LICENCIATURA EN NEGOCIOS INTERNACIONALES

Matemáticas Aplicadas a los Negocios

Unidad 4. Aplicación de Matrices

OBJETIVOS PARTICULARES DE LA UNIDAD

Al finalizar esta unidad, el estudiante será capaz de:

- **Resolver problemas, dentro de su área profesional, que implique el uso de operaciones entre matrices.**
- Ø **Resolver problemas, dentro de su área profesional, que implique el uso de la matriz inversa, aplicando el método de Gauss-Jordan.**

4.1 Definición, orden, notación de matrices

Buscando formas para describir situaciones en matemáticas y economía, se tiene el estudio de arreglos rectangulares de números. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 3z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 9x - 6y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Lo que caracteriza a este sistema son los coeficientes numéricos en las ecuaciones, junto con sus posiciones relativas. Por esta razón, el sistema puede ser descrito por el arreglo rectangular

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

que es llamado ***MATRIZ,*** el cual es un arreglo rectangular de números reales, encerrado en grandes paréntesis rectangulares. Las matrices por lo regular se denotan con letras mayúsculas negritas como **A**, **B**, o **C**.

Algunos ejemplos de matrices se indican en la Figura 4.1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Arreglo de 2 x 3 **Arreglo de 3 x 4** **Arreglo de 4 x 1**

Matriz columna

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

Arreglo de 1 x 5 **Arreglo de 1 x 1**

Matriz renglón **Matriz unitaria**

Figura 4.1 Tipos y formas de Matrices (solo algunos casos)

Los números reales que forman el arreglo se denominan entradas o elementos de la matriz. Los elementos en cualquier línea horizontal forman un renglón (o ***vector fila***), y aquellos que se encuentran en cualquier línea vertical forman una columna de la matriz (o ***vector columna***). Por ejemplo, la matriz B tiene tres renglones y cuatro columnas. Los elementos del primer renglón son 3, 4, 5 y 6 y los que pertenecen a la tercera columna son 5, 9 y 3.

Si una matriz tiene ***m*** renglones y ***n*** columnas, se dice que su tamaño es ***m*** x ***n*** (léase ***m por n***). De las matrices señaladas anteriormente, ***A*** es una matriz 2 x 3; ***B*** es una matriz 3 x 4; y ***C*** es una matriz 4 x 1.

Los renglones de una matriz están numerados de manera consecutiva de arriba hacia abajo; las columnas de izquierda a derecha, por lo que para la matriz A se tiene:

$$\begin{array}{c|ccc|} & \textbf{Columna 1} & \textbf{Columna 2} & \textbf{Columna 3} \\ \hline \textbf{Renglón 1} & 2 & -3 & 7 \\ \textbf{Renglón 2} & 1 & 0 & 4 \\ \hline \end{array} = \mathbf{A}$$

Con frecuencia conviene usar una notación de dobles subíndices para los elementos de una matriz. En esta notación, por ejemplo, $\boldsymbol{a_{ij}}$ denota al elemento de la matriz A que está en el ***i-ésimo renglón*** y en la ***j-ésima columna***. Así pues, $\boldsymbol{a_{24}}$ indica el elemento localizado en el segundo renglón y en la cuarta columna de ***A***. Si ***A*** es la matriz ***2 x 3.***

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Arreglo de 2 x 3

Entonces, $a_{11} = 2$; $a_{12} = -3$; $a_{13} = 7$; $a_{21} = 1$; $a_{22} = 0$ y, $a_{23} = 4$.

En general, si ***A*** es una matriz ***m x n***, se puede escribir como se muestra en la Figura 4.2. La matriz ***A*** puede denotarse por $[a_{ij}]$ cuando se sobreentiende su tamaño.

Para el elemento o entrada a_{12}, se lee ***"a subíndice uno-dos"***, o sólo ***"a uno-dos"***; el primer subíndice, ***1***, ***especifica el renglón*** y el segundo, ***2***, ***la columna*** en la que aparece la entrada o elemento. ***El subíndice del renglón aparece a la izquierda del subíndice de la columna. En general, a_{ij} ? a_{ji}***. De esta manera, ya se puede hacer la definición de una matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Figura 4.2 notación de una matriz *m x n*

Definición:

Una ***matriz de m x n o matriz de orden m x n*** es un arreglo rectangular de números que consiste en ***m*** renglones y ***n*** columnas,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para la entrada a_{ij}, llamamos a ***i*** el ***subíndice del renglón*** y a ***j el subíndice de la columna***.

El número de elementos o de entradas de una matriz ***m x n*** es ***mn***, de tal manera que una matriz ***A*** de orden ***3 x 4***, la cual tiene ***3 renglones*** y ***4 columnas***, tiene ***3 x 4 = 12 elementos o entradas***.

4.2. Algunos tipos de Matrices

4.2.1. Matriz cuadrada

La ***matriz cuadrada*** es una matriz que tiene el mismo número de columnas que de renglones, es decir, ***n renglones*** y ***n columnas***, de ***orden n***, por lo que ***m = n***. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

Son cuadradas de orden 3 y 1 respectivamente

En una matriz cuadrada de orden ***n***, las entradas a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, ann, las cuales están sobre la diagonal “principal” que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha, son llamadas entradas de la diagonal principal, o de forma más sencilla la diagonal principal. Así, del ejemplo anterior, $a_{11} = 1$; $a_{22} = 5$ y $a_{33} = 7$.

Una matriz cuadrada ***A*** es llamada ***matriz diagonal*** si todas las entradas que se encuentran fuera de la diagonal principal son cero; esto, $a_{ij} = 0$ para ***i ? j***. Ejemplos de matrices diagonales son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada ***A*** se dice que es una ***matriz triangular superior*** si todas las entradas debajo de la diagonal principal son cero; esto es, $a_{ij} = 0$ para $i > j$. De manera análoga, una matriz ***A*** se dice que es una ***matriz triangular inferior*** si todas las entradas por arriba de la diagonal principal son cero; esto es, $a_{ij} = 0$ para $i < j$. Cuando una matriz es triangular superior o triangular inferior, se conoce como ***matriz triangular***. Ejemplos de matrices triangulares son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior *Matriz triangular inferior*

MATRICES TRIANGULARES

4.2.2 MATRIZ IDENTIDAD

Definición:

La **matriz identidad de** ***n*** **x** ***n*** denotada $\mathbf{I}_n$ es una matriz diagonal cuyas entradas de la diagonal principal son números uno.

Por ejemplo, las matrices identidad $\mathbf{I}_3$ e $\mathbf{I}_4$ son:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando el tamaño de una matriz identidad se entienda que debe ser el apropiado para que una operación esté definida, se omite el subíndice y sólo se denota por I. Debe ser claro que

$$I^T = I$$

La matriz identidad juega el mismo papel en la multiplicación de matrices que el número 1 en la multiplicación de números reales. Esto es, igual que el producto de un número real por 1 es igual al mismo número, el producto de una matriz y la matriz identidad es la misma matriz. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$I \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

4.2.3 Matriz rectangular

Una matriz rectangular es aquella en el que el número de renglones es diferente al número de columnas. Por ejemplo: la matríz A es una matriz rectangular porque tiene dos renglones y tres columnas (m = 2 y n = 3).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Arreglo de 2 x 3

4.2.4 Matriz renglón y Matriz columna

Una matriz de tamaño ***1 x n*** sólo tiene un renglón y se le conoce como ***matriz renglón*** porque sólo tiene al ***vector renglón***; una matriz de tamaño ***m x 1*** sólo tiene una columna y se le conoce como ***matriz columna*** porque solamente tiene al ***vector columna***. En la Figura 4.1, el ejemplo ***C*** es una ***matriz columna*** y el ejemplo ***D*** es una ***matriz renglón***.

4.2.5 Matriz cero o nula

Una matriz ***m x n*** cuyas entradas son todas iguales a cero, se llama ***matriz cero*** o ***matriz nula*** de ***m x n*** y se denota como O_{mxn} o, de manera más sencilla, por ***O*** si se sobreentiende su tamaño. Así, **la matriz cero o nula de 2 X 3 es**:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3 Relación entre matrices

4.3.1 Igualdad de matrices

Las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son iguales si y sólo si tienen el mismo orden y $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y cada j (esto es, las entradas correspondientes son iguales). Por tanto, en la Figura 4.3 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 2/2 \\ 2 \cdot 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

pero

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \; ? \; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \; ? \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{diferentes tamaños}}$$

Figura 4.3 Igualdad y desigualdad de matrices

Una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Igualando las entradas correspondientes, se tiene:

$$x = 2,$$
$$y + 1 = 7,$$
$$2z = 4,$$
$$5w = 2,$$

Resolviendo se obtiene $x = 2$; $y = 6$; $z = 2$ y $w = 2/5$.

4.4 OPERACIONES DE MATRICES

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE MATRICES

Dos matrices A y B del mismo tamaño se pueden sumar o restarse, sumando o restando sus elementos correspondientes. En otras palabras, Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, son dos matrices del mismo tamaño, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ y $\mathbf{A} - \mathbf{B} = [a_{ij} - b_{ij}]$.

4.4.1 SUMA DE MATRICES

Definición:

Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, ambas son matrices $m \times n$, entonces la suma **A + B** es la matriz de $m \times n$ obtenida sumando las correspondientes entradas de **A** y **B**; es decir, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Por ejemplo,

$$\textbf{Sean}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{y} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Como A y B son del mismo tamaño (2 x 3), su suma está definida de la siguiente manera

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+5 & 0+(-3) & -2+6 \\ 2+1 & -1+2 & 4+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$\textbf{Si}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La suma y/o resta de estas matrices no está definida, en virtud de que no son del mismo tamaño

Propiedades para la suma de matrices:

Si ***A***, ***B***, ***C*** y ***O*** tienen el mismo orden, entonces se cumplen las siguientes propiedades para la suma de matrices:

A + B = B + A (***propiedad conmutativa***)

A + (B + C) = (A + B) + C (***propiedad asociativa***)

A + O = O + A = A (***propiedad del neutro aditivo***)

NOTA IMPORTANTE: ***O es la matriz cero (no es el número cero)***

La propiedad 1 establece que las matrices pueden ser sumadas en cualquier orden; la propiedad 2 permite que las matrices sean agrupadas para la operación de suma. La propiedad 3 establece que la matriz cero juega el mismo papel en la suma de matrices que el número cero en la suma de números reales.

4.4.2 SUSTRACCIÓN DE MATRICES

Si ***A*** es cualquier matriz, entonces el múltiplo escalar ***(-1)A*** se escribe simplemente como ***–A*** y se conoce como ***negativo de A***.

$$-A = (-1)A$$

Así, si $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ **entonces**

$$-A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Observe que ***–A*** es la matriz que se obtiene multiplicando cada entrada de ***A*** por ***-1***. La resta (o sustracción) de matrices se define en términos de la suma de matrices:

Definición:

Si **A y B**, tienen el mismo tamaño, entonces se entiende que **A - B** significa **A + (-B)**.

De una manera muy sencilla, para encontrar ***A – B*** se puede restar cada entrada de ***B*** de la correspondiente entrada de ***A***.

Ejemplo:

$$\textbf{Sean} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Como A y B son del mismo tamaño (2 x 3), su resta está definida de la siguiente manera

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 - 5 & 0 - (-3) & -2 - 6 \\ 2 - 1 & -1 - 2 & 4 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -8 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

4.4.3 MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Además de las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar, bajo ciertas circunstancias se puede definir el producto ***AB*** de las matrices ***A*** y ***B***; esta circunstancia implica que el **número de columnas de *A* sea igual al número de renglones de *B***, con lo que se tiene la siguiente

Definición:

Sea **A** una matriz ***m* x *n*** y **B** una matriz ***n* x *p***, entonces el producto **AB** es la matriz **C** de ***m* x *p*** cuya entrada c_{ij} es el **renglón *i*** y la **columna *j*** se obtiene como sigue: se suman los productos formados al multiplicar, en orden, cada entrada (esto es, primera, segunda, etc.) del **renglón *i*** de **A** por la "correspondiente" entrada (esto es, primera, segunda, etc.) de la **columna *j*** de **B**.

Es importante que sean comprendidos tres puntos importantes de la definición anterior.

Primero: la condición de que **A** sea una matriz ***m* x *n*** y **B** sea una matriz ***n* x *p***, es equivalente a decir que el **número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B**.

Segundo: el producto será una matriz de orden ***m* x *p***; tendrá tantos renglones como **A** y tantas columnas como **B**, como se observa en la Figura 4.4.

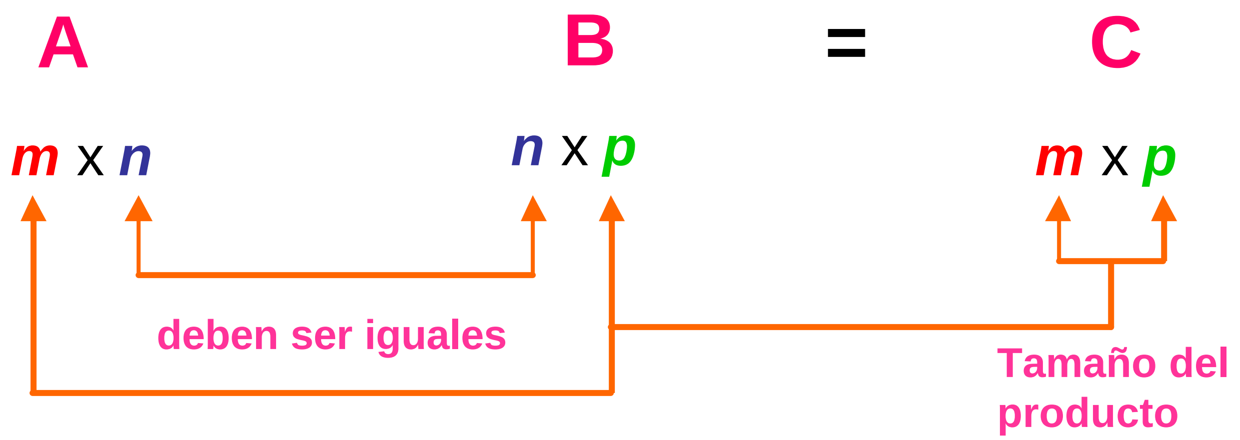

Figura 4.4 Resultado del tamaño de la matriz resultante del producto de matrices

Tercero: la definición se refiere al producto **AB**, ***en ese orden***; **A** es el factor izquierdo y **B** el factor derecho.

Ejemplo

Encontrar el producto de las matrices A y B dado por AB

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz A tiene tamaño 2 x 3 (m x n), y la matriz B tiene tamaño 3 x 3 (n x p). El número de columnas de A es igual al número de renglones de B (n = 3), de modo que el producto C estará definido como una matriz de tamaño 2 x 3 (m x p):

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

La entrada c_{11} se obtiene sumando los productos de cada entrada en el renglón 1 de A por la "correspondiente" entrada en la columna 1 de B. Así:

entradas del renglón 1 de *A*

$$c_{11} = (2)(1) + (1)(0) + (-6)(-2) = 14$$

entradas de la columna 1 de *B*

Se propone la siguiente tabla para encontrar todos los valores numéricos de las entradas de C

entrada	Renglón respectivo de A	Columna respectiva de B	Productos	Suma
c_{11}	2	1	2	14
	1	0	0	
	-6	-2	12	
c_{12}	2	0	0	-2
	1	4	4	
	-6	1	-6	
c_{13}	2	-3	-6	-10
	1	2	2	
	-6	1	-6	
c_{21}	1	1	1	-3
	-3	0	0	
	2	-2	-4	
c_{22}	1	0	0	-10
	-3	4	-12	
	2	1	2	
c_{23}	1	-3	-3	-7
	-3	2	-6	
	2	1	2	

Por lo que

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & -10 & -7 \end{bmatrix}$$

Observe que si se invierte el orden de los factores, entonces el producto de BA no está definido ya que el número de columnas de B no es igual al número de renglones de A

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación de matrices:

La multiplicación de matrices satisface las propiedades siguientes siempre y cuando todas las sumas y productos estén definidos:

A(BC) = (AB)C **(propiedad asociativa)**

A(B + C) = AB + AC **(propiedad distributiva)**

(A + B)C = AC + BC

MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Definición:

Si **A** es una matriz ***m* x *n*** y ***k*** es un número real (también llamado escalar), entonces con ***k*A** denotamos a la matriz de ***m* x *n*** obtenida multiplicando cada entrada de **A** por ***k***. la operación es llamada multiplicación por un escalar y ***k*A** es llamada **múltiplo escalar de A**.

Por ejemplo,

$$\text{Sean} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad k = 4$$

Calcular el producto de A por el escalar *k* = 4

$$A \times k = \begin{pmatrix} 3 \times 4 & 0 \times 4 & -2 \times 4 \\ 2 \times 4 & -1 \times 4 & 4 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -8 \\ 8 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación por un escalar:

Si ***A***, ***B*** y ***O*** son del mismo tamaño, entonces para cualquier escalares ***k***, k_1 y k_2 tenemos las propiedades siguientes de multiplicación por un escalar:

$k(A + B) = kA + kB$

$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

$k_1 (k_2A) = (k_1 k_2)A$

$0A = O$

$kO = O$

NOTA IMPORTANTE: Recuerde que O ? 0, porque 0 es un escalar y *O es una matriz cero*.

4.4.4 MATRIZ INVERSA (Por el método de Gauss Jordan)

Definición:

Sea **A** una **matriz cuadrada de *n* x *n*,** entonces una matriz **B** se dice que es una inversa de **A** si satisface las dos ecuaciones matriarcales

$$AB = I \qquad y \qquad BA = I$$

En donde **I** es una matriz identidad de tamaño ***n* x *n***. En otras palabras, el producto de las matrices **A** y **B** en cualquier orden da la matriz identidad.

Es claro por la definición que **B** debe tener una matriz cuadrada del mismo tamaño que **A**; de otra manera uno o ambos de los productos **AB** o **BA** no estarían definidos.

Una matriz **A** se dice que es **invertible** o **no singular** si tiene una inversa. Si **A** no tiene una inversa, se dice que es una **matriz singular**.

La inversa de cualquier matriz no singular es única. Esto es, **si A tiene alguna inversa, ésta es única**. Debido a esto, se denota la inversa de **A** como $\mathbf{A^{-I}}$ (léase **A** *inversa*), así, se tienen las dos ecuaciones siguientes:

$$AA^{-I} = I \qquad y \qquad A^{-I}A = I$$

Método de diagonalización de Gauss Jordan

Este es un método para invertir matrices cuadradas de cualquier orden, que se basa en los procedimientos de reducción (eliminación) para resolver sistemas de ecuaciones lineales. A semejanza del método de Gauss, este método de inversión equivale a resolver ***n*** sistemas de ecuaciones lineales, todos con la misma matriz **A** de coeficientes, pero con distintos vectores de términos independientes (los ***n*** vectores identidad). Para ello se forma una matriz ampliada, en que se agregan a la derecha de la matriz **A** los ***n*** vectores de términos independientes correspondientes a los n sistemas de ecuaciones, que en forma abreviada se escribe así: **[A | I]**.

El método de Jordan opera sobre esta matriz ampliada mediante una serie de transformaciones, hasta convertir la matriz **A** en una ***matriz identidad*** y la matriz identidad original, en ***la inversa de la matriz* A**. Es decir, en el método de Jordan se obtiene la matriz inversa al cabo de ***n*** etapas de transformación, y no es necesaria ninguna operación adicional, de carácter auxiliar (transposición, solución de un subsistema, etc.) para expresar $\mathbf{A^{-I}}$ en forma explícita.

Las características de este método son las siguientes:

1. Se comienza con una matriz ampliada **[A | I]**, formada por la matriz **A** que se pretende invertir, a la que se agrega a su derecha una matriz identidad del mismo orden;

2. El proceso es iterativo, en el sentido de que repite un procedimiento sistemático en cada etapa hasta que se obtiene la solución o la evidencia de que no hay solución posible;

3. El proceso consta de tantas etapas, llamadas "iteraciones" como el orden de la matriz que se desea invertir;

4. En la etapa ***j*** se transforma la columna ***j***-ésima en el vector unidad $\boldsymbol{e_j}$;

5. Si la matriz **A** es regular, al finalizar la última etapa se obtiene el formato $\mathbf{[I \mid A^{-I}]}$. Esto significa que: la matriz **A** ha sido transformada en una matriz identidad del mismo orden y la inversa de la matriz **A** se puede leer directamente en las filas y columnas a su derecha, que corresponden a la matriz **I** agregada a la tabla inicial;

6. Si la matriz **A** es singular, en cierta etapa se hace evidente que no es posible continuar más el proceso de inversión, lo que indica la inexistencia de $\mathbf{A^{-I}}$;

7. Los elementos $a_{ij}^{(0)}$ de la matriz **A** (y los elementos $a_{ij}^{(k)}$ de sus sucesivas transformadas $\mathbf{A^{(1)}}$, $\mathbf{A^{(2)}}$, …) que se utilizan como elementos de transformación en una etapa dada, reciben el nombre de **"pivotes"**; los demás elementos de la misma columna se denominan **"semipivotes"**.

Ejemplo: Encontrar la matriz inversa de la matriz A que se cita a continuación, por el método de Gauss Jordan:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 11 & 10 \\ 6 & 20 & 18 \end{pmatrix}$$

El procedimiento de trabajo es el siguiente:

1. ***Primera etapa***: se anota la matriz por invertir y a su derecha una matriz unidad de su mismo orden:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 20 & 18 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Si el elemento a_{11} no es nulo, se le elige como ***"pivote"*** de la primera etapa, y los elementos de la primera columna (a_{21} y a_{31}) como los ***"semivivotes".*** A partir de esta matriz se construye otra en que la primera columna es el vector unidad e_1.

1.1. ***Cálculo de la 1ª fila***. Se dividen todos los elementos de la 1ª fila por a_{11} con el objeto de que $a_{11}^{(I)}$ sea igual a la unidad.[1]

Se obtiene la fila transformada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

En los cálculos siguientes de esta 1ª etapa, se debe uno basar en esta fila transformada, a la que por brevedad se hará referencia como ***"fila nueva"***.

1.2. ***Cálculo de la 2ª fila:*** El semipivote para la segunda fila es el elemento $a_{21} = 3$.

Para transformar la 2ª fila: se multiplica la ***"fila nueva"*** por el semipivote **3**, y **el resultado se resta de la 2ª fila**: Esto es:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & -3/2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Las fórmulas de transformación para esos seis elementos de la 2ª fila, son las siguientes:

[1] El índice superior $^{(I)}$ indica que el elemento ha sufrido una etapa de transformación.

$$a^{(I)}_{21} = a_{21} - (a_{21} \cdot a^{(I)}_{11}) = 3 - (3 \cdot 1) = 0$$

$$a^{(I)}_{22} = a_{22} - (a_{21} \cdot a^{(I)}_{12}) = 11 - (3 \cdot 3) = 2$$

$$a^{(I)}_{23} = a_{23} - (a_{21} \cdot a^{(I)}_{13}) = 10 - (3 \cdot 2) = 4$$

$$x^{(I)}_{21} = x_{21} - (a_{21} \cdot x^{(I)}_{11}) = 0 - (3 \cdot 1/2) = -3/2$$

$$x^{(I)}_{22} = x_{22} - (a_{21} \cdot x^{(I)}_{12}) = 1 - (3 \cdot 0) = 1$$

$$x^{(I)}_{23} = x_{23} - (a_{21} \cdot x^{(I)}_{13}) = 0 - (3 \cdot 0) = 0$$

En otras palabras: el elemento transformado de la 2ª fila es igual al elemento original de la 2ª fila menos el producto del semipivote para la 2ª fila por el elemento correspondiente en la ***"fila nueva"***.

1.3. Cálculo de la 3ª fila: el semipivote para la 3ª fila es el elemento $a_{31} = 6$.

Para transformar la 3ª fila: se multiplica la ***"fila nueva"*** por el semipivote **6**, y **el resultado se resta de la 3ª fila**: Esto es:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Las fórmulas de transformación para esos seis elementos de la 3ª fila, son las siguientes:

$$a^{(I)}_{31} = a_{31} - (a_{31} \cdot a^{(I)}_{11}) = 6 - (6 \cdot 1) = 0$$

$$a^{(I)}_{32} = a_{32} - (a_{31} \cdot a^{(I)}_{12}) = 20 - (6 \cdot 3) = 2$$

$$a^{(I)}_{33} = a_{33} - (a_{31} \cdot a^{(I)}_{13}) = 18 - (6 \cdot 2) = 6$$

$$x^{(I)}_{31} = x_{31} - (a_{31} \cdot x^{(I)}_{11}) = 0 - (6 \cdot 1/2) = -3$$

$$x^{(I)}_{32} = x_{32} - (a_{31} \cdot x^{(I)}_{12}) = 0 - (6 \cdot 0) = 0$$

$$x^{(I)}_{33} = x_{33} - (a_{31} \cdot x^{(I)}_{13}) = 1 - (6 \cdot 0) = 1$$

Con éstos cálculos se completa la 1ª etapa (iteración) del proceso y se tiene el siguiente cuadro resumen:

	2	6	4	1	0	0
$A^{(0)}$	3	11	10	0	1	0
	6	20	18	0	0	1
	1	3	2	½	0	0
$A^{(1)}$	0	2	4	- 3/2	1	0
	0	2	6	-3	0	1

2. ***Segunda etapa***: El elemento $a_{22}^{(I)}$ **= 2**, es el pivote de la 2ª etapa, en virtud de que es no nulo. El procedimiento es análogo al desarrollado en la etapa anterior, sólo que se comienza transformando la 2ª fila, y luego se utilizan los semivivotes $a_{12}^{(I)}$ **= 3** y $a_{32}^{(I)}$ **= 2** para transformar la 1ª y 3ª filas respectivamente.

2.1. ***Cálculo de la 2ª fila:*** Se dividen todos los elementos de la segunda fila por $a_{22}^{(I)}$ ***= 2*** con objeto de que $a_{22}^{(2)}$ sea igual a la unidad.[2] Se obtiene así la fila transformada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3/4} & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \end{array}\right] \qquad \mathbf{(1)}$$

Para los cálculos siguientes de esta 2ª etapa, esta fila transformada es la ***"fila nueva"***.

2.2. ***Cálculo de la 1ª fila:*** El semipivote para la primera fila es el elemento $a_{12}^{(I)}$ ***= 3.***

Para transformar la 1ª fila: se multiplica la ***"fila nueva"*** por el semipivote **3**, y **el resultado se resta de la 1ª fila**: Esto es:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{11/4} & \mathbf{-3/2} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

[2] El índice superior $^{(2)}$ indica que el elemento ha sufrido dos etapas de transformación.

Las fórmulas de transformación son las siguientes:

$$a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(I)} - \left(a_{12}^{(I)} \,.\, a_{21}^{(2)}\right) = 1 - (3 \cdot 0) = 1$$

$$a_{12}^{(2)} = a_{12}^{(I)} - \left(a_{12}^{(I)} \,.\, a_{22}^{(2)}\right) = 3 - (3 \cdot 1) = 0$$

$$a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(I)} - \left(a_{12}^{(I)} \,.\, a_{23}^{(2)}\right) = 2 - (3 \cdot 2) = -4$$

$$x_{11}^{(2)} = x_{11}^{(I)} - \left(a_{12}^{(I)} \,.\, x_{21}^{(2)}\right) = 1/2 - [3\ (-3/4)] = 11/4$$

$$x_{12}^{(2)} = x_{12}^{(I)} - \left(a_{12}^{(I)} \,.\, x_{22}^{(2)}\right) = 0 - [3\ (1/2)] = -3/2$$

$$x_{13}^{(2)} = x_{13}^{(I)} - \left(a_{12}^{(I)} \,.\, x_{23}^{(2)}\right) = 0 - (3 \cdot 0) = 0$$

2.3 Cálculo de la 3ª fila: el semipivote para la 3ª fila es el elemento $a_{32}^{(I)}=$

Para transformar la 3ª fila: se multiplica la ***"fila nueva"*** por el semipivote **2**, y **el resultado se resta de la 3ª fila**: Esto es:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & -3/2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Las fórmulas de transformación son las siguientes:

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(I)} - \left(a_{32}^{(I)} \,.\, a_{21}^{(2)}\right) = 0 - (2 \cdot 0) = 0$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(I)} - \left(a_{32}^{(I)} \,.\, a_{22}^{(2)}\right) = 2 - (2 \cdot 1) = 0$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(I)} - \left(a_{32}^{(I)} \,.\, a_{23}^{(2)}\right) = 6 - (2 \cdot 2) = 2$$

$$x_{31}^{(2)} = x_{31}^{(I)} - \left(a_{32}^{(I)} \,.\, x_{21}^{(2)}\right) = -3 - [2\ (-3/4)] = -3/2$$

$$x_{32}^{(2)} = x_{32}^{(I)} - \left(a_{32}^{(I)} \,.\, x_{22}^{(2)}\right) = 0 - [2\ (1/2)] = -1$$

$$x_{33}^{(2)} = x_{33}^{(I)} - \left(a_{32}^{(I)} \,.\, x_{23}^{(2)}\right) = 1 - (2 \cdot 0) = 1$$

Con éstos cálculos se completa la 2ª etapa (iteración) del proceso y se tiene el siguiente cuadro resumen:

$A^{(0)}$	2	6	4	1	0	0	**Tabla inicial**
	3	11	10	0	1	0	
	6	20	18	0	0	1	
$A^{(1)}$	1	3	2	1/2	0	0	**Primera iteración**
	0	2	4	- 3/2	1	0	
	0	2	6	- 3	0	1	
$A^{(2)}$	1	0	- 4	11/4	- 3/2	0	**Segunda iteración**
	0	1	2	- ¾	1/2	0	
	0	0	2	- 3/2	- 1	1	

Note que las primeras dos columnas de la matriz transformada $\mathbf{A}^{(2)}$ son los vectores iniciales e_1 y e_2.

En la 3ª etapa se transformará la última columna de la matriz $\mathbf{A}^{(2)}$ en el vector unidad e_3.

3. ***Tercera etapa***: El elemento $a_{33}^{(2)} = 2$, es el pivote de la 3ª etapa, en virtud de que es no nulo. El procedimiento es análogo al desarrollado en las dos etapas anteriores, sólo que se comienza transformando la 3ª fila con el elemento pivotal $a_{33}^{(2)}$, y luego se utilizan los semivivotes $a_{13}^{(2)} = -4$ y $a_{23}^{(2)} = 2$ para transformar la 1ª y 2ª filas respectivamente.

3.1. Cálculo de la 3ª fila: Se dividen todos los elementos de la tercera fila por el pivote $a_{33}^{(2)} = 2$ con objeto de que $a_{33}^{(3)}$ sea igual a la unidad. Los cálculos son los siguientes:

$$a_{31}^{(3)} = a_{31}^{(2)} \div a_{33}^{(2)} = 0/2 = 0 \quad ; \quad x_{31}^{(3)} = x_{31}^{(2)} \div a_{33}^{(2)} = -3/2 \div 2 = -3/4$$

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} \div a_{33}^{(2)} = 0/2 = 0 \quad ; \quad x_{32}^{(3)} = x_{32}^{(2)} \div a_{33}^{(2)} = -1 \div 2 = -\tfrac{1}{2}$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} \div a_{33}^{(2)} = 2/2 = 1 \quad ; \quad x_{33}^{(3)} = x_{33}^{(2)} \div a_{33}^{(2)} = 1 \div 2 = \tfrac{1}{2}$$

La fila transformada, que será la ***"fila nueva"*** de esta 3ª etapa, resulta así:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -3/4 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

3.2 Cálculo de la 1ª fila: Se obtiene en base al semipivote $a_{13}^{(2)} = -4$ mediante los siguientes cálculos:

$$a_{11}^{(3)} = a_{11}^{(2)} - \left(a_{13}^{(2)} \cdot a_{31}^{(3)}\right) = 1 - (-4 \cdot 0) = 1$$

$$a_{12}^{(3)} = a_{12}^{(2)} - \left(a_{13}^{(2)} \cdot a_{32}^{(3)}\right) = 0 - (-4 \cdot 0) = 0$$

$$a_{13}^{(3)} = a_{13}^{(2)} - \left(a_{13}^{(2)} \cdot a_{33}^{(3)}\right) = -4 - (-4 \cdot 1) = 0$$

$$x_{11}^{(3)} = x_{11}^{(2)} - \left(a_{13}^{(2)} \cdot x_{31}^{(3)}\right) = 11/4 - (-4 \cdot -3/4) = -1/4$$

$$x_{12}^{(3)} = x_{12}^{(2)} - \left(a_{13}^{(2)} \cdot x_{32}^{(3)}\right) = -3/2 - (-4 \cdot -1/2) = -7/2$$

$$x_{13}^{(3)} = x_{13}^{(2)} - \left(a_{13}^{(2)} \cdot x_{33}^{(3)}\right) = 0 - (-4 \cdot 1/2) = 2$$

De donde resulta la fila transformada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -7/2 & 2 \end{array}\right]$$

Cálculo de la 2ª fila: Esta se obtiene con base al semipivote $a_{23}^{(2)} = \boldsymbol{2}$ mediante estos cálculos:

$$a_{21}^{(3)} = a_{21}^{(2)} - \left(a_{23}^{(2)} \cdot a_{31}^{(3)}\right) = 0 - (2 \cdot 0) = 0$$

$$a_{22}^{(3)} = a_{22}^{(2)} - \left(a_{23}^{(2)} \cdot a_{32}^{(3)}\right) = 1 - (2 \cdot 0) = 1$$

$$a_{23}^{(3)} = a_{23}^{(2)} - \left(a_{23}^{(2)} \cdot a_{33}^{(3)}\right) = 2 - (2 \cdot 1) = 0$$

$$x_{21}^{(3)} = x_{21}^{(2)} - \left(a_{23}^{(2)} \cdot x_{31}^{(3)}\right) = -3/4 - [2 \cdot (-3/4)] = 3/4$$

$$x_{22}^{(3)} = x_{22}^{(2)} - \left(a_{23}^{(2)} \cdot x_{32}^{(3)}\right) = ½ - [2 \cdot (-½)] = 3/2$$

$$x_{23}^{(3)} = x_{23}^{(2)} - \left(a_{23}^{(2)} \cdot x_{33}^{(3)}\right) = 0 - (2 \cdot ½) = -1$$

De donde resulta la fila transformada:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3/4 & 3/2 & -1 \end{array}\right]$$

Con estos cálculos concluye la 3ª etapa del proceso y se tiene el siguiente cuadro resumen:

$A^{(0)}$	2	6	4	1	0	0
	3	11	10	0	1	0
	6	20	18	0	0	1
$A^{(1)}$	1	3	2	1/2	0	0
	0	2	4	- 3/2	1	0
	0	2	6	- 3	0	1
$A^{(2)}$	1	0	- 4	11/4	- 3/2	0
	0	1	2	- ¾	1/2	0
	0	0	2	- 3/2	- 1	1
$A^{(3)}$	1	0	0	- 1/4	- 7/2	2
	0	1	0	3/4	3/2	-1
	0	0	1	- 3/4	- ½	½

Note que en el cuadro inferior izquierdo se ha llegado a una matriz unidad. El proceso ha finalizado y en el cuadro inferior derecho se tiene la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$, resultado que se comprueba directamente mediante el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

Transpuesta de una matriz

Si ***A*** es una matriz, la matriz formada a partir de ***A*** intercambiando sus renglones con sus columnas se conoce como ***transpuesta de A***.

Definición:

La ***transpuesta*** de una matriz **A** de ***m* x *n*** denotada $\mathbf{A^T}$, es la matriz de **n x m** cuyo i-ésimo renglón es la i-ésima columna de **A**.

Ejemplo

$$\textbf{Si A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ \textbf{encontrar } \mathbf{A^T}$$

Solución

La matriz **A** es de **2 x 3**, de modo que $\mathbf{A^T}$ es de **3 x 2**. La columna 1 de **A** se convierte en el renglón 1 de $\mathbf{A^T}$, la columna 2 de **A** se convierte en el renglón 2 y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Por tanto,

$$\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Observe que las columnas de $\mathbf{A^T}$ son los renglones de **A**. Debe darse cuenta de que si tomamos la transpuesta de nuestra respuesta, obtendremos la matriz original **A**. Es decir, la operación transpuesta tiene la propiedad de que

$$\mathbf{(A^T)^T = A}$$

Comentarios:

Selección de pivotes:

Cada pivote debe comprender a distinta fila y columna que los anteriores; es decir, que se debe tener un pivote en cada fila y columna. En el ejemplo anterior se vio que en la primera etapa se escogió la entrada a_{11}; en la segunda el $a_{22}^{(l)}$; y, en la tercera el $a_{33}^{(2)}$. Sin embargo, no es imprescindible seguir rigurosamente esa selección. Se presentan casos de inversión de matrices en que alguno de los pivotes resulta ser nulo; en esos casos conviene permutar las filas de la matriz para poder continuar con el proceso de inversión, con la única condición de volver a permutarlas nuevamente al finalizar la última etapa a fin de que el orden de los elementos de la matriz inversa sea el correcto.

Aunque hay otros métodos, este es el más recomendable para resolver operaciones de este tipo.