



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Azcapotzalco**

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

**“Súper Caída Libre en Tubos Concéntricos y Placas
Planas Divergentes”**

Presenta:

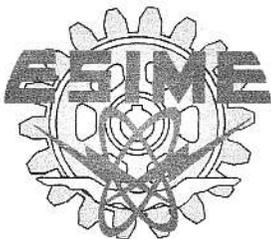
Ing. Salomón Peralta López

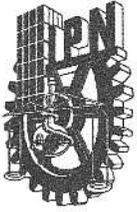
DIRECTOR:

DR. ABRAHAM MEDINA OVANDO

Abraham Medina Ovando

MÉXICO D. F. JUNIO DEL 2011





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México D.F. siendo las 14 horas del día 28 del mes de Junio del año 2011, se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME- Unidad Profesional Azcapotzalco para examinar la tesis titulada:

Súper Caída Libre en Tubos Concéntricos y Placas Planas Divergentes

Presentada por el alumno:

Peralta

Apellido paterno

López

Apellido materno

Salomón

Nombre(s)

Con registro:

A	1	0	0	5	8	4
---	---	---	---	---	---	---

aspirante :

al Grado de Maestro en Ciencias en Termofluidos

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA DEFENSA DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dr. Abraham Medina Ovando

Primer vocal

M en C. José Rubén Aguilar Sánchez

Secretario

Dr. Alejandro Zacarías Santiago

Presidente

Dr. Abel Lopez Villa

Segundo vocal

Dr. Erick Emmanuel Luna Rojero

Tercer vocal

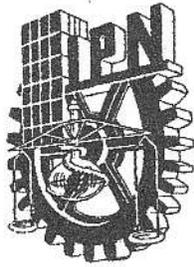
Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar

Suplente

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Jaime Pacheco Martínez





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 29 del mes julio del año 2011, el que suscribe Salomón Peralta López alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Termofluidos con número de registro A100584, adscrito a Unidad de Posgrado ESIME Azcapotzalco, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Abraham Medina Ovando y cede los derechos del trabajo titulado "Súper Caída Libre en Tubos Concéntricos y Placas Planas Divergentes", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección peraltasalomon@hotmail.com y amedina@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Salomón Peralta López
Nombre y firma

Part I

Resumen

Nosotros hemos analizado y caracterizado la superficie libre de una columna de líquido que es liberada en reposo en un tubo. Y el otro contenedor placas paralelas cuya sección transversal se incrementa en dirección hacia abajo en dictinción con el trabajo de Villermoux y Pomeau (2010) para un contenedor conico, tenemos dos tubos con áreas diferentes $a_u > a_b$ en la parte media tenemos una transición muy marcada debido a la diferencia de áreas y de las placas compuestas inclinadas. para tiempos pequeños en el cual los efectos viscosos son despreciados, la superficie libre que se mueve hacia abajo con una aceleración mayor a la gravedad. la existencia de un niple en la superficie libre (en placas planas) con amplitud que se incrementa como función del tiempo, es un modelo en una sola dirección con una aceleración instantánea inicial, las paredes que se expanden (no en el tubo) la súper caída libre se reproduce muy bien.

1 Abstract

We have analyzed experimentally the characteristics of the upper free surface of a liquid column released from the rest in a vertical container (tube). In the other container (parallel plates) whose cross-section varies slowly in the downward direction in distinction with the work of Villermaux and Pomeau (2010) for a conical container, we have two tubes interconnected with different areas $a_u > a_b$ and in the middle a great transition due to the difference of areas and a composed of a slightly inclined flat surfaces. At small times for which viscous effects can be neglected, the free surface moves downward with an acceleration larger than gravity. The existence of a nipple centered on the upper free surface (flat plates) with amplitude an increasing function of time is observed, a one dimensional model of initial acceleration, walls expanding (not in tube) reproduces the observed super free fall fairly well.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	2
2. Super caída libre (modelo Villaermaux y Pomeau)	3
2.1. Desarrollo	4
2.2. Caída libre en una sección transversal variable.	6
3. Súper caída libre en sistemas mecánicos	9
3.1. Solución analítica para la cadena ligeramente holgada	11
3.2. Experimentos de laboratorio	15
3.3. Modelo de la caída de la cadena y sus ecuaciones de movimiento	19
4. Super caída libre de líquidos inviscidos en tubos concéntricos	23
4.1. Teoría para tubos concéntricos	23
4.2. Cálculos de las α del experimento	25
4.3. Adimensionalización de la ecuación	27
5. Teoría en placas planas delgadas e inclinadas	30
5.1. Paredes planas divergentes	32
5.2. Casos especiales	33
I Apendice	37
II Circuito neumático	40

Índice de figuras

2.1. Caída libre de un balón de acero en comparación con la superficie libre del líquido en el Tubo 1, con etanol. Las fotografías están igualmente espaciadas en tiempo.	5
2.2. La trayectoria de la superficie libre (o) en rojo, y la del balón (o) en negro referentes al experimento mostrado en la figura 2.1, utilizando el tubo 1. La trayectoria del balón está gobernada por $\ddot{h}(t) = -g$ con $g = 9,81 m s^{-2}$, y la superficie libre por $\ddot{h}(t) = -g/(1 - \beta)$ con $\beta = 0,33$ (ver Tabla 1).	5
3.1. geometría de la conformación de la cadena firmemente doblada en el tiempo $t > 0$ la posición de la caída de la cadena esta en términos de h . sección (a) es la que cae mientras que la sección (b) permanece inmóvil; Los puntos Ca y los Cb son los centros de masa	12
3.2. esquema del arreglo usado en nuestro estudio	14
3.3. formaciones sucesivas de la cadena que cae vs tiempo la parte izquierda de la cadena permanece unida al cuadro mientras que la parte final derecha está en caída libre debido a la acción de la gravedad. En (b),(c) y (d) líneas en blanco han sido realizadas en la secuencia fotográfica para conectar la caída libre de la punta de la cadena con el peso para hundir hilo de pesca en caída libre, para las últimas cinco imágenes antes de la máxima extensión de la cadena, cuya longitud es de $L=1.022$ m, el tiempo entre las imágenes sucesivas es $1/50$ s, y la separación inicial entre la punta de la cadena es (a) $x_0=1.019$ m. (b) 0.765 m (c) 0.510 m. (d) 0.255 m.	16
3.4. Representacion esquematica del modelo φ_1 que corresponde al ángulo de inclinación, m la masa del segmento de la cadena y g la aceleración de la gravedad.	17
3.5. comparación de la distancia vertical h y horizontal w en la caída de la punta de la cadena encontrada experimentalmente en círculos y numéricamente en líneas solidas la parábola de la caída libre está dada en línea punteada.	22
4.1. Esquema de probetas concentricas. utilizada para el experimento. . . .	24
4.2. grafica energía potencial vs energia cinetica.	26
4.3. figura posicion con respecto al tiempo para diferentes β	28

5.1.	Grafica de los resultados experimentales comparados con los de caída libr. $H_2 = 93,4686$ cm (llenado total de la probeta, línea en triángulos), $H_2 = 123,4684$ cm (parte media de la probeta, línea círculos llenos), $H_2 = 123,4684$ cm (parte inferior probeta, línea en cuadro llenos) se puede observar como esta última está alcanza la aceleración de la gravedad.	35
2.	Piston utilizado para el cierre y destape del experimento	42
3.	Conexiones rápidas utilizadas en pistón, reductor y válvulas	42
4.	Manguera de 6mm para todas las conexiones del circuito neumático	43
5.	Válvulas 5/2 para control del pistón	44
6.	Descripcion de válvulas 5/2	44
7.	45
8.	Esquema Valvula Y	46
9.	Valvula and	46
10.	Circuito Neumático; Circuito de control para el cierre y la apertura de la probeta. el cual nos permitio el control del experimento.	47

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción

La caída libre de un líquido a través de placas verticales, con un incremento muy suave en su sección transversal. Induce una aceleración más alta que la de la gravedad en la parte superior (de la superficie libre) en tubos concéntricos y en placas verticales.

El modelo es bien descrito por un modelo unidimensional no viscoso (o de baja viscosidad).

La súper aceleración de la parte superior (de la superficie libre) proviene del gradiente positivo de presión que es causado por la expansión de la geometría.

Que se suma a la fuerza debida a la gravedad (Villaermaux and Pomeau).

¿Puede un objeto, movido solo por las fuerzas de gravedad, caer más rápidamente que gravedad (aceleraciones mayores a g)? La respuesta rápida (en primera aproximación) puede ser no, pero un análisis detallado (realizando experimentos con líquidos y geometrías adecuadas) se puede demostrar que la respuesta correcta es obviamente que sí (aceleraciones $> g$). En un sistema conservativo, si la energía disponible está concentrada en una fracción más pequeña que el sistema masa inicial. Esta se acelerará sin límite. Ésto es. El caso del problema de cadena descendente llevado a cabo por (Calkin & March de 1989; Schager, Steindl; Troger 1997) donde la aceleración de la parte final de la cadena doblada supera la aceleración de la gravedad al final de la caída.

Súper aceleración espontánea (es decir mayor que g) en líquidos movidos por la gravedad no parece haber sido explorada de una manera sistemática, incluyendo la forma

experimental, con la excepción notable de Penney & Price (1952). Estos autores estudiaron la forma y la dinámica de una onda debida a la gravedad en dos dimensiones, y encontraron la inclinación crítica de la onda, la altura de la cresta se acentúa, y cae más rápido que g .

A esta situación la llamaron ‘untenable’ que es físicamente insostenible. Taylor (1953) confirmó físicamente experimental algunas de sus predicciones, y notó una gran inestabilidad en el momento en que la cresta se convirtió en una forma muy aguda.

Si se asume una forma tridimensional. Las aceleraciones más grandes que g se han encontrado en algunas circunstancias especiales con los potenciales de velocidad convenientemente asumidas (Clavin & Williams 2005; Duchemin 2008).

Aquí llevamos a cabo un experimento especialmente diseñado para demostrar que las aceleraciones mayores a la gravedad ocurren como resultado del acoplamiento entre la inercia y geometría que confina al líquido.

Los líquidos que se mueven en tubos tienen una larga historia en el líquido y los mecánicos de onda, comenzando con Newton (1687), que derivó el período de oscilación de una masa fluido en un tubo en forma de \bar{u} , y utilizó el resultado para deducir la aceleración de las ondas debidas a la gravedad en la superficie de un líquido. La aceleración nunca excede g en un tubo armado con dos brazos (Bernoulli 1738), mientras que puede hacer en un tubo armado con tres brazos (Hirata & Craik 2003).

La razón es que el líquido que cae en este brazo armado tiene dos veces más espacio, y cae así más rápidamente. El principio de nuestro experimento explota este efecto de una manera continua, pues estamos considerando un solo tubo con una sección representativa gradualmente cada vez mayor. De forma experimental usamos el movimiento para producir una aceleración más rápida que gravedad (g), analizaremos la caída libre del líquida a través de tubos concentricos y placas planas con la sección representativa y en éstos con un espacio cada vez mayor que ofrece específicamente en la dirección del movimiento, como son placas planas divergentes.

Analizaremos la forma del interfaz superior del líquido (de la superficie libre) debido a lo inducido ambos por la estructura. El flujo debido a la súper caída libre. El interfaz desarrolla una curvatura débil positiva y una negativa, bajo la forma de nipple.

1.1. Objetivos

Los objetivos de este trabajo son:

Determinación de estructuras (formas geométricas en las cuales se pueda observar la súper caída libre)

Poder observarla mediante la ayuda de instrumentos apropiados. (Cámara rápida),(circuito neumático).

Realizar una comparación de resultado experimental y numerico

Capítulo 2

Super caída libre (modelo Villaermaux y Pomeau)

¿Puede un objeto, únicamente movido por fuerzas gravitacionales, caer más rápido que la gravedad?. La respuesta podría ser no, pero un análisis más detallado muestra que la respuesta correcta es obviamente si. En un sistema conservativo, si la energía disponible es concentrada en una pequeña fracción de la masa del sistema, esta acelerará sin límites. Esto es, por instancia, el caso de la cadena que cae (Calkin & March 1989; Schager, Steindl & Troger 1997) donde la aceleración del extremo final de una cadena plegada que al ser soltada diverge de la gravedad al final de la caída.

Súperaceleraciones espontáneas en fluidos movidos por la gravedad no han sido exploradas intensamente, incluyendo trabajos experimentales, con la notable excepción de Penney & Price (1952). Dichos autores estudiaron la forma y dinámica de una onda gravitacional bidimensional, y encontraron que en la cresta de la onda se extendía de manera afilada, la cual se esperaba que cayera más rápido que la gravedad, situación que fué llamada "físicamente insostenible". Taylor (1953) confirmó experimentalmente algunas de estas predicciones, y notó una fuerte inestabilidad al momento en que la cresta de la onda se extendía afiladamente, asumiendo que el problema era de carácter tridimensional. Aceleraciones mas grandes que g pueden ser posibles en circunstancias especiales (Clavin & Williams 2005; Duchemin 2008). Aquí gracias a un experimento especialmente diseñado mostramos que las súperaceleraciones pueden ocurrir como resultado de combinar la inercia y una geometría apropiada.

2.1. Desarrollo

La idea de nuestro experimento es simple: consideremos una columna uniforme de fluido en caída libre dentro de un tubo cilíndrico vertical. En la ausencia de viscosidad, su aceleración será exactamente g . Supongamos ahora que el tubo tiene una sección transversal no constante. Hagamos esta sección transversal casi constante, igual a a_b en la parte inferior del tubo y a_u en la parte superior del tubo donde $a_u < a_b$. Después

el tubo es llenado con un fluido invíscido, abrimos súbitamente la parte inferior a la atmósfera donde la sección transversal es mas grande, la sección transversal superior permanecer siempre abierta. Debido a que $a_u < a_b$, la aceleración será dominada por la

mayor masa de fluido, es decir la masa que llena la parte inferior del tubo. El fluido se encontrará entonces en caída libre, con una aceleración "aguas abajo" muy cercana a g . Debido a la conservación de masa, y haciendo valer la condición de mojado (es decir el líquido es forzado a pegarse a la pared del tubo), la aceleración "aguas abajo" del fluido en la superficie libre de este será $g(a_u < a_b)$, mas grande que g . Experimentalmente,

sin embargo, esta idea no puede ser realizada de manera tan simple. Los fluidos reales son viscosos y una discontinuidad de la sección transversal será la mayor fuente de disipación a un no despreciable número de Reynolds. Prácticamente el factor generado por un incremento súbito de la sección-transversal es sobrelanceado por la disipación cercana a la discontinuidad. Hemos elegido por consiguiente una expansión suave en la sección transversal del tubo, con una tasa de expansión menor al 10%. Una tasa de expansión mayor incrementaría el crecimiento y separación de la capa de la frontera viscosa a lo largo de las paredes del tubo, y harían que prácticamente el fenómeno desapareciera.

Utilizamos dos diferentes líquidos, agua y etanol, además de dos tubos de vidrio. Nuestros tubos cónicos será caracterizado por su ángulo de apertura α , el radio en la parte inferior $R(0)$ y el radio referente a la altura de llenado $R(h(0))$ detallados en la tabla 1.

	$\tan(\alpha)$	$R(0)(cm)$	$\beta = 1 - R(h(0))/R(0)$
Tubo 1	0.03	3.3	0.33
Tubo2	0.07	3.7	0.52

Tabla 1. Geometría de dos tubos conicos de vidrio usados en los experimentos

El experimento consiste en abrir subitamente la parte inferior del tubo que ha sido llenado anteriormente con un líquido. Como se puede observar en la figura 1, el tiempo



Figura 2.1: Caída libre de un balón de acero en comparación con la superficie libre del líquido en el Tubo 1, con etanol. Las fotografías están igualmente espaciadas en tiempo.

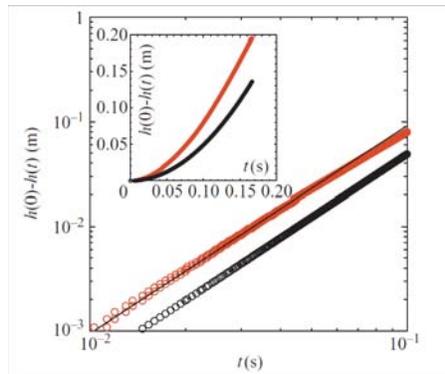


Figura 2.2: La trayectoria de la superficie libre (o) en rojo, y la del balón (o) en negro referentes al experimento mostrado en la figura 2.1, utilizando el tubo 1. La trayectoria del balón está gobernada por $\ddot{h}(t) = -g$ con $g = 9,81m s^{-2}$, y la superficie libre por $\ddot{h}(t) = -g/(1 - \beta)$ con $\beta = 0,33$ (ver Tabla 1).

de vaciado del tubo es mas corto que el esperado por pura gravedad: la comparación con la caída libre de un balón grabada y sobrepuesta con la del fluido muestra que la superficie libre del fluido precede a la del balón. La trayectoria del balón exhibe la parábola característica, la parábola formada por superficie libre del fluido experimenta aparentemente una curvatura mayor (figura 2), signo de superaceleración. Además es visible en las fotografías instantáneas una pequeña protuberancia centrada que se incrementa como función del tiempo. La siguiente sección intentará describir este fenómeno.

2.2. Caída libre en una sección transversal variable.

Guiados por nuestras observaciones, las ecuaciones dinámicas de las que partimos son para el componente vertical $\omega(r, z, t)$ y para el componente radial $u(r, z, t)$ las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas, sin dependencia azimutal. Las variables de posición son la coordenada vertical z (apuntando hacia arriba) y el radio r . Las ecuaciones del fluido para ω y u siendo p la presión, ρ la densidad del fluido y g la aceleración de la gravedad apuntando hacia abajo:

$$\partial_t \omega + \omega \partial_z \omega + u \partial_r \omega = -\partial_z p / \rho - g \quad (2.2)$$

$$\partial_t u + \omega \partial_z u + u \partial_r u = -\partial_r p / \rho \quad (2.3)$$

$$r \partial_z \omega + \partial_r (ru) = 0 \quad (2.4)$$

La viscosidad puede ser despreciada: para tiempos de vaciado del orden de $t=0.1$ s, el espesor típico de la frontera viscosa $\sqrt{\nu t}$ es una fracción de milímetro, mucho menor que el radio del tubo. Debido a que la sección transversal cambia lentamente como función de la distancia vertical, utilizamos la aproximación de pendientes suaves "slender slope approximation". Ahora consideramos la dinámica de la velocidad vertical promediada sobre la sección transversal de área $a(z)=\pi R^2(z)$:

$$\omega(z, t) = \frac{2}{R^2(z)} \int_0^{R(z)} r \omega(r, z, t) dr \quad (2.5)$$

la cual de 2.4 y con la condición cinemática en la pared del tubo $dR / dt = \partial_t R + \omega(R, z, t) \partial_z R$ nos da:

$$\partial_t R^2 + \partial_z (\omega(z, t) R^2) = 0 \quad (2.6)$$

Siendo el tubo rígido, con radio $R(z)$ independiente del tiempo, encontramos de 2.6 que solamente el flujo vertical depende del tiempo

$$j(t) = a(z) \omega(z, t) \quad (2.7)$$

es constante a lo largo de z .

Llevando a cabo la aproximación de pendientes suaves, las ecuaciones de Euler ceden a una ecuación para $\omega(z, t)$ la cual se escribe, junta con sus condiciones de frontera cuando el tubo es abierto en $z=0$ y en la interface superior en $z=h(t)$,

$$\partial_t \omega + \omega \partial_z \omega + u \partial_r \omega = -\partial_z p / \rho - g \quad (2.8)$$

con $p(0) = p(h(t)) = 0$

$$\partial_z(a(z)\omega) = 0 \quad (2.9)$$

Denotando $dh(t)/dt = h'$ y del flujo constante $j(t)$, tenemos:

$$\omega(z, t) = \frac{a(h)}{a(z)} h' \quad (2.10)$$

Insertando la expresión de arriba para $w(z,t)$ dentro de 2.8 tenemos que:

$$\frac{a(h)}{a(z)} h'' - \frac{a^2(h)\partial_z a}{a^3(z)} (h')^2 = -\frac{1}{\rho} \rho - g \quad (2.11)$$

Integrando entre $z=0$ y $z=h(t)$ y con la condición de la presión igual a cero en estas dos fronteras, 2.11 cede a la clásica solución (Paterson 1983):

$$\left(a(h) \int_0^h \frac{dz}{a(z)} \right) h'' + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a(h)^2}{a(0)^2} \right) (h')^2 = -gh \quad (2.12)$$

Esto mismo cede a la condición de caída libre para $a(z)=a(0)$ constante. Comenzando desde el reposo ($h'(t=0)=0$) 2.12 prediciendo que la aceleración inicial de la interface será:

$$h'' = -g \frac{h}{a(h) \int_0^h \frac{dz}{a(z)}} \quad (2.13)$$

Esta aceleración es mas grande (en valor absoluto) que la aceleración provista por la gravedad:

$$\frac{h}{a(h)} > \int_0^h \frac{dz}{a(z)} \quad (2.14)$$

Una condición cumplida cuando el área de la sección transversal $a(z)$ decrece a mayores elevaciones. El origen de esta superaceleración es fácilmente entendido desde la estructura del campo de presiones inducido por el movimiento del fluido. Insertando la dinámica para tiempos iniciales de 2.13 dentro de 2.11, vemos que el gradiente de presión a tiempos iniciales es:

$$\frac{\partial_z p}{\rho g} = \frac{h}{a(z) \int_0^h \frac{dz}{a(z)}} - 1 \quad (2.15)$$

Cuando la condición en 2.14 se cumple, que es cuando la interface superior acelera, el gradiente de presión en la interface para $z=h(t)$ es positivo, demostrando que el

fluido es succionado "aguas abajo", con una fuerza debida a la presión sumándose a las fuerzas de cuerpo gravitacionales. Recíprocamente, el fluido es frenado en la interface inferior donde, como puede ser visto en 2.15, $\partial_z p$ es negativa. Para un área $a(z)$ disminuyendo suavemente con z , la presión $p(z,t)$ es negativa en todas partes. El movimiento es así acompañado por reacomodos de las partículas de fluido dentro del volumen de confinamiento las cuales están obligadas a llenarlo debido a la condición de adherencia. Como esperábamos, la consecuencia es un movimiento mas lento en la sección de mayor área en el volumen, y un movimiento mas rápido en la región mas cercana a la superficie libre.

Para el caso de tubos cónicos divergentes con un ángulo constante α como los usados en los presentes experimentos con radio $R(z) = R(0) - z \tan \alpha$, tenemos

$$a(z) = a(0)(1 - \beta z/h(0))^2 \quad (2.16)$$

con $a(0) = \pi R^2(0)$

donde:

$$\beta = \frac{h(0)}{R(0)} \tan \alpha = 1 - \frac{R(h(0))}{R(0)} \quad (2.17)$$

con $h(0)$ como la altura inicial a la que el tubo es llenado en $t=0$. Como el tubo es mas estrecho en la parte superior, $0 < \beta < 1$. De 2.13 y 2.15 tenemos para este caso que:

$$h''|_{t=0} = -\frac{g}{1 - \beta} \quad (2.18)$$

y

$$\frac{\partial_z p}{\rho g}|_{z=h(0)} = \frac{\beta}{1 - \beta} > 0 \quad (2.19)$$

Para los tubos mostrados en la tabla 1, la aceleración a tiempos iniciales puede ser así apreciablemente más grande que la gravedad. Esto es cuantitativamente confirmado por las mediciones en la interface superior, como pueden apreciarse en la figura 2 mostrando que la trayectoria inicial no es solo del tipo gravitacional (es decir $h'' = -g$).

Capítulo 3

Súper caída libre en sistemas mecánicos

Consideremos ahora una cadena de longitud L sujeta por ambos extremos de forma horizontal. Cuando uno de los dos extremos es soltado (dejarlo caer de forma libre), la cadena comienza a caer debido a la acción del campo gravitacional. Además si la distancia inicial entre los dos extremos es más cercana a L , es decir, cuando la cadena es inicialmente desplegada a su máxima longitud, el movimiento vertical de la punta de la cadena se comporta idénticamente al de un cuerpo sujeto a caída libre (Tomaszewski 2006). Sin embargo, cuando la separación Δl entre los extremos de la cadena es mucho menor a L , es decir que cuando la cadena se encuentra ciertamente plegada y un extremo es soltado, el extremo de la cadena logrará, una aceleración que es mayor a la aceleración de la gravedad g , esto es que el extremo de la cadena logrará una súper caída libre. Todos estos resultados han sido confirmados experimentalmente así como con simulaciones numéricas por (Tomaszewski 2006; Calkin y March 1989).

El problema de la caída de los cuerpos en la acción de un campo gravitatorio es tan viejo que es difícil imaginar que algo nuevo pueda ser añadido. Sin embargo, el desarrollo de los métodos de simulación ha llevado al análisis de algunos casos interesantes que son difíciles de analizar analíticamente. La dinámica de la caída de una cadena es uno de ellos.

Una revisión crítica y detallada de la historia en problemas de la caída de una cadena, particularmente de algunos acercamientos erróneos a ellos, han sido llevados a cabo recientemente por Wong y Yasui. Un caso interesante es una cadena recogida inicialmente una sobre otra en una tabla y cerca del borde. El movimiento comienza cuando uno de los extremos de cadena se trae al el borde. Si asumimos que la cadena

deja el apilamiento sin fricción, el modelo puede ser tratado analíticamente. La sorpresa es que la aceleración en la punta de la cadena no es g , que es lo que esperaríamos, pero es $g/2$.

Wong y Yasui han confirmado el resultado y repasado la historia de la convicción errónea que se tenía desde hace mucho tiempo que la aceleración debería ser igual a $g/3$.

Ellos localizaron el error y propusieron un acercamiento Lagrangiano para toda prueba en los problemas que involucrara caída de cadenas. Concluyendo con esto que “que el método de Lagrange proporciona respuestas definitivas con elegancia facilidad y claridad” También indican que el método de Sousa y de Rodrigues no es confiable porque da una solución errónea para la caída de cadena.

En el problema que consideramos aquí, la cadena esta inicialmente sujeta en ambos extremos a un soporte horizontal. Entonces, como uno de los extremos se libera, y comienza la caída de la cadena.

El caso cuando la separación horizontal Δx entre los dos extremos de la cadena es cero, es decir, la cadena se dobla ligeramente, tiene solución analítica. Esto de acuerdo con Wong y Yasui, esta solución fue proporcionada primeramente por Hamel y luego por Calkin y March. El resultado analítico

fue confirmado en ambos casos con experimentos y simulaciones numéricas

Observamos que el Calkin y March también consideraron el problema en la caída de la cadena en el cual la cadena colgaba inicialmente sobre una armella horizontal para luego permitir que uno de sus lados comenzara a caer. Este caso no está considerado aquí.

En este artículo, describiremos los resultados experimentales análogos realizados en la referencia, numero 4. En la conformación inicial, los extremos de la cadena de la longitud L están situados en el mismo nivel pero su separación horizontal Δx es variable. En los experimentos se realizaron en la referencia. 4, el tiempo fueron registrados para la tensión que actuaba en el soporte fijo de la cadena para alcanzar su máximo valor, es decir, el tiempo en el cual, que ellos asumieron de forma implícita, la punta de la cadena alcanza su posición más baja. En su estudio, el valor más grande de Δx era alrededor de $0.3L$. En cambio, en nuestros experimentos el valor más grande del Δx fue de $0,999L$, y nosotros podíamos registrar la forma completa de las conformaciones consecutivas en la caída de la cadena. De las grabaciones podemos extraer los datos cuantitativos para la función del tiempo de la velocidad y de la aceleración de la punta de la cadena.

Calkin y March compararon sus resultados experimentales con sus soluciones analíticas con el modelo $\Delta x = 0$. Pero está claro que este modelo no es válido para Δx grande

para superar esta dificultad, formulamos las ecuaciones del movimiento para la cadena y luego las integramos de forma numérica, llegando a una comparación cuantitativa entre los resultados experimentales y numéricos.

Demostraremos que el del caso que (que no se ha estudiado antes) en el cual la distancia inicial entre los extremos de la cadena está muy cercana a L , es decir, cuando la cadena se estira inicialmente a su longitud máxima, es muy interesante porque el movimiento vertical de la punta de la cadena llega a ser idéntico con el movimiento de un cuerpo que cae libremente.

3.1. Solución analítica para la cadena ligeramente holgada

Para entender lo que podemos esperar en los experimentos en la caída de la cadena, primero consideramos el caso cuando el $\Delta x = 0$. El análisis completo de este caso está en la referencia. 4. Así, proporcionamos solamente las a sumisiones esenciales y los resultados.

La a sumisión básica es que los experimentos llevados a cabo en la caída de la cadena consisten en dos secciones: La sección que cae L_a de la longitud, que disminuye con tiempo; y la sección casi inmóvil de longitud L_b que aumenta con tiempo. Tal división de la cadena es posible cuando la separación inicial horizontal de los extremos de cadena es igual a cero y la cadena consiste en una infinidad de segmentos delgados y cortos. En este límite, la cadena se puede ver como doblada firmemente, para un fluido perfecto, y una infinidad de filamentos delgados.

Inicialmente, ambos extremos de la cadena se atan a un punto de soporte O ; la posición vertical en la cual $y = 0$. En el tiempo $t = 0$, uno de los extremos de la cadena se libera y la cadena comienza a caer.

La figura 1 se presenta la geometría del sistema. Asumimos que la cadena tiene una longitud total L y su masa M está distribuida de manera uniforme a lo largo de la longitud L .

Para simplificar los resultados del análisis introduciremos, la variable h que describe la distancia de la extremidad libre que desciende de su posición inicial. El eje de h es orientado en la dirección del campo gravitacional.

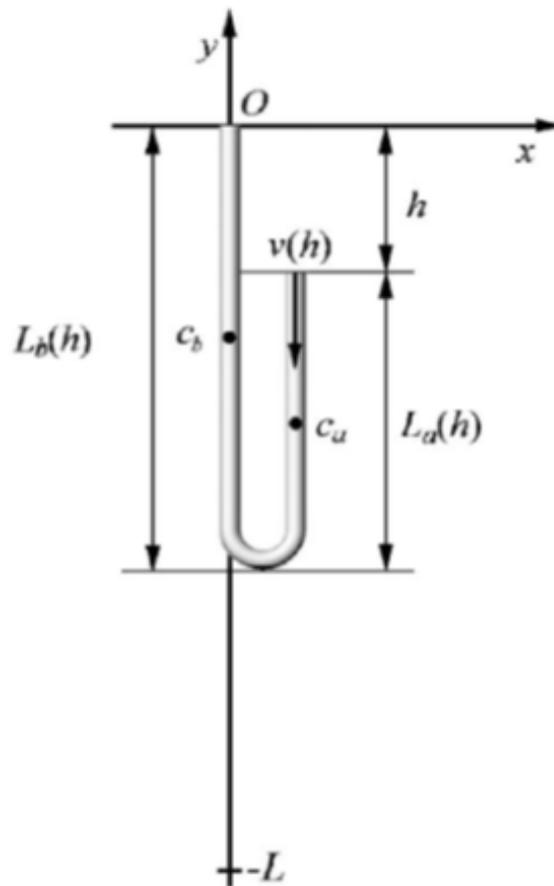


Figura 3.1: geometría de la conformación de la cadena firmemente doblada en el tiempo $t > 0$ la posición de la caída de la cadena esta en términos de h . sección (a) es la que cae mientras que la sección (b) permanece inmóvil; Los puntos C_a y los C_b son los centros de masa

Nosotros nos referiremos a h como la distancia de caída. Si asumimos que la energía se conserva puede mostrarse que la velocidad v_c , que la aceleración a_c , y que el tiempo t_c de la extremidad de cadena contra la distancia h de la caída están dadas por:

$$v_c(h) = \sqrt{\left(1 + \frac{L}{L-h}\right) gh}, \quad (3.1)$$

$$a_c(h) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{L}{L-h}\right)^2 \right] g, \quad (3.2)$$

$$t_c(h) = \int_0^h \sqrt{\left(\frac{L-s}{gs(2L-s)}\right)} ds, \quad (3.3)$$

Analizando las ecuaciones 3.4, 3.5, 3.6, concluimos que tanto la velocidad como la aceleración divergen en la punta de la en el $t_c(L)$. Cuando la punta alcanza la posición más baja $h = L$, para una h pequeña la velocidad y la aceleración son aproximadas por las relaciones bien conocidas que describen la dinámica de la caída libre:

$$v_b(h) = \sqrt{2gh}, \quad (3.4)$$

$$a_b(h) = g, \quad (3.5)$$

$$t_b(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (3.6)$$

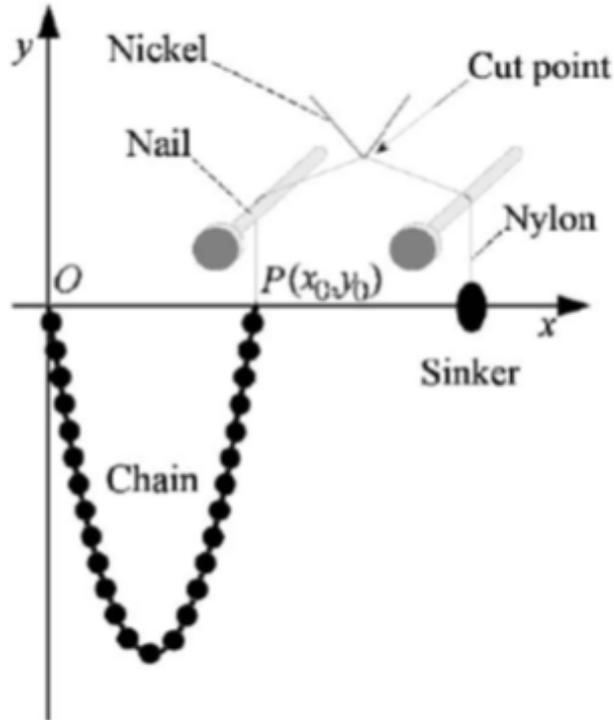


Figura 3.2: esquema del arreglo usado en nuestro estudio

Como se calculó en la referencia 4 el tiempo $t_c(L)$ en el que la punta de la cadena doblada alcanza su posición más baja es igual a

$$t_c(L) = 0,847213t_b(L), \quad (3.7)$$

Donde $t_b(L)$ es el tiempo de la caída libre como se muestra en la figura 5 de la referencia. 4, se establece el tiempo de forma experimental en la caída de cadena decrece con el Δx de acuerdo con el valor teórico solamente en el $\Delta x \approx 0,05L$

3.2. Experimentos de laboratorio

El enfoque de nuestro estudio experimental es la dinámica de la caída de la cadena, con un interés particular en comparar esto a la dinámica de la caída libre. Para comparar las diferencias en las trayectorias para los dos casos, diseñamos un arreglo experimental que permite grabar de forma simultánea el movimiento de los dos objetos.

Utilizamos una cadena de esferas y segmentos de acero inoxidable totalmente idénticas que se unen una tras otra como se aprecia en la figura 2

La longitud total del segmento es de $l = 4,46 \mp 0,01 \times 10^{-3} m$ y el diámetro de las esferas es de $\phi = 3,26 \mp 0,01 \times 10^{-3} m$ y además de su radio mínimo de curvatura en el cual la cadena puede existir sin llevar una energía elástica es $R_{min} = 4,080 \mp 0,02 \times 10^{-3} m$ y además utilizamos una longitud de la cadena de $L = 1,022 m$ que corresponde a 229 segmentos y para un total de masa igual a $M = 2,08 \mp 0,01 \times 10^{-2} kg$.

La cadena se ata firmemente en uno de sus extremos a un soporte cuyo origen es O por medio de un hilo delgado para tejer o coser ver figura 2. En el otro extremo situado en el punto $p = (x_0, y_0)$ de la cadena termina con una barra (se abrió y se quitó la última esfera) para atarla nosotros utilizamos un hilo delgado de nylon (hilo para pescar con un diámetro de $10^{-4} m$.) el peso que sostiene a la punta de la cadena (es un peso que se utiliza para hundir una línea de pesca) con una masa de $M = 10^{-2} kg$. Es unido a la otra parte de la línea del hilo de Nylon (con una longitud de $0.05 m$) entonces extendemos la el hilo de nylon entre dos soportes metálicos y un alambre de níquel con un diámetro de $10^{-4} m$, como se muestra en la figura 2.

El sistema entero es ajustado que es la masa que equilibra, y ambas puntas de la cadena estén al mismo nivel $y=0$, el armado puede ser desplazado de forma horizontal, para poder variar la posición horizontal inicial que es la separación entre las dos puntas de las cadenas. Debido a que la masa de equilibrio es la mitad de la masa total de la cadena M , el sistema siempre está en equilibrio. (El equilibrio mecánico es asegurado por la fricción que se lleva a cabo en las partes de contacto del hilo de nylon con los soportes metálicos y el alambre metálico. Así el arreglo inicial después de amortiguar todas las perturbaciones. Esta es cercana a una curva catenaria.

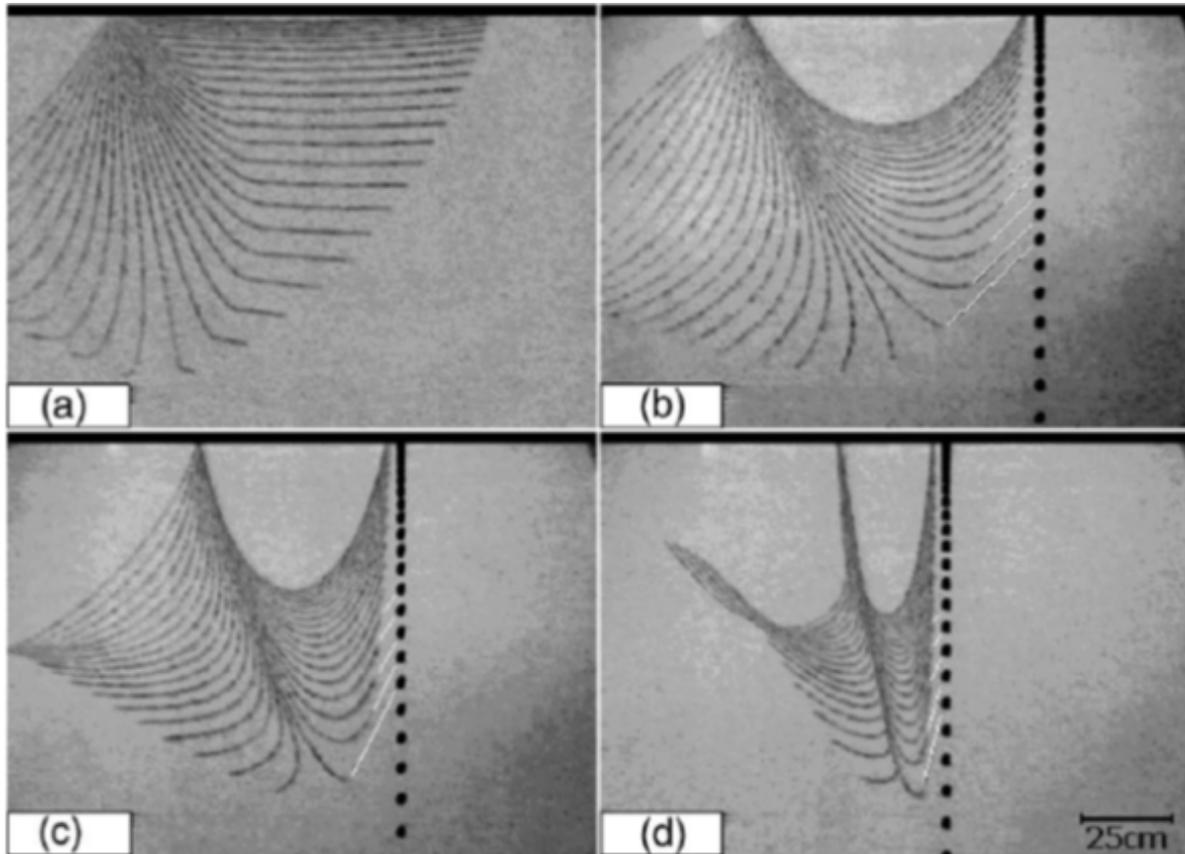


Figura 3.3: formaciones sucesivas de la cadena que cae vs tiempo la parte izquierda de la cadena permanece unida al cuadro mientras que la parte final derecha está en caída libre debido a la acción de la gravedad. En (b),(c) y (d) líneas en blanco han sido realizadas en la secuencia fotográfica para conectar la caída libre de la punta de la cadena con el peso para hundir hilo de pesca en caída libre, para las últimas cinco imágenes antes de la máxima extensión de la cadena, cuya longitud es de $L=1.022$ m, el tiempo entre las imágenes sucesivas es $1/50$ s, y la separación inicial entre la punta de la cadena es (a) $x_0=1.019$ m. (b) 0.765 m (c) 0.510 m. (d) 0.255 m.

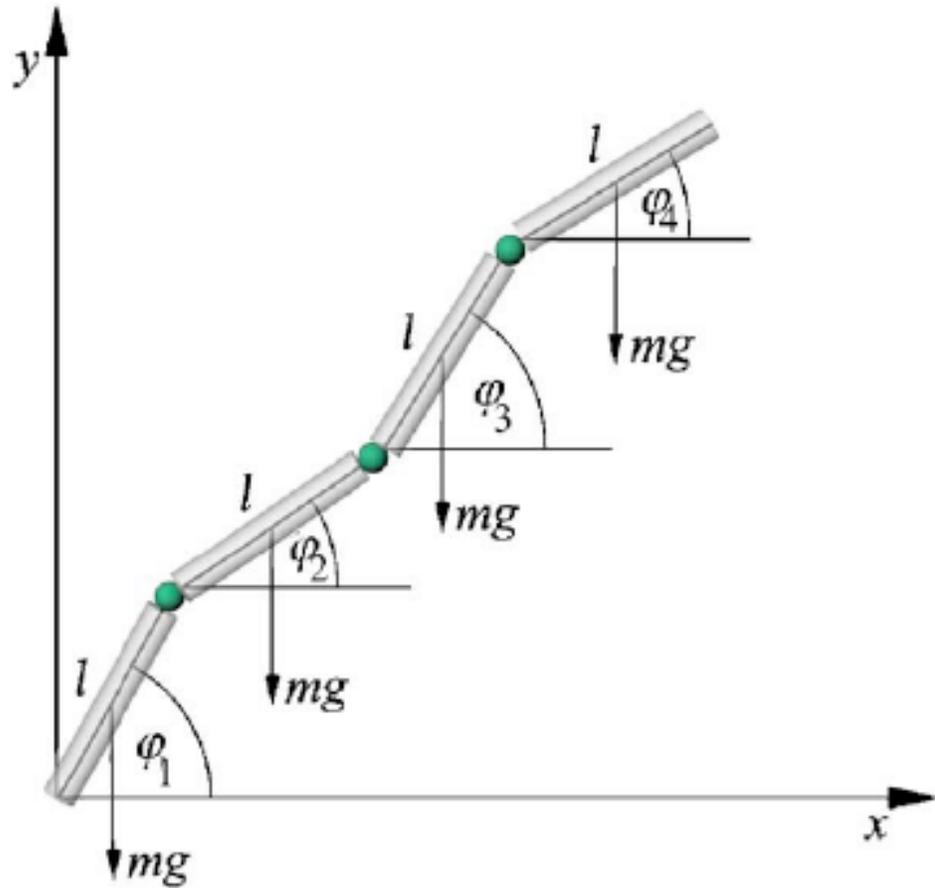


Figura 3.4: Representación esquemática del modelo φ_1 que corresponde al ángulo de inclinación, m la masa del segmento de la cadena y g la aceleración de la gravedad.

Haciendo pasar un voltaje alto y una corriente (cerca de 1 A) através del cable metálico resultando en el corte de manera súbita del hilo de nylon en donde hace contacto con el alambre de nylon. La masa de equilibrio y la punta de la cadena comienzan a caer de manera simultánea y comienza la caída libre bajo la acción de la gravedad.

Note que ambos caen con un pedazo de hilo de nylon, pero como la fuerza que empujaba al hilo en contra de los soportes desaparece, la fuerza de fricción desaparece tan pronto con el hilo es cortado. Y además de esto durante la caída libre la masa del hilo de nylon es despreciable en comparación con la masa de la cadena y la masa de equilibrio.

La caída de la cadena y la masa de equilibrio fueron grabadas con una cámara de video estándar y grabado en un video casete. La velocidad de grabación ($1/4000s$) que es adecuada para obtener imágenes claras para ambos objetos la cadena y la masa de equilibrio. Los eventos de grabación fueron digitalizados por equipo de cómputo con un tablero capturador de datos y para un análisis final un software analizador de imágenes que inicialmente analizaba 25 cuadros intercalados por segundo con esto se duplica la resolución en el tiempo pero tenemos una pérdida de la resolución espacial que típicamente es 4mm por pixel.

Las posiciones para la caída de la cadena y la masa de equilibrio a tiempos consecutivos es $t_i, i = 1, 2, 3, \dots$, son determinados de las imágenes digitalizadas. Para simplificar los resultados. Las posiciones determinadas de manera experimental para los objetos en caída esta dados por la distancia vertical h y por la distancia horizontal w que son definidas por las desviaciones de sus $x(t)$ y $y(t)$ coordenadas de sus valores iniciales (x_0, y_0) :

$$w(t) = x_0 - x(t), \quad (3.8)$$

$$h(t) = y_0 - y(t), \quad (3.9)$$

Nos referiremos a h y w como las distancias de caída horizontal y vertical respectivamente. De acuerdo a nuestras definiciones ambas distancias de caída son positivas en las primera parte del desarrollo de la caída libre en todos los experimentos $y_0 = 0$ y x_0 fue variado de cuatro maneras desde 1 m a 0,25m. note que debido a la punta de la cadena sin movimiento es ajustada al punto $(0, 0)$ y la separación horizontal inicial donde la punta de la cadena termina es $\Delta x = x_0$ y nosotros denotamos la separación inicial con x_0 .

3.3. Modelo de la caída de la cadena y sus ecuaciones de movimiento

Podemos definir varios modelos de forma discreta para la cadena en lo siguiente presentaremos uno de ellos. Las ecuaciones de movimiento deben ser formuladas para el caso en el que una de las partes finales de la cadena está sujeta a un soporte mientras que el otro está libre. Modelos similares han sido considerados por otros investigadores.

La parte libre de la cadena se mueve bajo la acción de la gravedad. Para simplificar el modelo. Debemos asumir que el movimiento solo se permite de manera vertical denotado por el plano x, y . la cadena tiene una masa M , una longitud L y formada por n segmentos cilíndricos con masas $m_i = m = M/n$ y longitudes $l_i = l = L/n$, todos los segmentos son considerados rígidos y que no pueden deformarse. Segmentos consecutivos son unidos por uniones con fricción. En la figura cuatro se muestra nuestro modelo.

Para formular ecuaciones de movimiento generalizadas las coordenadas deben especificarse. Así nosotros indicando la inclinación del segmento consecutivo con respecto al eje horizontal x .

La posición del primer elemento está dado por el ángulo φ_1 similarmente la posición del segundo elemento está dado por φ_2 el arreglo global para la cadena está expresado únicamente por los ángulos φ_i donde $i = 1 \dots n$.

Las coordenadas cartesianas para el i -ésimo centro de masa (x_i, y_i) puede escribirse como:

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} l \cos \varphi_j + \frac{1}{2} l \cos \varphi_i, \quad (3.10)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} l \sin \varphi_j + \frac{1}{2} l \sin \varphi_i, \quad (3.11)$$

Utilizamos coordenadas generalizadas φ_i para derivar las ecuaciones de movimiento de Lagrange. El movimiento de la cadena es considerado un movimiento combinado de traslación y rotación de sus segmentos cada segmento tiene un momento de inercia

de $I_i = 1/12ml^2$. Calculado cerca de su eje perpendicular (x, y) plano y pasando por su centro de masa del segmento. si tomamos en consideración las relaciones dadas en la ecuaciones (9) la energía cinética de la cadena está dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [m(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + I_i \dot{\varphi}_i^2], \quad (3.12)$$

Donde el punto representa la derivada con respecto al tiempo t . la energía potencial del i ésimo segmento está dado por mgy_i donde g es la aceleración de la gravedad así la energía potencial de la cadena esta dado por:

$$U = \sum_{i=1}^n mgy_i, \quad (3.13)$$

Para hacer el modelo más general introduciremos el amortiguamiento con la función de disipación de Raleigh.

$$R = \frac{1}{2}r \sum_{j=1}^n (\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}_{j-1}), \quad (3.14)$$

Donde r es el coeficiente de disipación. Asumimos que la unión que conecta al primer elemento cadena con el soporte está libre de disipación, que es equivalente a asumir que $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_1$ punto arriba

El movimiento en la caída de la cadena están gobernadas por el sistema de ecuaciones Lagrangianas de segundo orden.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0 \quad (3.15)$$

Donde $L = T - U$ es el sistema Lagrangiano. Aplicando las ecuaciones 10-13. Encontramos un conjunto de ecuaciones que describen el movimiento de la cadena.

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} \ddot{\varphi}_j = - \sum_{j=1}^n m_{i,j} s_{i,j} \dot{\varphi}_j^2 + \frac{r}{ml^2} (\dot{\varphi}_{i-1} - 2\dot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_{i+1}) - \frac{g}{l} a_i c_i, \quad (3.16)$$

Donde $c_i = \cos(\varphi_i)$, $c_{i,j} = \cos(\varphi_i - \varphi_j)$, $s_{i,j} = \sin(\varphi_i - \varphi_j)$, $a_i = n - i + \frac{1}{2}$ y

$$m_{i,j} \left\{ \begin{array}{ll} n - i + \frac{1}{3} & (1 = j) \\ n - \text{máx}(1, j) + \frac{1}{2} & (1 \neq j) \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

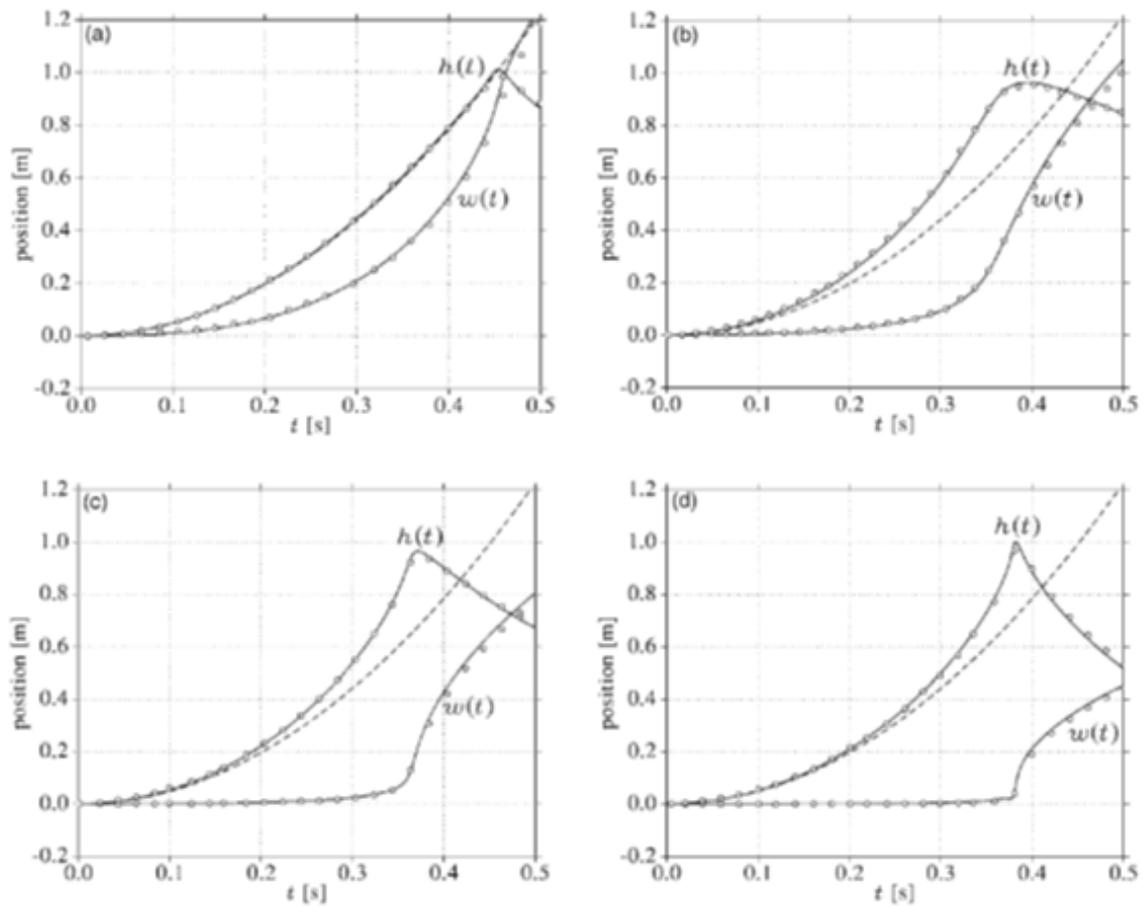


Figura 3.5: comparación de la distancia vertical h y horizontal w en la caída de la punta de la cadena encontrada experimentalmente en círculos y numéricamente en líneas solidas la parábola de la caída libre está dada en línea punteada.

Capítulo 4

Super caída libre de líquidos inviscidos en tubos concéntricos

4.1. Teoría para tubos concéntricos

En equilibrio, la longitud de cada tubo es llenado con líquido inviscido igual a una longitud L , que se supone es mucho más grande que la sección transversal del radio de los tubos. Durante el movimiento hacia abajo la interface del desplazamiento del líquido es denotado como sigue:

Sea un tubo de área A_1 conectado en $z = z_0$, a otro más grande con área A_2 , con $A_2 > A_1$. Sea la altura $h > z_0$ de la columna de líquido al tiempo $t = 0$. Si se quita repentinamente la tapa inferior en $z = 0$, entonces las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g. \quad (4.1)$$

la ecuación de conservación de masa es $u_2(t) = \alpha u_1(t)$, donde $\alpha = A_1/A_2 < 1$. Si la presión es $p = 0$ en $z = 0$ y $z = h$, se puede integrar la ecuación (4.1) desde z_{0+} hasta h y desde 0 hasta z_{0-} . Estas quedan

$$h''(h - z_0) = \frac{1}{\rho} p_{z_{0+}} - g(h - z_0) \quad (4.2)$$

$$\alpha h'' z_0 = -\frac{1}{\rho} p_{z_{0-}} - g z_0. \quad (4.3)$$

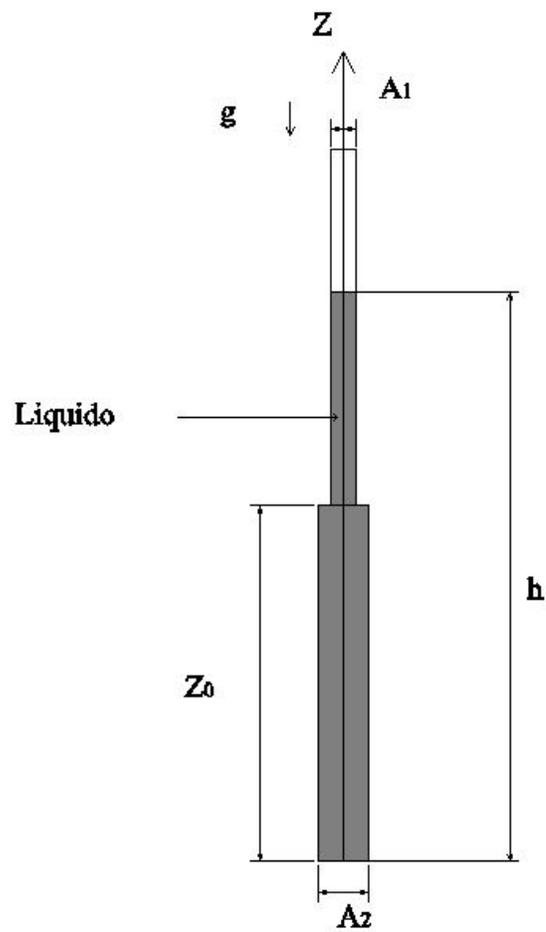


Figura 4.1: Esquema de probetas concéntricas. utilizada para el experimento.

De estas ecuaciones se tiene que en la interfaz:

$$\frac{1}{\rho}(p_{z_{0+}} - p_{z_{0-}}) = h'' [h - (1 - \alpha)z_0] + gh. \quad (4.4)$$

Las condiciones de salto son (sin pérdidas) de la ecuación (4.1):

$$\frac{1}{\rho}(p_{z_{0+}} - p_{z_{0-}}) = u_1^2(1 - \alpha^2) = -\frac{1}{2}(h')^2(1 - \alpha^2). \quad (4.5)$$

De las ecuaciones (4.4) y (4.5), la ecuación para $h(t)$ toma la forma:

$$h'' [h - (1 - \alpha)z_0] + \frac{1}{2}(h')^2(1 - \alpha^2) + gh = 0, \quad (4.6)$$

con las condiciones iniciales: $h(0) = h_0$ y $h'(0) = 0$. Al inicio entonces:

$$h''(0) = -\frac{gh}{h - (1 - \alpha)z_0},$$

$$h''(0) = -\frac{gh}{h - (1 - \alpha)z_0},$$

que es mayor que g , si $\alpha < 1$. Usando variables adimensionales, la ecuación (4.6) queda:

$$H'' [H - (1 - \alpha)\beta] + \frac{1}{2}(H')^2(1 - \alpha^2) + H = 0, \quad (4.7)$$

donde $H = h/h_0$, $\tau = \frac{t}{\sqrt{g/h_0}}$ y $\beta = z_0/h_0$. Las condiciones iniciales son $H(0) = 1$ y $H'(0) = 0$. La ecuación (4.7) es autónoma y puede reducirse a:

$$\frac{dV}{dH} [H - (1 - \alpha)\beta] + V(1 - \alpha^2) + H = 0 \quad (4.8)$$

donde $V = 1/2(dH/d\tau)^2$ es la energía cinética adimensional y H es la energía potencial adimensional. Para $\alpha = 1$ (caída libre) resulta $V = 1 - H$. La fig. ?? muestra la solución de la ecuación (4.8).

4.2. Cálculos de las α del experimento

A partir de los resultados teóricos podemos observar que la relación de áreas es muy importante en la ejecución de los experimentos, abajo se realizan algunos cálculos para encontrar α en dos casos, estos valores corresponden a las probetas utilizadas en los experimentos y a los resultados medidos.

$$D_1 = 1\frac{1}{4}'' = 1,25 * 2,54 = 3.175, \text{ área}$$

1 | 2

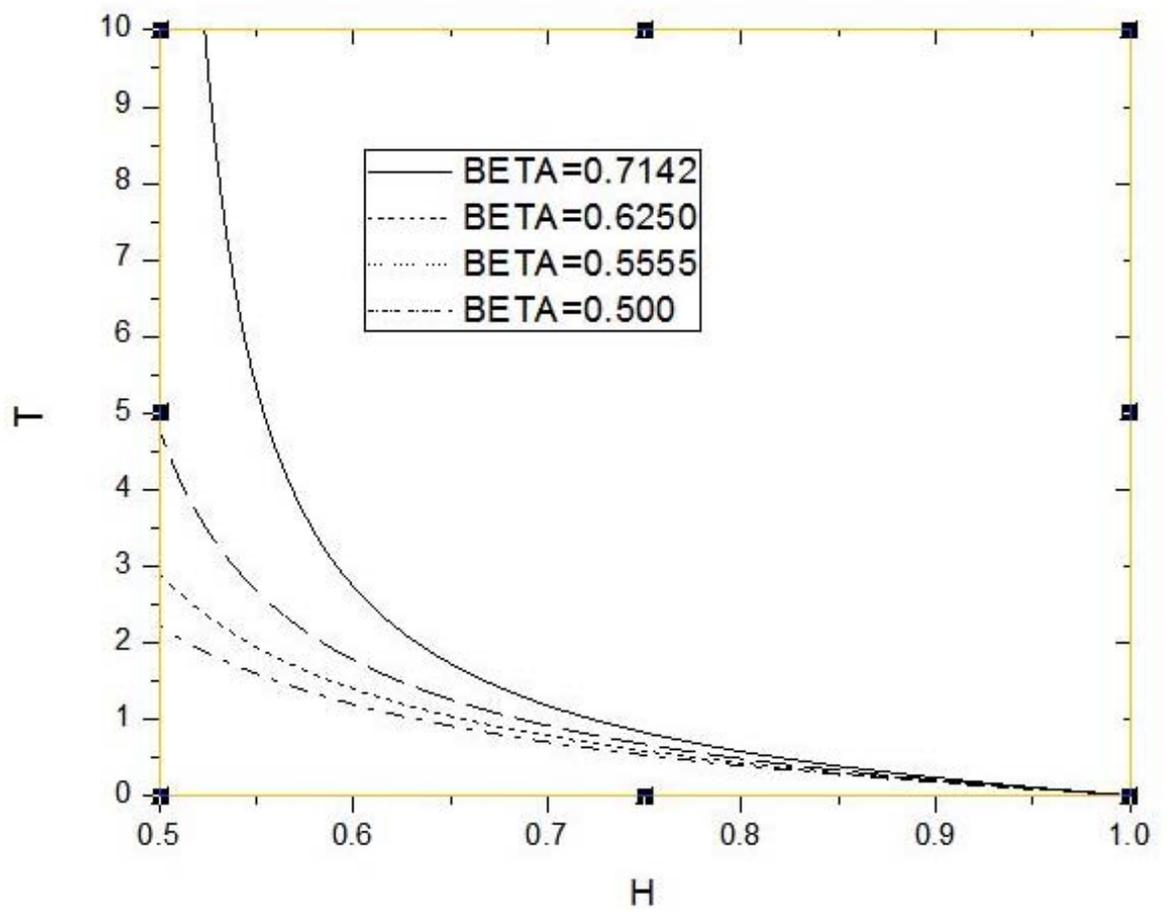


Figura 4.2: grafica energía potencial vs energía cinética.

$$D_2 = 2\frac{1}{4}'' = 2,25 * 2,54 = 5.715, \alpha = A_1/A_2 = D_1^2/D_2^2 = (3.175/5.715)^2 = 0,30864$$

$$D'_1 = \frac{3}{4}'' = 0,75 * 2,54 = 1.905$$

$$D'_2 = 1\frac{3}{4}'' = 1,75 * 2,54 = 4.445, \alpha = A_1/A_2 = D_1'^2/D_2'^2 = (1.905/4.445)^2 = 0,18367$$

$$\frac{h''(0)}{g} = -\frac{h}{h - (1 - \alpha)z_0},$$

4.3. Adimensionalización de la ecuación

Ecuación no adimensionalizada para ttubos concentricos:

$$h'' [h - (1 - \alpha) Z_0] + \frac{1}{2}(h')^2 (1 - \alpha^2) + gh = 0$$

Proponiendo variables adimensionales para adimensionalizar la ecuacion:

$$H = \frac{h}{h_0},$$

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\frac{h_0}{g}}},$$

$$\beta = \frac{Z_0}{h_0},$$

Así tenemos:

$$\frac{d^2h}{dt^2} [h - (1 - \alpha) Z_0] + \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 (1 - \alpha^2) + gh = 0,$$

Introduciendo nuestras propuestas para adimensionalizar

$$\frac{h_0}{g} \frac{d^2h}{dt^2} [h_0H - (1 - \alpha) h_0\beta] + \frac{1}{2} \left[\frac{h_0^2}{g} \left[\frac{dH}{d\tau} \right]^2 \right] (1 - \alpha^2) + gh_0H = 0,$$

Factorizando y eliminando terminos semejantes

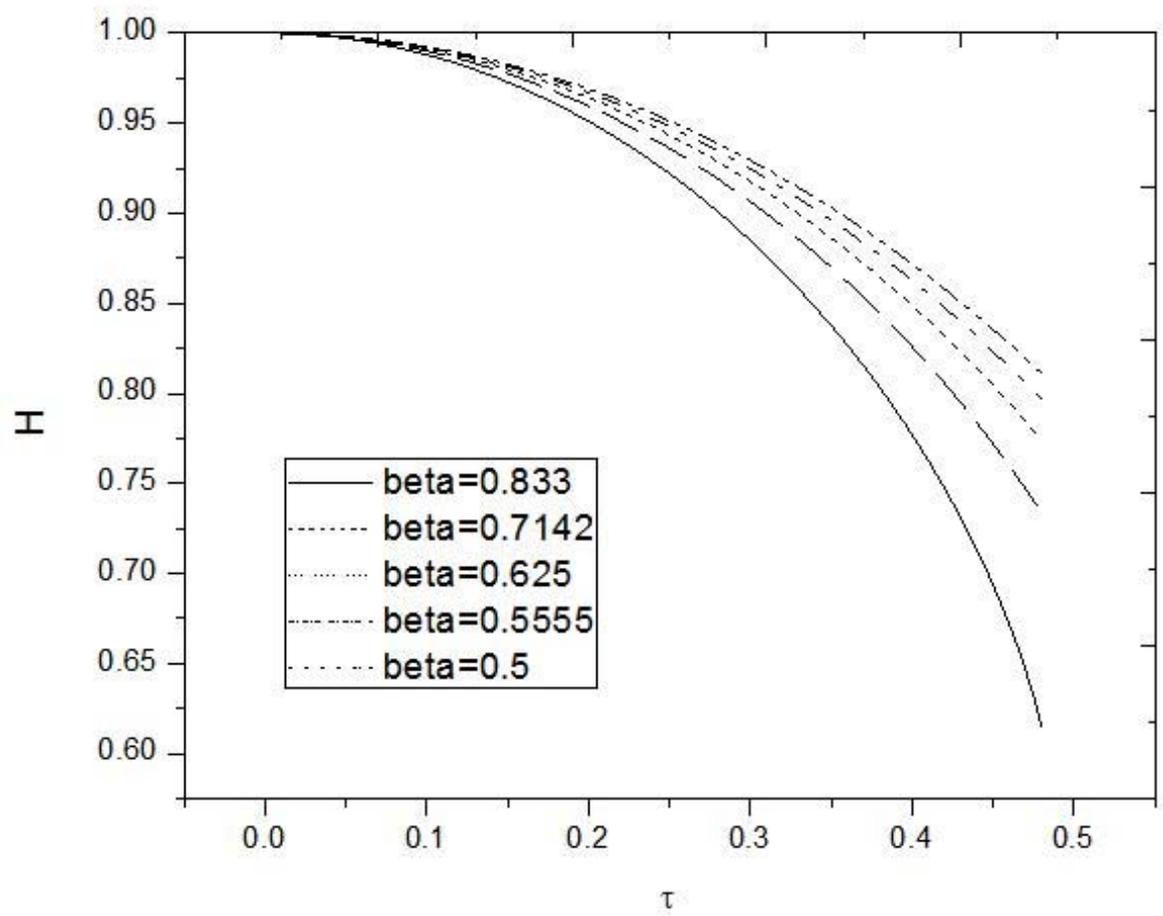
$$h_0g \frac{d^2h}{dt^2} [H - (1 - \alpha) \beta] + h_0g \frac{1}{2} \left[\frac{dH}{d\tau} \right]^2 (1 - \alpha^2) + gh_0H = 0,$$

Dividiendo todo entre h_0g tenemos:

$$\frac{d^2h}{dt^2} [H - (1 - \alpha) \beta] + \frac{1}{2} \left[\frac{dH}{d\tau} \right]^2 (1 - \alpha^2) + H = 0,$$

Entonces:

1 2

Figura 4.3: figura posición con respecto al tiempo para diferentes β

$$\ddot{H} [H - (1 - \alpha) \beta] + \frac{1}{2} [\dot{H}]^2 (1 - \alpha^2) + H = 0,$$

graficas de la evolucion posicion vs tiempo de la superficie libre H, como funcion del tiempo.

Capítulo 5

Teoría en placas planas delgadas e inclinadas

Hemos considerado placas planas con la sección transversal con las siguientes dimensiones $L(z)$ y $W(z)$ con una apertura de ángulos α y β respectivamente las cuales son llenadas con un líquido hasta una altura $h(0)$. La superficie libre superior $z = h(t)$ y la salida en $z = (0)$ ambas abiertas a la atmosfera . Así la variación de la sección transversal de la apertura entre la apertura de las placas está dada por:

$$a(z) = L(z)W(z), \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5.4)$$

Ahora asumimos que la aproximación para la placa delgada e inclinada; tomamos el promedio de la área para la velocidad vertical.

$$\bar{w}(z, t) = \frac{1}{(a(z))} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} w(x, y, z, t) dx dy, \quad (5.5)$$

A consecuencia de la ecuación de continuidad (eq4) el flujo másico es:

$$\dot{m}(t) = a(z)w(z, t), \quad (5.6)$$

Es independiente a la coordenada z . Esto implica que como el área se incrementa hacia abajo, el promedio de la velocidad. La ecuación del movimiento (eq3) para esta velocidad promedio vertical es:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g, \quad (5.7)$$

Integrando a la salida cuando $z = 0$ para la superficie libre en $z = h(t)$ y aplicando $p(0) = p(h(t)) = 0$:

$$a(h) \left(\int_0^h \frac{d(z)}{a(z)} \right) \ddot{h} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2(h)}{a^3(h)} \right) \dot{h}^2 = -gh, \quad (5.8)$$

Esto es lo que originalmente fue reportado por Paterson(1983). Evaluando la aceleración inicial para una columna de fluido cayendo desde el estado de reposo tenemos:

$$\ddot{h}(0) = \frac{g(0)}{a(h(0) \int_0^h \frac{d(z)}{a(z)}}, \quad (5.9)$$

5.1. Paredes planas divergentes

Ahora nosotros consideramos el caso para un par de paredes planas opuestas y divergentes a un ángulo α y el otro par de paredes contrarias a un ángulo γ .

$$L(z) = L(0) - z \tan \alpha, \quad W(z) = W(0) - z \tan \gamma, \quad (5.10)$$

Así la variación de la sección transversal es:

$$a(z) = L(0)W(0) \left(1 - \frac{\tan \alpha}{L(0)} z\right) \left(1 - \frac{\tan \gamma}{W(0)} z\right), \quad (5.11)$$

Evaluando la integral en el denominador de la ecuación (9) para (z)tenemos:

$$\int_0^{h(0)} \frac{d(z)}{a(z)} = \frac{[\ln(1 - \frac{h(0)}{L(0)\tan \alpha}) - \ln(1 - \frac{h(0)}{W(0)\tan \gamma})]}{W(0)\tan \alpha - L(0)\tan \gamma}, \quad (5.12)$$

Evaluando la ecuación (11) en $t = 0$ tenemos:

$$a(h(0)) = L(0)W(0) \left(1 - \frac{h(0)}{L(0)} \tan \alpha\right) \left(1 - \frac{h(0)}{W(0)} \tan \gamma\right), \quad (5.13)$$

En ambas ecuaciones (12) and (13) identificamos los parámetros de expansión

$$\beta_1 = \frac{h(0)}{L(0)} \tan \alpha, \beta_2 = \frac{h(0)}{W(0)} \tan \gamma, \quad (5.14)$$

Utilizando esto e introduciendo la ecuación (12) y (13) dentro de (9) tenemos el resultado deseado:

$$\ddot{h}(t = 0) = \frac{(\beta_1 - \beta_2) g}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) [\ln(1 - \beta_1) - \ln(1 - \beta_2)]}, \quad (5.15)$$

5.2. Casos especiales

Ahora veremos tres casos especiales para las paredes divergentes.

Caso 1: Un conjunto de placas paralelas

Escogiendo $\gamma = 0$ tenemos $\beta_2 = 0$ en este caso la aceleración inicial en la ecuación (15) es:

$$\ddot{h}(t = 0) = \frac{(\beta_1) g}{(1 - \beta_1) [\ln(1 - \beta_1)]}, \quad (5.16)$$

Caso 2: Todas las placas son paralelas

Si en la ecuación (16) colocamos $\beta_1 = 0$ obtendremos una forma indeterminada. De este modo aplicando la regla de L'Hopital's tenemos:

$$\ddot{h}(t = 0) = -g, \quad (5.17)$$

Caso 3: Secciones simétricas cuadradas con paredes divergentes

Si en la ecuación (15) colocamos $\gamma = \alpha$, $W(0) = L(0)$, entonces para esta sección cuadrada $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ obtendremos otra vez una forma indeterminada. Aplicando la regla de L'Hopital's tenemos:

$$\ddot{h}(t = 0) = \frac{-g}{(1 - \beta)} \quad (5.18)$$

Que es idéntica a la encontrada por Villermaux and Pomeau (2010) pero con nuestra definición para la expansión de parámetros es dada por:

$$\beta = \frac{h(0)}{L(0)} \tan \alpha = 1 - \frac{L(h(0))}{L(0)} \quad (5.19)$$

Esta ecuación tiene solución analítica.

gráficas comparando los resultados experimentales vs caída libre.

1

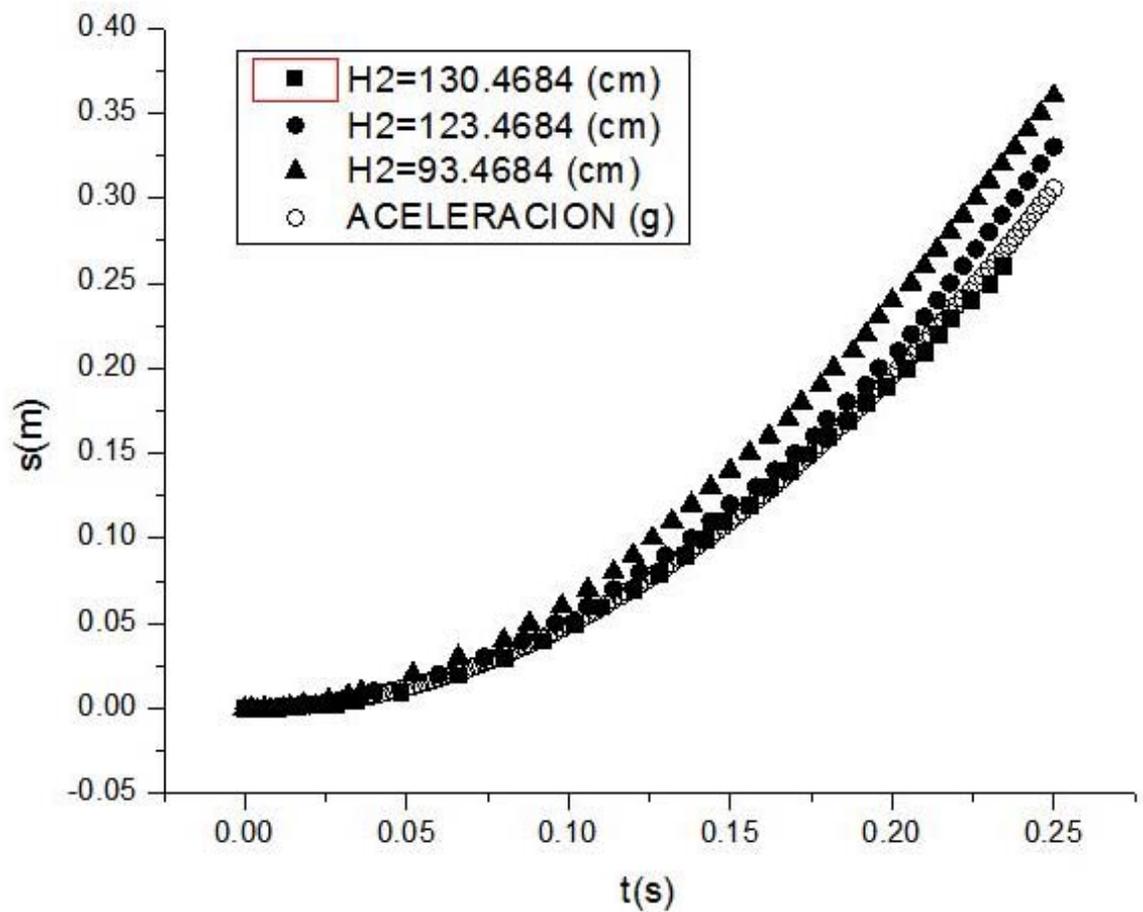


Figura 5.1: Grafica de los resultados experimentales comparados con los de caída libre. $H_2 = 93,4686$ cm (llenado total de la probeta, línea en triángulos), $H_2 = 123,4684$ cm (parte media de la probeta, línea círculos llenos), $H_2 = 123,4684$ cm (parte inferior probeta, línea en cuadro llenos) se puede observar como esta última está alcanza la aceleración de la gravedad.

Bibliografía

- [1] W. Tomaszewski, P. Pieranski and J.-C. Geminard, *Am. J. Phys.* **74** (2006) 776.
- [2] Bernoulli, D. 1738 *Hydrodynamica*. Argentorati (Strassburg), Germany: Johann Reinhold, Dulsecker.
- [3] M. G. Calkin R. H. March, “The dynamics of a falling chain: I,” *Am. Jour. Phys.* **57** (1989) 154–157 1989 ..
- [4] E. Villermaux and Y. Pomeau, *Jour. Fluid Mech.* **642** (2010) 147.
- [5] K. Hirata and A. D. D. Craik, *Eur. J. Mech. B Fluids* 22, 3–26 2003

Parte I

Apendice

Código Numérico para la Solución del sistema de ecuaciones adimensionales:

%SOLUCIÓN PARA UNA ECUACION DIFERENCIAL NO LINEAL DE SEGUNDO ORDEN

% 20 JUNIO_2011

$$\% \ddot{H} [H - (1 - \alpha)\beta] + \frac{1}{2} [\dot{H}]^2 (1 - \alpha^2) + H = 0$$

% PARA PODER OBTENER SISTEMA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN TENEMOS QUE LINEALIZAR LA ECUACIÓN

$$Z = \begin{matrix} Z_1 & = & H \\ Z_2 & = & H' \end{matrix}$$

$$Z' = \begin{matrix} H' & = & Z_2 \\ H'' & = & -\frac{1}{2} \frac{[Z_2]^2(1-\alpha^2) - Z_1}{[Z_1 - (1-\alpha)\beta]} \end{matrix}$$

% obteniendo el código de matlab para la solución de este sistema de ecuaciones:

% Creando el archivo M-file para poner el sistema de ecuaciones de primer orden dentro de una función

declarando una matriz de 2,1

% Resolviendo para $\alpha = 0,3043$ y un $\beta = 0,5$

function [out]= *concentricaltubes* (t, in)

out = zeros(2,1);

out(1) = in(2);

out(2) = $\left(0,5 * (in(2)^2) * (1 - (0,3043)^2 - in(1))\right) / (in(1) - (1 - 0,3048) * 0,5)$

% Código de matlab para resolver el sistema de ecuaciones

% Usando la función ODE45 para resolver ODE's Usando un Runge-Kutta de Cuarto Orden

% *****

```
% Para resolver una ecuación Adimensional Para Tubos Concentricos

% Usando la funcion ODE45 para resolver ecuciones diferenciales con valores ini-
ciales

% Resolviendo la función tubos concentricos.

% *****
cls, clear,clf
ho=[0,1;0]
tspan=[0,5 : 0,001 : 1,0]
[t, H] = ode45('concentricaltubes',tspan,ho)
plot(t,h,'k')
grid on
hold on
save tiempo.dat t / ascii;
save desplazamiento H/ ascii;
```

Parte II

Circuito neumático

El circuito neumático dentro del experimento de super caída libre es una parte importante , ya que esta nos proporciona la ayuda en la apertura y esta se realiza en un tiempo 0.01s. y esto permite que podamos observar el fenomeno de súper caída libre.

Neumática: estudio y uso del aire comprimido para producir trabajo. El aire comprimido es aire tomado de la atmósfera y confinado a presión en un espacio reducido. En la industria son muy útiles los sistemas neumáticos ya que proporcionan movimiento lineal y desarrollan grandes fuerzas.

Los compresores: son capaces de suministrar aire comprimido

Principio de pascal: La característica estructural de los fluidos hace que en ellos se transmitan presiones, a diferencia de lo que ocurre en los sólidos, que transmiten fuerzas. Este comportamiento fue descubierto por pascal. Un cambio de presión aplicado a un fluido en reposo dentro de un recipiente se transmite sin alteración a través de todo el fluido. Es igual en todas las direcciones y actúa mediante fuerzas perpendiculares a las paredes que lo contienen El principio de Pascal fundamenta el funcionamiento de las genéricamente llamadas máquinas hidráulicas: la prensa, el gato, el freno, el ascensor y la grúa, entre otras.

Cilindro:

Dimensión (In) 7/8"

Función

- Simple Efecto Vástago Normalmente Adentro
- Simple Efecto Vástago Normalmente Afuera
- Amortiguado Neumático
- Magnético

Accesorios

- Pie
- Oscilante Trasero
- Horquilla
- Rotula

Opciones

- Sensores magnéticos
- Sujeción sensor magnético

Conexiones rapidas: Para realizar uniones de ese tipo.



Figura 2: Piston utilizado para el cierre y destape del experimento



Figura 3: Conexiones rápidas utilizadas en pistón, reductor y válvulas



Figura 4: Manguera de 6mm para todas las conexiones del circuito neumático

Manguera de 6mm para uso didáctico:

Caudal de válvulas

Los datos de pérdida de presión y de caudal de aire de válvulas neumáticas son muy interesantes para la persona que las aplique. Para la elección de las válvulas deben conocerse:

- Volumen y velocidad del cilindro
- Cantidad de conmutaciones exigidas
- Caída de presión admisible

Es indispensable, pues, marcar las válvulas neumáticas con su caudal nominal VN.

En el cálculo de los valores de paso deben tenerse en cuenta diversos factores.

P1= presión en la entrada de la válvula

P2=presión en la salida de la válvula

■p= presión (p1-p2)

Vn= caudal nominal

En la medición,, el aire fluye a través de la válvula en un solo sentido. Se conoce la presión de entrada, y puede medirse la de salida. La diferencia entre estos dos valores es igual a la presión diferencial Ap. Con un caudalímetro se mide la cantidad de aire que pasa a través de la válvula.

El valor VN es un valor de calibración, referido a una presión de 600 kPa (6 bar), una caída de presión Ap - 100 kPa (1 bar) y una temperatura de 293 K (20 C Si se trabaja con otras presiones, caídas de presión y temperaturas, hay que calcular con el valor VN (caudal de aire).

Válvula 5/2



Figura 5: Válvulas 5/2 para control del pistón

Model/Series SYA5□40 (Body ported)

Valve model	Type of actuation	Pilot port size (Nominal size)	Port size		Flow characteristics ^{Normal}						Weight (g)		
					P, EA, EB	A, B	1 → 4/2 (P → A/B)			4/2 → 5/3 (A/B → EA/EB)			
							C [dm ³ /s-bar]	b	Cv	C [dm ³ /s-bar]		b	Cv
SYA5□20-01□	2 position	M5 x 0.8	1/8	Rc 1/8	Single	1.9	0.35	0.49	2.4	0.39	0.61	58	
					Double	1.7	0.43	0.45	1.8	0.35	0.46	64	
	3 position				Closed center	1.5	0.44	0.41	2.5 [1.5]	0.32 [0.43]	0.59 [0.40]	69	
					Exhaust center Pressure center	2.2 [0.91]	0.46 [0.58]	0.61 [0.28]	1.8	0.38	0.46		
SYA5□20-C4	2 position	M5 x 0.8	1/8	C4 (One-touch fitting bracket)	Single	0.75	0.43	0.20	0.85	0.64	0.30	82	
					Double	0.74	0.40	0.19	0.84	0.57	0.28	87	
	3 position				Closed center	0.75	0.36	0.19	0.84 [0.84]	0.64 [0.53]	0.30 [0.27]	93	
					Exhaust center Pressure center	0.78 [0.71]	0.44 [0.37]	0.21 [0.18]	0.84	0.57	0.27		
SYA5□20-C6	2 position	M5 x 0.8	1/8	C6 (One-touch fitting bracket)	Single	1.5	0.33	0.33	2.0	0.37	0.52	76	
					Double	1.3	0.31	0.33	1.6	0.32	0.39	82	
	3 position				Closed center	1.3	0.33	0.33	1.8 [1.4]	0.35 [0.37]	0.44 [0.35]	87	
					Exhaust center Pressure center	1.7 [0.80]	0.31 [0.47]	0.42 [0.23]	1.7	0.33	0.44		
SYA5□20-C8	2 position	M5 x 0.8	1/8	C8 (One-touch fitting bracket)	Single	1.9	0.21	0.45	2.3	0.29	0.57	68	
					Double	1.6	0.29	0.39	1.7	0.38	0.46	74	
	3 position				Closed center	1.4	0.38	0.39	2.0 [1.5]	0.37 [0.40]	0.52 [0.43]	79	
					Exhaust center Pressure center	2.2 [1.6]	0.32 [0.44]	0.56 [0.44]	1.8	0.41	0.50		

Figura 6: Descripción de válvulas 5/2

La figura se muestra una válvula distribuidora 5/2 que trabaja según el principio de las válvulas de disco flotante. Se invierte alternativamente por aire comprimido y permanece en la posición correspondiente hasta que recibe un impulso inverso. Al recibir presión, el émbolo de mando - como en una corredera longitudinal - se desplaza. En el centro de dicho émbolo se encuentra un disco con una junta anular, que une los conductos de trabajo A o B con empalme de presión P o los separa de este. El escape se realiza a través de R ó S.

Una placa de montaje universal, sobre la cual se fijan las válvulas, garantiza una intercambiabilidad rápida de las diversas válvulas.

Características

Válvula distribuidora 3/2, de accionamiento neumático

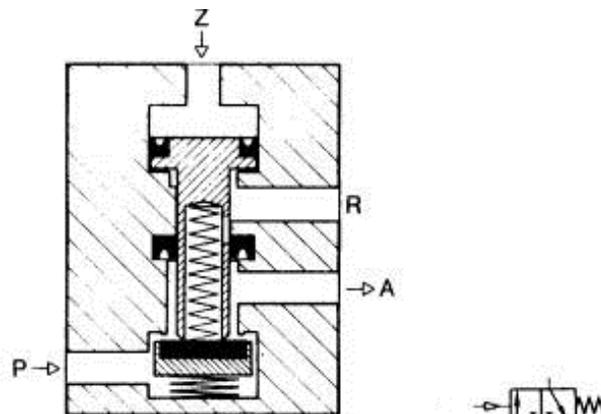


Figura 7:

Al aplicar aire comprimido al émbolo de mando a graves del empalme Z se desplaza el taqué de válvula venciendo la fuerza de muelle de reposicionamiento. Se unen los conductos P y A. Cuando se pone a escape el conducto de mando Z, el émbolo de mando regresa a su posición inicial por el efecto de muelle montado. El disco cierra el paso de P hacia A, El aire de salida de conducto de trabajo A puede escapar por R.

Válvula de simultaneidad

Esta válvula tiene dos entradas X o Y y una salida A. El aire comprimido puede pasar únicamente cuando hay presión en ambas entradas. Una señal de entrada en X ó Y interrumpe el caudal, en razón de un desequilibrio de las fuerzas que actúan sobre la pieza móvil. Cuando las señales están desplazadas cronológicamente, la última es la que llega a la salida A. Si las señales de entrada son de una presión distinta, la mayor cierra la válvula y la menor se dirige hacia la salida A.

Esta válvula se denomina también «módulo Y (AND)».

Se utiliza principalmente en mandos de enclavamiento, funciones de control y operaciones lógicas.

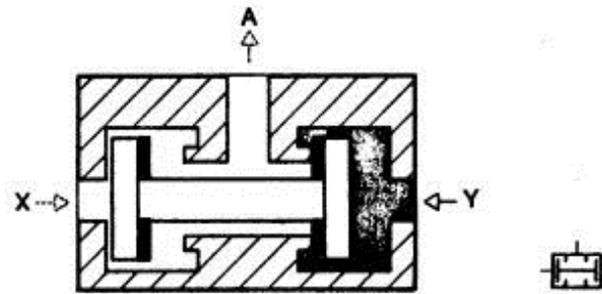


Figura 8: Esquema Valvula Y

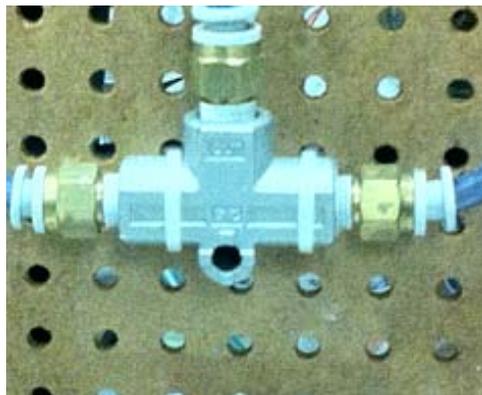


Figura 9: Valvula and

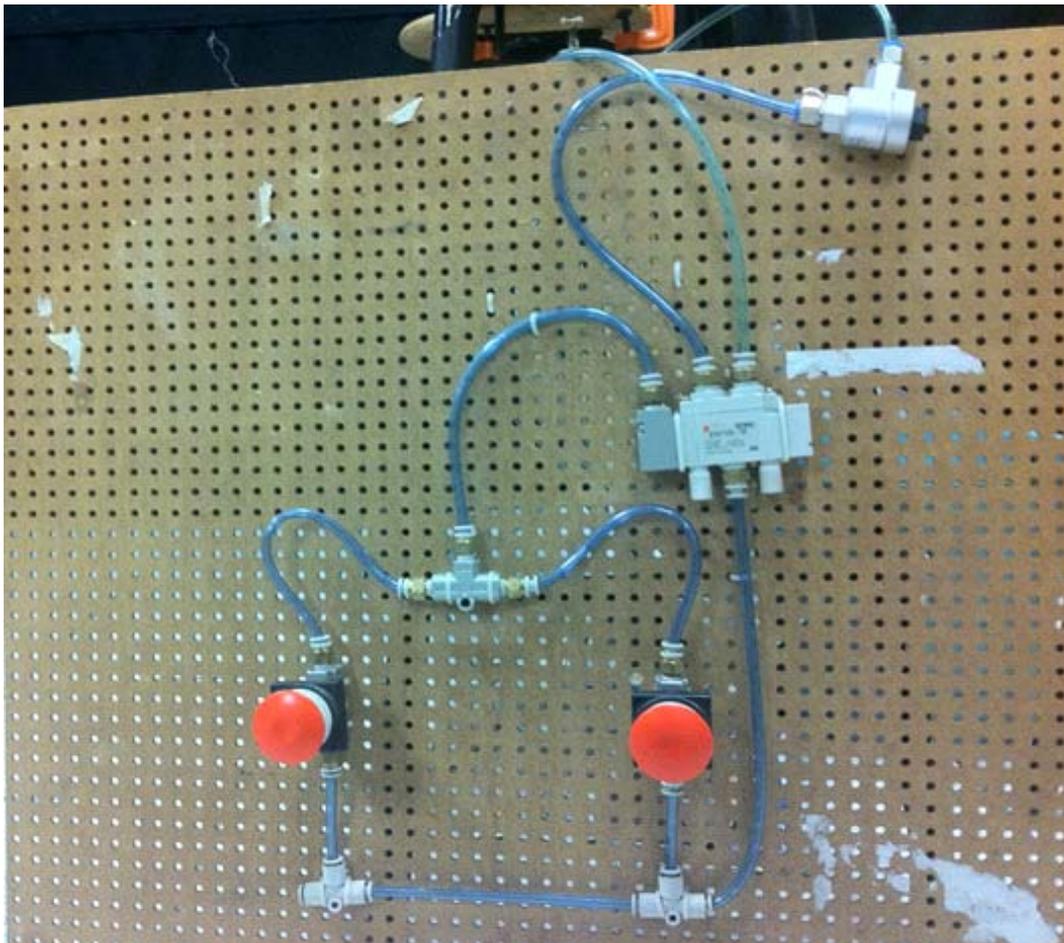


Figura 10: Circuito Neumático; Circuito de control para el cierre y la apertura de la probeta. el cual nos permitio el control del experimento.