x^{5/3}\right)+b\frac{d}{dx}\left(x^{-3/2}\right)-\frac{d}{dx}\left(x^{1/6}\right)$$

Aplicando la siguiente fórmula en cada termino:

$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

Por consiguiente tenemos que:

$$y'=\frac{5}{3}ax^{2/3}+b\left(\frac{-3}{2}x^{-5/2}\right)-\left(\frac{1}{6}x^{-5/6}\right)$$

$$y'=\frac{5}{3}ax^{2/3}-\frac{3}{2}bx^{-5/2}+\frac{1}{6}x^{-5/6}$$

Ejemplo 2

b).- $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x}5$

Aplicando la fórmula

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

entonces

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right) + \frac{d}{dx}5 = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}5$$

considerando además

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

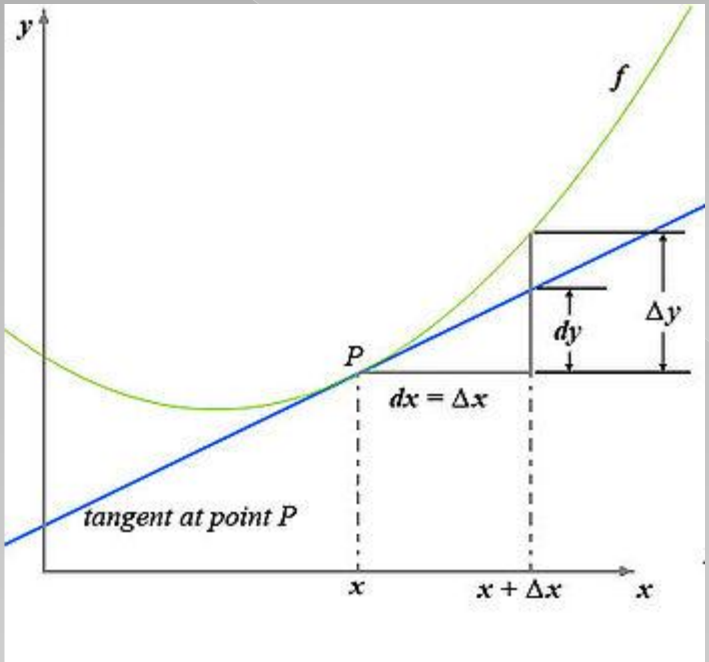
Entonces

$$\frac{df[(x)+g(x)+h(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx}$$

$$y' = \frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Derivadas Trigonométricas

- La derivada de una función en un valor de entrada dado describe la mejor aproximación lineal de una función cerca del valor de entrada. Para funciones de valores reales de una sola variable, la derivada en un punto representa el valor de la pendiente de la recta tangente en la gráfica de la función en dicho punto. En dimensiones más elevadas, la derivada de una función en un punto es la transformación lineal que más se aproxima a la función en valores cercanos de ese punto. Algo estrechamente relacionado es el diferencial de una función. El proceso de encontrar una derivada es llamado diferenciación. El teorema fundamental del cálculo dice que la diferenciación es el proceso inverso de la integración en funciones continuas.



Derivación de las funciones trigonométricas

Es el proceso matemático de encontrar el ritmo al cual una función trigonométrica cambia respecto de la variable independiente; es decir, la derivada de la función. Las funciones trigonométricas más habituales son las funciones *sin(x)*, *cos(x)* y *tan(x)*. Por ejemplo, al derivar *f(x) = sin(x)*, se está calculando la función *f'(x)* tal que da el ritmo de cambio del *sin(x)* en cada punto x.

Fórmulas:

$$1)\ \frac{d}{dx}[sen(u)] = \cos(u)\frac{du}{dx}$$

$$2)\ \frac{d}{dx}[\cos(u)] = -sen(u)\frac{du}{dx}$$

$$3)\ \frac{d}{dx}[\tan(u)] = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$$

$$4)\ \frac{d}{dx}[\cot(u)] = -\csc^2(u)\frac{du}{dx}$$

$$5)\ \frac{d}{dx}[\sec(u)] = \sec(u)\tan(u)\frac{du}{dx}$$

$$6)\ \frac{d}{dx}[\csc(u)] = -\csc(u)\cot(u)\frac{du}{dx}$$

DERIVADAS LOGARÍTMICAS

En el ámbito de las matemáticas, específicamente en el cálculo y el análisis complejo, la **derivada logarítmica** de una función *f* queda definida por la fórmula donde *f '* es la derivada de *f*.

Propiedades básicas

- Muchas propiedades del logaritmo real también son válidas para la derivada logarítmica, aún cuando la función *no* toma valores de reales positivos. Por ejemplo, dado que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores, se tiene que:

$$(\log uv)' = (\log u + \log v)' = (\log u)' + (\log v)'.$$

- Por lo que para funciones reales positivas, la derivada logarítmica de un producto es la suma de la derivada logarítmica de los factores. También es posible aplicar la regla de Leibniz para la derivada del producto y así obtener

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

- Por lo tanto, es cierto que para *toda* función que la derivada logarítmica de un producto es la suma de las derivadas logarítmicas de los factores (cuando las mismas están definidas).

- En forma similar (de hecho es una consecuencia), la derivada logarítmica de la función recíproca de una función es el negado de la derivada logarítmica de la función:

$$\frac{(1/u)'}{1/u} = \frac{-u'/u^2}{1/u} = -\frac{u'}{u},$$

- en la misma forma que el logaritmo de la recíproca de un número real positivo es la negación del logaritmo del número.

- En forma general, la derivada logarítmica de un cociente es la diferencia de las derivadas logarítmicas del dividendo y del divisor:

$$\frac{(u/v)'}{u/v} = \frac{(u'v - uv')/v^2}{u/v} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$$

- en la misma forma que el logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.

- Con respecto a la derivada logarítmica de una potencia (con exponente real constante), la misma es el producto del exponente y de la derivada logarítmica de la base:

$$\frac{(u^k)'}{u^k} = \frac{ku^{k-1}u'}{u^k} = k\frac{u'}{u},$$

- en forma análoga a que el logaritmo de una potencia es el producto entre el exponente y el logaritmo de la base.

Tangente y Normal

Función tangente normal

El valor de la derivada en cualquier punto de la curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva de ese punto

m= tan Ø d(y)
d

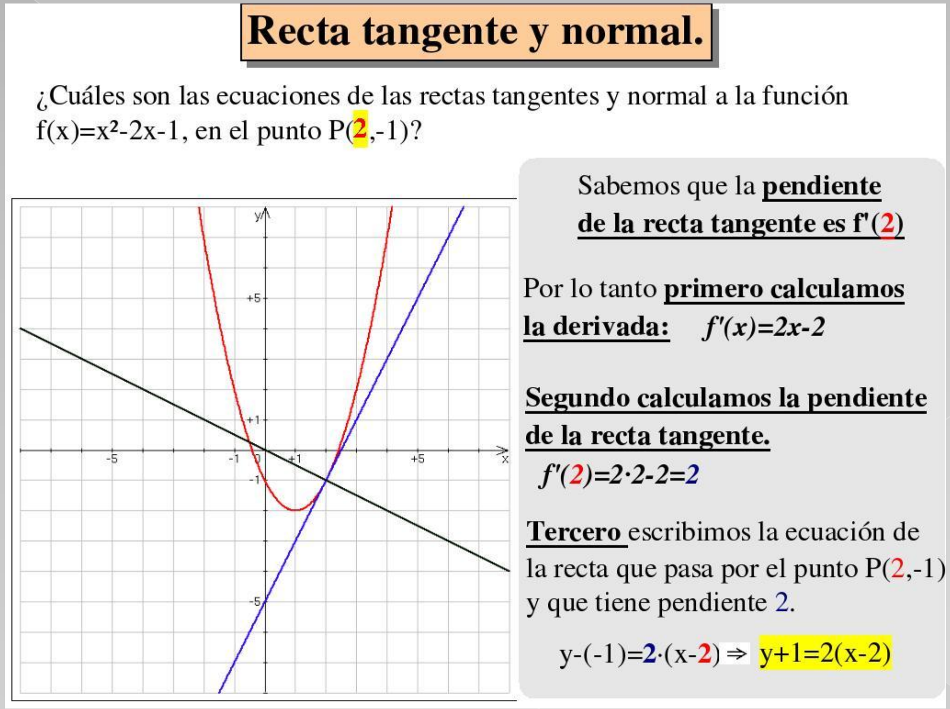
Una recta pasa por un punto (x,y) con pendiente conocida es representado por la recta punto pendiente.

y-y1= m (x-x1)

La pendiente de la tangente= m

La pendiente de la normal es inversa y de signo contrario por ser una recta perpendicular a la tangente y es

normal= 1
m



$$x^2 + 3xy - y^2 - 4 = 0 \qquad (1,1)$$

$$2x + 3\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 3\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = -2x + y + 2y$$

ECUACIÓN DE LA TANGENTE

$$m = tan\theta = \frac{d}{dx}(y)$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 3y}{3x - 2y}$$

$$m = \frac{-2(1) - 3(1)}{3(1) - 2(1)}$$

$$m = \frac{-2 - 3}{3 - 2}$$

$$m = \frac{-5}{1}$$

$$m = -5$$

ECUACIÓN DE LA NORMAL

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{5}(x - 1)$$

$$5y - 5 = x - 1$$

$$x - 5y - 1 + 5 = 0$$

$$x - 5y + 4 = 0$$

Ángulo entre 2 curvas

El ángulo entre dos curvas que se intersecan se define como el ángulo entre las dos tangentes de las dos curvas en el punto de intersección.

Para calcular el ángulo formado por las tangentes se siguen los siguientes puntos:
1.- Obtener las coordenadas de los puntos de intersección
2.- Hay que determinar cual se utilizara
3.- Obtener la derivada de cada una de las curvas para determinar sus pendientes donde m2 es mayor que m1
4.- Se aplica la fórmula para calcular el Ángulo

Ángulo entre dos curvas *que se cortan*:

Es el ángulo que forman las rectas tangentes, sí existen, a las curvas en el punto de corte P.

El ángulo α formado por las dos curvas en el punto de intersección viene definido por la ecuación:

$$\cos\alpha = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{E(u_1')^2 + 2Fu_1'v_1' + G(v_1')^2}\ \sqrt{E(u'_2)^2 + 2Fu'_2v'_2 + G(v'_2)^2}}$$

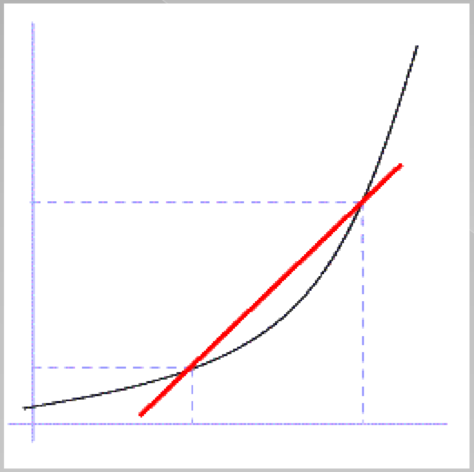
Donde las derivadas se evalúan para los valores de parámetro t_1 y t_1 tales que . En particular el ángulo formado por las líneas coordenadas asociadas al sistema de coordenadas (*u*, *v*) viene dado por:

$$\cos\alpha_{(u,v)} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

En particular el sistema de coordenadas se llama ortogonal si las líneas coordenadas son ortogonales (perpendiculares) entre si en cada punto, eso sucede sí y solo sí $F = 0$.

Tangente

El concepto de tangente es muy fácil de comprender. Consideremos una curva y una recta secante a la curva. Si mantenemos fijo uno de los puntos de corte de la recta con la curva y hacemos girar la recta sobre ese punto, el otro punto de corte se ira aproximando al punto que hemos fijado. Cuando los dos puntos coinciden la recta es tangente a la curva en ese punto.



Dicho de forma matemática. Si la función f(x) tiene derivada finita, $f'(x_0)$, en x_0, la función f(x) tiene una tangente en ese punto. La pendiente de la tangente es $f'(x_0)$.