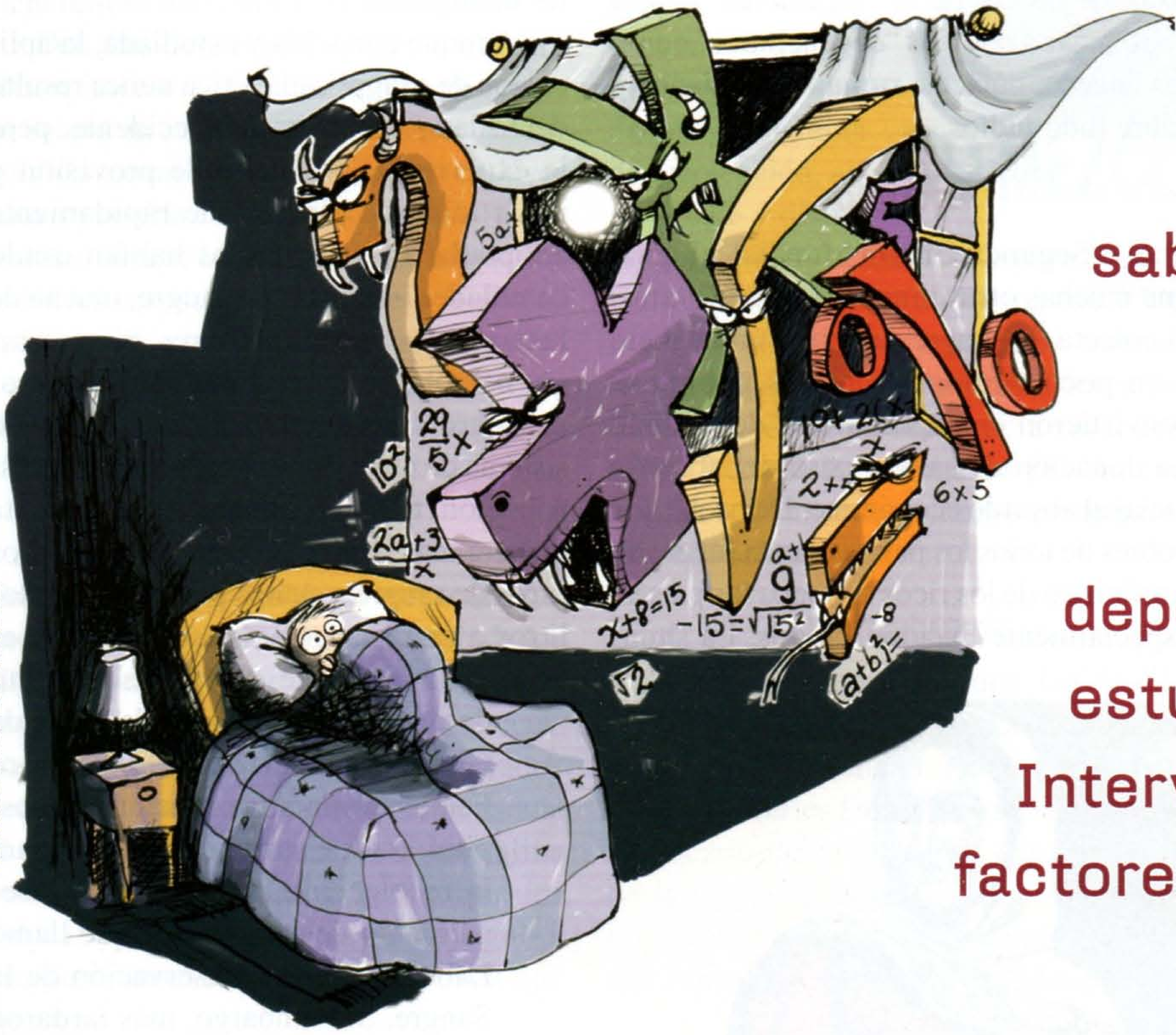
¡No se med *las* matemáti

Si tienes este problema, debes saber que hay solución. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no dependen solamente del estudiante y el profesor. Intervienen muchos otros factores y el primer paso es identificarlos.



Ilustraciones: Eva Lobatón

¿Te cuestan trabajo las matemáticas? No estás solo: a muchas personas se les dificulta aprender esta materia tan importante. Por suerte, esto puede tener remedio. Hoy en día existe una disciplina de las ciencias sociales llamada *didáctica de las matemáticas* o *matemática educativa* cuyo objetivo es entender por qué tantos niños, jóvenes y adultos de todo el mundo tienen ese problema.

Hace algunos años, la dificultad para aprender matemáticas se achacaba a que el alumno era un burro, o a que tenía malos profesores (los profesores tendían a favorecer la primera interpretación). Hoy las cosas están empezando a cambiar. Los investigadores en didáctica de las matemáticas nos han ayudado a entender que enseñar y aprender matemáticas es un proceso muy complejo que no sólo depende del estudiante y del profesor. También influyen factores físicos, psicológicos, sociales, políticos, económicos, institucionales y emocionales, que es importante identificar para ponerle remedio a la epidemia de alergia a las matemáticas.

Lo que no se dice

El salón de clases es una comunidad. Como cualquier comunidad organizada, tiene sus reglas. Algunas se comunican explícitamente: "hay que traer regla y compás" o "no pueden usar calculadora en el examen". Sin embargo, hay otras que no se anuncian, pero que de todos modos influyen en el aprendizaje de los estudiantes; son reglas implícitas, que se establecen cuando el profesor y los alumnos entran en el salón de clases con la intención de estudiar matemáticas. He aquí un ejemplo clásico:

Alrededor de 1980 un grupo de investigadores franceses propuso el siguiente problema a varios grupos de alumnos de entre siete y 10 años de edad: "En un barco

an
cas!

Mario Sánchez Aguilar

hay 7 cabras y 5 ovejas. ¿Qué edad tiene el capitán?" Está claro que los datos no bastan para contestar la pregunta. Es más, los datos ni siquiera son pertinentes; el número de ovejas y de cabras que haya en el barco no tiene que ver con la edad de su capitán. Sin embargo, la mayoría de los alumnos se esmeró en encontrar respuestas a como diera lugar. Así, ofrecieron resultados como 7 x 5 = 35. El capitán tiene 35 años.

¿Por qué casi todos los niños contestan el problema, si éste no se puede resolver? La explicación no es que los niños sean burros o no hayan leído con atención el enunciado. Que se sientan obligados a ofrecer cualquier respuesta, aunque sea incorrecta, se debe a una de esas reglas implícitas que influyen en las expectativas de los estudiantes cuando están en la clase de matemáticas. La regla dice (sin decirlo) que cuando el profesor propone un problema, éste siempre está bien planteado y tiene solución. Como los alumnos esperan que el problema tenga solución, tratarán de encontrarla usando los datos del enunciado. Que el problema sea absurdo simplemente no entra dentro de lo concebible.

En un salón de clases hay otras reglas tácitas como la de este ejemplo que hacen que los profesores y los estudiantes de matemáticas se comporten algunas veces de maneras inesperadas. Identificarlas te podría servir para mejorar tu desempeño, y a tus maestros para afinar sus métodos didácticos.

Metáforas engañosas

Hace algunos años, me encontraba dando una clase de matemáticas a un grupo de muchachos de secundaria. Estábamos estudiando la gráfica de la función matemática llamada *logaritmo*. La gráfica de esta función tiene la peculiaridad de que, conforme la variable x se hace más pequeña, la curva se va acercando cada vez más al eje y, pero sin tocarlo nunca. En matemáticas se dice que la gráfica se acerca *asintóticamente* al eje y, o bien, que éste es un *asíntota* de la función.

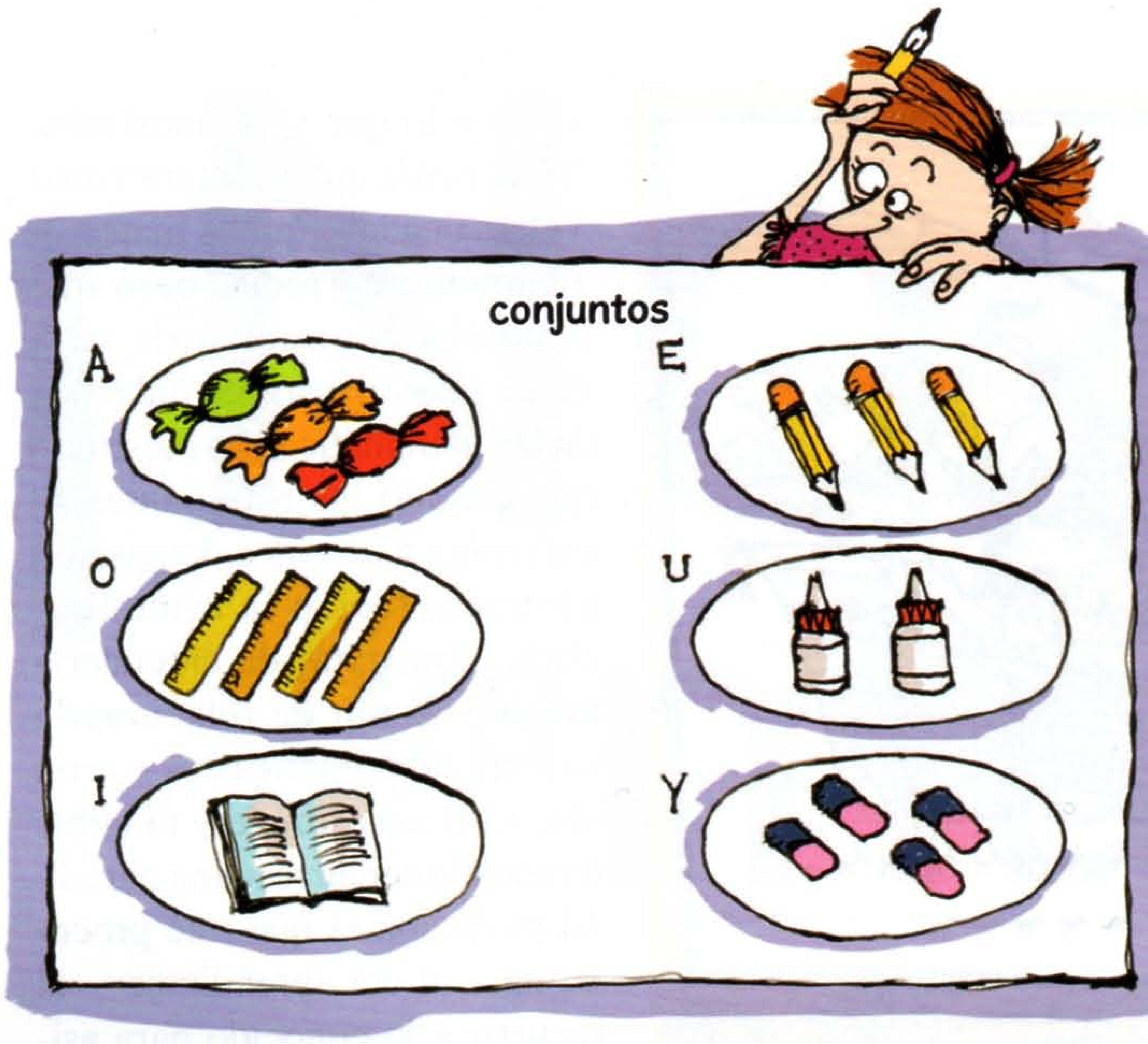
Gráfica de la función $f(x) = \log(x)$

En eso un estudiante me interrumpió. ¿Cómo era eso posible? Se puso en pie y caminó hacia la pared, explicando: "Si yo me acerco a la pared, aunque sea con pasos chiquitos, llegará un momento en que la tocaré. ¿Cómo es posible que la gráfica de la función se acerque y se acerque, pero nunca llegue al eje?"

Este muchacho estaba experimentando lo que se conoce como un *conflicto cognitivo*, una contradicción entre lo que sabía y lo que se le mostraba. Yo le pedía que aceptara como válida una idea que es matemáticamente correcta, pero que resultaba contradictoria para él. La investigación en didáctica de las matemáticas ha mostrado que cuando los estudiantes se enfrentan a una idea demasiado abstracta (como la asintoticidad), para tratar de entenderla muchos tratan de relacionarla —o incluso sustituirla— con otra idea más simple y tangible (como el acercarse a una pared). El problema es que este proceso natural del aprendizaje —el recurrir a lo conocido para asimilar lo desconocido— puede llevarnos a esperar que la idea abstracta se parezca en todo a la idea tangible con que la sustituimos. Pero una persona que se acerca a una pared real no es como una curva que se acerca a una "pared" matemática. Una diferencia fundamental es que la curva es una serie de puntos sin dimensiones igual que el eje, mientras que una persona y una pared son cosas voluminosas: por debajo de cierta distancia (por ejemplo, una milésima de milímetro) ya no tiene sentido decir que la persona y la pared no se están tocando. Esperar que las dos ideas sean idénticas puede cerrarte el paso al aprendizaje de la idea nueva en vez de facilitarlo.

Trampas de las palabras

Otros obstáculos al aprendizaje provienen de la manera de presentar los problemas en clase. Las palabras y los ejemplos que usa un profesor para explicar un tema matemático afectan la comprensión de los estudiantes, pero no siempre de manera



positiva. Tomemos como ejemplo el concepto matemático de conjunto. Muchos profesores y libros de texto acostumbran representar los conjuntos como colecciones de objetos físicos.

Esta representación escolar es útil para introducir y estudiar algunos otros conceptos relacionados, por ejemplo los de subconjunto e intersección de conjuntos. Sin embargo, puede hacer creer a los estudiantes que un conjunto matemático tiene las mismas propiedades que una colección de objetos físicos, lo cual no siempre es cierto. Un conjunto matemático puede contener un número infinito de elementos (como el conjunto de los números naturales) y hasta elementos imposibles de contar (como el conjunto de los números reales), lo que nunca ocurre con las colecciones de objetos, por numerosos que sean.

Así también, a algunos estudiantes se les puede dificultar el concepto de conjunto vacío (representado por $\emptyset$). La idea de conjunto sin elementos contradice la idea intuitiva de colección de objetos: no puede haber una colección de nada.

Ideas preconcebidas

Hay obstáculos al aprendizaje de las matemáticas que surgen cuando, al querer profundizar tu conocimiento, tus viejas ideas sobre el concepto matemático que quieres ampliar te empantanan. Consideremos la multiplicación aritmética.

En los primeros años de escuela aprendes que cuando se multiplican dos números naturales (por ejemplo 6 y 3) el producto siempre es mayor que cada uno de los factores. Sin embargo, cuando intervienen fracciones esto no es cierto. Si multiplicamos 6 x ½ el resultado es 3, que es menor que 6. Para extender tu concepto de la multiplicación a los números fraccionarios tienes que abandonar la idea antigua de que un producto siempre es mayor que sus factores. No es fácil desechar ideas que te han servido. Así, los viejos conocimientos que en cierto contexto fueron útiles pueden convertirse en un lastre para avanzar en el aprendizaje.

Oportunidades

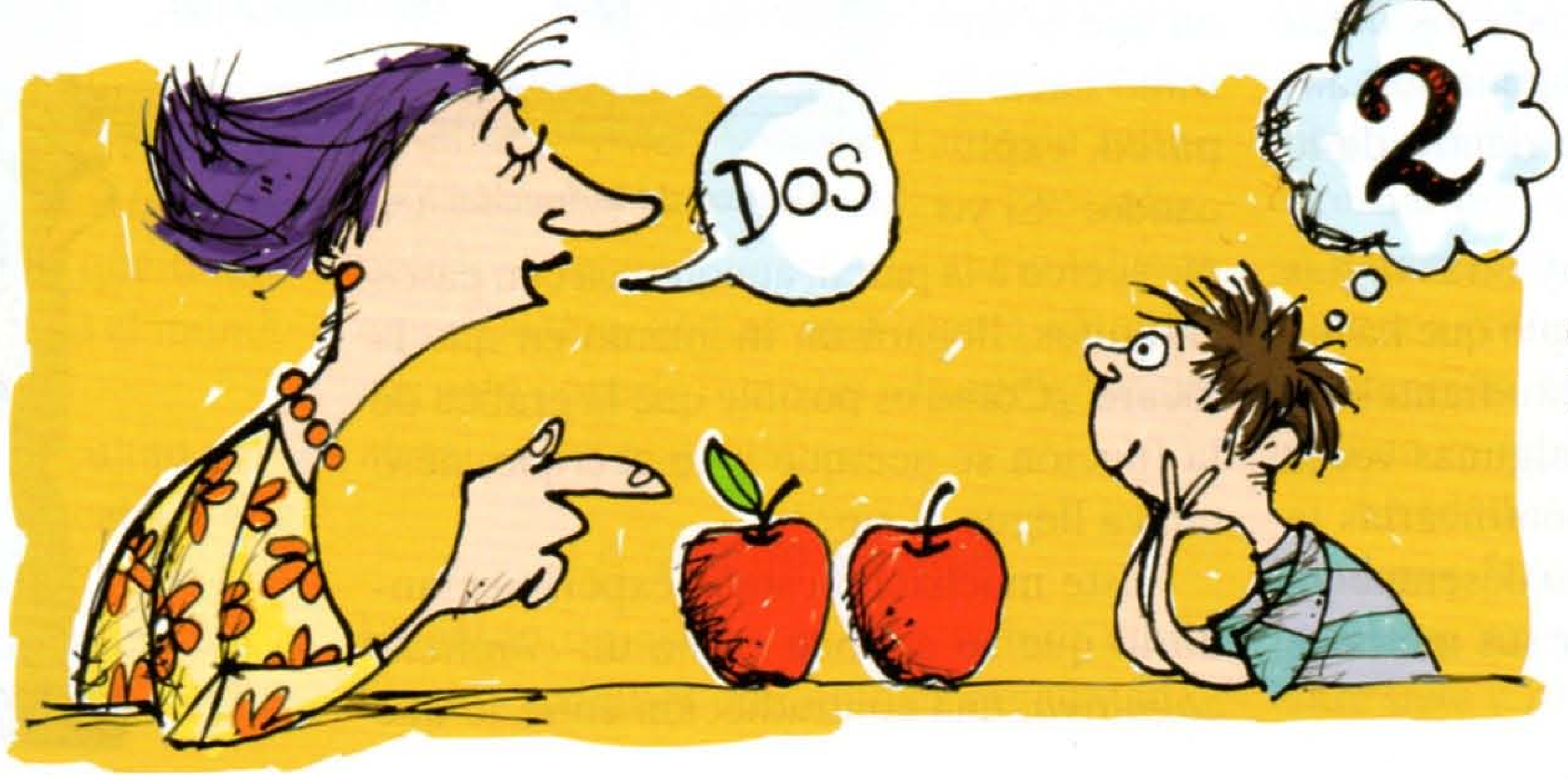
Algunos investigadores en didáctica de las matemáticas han argumentado que las políticas económicas de los gobiernos pueden afectar negativamente la motivación de los estudiantes y por lo tanto generar obstáculos de aprendizaje.

Se llama *foreground* (del inglés: "en primer plano" o "en posición importante") al conjunto de oportunidades que el estudiante obtiene como consecuencia de su situación social, política y cultural. Pero no las oportunidades reales y objetivas ofrecidas por el contexto del estudiante, sino las que el estudiante *percibe* como reales y alcanzables. El *foreground* de un estudiante incluye sus metas en la vida, así como las oportunidades de desarrollo que vislumbra en su futuro. Cuando las políticas económicas de una sociedad producen desigualdad en la distribución del bienestar y la riqueza entre sus habitantes, unos sectores de la población tendrán menos oportunidades de desarrollo que otros. Esto afectará directamente su *foreground*, y por lo tanto su motivación para aprender. La investigadora colombiana Paola Valero narra en su tesis de doctorado una anécdota que lo ilustra.

Durante un viaje a Bogotá para hacer observaciones en salones de clases de matemáticas, Valero tuvo que sustituir a un profesor en una escuela de escasos recursos. En la clase había dos chicos que no trabajaban en las actividades matemáticas propuestas, sólo miraban la hoja de trabajo y se reían. Paola trató de convencerlos de que hay buenas razones para estudiar matemáticas, pero uno de los chicos le contestó: "La única clase en la que quiero poner atención es inglés porque quiero salir de este maldito país e irme a Estados Unidos".

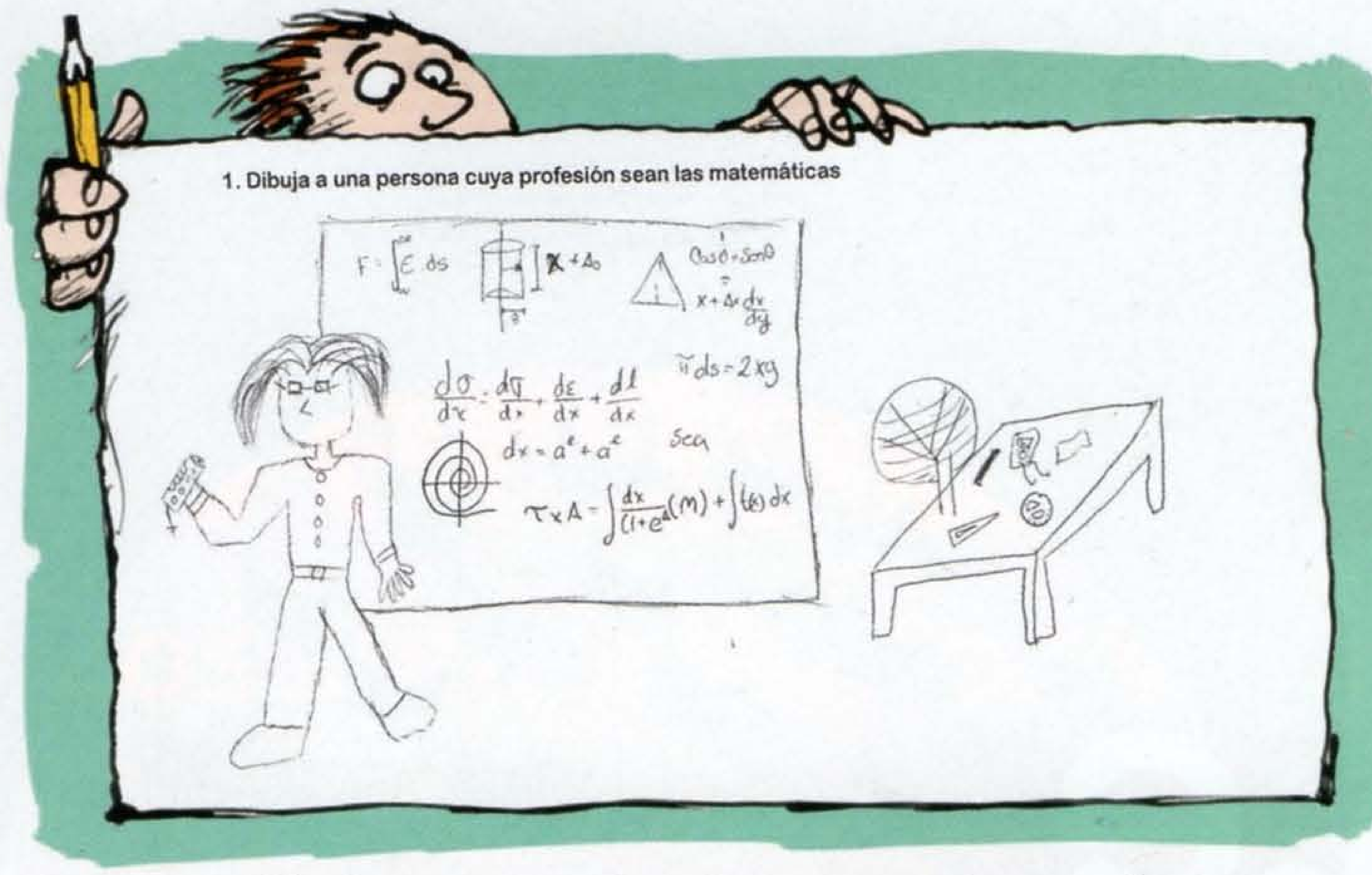
Tu motivación para estudiar matemáticas puede estar directamente ligada a la presencia de éstas en tu *foreground*. En otras palabras, si en el futuro que proyectas no parece que vayan a figurar las matemáticas, ¿para qué estudiarlas? (Quizá te sorprenda saber que sea cual sea el futuro que quieres para ti, las matemáticas te serán de gran utilidad).

Las condiciones económicas y sociales ejercen una gran influencia en lo que el individuo desea (y no desea) aprender. Si un estudiante percibe que las aspiraciones y esperanzas de desarrollo que su familia, la sociedad y el gobierno le ofrecen son limitadas o nulas, dicha percepción puede influir negativamente en su *foreground* y como consecuencia afectar su disposición a aprender.



Cómo lo sabemos

La didáctica de las matemáticas aplica métodos y teorías importadas de otras disciplinas académicas tales como la psicología, la sociología, la filosofía, la historia, la semiótica, la lingüística, la ergonomía y otras. Esto se debe a que el proceso de enseñar y aprender matemáticas,



Representación de un profesionista de las matemáticas realizada por un estudiante de bachillerato mexicano.

como dije arriba, es complejo. Veamos dos ejemplos que muestran cómo se aplican métodos de disciplinas externas en el estudio de fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En didáctica de las matemáticas, como en las propias matemáticas, se estudian cosas intangibles; por ejemplo, las ideas de las personas acerca de las matemáticas y quienes las ejercen. Estudiar estas ideas es importante porque influyen fuertemente en las actitudes hacia esta disciplina. Sin embargo, al ser las ideas cosas que sólo existen en nuestra mente, es necesario estudiarlas de manera indirecta.

El grupo de investigadores mexicanos del Instituto Politécnico Nacional en el que participo está indagando qué ideas tienen sobre los matemáticos los estudiantes de bachillerato de esa institución educativa. Para eso hemos recurrido a un método propio de la psicología que consiste en pedir a los estudiantes que dibujen a una persona cuya profesión sean las matemáticas (en el estudio evitamos la palabra "matemático" para no inducir el género masculino en los dibujos de los estudiantes). Este método de investigación nos da acceso a las ideas que los estudiantes tienen sobre la apariencia del matemático (¿usa lentes?, ¿tiene un peinado extravagante?), sobre las actividades que realiza (¿es profesor?, ¿trabaja en una empresa?, ¿qué herramientas utiliza para desempeñar su trabajo?) y sobre su género.

Uno de los resultados que hemos encontrado hasta el momento es que muy pocos estudiantes dibujan mujeres. Esto confirma la existencia de estereotipos de género en la percepción de los matemáticos entre los jóvenes mexicanos.

Otra área de investigación dentro de la didáctica de las matemáticas consiste en analizar la actividad cerebral de las personas cuando estudian o resuelven tareas matemáticas. Esto se puede hacer con métodos provenientes de la neurociencia cognitiva, y en particular, con técnicas de imagen por resonancia magnética, espectroscopía del infrarrojo cercano y seguimiento de ojos. Por ejemplo, existen estudios que se enfocan en determinar qué regiones del cerebro se activan cuando niños y adultos resuelven tareas aritméticas. Este tipo de estudios ha mostrado que cuando una persona empieza a desarrollar su conocimiento aritmético, tienden a entrar en funcionamiento nuevas áreas del cerebro.

Soluciones y propuestas

Muchos de los resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas sólo tienen validez local. Se ha encontrado que dependen del contexto social y cultural en el que han surgido. Así, una recomendación didáctica que es válida en un salón de clases urbano con estudiantes de clase media puede no producir los mismos resultados en un salón de clases de la sierra del estado de Guerrero. Esta falta de generalidad ha impedido que los resultados de la didáctica de las matemáticas lleguen a los sistemas educativos. Otro factor es que los resultados de investigación se divulgan poco entre las autoridades políticas y educativas.

Pero también hay recomendaciones pedagógicas producidas por la didáctica de las matemáticas que sí se pueden generalizar. Los obstáculos de aprendizaje mencionados están presentes en muchos estudiantes sin importar sus antecedentes sociales o culturales. Una recomendación pedagógica muy importante que se ha desprendido de la investigación sobre obstáculos de aprendizaje es que, contra lo que piensan muchos educadores, no hay que luchar contra ellos. Es mejor que los identifiques y los confrontes. Los contraejemplos y las actividades didácticas que producen conflictos cognitivos como el que la curva logarítmica produjo en aquel muchacho son una manera de ayudarte a que aprendas a controlar el efecto de tus ideas intuitivas en tu aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, los conceptos pueden representarse de distintas maneras; por ejemplo, una función puede representarse mediante una gráfica, una tabla de valores numéricos, una fórmula algebraica o incluso de manera verbal. La investigación en didáctica de las matemáticas ha evidenciado que cuando un estudiante es capaz de representar, reconocer y manipular un concepto matemático en distintos contextos de representación (gráfico, numérico, algebraico, verbal), su comprensión se hace más sólida. Por ello los profesores deben propiciar en los ejercicios en clase y en las tareas que sus estudiantes reconozcan y manipulen los conceptos matemáticos en distintos contextos. A esto puede contribuir el *software* didáctico; un buen ejemplo es el programa gratuito *GeoGebra,* que ayuda a establecer conexiones entre representaciones geométricas y algebraicas; es decir, entre gráficas y ecuaciones. Lo puedes descargar de la página www.geogebra.org.

Así, tener dificultades para aprender matemáticas no es ser tonto, ni flojo. Se puede ser una persona muy capaz, pero que en matemáticas padece alguno de los obstáculos de aprendizaje que ha revelado la investigación. Una vez identificados estos obstáculos, los estudiantes y los profesores pueden buscar maneras de superarlos. El problema tiene solución.

Más Información

- www.aprendermatematicas.com
- http://redescolar.ilce.edu.mx/educontinua/mate/mate.htm

Mario Sánchez Aguilar estudió la maestría en matemática educativa en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (IPN) y tiene un doctorado por la Universidad de Roskilde, Dinamarca. Actualmente trabaja como profesor-investigador en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, también del IPN.