Instituto Politécnico Nacional
CECyT No. 1 “Gonzalo Vázquez Vela”

Cálculo Diferencial

Temario de Primer Corte

Prof. Martha Guadalupe Escoto Villaseñor

Inecuaciones

DESIGUALDAD MATEMÁTICA

En matemáticas una **desigualdad** es una relación de falta de igualdad entre dos cantidades o expresiones, es decir, lo contrario a lo que ocurre en una igualdad.

Desigualdades
Desigualdades o inecuaciones de primer grado con una incógnita

Desigualdades.

Desigualdades o inecuaciones de primer grado con una incógnita

La expresión

$a \neq b$

quiere decir que "a" no es igual a "b". Según los valores particulares de "a" y de "b", puede tenerse a > b, que se lee "a" mayor que "b", cuando la diferencia a - b es positiva y a < b, que se lee "a" menor que "b", cuando la diferencia a - b es negativa.

1.º Todo número positivo es mayor que cero

Ejemplo:

5 > 0 ;

porque 5 - 0 = 5

2.º Todo número negativo es menor que cero

Ejemplo:

-9 < 0 ;

porque -9 -0 = -9

3.º Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto;

Ejemplo:

-10 > -30;

porque -10 - (-30) = -10 +30 = 20

Propiedades de las desigualdades.

1. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se añade o se resta un mismo número a cada miembro

Efectivamente si en la desigualdad a > b se designa por "c" lo que falta a "b" para ser igual a "a", se tiene:

a = b + c

Añadiendo un mismo número, positivo o negativo a los miembros, se puede escribir:

a + m = b + c + m

Suprimiendo "c" en el segundo miembro, resulta evidentemente

a + m > b +m

Ejemplos:

9 > 5 *9 + 2 > 5 + 2* *11 > 7*	*-2 > -6* *-2 -3 > -6 -3* *-5 > -9*

Consecuencia de esta propiedad: Puede suprimirse un término en un miembro de una desigualdad, teniendo cuidado de agregar en el otro miembro el término simétrico del suprimido; es decir, se puede pasar un término de un miembro a otro, cambiando su signo, porque esto equivale a sumar o restar una misma cantidad a los dos miembros.

Ejemplo:

6x -2 > 4x + 4

6x -4x > 4 + 2

2. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor positivo, o se dividen entre un mismo divisor, también positivo.
Sea la desigualdad $a > b$, es decir, $a = b + c$
Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por un número positivo "m", resulta:
$am = bm + cm$.

Suprimiendo el término positivo "cm", en el segundo miembro disminuye, y se tiene:
$am > bm$

Si "m" es recíproco de un número positivo, queda evidenciada la segunda parte de esta propiedad

Ejemplos:

12 > 7 *12 * 3 > 7 * 3* *36 > 21*	*15 > -25* *15 ÷ 5 >(-25) ÷ 5* *3 > -5*

3. Una desigualdad cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor negativo, o se dividen entre un mismo divisor, también negativo.

Sea la desigualdad $a > b$, es decir, $a = b + c$

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por el factor negativo $-n$ se obtiene:

$-an = -bn -cn$

Suprimiendo $-cn$, en el segundo miembro aumenta; por tanto,

$-an < -bn$

Si $-n$ es recíproco de un número negativo, queda demostrada la segunda parte del enunciado.

Ejemplos:

Consecuencia de la propiedad anterior pueden cambiarse todos los signos de una desigualdad, con tal que se cambie el sentido de la misma; porque esto equivale a multiplicar sus dos miembros por -1.

$3 > -15$ $3(-4) < (-15)(-4)$ $-12 < 60$	$64 < 80$ $64 \div (-4) > 80 \div (-4)$ $-16 > -20$

Ejemplo:

$-7x + 130 < 9 -5x$

$7x - 130 > -9 + 5x$

4. Si los dos miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a la misma potencia, la desigualdad no cambia de sentido.

Sea la desigualdad $a < b$, en la que "a" y "b" son positivos. Multiplicando sus dos miembros por "b", resulta:

$ab < b^2$

En el primer de esta desigualdad, sustituyendo "b" por "a", la desigualdad se refuerza; por tanto:

$a^2 < b^2$

Ejemplo:

$7 < 10$

$7^3 < 10^3$

$343 < 1000$

5. Si los dos miembros de una desigualdad son negativos y se elevan a una potencia de grado impar, no cambia el sentido de la desigualdad; pero hay cambio de sentido si el grado de la potencia es par.

Sea la desigualdad $-a < -b$

a) Multiplicando sus dos miembros por b^2 se obtiene:

$$-ab^2 < -b^3$$

En el primer miembro, reemplazando b^2 por a^2, la desigualdad se refuerza; luego se puede escribir:

$$-a^3 < -b^3$$

b) Multiplicando los dos miembros de la primera desigualdad por $-b$ y haciendo análogas transformaciones, la desigualdad cambia de sentido, porque sus términos cambian de signo, y se tiene:

$$a^2 > b^2$$

Ejemplos:

$-3 > -6$ $(-3)^3 > (-6)^3$ $-27 > -216$	$-8 < -4$ $(-8)^2 > (-4)^2$ $64 > 16$

6. Si se suman miembro a miembro varias desigualdades de mismo sentido, resulta una desigualdad de mismo sentido que aquéllas.

Sean las desigualdades $a > b$; $a' > b'$; $a'' > b''$

Se puede escribir:

$$a = b + c$$
$$a' = b' + c'$$
$$a'' = b'' + c''$$

Sumando miembro a miembro y suprimiendo $c + c' + c''$, se tiene, sucesivamente:

$$a + a' + a'' = b + b' + b'' + c + c' + c''$$
$$a + a' + a'' > b + b' + b''$$

Ejemplo:

Dado: $2x > 10$ y $7x > 26$

se obtiene: $9x > 36$

7. Si se restan miembro a miembro dos desigualdades de sentido contrario, resulta una desigualdad de igual sentido que el minuendo.

Sean las desigualdades $a > b$ y $c < d$

Invirtiendo la segunda desigualdad y sumándola a la primera se tiene

$a > b$

$d > c$

$a + d > b + c$

Restando $d + c$ de cada miembro, resulta:

$a - c > b - d$

Ejemplo:

Dado: $7x < 12$ y $5x > 16$,

se obtiene: $2x < -4$

Dominio y Contradominio de una función

Para estudiar una función $y=f(x)$ es necesario conocer los valores que podemos asignarle a la variable independiente llamada dominio de la función para que esta función tenga sentido.

FUNCIÓN

$$Y = \sqrt{x-4}$$

$X-4=0$

$X=4$

Determinar valores a x:

Sustituir valores en la ecuación original

$X=5$

$Y=\sqrt{5-4}$

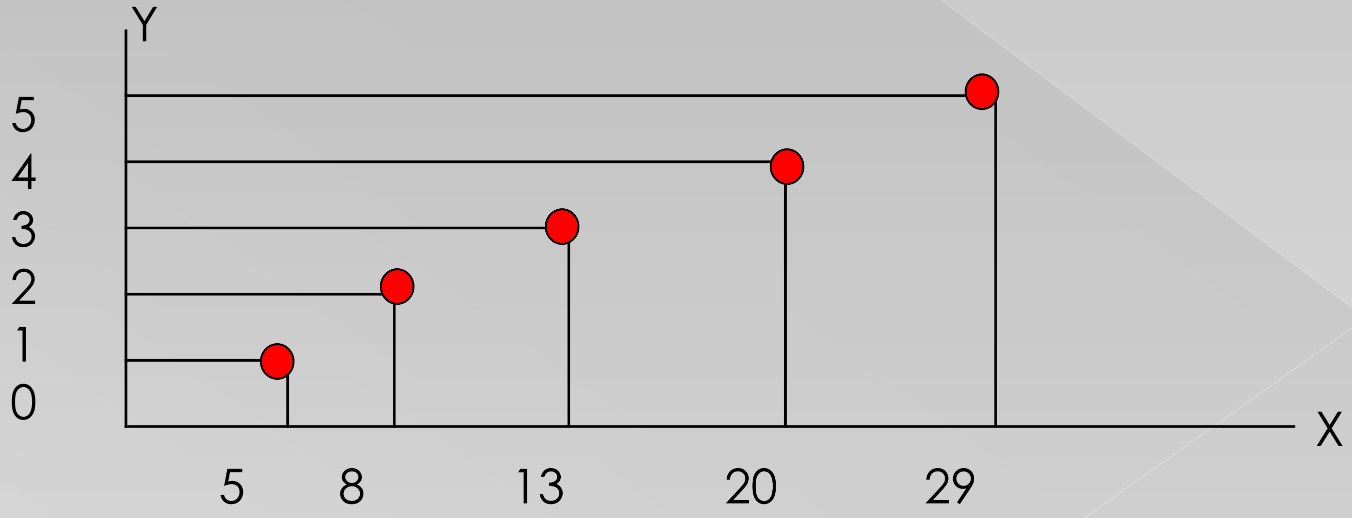
$Y=\sqrt{1}$

$Y=1$

Tabular

DOMINIO	CONTRADOMINIO
5	1
8	2
13	3
20	4
29	5

Graficar



$$y=\sqrt{x^{2}}-16$$

$$y=\sqrt{4^2-16}=\sqrt{16-16}=0$$

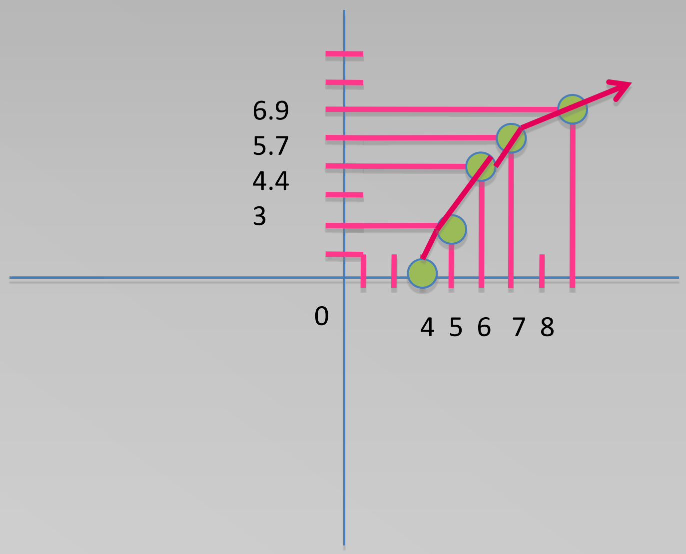
$$y=\sqrt{5^2-16}=\sqrt{25-16}=3$$

$$y=\sqrt{6^2-16}=\sqrt{36-16}=4.4$$

$$y=\sqrt{7^2-16}=\sqrt{49-16}=5.7$$

$$y=\sqrt{8^2-16}=\sqrt{64-16}=6.9$$

X	Y
4	0
5	3
6	4.4
7	5.7
8	6.9



$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

$$y = \sqrt{1^2 - 4 + 3} = 0$$

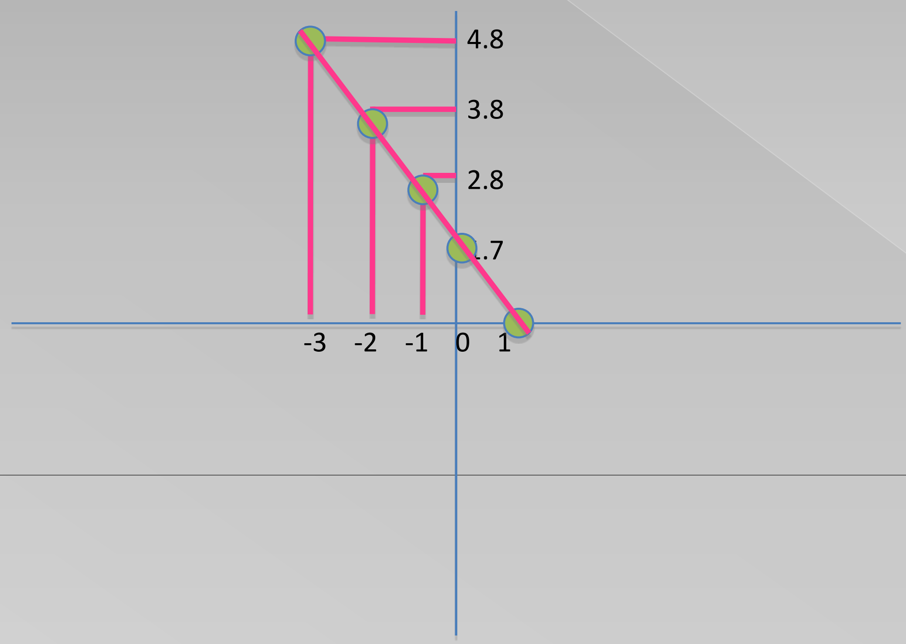
$$y = \sqrt{0^2 - 0 + 3} = \sqrt{3} = 1.7$$

$$y = \sqrt{-1^2 + 4 + 3} = \sqrt{8} = 2.8$$

$$y = \sqrt{-2^2 + 8 + 3} = \sqrt{15} = 3.8$$

$$y = \sqrt{-3^2 + 12 + 3} = \sqrt{24} = 4.8$$

X	Y
1	0
0	1.7
-1	2.8
-2	3.8
-3	4.8



$$f(x) = \sqrt{2x + 9} - 2$$

$$y = \sqrt{2 + 9} - 2 = \sqrt{11} - 2 \;\; = 1.3$$

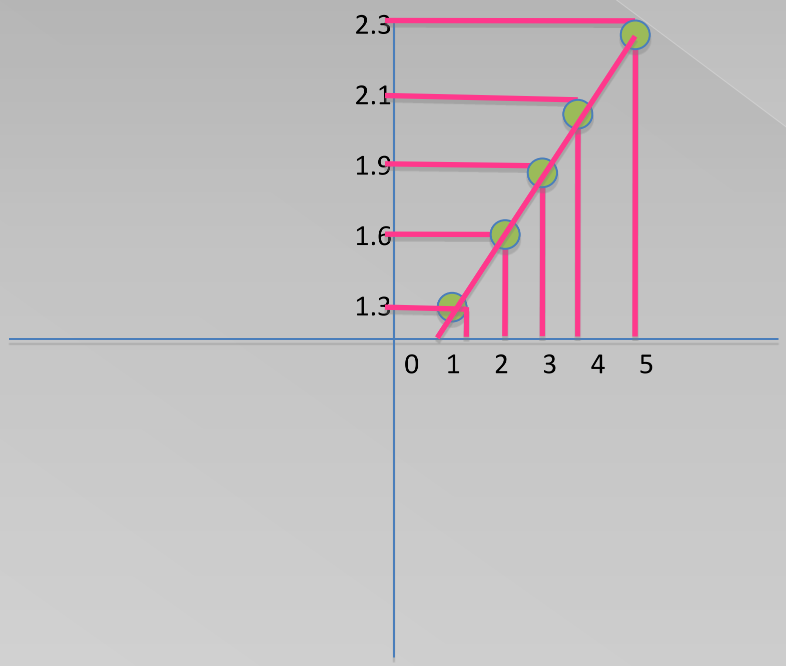
$$y = \sqrt{4 + 9} - 2 = \sqrt{13} - 2 = 1.6$$

$$y = \sqrt{6 + 9} - 2 = \sqrt{15} - 2 = 1.9$$

$$y = \sqrt{8 + 9} - 2 = \sqrt{17} - 2 = 2.1$$

$$y = \sqrt{10 + 9} - 2 = \sqrt{19} - 2 = 2.3$$

X	Y
1	1.3
2	1.6
3	1.9
4	2.1
5	2.3



Álgebra de Funciones

Algebra de funciones.

- Si dos funciones f y g están definidas para todos los números reales, entonces es posible hacer operaciones numéricas reales como la suma, resta, multiplicación y división (cociente) con f(x) y g(x).

Operaciones:

- Sean f y g dos funciones, definimos las siguientes operaciones:
- Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- Producto: $(f\ g)(x) = f(x)g(x)$
- Cociente: $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

Ejemplos:

ALGEBRA DE FUNCIONES
PRIMER EJEMPLO

$$f(x) + g(x) = (x^2 - 3x + 2) + (x - 1) = x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) - g(x) = (x^2 - 3x + 2) - (x - 1) = x^2 - 4x + 3$$

$$f(x) * g(x) = (x^2 - 3x + 2)(x - 1) = x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x + 2x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x - 1\sqrt{x^2 - 3x + 2} = x + 3$$

SEGUNDO EJEMPLO

$$f(x) + g(x) = (3x^2 + 1) + (x + 11) = 3x^2 + x + 12$$

$$f(x) - g(x) = (3x^2 + 1) - (x + 11) = 3x^2 - x - 10$$

$$f(x) * g(x) = (3x^2 + 1)(x + 11) = 3x^3 + 33x^2 + x + 11$$

Composición de Funciones

Es una operación de funciones que consiste en aplicar sucesivamente dos funciones en un orden determinado, con la cual se obtiene una tercera función.

F(x)= g(x)= + 5

F (g(x))

F (+ 5)=

g (f(x))

g ( )= 2 ( )+ 5

= 2x + 5

F (f(x))

f( )= =

g (g(x)

g(+ 5)= 2(+ 5) + 5

= 2(+

= +50+5

= + 55

$f(x)= 3x^2+5x+2$ $g(x)= x^2+x$

a) $f(g(x)$

$=f(x^2 +x) = 3(x^2+x)+5(x^2+x)2$

$= 3(x^4+2x^3+x^2)+5x^2+5x+2$

$= 3x^4+6x^3+3x^2+5x^2+5x+2$

$\boxed{= 3x^4+6x^3+8x^2+5x+2}$

b) $g(f(x))$

$= g(3x^2+5x+2) = (3x^2+5x2)^2+3x^2+5x+2$

$= 9x^4+30x^3+37x^2+20x+4+3x^2+5x+2$

$\boxed{= 9x^4+30x^3+40x^2+25x+6}$

c) $f(f(x))$

$= f(3x^2+5x+2) = 3(3x^2+5x+2)^2+5(3x^2+5x+2)+2$

$= 3(9x^4+30x^3+37x^2+20x+4)+15x^2+25x+10+2$

$= 27x^4+90x^3+111x^2+60x+12+15x^2+25x+12$

$\boxed{= 27x^4+90x^3+126x^2+85x+24}$

d) $g(g(x))$

$=f(x^2+x) = (x^2+x)+x^2+x$

$=x+2x^3+x^2+x^2+x$

$\boxed{=x+2x^3+2x^2+x}$

$$\mathcal{F}(x) = 3x^2 - x - 5 \qquad\qquad g(x) = x - 2$$

$$\mathcal{F}(x) \;\; o \;\; g(x) = \mathcal{F}\left(g(x)\right) = 3(x-2)^2 - (x-2) - 5 = 3(x^2 - 4x + 4) - x + 2 - 5$$

$$3x^2 - 12x + 12 - 3$$

$$3x^2 - 13x + 9$$

$$g(x) \;\; o \;\; \mathcal{F}(x) = g\left(\mathcal{F}(x)\right) \quad 3x^2 - x - 5) = 3x^2 - x - 5 - 2 = 3x^2 - x$$

$$\mathcal{F}(x) \;\; o \;\; \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}(x)\right) = 3x^2 - x - 5 = 3(3x^2 - x - 5)^2 - (3x^2 - x - 5) - 5$$

$$9x^4 - 6x^{3-} 29x^2 + 10x + 25 - 3x^2 + x + 5 - 5$$

$$9x^4 - 6x^{3-} 32x^2 + 11x + 25$$

$$g(x) \;\; o \;\; g(x) = g\left(g(x)\right) = x - 2 = (x-2) - 2 = x - 4$$

Límites

Se dice que una variable tiende a una constante cono límite cuando los valores sucesivos de la variable son tales que el valor numérico de la diferencia de la variable y la constante puede llegar a ser finalmente menor que cualquier número positivo predeterminado, tan pequeño como se pueda cada vez que la variable se aproxima cada vez más y más a una constante “a” de tal manera que la diferencia x---a en valor absoluto puede ser tan pequeña como se quiera.

$$\lim_{\longrightarrow h} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{h}}{x - h} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{h}}{h - h} = \frac{0}{0}$$

<u>*INDETERMINADO*</u>

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{(x-4)(x-3)}{(2x-1)(x-3)}$$

$$\frac{x-4}{2x-1}$$

$$\frac{3-4}{2(3)+1} = \frac{-1}{7}$$

Cuando ∞
x→

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - 8x + 10}{(2x-2)^2}$$

$$\frac{\frac{-2x^2}{x2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{10}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \frac{-2 - \frac{8}{x} + \frac{10}{x^2}}{4 - \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$\frac{-2 - \frac{8}{\infty} + \frac{10}{\infty}}{4 - \frac{8}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} = \frac{x^2+5x-14}{2x^2-3x-2} = \frac{2^2+5(2)-14}{2(2)^2-3(2)-2} = \frac{4+10-14}{2(4)-6-2} = \frac{4+10-4}{8-8}$$

$$= \frac{0}{0}$$

INDETERMINADO

$$\frac{(X+7)(X-7)}{(2X+1)(X-2)} = \frac{(2+7)(2-2)}{(2(2)+1)(2-2)} = \frac{9}{5}$$