



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO  
DE TECNOLOGÍA DIGITAL**



**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES**

**“LOCALIZACIÓN DE CONJUNTOS COMPACTOS  
INVARIANTES, ANÁLISIS DE DINÁMICA Y DISEÑO DE  
CONTROLADOR PARA UN SISTEMA CAÓTICO DE  
DINÁMICA DE PLASMA”**

**TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS**

**P R E S E N T A:**

**DIANA GAMBOA LOAIZA**

**BAJO LA DIRECCIÓN DE:**

**DR. KONSTANTIN E. STARKOV**

**JUNIO DEL 2011**

**TIJUANA, B.C., MÉXICO**



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de Tijuana, B.C. siendo las 11:00 horas del día 15 del mes de junio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CITEDI para examinar la tesis titulada:

LOCALIZACIÓN DE CONJUNTOS COMPACTOS INVARIANTES, ANÁLISIS DE DINÁMICA Y DISEÑO DE CONTROLADOR PARA UN SISTEMA CAÓTICO DE DINÁMICA DE PLASMA.

Presentada por el alumno:

**GAMBOA**

Apellido paterno

**LOAIZA**

Apellido materno

**DIANA**

Nombre(s)

Con registro:

B	0	9	1	8	3	4
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES**

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR. KONSTANTIN STARKOV

DR. ROBERTO SEPÚLVEDA CRUZ

DR. OSCAR HUMBERTO MONTIEL ROSS

DR. LUIS TUPAK AGUILAR BUSTOS

DR. LUIS ARTURO GÓNZALEZ HERNÁNDEZ

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. LUIS ARTURO GÓNZALEZ HERNÁNDEZ



S. E. P.  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO  
DE TECNOLOGÍA DIGITAL  
DIRECCIÓN



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de Tijuana el día 20 del mes Junio del año 2011, el (la) que suscribe Diana Gamboa Loaiza alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Sistemas Digitales con número de registro B091834, adscrito a Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Konstantin E. Starkov y cede los derechos del trabajo intitulado LOCALIZACIÓN DE CONJUNTOS COMPACTOS INVARIANTES, ANÁLISIS DE DINÁMICA Y DISEÑO DE CONTROLADOR PARA UN SISTEMA CAÓTICO DE DINÁMICA DE PLASMA, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección Av. Del parque No. 1310, Mesa de Otay, Tijuana. Baja California, México. CP 22510. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

*Diana Gamboa  
Loaiza*

Diana Gamboa Loaiza

Nombre y firma

# Dedicatoria

Dedico este trabajo de Tesis a Dios, a mis padres, a mi hermanito y a mi esposo. Que sin ellos no lo podría haber logrado, siempre apoyándome en cada una de las descabelladas e ingeniosas ideas que se me ocurrían durante mi formación de posgrado.

# Agradecimientos

Al Dr. Konstantin Starkov por sus enseñanzas y por el tiempo dedicado en este trabajo, logrando tener varias publicaciones en congresos internacionales de prestigio.

Al Dr. Luis Nestor Coria por la paciencia, sugerencias y enseñanzas para comprender mejor la teoría del Caos.

A mis amigos del CITEDI haciendo que este último año fuera el mejor que tuve durante mi estancia en el centro de investigación.

A mi comité tutorial que siempre me brindaron críticas constructivas durante la realización de mi trabajo de tesis.

Y no por ultimo al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y al Programa Integral de Fortalecimiento Institucional (PIFI) otorgada por el Dr. Konstantin Starkov dandome la oportunidad de participar en sus proyectos logrando publicar en congresos internacionales y regionales los resultados obtenidos del trabajo de investigación, además de brindarme un apoyo económico durante mi estancia en CITEDI.

# LOCALIZACIÓN DE CONJUNTOS COMPACTOS INVARIANTES, ANÁLISIS DE DINÁMICA Y DISEÑO DE CONTROLADOR PARA UN SISTEMA CAÓTICO DE DINÁMICA DE PLASMA

## Resumen

En esta tesis, se proponen varias funciones localizadoras para un modelo de seis dimensiones que describe la propagación de las perturbaciones electromagnéticas de baja frecuencia en un plasma no magnetizado conteniendo un gradiente de densidad de equilibrio. Usando las condiciones extremas de primer orden se obtienen las fórmulas que muestran los límites de localización, aplicada tanto a funciones cuadráticas como a racionales. Las funciones localizadoras sirven para encontrar la región donde se encuentran contenidos todos los conjuntos compactos invariantes de un sistema dinámico no lineal. Hacer uso del teorema iterativo se demuestra como limitar la region de localización de los conjuntos compactos con la eliminación de algunos elementos del dominio de la localización. Condiciones de estabilidad asintótica se presentan utilizando la función de Lyapunov con y sin una entrada de control. También se determina la estabilidad en los puntos de equilibrio del sistema aplicando el método de linealización estableciendo condiciones de estabilidad. Se presentan simulaciones de los conjuntos compactos localizados los cuales contienen al atractor.

**Palabras Clave:** Localización, Conjuntos compactos invariantes, Sistemas caóticos.

# LOCALIZATION OF COMPACT INVARIANT SETS, DYNAMICAL ANALYSIS AND DESIGN OF A CONTROLLER FOR A CHAOTIC SYSTEM OF PLASMA DYNAMICS

## **Abstract**

In this thesis, several localizing functions are proposed for a six dimensional model describing the propagation of low frequency electromagnetic disturbance in an unmagnetized plasma containing an equilibrium density gradient. Using the first order extremum conditions we obtain formulas for the localization bounds by using several quadratic and rational localizing functions. In addition, by exploiting some rational functions we demonstrate how to refine this localization by removing some pieces from the localization domain. Conditions of global stability are presented by using Lyapunov with or without a virtual input. Also is considering the stability around the equilibrium points applying the linearization method establishing conditions of stability. Results of numerical simulation illustrating the localization domain for the chaotic attractor are provided.

**Key words:** Localization, Compact Invariant Sets, Chaotic Systems.

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Lista de símbolos y acrónimos</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo . . . . .	3
1.1.1. Objetivos específicos . . . . .	3
<b>2. Conceptos Matemáticos</b>	<b>4</b>
2.1. Sistemas Dinámicos . . . . .	4
2.2. Sistemas No lineales . . . . .	5
2.3. Plano de Fase . . . . .	6
2.4. Conjuntos . . . . .	6
2.5. Conjuntos Compactos Invariantes . . . . .	7
2.5.1. Conjuntos invariantes positivos . . . . .	8
2.5.2. Conjuntos invariantes negativos . . . . .	8
2.6. Función Localizadora . . . . .	8
2.7. Estabilidad . . . . .	10
2.7.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	10
2.7.2. Función de Lyapunov . . . . .	11
2.7.3. Linealización . . . . .	12
<b>3. Localización del conjunto compacto invariante de la dinámica del plasma</b>	<b>14</b>
3.1. La planta . . . . .	14

3.1.1. Localización de los conjuntos compactos . . . . .	15
3.2. Localización utilizando Funciones Racionales . . . . .	20
3.3. Proponiendo otras funciones localizadoras . . . . .	23
3.4. Proyecciones del sistema (3.1) . . . . .	31
<b>4. Puntos de equilibrio del sistema</b>	<b>41</b>
4.1. Caso 1: El origen . . . . .	41
4.1.1. Caso: $x_1 = 0$ cuando $x_2 = x_3 \neq 0$ . . . . .	42
4.1.2. Caso: $x_2 = 0$ cuando $x_1 = x_3 \neq 0$ . . . . .	42
4.1.3. Caso: $x_4 = 0$ cuando $x_3 = x_5 = x_6 \neq 0$ . . . . .	42
4.1.4. Caso: $x_5 = 0$ cuando $x_3 = x_4 = x_6 \neq 0$ . . . . .	43
4.2. Caso 2: $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0, x_4 = x_5 = x_6 = 0$ . . . . .	43
4.2.1. Caso: $x_{3-}$ . . . . .	44
4.2.2. Caso: $x_{3+}$ . . . . .	44
4.2.3. Caso: $x_{3-}$ y $x_{3+}$ . . . . .	45
4.3. Caso 3: $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = x_5 = x_6 \neq 0$ . . . . .	45
4.4. Caso 4: $x_3 = x_{3\pm}$ . . . . .	47
4.5. Resumen acerca de los puntos de equilibrios encontrados . . . . .	50
<b>5. Estudio de estabilidad</b>	<b>52</b>
5.1. Linealizando el sistema para el modelo de seis dimensiones . . . . .	52
5.2. Análisis de estabilidad por el método directo de Lyapunov . . . . .	54
5.3. Entradas de Control $\mu(t)$ . . . . .	56
<b>6. Conclusiones</b>	<b>58</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>

# Índice de figuras

3.1. Proyección del sistema $x_1, x_2, x_3$ . . . . .	17
3.2. Dinámica del sistema (3.2) dentro de la localización $K(h_1)$ . . . . .	18
3.3. Proyección del sistema $x_4, x_5, x_6$ . . . . .	19
3.4. Dinámica del sistema (3.3) en la localización $K(h_2)$ . . . . .	20
3.5. Dinámica del sistema (3.2) en la localización $K(h_3) \cap K(h_1)$ . . . . .	22
3.6. Dinámica del sistema (3.2) en la localización $K(h_4) \cap K(h_1)$ . . . . .	24
3.7. Dinámica del sistema (3.2) en la localización $K(h_5) \cap K(h_1)$ . . . . .	25
3.8. Dinámica del sistema (3.2) en la localización $K(h_6) \cap K(h_1)$ . . . . .	26
3.9. Dinámica del sistema (3.2) en la localización $K(h_1) \cap K(h_4) \cap K(h_6)$ . . . . .	27
3.10. Dinámica del sistema (3.2) en la localización $K(h_7) \cap K(h_1)$ . . . . .	28
3.11. Dinámica del sistema (3.2) en la localización $K(h_2) \cap K(h_8)$ . . . . .	31
3.12. Proyección del sistema $x_1, x_2, y_1$ . . . . .	32
3.13. Proyección del sistema $x_1, x_2, y_2$ . . . . .	32
3.14. Proyección del sistema $x_1, x_2, y_3$ . . . . .	33
3.15. Proyección del sistema $x_1, y_1, x_3$ . . . . .	33
3.16. Proyección del sistema $x_1, y_2, y_3$ . . . . .	34
3.17. Proyección del sistema $x_1, y_2, x_3$ . . . . .	34
3.18. Proyección del sistema $x_1, y_3, x_3$ . . . . .	35
3.19. Proyección del sistema $x_2, y_2, y_3$ . . . . .	35
3.20. Proyección del sistema $x_3, y_2, y_3$ . . . . .	36
3.21. Proyección del sistema $y_1, x_1, y_3$ . . . . .	36
3.22. Proyección del sistema $y_1, x_2, x_3$ . . . . .	37
3.23. Proyección del sistema $y_1, x_2, y_3$ . . . . .	37
3.24. Proyección del sistema $y_1, x_3, y_3$ . . . . .	38
3.25. Proyección del sistema $y_1, y_2, x_1$ . . . . .	38

3.26. Proyección del sistema $y_1, y_2, x_2$ . . . . .	39
3.27. Proyección del sistema $y_1, y_2, x_3$ . . . . .	39
3.28. Proyección del sistema $y_2, x_2, x_3$ . . . . .	40
3.29. Proyección del sistema $y_3, x_2, x_3$ . . . . .	40

# Lista de símbolos y acrónimos

A continuación se muestra la definición de símbolos matemáticos que fueron utilizados en este trabajo de tesis.

$\forall$	Para Todo
$ $	Evaluado en
$\in$	Pertenece a
$\nabla h(x)$	Gradiente de la función $h(x)$
$L$	Lagrange
$\mu$	Coficiente de Lagrange
$\frac{\partial L}{\partial x_i}$	Derivada parcial de Lagrange con respecto a $x_i$ , donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .
$\ x\ $	Norma euclidiana del vector $x$
$\sum$	Sumatoria
$x^*$	Punto de Equilibrio
$\neq$	Distinto de
$\dot{x}$	Derivada de $x$ con respecto al tiempo
$S(h)$	Conjunto de $h$
$L_f h$	Derivada Lie de la función $h$
$K(h)$	Conjunto de Localización
$h_{\inf}$	El valor infimo de $h$
$h_{\sup}$	El valor supremo de $h$
$\subset$	Subconjunto de
$\cap$	Intersección
$\cup$	Union
$:=$	Se define como
$A \subseteq B$	Cada elemento de $A$ es también elemento de $B$
$\infty$	Infinito
$R$	Conjunto de los números reales

# Capítulo 1

## Introducción

Se podrá decir que los sistemas dinámicos, tienen sus orígenes en Newton y con Henri Poincaré, donde para Poincaré los sistemas venían determinados por un conjunto de condiciones iniciales, las cuáles nunca se podrían conocer con precisión absoluta y en consecuencia poco a poco se iría perdiendo el recuerdo de las mismas y los sistemas se harían impredecibles [1]. Sin embargo hace unos 40 años donde estos sistemas han destacado a matemáticos e ingenieros como : V. Arnold [2, 3], Lyapunov [4], etc. Los escenarios caóticos que presentan innumerables sistemas físicos eran prácticamente inabordables hasta el desarrollo de las computadoras con su enorme y creciente capacidad de cálculo. Fue necesario un importante desarrollo de la electrónica digital, para potenciar la capacidad de cálculo de las computadoras, lo cual dio un fuerte impulso a la dinámica no lineal entre otras especialidades. La teoría de control es amplia y da oportunidad de establecer métodos los cuales ayudan a brindar una solución al sistema no lineal a estudiar, desde proponer un método general de análisis de estabilidad no lineal basado en el cálculo de la dimensión fractal de las orbitas que sigue un sistema dinámico en el espacio de las fases [5] hasta estudiar en el dominio de la frecuencia sobre el comportamiento de sistemas caóticos al ser aplicada retroalimentación estabilizante [6].

La solución del problema de localización se basa en el estudio de condiciones de extrema de primer orden y el uso del teorema iterativo. Las técnicas utilizadas para este análisis han sido desarrolladas y mejoradas por el Dr. Krishchenko y el Dr. Konstantin Starkov en los últimos años [7, 8, 9, 10, 11], donde se ha estudiado a sistemas físicos, artificiales, químicos, entre otros. Actualmente, se continua investigando la dinámica de los sistemas no lineales [12, 13, 14, 15, 16].

En los últimos años se ha presentado un interés de estudiar el comportamiento dinámico del plasma en un medio no homogéneo como se presentan en Southall y en Castell [17, 18]. En 2007 Krishchenko y Starkov [19] presentan una solución al problema de localización de los conjuntos compactos invariantes para un sistema modelando la amplitud de un plasma inestable, siendo este trabajo una referencia importante para el estudio de la localización de los conjuntos compactos invariantes para un plasma no magnetizado contenido en un gradiente de densidad de equilibrio. El sistema se obtiene a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, que son a partir de las ecuaciones de eion-vorticity y por la componente paralela de la ecuación del momento del electrón [20]. Donde a través del método de expansión de Lorenz [21] y la aproximación Galerkin [22], las ecuaciones diferenciales parciales se convierten en seis ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Esta investigación se enfocó en obtener la localización de los conjuntos compactos invariantes para un sistema de seis dimensiones descrito por Banerjee [23], donde se proponen diversas funciones localizadoras con el propósito de tener el mayor número de localizaciones posibles para el sistema. Para estudiar el sistema complejo se decide dividirlo en dos subsistemas y proponer funciones localizadoras para encontrar al conjunto compacto invariante para cada uno. Posteriormente se utilizará el teorema iterativo [24] para mejorar las localizaciones encontradas. Un subsistema solo involucrará a tres variables de estado, siendo independiente del resto de las variables, mientras que el segundo subsistema es dependiente del otro subsistema por involucrar a la variable  $x_3$ , siendo un subsistema de cuatro variables de estado  $x_3, x_4, x_5, x_6$ . Para encontrar la region donde se encuentran localizados los conjuntos compactos invariantes del segundo subsistema se considera a la variable  $x_3$  como un elemento acotado obtenido de la localización de los conjuntos compactos del subsistema anterior. En adición a estas localizaciones se obtienen simbólicamente los puntos de equilibrio del sistema completo y se establecen condiciones las cuales se evita tener puntos de equilibrio complejos.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera, en el Capítulo 2 se presentan algunas definiciones, conceptos, teoremas, entre otros, que ayudan a comprender el contenido de esta investigación. En el Capítulo 3 se proponen funciones localizadoras cuadráticas y racionales, definiendo el conjunto compacto donde se encuentran localizadas todo el conjunto compacto invariante así como proyecciones del sistema de seis dimensiones. En el Capítulo 4 se muestran simbólicamente los puntos de equilibrio, se establecen condiciones para que los puntos de equilibrio no sean complejos. En el Capítulo 5 se aplica el método de linealización para

conocer si se tiene estabilidad en una región cercana a los puntos de equilibrios y se presenta algunas funciones de Lyapunov, estableciendo condiciones para estabilidad asintótica en forma local. En el Capítulo 6 se muestran las conclusiones y referencias de este trabajo.

## **1.1. Objetivo**

Determinar la dinámica de modelo del plasma magnetizado de seis-dimensiones, resolver el problema de localización de conjuntos compactos invariantes y solucionar el problema de regulación para este sistema.

### **1.1.1. Objetivos específicos**

1. Localización de los conjuntos compactos invariantes al sistema de seis dimensiones.
2. Determinar funciones localizadoras cuadráticas y racionales para el sistema de seis dimensiones.
3. Determinar la estabilidad asintótica usando el criterio de estabilidad de Lyapunov.

# Capítulo 2

## Conceptos Matemáticos

El sistema a estudiar tiene las siguientes características:

- Es un sistema dinámico representado por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Tiene términos no lineales en sus seis ecuaciones de estado.
- Es un sistema autónomo.
- Es un sistema que presenta Caos.

Es importante mencionar que sólo se está enfocando en el estudio del sistema y no en su significado físico. Para ello se mencionan algunos conceptos que ayudan a comprender las características mencionadas que son: sistemas dinámicos, ecuaciones de estado, sistema no lineal, caos.

### 2.1. Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico, según Kuznetsov [25], es la representación matemática de un proceso determinístico. Estos sistemas pueden ser representados por un número finito de ecuaciones de estado, como se muestra a continuación:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables de estado. Una de las ventajas de poder representar sistemas de esta forma, es para el análisis de estabilidad. Más adelante se menciona la definición de estabilidad.

Actualmente, los fenómenos de la naturaleza se describen mediante ecuaciones diferenciales, lo cual nos permite explicar fenómenos en forma aproximada. Por ejemplo, el sistema de Lorenz intenta modelar el comportamiento climatológico de la tierra [26], o como el oscilador de Chua que es un ejemplo aplicable del comportamiento caótico [27].

La parte matemática que nos ayuda a interpretar y tratar de dar una solución a estos sistemas dinámicos es la teoría del caos. El término caos, definido por Gomez [28], establece que es un *comportamiento aperiódico de un sistema determinístico que exhibe una dependencia sensitiva a las condiciones iniciales*.

Geoméricamente, un atractor puede ser un punto, un ciclo límite o incluso puede ser un conjunto complicado de estructura fractal conocido como atractor extraño. La descripción de atractores de sistemas dinámicos caóticos ha sido uno de los grandes logros de la teoría del caos. Se entiende por atractor caótico al conjunto de trayectorias confinadas a una región acotada, que dado un punto inicial las trayectorias nunca se superponen en un tiempo infinito.

## 2.2. Sistemas No lineales

En matemáticas, un sistema no lineal es un sistema que no satisface el principio de superposición, esto es, no se tiene una relación lineal entre las entradas y salidas de un sistema. Generalmente, los problemas no lineales son de interés a físicos, matemáticos e ingenieros ya que, la mayoría de los sistemas físicos son intrínsecamente no lineales en naturaleza.

Los modelos no lineales son difíciles de analizar y dan lugar a fenómenos interesantes por ejemplo el caos. Los sistemas no lineales caóticos se identifican por involucrar términos cruzados de las variables de estado del sistema dinámico y por presentar oscilaciones que

no repiten valores después de un cierto período. Algunos de los sistemas que presentan caos son:

- Sistema Hipercaótico de Rabinovich [29].
- Sistema Hipercaótico de Chua [30].
- Sistema Hipercaótico de Lorenz [31].
- Sistema Rabinovich Fabrikant [32].

## 2.3. Plano de Fase

El diagrama de plano de fase de un sistema lineal autónomo, es una familia de trayectorias que no se cruzan y que describen la respuesta del sistema a todas las condiciones iniciales posibles. Según Jean Slotine [33] un plano de fase es un método gráfico que permite visualizar lo que sucede en un sistema no lineal iniciando desde varias condiciones iniciales, sin tener que resolver analíticamente las ecuaciones no lineales.

Un sistema no lineal puede mostrar patrones complicados en el plano de fase, como puede ser múltiples puntos de equilibrio, ciclos límite, atractores, orbitas.

Un ciclo límite es un comportamiento ciclico u oscilatorio de un sistema dinámico continuo. Dependiendo del patrón de movimientos de las trayectorias en la vecindad del ciclo límite, se pueden distinguir tres tipos de ciclos límite [33]:

1. **Ciclo límite estable.** Todas las trayectorias en la vecindad del ciclo límite convergen a él conforme  $t \rightarrow \infty$ .
2. **Ciclo límite inestable.** Todas las trayectorias en la vecindad del ciclo límite divergen de él conforme  $t \rightarrow \infty$ .
3. **Ciclo límite semiestable.** Algunas de las trayectorias en la vecindad convergen a él, mientras que otras divergen de él conforme  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.4. Conjuntos

Se entiende por conjunto a la colección de objetos, éstos pueden ser elementos o puntos [34]. Entonces si  $A$  es un conjunto y  $x$  es un elemento de  $A$  implica que  $x \in A$ . Ahora si se

tiene otro conjunto, sea el conjunto  $B$ , donde cada elemento de  $A$  esta también contenido en  $B$ , se dice que  $B$  incluye a  $A$ , es decir,  $A$  es un subconjunto de  $B$ , y se escribe como  $A \subset B$ . Sea  $R^n$  el conjunto de variables de estado, entonces:

**Definición 1** *Un subconjunto  $A \subset R^n$  es abierto si para cada  $\phi \in A$  se encuentra una vecindad  $\Phi_r(\phi) \subset A$  donde*

$$\Phi_r(\phi) = \{x \in R^n : \|x - \phi\| < r\}.$$

**Definición 2** *Un conjunto es cerrado si y solo si su complemento en  $R^n$  es abierto donde se entiende que el conjunto  $\Phi$  es llamado complemento del conjunto  $A$ ,  $A \in R^n$  si*

$$\Phi = \{x \in R^n \mid x \notin A\}.$$

**Definición 3** *Dado el subconjunto  $A \subset R^n$  este será acotado, si existe un número real  $c > 0$  tal que:*

$$\|x\| < c \quad \forall x \in A.$$

**Definición 4** *El conjunto  $A \subset R^n$  es compacto si es cerrado y acotado.*

## 2.5. Conjuntos Compactos Invariantes

La estabilidad de un sistema dinámico se define por la estabilidad de sus conjuntos invariantes. Las órbitas, los puntos de equilibrio y los ciclos limites, son conjuntos invariantes. Dado un conjunto compacto, cualquier trayectoria que llegue a él, permanecerá en él para un tiempo infinito, es decir, la trayectoria nunca saldrá del conjunto. A esto se le llama *conjunto compacto invariante*. Por lo tanto para poder encontrar la región de localización que contiene a todos los conjuntos compactos invariantes se proponen funciones localizadoras las cuales son similares a las ecuaciones de las superficies cuadráticas. Una función localizadora altamente recomendable es el elipsoide, ya que es una figura geométrica compacta lo que garantizaría que la dinámica del sistema  $\dot{x} = f(x)$  permanecería dentro de ella para todo tiempo transcurrido.

### 2.5.1. Conjuntos invariantes positivos

**Definición 5** Dado un conjunto  $M$  será invariante positivo con respecto a  $\dot{x} = f(x)$  si

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t = 0.$$

*Esto significa que cualquier trayectoria  $x(t)$  empieza en  $M$  y termina en  $M$  para todo  $t = 0$  [35].*

La región de localización de los conjuntos compactos invariantes se encontrará en el primer octante, porque cuando las variables de estado tienen un significado físico la solución al problema de localización de los conjuntos compactos invariantes se encuentra limitado por los conjuntos compactos invariantes positivos porque la solución que brindan es de sentido físico. Por ejemplo, existen los sistemas químicos [36] los cuales estudian tres poblaciones de una especie química en general, donde la solución que presentan es dada solo en el primer cuadrante o los sistemas médicos [37] donde tratan sobre el sistema inmunológico contra un concentrado de células cancerígenas, los resultados obtenidos se encuentran en el cuadrante positivo.

### 2.5.2. Conjuntos invariantes negativos

Al contrario de los conjuntos compactos invariantes positivos, la solución al problema de localización de los conjuntos compactos invariantes se encuentra limitado por los conjuntos compactos invariantes negativos.

## 2.6. Función Localizadora

Una función localizadora es una expresión matemática que contiene las variables y parámetros del sistema  $\dot{x} = f(x)$  y la cual es indispensable para resolver el problema de localización de los conjuntos compactos invariantes. Desafortunadamente no se cuenta con una metodología apropiada para encontrar una función localizadora de manera general. En este caso, se recomienda estudiar la dinámica del sistema no lineal y proponer funciones localizadoras las cuales contengan las variables de estado de dicho sistema. Dichas funciones pueden parecer a las ecuaciones de superficies geométricas conocidas, como por ejemplo, elipsoides, planos, esferas, etc. Sea

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

un sistema no lineal, donde  $f : D \rightarrow R^n$  es un mapeo localmente Lipschitz desde un dominio  $D \subset R^n$  en  $R^n$ ,  $x$  es el vector de estados. Entonces una función localizadora es una función  $h(x)$  que es diferenciable y no es la primera integral del sistema (2.1). Se entiende por  $h|_S$  la restricción de  $h$  en el conjunto  $S \in R^n$ , donde  $L_f h(x)$  es la derivada de Lie de  $h(x)$  con respecto a  $f$ , y es definida como:

$$L_f h(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_j} f_j(x) = \left[ \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial h(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

Por lo tanto,  $S(h)$  es el conjunto de

$$S(h) = \{h(x) | L_f h(x) = 0\}.$$

donde: Se entiende por  $h_{\inf}$  al valor infimo de  $h(x)$  y  $h_{\sup}$  al valor supremo de  $h(x)$  [7], ambos son definidos como:

$$h_{\inf} = \inf\{h(x) | x \in S(h)\} \text{ y } h_{\sup} = \sup\{h(x) | x \in S(h)\} .$$

**Teorema 1 ([38])** *Todo conjunto invariante del sistema (2.1) está contenido en el conjunto de localización:*

$$K(h) = \{h_{\inf} \leq h(x) \leq h_{\sup}\}.$$

Si conjuntos compactos invariantes están localizados en los conjuntos  $K_1$  y  $K_2$  con  $K_1, K_2 \subset R^n$ , entonces estos conjuntos también están localizados en el conjunto  $K_1 \cap K_2$ . A continuación se presenta el teorema iterativo para la localización de los conjuntos compactos invariantes.

**Teorema 2 ([39])** *Sea  $h_m(x), m = 0, 1, 2, \dots$  una secuencia de funciones localizadoras  $C^\infty$ . Los conjuntos*

$$K_0 = K(h_0), \quad K_m = K_{m-1} \cap K_{m-1,m}, \quad m > 0,$$

con

$$\begin{aligned} K_{m-1,m} &= \{x : h_{m,\inf} \leq h_m(x) \leq h_{m,\sup}\}, \\ h_{m,\sup} &= \sup_{S(h_m) \cap K_{m-1}} h_m(x), \\ h_{m,\inf} &= \inf_{S(h_m) \cap K_{m-1}} h_m(x), \end{aligned}$$

contienen cualquier conjunto compacto invariante del sistema (2.1) y

$$K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots \supseteq K_m \supseteq \cdots$$

**Proposición 1** Si  $K \cap S(h) = \emptyset$  entonces el sistema (2.1) no tiene conjuntos compactos invariantes en  $K$ .

Para obtener  $h_{\text{sup}}$  y  $h_{\text{inf}}$  se puede aplicar el método de Lagrange, como se muestra:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= h(x) - \mu L_f h(x) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= 0, i = 1, 2, \dots, n; \\ L_f h(x) &= 0. \end{aligned}$$

Otra manera de obtener el  $h_{\text{inf}}$  y el  $h_{\text{sup}}$  es visto en la tesis de maestría de Coria [40], donde se obtienen a partir de la restricción  $h|_S$  en el conjunto  $S \in \mathbb{R}^n$ .

## 2.7. Estabilidad

Existen muchos enfoques para el análisis de estabilidad en los sistemas lineales invariantes en el tiempo. Sin embargo, para los sistemas no lineales y/o los sistemas variantes con el tiempo, el análisis de estabilidad resulta muy difícil. El análisis de estabilidad de Lyapunov es un método que se aplica para encontrar respuestas a las preguntas sobre la estabilidad de los sistemas no lineales.

### 2.7.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Considérese el sistema (2.1), suponiendo que  $x^* \in D$  donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio de (2.1), es decir  $f(x^*) = 0$ , entonces:

**Definición 6** El punto de equilibrio  $x = 0$  de (2.1) es

- Estable si, para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0.$$

- Inestable, esto es, si no es estable.
- Asintóticamente estable, si es estable y  $\delta$  puede ser elegida de tal manera que satisface

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

- *Globalmente asintóticamente estable, si es asintóticamente estable y si para cualquier estado inicial de  $x$ , la trayectorias  $\phi(t; x)$  se aproxima al origen mientras  $t \rightarrow \infty$ , sin importar que tan grande es  $\|x(0)\|$ .*

### 2.7.2. Función de Lyapunov

El proceso de buscar una función candidata de Lyapunov es un método para determinar la estabilidad del sistema sin resolver las ecuaciones de estado. Este método también es llamado *Método Directo de Lyapunov* en honor al matemático ruso Alexander Mikhailovich Lyapunov publicado en 1892. [4]

**Teorema 3** ([41]) *Sea el origen  $x = 0$  un punto de equilibrio de (2.1) y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continuamente diferenciable tal que*

$$V(x) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (2.2)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D. \quad (2.3)$$

*Entonces  $x = 0$  es estable. Más aún, si*

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\}$$

*entonces  $x = 0$  es asintóticamente estable.*

**Teorema 4** ([41]) *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de (2.1). Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sea una función continuamente diferenciable tal que*

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0, \forall x \neq 0$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$$

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$$

*entonces  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable.*

**Definición 7** *Sea  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continuamente diferenciable definido en un dominio  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$  que contiene al origen, entonces:*

1.  $V(x)$  es una función definida positiva si  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$  en  $U - \{0\}$ .
2.  $V(x)$  es una función semidefinida positiva si  $V(0) = 0$  y  $V(x) \geq 0$  en  $U$ .
3.  $V(x)$  es una función definida negativa si  $-V(x)$  es definida positiva.
4.  $V(x)$  es una función semidefinida negativa si  $-V(x)$  es semidefinida positiva.

Una función continuamente diferenciable que satisface (2.2) y (2.3) se denomina función de Lyapunov. La superficie  $V(x) = c$  se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel. La condición  $\dot{V}(x) \leq 0$  implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$  se introduce en el conjunto  $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$  y nunca puede salir de él. Cuando  $\dot{V}(x) < 0$  implica que la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra superficie de Lyapunov interior con un  $c$  menor. A medida que  $c$  decrece, la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$  se reduce hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si solo sabemos que  $\dot{V}(x) \leq 0$ , no podemos asegurar que la trayectoria tienda al origen, pero podemos concluir que el origen es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier bola  $B_r$  solo con requerir que el estado inicial  $x(0)$  pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha bola [41].

### 2.7.3. Linealización

El *Método Indirecto de Lyapunov* [42] o *linealización*, es un método que consiste en aproximar el sistema no lineal a un sistema lineal para estimar el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal en una región cercana a un punto de equilibrio, es decir, la aproximación lineal solo se comportara como el sistema no lineal en la medida en que se trabaja en un punto muy cercano al punto de equilibrio. Este procedimiento es usado cuando se desea conocer si un punto de equilibrio del sistema no lineal es localmente asintóticamente estable o es inestable. Para ello nos apoyamos en los siguientes pasos:

**Paso 1:** Siendo el origen el punto de equilibrio del sistema (2.1), se define la matriz

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \in R^n$$

que es la matriz Jacobiana de (2.1).

**Paso 2:** El sistema  $\dot{z} = Az$  representa la linealización del sistema (2.1) alrededor del punto de equilibrio  $x^* = 0$ .

**Paso 3:** Entonces  $x^* = 0$  es asintóticamente estable en forma local si todos los valores propios  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  de  $A$  satisfacen que  $Re(\lambda) < 0$ , e inestable si los valores propios de  $A$  satisfacen que  $Re(\lambda) > 0$ .

# Capítulo 3

## Localización del conjunto compacto invariante de la dinámica del plasma

Se entiende por localización de conjuntos compactos invariantes a la región del espacio de estados donde se encuentran localizados todos los conjuntos compactos invariantes que se presentan bajo ciertas condiciones de algún sistema en específico, como se menciona en Coria [24]. A continuación se presentan algunas localizaciones que se obtienen proponiendo funciones localizadoras cuadráticas y racionales.

### 3.1. La planta

Se estudia un modelo no lineal el cual describe la propagación de las perturbaciones electromagnéticas de baja frecuencia en un plasma no magnetizado conteniendo un gradiente de densidad de equilibrio que fue considerado en [23]. Este modelo se obtiene a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, estas son:

- Ecuaciones de eion-vorticity [20].
- Por la componente paralela de la ecuación del momento del electrón [20].

A través del método de expansión de Lorenz [21] y la aproximación Galerkin [22], las ecuaciones diferenciales parciales se convierten en seis ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, que se muestran a continuación

$$\dot{x}_1 = -\sigma_1 x_1 + \sigma_1 x_2 + \delta x_2 x_3$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= -x_1x_3 + \gamma_1x_1 - x_2 \\
\dot{x}_3 &= x_1x_2 - \beta_1x_3 \\
\dot{x}_4 &= -\sigma_2x_4 + \sigma_2x_5 + \delta_1x_5x_6 + \delta_2x_5x_3 \\
\dot{x}_5 &= -x_4x_6 + \gamma_2x_4 - \gamma_3x_5 + \delta_4x_3x_4 \\
\dot{x}_6 &= x_4x_5 - \beta_2x_6.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $\sigma_1 = 10.0$ ,  $\delta = 0.0$ ,  $\gamma_1 = 230.0$ ,  $\beta_1 = \frac{8}{3}$ ,  $\sigma_2 = 3.0$ ,  $\delta_1 = 0.2$ ,  $\delta_2 = 0.1$ ,  $\gamma_2 = 221.5$ ,  $\gamma_3 = 222.5$ ,  $\delta_4 = 0.1$ , y  $\beta_2 = 0.9$ .

Para encontrar la región donde se encuentran todos los conjuntos compactos el sistema (3.1) se proponen funciones localizadoras, pero dado que (3.1) es de sexto orden la solución es compleja. Para facilitar el estudio del comportamiento dinámico del sistema (3.1) así como también encontrar la región donde se encuentran los conjuntos compactos invariantes, se decide separarlo en dos subsistemas proponiendo a cada subsistema una función localizadora:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\sigma_1x_1 + \sigma_1x_2 + \delta x_2x_3 \\
\dot{x}_2 &= -x_1x_3 + \gamma_1x_1 - x_2 \\
\dot{x}_3 &= x_1x_2 - \beta_1x_3,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

y

$$\begin{aligned}
\dot{x}_4 &= -\sigma_2x_4 + \sigma_2x_5 + \delta_1x_5x_6 + \delta_2x_5x_3 \\
\dot{x}_5 &= -x_4x_6 + \gamma_2x_4 - \gamma_3x_5 + \delta_4x_3x_4 \\
\dot{x}_6 &= x_4x_5 - \beta_2x_6.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Nótese que en (3.3) aparece la variable de estado  $x_3$  y que (3.2) es independiente de (3.3)

### 3.1.1. Localización de los conjuntos compactos

Para encontrar la región donde se encuentran los conjuntos compactos invariantes del sistema (3.1), se sigue una serie de pasos que se muestran a continuación:

**Paso 1:** Se propone la siguiente función localizadora para el sistema (3.2):

$$h_1(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{(\delta + 1)}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_3 - [\gamma_1(\delta + 1) + \sigma_1])^2. \tag{3.4}$$

**Paso 2:** Aplicando  $L_f h_1(x)$  se tiene:

$$L_f h_1(x) = -\sigma_1 x_1^2 - (\delta + 1)x_2^2 - \beta_1 \left[ x_3 - \frac{[\gamma_1(\delta+1)+\sigma_1]}{2} \right]^2 + \frac{\beta_1}{4} [\gamma_1(\delta + 1) + \sigma_1]^2.$$

**Paso 3:** Se obtiene el conjunto  $S(h_1)$  que viene dado por la superficie elipsoidal  $R^3$ :

$$S(h_1) = \left\{ a\sigma_1 x_1^2 + a(\delta + 1)x_2^2 + a \left( x_3 - \frac{[\gamma_1(\delta+1)+\sigma_1]}{2} \right)^2 - 1 \right\}$$

donde

$$a = \frac{4}{\beta_1 [\gamma_1(\delta+1)+\sigma_1]^2}.$$

**Paso 4:** Ahora se calculan los valores de  $h_{1\text{máx}}(S(h_1))$ . Para ello, se aplica la función de Lagrange

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{x_1^2}{2} + \frac{(\delta + 1)}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} (x_3 - [\gamma_1(\delta + 1) + \sigma_1])^2 \\ &\quad - \mu \left[ a\sigma_1 x_1^2 + a(\delta + 1)x_2^2 + a \left( x_3 - \frac{[\gamma_1(\delta + 1) + \sigma_1]}{2} \right)^2 - 1 \right]. \end{aligned}$$

Obteniendo las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= x_1 - 2a\sigma_1 x_1 \mu = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= (\delta + 1)x_2 - 2a(\delta + 1)x_2 \mu = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} &= x_3 - [\gamma_1(\delta + 1) + \sigma_1] - 2a\mu \left( x_3 - \frac{[\gamma_1(\delta+1)+\sigma_1]}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dado que el máximo valor de la función de Lagrange se obtiene cuando

$$x_{1*} = x_{2*} = 0 \text{ y}$$

$$x_{3*} = \frac{[\gamma_1(\delta+1)+\sigma_1][(\gamma_1(\delta+1)+\sigma_1)^2-4\mu]}{[\gamma_1(\delta+1)+\sigma_1]^2-8\mu}$$

obtenemos que  $\mu_* = \frac{[\gamma_1(\delta+1)+\sigma_1]^2}{4}$ . Por consiguiente:  $x_{3*} = [\gamma_1(\delta + 1) + \sigma_1]$ .

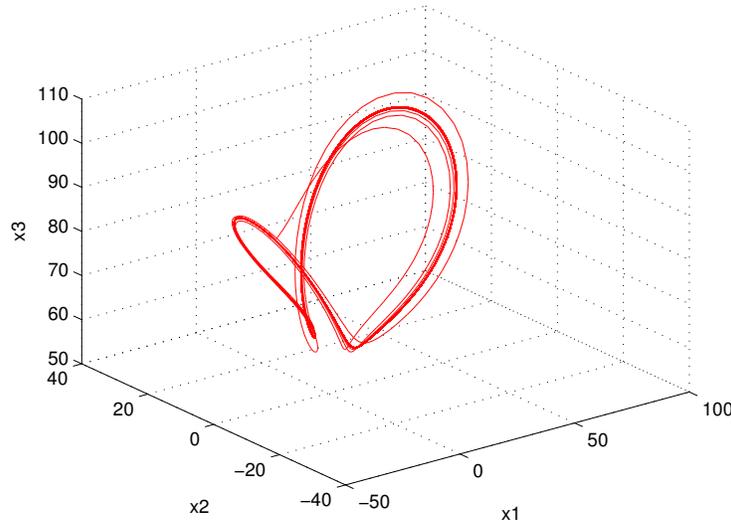
Como resultado, se llega a la siguiente proposición 2.

**Proposición 2** Para el sistema (3.2) con coeficientes positivos, todos los conjuntos compactos invariantes están contenidos en el elipsoide

$$K(h_1) = \left\{ 0 \leq \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{(\delta+1)}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_3 - [\gamma_1(\delta+1) + \sigma_1])^2 \leq h_{1\text{sup}} = \frac{[\gamma_1(\delta+1) + \sigma_1]^2}{2} \right\} \quad (3.5)$$

en  $R^3$

La Figura 3.1 muestra la proyección del sistema muestra la proyección del sistema (3.2) sujeto a los parámetros descritos en [23], y en la Figura 3.2 se presenta la proyección del atractor dentro de la localización  $K(h_1)$  sujeto a las condiciones iniciales  $x_1(0) = 14.99$ ,  $x_2(0) = 46.64$ ,  $x_3(0) = 166$ .

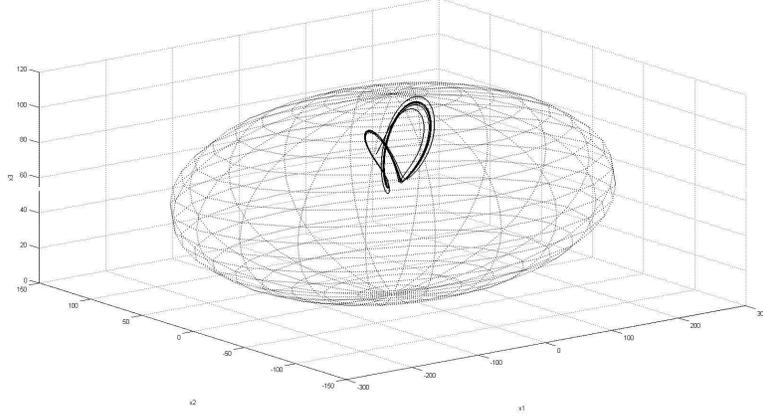


**Figura 3.1:** Proyección del sistema  $x_1, x_2, x_3$ .

En la Figura (3.2) se muestra una parte del dominio de localización para el sistema (3.1). Para obtener el dominio donde se encuentran localizados todos los conjuntos compactos invariantes es necesario la intersección de los conjuntos compactos invariantes del subsistema (3.3), para esto, se propone una función localizadora y se toma un elemento del conjunto compacto  $K(h_1)$  considerándose como un elemento acotado compacto, sea,  $|x_3| \leq r := 2[\gamma_1(\delta+1) + \sigma_1]$ . Ahora se procede a la localización de los conjuntos compactos de (3.3).

**Paso 1:** Aplicando la siguiente función candidata para el subsistema (3.3):

$$h_2(x) = x_4^2 + (\delta_1 + 1)x_5^2 + x_6^2 + qx_6. \quad (3.6)$$



**Figura 3.2:** Dinámica del sistema (3.2) dentro de la localización  $K(h_1)$ .

donde  $q$  es un valor escalar.

**Paso 2:** Se obtiene  $L_f h_2(x)$  que es dependiente del parametro  $q$  a través de la función  $A_1(q)$ :

$$-L_f h_2(x) = 2\sigma_2 x_4^2 + 2(\delta_1 + 1)\gamma_3 x_5^2 + A_1(q)x_4 x_5 + A_2 x_3 x_4 x_5 + 2\beta_2 x_6^2 + q\beta_2 x_6.$$

con  $A_1(q) = 2\sigma_2 + 2(\delta_1 + 1)\gamma_2 + q$ , y  $A_2 = 2\delta_2 + 2\delta_1\delta_4 + 2\delta_4$ .

**Paso 3:** Así, el conjunto  $S(h_2)$  se encuentra contenido en el conjunto dado a continuación:

$$0 \geq 2\sigma_2 x_4^2 + 2(\delta_1 + 1)\gamma_3 x_5^2 - A_1(q) |x_4 x_5| - A_2 r |x_4 x_5| + 2\beta_2 x_6^2 + q\beta_2 x_6 \quad (3.7)$$

donde  $q$  se toma tal que  $A_1(q) \geq 0$ .

**Paso 4:** Lo siguiente se deriva de la desigualdad de (3.7):

$$\frac{q^2}{8\beta_2} \geq 2\sigma_2 \left( |x_4| + \frac{A_1(q) + rA_2}{4\sigma_2} |x_5| \right)^2 + \left[ 2(\delta_1 + 1)\gamma_3 - \frac{(A_1(q) + rA_2)^2}{8\sigma_2} \right] x_5^2 + 2\beta_2 \left( x_6 + \frac{q}{4\beta_2} \right)^2.$$

Así obtenemos que  $h_2$  es la función localizadora para el sistema (3.3) en el que  $x_3(t)$  es un elemento acotado del conjunto compacto  $K(h_1)$ . Además, propone lo siguiente

**Proposición 3** *Suponer que  $q$  es tal que  $A_1(q) \geq 0$  y se define*

$$A_3(q) : = 2(\delta_1 + 1)\gamma_3 - \frac{(A_1(q) + rA_2)^2}{8\sigma_2} > 0.$$

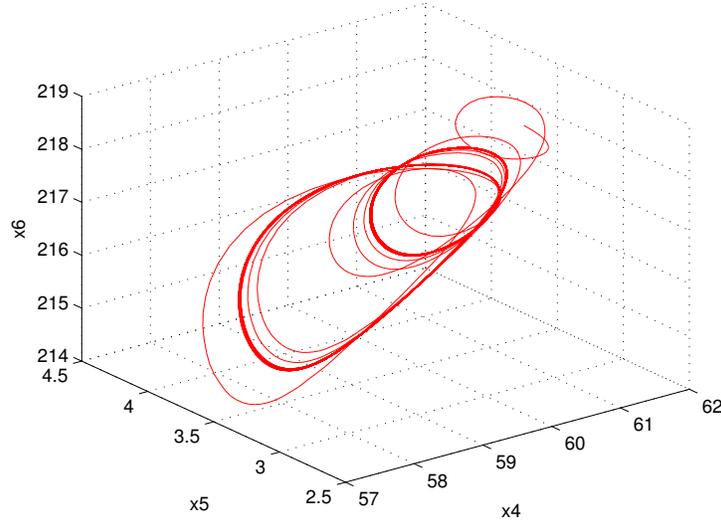
Luego  $M$  es una solida elipsoide en  $R^3$ . Siendo  $M$  la región donde se encuentran los conjuntos compactos invariantes.

De este hecho se deriva el siguiente teorema

**Teorema 5 ([43])** *En las condiciones de la última proposición se establece que todos los conjuntos compactos invariantes del sistema (3.1) estan contenidos dentro en el conjunto  $K(h_1) \cap K(h_2)$  con  $K(h_2) = \{h_2 \leq h_{2\text{sup}}\}$  y el valor de  $h_{2\text{sup}}$  es estimado en*

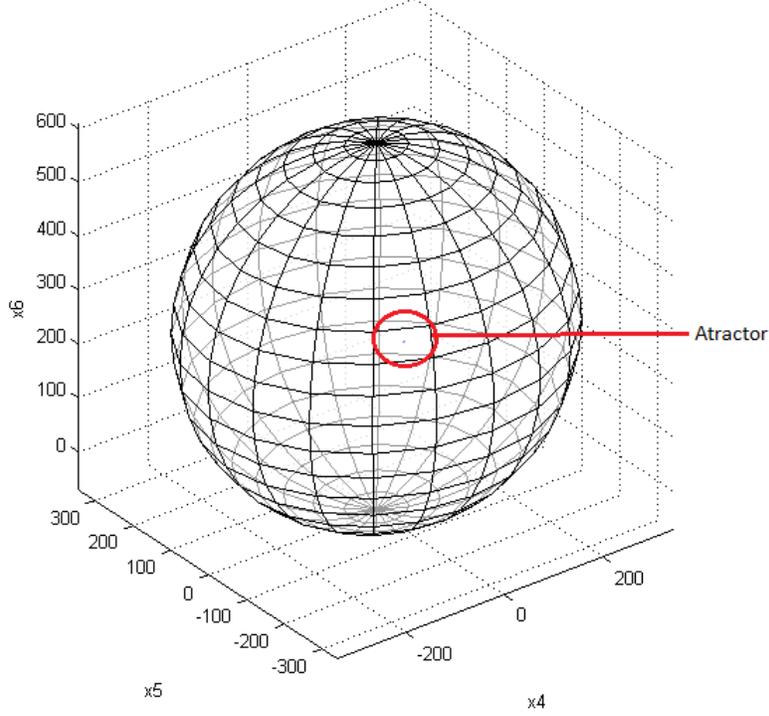
$$\begin{aligned}
 R_4 & : = \frac{q}{4\sqrt{\beta_2\sigma_2}} + \frac{A_1(q) + rA_2}{8\sigma_2} \frac{q}{\sqrt{2\beta_2A_3(q)}}; \\
 R_5 & : = \frac{q}{2\sqrt{2\beta_2A_3(q)}}; \\
 h_{2\text{sup}} & \leq R_4^2 + (\delta_1 + 1)R_5^2 + \frac{q^2}{4\beta_2^2}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

En la Figura 3.3 se muestra la proyección del atractor del subsistema (3.3) y en la Figura 3.4 se muestra al atractor dentro de la localización  $K(h_2)$ , sujeto a las condiciones iniciales  $x_4(0) = 116$  ,  $x_5(0) = 72$  ,  $x_6(0) = 235.9$  y  $q = -535$ .



**Figura 3.3:** Proyección del sistema  $x_4, x_5, x_6$ .

Por lo tanto, aplicando el teorema iterativo se encuentra la región donde se localizan todos los conjuntos compactos invariantes del sistema (3.1), que es la intersección de los conjuntos  $K(h_1) \cap K(h_2)$ .



**Figura 3.4:** Dinámica del sistema (3.3) en la localización  $K(h_2)$ .

## 3.2. Localización utilizando Funciones Racionales

En los artículos [19, 44], se propone utilizar funciones racionales con el fin de delimitar una región dada una localización compacta obtenida. Ahora vamos a aplicar esta idea solo para el subsistema (3.2).

**Paso 1:** Considérese la siguiente función localizadora

$$h_3 = \frac{x_3}{x_1^2 + \delta x_2^2}. \quad (3.9)$$

**Paso 2:** Calculamos  $L_f h_3$ , como se muestra a continuación

$$L_f h_3 = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + \delta x_2^2} - \beta_1 h_3 - \frac{2x_3[-\sigma_1 x_1^2 - \delta x_2^2 + (\sigma_1 + \delta \gamma_1)x_1 x_2]}{(x_1^2 + \delta x_2^2)^2}.$$

**Paso 3:** Entonces el conjunto  $S(h_3)$  está definido por

$$h_3 \big|_{S(h_3)} \frac{\rho_1(x_1, x_2)}{x_1^2 + \delta x_2^2} = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + \delta x_2^2}$$

donde

$$\frac{x_1 x_2}{x_1^2 + \delta x_2^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\delta}}$$

por lo tanto

$$h_3 \mid_{S(h_3)} \frac{\rho_1(x_1, x_2)}{x_1^2 + \delta x_2^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\delta}}$$

donde  $\rho_1$  tiene la forma cuadrática  $\rho_1(x_1, x_2) = (\beta_1 - 2\sigma_1)x_1^2 + (\beta_1\delta - 2\delta)x_2^2 + 2(\sigma_1 + \delta\gamma_1)x_1x_2$ . Si

$$\begin{aligned} \beta_1 &> 2\sigma_1, \text{ y} \\ \delta(\beta_1 - 2\sigma_1)(\beta_1 - 2) &> (\sigma_1 + \delta\gamma_1)^2. \end{aligned}$$

entonces  $\rho_1(x_1, x_2)$  es positiva definida y

$$\left| h_3 \mid_{S(h_3)} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\delta}\lambda_{\min}(\rho_1)},$$

donde  $\lambda_{\min}(\rho_1)$  es el valor propio mínimo de  $\rho_1$  dado por

$$\lambda_{\min}(\rho) = \frac{[\beta_1 - 2\sigma_1 + \beta_1\delta - 2\delta] - \sqrt{[\beta_1 - 2\sigma_1 + \beta_1\delta - 2\delta]^2 - 4[(\beta_1\delta - 2\delta)(\beta_1 - 2\sigma_1) - (\sigma_1 + \delta\gamma_1)^2]}}{2}.$$

**Paso 4:** Finalmente el conjunto de localización es

$$K(h_3) : = \left\{ \left| \frac{x_3}{x_1^2 + \delta x_2^2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\delta}\lambda_{\min}(\rho_1)} \right\}. \quad (3.10)$$

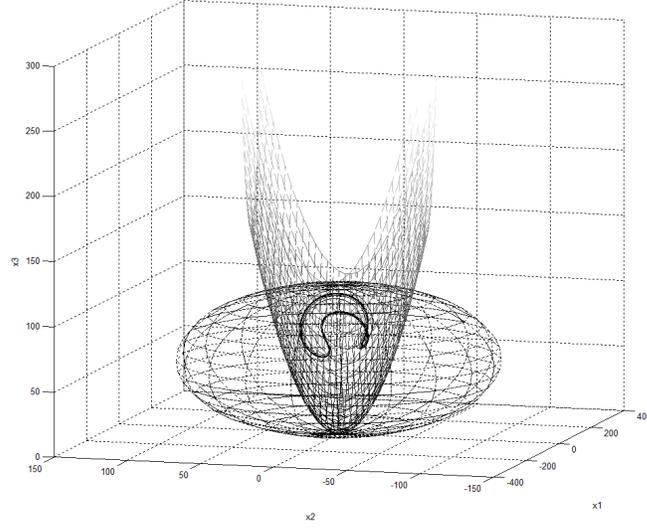
En la Figura 3.5 se muestra la proyección del atractor del sistema (3.2) dentro de la localización  $K(h_3)$  cortando a la localización  $K(h_1)$ .

A continuación se propone la siguiente función candidata racional  $h_4(x)$  para el sistema (3.2), siguiendo los mismos pasos para localizar los conjuntos compactos.

**Paso 1:** Se aplica la siguiente función localizadora

$$h_4 = \frac{x_3}{x_1^2 + (\delta + 1)x_2^2 + x_3^2}. \quad (3.11)$$

**Paso 2:** Calculamos que



**Figura 3.5:** Dinámica del sistema (3.2) en la localización  $K(h_3) \cap K(h_1)$ .

$$L_f h_4 = \frac{x_1 x_2 - \beta_1 x_3}{x_1^2 + (\delta + 1)x_2^2 + x_3^2} - \frac{2x_3(-\sigma_1 x_1^2 - (\delta + 1)x_2^2 - \beta_1 x_3^2 + [\sigma_1 + (\delta + 1)\gamma_1]x_1 x_2)}{(x_1^2 + (\delta + 1)x_2^2 + x_3^2)^2}.$$

**Paso 3:** Entonces el conjunto  $S(h_4)$  está definido por

$$h_4 \big|_{S(h_4)} \frac{\rho_2(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + (\delta + 1)x_2^2 + x_3^2} = \frac{x_3}{x_1^2 + (\delta + 1)x_2^2 + x_3^2}$$

donde

$$\frac{x_3}{x_1^2 + (\delta + 1)x_2^2 + x_3^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{(\delta + 1)}}$$

siendo

$$h_4 \big|_{S(h_4)} \frac{\rho_2(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + (\delta + 1)x_2^2 + x_3^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{(\delta + 1)}}$$

entonces  $\rho_2(x_1, x_2, x_3) = (\beta_1 - 2\sigma_1)x_1^2 + (\delta + 1)(\beta_1 - 2)x_2^2 - \beta_1 x_3^2 + 2[\sigma_1 + (\delta + 1)\gamma_1]x_1 x_2$ .

Si

$$\begin{aligned} & \beta_1 > 2\sigma_1 \text{ y} \\ & [\sigma_1 + (\delta + 1)\gamma_1]^2 > (\beta_1 - 2\sigma_1)(\delta + 1)(\beta_1 - 2) \end{aligned}$$

se logra que  $\rho_2$  sea positiva y

$$\left| h_4 \mid_{S(h_4)} \frac{\rho_2(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + (\delta+1)x_2^2 + x_3^2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{(\delta+1)}}$$

Ahora bien, denotando  $\lambda_{\min}(\rho_2)$  como el valor propio mínimo de  $\rho_2$  entonces

$$\left| h_4 \mid_{S(h_4)} \right| \leq \frac{1}{2\lambda_{\min}(\rho_2)\sqrt{\delta+1}}.$$

donde

$$\lambda_{\min}(\rho_2) = \frac{[\beta_1 - 2\sigma_1 + (\delta+1)(\beta_1 - 2)]}{2} - \frac{\sqrt{[\beta_1 - 2\sigma_1 + (\delta+1)(\beta_1 - 2)]^2 - 4[(\beta_1 - 2)(\beta_1 - 2\sigma_1)(\delta+1) - [\sigma_1 + (\delta+1)\gamma_1]^2]}}{2}.$$

**Paso 4:** Finalmente se obtiene el conjunto de localización

$$K(h_4) : = \left\{ \left| \frac{x_3}{x_1^2 + (\delta+1)x_2^2 + x_3^2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\delta+1}\lambda_{\min}(\rho_2)} \right\}. \quad (3.12)$$

En la Figura 3.6 se muestra la proyección del atractor del sistema (3.2) dentro del conjunto  $K(h_1)$ . A diferencia del conjunto  $K(h_3)$ , el atractor no está contenido en el conjunto  $K(h_4)$  siendo este un conjunto vacío. Por lo tanto, el conjunto  $K(h_4)$  delimita la región donde se encuentran los conjuntos compactos invariantes de  $K(h_1)$ .

### 3.3. Proponiendo otras funciones localizadoras

Aquí se describe cómo acercarse a los conjuntos compactos invariantes del subsistema (3.2) mediante la búsqueda de otras funciones de localización.

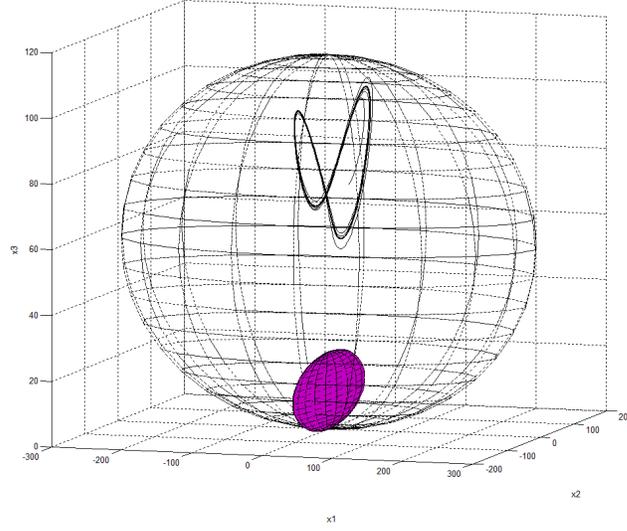
**Paso 1:** Tomemos una función localizadora de la siguiente forma:

$$h_5 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{\delta}{2}x_2^2 - (\sigma_1 + \gamma_1\delta)x_3 \quad (3.13)$$

**Paso 2:** Se obtiene  $L_f h_5$  como:

$$L_f h_5 = -\sigma_1 x_1^2 - \delta x_2^2 + (\sigma_1 + \gamma_1\delta)\beta_1 x_3.$$

**Paso 3:** El conjunto  $S(h_5)$  se define por



**Figura 3.6:** Dinámica del sistema (3.2) en la localización  $K(h_4) \cap K(h_1)$ .

$$x_3 = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1 + \gamma_1 \delta) \beta_1} x_1^2 + \frac{\delta}{(\sigma_1 + \gamma_1 \delta) \beta_1} x_2^2.$$

Por lo tanto

$$h_5 |_{S(h_5)} = x_1^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sigma_1}{\beta_1} \right) + x_2^2 \left( \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{\beta_1} \right).$$

**Paso 4:** Como resultado de ello, llegamos a la siguiente conclusión:

$$\begin{aligned} h_{5 \text{ inf}} &= 0, \text{ con } \frac{1}{2} > \frac{\sigma_1}{\beta_1} \text{ y } \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{\beta_1} \\ h_{5 \text{ sup}} &= 0, \text{ con } \frac{\sigma_1}{\beta_1} > \frac{1}{2} \text{ y } \frac{\delta}{\beta_1} > \frac{\delta}{2} \\ h_5 |_{S(h_5)} &= 0, \text{ con } \beta_1 = 2; \sigma_1 = 1. \end{aligned}$$

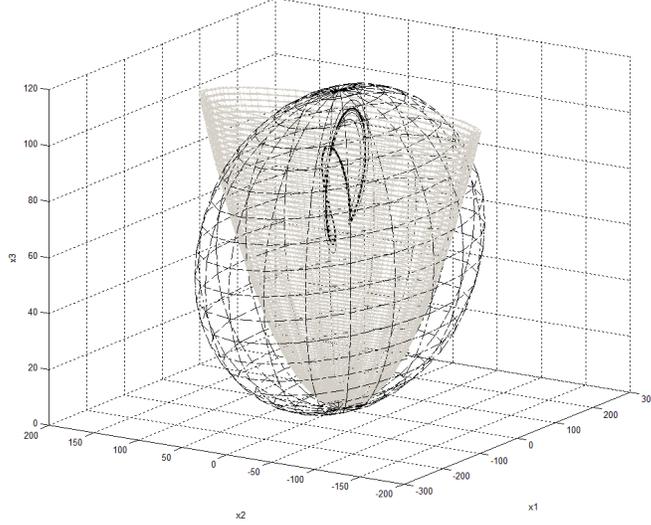
Si  $(\beta_1 - 2\sigma_1)^2 + \delta^2(\beta_1 - 2)^2 > 0$  se obtiene el conjunto de localización bajo condiciones adicionales:

$$\begin{aligned} K(h_5) : &= \left\{ \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{\delta}{2} x_2^2 - (\sigma_1 + \gamma_1 \delta) x_3 \geq 0; \frac{1}{2} \geq \frac{\sigma_1}{\beta_1} \text{ y } \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{\beta_1} \right\}; \\ K(h_5) : &= \left\{ \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{\delta}{2} x_2^2 - (\sigma_1 + \gamma_1 \delta) x_3 \leq 0; \frac{1}{2} \leq \frac{\sigma_1}{\beta_1} \text{ y } \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{\beta_1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, se logra tener la localización

$$K(h_5) := \left\{ \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{\delta}{2}x_2^2 - (\sigma_1 + \gamma_1\delta)x_3 = 0; \beta_1 = 2; \sigma_1 = 1 \right\}.$$

En la Figura 3.7 se muestra la proyección del atractor del sistema (3.2) dentro de la localización  $K(h_5)$  delimitando la localización  $K(h_1)$  aplicando el método iterativo



**Figura 3.7:** Dinámica del sistema (3.2) en la localización  $K(h_5) \cap K(h_1)$ .

Ahora, tomemos una función localizadora de la siguiente forma:

**Paso 1:** Sea la función localizadora

$$h_6 = -\frac{1}{2\sigma_1}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma_1}x_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_1 + \gamma_1\delta}{\sigma_1\gamma_1} \right) x_3^2. \quad (3.15)$$

**Paso 2:** Aquí tenemos

$$L_f h_6 = x_1^2 - \frac{1}{\gamma_1}x_2^2 - \left( \frac{\sigma_1 + \gamma_1\delta}{\sigma_1\gamma_1} \right) \beta_1 x_3^2.$$

**Paso 3:** Se determina a  $S(h_6)$  como

$$x_1^2 = \frac{1}{\gamma_1}x_2^2 + \left( \frac{\sigma_1 + \gamma_1\delta}{\sigma_1\gamma_1} \right) \beta_1 x_3^2.$$

**Paso 4:** Entonces tenemos que

$$h_6 |_{S(h_6)} = \frac{1}{2\gamma_1} \left(1 - \frac{1}{\sigma_1}\right) x_2^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1 + \gamma_1 \delta}{\sigma_1 \gamma_1}\right) \left(1 - \frac{\beta_1}{\sigma_1}\right) x_3^2.$$

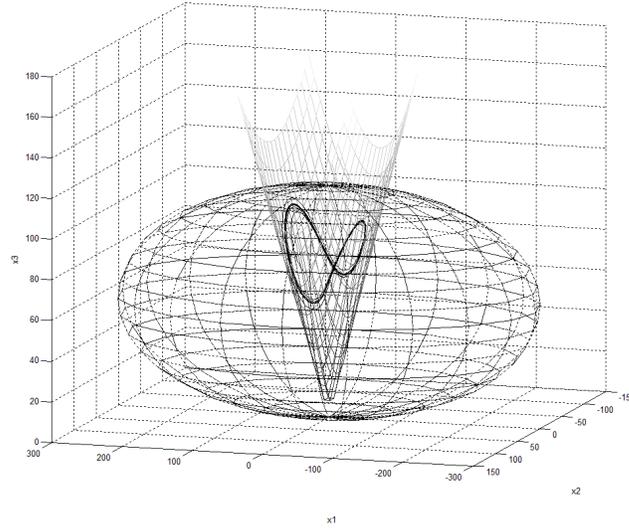
Por lo tanto, si  $(\sigma_1 - 1)^2 + (\sigma_1 - \beta_1)^2 > 0$  entonces obtenemos el conjunto de localización.

$$\begin{aligned} h_{6 \text{ inf}} &= 0, \text{ con } \left(1 - \frac{1}{\sigma_1}\right) \geq 0 \text{ y } \left(1 - \frac{\beta_1}{\sigma_1}\right) \geq 0 \\ h_{6 \text{ sup}} &= 0, \text{ con } \left(1 - \frac{1}{\sigma_1}\right) \leq 0 \text{ y } \left(1 - \frac{\beta_1}{\sigma_1}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Además, tenemos otra localización establecidos en forma de una superficie cuadrática

$$K(h_6) : = \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1} x_1^2 + \frac{1}{2\gamma_1} x_2^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1 + \gamma_1 \delta}{\sigma_1 \gamma_1}\right) x_3^2 = 0, \text{ con } \sigma_1 = \beta_1 = 1 \right\}. \quad (3.16)$$

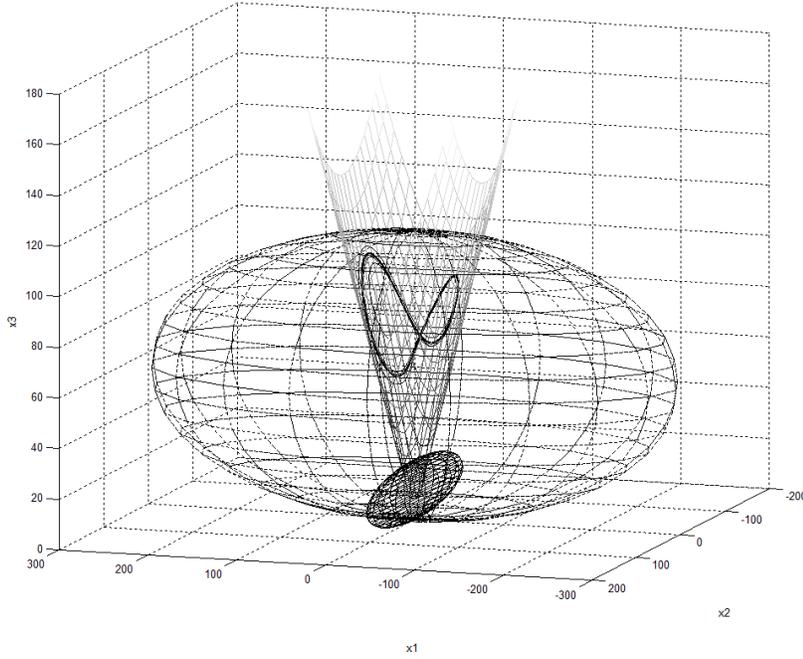
En la Figura 3.8 se muestra la proyección del atractor del sistema (3.2) dentro de la localización  $K(h_6)$  delimitando la localización  $K(h_1)$ .



**Figura 3.8:** Dinámica del sistema (3.2) en la localización  $K(h_6) \cap K(h_1)$ .

El teorema iterativo es una herramienta la cual permite delimitar la región donde se encuentran los conjuntos compactos invariantes a través de intersecciones. En la Figura 3.9, se aplica este teorema para delimitar la región de los conjuntos compactos  $K(h_1)$  con el conjunto  $K(h_6)$  y con el conjunto no-compacto  $K(h_4)$ . Esto significa, que dado  $K(h_4)$  es un conjunto vacío, al aplicar el teorema iterativo corta al conjunto  $K(h_1)$  y  $K(h_6)$  reduciendo la región de los conjuntos compactos del subsistema (3.2).

A continuación se presenta otra función localizadora,



**Figura 3.9:** Dinámica del sistema (3.2) en la localización  $K(h_1) \cap K(h_4) \cap K(h_6)$ .

**Paso 1:** Sea la función localizadora

$$h_7 = -\frac{(\gamma_1 + 1)}{2\sigma_1} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{\psi}{2} x_3^2 + x_3 \quad (3.17)$$

donde  $\psi = \frac{\sigma_1 + \delta(\gamma_1 + 1)}{\sigma_1}$ .

**Paso 2:** Entonces

$$L_f h_7 = (\gamma_1 + 1) x_1^2 - x_2^2 - \psi \beta_1 x_3^2 - \beta_1 x_3.$$

**Paso 3:** Siendo el conjunto  $S(h_7)$  es determinado por

$$x_1^2 = \frac{1}{(\gamma_1 + 1)} [x_2^2 + \psi \beta_1 x_3^2 + \beta_1 x_3].$$

**Paso 4:** Estableciendo la  $h_7 | S(h_7)$  de la siguiente manera

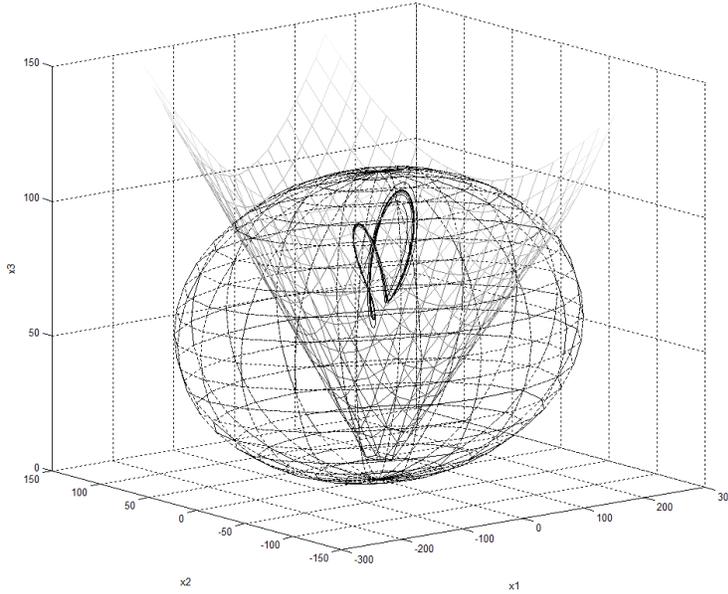
$$\begin{aligned} h_7 | S(h_7) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma_1}\right) x_2^2 + \frac{\psi}{2} \left(1 - \frac{\beta_1}{\sigma_1}\right) x_3^2 + \left(1 - \frac{\beta_1}{2\sigma_1}\right) x_3 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sigma_1}\right) x_2^2 + \frac{\psi}{2} \left(\frac{\sigma_1 - \beta_1}{\sigma_1}\right) \left[x_3 + \frac{2\sigma_1 - \beta_1}{2\psi(\sigma_1 - \beta_1)}\right]^2 - \frac{(2\sigma_1 - \beta_1)^2}{8\psi\sigma_1(\sigma_1 - \beta_1)} \end{aligned}$$

Entonces el conjunto localizado, viene dado por

$$\begin{aligned} K(h_7) &:= \left\{ \frac{(\gamma_1 + 1)}{2\sigma_1} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{\psi}{2} x_3^2 - x_3 \leq \lambda \mid 1 > \frac{1}{\sigma_1}, \sigma_1 > \beta_1 \right\}; \\ K(h_7) &:= \left\{ \frac{(\gamma_1 + 1)}{2\sigma_1} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{\psi}{2} x_3^2 - x_3 \geq \lambda \mid 1 < \frac{1}{\sigma_1}, \sigma_1 < \beta_1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $\lambda = \frac{(2\sigma_1 - \beta_1)^2}{8\psi\sigma_1(\sigma_1 - \beta_1)}$ .

En la Figura 3.10 se muestra la proyección del atractor del sistema (3.2) dentro de la localización  $K(h_7)$  delimitando la localización  $K(h_1)$ .



**Figura 3.10:** Dinámica del sistema (3.2) en la localización  $K(h_7) \cap K(h_1)$ .

Aquí aplicamos otra función localizadora:

**Paso 1:** Sea la función localizadora

$$h_8 = x_3 \quad (3.19)$$

**Paso 2:** Entonces el conjunto  $S(h_8)$  es dado por  $\beta_1 x_3 = x_1 x_2$ . Por lo tanto

$$h_8 |_{S(h_8) \cap K(h_1; r)} \leq \frac{2r}{\beta_1 \sqrt{\delta + 1}}.$$

**Paso 3:** Teniendo el conjunto de localización

$$K(h_8) = \left\{ | x_3 | \leq \frac{2r}{\beta_1 \sqrt{\delta + 1}} \right\}.$$

**Paso 4:** Que puede ser mejorado respecto a  $x_3$  por los valores

$$\beta_1 > \frac{r}{\sqrt{\delta + 1} [\gamma_1 (\delta + 1) + \sigma_1]}$$

como

$$K(h_1; r) \cap K(h_8) \subset \left\{ 0 \leq x_3 \leq x_{3, \text{máx}} := \frac{2r}{\beta_1 \sqrt{\delta + 1}} \right\}$$

A continuación se obtiene una nueva localización aplicando la condición

$$0 \leq x_3 \leq x_{3, \text{máx}}.$$

en la función localizadora (3.6), donde despues de derivar la función los nuevos valores asignados para  $A_1(q)$  y  $A_2$  son:

$$A_1(q) : = 2\sigma_2 + 2(\delta_1 + 1)\gamma_2 + q$$

$$A_2 : = 2\delta_2 + 2\delta_1\delta_4 + 2\delta_4.$$

Por lo tanto el conjunto  $S(h_2) \cap \{0 \leq x_3 \leq x_{3, \text{máx}}\}$  es contenido en el conjunto  $M$  definido por la desigualdad:

$$\frac{q^2}{8\beta_2} \geq 2\sigma_2 \left( | x_4 | + \frac{A_4(q)}{4\sigma_2} | x_5 | \right)^2 + \left[ 2(\delta_1 + 1)\gamma_3 - \frac{(A_4(q))^2}{8\sigma_2} \right] x_5^2 + 2\beta_2 \left( x_6 + \frac{q}{4\beta_2} \right)^2$$

donde  $A_4(q) = A_1(q) + x_{3, \text{máx}} A_2$ . Cumpliendo de la misma forma que  $q$  sea tal que cumpla con la nueva condición de  $A_1(q) \geq 0$ . Como resultado, se obtiene la siguiente proposición

**Proposición 4** *Suponer que  $q$  se selecciona de tal forma que se cumple la desigualdad  $A_1(q) \geq 0$  y*

$$A_3(q) := 2(\delta_1 + 1)\gamma_3 - \frac{(A_1(q) + x_{3, \text{máx}} A_2)^2}{8\sigma_2} > 0.$$

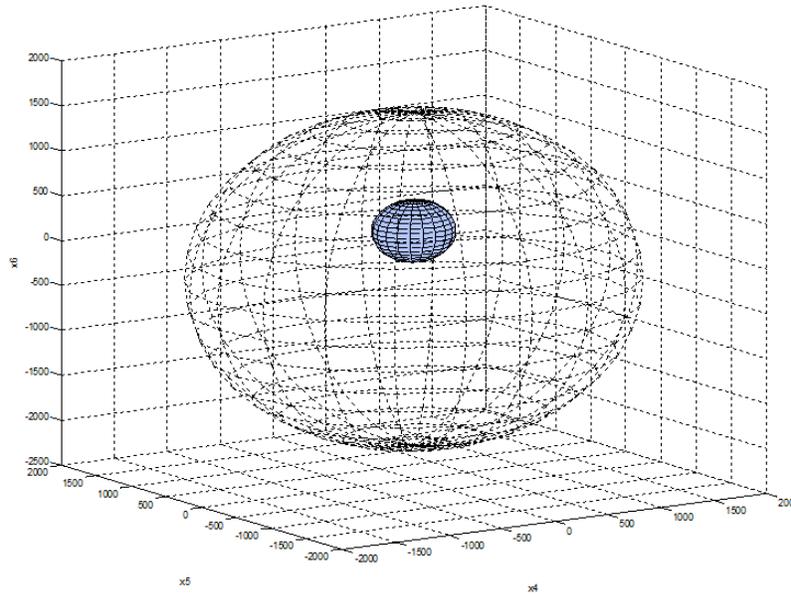
Luego el conjunto  $M$  es una elipsoide en  $R^3$ .

De este hecho se llega a la afirmación principal declarado como

**Teorema 6** *En las condiciones de la última proposición que establece que todos los conjuntos compactos invariantes del sistema (3.1) se encuentran contenidos en el conjunto  $K(h_1; r) \cap K(h_8)$ , con  $K(h_8) = \{h_8 \leq h_{8\text{sup}}\}$ , y el valor para  $h_{8\text{sup}}$  es estimado por :*

$$\begin{aligned} R_4 &:= \frac{q}{4\sqrt{\beta_2\sigma_2}} + \frac{A_1(q) + x_{3,\text{máx}}A_2}{8\sigma_2} \frac{q}{\sqrt{2\beta_2A_3(q)}}; \\ R_5 &:= \frac{q}{2\sqrt{2\beta_2A_3(q)}}; \\ h_{8\text{sup}} &\leq R_4^2 + (\delta_1 + 1)R_5^2 + \frac{q^2}{4\beta_2^2}. \end{aligned}$$

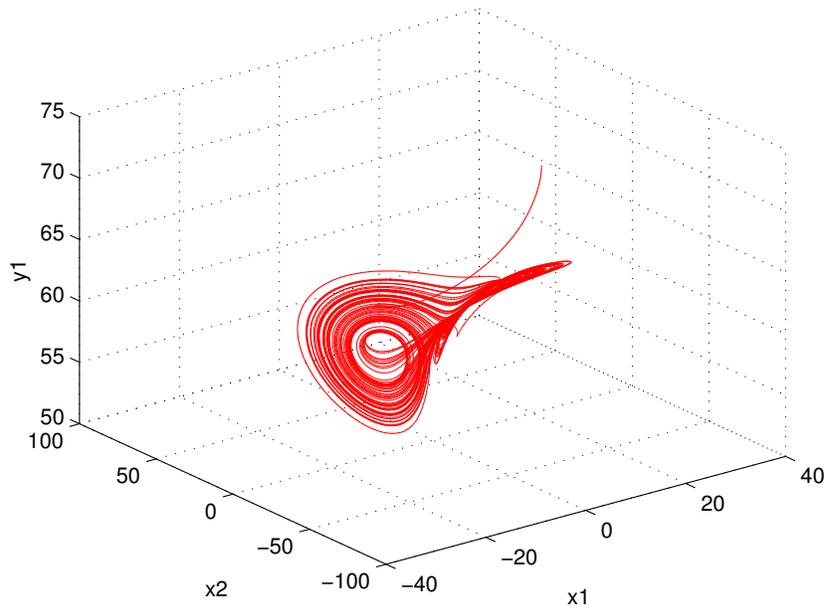
Cuando se tiene una superficie compacta la cual contiene la dinámica del sistema, se dice que se ha encontrado la solución al problema de localización de los conjuntos compactos invariantes, desconociendo lo que se encuentre en el exterior de dicha superficie como se observa en la Figura 3.4. Como se puede apreciar en la Figura 3.11 se logra tener la localización de los conjuntos compactos invariantes  $K(h_8)$ . La solución al problema de localización de  $K(h_8)$  es lo opuesto a delimitar la región de los conjuntos compactos, aqui se tiene una mayor región el cual contiene al conjunto  $K(h_2)$  que es donde se encuentran todos los conjuntos compactos invariantes del subsistema (3.3).



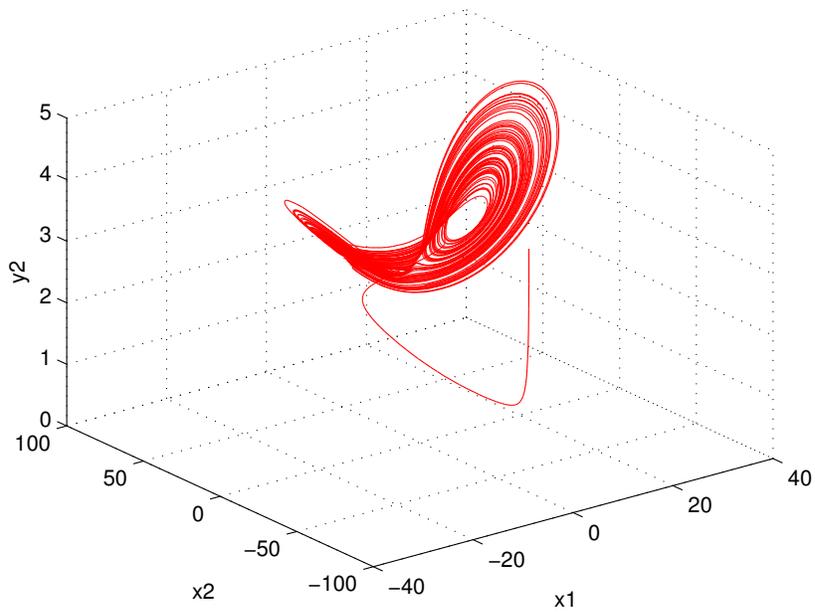
**Figura 3.11:** Dinámica del sistema (3.2) en la localización  $K(h_2) \cap K(h_8)$ .

### 3.4. Proyecciones del sistema (3.1)

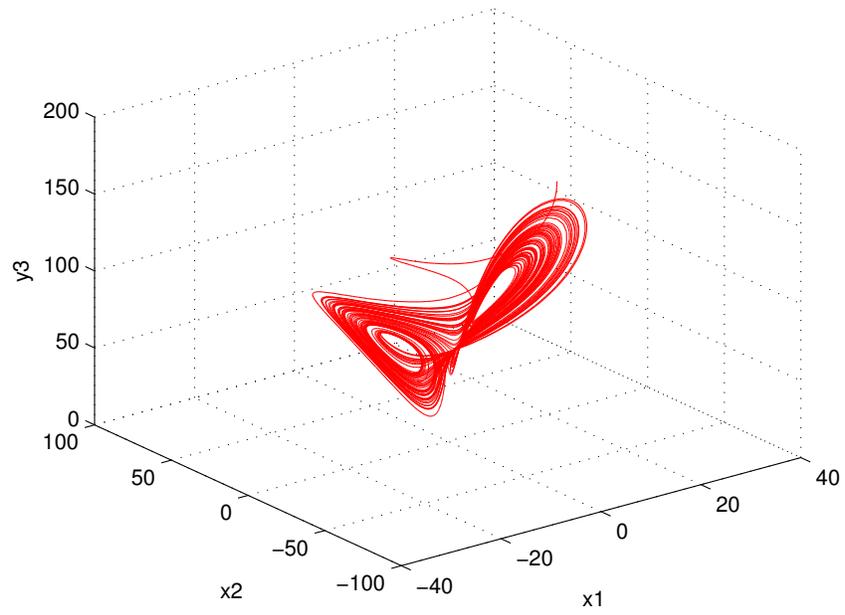
El sistema que se estudia es de seis dimensiones lo que hace imposible graficar el sistema. Por lo tanto se hacen simulaciones a las proyecciones del sistema, esto es para darnos una idea de cómo se comporta la dinámica del sistema. Se tiene un total de 20 proyecciones, de las cuales ya se han presentados dos de ellas. El simular proyecciones, es observar a través de un lente como se comporta la dinámica del sistema respecto las variables de estado comenzando de una condición inicial. El sistema que estamos estudiando involucra las variables  $x_1, \dots, x_6$ , solo para fines de simulación se decide hacer un cambio de variables, sea  $x_4 = y_1, x_5 = y_2$  y  $x_6 = y_3$  permaneciendo igual el resto de las variables de estado. Se utilizaron las mismas condiciones iniciales (14.99, 46.64, 166, 72, 3.07, 235.9).



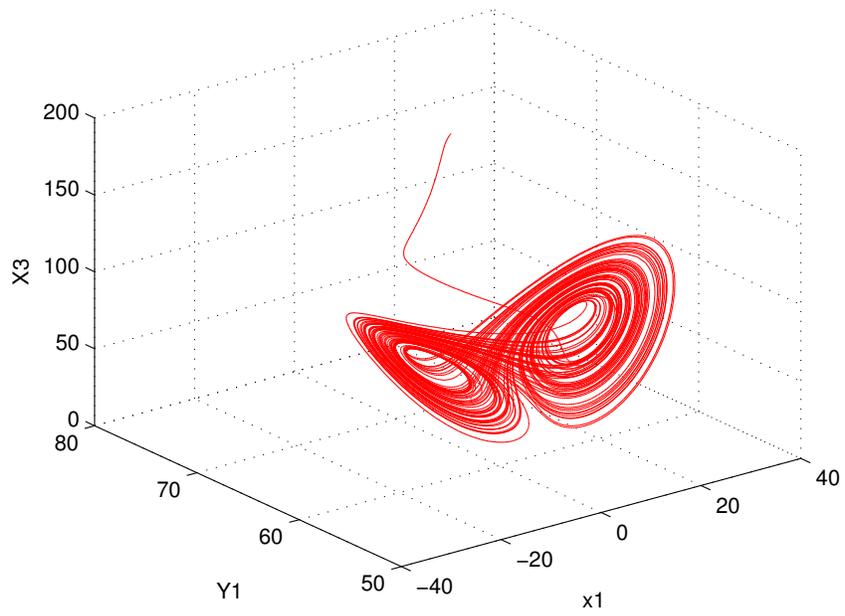
**Figura 3.12:** Proyección del sistema  $x_1, x_2, y_1$ .



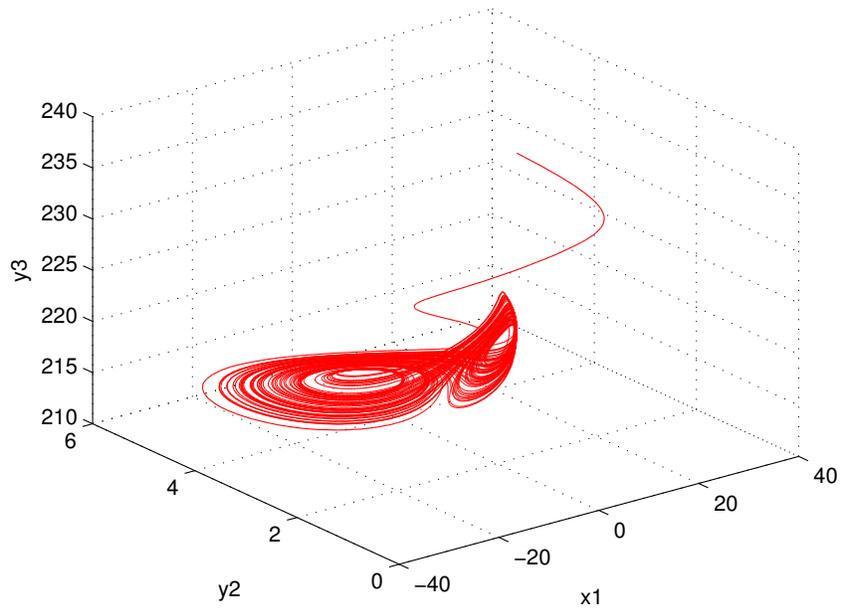
**Figura 3.13:** Proyección del sistema  $x_1, x_2, y_2$ .



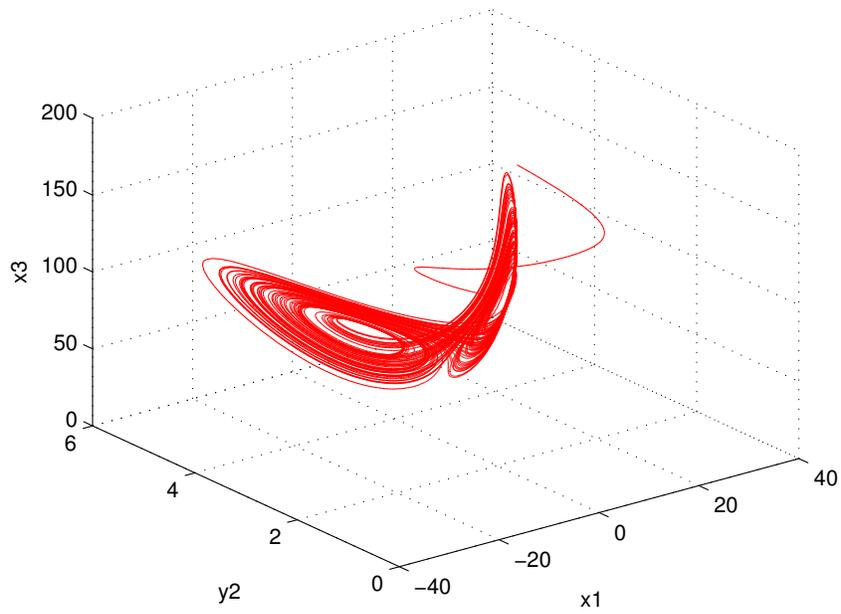
**Figura 3.14:** Proyección del sistema  $x_1, x_2, y_3$ .



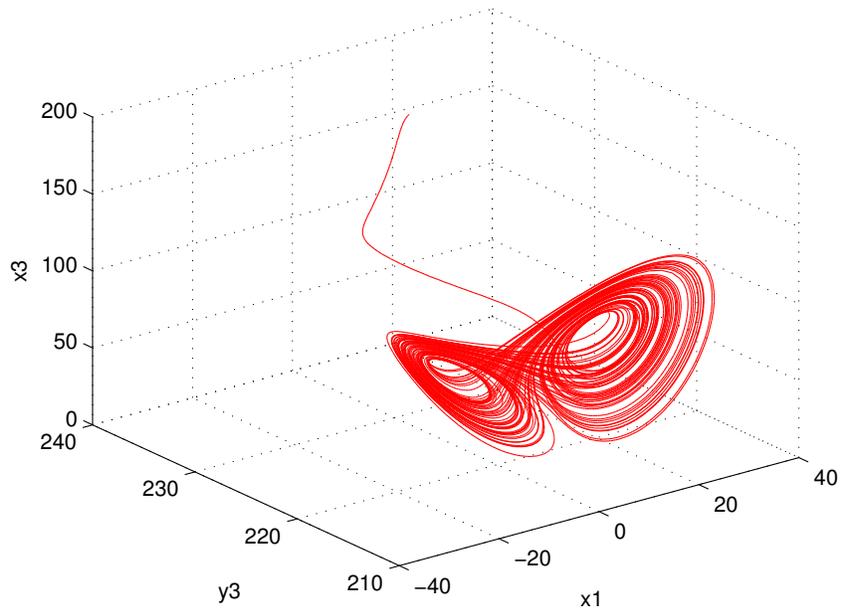
**Figura 3.15:** Proyección del sistema  $x_1, y_1, x_3$ .



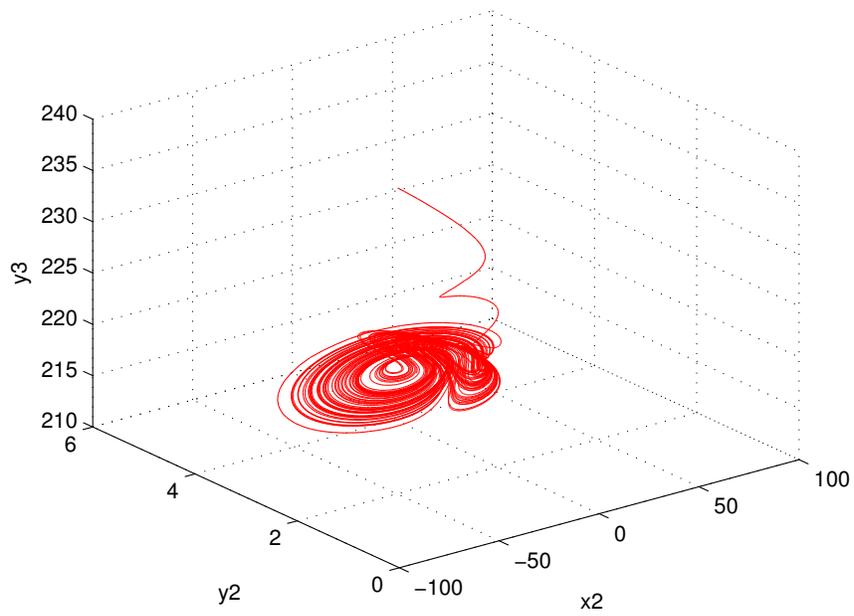
**Figura 3.16:** Proyección del sistema  $x_1, y_2, y_3$ .



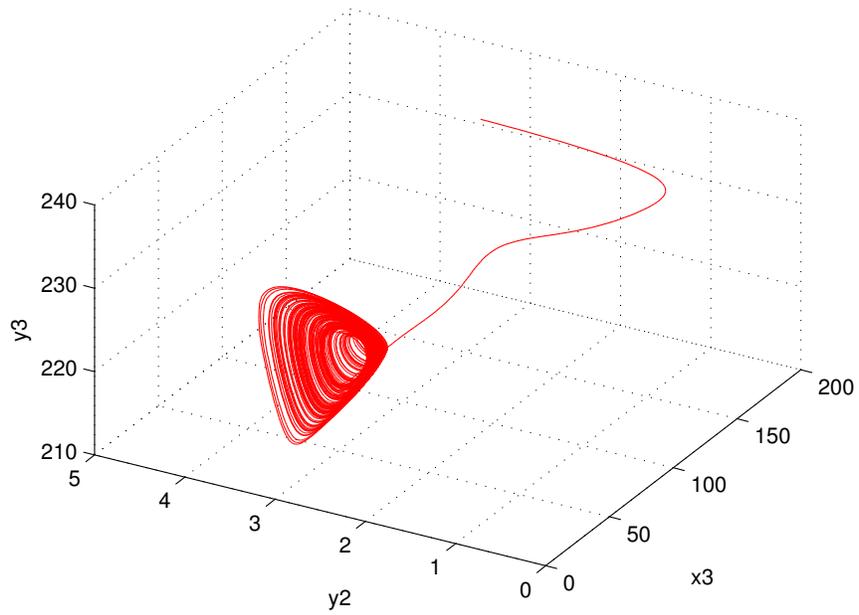
**Figura 3.17:** Proyección del sistema  $x_1, y_2, x_3$ .



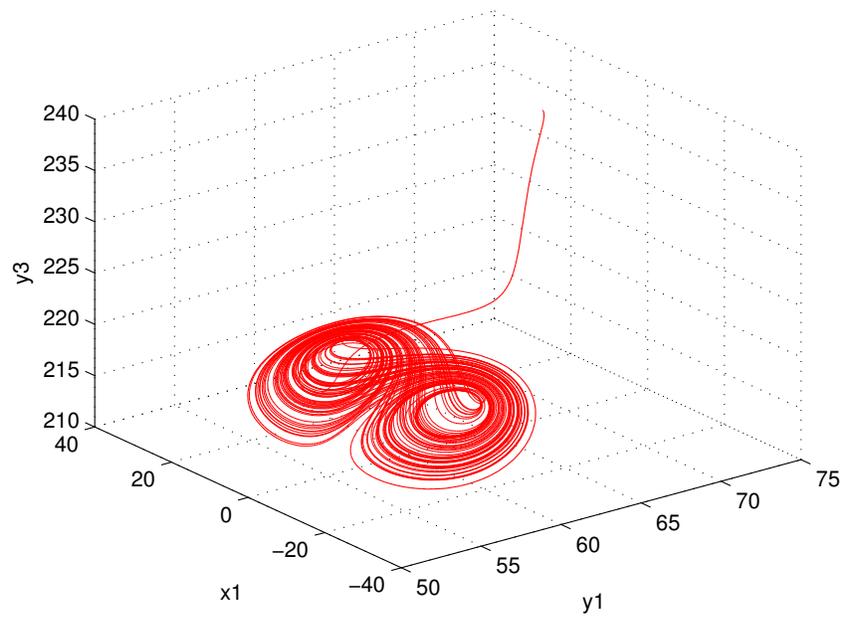
**Figura 3.18:** Proyección del sistema  $x_1, y_3, x_3$ .



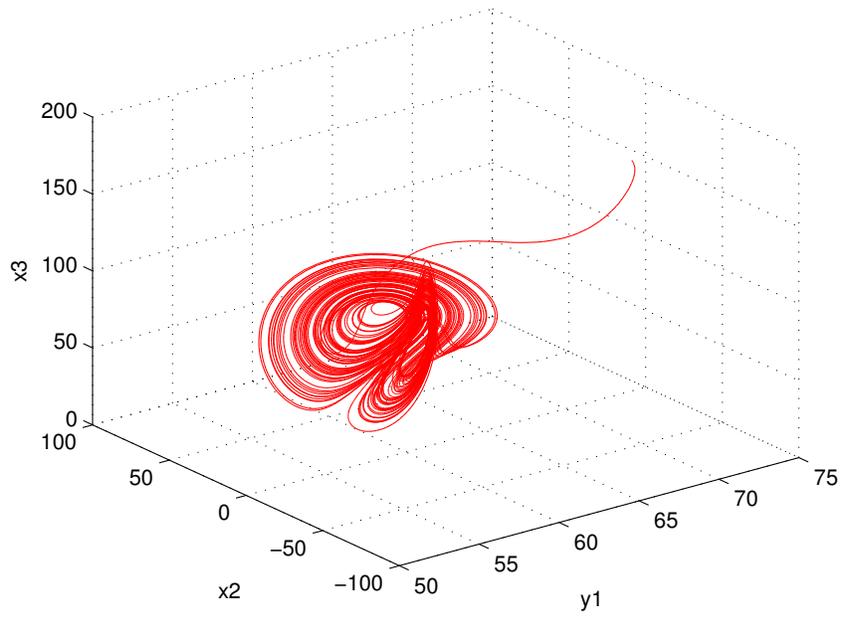
**Figura 3.19:** Proyección del sistema  $x_2, y_2, y_3$ .



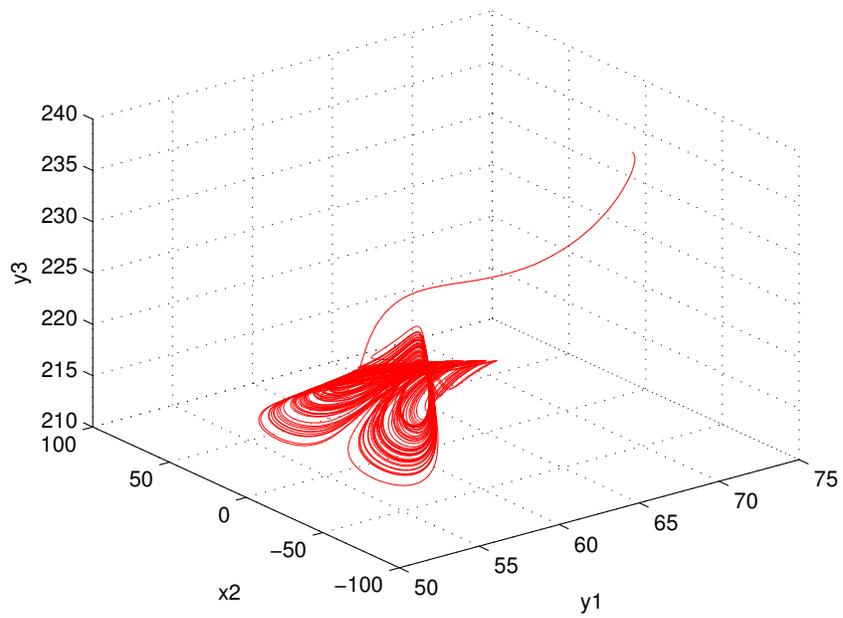
**Figura 3.20:** Proyección del sistema  $x_3, y_2, y_3$ .



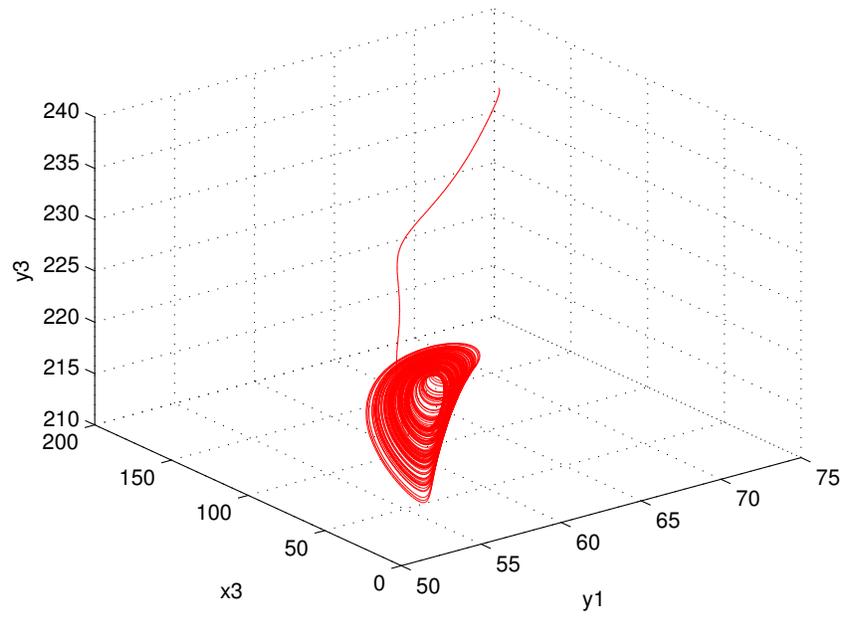
**Figura 3.21:** Proyección del sistema  $y_1, x_1, y_3$ .



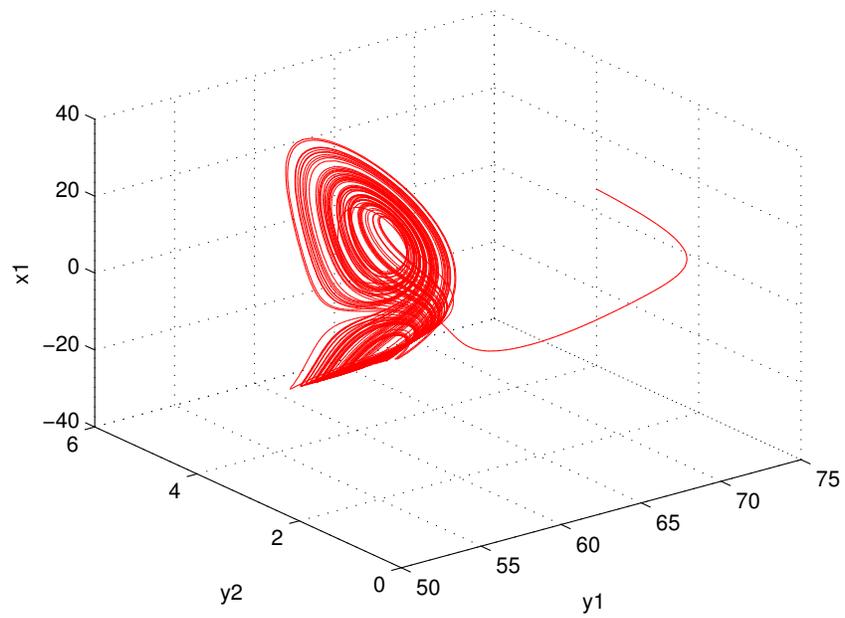
**Figura 3.22:** Proyección del sistema  $y_1, x_2, x_3$ .



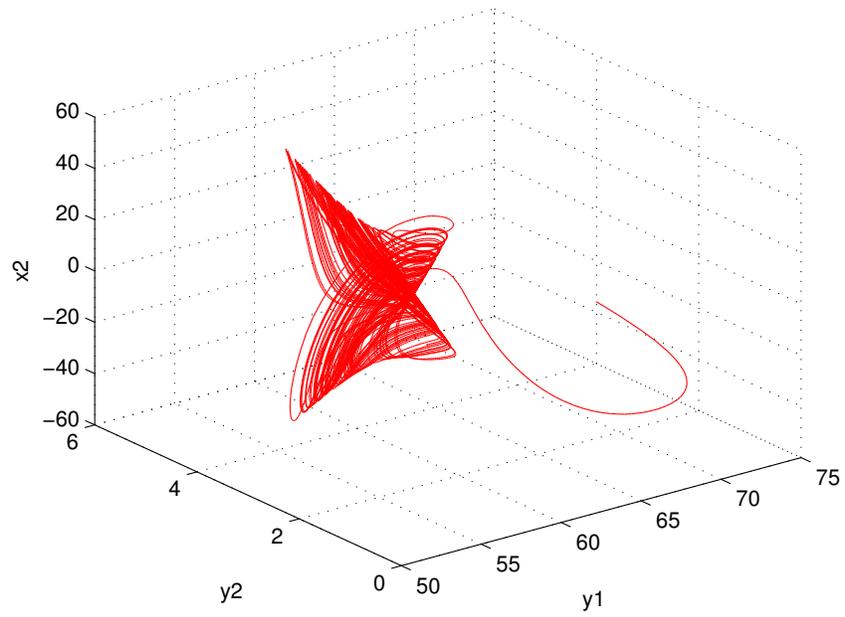
**Figura 3.23:** Proyección del sistema  $y_1, x_2, y_3$ .



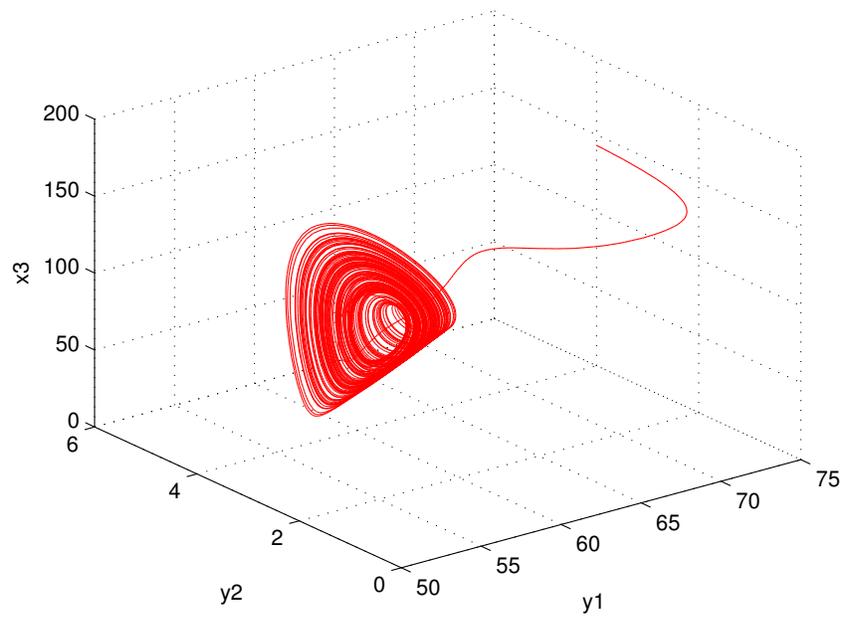
**Figura 3.24:** Proyección del sistema  $y_1, x_3, y_3$ .



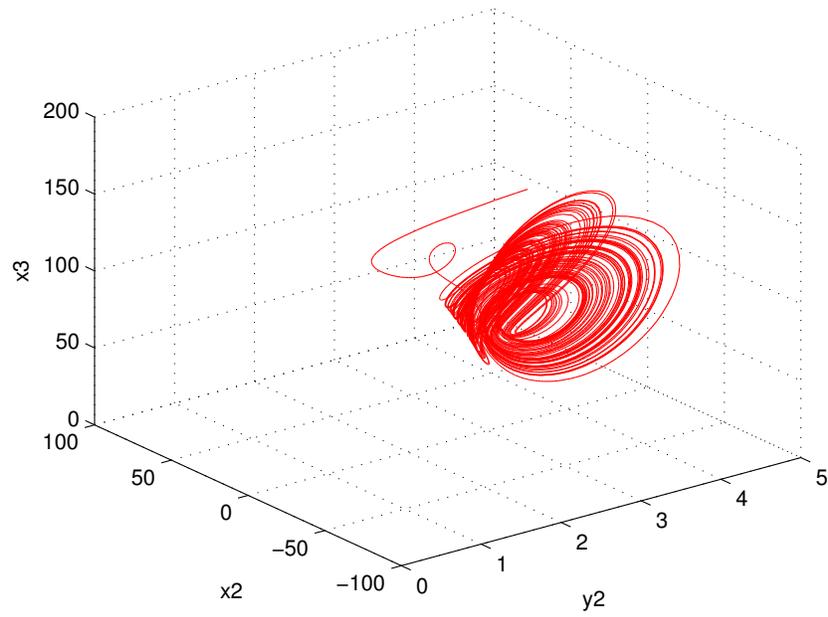
**Figura 3.25:** Proyección del sistema  $y_1, y_2, x_1$ .



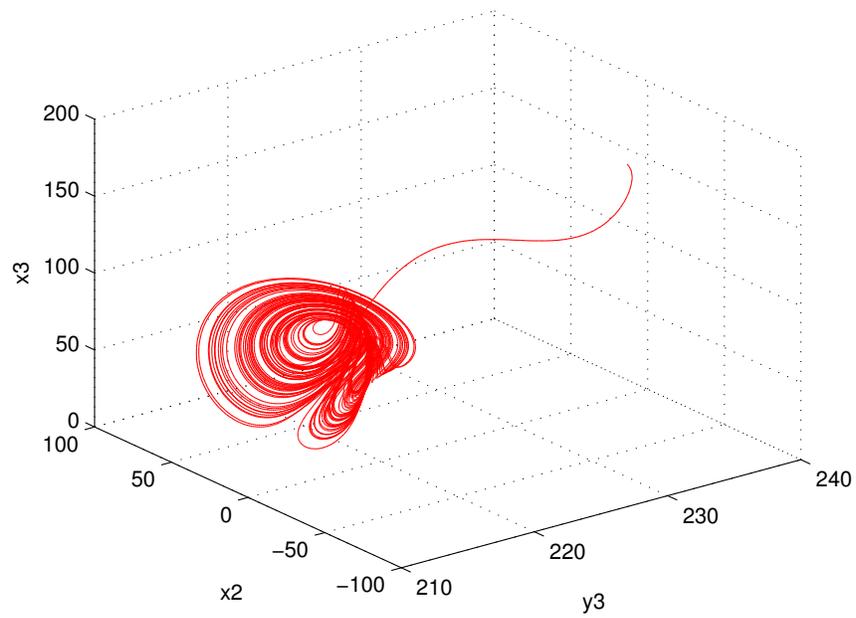
**Figura 3.26:** Proyección del sistema  $y_1, y_2, x_2$ .



**Figura 3.27:** Proyección del sistema  $y_1, y_2, x_3$ .



**Figura 3.28:** Proyección del sistema  $y_2, x_2, x_3$ .



**Figura 3.29:** Proyección del sistema  $y_3, x_2, x_3$ .

# Capítulo 4

## Puntos de equilibrio del sistema

Algunos elementos que se encuentran en el conjunto compacto invariante son las orbitas periódicas, orbitas heterocíclicas, orbitas homocíclicas, atractores y puntos de equilibrio. En esta sección se presenta todos los puntos de equilibrio que tiene el sistema (3.1) donde mediante el método indirecto de Lyapunov se analiza si el origen que es un punto de equilibrio del sistema (3.1) es asintóticamente estable. De manera adicional se presenta de manera general el polinomio característico del sistema (3.1) donde queda expresado en términos de las variables de estado.

A continuación se presentan todos los puntos de equilibrios que tiene el sistema (3.1), que sujeto a ciertas condiciones, estos serán números reales y no complejos.

### 4.1. Caso 1: El origen

Para encontrar los puntos de equilibrio, primero se deben igualar a cero las ecuaciones de estado de (3.2) como se muestra a continuación

$$-\sigma_1 x_1 + \sigma_1 x_2 + \delta x_2 x_3 = 0 \tag{4.1}$$

$$-x_1 x_3 + \gamma_1 x_1 - x_2 = 0 \tag{4.2}$$

$$x_1 x_2 - \beta_1 x_3 = 0. \tag{4.3}$$

#### 4.1.1. Caso: $x_1 = 0$ cuando $x_2 = x_3 \neq 0$ .

Sustituyendo el valor de  $x_1 = 0$  en las ecuaciones (4.1),(4.2) y (4.3) se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_1 x_2 + \delta x_2 x_3 = 0 \quad (4.4)$$

$$-x_2 = 0 \quad (4.5)$$

$$-\beta_1 x_3 = 0 \quad (4.6)$$

donde, despejando el valor de  $x_2$  de (4.5) y el valor de  $x_3$  de (4.6) se tienen que  $x_2 = 0$  y  $x_3 = 0$ , por lo tanto, se cumple la igualdad para (4.4).

#### 4.1.2. Caso: $x_2 = 0$ cuando $x_1 = x_3 \neq 0$ .

Sustituyendo el valor de  $x_1 = 0$  en las ecuaciones (4.1),(4.2) y (4.3), se tienen las siguientes ecuaciones:

$$-\sigma_1 x_1 = 0 \quad (4.7)$$

$$-x_1 x_3 + \gamma_1 x_1 = 0 \quad (4.8)$$

$$-\beta_1 x_3 = 0 \quad (4.9)$$

donde, despejando el valor de  $x_1$  de (4.7) y el valor de  $x_3$  de (4.9) se tienen que  $x_1 = 0$  y  $x_3 = 0$ , por lo tanto, se cumple la igualdad para (4.8).

Presentandose este caso, el sistema (3.3) queda de la siguiente manera:

$$-\sigma_2 x_4 + \sigma_2 x_5 + \delta_1 x_5 x_6 + \delta_2 x_5 x_3 = 0 \quad (4.10)$$

$$-x_4 x_6 + \gamma_2 x_4 - \gamma_3 x_5 + \delta_4 x_3 x_4 = 0 \quad (4.11)$$

$$x_4 x_5 - \beta_2 x_6 = 0 \quad (4.12)$$

#### 4.1.3. Caso: $x_4 = 0$ cuando $x_3 = x_5 = x_6 \neq 0$ .

Sustituyendo el valor de  $x_4 = 0$  en las ecuaciones (4.1),(4.2) y (4.3), se tienen las siguientes ecuaciones:

$$-\sigma_2 x_5 + \delta_1 x_5 x_6 + \delta_2 x_5 x_3 = 0 \quad (4.13)$$

$$-\gamma_3 x_5 = 0 \quad (4.14)$$

$$-\beta_2 x_6 = 0 \quad (4.15)$$

donde, despejando el valor de  $x_5$  de (4.14) y el valor de  $x_6$  de (4.15) se tienen que  $x_5 = 0$  y  $x_6 = 0$ , por lo tanto, se cumple la igualdad para (4.13).

#### 4.1.4. Caso: $x_5 = 0$ cuando $x_3 = x_4 = x_6 \neq 0$ .

Sustituyendo el valor de  $x_5 = 0$  en las ecuaciones (4.1),(4.2) y (4.3), se tienen las siguientes ecuaciones:

$$-\sigma_2 x_4 = 0 \quad (4.16)$$

$$-x_4 x_5 + \gamma_2 x_4 + \delta_4 x_3 x_4 = 0 \quad (4.17)$$

$$-\beta_2 x_6 = 0 \quad (4.18)$$

donde, despejando el valor de  $x_4$  de (4.16) y el valor de  $x_6$  de (4.18) se tienen que  $x_4 = 0$  y  $x_6 = 0$ , por lo tanto, se cumple la igualdad para (4.17).

Otros casos, donde se logra tener al origen como punto de equilibrio son:

- Caso:  $x_3 = 0, x_1 = x_2 \neq 0, x_4 = x_5 = x_6 = 0$
- Caso:  $x_3 \neq 0, x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$
- Caso:  $x_6 = 0, x_3 = x_4 = x_5 \neq 0, x_1 = x_2 = 0$

## 4.2. Caso 2: $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0, x_4 = x_5 = x_6 = 0$ .

Despejando  $x_2$  de (4.2) se tiene

$$x_2 = -x_1 x_3 + \gamma_1 x_1. \quad (4.19)$$

Ahora sustituimos el valor de la variable  $x_2$  en (4.1), llegando a

$$-\sigma_1 x_1 + \sigma_1(-x_1 x_3 + \gamma_1 x_1) + \delta(-x_1 x_3 + \gamma_1 x_1)x_3 = 0.$$

Se observa que la variable común es  $x_1$ , entonces se agrupan términos teniendo la siguiente ecuación:

$$-x_1[\delta x_3^2 + x_3(\sigma_1 - \delta\gamma_1) + (\sigma_1 - \sigma_1\gamma_1)] = 0.$$

La variable  $x_1$  pasa dividiendo al otro lado de la ecuación eliminandola, quedando solo una ecuación cuadrática de la variable  $x_3$ . Entonces se resuelve la ecuación y se tienen los siguientes valores:

$$x_3 = \pm \frac{1}{2\delta} \left[ (\delta\gamma_1 - \sigma_1) \pm \sqrt{(\sigma_1 - \delta\gamma_1)^2 - (\sigma_1 - \sigma_1\gamma_1)} \right] = x_{3\pm} \quad (4.20)$$

Implicando que  $x_{3\pm}$  tiene dos valores reales de misma nominación pero con signos opuestos, asegurando que  $x_{3\pm} \in R$  si

$$(\sigma_1 - \delta\gamma_1)^2 \geq (\sigma_1 - \sigma_1\gamma_1). \quad (4.21)$$

Ahora, sustituyendo (4.19) y (4.20) en (4.3) se llega a

$$x_1(-x_1x_{3\pm} + \gamma_1x_1) - \beta_1x_{3\pm} = 0.$$

Despejando la variable  $x_1$ , se tiene el siguiente resultado.

$$x_{1\pm} = \pm \sqrt{\frac{\beta_1x_{3\pm}}{\gamma_1 - x_{3\pm}}}.$$

Se observa que para asegurar que ambos valores de  $x_1$  sean reales se debe de cumplir las siguientes condiciones:

$$\gamma_1 > x_{3\pm} \quad (4.22)$$

$$x_{3\pm} > 0. \quad (4.23)$$

#### 4.2.1. Caso: $x_{3-}$ .

Si  $\gamma_1 > x_{3-}$  y  $x_{3-} > 0$  entonces  $x_{1\pm}$  existe en el conjunto de los reales  $R$ , siendo  $x_{3-}$  un valor negativo que puede tomar  $x_3$ .

#### 4.2.2. Caso: $x_{3+}$ .

Para  $\gamma_1 > x_{3+}$  y  $x_{3+} > 0$  entonces  $x_{1\pm}$  existe en el conjunto de los reales  $R$ , siendo  $x_{3+}$  un valor positivo que puede tomar  $x_3$ .

### 4.2.3. Caso: $x_{3-}$ y $x_{3+}$ .

Si cumplen con (4.22) y (4.23) entonces  $x_{1\pm}$  también existe en el conjunto de los reales  $R$ , siendo  $x_{3-}$  y  $x_{3+}$  dos valores, como positivos y negativos que puede tomar  $x_3$

Por lo tanto para el caso  $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0, x_4 = x_5 = x_6 = 0$ . podemos concluir que  $x_{3\pm} \in R$  si cumple con (4.21) llegando a tener  $x_{1\pm}$ , entonces

$$x_{2\pm} = -x_{1\pm}x_{3\pm} + \gamma_1x_{1\pm}$$

En el sistema (3.3) se observa que está involucrada la variable  $x_3$  perteneciente al sistema (3.2). Esto indica que se debe de considerar a los casos en función de  $x_3$  ya que afecta al sistema. Entonces se comenzará analizando el caso 3.

### 4.3. Caso 3: $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = x_5 = x_6 \neq 0$ .

Se despeja la variable  $x_5$  de la ecuación (4.11) teniendo el siguiente resultado:

$$x_5 = \frac{-x_4x_6 + \gamma_2x_4}{\gamma_3}.$$

La variable  $x_5$  despejada se substituye en la ecuación (4.10) teniendo la siguiente expresión:

$$-\sigma_2x_4 + \sigma_2 \left( \frac{-x_4x_6 + \gamma_2x_4}{\gamma_3} \right) + \delta_1 \left( \frac{-x_4x_6 + \gamma_2x_4}{\gamma_3} \right) x_6 = 0.$$

Se observa que la variable común en la ecuación es  $x_4$ , por lo tanto se pasa a agrupar términos teniendo la siguiente ecuación:

$$\frac{x_4}{-\gamma_3} (\delta_1x_6^2 - x_6(\delta_1\gamma_2 - \sigma_2) - (\sigma_2\gamma_2 - \gamma_3\sigma_2)) = 0,$$

lo que implica que  $x_4 = 0$  es una solución lineal y que tiene:

$$(\delta_1x_6^2 - x_6(\delta_1\gamma_2 - \sigma_2) - (\sigma_2\gamma_2 - \gamma_3\sigma_2)) = 0,$$

Entonces se resuelve la ecuación y se tienen los siguientes valores.

$$x_{6\pm} = \frac{1}{2\delta_1} \left[ (\delta_1\gamma_2 - \sigma_2) \pm \sqrt{(\delta_1\gamma_2 - \sigma_2)^2 + 4\delta_1(\sigma_2\gamma_2 - \gamma_3\sigma_2)} \right]$$

Para que la variable  $x_{6\pm}$  tenga tres posibles valores que pertenecen al dominio de los reales, se deben de cumplir las siguientes condiciones,

$$(\delta_1\gamma_2 - \sigma_2)^2 + 4\delta_1\sigma_2\gamma_2 > -4\delta_1\gamma_3\sigma_2 \quad (4.24)$$

$$(\delta_1\gamma_2 - \sigma_2)^2 + 4\delta_1\sigma_2\gamma_2 = -4\delta_1\gamma_3\sigma_2 \quad (4.25)$$

Esto también asegura que  $x_{6\pm} \in R$ .

**Analizando los valores de  $x_{6\pm}$  presentándose la condición (4.24).**

Se substituye los valores de  $x_{6\pm}$  en la ecuación (4.12) así como también en la ecuación  $x_5$  despejada, teniendo la siguiente ecuación.

$$x_4 \left[ \frac{-x_4x_{5\pm} + \gamma_2x_4}{\gamma_3} \right] - \beta_2x_{6\pm} = 0$$

Despejando la variable  $x_4$  tenemos el siguiente resultado.

$$x_{4\pm} = \pm \sqrt{\frac{\gamma_3\beta_2x_{6\pm}}{\gamma_2 - x_{6\pm}}}.$$

Para que la variable  $x_{4\pm}$  tenga dos valores que pertenecen al dominio de los reales, se debe de cumplir ambas condiciones:

$$\gamma_2 > x_{6\pm} \quad (4.26)$$

$$x_{6\pm} > 0 \quad (4.27)$$

generando los siguientes casos,

**Caso:**  $x_{6-}$ .

Si  $\gamma_2 > x_{6-}$  y  $x_{6-} > 0$  entonces  $x_{4\pm}$  existe en el conjunto de los reales  $R$ , siendo  $x_{6-}$  un valor negativo que puede tomar  $x_6$ .

**Caso:**  $x_{6+}$ .

Para  $\gamma_2 > x_{6+}$  y  $x_{6+} > 0$  entonces  $x_{4\pm}$  existe en el conjunto de los reales  $R$ , siendo  $x_{6+}$  un valor positivo que puede tomar  $x_6$ .

**Caso:**  $x_{6-}$  y  $x_{6+}$ .

Si cumplen con (4.26) y (4.27) entonces  $x_{4\pm}$  también existe en el conjunto de los reales  $R$ , siendo  $x_{6-}$  y  $x_{6+}$  dos valores positivos y negativos que puede tomar  $x_6$ .

Por lo tanto podemos concluir que  $x_{6\pm} \in R$  si cumple con (4.24) llegando a tener  $x_{4\pm}$  si cumple con (4.27), entonces

$$x_{5\pm} = \frac{-x_{4\pm}x_{6\pm} + \gamma_2x_{4\pm}}{\gamma_3}$$

**Analizando los valores de  $x_{6\pm}$  presentándose la condición (4.25).**

Se realiza el mismo procedimiento de la condición (4.24), la diferencia que ahora se tiene un valor y es positivo. En esta condición se tendrá un valor de  $x_6 = x_{6*}$ .

$$x_4 \left[ \frac{-x_4x_{5*} + \gamma_2x_4}{\gamma_3} \right] - \beta_2x_{6*} = 0$$

Despejando la variable  $x_4$  tenemos el siguiente resultado.

$$x_{4*\pm} = \pm \sqrt{\frac{\gamma_3\beta_2x_{6*}}{\gamma_2 - x_{6*}}}$$

Para que la variable  $x_{4*\pm}$  tenga dos valores que pertenecen al dominio de los reales, se debe de cumplir la siguiente condición:

$$\gamma_2 > x_{6*} \tag{4.28}$$

Por lo tanto podemos concluir que  $x_{6\pm} \in R$  si cumple con (4.25) llegando a tener  $x_{4\pm}$  si cumple con (4.28), entonces

$$x_{5\pm} = \frac{-x_{4\pm}x_{6*} + \gamma_2x_{4\pm}}{\gamma_3}$$

#### 4.4. Caso 4: $x_3 = x_{3\pm}$ .

En este caso la variable  $x_{3\pm}$  es una constante que puede adquirir dos valores reales teniendo la condición (4.21). Entonces para encontrar los puntos de equilibrio, primero se debe de

igual a cero las ecuaciones de estado del sistema (3.3) como se muestra a continuación:

$$-\sigma_2 x_4 + \sigma_2 x_5 + \delta_1 x_5 x_6 + \delta_2 x_5 x_{3\pm} = 0 \quad (4.29)$$

$$-x_4 x_6 + \gamma_2 x_4 - \gamma_3 x_5 + \delta_4 x_4 x_{3\pm} = 0 \quad (4.30)$$

$$x_4 x_5 - \beta_2 x_6 = 0 \quad (4.31)$$

Se despeja la variable  $x_6$  de la ecuación (4.31) teniendo el siguiente despeje de la variable:

$$x_6 = -\frac{x_4 x_5}{\beta_2}$$

Ahora se substituye el valor de variable  $x_6$  despejada en la ecuación (4.29) teniendo la siguiente expresión matemática :

$$-\sigma_2 x_4 + \sigma_2 x_5 + \delta_1 x_5 \left( -\frac{x_4 x_5}{\beta_2} \right) + \delta_2 x_5 x_{3\pm} = 0$$

Se agrupan términos y se despeja la variable  $x_4$  teniendo la siguiente ecuación:

$$x_4 = -\frac{x_5 \theta_{\pm}}{\delta_1 x_5^2 - \sigma_2 \beta_2}$$

donde  $\theta_{\pm} = \sigma_2 + \delta_2 x_{3\pm}$ . El cambio de variable presentado ayuda a la simplificación de desarrollo matemático durante este análisis.

Continuando con el desarrollo matemático, se substituyen las variables  $x_6$ ,  $x_4$  en la ecuación (4.30) y la variable  $x_4$  se substituye en  $x_6$  teniendo la siguiente expresión matemática:

$$-\left( -\frac{x_5 \theta_{\pm} \beta_2}{\delta_1 x_5^2 - \sigma_2 \beta_2} \right) \left[ -\left( -\frac{x_5 \theta_{\pm}}{\delta_1 x_5^2 - \sigma_2 \beta_2} \right) x_5 \right] + \gamma_2 \left( -\frac{x_5 \theta_{\pm} \beta_2}{\delta_1 x_5^2 - \sigma_2 \beta_2} \right) + x_5 \rho_{\pm} = 0$$

donde  $\rho_{\pm} = \delta_4 x_{3\pm} - \gamma_3$ . Desarrollando la expresión matemática y agrupando términos en común tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{(\delta_1 x_5^2 - \sigma_2 \beta_2)^2} [x_5^5 \rho_{\pm} \delta_1^2 - x_5^3 (\delta_1 \theta_{\pm} \beta_2 \gamma_2 + 2 \rho_{\pm} \delta_1 \sigma_2 \beta_2 + \theta_{\pm}^2 \beta_2) + x_5 (\sigma_2 \beta_2^2 \theta_{\pm} \gamma_2 + \rho_{\pm} \sigma_2^2 \beta_2^2)] = 0.$$

El término  $\frac{1}{(\delta_1 x_5^2 - \sigma_2 \beta_2)^2}$  pasa dividiendo al otro lado de la ecuación eliminándolo, teniendo una ecuación en función de la variable  $x_5$ . Simplificando la ecuación tenemos la siguiente expresión, donde la variable  $x_5$  es el término en común por lo que pasa al otro lado dividiendo.

$$x_5^4 \rho_{\pm} \delta_1^2 - x_5^2 (\delta_1 \theta_{\pm} \beta_2 \gamma_2 + 2 \rho_{\pm} \delta_1 \sigma_2 \beta_2 + \theta_{\pm}^2 \beta_2) + (\sigma_2 \beta_2^2 \theta_{\pm} \gamma_2 + \rho_{\pm} \sigma_2^2 \beta_2^2) = 0$$

donde  $\xi_{\pm} = \delta_1 \theta_{\pm} \beta_2 \gamma_2 + 2\rho_{\pm} \delta_1 \sigma_2 \beta_2 + \theta_{\pm}^2 \beta_2$ . Resolviendo la ecuación para  $x_5$  se tiene el siguiente resultado:

$$x_{5\pm} = \frac{1}{2\rho_{\pm}\delta_1} \left( \xi_{\pm} \pm \sqrt{\xi_{\pm}^2 - 4\rho_{\pm}\delta_1^2(\sigma_2\beta_2^2\theta_{\pm}\gamma_2 + \rho_{\pm}\sigma_2^2\beta_2^2)} \right)$$

Para que la variable  $x_{5\pm}$  tenga 3 posibles valores que pertenecen al dominio de los reales, se deben de cumplir estas condiciones, esto asegura que  $x_{5\pm} \in R$  :

$$\xi_{\pm}^2 > 4\rho_{\pm}\delta_1^2(\sigma_2\beta_2^2\theta_{\pm}\gamma_2 + \rho_{\pm}\sigma_2^2\beta_2^2) \quad (4.32)$$

$$\xi_{\pm}^2 = 4\rho_{\pm}\delta_1^2(\sigma_2\beta_2^2\theta_{\pm}\gamma_2 + \rho_{\pm}\sigma_2^2\beta_2^2). \quad (4.33)$$

**Analizando los valores de  $x_{5\pm}$  presentándose la condición (4.32).**

Se substituye los valores de  $x_{5\pm}$  en la variable  $x_4$  despejada:

$$x_{4\pm} = -\frac{x_{5\pm}\theta_{\pm}}{\delta_1 x_{5\pm}^2 - \sigma_2 \beta_2}$$

Ahora ambos valores se substituyen en la variable  $x_6$  despejada, quedando de la siguiente manera:

$$x_{6\pm} = -\frac{x_{4\pm}x_{5\pm}}{\beta_2}$$

**Analizando los valores de  $x_{5\pm}$  presentándose la condición (4.33).**

Se realiza el mismo procedimiento de la condición (4.32) , la diferencia que ahora se tiene un valor y es positivo. En esta condición se tendra un valor de  $x_5 = x_{5*}$  .

$$x_{4\pm} = -\frac{x_{5*}\theta_{\pm}}{\delta_1 y_{2*}^2 - \sigma_2 \beta_2}$$

Ahora ambos valores se substituyen en la variable  $x_6$  despejada, quedando de la siguiente manera:

$$x_{6\pm} = -\frac{x_{4\pm}x_{5*}}{\beta_2}$$

## 4.5. Resumen acerca de los puntos de equilibrios encontrados

Entonces podemos decir que se tienen los siguientes puntos de equilibrio si:

1. Un punto de equilibrio del sistema es el origen.
2. Considerando que  $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ , y satisfaciendo las condiciones (4.21),(4.22) y (4.23) tenemos los siguientes puntos de equilibrio.

$$x_{3\pm} = \frac{1}{2\delta} \left[ (\delta\gamma_1 - \sigma_1) \pm \sqrt{(\sigma_1 - \delta\gamma_1)^2 - (\sigma_1 - \sigma_1\gamma_1)} \right]$$

$$x_{1\pm} = \pm \sqrt{\frac{\beta_1 x_{3\pm}}{\gamma_1 - x_{3\pm}}}$$

$$x_{2\pm} = -x_{1\pm}x_{3\pm} + \gamma_1 x_{1\pm}$$

3. Tomando la consideración que  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  y satisfaciendo las condiciones (4.24),(4.26) y (4.27) se tiene los siguientes puntos de equilibri:

$$x_{6\pm} = \frac{1}{2\delta_1} \left[ (\delta_1\gamma_2 - \sigma_2) \pm \sqrt{(\delta_1\gamma_2 - \sigma_2)^2 + 4\delta_1(\sigma_2\gamma_2 - \gamma_3\sigma_2)} \right]$$

$$x_{4\pm} = \pm \sqrt{\frac{\gamma_3\beta_2 x_{6\pm}}{\gamma_2 - x_{6\pm}}}$$

$$x_{5\pm} = \frac{-x_{4\pm}x_{6\pm} + \gamma_2 x_{4\pm}}{\gamma_3}$$

4. Tomando la consideración que  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .y satisfaciendo las condiciones (4.25) y (4.28) se tiene los siguientes puntos de equilibrio.

$$x_{4*\pm} = \pm \sqrt{\frac{\gamma_3\beta_2 x_{6*}}{\gamma_2 - x_{6*}}}$$

$$x_{6*} = \frac{1}{2\delta_1} [(\delta_1\gamma_2 - \sigma_2)]$$

$$x_{5\pm} = \frac{-x_{4*\pm}x_{6*} + \gamma_2 x_{4*\pm}}{\gamma_3}$$

5. Ahora considerando el caso de que  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_{3\pm}$  y considerando la condición (4.32)

$$x_{5\pm} = \frac{1}{2\rho_{\pm}\delta_1} \left( \xi_{\pm} \pm \sqrt{\xi_{\pm}^2 - 4\rho_{\pm}\delta_1^2(\sigma_2\beta_2^2\theta_{\pm}\gamma_2 + \rho_{\pm}\sigma_2^2\beta_2^2)} \right)$$

$$x_{4\pm} = -\frac{x_{5\pm}\theta_{\pm}}{\delta_1 x_{5\pm}^2 - \sigma_2\beta_2}$$

$$x_{6\pm} = -\frac{x_{4\pm}x_{5\pm}}{\beta_2}$$

6. Ahora considerando el caso de que  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_{3\pm}$  y consirando la condicion (4.33)

$$x_{4\pm} = -\frac{x_{5\pm}\theta_{\pm}}{\delta_1 x_{5\pm}^2 - \sigma_2\beta_2}$$

$$x_{6\pm} = -\frac{x_{4\pm}x_{5\pm}}{\beta_2}$$

$$x_{5\pm} = \frac{1}{2\rho_{\pm}\delta_1} \xi_{\pm}$$

# Capítulo 5

## Estudio de estabilidad

La estabilidad es una propiedad cualitativa de los sistemas dinámicos a la que cabe considerar como la más importante de todas. Ello es debido a que, en la práctica, todo sistema debe ser estable. Si un sistema (3.1) no es estable, normalmente carece de todo interés y utilidad. En esta sección se presenta estabilidad asintótica mediante el teorema de Lyapunov.

### 5.1. Linealizando el sistema para el modelo de seis dimensiones

Para saber si se tiene estabilidad alrededor del punto de equilibrio se decide linealizar el sistema (3.1) al alrededor del origen. Siguiendo el método indirecto de Lyapunov, primero se obtiene el Jacobiano del sistema (3.1) y se evalúa en el origen resultando la siguiente matriz:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\sigma_1 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & -\gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de  $\Phi$  son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_1^2 - 2\sigma_1 + 4\sigma_1\gamma_1 + 1} - \frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_1^2 - 2\sigma_1 + 4\sigma_1\gamma_1 + 1} - \frac{1}{2}, \\ \lambda_3 &= -\beta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= -\beta_2, \\
\lambda_5 &= \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_2^2 - 2\sigma_2\gamma_3 + 4\gamma_2\sigma_2 + \gamma_3^2} - \frac{1}{2}\gamma_3 - \frac{1}{2}\sigma_2, \\
\lambda_6 &= -\frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}\gamma_3 - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_2^2 - 2\sigma_2\gamma_3 + 4\gamma_2\sigma_2 + \gamma_3^2}.
\end{aligned}$$

Para garantizar estabilidad asintótica en el origen se debe de satisfacer las siguientes condiciones para los seis valores propios obtenidos:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 < 0, \text{ si } & \sqrt{\sigma_1^2 - 2\sigma_1 + 4\sigma_1\gamma_1 + 1} < -\frac{1}{2}\sigma_1; -\frac{1}{2}, \\
\lambda_2 < 0, \text{ si } & \sqrt{\sigma_1^2 - 2\sigma_1 + 4\sigma_1\gamma_1 + 1} > 0, \\
\lambda_3 < 0, \text{ si } & \beta_1 > 0 \\
\lambda_4 < 0, \text{ si } & \beta_2 > 0 \\
\lambda_5 < 0, \text{ si } & \sqrt{\sigma_2^2 - 2\sigma_2\gamma_3 + 4\gamma_2\sigma_2 + \gamma_3^2} > 0 \text{ y } \sqrt{\sigma_2^2 - 2\sigma_2\gamma_3 + 4\gamma_2\sigma_2 + \gamma_3^2} < -\frac{1}{2}\gamma_3, -\frac{1}{2}\sigma_2, \\
\lambda_6 < 0, \text{ si } & \sqrt{\sigma_2^2 - 2\sigma_2\gamma_3 + 4\gamma_2\sigma_2 + \gamma_3^2} < -\frac{1}{2}\sigma_2, -\frac{1}{2}\gamma_3.
\end{aligned}$$

Dado la complejidad de los puntos de equilibrio del sistema (3.1), será complejo analizar estabilidad local a cada uno de los puntos de equilibrio por el método de linealización. A continuación se expresa de manera general, el jacobiano en función de las variables de estado, siendo la matriz  $\Phi_1$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix}
-\sigma_1 & \sigma_1 + \delta x_3 & \delta x_2 & 0 & 0 & 0 \\
-x_3 + \gamma_1 & -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & x_1 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \delta_2 x_5 & -\sigma_2 & \sigma_2 + \delta_1 x_6 + \delta_2 x_3 & \delta_1 x_5 \\
0 & 0 & \delta_4 x_4 & -x_6 + \gamma_2 + \delta_4 x_3 & -\gamma_3 & -x_4 \\
0 & 0 & 0 & x_5 & x_4 & -\beta_2
\end{bmatrix}$$

Dada la complejidad de la matriz  $\Phi_1$  para obtener los valores propios, solo se presenta la ecuación del polinomio característico.

$$\lambda^6 + \lambda^5(c-d) + \lambda^4(A+dc-D) + \lambda^3(Ac-B-dD-f) - \lambda^2(df+AD+Bc) + \lambda(BD-Af) + Bf = 0$$

donde

$$a = \sigma_2 + \delta_1 x_6 + \delta_2 x_3$$

$$b = \gamma_2 + \delta_4 x_3 - x_6$$

$$c = \sigma_1 + \beta_1 + 1$$

$$d = \gamma_3 + \beta_2 + \sigma_2$$

$$f = \beta_1(\gamma_1 - x_3)(\sigma_1 + \delta x_3) + \delta_2 x_2 + \delta_2 x_1(\gamma_1 - x_3) - \sigma_1(\beta_1 + x_1^2) - x_1 x_2(\sigma_1 + \delta x_3)$$

$$A = \gamma_3 \beta_2 + x_4^2 + \sigma_2 + \beta_2 - ab - \delta_1 x_5^2$$

$$B = -\sigma_2(\gamma_3 \beta_2 + x_4^2) + ab \beta_2 - x_4 x_5(\delta_1 b - a) + \delta_1 \gamma_3 x_5^2$$

$$D = \delta_2 x_2 + (\gamma_1 - x_3)(\sigma_1 - \delta x_3) - \sigma_1(\beta_1 + 1) - (\beta_1 + x_1^2)$$

## 5.2. Análisis de estabilidad por el método directo de Lyapunov

Para garantizar la estabilidad asintótica global del sistema (3.1) se implementará un regulador cuya función es hacer que la trayectoria que entra al conjunto  $K(h_1, \rho) \cap K(h_2)$ .

Se analizará que el sistema en lazo abierto satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$$

donde  $x(t) \in R^6$ .

Para tal fin se utiliza la teoría de estabilidad de Lyapunov [45, 46] y una estructura en cascada para el sistema (3.1) [47, 48, 49], a partir de esto se establecen condiciones de estabilidad asintótica para dicho sistema. Para esto, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov, la cual contiene tres de las variables de estado que nos interesa, que son  $x_1, x_2, x_3$ :

$$V_1 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{(\delta + 1)}{2} x_2^2 + \frac{x_3^2}{2} \quad (5.1)$$

cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{x}_1 x_1 + (\delta + 1) \dot{x}_2 x_2 + \dot{x}_3 x_3. \\ &= x_1(-\sigma_1 x_1 + \sigma_1 x_2 + \delta x_2 x_3) + (\delta + 1) x_2(-x_1 x_3 + \gamma_1 x_1 - x_2) + x_3(x_1 x_2 - \beta_1 x_3). \\ &= -\sigma_1 x_1^2 + x_1 x_2[\sigma_1 + \gamma_1(\delta + 1)] - (\delta + 1) x_2^2 - \beta_1 x_3^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\dot{V}$  será negativa definida si

$$\delta + 1 > \frac{[\sigma_1 + \gamma_1(\delta + 1)]^2}{4\sigma_1}. \quad (5.2)$$

Por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (5.1), es una función de Lyapunov. Consideréese ahora otra función candidata de Lyapunov, la cual contiene las variables de estado que nos interesa, que son  $x_4, x_5, x_6$ :

$$V_2 = \frac{x_4^2}{2} + \frac{(\delta_1 + 1)}{2}x_5^2 + \frac{x_6^2}{2}, \quad (5.3)$$

cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{x}_4x_4 + (\delta_1 + 1)\dot{x}_5x_5 + \dot{x}_6x_6. \\ &= x_4(-\sigma_2x_4 + \sigma_2x_5 + \delta_1x_5x_6 + \delta_2x_5x_3) + \\ &\quad (\delta_1 + 1)x_5(-x_4x_6 + \gamma_2x_4 - \gamma_3x_5 + \delta_4x_3x_4) + x_6(x_4x_5 - \beta_2x_6). \end{aligned}$$

Completando cuadrados se tiene

$$\dot{V}_2 = -\sigma_2 \left[ x_4 - \frac{(\rho_1 + \rho_2x_3)}{2\sigma_2}x_5 \right]^2 - x_5^2 \left[ (\delta_1 + 1)\gamma_3 - \frac{(\rho_1 + \rho_2x_3)^2}{4\sigma_2} \right] - \beta_2x_6^2 < 0. \quad (5.4)$$

con  $\rho_1 = \sigma_2 + \gamma_2(\delta_1 + 1)$  y  $\rho_2 = \delta_2 + \delta_4(\delta_1 + 1)$ .

Suponer, que dada la condición (5.2), es tal que  $x \in K(h_1, \rho) \cap K(h_2)$  entonces la variable  $x_3$  satisface la desigualdad

$$\frac{2\sqrt{\sigma_2(\delta_1 + 1)\gamma_3} - \rho_1}{\rho_2} > x_3. \quad (5.5)$$

Logrando tener el conjunto compacto  $K(h_1, \rho) \cap K(h_2)$  implica que cada trayectoria que entra al dominio del conjunto compacto invariante  $K(h_1, \rho) \cap K(h_2)$  permanece en el. Por lo tanto  $\dot{V}_1(x) < 0$  para  $x \in K(h_1, \rho) \cap K(h_2)$ ,  $x \neq 0$ , se concluye que el sistema (3.1) es asintóticamente estable bajo las condiciones (5.2)-(5.5).

Ahora, teniendo la siguiente condición

$$2\sqrt{\sigma_2(\delta_1 + 1)\gamma_3} - \rho_1 > 2\rho_2[\gamma_1(\delta + 1) + \sigma_1] \quad (5.6)$$

implica tener que el sistema (5.5) se mantiene en  $K(h_1, \rho) \cap K(h_2)$ . Por lo tanto se tiene

**Proposición 9.** *Suponer que los parametros de (3.1) y el parametro  $q$  son tales que  $A_1(q) > 0$ ,  $A_3(q) > 0$  y (5.2) y (5.6) se mantienen. Luego (3.1) es global asintóticamente estable*

### 5.3. Entradas de Control $\mu(t)$

Se analizará estabilidad asintótica en lazo cerrado para el sistema (3.2), como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma_1 x_1 + \sigma_1 x_2 + \delta x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + \gamma_1 x_1 - x_2 + \mu(t) \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta_1 x_3\end{aligned}$$

donde

$$\mu(t) = -x_1 \frac{[\sigma_1 + \gamma_1(\delta + 1)]}{\delta + 1}.$$

por lo tanto, se tiene la siguiente dinámica en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma_1 x_1 + \sigma_1 x_2 + \delta x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + \gamma_1 x_1 - x_2 - x_1 \frac{[\sigma_1 + \gamma_1(\delta + 1)]}{\delta + 1} \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta_1 x_3\end{aligned}$$

Proponiendo la función candidata de Lyapunov cuando se tiene  $\mu(t)$ .

$$V_3 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{(\delta + 1)}{2} x_2^2 + \frac{x_3^2}{2}.$$

La derivada de  $V_3(x)$  es

$$\dot{V}_3 = -\sigma_1 x_1^2 - (\delta + 1)x_2^2 - \beta_1 x_3^2 < 0.$$

Por lo tanto,  $\dot{V}_3 < 0$  teniendo estabilidad asintótica.

Ahora considerese otra entrada virtual para el sistema (3.2)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma_1 x_1 + \sigma_1 x_2 + \delta x_2 x_3 + \psi(t) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + \gamma_1 x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta_1 x_3\end{aligned}$$

donde

$$\psi(t) = -x_2[\sigma_1 + \gamma_1(\delta + 1)].$$

por lo tanto, se tiene la siguiente dinámica en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma_1 x_1 + \sigma_1 x_2 + \delta x_2 x_3 - x_2[\sigma_1 + \gamma_1(\delta + 1)] \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + \gamma_1 x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta_1 x_3\end{aligned}$$

Considere la siguiente función de Lyapunov cuando se tiene  $\psi(t)$ .

$$V_4 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{(\delta + 1)}{2} x_2^2 + \frac{x_3^2}{2}.$$

La derivada de  $V_4(x)$  es

$$\dot{V}_4 = -\sigma_1 x_1^2 - (\delta + 1)x_2^2 - \beta_1 x_3^2 < 0.$$

Por lo tanto,  $\dot{V}_4 \leq 0$  teniendo estabilidad asintótica.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Se obtienen varias funciones localizadoras que delimitan el dominio compacto en donde se encuentran localizados los conjuntos compactos invariantes para los subsistemas (3.2) y (3.3) que forman al sistema (3.1).

Se logra tener estabilidad asintótica para el sistema (3.1) utilizando funciones de Lyapunov y el utilizar una estructura en cascada para dicho sistema.

El estudiar los subsistemas (3.2) y (3.3) independientemente facilita encontrar funciones localizadoras apropiadas que involucran todas las variables y que se pueda tener un dominio en el que se encuentren los conjuntos compactos invariantes. Es importante comprender el sistema dinámico global.

El utilizar el teorema iterativo ayuda a tener una mejor localización de los conjuntos compactos invariantes para el sistema (3.1).

Se establecen condiciones para las cuales existe estabilidad en el origen por medio de la linealización y se presenta la ecuación del polinomio característico para el sistema (3.1).

El proponer funciones localizadoras compactas se logra tener que el conjunto  $S(h)$  sea compacto, facilitando por el método de Lagrange conocer el  $h_{inf}$  y  $h_{sup}$ .

Los resultados de este trabajo de investigación se han difundido en diferentes medios, generando los siguiente productos :

#### **Presentaciones en Congresos Regionales-Institucionales .**

1. K.E Starkov, J.D Reyes and D. Gamboa, “Bounds for a domain which contains all compact invariant sets of the Bloch system”, *ERA09*. Tijuana B.C
2. K.E Starkov, D.Gamboa, L.N Coria, C.P Ante and A.V Ortiz. “Localización de conjuntos compactos invariantes en un modelo de seis dimensiones”, *ERA10*. Tijuana B.C

#### **Presentaciones en Congresos Internacionales .**

1. K.E Starkov, D.Gamboa and L.N Coria, “Localización de conjuntos compactos invariantes para un modelo de seis dimensiones de un plasma no-magnetizado”, *CIINDET 2010*. Cuernavaca, Morelos 2010.
2. K.E Starkov and D.Gamboa, “Localization of compact invariant sets of one plasma dynamics model”, *IASTED (International Association of Science and Technology for Development- feb-2011)*, Austria.
3. K.E Starkov and D.Gamboa, “Bounds for compact invariant sets of one system arisen in studies of plasma dynamics models”, *PhysCon (5th International Scientific Conference on Physics and Control)*.September 5-8, 2011 Leon, Spain.

# Bibliografía

- [1] M. L. Mouronte López, “Caracterización y análisis de sistemas dinámicos no lineales mediante el estudio del mapa de frecuencias y espacio de fases,” Ph.D. dissertation, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos, 2004.
- [2] V. I. Arnold and S.P. Novikov, *Dynamical Systems IV: Symplectic Geometry and Its Applications*. Springer Verlag, ISBN 0387170030 / 9780387170039 / 0-387-17003-0.
- [3] V. I. Arnold, M. Levi, and J. Szucs, *Geometrical Methods In The Theory Of Ordinary Differential Equations*. Springer Verlag, ISBN 0387966498 / 9780387966496 / 0-387-96649-8.
- [4] A. M. Lyapunov, *General Problem of the Stability Of Motion*. Taylor and Francis, London, Washington, DC 1992.
- [5] T. German, “Análisis no lineal de inestabilidades en el problema acoplado termohidráulico-neutro,” Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo. Comisión Nacional de Energía Atómica, Argentina, Tesis de Carrera de Ingeniería en Ingeniería, Octubre 2008.
- [6] M. Luna-Rivera and R. Femat, “Estudio en frecuencia de sistemas caóticos controlados,” *Revista Mexicana de Física*, vol. 4, no. 5, p. 429, Octubre 2005.
- [7] A. P. Krishchenko and K. E. Starkov, “Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with applications to the lanford system.” *International Journal of Bifurcations and Chaos*, vol. 32, no. 16, pp. 49–56, 2006.

- [8] K. E. Starkov, “Estimation of the domain containing all compact invariant sets of the optically injected laser system.” *International Journal of Bifurcations and Chaos*, vol. 17, pp. 4213–4217, 2007.
- [9] K. E. Starkov and L.N. Coria, “Examples of localization of periodic orbits of polynomial systems.” *Physics and Control*, pp. CD-ROM, Russia 2005.
- [10] K. Starkov and L.N. Coria, “Localization of periodic orbits of polynomial sprott systems with one or two quadratic monomials.” *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 6, no. 3, pp. 271–277, 2005.
- [11] K. E. Starkov and K. K. S. Jr, “Localization of periodic orbits of the rossler system under variation of its parameters.” *Elsevier. Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 33, pp. 1445–1449, 2007.
- [12] A. N. Kanatnikov, S. K. Korovin, and A. P. Krishchenko, “Localization of invariant compact sets of discrete systems,” *Doklady Mathematics*, vol. 81, no. 2, pp. 326–328, DOI: 10.1134/S1064562410020444 2010.
- [13] P. Wanga, D. Lia, and Q. Hub., “Bounds of the hyper-chaotic lorenz stenflo system,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, no. 9, pp. 2514–2520, September 2010.
- [14] F. Zhanga, Y. Shua, and H. Yangb, “Bounds for a new chaotic system and its application in chaos synchronization,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 3, pp. 1501–1508, March 2011.
- [15] A. N. Kanatnikov, “Functional method for the localization of invariant compact sets in discrete systems,” *Control Theory, Differential Equation*, vol. 46, no. 11, pp. 1601–1611, DOI: 10.1134/S0012266110110078 2010.
- [16] A. N. Kanatnikov, S. K. Korovin, and A. P. Krishchenko, “Maximal invariant compact sets of dynamical systems,” *Doklady Mathematics*, vol. 83, no. 2, pp. 278–281, DOI: 10.1134/S106456241102030X 2011.
- [17] L. H. Southall, “Coupled electromagnetic and electron acoustic wave propagation in an inhomogeneous lossy plasma layer,” Master’s thesis, 1970.

- [18] R. Castell, E. Iglesias, J. Ramirez, and J. Camacho, “Estudio de las características de propagación de un plasma pulsado generado en un acelerador coaxial,” *Revista Mexicana de Física*, vol. 56, no. 1, pp. 9–13, 2010.
- [19] A. P. Krishchenko and K. E. Starkov, “Estimation of the domain containing all compact invariant sets of a system modelling the amplitude of a plasma instability.” *Physics Letters A*, vol. 367, pp. 63–72, 2007.
- [20] P. Shukla, G. Birk, J. Dreher, and L. Stenflo, “Dynamics of sheared flow driven drift-alfven waves in nonuniform plasmas,” *Plasma Physics Reports*, no. 22, p. 818, 1996.
- [21] E. N. Lorenz and J. Atmosph, “Deterministic nonperiodic flow,” *Sci.*, vol. 20, p. 130, 1963.
- [22] J. Donea, “A taylor galerkin method for convective transport problems,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, no. 1, pp. 101–119, January 1984.
- [23] S. Banerjee, P. Saha, and A. Roy Chowdhury, “On the properties of chaotic attractor observed in an inhomogenous magnetised plasma,” *Physica Scripta*, vol. 64, pp. 588–595, 2001.
- [24] L. N. Coria, “Localización de conjuntos compactos invariantes para sistemas físicos y electromecánicos y sus aplicaciones,” Ph.D. dissertation, Mayo 2010.
- [25] Y. A. Kuznetsov, “Elements of applied bifurcation theory,” *Springer, Verlag*, vol. ISBN 0-387-94418-4, 1995.
- [26] G. M. Munguia Gamez, “Sistemas tipo lorenz,” Master’s thesis, Universidad de Sonora. Division de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Matemáticas, Hermosillo, Sonora 2006.
- [27] Madan, Rabinder N., “Circuito de chua: un paradigma para el caos,” *World Scientific Publishing Company*, vol. ISBN 9810213662, 1993.
- [28] F. A. Gómez, “Control de sistemas no lineales basados en la estructura hamiltoniana.” Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla., 2002.

- [29] Y. Liu, Q. Yang, and G. Pang., “A hipercaotic system from the rabinovich system,” *Journal of computational and applied mathematics. elsevier*, no. Dic, 2009.
- [30] P. C. Reach and A. H. Albuquerque, “A hypercaotic chua system,” *International Journal of Bifurcation and Chaos.*, vol. 19, no. 11, pp. 3823–3828, 2009.
- [31] C. Yang, C.H.Tao, and W. Ping, “Comparation of feedback control methods for a hyperchaotic lorenz system.” *Physics letters A*, vol. 374, pp. 729–732, 2010.
- [32] L. Xiaodong, S. Michael, M. F. Danca, and G. Chen, “On a dynamical system with multiple chaotic attractors.” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 17, no. 9, pp. 3235–3251, 2007.
- [33] S. Jean Jacques, *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [34] H. Márquez, “Nonlinear control systems analysis and design,” *Wiley*, 2003.
- [35] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics And Chaos*. Addison Wesley, 1994.
- [36] J. Güémez and M. Matías, “Internal fluctuations in a model of chemical chaos,” *Physical Review E*, vol. 48, no. 4, 1993.
- [37] D. Kirschner and J. C. Panetta, “Modeling immunotherapy of the tumor - immune,” *Mathematical Biology*, vol. 37, pp. 235–252, 1998.
- [38] A. Babloyantz, A. P. Krishchenko, and A. Nosov, “Analysis and stabilization of nonlinear systems,” *Computer Math. Applications*, no. 34, pp. 356–369, 1997.
- [39] K. E. Starkov, “Bounds for compact invariant sets of the system describing dynamics of the nuclear spin generator,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, no. 6, pp. 2565–2570, Junio 2009.
- [40] L.N. Coria, “Localización de órbitas periódicas para algunos sistemas de tres dimensiones continuos en el tiempo,” Master’s thesis, CITEDI-IPN, 2005.
- [41] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, third edition ed. Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice Hall, 2002.
- [42] S. Sastry, *Nonlinear Systems, Analysis, Stability and Control*. Berkeley, CA 94720-1770: Springer, 1999, vol. 10.

- [43] K. E. Starkov and D. Gamboa, “Localization of compact invariant sets of one plasma dynamics model,” *IASTED- International Association of Science and Technology for Development*, Feb 2011.
- [44] K. E. Starkov, “Bounds for the domain containing all compact invariant sets of the system modeling dynamics of acoustic gravity waves,” *International Journal of Bifurcations and Chaos*, vol. 19, pp. 3425–3432, 2009.
- [45] P. Seibert and R. Suarez, “Global stabilization of nonlinear cascade systems,” *Elsevier Science B.V*, vol. 14, no. 4, pp. 347–352, April 1990.
- [46] V. Sundarapandian, “Global asymptotic stability of nonlinear cascade systems,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 15, no. 3, pp. 275–277, April 2002.
- [47] E. Panteley and A. Loria, “On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade,” *Systems and Control Letters*, Noviembre 1997.
- [48] A. Chaillet and D. Angeli, “Integral input to state stability for cascaded systems,” *17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, pp. 24–28, July 2006.
- [49] A. Bacciotti, P.Boieri, and L.Mazzi, “Linear stabilization of nonlinear cascade systems,” *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 146–165, 1993.