INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

CONTEO: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA Y SU ANÁLISIS

Tesis que para obtener el grado de
Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Hilda Margarita Salgado Sota

Directora y Director de Tesis:
Dra. María Trigueros Gaisman
Dr. Javier Lezama Andalón

México, D. F., Noviembre de 2007.

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 26 del mes de noviembre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Conteo: una propuesta didáctica y su análisis"

Presentada por la alumna:

Salgado	Sota	Hilda Margarita
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 5 | 0 | 4 | 0 | 9 |

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. María Trigueros Gaisman

Director de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dra. Gisela Montiel Espinosa

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

M. en C. Javier Alfaro Pastor

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 22 del mes noviembre del año 2007, el (la) que suscribe Lic. Hilda Margarita Salgado Sota alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A050409, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra. María Trigueros Gaisman y el Dr. Francisco Javier Lezama Andalón y cede los derechos del trabajo intitulado Conteo: una propuesta didáctica y su análisis, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección famysusi@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Hilda S. de Yzusi

Lic. Hilda Margarita Salgado Sota
Nombre y firma

ÍNDICE

CONTEO: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA Y SU ANÁLISIS

RESUMEN

En el aprendizaje de las matemáticas se suelen observar problemas debido a la complejidad de los conceptos involucrados por su alto nivel de abstracción. Se han detectado problemas en el aprendizaje de los conceptos asociados al tema de conteo y en la adquisición de las técnicas de conteo. Dos conceptos básicos de conteo son el de la ordenación y la combinación. Estos conceptos sirven para contar secuencias que cumplen ciertas características como orden y repetición. Dichas características representan una gran dificultad para los estudiantes en el proceso de adquisición de estos conceptos.

Esta tesis hace una propuesta didáctica para el aprendizaje de las ordenaciones y combinaciones apoyada en una teoría que centra su atención en las construcciones mentales necesarias para la adquisición del saber matemático. Dicha teoría se denomina APOE. En esta tesis se hace un análisis de la puesta en práctica de la propuesta didáctica con estudiantes de nivel universitario y en correspondencia con el marco teórico escogido. Se presenta dicho análisis y los resultados obtenidos, a partir del trabajo de los estudiantes con la propuesta realizada.

Se hizo una descomposición genética de los conceptos de ordenación y combinación con las construcciones mentales que los alumnos pueden desarrollar para su aprendizaje. Basados en esta descomposición se diseñaron unas secuencias con las cuales se pretende inducir a los alumnos a hacer dichas construcciones. Se hizo el análisis de los resultados obtenidos lo que permitió refinar la descomposición y diseñar nuevas secuencias. Las secuencias utilizadas ayudaron a los alumnos a efectuar las construcciones mentales que se propusieron y llevaron a un mejor aprendizaje. Esta descomposición resuelve parte del tema de conteo (ordenación y combinación) por lo queda otra parte del tema para una futura investigación.

COUNTING: A DIDACTICAL APPROACH AND ITS ANALYSIS

ABSTRACT

Learning mathematics often causes problems to students. Given the complexity of the concepts involved and their high level of abstraction, their learning becomes a difficult task. Problems arise in the learning of the concepts of counting and in the acquisition of the techniques of counting. Two basic concepts in counting are permutations and combinations. These concepts are used to count sequences that have certain characteristics like order and repetition. Such characteristics are a source of difficulty for students in the process of construction of these concepts.

This thesis considers a didactical approach for the learning of permutations and combinations based in a theory that centers its attention in the mental constructions that are necessary for the construction of mathematical concepts. This theory is called APOS. The didactical design was used to teach counting to students at the university level. Their problem solving strategies were analyzed according to the chosen theory. The analysis and the results from the work done by the students are presented and discussed.

A genetic decomposition of the concepts of permutation and combination was designed by making hypothesis about the mental constructions that students may develop in their learning. Based on this decomposition some didactical sequences were designed with the idea to provide opportunities for the students to reflect and make the necessary abstractions to construct these concepts. The results were analyzed leading to a refinement of the decomposition and the design of new sequences. The sequences used helped the students make the mental constructions that had been proposed and the result was that they performed better. This decomposition deals with a part of the counting theme (permutations and combinations) leaving another part for a future analysis.

INTRODUCCIÓN

La matemática discreta es la rama de las matemáticas que estudia los conjuntos discretos que pueden ser finitos o, que si no son finitos, se presentan como los números naturales, es decir, conjuntos numerables u objetos bien separados entre sí. Un objeto discreto se contrapone a la idea de continuo. La matemática discreta surge como una disciplina que unifica distintas áreas de las matemáticas como son la probabilidad y la combinatoria. En el siglo XX, las matemáticas fueron principalmente matemáticas del continuo, pero con la aparición de la computadora se ha dado una gran importancia a la matemática discreta.

Dentro de la matemática discreta tenemos la combinatoria que estudia colecciones, generalmente finitas, de objetos que satisfacen ciertos criterios y se interesa en contar estos objetos. Se le conoce como el álgebra de la enumeración o técnicas para contar. Gian Carlo Rota formalizó a la combinatoria en los años sesenta, convirtiéndola en una rama importante de las matemáticas. La combinatoria está relacionada con el álgebra, la probabilidad, la geometría, la computación, etc. La parte más antigua de la combinatoria es la teoría de gráficas.

Los problemas de conteo se introducen en la escuela desde la enseñanza primaria y tanto profesores como alumnos muestran dificultades con los conceptos involucrados. Estos problemas se siguen manifestando en el nivel universitario.

Los problemas de conteo son difíciles pues requieren de un análisis cuidadoso de su estructura. Para contar es necesario saber qué características debe cumplir lo que se desea contar, por ejemplo, el hecho de que sea necesario o no el orden o la repetición. Así aparecen las ordenaciones con o sin repetición y las combinaciones con o sin repetición. La maestra que imparte las clases en este estudio ha dado clases de álgebra superior en el ITAM desde hace diez años y se ha dado cuenta que el tema de conteo, en un principio es atractivo para los alumnos pues se resuelven problemas interesantes de su entorno. Encuentran, por ejemplo, cuántas placas distintas hay que cumplan ciertas características, cuántos números de lotería existen, cuántos equipos se pueden formar con determinadas personas, etc., pero después se les hace difícil y deja de gustarles.

El concepto de orden y repetición tiene un significado muy claro, para todos, fuera de las matemáticas. Estos términos se usan en el lenguaje natural y se comprenden en ese contexto. Sin embargo, al empezar el estudio formal de las ordenaciones y las combinaciones, los alumnos no logran distinguir las características relevantes del problema y tienen serias dificultades para resolverlo. Entonces, como contar, se convierte en un problema didáctico, pues las ideas de orden y repetición se entienden fuera del ámbito escolar, pero cuando se abordan con determinados conjuntos se pierde la transparencia que tienen en otros ámbitos.

Esta tesis se centra en el estudio del aprendizaje y la enseñanza de las ordenaciones y combinaciones dentro del tema de conteo de la matemática discreta, tema que no ha sido estudiado a profundidad en la literatura del campo de la Matemática Educativa. El estudio se realiza desde el marco de la Teoría APOE. Se usará esta teoría porque ha mostrado ser de gran utilidad para el estudio del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la universidad.

La tesis está dividida en cuatro capítulos. En el primer capítulo se hace una reseña de las ordenaciones y combinaciones a lo largo de la historia. Se analizan unos trabajos de investigación que se han realizado sobre este tema. En el segundo capítulo se explica la Teoría APOE, la metodología que se usó y el análisis a priori de las secuencias didácticas que se diseñaron. En el tercer capítulo se hace una descripción del análisis de la primera experiencia, es decir, del semestre agosto – diciembre del 2006. Se analizan primero los problemas donde el orden es importante, después los problemas donde el orden no es importante y posteriormente el examen de conteo y el examen final. Se termina este capítulo con una discusión sobre las conclusiones a las que se llegaron. En el cuarto capítulo se hace la misma descripción que el capítulo anterior pero para la segunda experiencia, es decir, el semestre enero – mayo del 2007. Por último se presentan las conclusiones y los anexos. En éstos últimos se encuentran algunas de las tablas usadas para los análisis realizados.

Como se mencionó anteriormente, un tema repetitivo en esta tesis será la referencia a problemas de dos tipos: el primero, donde el orden existe y el segundo, donde no lo hay. En un estricto sentido técnico, dicha característica no tiene su origen en el problema mismo, sino en los datos que dichos problemas contienen. Es por ello que, en realidad, deberíamos referirnos a ellos como problemas cuyos datos tienen o no orden. Sin embargo, con objeto de simplificar la lectura del trabajo, a lo largo del mismo nos referiremos a ellos simplemente como problemas con o sin orden.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

La maestra ha impartido el tema de conteo durante muchos años y se ha dado cuenta de lo difícil que resulta para los alumnos su comprensión. El tema de conteo empieza con las ordenaciones y combinaciones que se utilizan para resolver problemas con y sin orden, con y sin repeticiones. Los alumnos tienen grandes dificultades en discernir si en un problema el orden y las repeticiones son o no importantes. Por esto la maestra tuvo la inquietud de analizar este tema desde el punto de vista de la Teoría APOE para estudiar que construcciones mentales necesitan realizar los alumnos y diseñar actividades didácticas que ayuden a la enseñanza y el aprendizaje del tema. A continuación se darán los antecedentes históricos de estos conceptos.

1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Desde hace muchos años se habla de ordenaciones y combinaciones. Existe un problema, sin embargo, pues las palabras ordenación y combinación han adquirido un significado muy preciso dentro de las matemáticas, pero fuera de ellas no lo tienen. Esto ha causado problemas en el estudio del origen de estos temas pues en las traducciones de trabajos antiguos no se han usado los términos en el sentido matemático. (Biggs, 1979). Así, en la historia encontramos trabajos que hablan de ordenaciones y combinaciones cuando en realidad sólo manejan uno, ambos o ninguno de los dos conceptos.

Uno de los manuscritos matemáticos más antiguos que ha sobrevivido es el papiro de Rhind de alrededor de 1650 a.c. que fue hecho público en 1858. En este papiro aparecen unos jeroglíficos que pueden traducirse como:

Casas	*7*
Gatos	*49*
Ratones	*343*
Trigo	*2401*
Hekat	<u>*16807*</u>
	19607

En 1202, en su libro *Liber Abaci*, Leonardo de Pisa (Fibonacci) plantea el problema:

Siete mujeres viejas viajan a Roma; cada una de ellas lleva siete mulas; cada mula lleva siete sacos; cada saco contiene siete piezas de pan; cada pieza de pan tiene siete cuchillos; y cada cuchillo tiene siete dientes. ¿Cuál es el número total de cosas?

Existe una rima popular, que aparece desde 1730, que dice:

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives,
Each wife had seven sacks,
Each sack had seven cats,
Each cat had seven kits,
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?

La traducción sería:

Mientras iba a St. Ives,
Me encontré con un hombre con siete esposas,
Cada esposa tenía siete sacos,
Cada saco tenía siete gatos,
Cada gato tenía siete gatitos,
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
Cuántos van a St. Ives?

Es imposible demostrar que el problema de Fibonacci tenía 3000 años de existencia y que llegó hasta la actualidad como una rima de niños. Sin embargo, podemos deducir que las reglas de contar se han dado por sentadas desde las primeras civilizaciones y además, la aplicación de estas reglas se ha enfatizado por medio de ejemplos que, aunque aparentemente no tengan mucho sentido han perdurado en la memoria y en la cultura de distintas generaciones.

En el caso de las ordenaciones con repetición, si tenemos n objetos y vamos a tomar r de ellos, el total de formas posibles es n^r. Esta fórmula es conocida desde la antigüedad. Una de las primeras veces que se menciona es en el libro chino *I Ching* o *Libro de los cambios,* que es una compilación de material que data desde el siglo VII a. c. El sistema que se usa en este libro está basado en dos símbolos: el yang y el yin. Estos símbolos los combinan en secuencias de tres y de seis. Encuentran $2^3=8$ secuencias de tres símbolos y $2^6=64$ secuencias de seis, con lo que se verifica que conocían la regla de las ordenaciones con repetición. En el siglo VIII, también en China, aparece otro problema donde se ocupan estas ordenaciones. En Grecia, por otra parte, parece que no hubo interés por la combinatoria y no se ha encontrado material relevante sobre este tema.

Por su parte, hay evidencia de que los hindúes estaban acostumbrados al tema del conteo, al manejo de las ordenaciones y las combinaciones. En un tratado médico de Susruta, del siglo VI a.c. se pregunta cuántos sabores se pueden encontrar si se combinan seis cualidades: dulce, ácido, salino, acre, amargo y astringente. Se escriben las combinaciones cuando se toman de una por una, de dos en dos, de tres en tres hasta tomarlas todas. Existen otros trabajos: Jainas (siglo II a. c.) y Pingala (alrededor del 200 a. c.) donde se mencionan estos temas. No hay evidencia de que conocieran las fórmulas para obtener el total de ordenaciones o combinaciones, sino, que más bien, se resolvían haciendo la lista de los distintos casos y contándolos. Lo que es claro en la evidencia es que estos conceptos eran conocimientos comunes entre los estudiantes hindúes.

El desarrollo de las fórmulas para encontrar la solución numérica a problemas de conteo, sin tener que enlistar todos los casos, fue un proceso gradual y en el transcurso de un largo periodo de tiempo. La fórmula de combinaciones parece que era conocida por los hindúes del siglo VI d. c. pues en el libro *Brhatsamhita* de Varahamihira se encuentra el resultado de las combinaciones de tomar cuatro ingredientes de un total de dieciséis. Existe la posibilidad de que Varahamihira usara la fórmula, pues si hubiera listado todos los casos (1,820) la lista sería muy larga y, lo más probable, es que el libro incluyera algún comentario sobre ella.

También en la India, en el libro *Lilavati* de Bhaskara del año 1150, aparecen dos problemas de combinaciones y la forma en que están resueltos muestra el conocimiento de la fórmula. Nuevamente vemos que los problemas se transmiten a través de los años, pues uno de los problemas de Bhaskara trata sobre las distintas combinaciones al mezclar sabores (Susruta siglo VI a. c.). La diferencia es que Bhaskara da una solución breve mientas que Susruta escribe largas listas con todos los casos. En este libro aparece la regla de las permutaciones y un ejemplo donde se utiliza para resolverlo. Podemos concluir que los hindúes conocían el tema del conteo. Los conceptos de ordenación y combinación eran parte de su cultura, y como se puede observar, el desarrollo matemático de la solución de dichos problemas fue gradual.

En el siglo VII d. c. las fuerzas del Islam conquistaron parte de India y los conocimientos matemáticos se extendieron al oeste. Los árabes tomaron estos conocimientos y los mezclaron con la herencia de la Grecia clásica. Dentro de la matemática combinatoria la aportación oriental, como ya se ha mencionado, fue mucho más importante. Los árabes tomaron los principios de conteo y los utilizaron.

El uso del conteo aparece también en los llamados cuadrados mágicos, que son arreglos de números de forma que cada columna, renglón y la diagonal principal sumen lo mismo. El primer cuadrado mágico apareció en la China antigua. Estos cuadrados son el ejemplo más antiguo de arreglos de combinatoria y son uno de los primeros ejemplos de una faceta importante de la combinatoria: el estudio de arreglos que satisfacen determinadas condiciones.

El conteo aparece también en los juegos de azar. Los griegos y los romanos no hicieron estudios sobre los posibles resultados de un juego. Es en la Edad Media donde se estudian los juegos de dados. Alrededor de los siglos XIII y XIV aparece un libro, *De Vetula,* donde se estudia cuáles son los posibles resultados que se obtienen al tirar tres dados. En este libro se usan las reglas de combinatoria. Una consecuencia del estudio de los juegos de azar fue el establecimiento de la teoría de la probabilidad.

A partir del siglo XII, el uso de las fórmulas de ordenaciones y combinaciones se extendió. Parece que la definición formal, en notación moderna y en general, aparece por primera vez en el libro *Cursus Mathematicus* de Herigonus (1634). En esta época se aplican las combinaciones para encontrar los coeficientes binomiales, coeficientes que se obtienen al elevar $(a+b)^n$, pues estos coeficientes son justamente combinaciones. Estos coeficientes también se pueden obtener con el llamado triángulo aritmético o triángulo de Pascal donde los números son combinaciones. La aparición de este triángulo no es clara. Parece que los hindúes ya lo usaban en el siglo X para resolver problemas de combinatoria. En el libro *Handbook of Arithmetic using Board and Dust,* del árabe Al-Tusi, de 1265 aparece por primera vez el triángulo y se explica su construcción. Por la forma en que se explica parece que se refiere a una técnica ya conocida. Los árabes lo usaban principalmente para encontrar la solución de una ecuación, pero no hay referencias explícitas a su uso como combinaciones.

En el siglo XVI aparece el triángulo de Pascal mencionado en trabajos de distintos autores en Europa. Se encuentra que principalmente se usaba para extracción de raíces de ecuaciones. En 1634 en *Cursus Mathematicus* de Herigonus se menciona su uso para el cálculo de los coeficientes y aparece la fórmula de combinaciones. En 1654 se publica *Arithmetical Triangle* de Pascal en el que se presenta una clara explicación del triángulo para encontrar las combinaciones de n objetos tomados de r en r y demuestra la construcción del triángulo de forma inductiva. Además habla de la importancia de los números del triángulo como coeficientes binomiales y como combinaciones. Pascal menciona únicamente el trabajo de Herigonus en su libro. Seguramente, este triángulo se le asigna a Pascal por la claridad con que expone lo relacionado con él en su libro, aunque, como hemos visto, es un problema que ya se había presentado y trabajado anteriormente. El libro de Pascal contiene las primeras definiciones modernas del tema de combinatoria por lo que se considera el primer tratado sobre combinaciones.

De acuerdo con Todhunter (1865), la primera vez que se hace mención de conceptos de conteo, en Europa, es en el libro *Álgebra* de Wallis (1693) quien cita doce reglas que escribió William Buckley. Buckley fue miembro del King's College en Cambridge y vivió en la época de Eduardo VI que reinó Inglaterra de 1547 a 1553. Estas reglas proporcionan el número de combinaciones que existen al tomar, de un conjunto dado, un elemento, dos elementos, tres elementos, hasta el total de elementos.

En 1617 aparece el libro *Erycii Puteani Pietatis Thaumata in Bernardi Bauhusii e Societate Jesu Proteum Parthenium* de Erycius Puteanus donde escribe la frase "tot tibi sunt dotes, Virgo, quot cidera caelo" y encuentra 1022 arreglos de dicha frase quitando, conscientemente, aquellos donde no se alaba a la virgen María. Parece que Puteanus simplemente copió la frase de Bauhusius. Esta frase y sus arreglos generaron gran curiosidad en el siguiente siglo. Jacobo Bernoulli cuenta la historia del problema y aclara que hay 3312 arreglos que no rompen la métrica del verso, además, explica el procedimiento para encontrar dicho número.

Más adelante, Schooten (1657) encuentra las distintas combinaciones con 4 y 5 letras, y escribe la fórmula $2^n - 1$ para el número total de formas de elegir de n objetos.

Este autor utiliza este concepto para encontrar el número de divisores de un número. En 1666 Leibnitz publica el libro *Dissertatio de Arte Combinatoria* donde utiliza algo similar al triángulo de Pascal para encontrar el número de combinaciones de un conjunto de n objetos al tomarlos de dos, tres, cuatro, etc. Además, enseña cómo obtener el número de permutaciones de un conjunto al tomar todos los objetos. Habla de la frase "tot tibi sunt dotes, Virgo, quot cidera caelo" de Bauhusius y de la gran cantidad de arreglos que se pueden hacer. El manejo matemático que Leibnitz hace del tema de combinaciones es, sin embargo, inferior al hecho por Pascal; probablemente no conocía su trabajo. Leibnitz muestra la fórmula de las combinaciones de n objetos tomados de dos en dos, pero no de tres en tres o considerando más elementos. Se considera que a partir de la aparición del libro *Dissertatio de Arte Combinatoria* de Leibnitz se acepta la combinatoria como parte de las matemáticas.

En 1685, Wallis escribe su libro *Álgebra* en latín. Éste es traducido al inglés y publicado en 1795 con el nombre *The Doctrine of Permutations and Combinations, being an essential and fundamental part of the Doctrine of Chances.* En él habla del triángulo de Pascal de una forma complicada y sin darle crédito. Menciona también las permutaciones, es decir, ordenaciones cuando se toman todos los elementos y encuentra todas las permutaciones de las letras en la palabra *roma* y en la palabra *messes* eliminando las palabras que no cambian al permutar las letras repetidas; lo que actualmente conocemos como permutación distinguible. Retoma el problema de la frase de Bauhusius, pero no puede resolverlo.

En 1713, Jacobo Bernoulli publica su libro *Ars Conjectandi.* La segunda parte de este libro contiene el tema de combinaciones y permutaciones. Él menciona que el tema no es nuevo y cita a Schooten, Leibniz, Wallis y Prestet como antecedentes. Presenta las permutaciones, las permutaciones distinguibles y las combinaciones de n objetos tomados de r en r y deduce algunos resultados que no habían sido mostrados por sus antecesores. Retoma el problema de la frase de Bauhusius y analiza de manera muy completa todos los posibles arreglos.

Pierre Remond de Montmort en su libro *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazards,* publicado en 1714, habla sobre la teoría de las combinaciones y permutaciones. Explica las propiedades del triángulo geométrico de Pascal y desarrolla muchos ejemplos en los que aplica estos conceptos a algunos problemas de probabilidad y de teoría de juegos. Como puede observarse a lo largo de este resumen histórico, en muchos casos se liga la historia de las ordenaciones y combinaciones con la de la teoría de la probabilidad.

Podemos concluir de todo lo anterior, que la combinatoria se origina en las civilizaciones de oriente. Los hindúes sabían que combinando elementos básicos podían obtener conceptos y objetos más complejos. Esta idea los llevó a los conceptos matemáticos del conteo. El conteo ha estado asociado a aspectos inusuales o poco convencionales, como los mencionados antes, de la combinación de palabras y los cuadrados mágicos, en contraste con la mayoría de los conceptos matemáticos que han sido desarrollados al enfrentar problemas profundos y de alta dificultad. Sin embargo, en tiempos recientes, el conteo ha encontrado muchas aplicaciones, tanto en ciencias puras como aplicadas, lo que lo ha llevado a formar parte del discurso matemático escolar.

En la obra *Psicogénesis e historia de la ciencia,* Piaget y García presentan una tesis sobre la evolución de los esquemas. Proponen que los esquemas evolucionan y se pueden distinguir tres fases que se caracterizan por el grado de construcción de relaciones entre los elementos constitutivos del esquema. Además, ellos intentan demostrar que algo similar ocurre en la historia. Piaget y García ejemplifican la existencia de tres niveles, triadas: intra, inter y trans para construcciones algebraicas, algunas construcciones geométricas y para la mécanica de Newton. Baker, Cooley y Trigueros (2000) dicen:

> "Una pregunta natural es si la triada es una metáfora adecuada para la psicogénesis de una persona en particular ó para el desarrollo general del conocimiento a través de la historia. Nosotros creemos que es apropiado por estas dos razones: Primero en *Psicogénesis e historia de la ciencia,* Piaget y García (1982) específicamente comentan sobre la relevancia de psicogénesis:
>
> > Resulta claro, entonces, que los autores que ponen en tela de juicio la importancia de la psicogénesis para la epistemología no vean sino este aspecto fáctico de los desarrollos, y olviden que en todos los niveles el sujeto obedece a normas cognoscitivas. El interés de estas últimas reside, sin embargo, en el dinamismo de sus construcciones sucesivas, para la constitución de todo conocimiento válido.
> >
> > No se trata, por cierto, sino de normas precientíficas, pero el hecho fundamental para la epistemología de las ciencias es que el sujeto, partiendo de niveles muy bajos con estructuras prelógicas, arribará más tarde a normas racionales, isomorfas a aquellas que caracterizaron el nacimiento de las ciencias. (p. 12)

Ellos concluyen:

> Para terminar estas conclusiones, conviene además recordar que la ambición permanente de la epistemología genética ha sido mostrar que el desarrollo espontáneo de los conocimientos extrae su fuente de las organizaciones biológicas para llegar en sus etapas avanzadas a la construcción de las estructuras lógico-matemáticas. Nosotros esperamos que esta obra, al mostrar el papel de la psicogénesis y sus convergencias notables con la historia del pensamiento científico, contribuirá a reforzar tal programa. (p. 251)"

Por lo tanto, se pueden tomar las construcciones importantes del análisis de la historia con el fin de encontrar las estructuras que dieron origen a los conceptos fundamentales de la teoría de conteo y usarlos como base para diseñar, utilizando la Teoría APOE las posibles construcciones similares que podrían hacer los alumnos. Como se dijo con anterioridad, en la cultura hindú acostumbraban encontrar combinaciones de distintos objetos. La forma de obtener el número de combinaciones era en un principio, realizando las acciones de listar todas las posibilidades y contarlas; esto se muestra en varios trabajos como Susruta VI a. c., Jainas II a. c. y Pingala 200 a. c. en los que aparecen los listados de todos los casos que satisfacen una condición dada y el resultado de contar dichos casos. No se tiene evidencia de que los matemáticos hindúes desarrollaran ningún tipo de fórmula al inicio; sin embargo, con el transcurso del tiempo, en el siglo VI d. c., Varahamihira parece llegar a una fórmula aunque no aparece de forma explícita. Esto muestra, en el proceso histórico, la interiorización de las acciones de enumerar y contar en un proceso que se resume en un cálculo en el que no hay necesidad de listar los casos. En esta época aparece el uso de la fórmula en los trabajos desarrollados por varias culturas. Para este momento, no se cuentan ya físicamente todos los casos, sino que se utiliza una fórmula general como un proceso que permite resolver distintos problemas.

Es interesante notar que los problemas a resolver se transmiten a lo largo de los siglos. El problema que Susruta (VI a. c.) plantea y resuelve escribiendo todos los casos es resuelto por Bhaskara (1150) usando las fórmulas que ya han sido encontradas. También tenemos el caso de la frase de Bauhusius (1617) que es retomada por Leibnitz

(1666) y por Bernoulli (1713). Es este último quien desarrolla un análisis completo de todos los posibles arreglos permitidos.

Una vez que se cuenta con una fórmula que puede aplicarse a manera de algoritmo, los problemas se resuelven más fácilmente y con toda precisión. Poco a poco, las fórmulas desarrolladas se aplican en distintos tipos de problemas, por ejemplo, para encontrar las soluciones del binomio, para resolver problemas de probabilidad ó de teoría de juegos. A partir del trabajo de Pascal, es posible observar que las fórmulas del conteo se reconocen como útiles en la solución de una gran variedad de problemas. Se puede decir que es entonces cuando socialmente se llega a la encapsulación del proceso de la aplicación de la fórmula para la solución de problemas de conteo en un objeto.

1.2 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Se llevó a cabo una revisión bibliográfica en la red y en libros sobre el tema de conteo y se llegó a la conclusión que se ha llevado a cabo poca investigación sobre este tema. Referente a la Teoría APOE se ha hecho mucha investigación, pero principalmente en lógica, álgebra abstracta, funciones, cálculo, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, pero no en conteo. En todos estos estudios se han desarrollado descomposiciones genéticas que han resultado exitosas en la docencia.

Se encontró un artículo de English (1993). En este artículo se hizo un experimento con niños de 7 a 12 años que no habían estudiado problemas que involucraran conteo. Se les plantearon seis problemas de combinatoria, tres en dos dimensiones y tres en tres dimensiones. Los niños tenían que encontrar todas las combinaciones posibles para vestir a osos de peluche con shorts y blusas de diferentes colores (dos dimensiones) y shorts, blusas y raquetas diferentes (tres dimensiones). Los niños tenían los osos, la ropa y las raquetas para que físicamente pudieran vestir a los osos.

En los dos casos, dos y tres dimensiones, se identificaron cinco estrategias de solución desde la de ensayo y error hasta un diagrama de árbol. Se hicieron tablas para comparar el uso de las estrategias en los distintos grupos de edades, el cambio de estrategia entre los problemas de dos dimensiones y entre los de tres dimensiones, los cambios al avanzar en los problemas y la solución de los problemas cinco y seis en comparación con un grupo piloto. Se llegó a dos conclusiones importantes dentro de la matemática educativa: la diversidad de estrategias que los niños usan para resolver un problema y el potencial de los niños en el aprendizaje autónomo de conceptos de matemática discreta.

Los niños con un conocimiento limitado de conteo usaron métodos ineficientes de ensayo y error que necesitaban revisar continuamente para ver si iban por el camino correcto. En cambio, otros niños se dieron cuenta que podían encontrar todas las combinaciones posibles al seleccionar los objetos de acuerdo a un determinado orden. Los niños de 9 a 12 años encontraron rápidamente este procedimiento. Sin embargo, independientemente de su estrategia de solución todos fueron capaces de resolver los problemas.

Al estudiar los problemas de tres dimensiones se vio la habilidad de los niños de adaptar las estrategias al aumentar la dificultad del problema. Parece que el haber resuelto los problemas de dos dimensiones permitió, sobre todo a los mayores, transformar sus estrategias para resolver los problemas de tres dimensiones de manera más eficiente.

Se hace una comparación con estudios hechos por Piaget sobre combinatoria. Piaget habla de una etapa operacional que es aquella en la que el niño reflexiona sobre sus acciones concretas y logra interiorizarlas de manera que su pensamiento se dirige hacia una cierta forma general de equilibrio. Es en esta etapa en la que los niños hacen operaciones tales como reuniones y disociaciones de clases, clasificación y almacenamiento de relaciones, variaciones, correspondencias y, lo que es de interés para el presente trabajo, pueden usar el procedimiento de solución de combinaciones completo hasta que llegan al período de operaciones formales alrededor de los once años. El estudio de Piaget no muestra las estrategias que utilizaron sus niños. En contraste, el estudio realizado por English les permitió interactuar con el material del problema, por lo que los niños podían desarrollar y modificar sus estrategias, corrigiendo errores y desarrollando procedimientos. Las acciones de los niños sugieren que están construyendo el conocimiento y al hacer esto se aumenta el conocimiento de la combinatoria. Parece que los niños más pequeños al ir resolviendo los problemas se movieron al nivel de desarrollo potencial indicado por Vigotsky, es decir, al nivel en que son capaces de resolver problemas ayudados por otros.

La autora, Lyn English, concluye que la brecha que existe entre la habilidad actual que tienen los niños en matemáticas y lo que son capaces de lograr a través de la solución de problemas necesita mayor atención. Se necesita retar a los niños con problemas que no requieran recordar conceptos para resolver, sino más bien que necesiten procesos de pensamiento matemático que por lo general no se detectan en las clases tradicionales. En este artículo queda clara la necesidad de estudiar más el tema de combinatoria.

En el libro de Fenton, W. y Dubinsky, Ed. (1996) *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL.* Springer – Verlag, Nueva York se explica que ISETL es un programa que no se desarrolló en la Teoría APOE sino que fue desarrollado de manera independiente. Muchas de las experiencias didácticas que se han desarrollado con base en esta teoría han utilizado este programa porque su programación se asemeja a la forma en que se escriben las matemáticas y además es gratuito. Este libro tiene un capítulo donde trata el tema de ordenaciones y combinaciones usando el programa ISETL. En la sección 3.3 del capítulo 3 se muestran ocho ejercicios para resolver usando el lenguaje ISETL. Después, explica el principio del producto, ordenaciones, combinaciones y el principio del palomar. Al final se encuentra una sección de ejercicios y un resumen del capítulo 3. Este libro está diseñado para enseñar desde un enfoque constructivista. Es decir, está diseñado para que los alumnos construyan por ellos mismos los conceptos matemáticos necesarios en la solución de problemas. Al principio de cada tema se encuentra una serie de actividades para que los alumnos construyan los conceptos matemáticos. Las definiciones, teoremas y demostraciones se presentan después de que el alumno ha trabajado con las ideas relacionadas con los conceptos que se van a formalizar. Utiliza el ciclo ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios) de la Teoría APOE. Este ciclo ayuda a los alumnos a hacer las construcciones necesarias para el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

CAPÍTULO 2. TEORÍA APOE

En este capítulo se hará una descripción de la Teoría APOE que se usó en esta tesis. Se explicará la metodología que se empleó y se hará el análisis a priori, bajo el enfoque de la teoría, de las secuencias didácticas que se diseñaron.

2.1 MARCO TEÓRICO

La Teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas) fue desarrollada como parte de un esfuerzo por entender cómo las matemáticas se aprenden y qué podía hacer un programa educativo para ayudar en su aprendizaje. Se busca entender cómo, una teoría de aprender matemáticas, puede ayudar al proceso de aprendizaje al explicar fenómenos que se observan en los alumnos que están tratando de construir conceptos matemáticos y sugerir acciones pedagógicas que puedan ayudar en este proceso de aprendizaje. Esta teoría está basada en el principio de que la investigación en matemática educativa se refuerza de muchas formas cuando se basa en una perspectiva teórica. Fue desarrollada por Ed Dubinsky en 1985. Dubinsky toma de la epistemología genética de Piaget los elementos que consideró indispensables para la construcción de conocimientos matemáticos y definió ciertos conceptos que forman el cuerpo de la Teoría APOE.

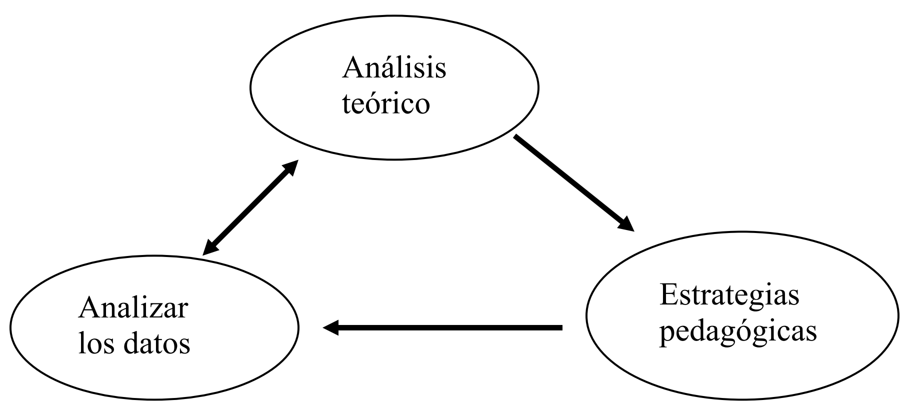
La Teoría APOE tiene como marco de referencia epistemológica a la teoría de Piaget. Toma las ideas piagetianas sobre la manera de pasar de un estado de conocimiento a otro. Sin embargo, la Teoría APOE se interesa únicamente en la forma en que se construyen o aprenden conceptos matemáticos, en particular los correspondientes a las matemáticas universitarias, aunque se ha usado en otros niveles. Siempre que se utilizan teorías o resultados que provienen de un contexto epistemológico en otra ciencia se requiere hacer una adaptación de ellos, adecuarlos para poder usarlos en su nuevo entorno. Entonces, el uso de la epistemología de Piaget requirió la conformación de una nueva teoría que, basada en las ideas de la epistemología, sea de utilidad en el contexto educativo que se quiere usar. Es decir, esta transposición de epistemología a la educación implicó nuevas definiciones.

La Teoría APOE nació al estudiar el mecanismo de entendimiento de la abstracción reflexiva, que Piaget usa para describir el desarrollo del pensamiento lógico en niños, y extender esta idea al nivel universitario matemático. El mecanismo principal de construcción del conocimiento matemático dentro de esta teoría es la abstracción reflexiva. Este mecanismo se activa a través de las acciones físicas o mentales que el alumno realiza sobre el objeto de conocimiento, por el modo que el sujeto reflexiona sobre sus acciones. Del mismo modo que en la teoría de Piaget, la interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento se considera como dialéctica, es decir, no es posible separar al objeto de conocimiento del sujeto que conoce.

La Teoría APOE da una base teórica al análisis de la forma en que las ideas matemáticas de los alumnos evolucionan y, al mismo tiempo, encuentra una forma para ayudar a los alumnos a hacer las construcciones necesarias para que esta evolución tenga lugar y el aprendizaje de los conceptos matemáticos sea mucho mejor.

Esta teoría fue desarrollada para matemáticas avanzadas, sin embargo, se ha usado, y ha sido eficaz, en conceptos matemáticos básicos como fracciones. Es una herramienta que puede usarse para explicar, objetivamente, las dificultades que tienen los alumnos con una gran variedad de conceptos matemáticos y sugerir formas en que los alumnos puedan aprender estos conceptos. Señala estrategias que llevan a un mejor aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos o complejos y mejora el uso que se hace de ellos para probar teoremas y resolver problemas.

Se puede hacer un esquema de la teoría como sigue:



El análisis teórico intenta predecir las construcciones mentales que los alumnos deben hacer para entender un concepto. Con este análisis se diseñan estrategias pedagógicas: actividades y ejercicios que se dan en clase y sirven para ayudar a los estudiantes a construir las estructuras mentales necesarias para el aprendizaje. Después se analizan los datos para refinar el análisis teórico. El análisis teórico supone que un individuo no aprende los conceptos directamente. Si tiene las estructuras apropiadas el aprendizaje se facilita, pero si no las tiene entonces éste se vuelve muy difícil o casi imposible. La finalidad de este análisis es ayudar a los estudiantes a construir las estructuras necesarias y enseñarles cómo relacionarlas con los conceptos matemáticos.

Esta teoría considera que todos los conceptos matemáticos pueden representarse en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas. La idea de esquema es similar a la de imagen concepto de Tall y Vinner. La hipótesis fundamental de esta teoría es que el conocimiento matemático consiste en la tendencia del alumno en enfrentar problemas matemáticos construyendo acciones, procesos y objetos mentales que organiza en esquemas que tengan sentido con estos problemas y le permita resolverlos. Se llama Teoría APOE pues sus componentes esenciales son: acciones, procesos, objetos y esquemas.

A continuación se dará una definición de cada una de estas componentes.

ACCIONES. Las acciones son transformaciones de los objetos que percibe un alumno como esencialmente externos y que requieren instrucciones para hacer una operación. Es decir, un alumno que tiene un conocimiento de una transformación limitada a una concepción acción no puede ejecutar la transformación más que con indicaciones externas que le den detalles sobre los pasos a seguir. Las acciones son muy limitadas pero son cruciales en el comienzo de la comprensión de un concepto.

PROCESOS. Cuando la acción es repetida y el alumno reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada como un proceso. Ahora, se produce una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero esta vez no está necesariamente dirigida por un estímulo externo. El proceso es como la acción pero sin la necesidad del estímulo externo. Si un alumno tiene una concepción proceso de una transformación puede reflexionar sobre los pasos de la transformación, los puede describir o invertirlos sin realmente efectuarlos. Ahora tiene más control sobre la transformación que está ejecutando, puede construir diferentes procesos ejecutando diversas cadenas de acciones sobre un saber, puede componerlo con otros procesos, puede coordinar estos procesos y generalizarlos para obtener un proceso nuevo.

OBJETOS. Cuando un alumno reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, se da cuenta de la totalidad del proceso, percibe al proceso como una transformación global y puede construir por él mismo esta transformación, se dice que el alumno ha encapsulado al proceso para construir un objeto cognitivo. Un alumno tiene una concepción objeto de un concepto matemático si es capaz de trabajar con esta idea como una entidad matemática. Aquí se toma en cuenta la capacidad de ejecutar acciones sobre el objeto y razonar las propiedades de este objeto. Los alumnos pueden reinvertir el objeto o desencapsularlo para trabajar nuevamente con el proceso si es necesario en la resolución de un problema.

ESQUEMAS. El esquema para determinado tema matemático o concepto más general (concepto que requiera la construcción de relaciones entre otros conceptos), es la colección de acciones, procesos y objetos que tiene un alumno y que están unidos por principios generales de forma que generen un marco coherente para el alumno. El alumno puede o no estar consciente del marco que genera las relaciones posibles. Para que el alumno demuestre que esta colección es coherente es necesario que sea capaz de reconocer las diferentes situaciones donde puede aplicarse, que pueda decidir entre los tipos de problemas que pueden o no resolverse al usar esta colección y, además, que conozca las capacidades de la colección. Se forma, entonces, un marco de trabajo en la mente del alumno que puede usar para resolver un problema que involucre ese concepto. Este marco debe ser coherente para poder determinar que fenómenos están dentro de ese esquema y cuáles no. Los alumnos pueden considerar al esquema como un objeto sobre el cual pueden ejecutar acciones. Cuando los alumnos son capaces de considerar al esquema como objeto se dice que han tematizado al esquema. Por lo tanto, existen dos formas de construir objetos, por medio de la encapsulación de un proceso o por la tematización de un esquema.

El mecanismo para pasar de una componente a otra es la abstracción reflexiva, entendida como la reflexión que hace un alumno sobre el sentido de las operaciones que se efectúan sobre el objeto matemático y del efecto que tienen sobre él. Parecería que las cuatro componentes deben estar en ese orden y cada una debería construirse antes de pasar a la siguiente. Sin embargo, cuando un alumno está desarrollando el entendimiento de un concepto, las construcciones no son necesariamente lineales. La construcción de las componentes es más bien dialéctica y no una secuencia lineal. Un alumno puede quedarse mucho tiempo en etapas intermedias o incluso, estar en una etapa para determinados aspectos de un concepto, y en otro etapa, para otros aspectos del mismo concepto. La forma de trabajo que un alumno muestra delante de diversas situaciones problemáticas es diferente cuando él responde de una manera, que dentro de la teoría, se caracteriza como proceso o al contrario como un objeto o una acción. Cada vez es más claro que el tipo de respuesta de los alumnos depende mucho de la demanda cognitiva que el problema exija.

Los investigadores pueden comparar el éxito o fracaso de los alumnos en una tarea matemática con las construcciones mentales específicas que pueden o no tener. Si dos alumnos llegan al mismo punto y después uno puede avanzar y el otro no, el investigador puede explicar esta diferencia señalando las construcciones mentales de acciones, procesos, objetos y/o esquemas que un alumno parece tener mientras que el otro no. Esta teoría hace predicciones, que pueden comprobarse, donde si un alumno construye una colección particular de acciones, procesos, objetos y esquemas, entonces tendrá éxito usando ciertos conceptos matemáticos y resolviendo determinados problemas.

Se hacen descripciones detalladas llamadas descomposiciones genéticas en términos de estas construcciones mentales para crear hipótesis de cómo se aprenden los conceptos matemáticos. La descomposición genética pone en relieve las construcciones cognitivas que pueden ser necesarias para el aprendizaje. En ella se destacan las acciones y los distintos procesos, además de la forma de irlos estructurando para posibilitar la construcción de la concepción objeto y para propiciar después la construcción de las relaciones entre dichas acciones, procesos y objetos. De esta manera, se fomenta la construcción de los esquemas que se consideran necesarios para el aprendizaje de la parte de las matemáticas en la que se está trabajando. Son los investigadores basados en su experiencia en el salón de clases los que proponen esta descomposición. Mas adelante, ésta será refinada. Es importante notar que no puede hablarse de una única descomposición genética de un concepto pues depende del investigador que la haya diseñado. Por lo tanto, es posible que coexistan diversas descomposiciones genéticas para un mismo concepto.

La descomposición comienza por el análisis de las construcciones que hace un alumno cuando aprende un concepto matemático en términos de lo que es observable. Se construye como una primera aproximación para modelar el aprendizaje de algún concepto matemático, se utiliza como base teórica para elaborar materiales que se emplean en el aula pues debe ser sometida a prueba con alumnos en situación de clase. Se hace una investigación de lo que sucede en la clase y del conocimiento de los alumnos después de haber tomado el curso. Los resultados de la investigación se utilizan para refinar la descomposición de manera que sea más congruente a la forma como realmente aprenden los alumnos. Este ciclo puede repetirse hasta llegar a la descomposición que se considera permite, tanto enseñar de manera efectiva el concepto, como explicar lo que se consideran las construcciones mentales necesarias de los alumnos cuando están aprendiendo dicho concepto.

Esta teoría ha sido usada por un grupo de investigadores llamado RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) quienes han desarrollado un marco de trabajo. Este marco de trabajo tiene tres partes.

- Análisis teórico de cierto concepto matemático.
- Desarrollo e implementación de métodos de instrucción usando estrategias como aprendizaje cooperativo. Pueden construirse conceptos matemáticos en computadora. Todo esto basado en el análisis teórico.
- Recolección y análisis de datos para probar y refinar el análisis teórico inicial y los métodos de instrucción y poder desarrollar una descomposición genética que se aproxime mejor a la construcción de conceptos matemáticos de los alumnos.

Estas partes forman un ciclo que puede repetirse tantas veces como sea necesario para entender la epistemología del concepto y obtener estrategias pedagógicas efectivas para ayudar a los alumnos en el aprendizaje.

El análisis teórico está basado inicialmente en la teoría APOE y el conocimiento del investigador del concepto matemático en cuestión. Después de algunas repeticiones del ciclo y de las revisiones, también estará basado en el análisis de los datos aportados por los alumnos que están aprendiendo o han aprendido ese concepto. El análisis teórico propone, en la descomposición genética, una serie de construcciones mentales que el alumno puede hacer para entender el concepto matemático que se está estudiando. Más adelante se diseñará una estrategia didáctica para ayudar a estos alumnos a hacer las construcciones mentales y relacionarlas con el concepto matemático. Al final se diseñarán instrumentos cuantitativos y cualitativos para determinar las construcciones mentales que han realizado y las matemáticas que han aprendido. El análisis teórico indica preguntas que los investigadores pueden hacer en el proceso de análisis de los datos. Los resultados del análisis de los datos indican qué tan efectiva ha sido la instrucción y las posibles revisiones a la descomposición genética.

Un aspecto importante de la Teoría APOE, como instrumento de investigación y de enseñanza, es que para trabajar con ella es necesario interpretar los conceptos matemáticos desde el punto de vista de las matemáticas mismas. Por lo tanto, permite incorporar dentro del estudio de la matemática educativa a la matemática misma. La construcción de los conceptos matemáticos sigue una lógica que es diferente a la utilizada para construir conceptos de otras disciplinas. Los conceptos matemáticos tienen su propio sistema, un lugar donde viven y donde establecen relaciones entre ellos y con conceptos de otras disciplinas. Al insertar las matemáticas en el ámbito escolar estas relaciones cambian, pero es muy importante conocerlas y por ello interesan en la matemática educativa. La teoría incluye, además de la parte cognitiva, a la parte social del aprendizaje. Es por esto que es importante para la construcción de conocimientos la colaboración entre los alumnos y el profesor. También es importante la utilización de la tecnología en el proceso de aprendizaje.

La Teoría APOE se organiza alrededor del ciclo ACE, que significa actividades, discusión en clase y ejercicios. Dentro de las actividades puede usarse el programa ISETL (Interactive Set Language) que favorece el aprendizaje al trabajar en pequeños grupos. ISETL es un lenguaje matemático de programación con una sintaxis parecida a la de las matemáticas. Desde el punto de vista didáctico la programación ayuda al tránsito de las acciones a los procesos. Cuando el alumno escribe el programa puede considerarse que su trabajo es de tipo proceso. Este lenguaje permite que muchos procesos se traten como objetos y esta es la principal diferencia entre este lenguaje de programación y los demás. Las ideas abstractas se hacen concretas y se generan las construcciones específicas mentales propuestas por la investigación. La discusión en clase invita a los alumnos a reflexionar sobre los trabajos que han hecho. El maestro guía esta discusión y, en el caso, en que los alumnos no hayan descubierto las relaciones que se necesitan, les ayudará a hacer las construcciones necesarias. Por último, están los ejercicios tradicionales que los estudiantes resuelven por escrito y sirven para reforzar los conceptos.

Dentro de la Teoría APOE la representación gráfica y geométrica se considera como una parte integral en la construcción de los conceptos. El desarrollo de la representación demanda una interiorización de las acciones, una encapsulación de los procesos y la construcción de relaciones con el objeto matemático. Esta parte de representación puede incluirse en la discusión en clase y/o en las actividades. La teoría se centra en la visualización de procesos que transforman los objetos. La visualización de objetos estáticos es relativamente fácil de hacer, mientras que, la visualización de procesos dinámicos implica la construcción mental de procesos sobre fenómenos estáticos.

El paso de la descomposición genética (que es la descripción teórica de las construcciones mentales de los conceptos implicados) a las actividades no es evidente. Es un paso muy importante pues implica poner una teoría en función didáctica. Cada actividad debe tener una meta específica para facilitar las construcciones que la descomposición genética previó y la secuencia global debe permitir a los alumnos reforzar estas construcciones.

Esta teoría ha sido utilizada por investigadores de distintos países para estudiar la forma en que los alumnos construyen diversos conceptos matemáticos. No sólo ha sido usada como marco teórico para hacer investigación, sino que ha sido aplicada para preparar materiales de enseñanza y manuales universitarios. El uso de estos materiales ha sido objeto de muchos proyectos de investigación que han demostrado que, efectivamente, los alumnos que los utilizan logran hacer las construcciones previstas por la teoría y, por consecuencia, aprenden los conceptos con más profundidad que los alumnos que han seguido otros métodos. Se ha probado que las descomposiciones genéticas en la segunda o tercera iteración son efectivas en el diseño de materiales y en el grado de aprendizaje de los alumnos.

La Teoría APOE se encuentra en continuo desarrollo con la introducción de nuevos conceptos que permiten dar cuenta de la manera en la que los alumnos universitarios entienden y son capaces de integrar los conceptos de las matemáticas en un nivel superior.

Es muy importante hacer investigación dentro de la matemática educativa para ver como los alumnos trabajan y aprenden conceptos más complejos. La Teoría APOE pone de relieve las dificultades que los alumnos pasan y permite a los investigadores ver más allá de la manera en la que se aprende cada concepto en particular y entender la forma en la que los distintos conceptos se van estructurando unos con otros para ir conformando lo que llamamos pensamiento matemático.

2.2 METODOLOGÍA

El tema de conteo se introdujo mediante una secuencia que incluyó:

- Una primera serie preliminar de problemas con orden diseñados a partir de la descomposición genética con la finalidad de que los alumnos reflexionen sobre sus acciones e iniciar así la construcción de los procesos y objetos distintos necesarios para la comprensión de los conceptos matemáticos del conteo: ordenación. Esta serie se aplicó en los dos semestres que se estudiaron.

- Una segunda serie preliminar de problemas sin orden diseñados a partir de la descomposición genética y con la misma finalidad de la serie anterior, pero en el tema de combinaciones. Esta serie fue aplicada en el primer semestre y condujo a una revisión de la descomposición genética pues los alumnos no habían realizado las construcciones mentales que se esperaba. Se refinó la descomposición genética y se diseñó una nueva serie de problemas con y sin orden con la finalidad de que quede más clara la diferencia entre ambos problemas.

Las series se aplicaron durante los semestres agosto – diciembre del 2006, primera experiencia, y enero – mayo del 2007, segunda experiencia, a alumnos de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Actuaría que cursaban la materia de Álgebra Superior I en el ITAM (Instituto Tecnológico Autónomo de México). En la primera experiencia (semestre agosto – diciembre del 2006) se formaron diez equipos de dos ó tres integrantes, veintiséis alumnos presentaron el examen de conteo y veintisiete alumnos presentaron el examen final. En la segunda experiencia (semestre enero – mayo del 2007) se formaron siete equipos de cinco ó seis integrantes, pues el número de alumnos era mayor, y treinta y ocho alumnos presentaron el examen de conteo y el examen final.

Trabajo de los alumnos

Las dos series de problemas fueron resueltas por los alumnos varias veces en distintas etapas:

- Etapa 1. La primera vez se llevó a cabo antes de estudiar el tema en una clase de dos horas, en equipos, sin ayuda de ningún maestro ó libro. Esto generó que los alumnos se involucraran fuertemente, puesto que al no poder consultar a nadie, aprendieron a discutir entre ellos las posibles estrategias de solución y a esforzarse para intentar resolver los problemas. Esto los llevó a una interacción importante entre los miembros de un mismo equipo y entre los diferentes equipos. La finalidad de esta etapa era que los alumnos resolvieran los problemas relacionados con el tema, sin haber introducido los conceptos, y de esta forma iniciaran el proceso de construcción de ideas matemáticas que les pudieran servir de base para una mejor comprensión del tema. En esta etapa el conocimiento de los alumnos acerca del tema es nulo ó incipiente por lo que resulta de interés analizar cómo enfrentan cada problema, qué acciones realizan y cómo lo resuelven, o hasta qué momento de la solución pueden llegar. Además, es posible analizar si existen diferencias al resolver los últimos problemas pues pueden haberse dado cuenta de que se requiere realizar acciones similares que pudieran haber empezado a interiorizarse en un proceso. Por último, se trata también de analizar si al encontrar un problema complejo, que sería complicado desglosar uno a uno o esquematizar por la gran cantidad de casos, algunos alumnos intenten generalizar las acciones que han hecho en otros problemas con menos casos y qué tipo de generalización hacen.

- Etapa 2. La segunda ocasión se llevó a cabo al momento de impartir la clase sobre el tema de conteo correspondiente: ordenación (con orden) ó combinación (sin orden). La forma en que se introdujeron los conceptos de ordenaciones ó combinaciones consistió en resolver, junto con los alumnos a través de una discusión en grupo, algunos de los problemas de la serie, sin explicitar los conceptos involucrados en ellos. Se resolvieron varios problemas en el pizarrón lo que generó discusión entre los alumnos y con la profesora. Al ir avanzando, se les preguntó si consideraban que existía alguna forma general de resolver los problemas con el fin de conducirlos a establecer las relaciones entre los conceptos involucrados en los problemas que habían resuelto y con ello encontrar fórmulas que permitieran resolverlos con mayor facilidad. Esta discusión duró hora y media.
- Etapa 3. La tercera ocasión se llevó a cabo en los veinte minutos que quedaban libres de la clase anterior. En este caso, la maestra escribió las

fórmulas que se habían encontrado en la discusión del grupo y les pidió a los alumnos que resolvieran algunos problemas de la serie con la finalidad de comparar las soluciones de los alumnos con la solución que encontraron la primera vez que resolvieron estos problemas y de esta forma encontrar qué acciones se habían realizado en la primera ocasión y considerar si habían logrado reflexionar sobre ellas e interiorizado algunas acciones en procesos.

- Etapa 4. La cuarta vez se llevó a cabo en forma individual, cuando los alumnos resolvieron los problemas como tarea con la finalidad de que tuvieran otra oportunidad de reflexionar sobre sus acciones y reflexionar también sobre los conceptos matemáticos discutidos en la sesión de clase. Para este momento se habían resuelto el mismo tipo de problemas varias veces: por equipos, en clase con la maestra y en clase por si solos. Todo esto con el objetivo de que los alumnos pudieran hacer las construcciones mentales necesarias para entender los conceptos de conteo. El hacerlos como tarea tenía el mismo propósito. En esta etapa se espera que las construcciones de los alumnos sobre el concepto de conteo lleguen a interiorizarse, pues al hacer la tarea tienen una nueva oportunidad de revisar lo que han hecho anteriormente, lo que se discutió en clase y lo que la maestra institucionalizó. Se podrá analizar a partir de sus producciones si han reflexionado a profundidad sobre las acciones que han usado interiorizándolas en un proceso. Esta etapa servirá también para revisar la descomposición genética que se diseñó al principio y en caso necesario refinarla, es decir, hacer los cambios que se consideren pertinentes para que refleje mejor la forma en que los alumnos construyen el conocimiento.

Además de las etapas anteriores se aplicó:

- un examen de conteo que incluía preguntas donde el orden es importante y otras preguntas donde no existe el orden.
- un examen final donde se incluyó una pregunta sobre el tema de conteo.

Todas las etapas anteriores y los exámenes tienen el objetivo de promover la reflexión necesaria para que los alumnos hagan las construcciones mentales predichas por la descomposición genética. La etapa cuatro debe mostrar un avance en la solución de los problemas y un uso razonado de las fórmulas.

Recopilación de datos

- Etapa 1. En esta etapa se pidió a los equipos que escribieran todos los razonamientos que empleaban para resolver los problemas ya fuesen dibujos, diagramas, casos, operaciones, etc. Se pidió que entregaran incluso los procedimientos que concluyeron que eran erróneos. Es decir, debían entregar todo lo que hacían. Con esta información se hizo una tabla para cada problema por equipo a partir de las consideraciones del análisis a priori de los problemas para estudiar si habían realizado las acciones y/ó construcciones mentales que se esperaban según la descomposición genética diseñada. A partir de dichas tablas se llevó a cabo el análisis de los problemas.
- Etapa 2. En esta etapa el maestro iba anotando todas las preguntas, respuestas, dudas, comentarios, etc. que surgían en el momento de la discusión en clase, así como el procedimiento que siguió para llegar, junto con los alumnos a encontrar las relaciones entre los conceptos que se pueden expresar en términos de fórmulas de conteo. Esta bitácora se utilizó para el análisis de esta etapa.
- Etapa 3. En esta etapa nuevamente se solicitó a los alumnos que escribieran todos sus razonamientos y procedimientos, aún los que ellos consideraran incorrectos en la solución de los problemas. Con esta información se hizo, como en la etapa 1, una tabla para cada problema por alumno según el análisis a priori que se había realizado.
- Etapa 4. En esta etapa también se pidió a los alumnos que escribieran todos sus razonamientos y procedimientos, aún los que ellos consideraran incorrectos. En este momento los alumnos habían resuelto algunos de los problemas varias veces y además habían tenido la oportunidad de estudiar

y repasar lo que habían hecho hasta ese momento, por lo que, en general, sólo escribieron un procedimiento. Nuevamente se vació la información en tablas una para cada problema por alumno según el análisis a priori que se había realizado. Estas tablas se usaron para el análisis de los problemas.

- Examen de conteo. Se aplicó a los alumnos un examen de conteo del cuál se analizaron las preguntas que forman parte del tema de este trabajo. Los alumnos resolvieron este examen en dos horas. A partir de las respuestas de los alumnos, se hizo, para cada pregunta, una tabla por alumno que se utilizó para el análisis de las respuestas a las preguntas.
- Examen final. En el examen final se incluyó una pregunta de conteo. Nuevamente se hizo una tabla por alumno a partir de sus respuestas, para el análisis posterior.

Es importante aclarar que lo anterior se hizo en condiciones reales de clase. Los alumnos a los cuáles se les aplicaron las secuencias y los exámenes estaban cursando la materia y fueron evaluados al finalizar el semestre. El curso de álgebra comprende alrededor de treinta clases de dos horas cada una. Para el tema de conteo, la maestra utiliza normalmente alrededor de diez clases. Dentro de estas diez clases fue necesario aplicar las secuencias, hacer la discusión en grupo y formalizar los conceptos. No se utilizó el lenguaje de programación ISETL pues los alumnos lo desconocían.

2.3 DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

Se realizó la siguiente descomposición genética como sustento teórico de la investigación, donde se ven las construcciones mentales que se cree deben hacer los alumnos para entender los conceptos de ordenación y combinación dentro del tema de conteo. La descomposición es la siguiente:

ACCIÓN. Los alumnos que trabajan utilizando concepciones tipo acción tienen la necesidad de hacer las acciones necesarias para desglosar el ejemplo y poder contar físicamente. Usan las fórmulas de memoria, sin entenderlas, lo que los conduce frecuentemente a usarlas incorrectamente. Pueden usar las técnicas de conteo únicamente paso a paso o muestran incomprensión de las técnicas de conteo.

PROCESO. Cuando los alumnos interiorizan las acciones mencionadas anteriormente, en particular la acción de contar, o las acciones involucradas en la aplicación de fórmulas, forman un proceso. Los alumnos pueden generalizar este proceso para aplicarlo a problemas con más elementos o complejos. En este momento han interiorizado las acciones que implican utilizar las fórmulas y ejecutar las sumas y productos necesarios, sin necesidad de contar físicamente y sin utilizar memorización en la aplicación de las fórmulas. La acción de desglosar el problema ha sido interiorizada en un proceso que les permite reconocer los casos válidos y efectuar el producto con los datos relevantes. Al mismo tiempo, los alumnos son capaces de generalizar este producto para llegar a una fórmula.

OBJETO. Los alumnos que tienen una concepción de tipo objeto han encapsulado los procesos anteriores para construir los objetos importantes en el conteo: ordenación y combinación. Pueden comparar fórmulas, usar en un problema dos fórmulas distintas cuando es necesario, distinguir entre diversas situaciones y distinguir las fórmulas que se deben emplear en cada caso. Además pueden revertir el objeto al proceso o los procesos que les dieron origen.

Los alumnos de la primera experiencia (semestre agosto – diciembre del 2006) tuvieron muchas dificultades para resolver los problemas sin orden. Como se analizará más adelante, sólo dos equipos intentaron resolver todos los problemas, los demás resolvieron como máximo hasta el problema nueve. Esto llevó a refinar la descomposición genética para utilizar la anterior para la sección de problemas con orden y diseñar una nueva descomposición para los problemas sin orden. En la nueva descomposición se puso más énfasis en que encontraran la diferencia entre un problema donde existe orden de otro donde no lo hay. En este caso, la segunda serie no se limitó exclusivamente a problemas sin orden sino que está compuesta de problemas con y sin orden y se aplicó en la segunda experiencia (semestre enero – mayo del 2007).

La descomposición genética rediseñada para la nueva serie de problemas es la siguiente:

ACCIÓN. Además de las acciones que se mencionan en la descomposición genética anterior, se agregó la acción de comparar distintos problemas con y sin orden para que los alumnos distinguieran entre ambos tipos. Los alumnos que trabajan usando una concepción acción tienen la necesidad de hacer las acciones necesarias para desglosar el ejemplo para contar físicamente. Al desglosar los problemas son capaces de notar la diferencia entre un problema con orden de otro sin orden. Usan las fórmulas de memoria, es decir, las utilizan de forma automática sin comprender su significado, lo que los lleva, frecuentemente, a usarlas incorrectamente. Los alumnos pueden usar las técnicas de conteo únicamente paso a paso o muestran incomprensión sobre dichas técnicas.

PROCESO. Los alumnos interiorizan la acción de contar ó las acciones involucradas en la aplicación de fórmulas en un proceso. Ellos pueden generalizar este proceso para aplicarlo a problemas más complejos. Es decir, han interiorizado las acciones que implican utilizar las fórmulas y ejecutar las sumas y productos necesarios, sin necesidad de contar físicamente y sin utilizar memorización en la aplicación de las fórmulas. La acción de desglosar el problema ha sido interiorizada en un proceso que les permite reconocer los casos válidos y efectuar el producto con los datos relevantes. Además, han interiorizado la acción de distinguir un problema sin orden de otro con orden lo que los lleva a dividir la fórmula de ordenación para llegar a la fórmula de combinación que usarán para resolver problemas sin orden. Han interiorizado en un proceso las acciones de efectuar el producto y la división correspondientes.

OBJETO. Los alumnos que trabajan con una concepción objeto del conteo encapsulan los procesos anteriores para construir el objeto conteo de combinación. Pueden comparar fórmulas, usar en un problema dos fórmulas distintas cuando es necesario, distinguir entre diversas situaciones y distinguir las fórmulas que se deben emplear en cada caso. Además pueden revertir el objeto al proceso o los procesos que les dieron origen. En este momento podrán hacer comparaciones entre el objeto ordenación y el objeto combinación.

2.4 ANÁLISIS A PRIORI PRIMERA EXPERIENCIA

Se realizó un análisis a priori de los problemas con orden, de los problemas sin orden, del examen de conteo y del examen final para la primera experiencia, es decir, el semestre agosto – diciembre del 2006.

2.4.1 PROBLEMAS CON ORDEN

PREGUNTA 1

Se va a escoger un representante de alumnos de las carreras de matemáticas y actuaría. En la carrera de matemáticas hay cincuenta y cinco alumnos y en la de actuaría hay veinticinco alumnos. ¿Cuántos candidatos hay?

Solución: 55 + 25 = 80 candidatos.

En este problema se espera que los alumnos interpreten la situación y hagan la acción de seleccionar los datos relevantes y la acción de sumarlos.

PREGUNTA 2

Una tienda tiene seis puertas. ¿De cuántas maneras es posible entrar por una puerta y salir por otra?

Solución: 6 x 5 = 30 formas distintas.

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de encontrar los datos relevantes: seis puertas para entrar y sólo cinco para salir. Puede ser que hagan la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron dicha acción en un proceso.

PREGUNTA 3

Los coches marca BMW se producen en cuatro modelos, de ocho colores, tres potencias de motor y dos tipos de transmisión.

a) *¿Cuántos coches distintos pueden fabricarse?*
b) *¿Cuántos coches distintos de color azul se pueden fabricar?*
c) *¿Cuántos coches distintos de color azul y potencia de motor V-8 pueden fabricarse?*

Solución:

a) *4 x 8 x 3 x 2 = 192 coches distintos.*
b) *4 x 3 x 2 = 24 coches azules.*
c) *4 x 2 = 8 coches azules y motor V-8.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de seleccionar los datos relevantes para cada inciso: en el inciso a) cuatro datos, b) tres datos y c) dos datos. Si únicamente pueden hacer acciones puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron dicha acción en un proceso.

PREGUNTA 4

¿Cuántos viernes 13 puede haber en un año no bisiesto? ¿Cuál es el menor número posible?

Solución: Asignar a cada día de la semana un número y encontrar que día caía enero 13, febrero 13, etc. En un año no bisiesto puede haber uno, dos o tres viernes 13.

Este problema es difícil y posiblemente los alumnos tendrán dificultades para resolverlo. Algunos utilizarán un calendario y harán la acción de contar físicamente cuántos viernes 13 hay. La idea es que reflexionen acerca de cómo pueden generalizar esta acción y que construyan el proceso de generalización.

PREGUNTA 5

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras a, b, c, d, e, e, e, e, e de forma que ninguna letra e sea adyacente a otra?

Solución: 4! = 24 maneras.

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de separar las letras *e* de las otras letras. Puede ser que hagan la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto ó el factorial indicaría que ya interiorizaron la acción en un proceso.

<u>PREGUNTA 6</u>

En cierta transmisión existen dos sonidos, uno corto, llamado estrella y uno largo, llamado diagonal. Con estos sonidos pueden formarse señales de uno, dos o tres sonidos. ¿Cuántas señales de un sonido, de dos sonidos y de tres sonidos existen?

Solución: 2 señales de un sonido, 2 x 2 = 4 señales de dos sonidos y 2 x 2 x 2 = 8 señales de tres sonidos.

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de seleccionar los datos relevantes para cada señal. Algunos harán la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron la acción en un proceso.

<u>PREGUNTA 7</u>

Las claves lada en cierta región son de tres dígitos, pero el dígito intermedio debe ser cero ó uno. Las claves lada cuyos últimos dos dígitos son uno están siendo usadas para otros fines, por ejemplo, 911. Con estas condiciones, ¿cuántas claves lada hay disponibles?

Solución: (10 x 10) + (10 x 9) = 190 claves lada.

En este problema se espera que los alumnos puedan reconocer que existen dos casos distintos. Si tienen cero en medio entonces es posible usar cualquier dígito en la posición final. Si tienen uno en medio entonces sólo es posible usar nueve dígitos al final. Puede ser que los alumnos hagan la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron dicha acción en un proceso.

<u>PREGUNTA 8</u>

Las placas de los coches en una ciudad son de tres letras. Si se usa el alfabeto de veintiséis letras, ¿cuántas:

a) placas distintas hay?

b) *placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con una vocal?*

c) *si no se permiten las repeticiones, ¿cuántas placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con la letra q? ¿Cuántas terminan con vocal?*

Solución:

a) $26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17576$ *placas distintas.*

b) $26 \times 26 = 26^2 = 676$ *placas que comienzan con q.* $26 \times 26 \times 5 = 5 \times 26^2 = 3380$ *placas que terminan con vocal.*

c) $25 \times 24 = 600$ *placas que comienzan con q.* $25 \times 24 = 600$ *placas que terminan con q.* $25 \times 24 \times 5 = 3000$ *placas que terminan con vocal.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de distinguir los incisos *a)* y *b),* donde se permite la repetición de letras, del inciso *c),* donde no se permite la repetición de letras. Además, la acción de fijar, según el inciso, si la primera o última letra cumplen determinada restricción: ser la letra *q* o ser vocal. Puede ser que los alumnos hagan la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron la acción en un proceso.

<u>*PREGUNTA 9*</u>

Sea A un conjunto con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene A?

Solución: $2 \times 2 \times \ldots 2 = 2^n$ *subconjuntos.*

En este problema los alumnos deben reconocer la posibilidad de usar la fórmula conocida del total de subconjuntos de un conjunto: 2^n, pero no se espera que la usen necesariamente. Es posible que hagan la acción de reconocer que cada elemento del conjunto puede o no estar en un subconjunto y al final hagan el producto correspondiente. Si usan la fórmula puede ser que la usen de forma memorizada o que la justifiquen utilizando los argumentos adecuados. En el primer caso se considera una acción y si escriben alguna explicación es posible que hayan interiorizado las acciones involucradas en su obtención en un proceso.

PREGUNTA 10

Un profesor de matemáticas tiene siete libros en su librero. Tres son de matemáticas discretas y cuatro de álgebra superior. ¿De cuántas formas puede ordenar los libros si:

a) *no hay restricciones?*
b) *si se deben alternar las materias?*
c) *si todos los libros de matemáticas discretas deben estar juntos?*
d) *si todos los libros de álgebra superior deben estar juntos y los de matemáticas discretas también?*
e) *si los libros de matemáticas discretas deben colocarse de forma que tengan dos libros de álgebra superior a cada lado?*

Solución:

a) *7! formas de ordenar los libros.*
b) *4!3! formas de alternar las materias.*
c) *5!3! formas de poner los libros de matemáticas discretas juntos.*
d) *2!4!3! formas de poner los libros de matemáticas juntos y de álgebra juntos.*
e) *3!4! formas de poner dos libros de álgebra a cada lado de los libros de matemáticas.*

En este problema se espera que los alumnos sepan hacer la acción de distinguir el orden en que van los libros: a veces juntos, otros alternados y otros de cualquier forma. Se espera que hagan la acción de separar los libros de matemáticas de los de álgebra en los incisos que se necesite. Puede ser que hagan la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron dicha acción en un proceso.

PREGUNTA 11

¿Cuántos enteros entre 10,000 y 100,000 están formados sólo por los dígitos 6, 7 u 8? ¿Cuántos habrá que no tengan más que los dígitos 6, 7, 8 ó 0?

Solución: $3^5 = 243$ *números formados por 6, 7 u 8.* $3(4^4) = 768$ *números formados por 6, 7, 8 ó 0.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer la diferencia entre permitir o no el cero. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron dicha acción en un proceso.

<u>*PREGUNTA 12*</u>

Con las letras de la palabra superior (supóngase que las dos letras r son diferentes), ¿cuántas palabras

a) *se pueden formar?*
b) *de cuatro letras se pueden formar?*
c) *de doce letras se pueden formar?*

Solución:

a) *8! palabras.*
b) *8 x 7 x 6 x 5 = 1680 palabras de cuatro letras.*
c) 8^{12} *palabras de doce letras.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de distinguir el tamaño de la palabra: 8, 4 o 12 letras, lo que implica permitir o no la repetición de las letras. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron dicha acción en un proceso.

<u>*PREGUNTA 13*</u>

Con las letras de la palabra dedo, ¿cuántas

a) *palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son distintas?*
b) *palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son iguales?*

Solución:

a) *4! = 24 palabras.*
b) $\frac{4!}{2}$ *= 12 palabras distintas.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer la diferencia entre los dos incisos, es decir, la acción de darse cuenta que la letra *"d"* está repetida lo que crea palabras idénticas al intercambiarlas. Puede ser que hagan la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron la acción en un proceso.

<u>*PREGUNTA 14*</u>

Se van a sentar siete personas en una mesa redonda.

a) ¿Cambia la distribución de las personas sentadas en la mesa si pides que todas se levanten y muevan hacia la derecha dos sillas ó hacia la izquierda tres lugares?

b) ¿Cuántas distribuciones distintas de personas sentadas en la mesa existen?

c) ¿Cuántas distribuciones distintas de personas sentadas en la mesa existen si hay dos personas que insisten en sentarse juntas?

Solución:

a) No, la distribución es la misma. Una permutación circular se considera igual cuando los elementos se rotan.

b) $(7 – 1)! = 6!$ distribuciones distintas.

c) $2!5!$ distribuciones distintas con dos personas juntas.

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de distinguir entre una permutación lineal y una circular, lo que les lleva a dividir la permutación lineal para convertirla en circular. Además, en el inciso *c)* hacer la acción de considerar a dos personas como una para mantenerlas juntas. Puede ser que hagan la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos restan uno al total de personas y efectúan la división indicaría que ya interiorizaron dicha acción en un proceso.

<u>*PREGUNTA 15*</u>

¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?

Solución: $9 + (9)(9) + (9)(9)(8) = 738$ números.

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que existen números de uno, dos o tres dígitos, la acción de reconocer que el primer dígito del número de dos o tres dígitos no puede ser cero y la acción de usar dígitos distintos. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron la acción en un proceso.

2.4.2 PROBLEMAS SIN ORDEN

PREGUNTA 1

¿De cuántas formas se puede escoger un equipo de basketball (5 jugadores) de entre doce jugadores posibles? ¿Cuántos equipos incluyen al más débil y al más fuerte?

Solución: $\binom{12}{5} = 792$ *equipos.* $\binom{10}{3} = 120$ *equipos con el más débil y el más fuerte.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden y si resuelven como ordenación dividir para quitarlo. Además, deben reconocer que no puede haber repeticiones por tratarse de personas. En la segunda pregunta se espera que hagan la acción de restar del total de personas a la más débil y la más fuerte y componer al equipo de tres personas. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos y contarlos. Si los alumnos hacen el producto y la división indicaría que ya interiorizaron las acciones en un proceso.

PREGUNTA 2

Un entrenador debe seleccionar a once alumnos de su clase para jugar en un torneo de fútbol. Si puede formar 12,376 equipos, ¿cuántos alumnos tiene en su clase?

Solución: $\binom{n}{11} = 12376 \Rightarrow n \approx \sqrt[11]{12376(11!)} = 17$ *alumnos en la clase.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden. También, que realicen la acción de reconocer que necesitan encontrar el total de alumnos de la clase y no el número de equipos que se pueden formar.

<u>*PREGUNTA 3*</u>

¿De cuántas formas se pueden distribuir diez monedas (idénticas) entre cinco niños:

a) *si no hay restricciones?*
b) *si cada niño recibe una moneda como mínimo?*
c) *si el niño mayor obtiene al menos dos monedas?*

Solución:

a) $\binom{14}{10} = 1001$ *formas de repartir las monedas.*

b) $\binom{9}{5} = 126$ *formas de repartir las monedas con una como mínimo.*

c) $\binom{12}{8} = 495$ *formas de repartir las monedas con el mayor mínimo dos.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden. Además, la acción de reconocer que existen objetos idénticos y la acción de quitar las permutaciones entre ellos. También, la acción de restar para seleccionar la cantidad de monedas en cada caso: a) 10, b) 5 y c) 8. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos para contarlos. Si los alumnos hacen el producto, las restas y la división indicaría que ya interiorizaron dichas acciones en un proceso.

<u>*PREGUNTA 4*</u>

¿De cuántas maneras se pueden repartir ocho pasteles de chocolate y siete de canela entre tres niños si cada uno quiere como mínimo un pastel de cada sabor?

Solución: $\binom{7}{5}\binom{6}{4} = 315$ *formas de repartir los pasteles.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden. Además, la acción de restar los pasteles que ya se repartieron y la acción de separar los pasteles por sabores. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto y las restas correspondientes indicaría que ya interiorizaron las acciones en un proceso.

<u>*PREGUNTA 5*</u>

Un alumno tiene que responder en un examen a siete preguntas de diez. ¿De cuántas formas puede resolver el examen si:

a) no hay restricciones?

b) debe responder a las dos primeras preguntas?

c) debe responder a tres preguntas como mínimo de las cinco primeras?

Solución:

a) $\binom{10}{7} = 120$ *formas de contestar el examen.*

b) $\binom{8}{5} = 56$ *formas de contestar el examen respondiendo las dos primeras preguntas.*

c) $\binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\binom{5}{2} = 110$ *formas de contestar el examen respondiendo mínimo tres de las cinco primeras preguntas.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden y si resuelven como ordenación dividan para quitarlo. Hacer la acción de restar, en el inciso *b),* pues sólo pueden escoger entre ocho preguntas y en el inciso *c)* hacer la acción de separar las cinco primeras preguntas de las cinco últimas. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto y las otras operaciones indicaría que ya interiorizaron dichas acciones en un proceso.

PREGUNTA 6

Resuelve los dos incisos siguientes y di si existe una relación entre ellos.

a) *Encuentra el número de soluciones en los enteros de la ecuación* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ *con* $x_i \geq 0$ *para toda* $1 \leq i \leq 4$.

b) *¿De cuántas formas se pueden repartir siete canicas iguales entre cuatro niños?*

Solución:

a) $\binom{10}{7} = 120$ *soluciones enteras.*

b) $\binom{10}{7} = 120$ *formas de repartir las canicas.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden. En el inciso *a)* se espera que hagan la acción de dar distintas soluciones para darse cuenta que es lo mismo que el inciso *b).* Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto indicaría que ya interiorizaron dichas acciones en un proceso.

PREGUNTA 7

Un alumno hace un examen de diez preguntas de las cuales debe responder a ocho y omitir dos.

a) *¿De cuántas maneras puede hacer cada estudiante su selección?*

b) *Si un estudiante tiene que contestar a dos preguntas y omitir ocho, ¿de cuántas maneras puede hacer su selección?*

c) *¿Qué relación hay entre las dos respuestas anteriores? ¿Por qué?*

Solución:

a) $\binom{10}{8} = 45$ *formas de contestar el examen.*

b) $\binom{10}{2} = 45$ *formas de contestar dos preguntas.*

c) $\binom{10}{8}=\binom{10}{2}$ *es lo mismo.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden y, si resuelven como ordenación dividir para quitarlo. También, que se den cuentan que en ambos incisos están encontrando lo mismo. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto, la división y la comparación adecuada indicaría que ya interiorizaron las acciones en un proceso.

PREGUNTA 8

Se dan veinte puntos del plano, de los cuales no hay tres colineales, es decir, no hay tres puntos sobre una línea recta. ¿Cuántas rectas se podrán dibujar, uniendo pares de puntos? ¿Cuántos triángulos se podrán formar uniendo ternas de puntos?

Solución: $\binom{20}{2}=190$ *rectas.* $\binom{20}{3}=1140$ *triángulos.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden y si resuelven como ordenación dividir para quitarlo. Además, la acción de reconocer que el problema se reduce a escoger dos o tres puntos cualesquiera para formar las rectas o triángulos, respectivamente. Estas acciones las pueden interiorizar en el proceso de efectuar las operaciones correspondientes.

PREGUNTA 9

En una fiesta de niños se tienen cuatro cofres de pirata llenos con monedas de uno, cinco, diez y veinticinco. De los cuatro cofres cada niño puede escoger veinte monedas en total para hacer su tesoro. ¿De cuántas formas puede un niño seleccionar su tesoro?

Solución: $\binom{23}{20}=1771$ *tesoros.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden y si resuelven como ordenación dividir para quitarlo. Además, la acción de reconocer que existen objetos idénticos y deben quitarse las permutaciones entre ellos. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto y las otras operaciones indicaría que ya interiorizaron dichas acciones en un proceso.

<u>*PREGUNTA 10*</u>

En una fiesta se esperan veinte invitados y se van a dar cuatro tipos de bebidas diferentes. ¿De cuántas formas pueden distribuirse las bebidas?

Solución: $\binom{23}{20} = 1771$ *bebidas diferentes.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden y si resuelven como ordenación dividir para quitarlo. Además, la acción de reconocer que existen objetos idénticos y, entonces, efectuar la acción de quitar las permutaciones entre ellos. Este problema tiene la misma solución que el anterior, es importante determinar si los relacionan y en qué condiciones.

<u>*PREGUNTA 11*</u>

¿De cuántas formas se puede dar una mano de cinco cartas de una baraja (con cincuenta y dos cartas divididas en cuatro palos con trece cartas cada palo) para obtener:

a) cinco cartas del mismo palo?
b) cuatro ases?
c) cuatro de un mismo palo?
d) tres ases y dos jotas?
e) un full (una tercia y un par)?
f) una tercia?
g) dos pares?

Solución:

a) $\binom{4}{1}\binom{13}{5}$

b) $\binom{48}{1}$

c) $\binom{4}{1}\binom{13}{4}\binom{39}{1}$

d) $\binom{4}{3}\binom{4}{2}$

e) $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$

f) $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{48}{2}$

g) $\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}$

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden y si resuelven como ordenación dividir para quitarlo. Interesa analizar la forma en que intenten resolver este problema, qué acciones y construcciones utilizan. La acción correcta sería separar los números de los palos y no trabajar directamente con las cartas. En un primer intento, dada la dificultad del problema, no es de esperar que los alumnos sean capaces de resolver correctamente este problema.

PREGUNTA 12

¿De cuántas maneras puede escoger el ganador de un premio tres discos compactos de la lista de los diez de mayor éxito, si se permiten las repeticiones?

Solución: $\binom{12}{3}$ *formas de escoger.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden. Además, la acción de reconocer que existen objetos idénticos y deben hacer la acción de quitar las permutaciones entre ellos. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto y la operación de quitar las permutaciones indicaría que han interiorizado las acciones en un proceso.

PREGUNTA 13

¿De cuántas maneras se pueden repartir doce libros distintos entre cuatro niños de modo que:

a) *cada niño reciba tres libros?*

b) *los dos niños mayores reciban cuatro libros cada uno y los dos menores dos cada uno?*

Solución:

a) $\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$ *formas de repartir los libros.*

b) $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ *formas de repartir los libros.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden y si resuelven como ordenación dividir para quitarlo. También, la acción de diferenciar los dos incisos: en el *a)* dar tres libros a cada niño mientras que en el *b)* es diferente para los mayores que para los menores. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos para contarlos. Si los alumnos hacen el producto, la división y diferencian los casos indicaría que ya interiorizaron estas acciones en un proceso.

PREGUNTA 14

¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra mississippi que no tengan las letras s consecutivas?

Solución: $\binom{8}{4}\frac{7!}{4!2!}$ *palabras.*

En este problema hay varias acciones: la acción de separar las letras *"s"* de las demás letras, la acción de permutar las demás letras y la acción de meter nuevamente las letras *"s"*. Estas acciones se pueden interiorizar en un proceso. Dada la dificultad del problema, no es de esperar que puedan resolverlo correctamente en un primer acercamiento.

PREGUNTA 15

¿De cuántas formas se pueden escoger cuatro números del conjunto $A = \{-9, -8, -2, -1, 3, 5, 9\}$ *de tal forma que el producto de los cuatro sea positivo, si:*

a) *los cuatro números deben ser distintos?*

b) *si los números pueden repetirse?*

Solución:

a) $\binom{7}{4} - \binom{4}{3}\binom{3}{1} - \binom{4}{1}\binom{3}{3}$ *ó* $\binom{4}{4} + \binom{4}{2}\binom{3}{2}$ *formas de escoger los números.*

b) $\binom{7}{4} + \binom{5}{2}\binom{4}{2} + \binom{6}{4}$ *formas de escoger los números.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden. En este caso la acción de permitir repeticiones o no es la diferencia entre los dos incisos. Además, en el inciso *a)* hay dos formas distintas de resolverlo: encontrar los casos posibles o restar del total los resultados negativos.

Se espera que el hecho de que en está actividad no importe el orden generará mayor conflicto que la actividad donde existe orden. Es posible que algunos alumnos no distingan esto y resuelvan usando las mismas estrategias que en los problemas con orden.

2.4.3 EXAMEN DE CONTEO

El examen de conteo que se aplicó incluía todo el tema de conteo que está en el programa de la materia de Álgebra Superior I, esta tesis no abarcó todo el tema por lo que algunas preguntas no se analizarán por quedar fuera del tema que se estudió en este trabajo.

PREGUNTA 1

En una taquería se pueden pedir los tacos al pastor con o sin cebolla, con o sin cilantro, con o sin piña y con o sin salsa. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los tacos?

Solución: 2 x 2 x 2 x 2 = 16.

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que cada ingrediente puede o no estar presente en los tacos lo que le da dos opciones. Si los alumnos efectúan únicamente acciones puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos han interiorizado la acción en un proceso, entonces reconocerán que el problema consiste en una ordenación con repetición y usarán la fórmula: $OR_n^m = n^m$ con n objetos y m a seleccionar. En el caso que sea usada la fórmula es importante distinguir si la usan de manera correcta y cómo la usan.

PREGUNTA 2

¿De cuántas formas se pueden distribuir diez monedas idénticas entre cinco niños:

a) *si no hay restricciones?*
b) *si cada niño recibe una moneda como mínimo?*
c) *si el niño mayor obtiene al menos dos monedas?*

Solución:

a) $\binom{14}{10}$ *formas.*

b) $\binom{9}{5}$ *formas.*

c) $\binom{12}{8}$ *formas.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que el problema no involucra orden y que los objetos son idénticos. Además, hacer la acción de restar en los incisos *b)* y *c)* las monedas que ya se repartieron. Si los alumnos únicamente usan acciones puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos han interiorizado estas acciones en un proceso entonces reconocerán que el problema consiste en una combinación con repetición, escribirán la ecuación correspondiente $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ y usarán la fórmula: $\binom{n+m-1}{m}$ con *n* objetos tomados de *m* en *m*.

En el caso en que los alumnos usen la fórmula es importante analizar si la aplican correctamente y cómo la usan.

PREGUNTA 3

¿Cuántos enteros entre 1000 y 9999 inclusive tienen dígitos distintos? ¿De ellos, cuántos son impares?

Solución: 9 x 9 x 8 x 7 = 4536 números con dígitos distintos. 8 x 8 x 7 x 5 = 2240 impares.

En este problema se espera que los alumnos hagan las acciones siguientes: reconocer que el problema involucra orden y que no están permitidas las repeticiones, reconocer que los números que necesitan son de cuatro dígitos, reconocer que el primer dígito no puede valer cero y para los números impares es necesaria una terminación especial. Si los alumnos usan únicamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos ya interiorizaron las acciones en un proceso, entonces reconocerán que el problema trata de una ordenación y que deben colocar el número de dígitos que se pueden usar en cada lugar.

PREGUNTA 4

Un club tiene sesenta miembros: treinta hombres de negocios y treinta profesores. ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de ocho miembros si:

a) debe estar integrado por lo menos por tres hombres de negocios y al menos tres profesores?

b) la única condición es que al menos uno de los ocho sea un hombre de negocios?

Solución:

a) $\binom{30}{3}\binom{30}{5}+\binom{30}{4}\binom{30}{4}+\binom{30}{5}\binom{30}{3}$ *comités.*

b) $\binom{60}{8}-\binom{30}{8}$ *comités.*

En este problema se espera que los alumnos hagan las acciones siguientes: reconocer que es un problema sin orden y sin repeticiones, reconocer que en el inciso *a)* existen tres casos que cumplen las condiciones dadas y en el inciso *b)* la acción de restar del total los casos no posibles para obtener los que se requieren. Si los alumnos usan acciones únicamente puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos han interiorizado las acciones en un proceso entonces reconocerán que el problema es una combinación y usarán la fórmula correspondiente $\binom{n}{m}$ con n total de objetos y m objetos a seleccionar. Es importante analizar si aplican la fórmula correctamente y cómo la usan.

<u>*PREGUNTA 5*</u>

Esta pregunta pertenece a otro tema.

<u>*PREGUNTA 6*</u>

¿Cuántas soluciones enteras hay de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ con $x_i \geq -2$, $1 \leq i \leq 4$?

Solución: $\binom{43}{40}$ *soluciones.*

En este problema si los alumnos efectúan solamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos ya interiorizaron dichas acciones en un proceso, reconocerán que el número de soluciones enteras es lo mismo que una combinación con repetición, escribirán la ecuación correspondiente $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ y usaran la fórmula: $\binom{n+m-1}{m}$ con cambio de variable con n objetos tomados de m en m. Es importante analizar la forma en que aplican la fórmula y si lo hacen correctamente.

PREGUNTA 7

¿De cuántas maneras se podrán sentar diez personas en una fila, si dos de ellas no deben sentarse nunca una al lado de la otra?

Solución: $10!-9!(2)$ *filas.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que en el problema existe orden y que no debe haber repeticiones. Hay dos formas de resolver el problema, haciendo casos u obteniendo el total y restando los casos no posibles. Si los alumnos hacen acciones únicamente, puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos interiorizaron las acciones en un proceso, entonces reconocerán el problema como una permutación y usarán la fórmula: *n!* Es importante analizar si aplican la fórmula correcta y cómo la usan. En este problema los alumnos que trabajan mediante acciones difícilmente podrán llegar a la respuesta correcta.

PREGUNTA 8

En una fiesta de niños se tienen cuatro cofres de pirata llenos con monedas de uno, cinco, diez y veinticinco centavos. De los cuatro cofres cada niño puede escoger veinte monedas en total para hacer su tesoro. ¿De cuántas formas puede un niño seleccionar su tesoro?

Solución: $\binom{23}{20}$ *tesoros.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que en el problema no existe orden y que los objetos son idénticos. Si los alumnos hacen únicamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos ya interiorizaron las acciones en un proceso, reconocerán que el problema consiste en una combinación con repetición, escribirán la ecuación correspondiente $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ y usarán la fórmula: $\binom{n+m-1}{m}$ con *n* objetos tomados de *m* en *m*. Es importante analizar si aplican la fórmula correcta y cómo la usan.

PREGUNTA 9

Esta pregunta pertenece a otro tema.

Cuando los alumnos resuelvan este examen, ya tuvieron varias oportunidades de reflexión a través de las series de problemas, el tema discutido en clase, las series resueltas como tarea y su estudio personal, por lo que se espera que sean suficientes para que los alumnos hayan interiorizado las distintas acciones en un proceso. Se espera, también que los alumnos distingan si el problema incluye o no orden y si hay o no repeticiones de manera que sean capaces de utilizar las fórmulas adecuadas requeridas para cada caso y que, además, sean capaces de utilizarlas correctamente.

2.4.4 EXAMEN FINAL

Resuelve en esta hoja. Explica ***TODO LO QUE HAGAS***. Debes responder:

- ¿Hay o no orden? ¿Por qué?
- ¿Hay o no repeticiones? ¿Por qué?
- Si usaste una fórmula, ¿por qué?
- Si no usaste fórmula, ¿por qué?
- Si hay casos explica cada uno.
- Si sumaste o multiplicaste, ¿por qué?

¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?
Solución: $9 + 9^2 + 9^2(8) = 738$ *números con dígitos distintos.*

En este problema se espera que los alumnos hagan las siguientes acciones: reconocer que es un problema de conteo donde el orden es importante y no valen las repeticiones; reconocer que existen varios casos (números de uno, dos o tres dígitos) y reconocer que el primer dígito no puede valer cero. Si los alumnos efectúan únicamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos y contarlos. Si los alumnos ya interiorizaron dichas acciones en un proceso, entonces reconocerán que se trata de una ordenación y pondrán el número de dígitos que se puedan usar en cada lugar.

Esta pregunta fue parte del examen final, así que se espera que los alumnos hayan interiorizado las acciones necesarias para su solución en un proceso en el que puedan elegir una fórmula y aplicarla correctamente.

2.5 ANÁLISIS A PRIORI SEGUNDA EXPERIENCIA

Se realizó el análisis a priori para el semestre enero – mayo del 2007, la segunda experiencia. Como se verá más adelante la serie de problemas con orden usada en el semestre anterior se utilizó nuevamente por lo que no se efectuará el análisis a priori por ser idéntico al anterior. Sin embargo, la serie de problemas sin orden se cambió por una serie de problemas con y sin orden, por lo que se hace el análisis a priori para ésta y para el examen de conteo y el examen final pues dichos exámenes fueron distintos a los del semestre anterior.

2.5.1 PROBLEMAS CON ORDEN Y SIN ORDEN

PREGUNTA 1

Sean las letras a, b, c, d, e. No puedes repetir las letras.

a) *¿Cuántos conjuntos de tres letras se pueden formar? Recuerda que en los conjuntos no existe el orden y, por ejemplo, los conjuntos* $\{a,b,c\}$ *y* $\{b,c,a\}$ *son iguales.*
b) *¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar? En este caso existe orden y las palabras abc y bca son distintas.*

c) *¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los dos incisos anteriores?*

Solución:

a) $\binom{5}{3} = 10$ *conjuntos de tres elementos.*

b) $O_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ *palabras de tres letras.*

c) *Debe dividirse el inciso b) entre 3!= 6 (permutaciones de tres elementos) para obtener el inciso a).*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de distinguir el inciso *a),* sin orden, del inciso *b),* con orden. En el inciso *c)* deben hacer la acción de relacionar las dos respuestas y darse cuenta que existen menos conjuntos que palabras pues hay secuencias que en *b)* se cuentan como diferentes mientras que en *a)* se cuentan como una. Si hacen únicamente acciones puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos ya interiorizaron la acción en un proceso entonces en el inciso *c)* dividirán el inciso *b)* entre 3! = 6, pues son 6 secuencias iguales, para obtener el inciso *a).*

<u>*PREGUNTA 2*</u>

Sean los números 1, 2, 3, 4. No puedes repetir los números.

a) *¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse? Recuerda que existe orden pues* $12 \neq 21$.

b) *¿Cuántos conjuntos de dos elementos pueden formarse? En este caso no hay orden* $\{1,2\} = \{2,1\}$.

c) *¿Qué diferencia hay entre los dos incisos anteriores?*

d) *¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los incisos a) y b)?*

Solución:

a) $O_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ *números de dos dígitos.*

b) $\binom{4}{2} = 6$ *conjuntos de dos elementos.*

c) *En el inciso a) hay orden mientras que en b) no lo hay.*

d) Debe dividirse el inciso a) entre 2! (permutaciones de dos elementos) para obtener el inciso a).

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de distinguir el inciso *a),* con orden, del inciso *b),* sin orden y así contestar el inciso *c).* En el inciso *d)* deben relacionar las respuestas de los incisos *a)* y *b)* y darse cuenta que existen menos conjuntos que números pues hay secuencias que en *a)* se cuentan como diferentes mientras que en *b)* se cuentan como una. Si hacen únicamente acciones puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos ya interiorizaron la acción en un proceso entonces en el inciso *d)* dividirán el inciso *a)* entre 2! = 2, pues son 2 secuencias iguales, para obtener el inciso *b).*

<u>*PREGUNTA 3*</u>

Sean los números 1, 2, 3, 4. Se van a formar números de cuatro dígitos (no se puede repetir los números), ¿dé cuántas formas puedes seleccionar al primer dígito, al segundo, al tercero y al cuarto? ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse?

Solución: 4 formas de seleccionar el primer dígito, 3 formas de seleccionar el segundo, 2 formas de seleccionar el tercero y 1 forma de seleccionar el cuarto. $P_4 = 4! = 24$ *números de cuatro dígitos.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que para el primer dígito tienen cuatro opciones, para el segundo quedan tres opciones pues ya escogieron un dígito, para el tercero quedan dos opciones pues ya escogieron dos y para el cuarto queda una opción solamente. Además se espera hagan la acción de reconocer que importa el orden. Si hacen únicamente acciones puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos ya interiorizaron la acción en un proceso multiplicarán las opciones que tienen para cada dígito.

<u>*PREGUNTA 4*</u>

Se tienen doce jugadores posibles y se quiere escoger un equipo de basketball (5 jugadores). ¿Dé cuántas formas puedes seleccionar al primer jugador, de cuántas al segundo, al tercero, al cuarto y al quinto? ¿Cuántos equipos se pueden formar, si el orden de los jugadores no importa?

Solución: 12 formas de escoger el primer jugador, 11 formas de escoger el segundo, 10 formas de escoger el tercero, 9 formas de escoger el cuarto y 8 formas de escoger el quinto. $\binom{12}{5} = 792$ *equipos distintos.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que para el primer jugador tienen doce opciones, para el segundo quedan once opciones pues ya escogieron un jugador, para el tercero quedan diez opciones pues ya escogieron dos, para el cuarto quedan nueve opciones pues ya escogieron tres y para el quinto quedan ocho opciones. Además, se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden. Si hacen únicamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos ya interiorizaron la acción en un proceso multiplicarán las opciones que tienen para cada jugador y dividirán entre las permutaciones para quitar el orden.

PREGUNTA 5

De los equipos encontrados en la pregunta anterior, ¿cuántos incluyen al jugador más débil y al más fuerte?

Solución: $\binom{10}{3} = 120$ *equipos incluyendo al más débil y al más fuerte.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de restar del total de personas a la más débil y la más fuerte y componer al equipo de tres personas. Si hacen únicamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto y la división, para quitar el orden, indicaría que ya interiorizaron las acciones en un proceso.

PREGUNTA 6

Si tienes diez objetos y quieres escoger a los diez objetos, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes?

Solución: $\binom{10}{10} = 1$ *forma.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que el orden no importa y solamente existe una forma de tomar diez objetos de diez objetos. Si hacen únicamente acciones puede ser que escriban el caso. Si los alumnos contestan correctamente, sin escribir el caso, puede ser que hayan interiorizado la acción en un proceso.

<u>*PREGUNTA 7*</u>

Si tienes diez objetos y quieres escoger seis de ellos, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes?

Solución: $\binom{10}{6} = 210$ *formas.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que el orden no importa y si resuelven como ordenación dividir para quitarlo. Si hacen únicamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto y la división, para quitar el orden, indicaría que han interiorizado la acción en un proceso.

<u>*PREGUNTA 8*</u>

Un alumno tiene que responder en un examen a siete preguntas de diez. ¿De cuántas formas puede resolver el examen si:

a) no hay restricciones?
b) debe responder a las dos primeras preguntas?
c) debe responder a tres preguntas como mínimo de las cinco primeras?

Solución:

a) $\binom{10}{7} = 120$ *formas.*

b) $\binom{8}{5} = 56$ *formas.*

c) $\binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\binom{5}{2} = 110$ *formas.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no importa el orden y si resuelven como ordenación dividir para quitarlo. Hacer la acción de restar, en el inciso *b),* pues sólo pueden escoger entre ocho preguntas y en el inciso *c)* hacer la acción de separar las cinco primeras preguntas de las cinco últimas. Si hacen únicamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos hacen el producto, la división y la resta indicaría que ya interiorizaron dichas acciones en un proceso.

PREGUNTA 9

Se tienen n objetos y quieres escoger k de ellos, con k < n, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes? ¿Cuántas formas hay de escogerlos si el orden si importa? Explica todo lo que haces.

Solución: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *formas de escoger sin orden.* $O_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ *formas de escoger con orden.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que en un caso el orden importa y en el otro no. Además, analizar que acciones hacen para en un caso mantener el orden y en el otro quitarlo. Si hacen únicamente acciones puede ser que intenten escribir algunos casos. Si los alumnos escriben las fórmulas indicaría que ya interiorizaron las acciones en un proceso.

2.5.2 EXAMEN DE CONTEO

El examen de conteo que se aplicó incluía todo el tema de conteo que está en el programa de la materia de Álgebra Superior I, esta tesis no abarcó todo el tema por lo que algunas preguntas no se analizarán por quedar fuera del tema que se estudió en este trabajo.

PREGUNTA 1

Prueba que el producto de cinco enteros positivos consecutivos es divisible entre 5!

Solución: $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}=\dfrac{n!}{5!(n-5)!}=\dbinom{n}{5}\in\mathbb{Z}.$

En este problema se espera que los alumnos reconozcan como objeto la fórmula de combinaciones y distingan que el resultado de su aplicación es un número entero.

PREGUNTA 2

Si tenemos el siguiente producto de dos binomios con un término común (x+5)(x-1), ¿cuántas formas posibles hay para los signos de los factores?

Solución: OR_2^2 *=2x2=4.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que cada factor puede ser positivo o negativo por lo que se tienen dos opciones. Si son capaces de efectuar únicamente acciones puede ser que escriban todos los casos. Cuando los alumnos interioricen la acción en un proceso, entonces podrán reconocer que el problema se refiere a una ordenación con repetición y usarán la fórmula: $OR_n^m=n^m$ con n total de objetos y m objetos a seleccionar. Es importante analizar si aplican la fórmula correcta y la forma en que la usan.

PREGUNTA 3

En una panadería hay treinta tipos de pan dulce y ocho tipos de pan blanco. ¿Dé cuántas formas puede una persona escoger quince panes dulces y quince panes blancos?

Solución: $\dbinom{44}{15}\dbinom{22}{15}.$

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que se trata de una situación en la que no hay orden y que los objetos son idénticos. También la acción de separar los panes dulces de los panes blancos. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos interiorizaron las acciones en un proceso entonces reconocerán que se trata de un problema de combinación con repetición, escribirán la ecuación correspondiente $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ y usarán la fórmula: $\binom{n+m-1}{m}$ con n objetos tomados de m en m. Es importante analizar si aplican la fórmula correcta y la forma en que la usan. Al final deben multiplicar las dos soluciones, la del pan blanco y la del pan dulce.

<u>*PREGUNTA 4*</u>

En un salón hay siete niñas y nueve niños.

a) ¿Dé cuántas formas puede el profesor de deportes formarlos de tal manera que en la fila aparezcan primero las niñas y después los niños?

b) ¿Dé cuántas formas puede formarlos de tal manera que la fila siga el siguiente patrón: MHMHHMHMHHMHMHHM.

c) ¿Cuántos equipos de fútbol (once jugadores) se pueden formar de tal manera que el número de hombres en el equipo sea siempre al menos uno más que el número de mujeres?

Solución:

a) 7!9! filas.

b) 7!9! filas.

c) $\binom{9}{9}\binom{7}{2} + \binom{9}{8}\binom{7}{3} + \binom{9}{7}\binom{7}{4} + \binom{9}{6}\binom{7}{5}$ *equipos.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que los incisos *a)* y *b)* se refieren a una situación con orden y sin repeticiones mientras que el inciso *c)* es un problema donde no existe orden y sin repetición con cuatro casos que cumplen las condiciones dadas. Puede ser que los alumnos intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos interiorizaron las acciones en procesos, entonces reconocerán que los incisos *a)* y *b)* se refieren a una ordenación y usarán la fórmula correspondiente $O_n^n = P_n = n!$ con n total de objetos de donde escogerán todos, mientras que en el inciso *c)* reconocerán que se trata de una combinación sin repetición y usarán la fórmula correspondiente $\binom{n}{m}$ con n total de objetos y m objetos a seleccionar. Es importante analizar si aplican la fórmula correcta y la forma en que la usan.

<u>*PREGUNTA 5*</u>

Se tienen doce cartas idénticas que se van a poner en cuatro buzones.

a) ¿Dé cuántas maneras puede hacerse esto?

b) ¿Dé cuántas maneras puede hacerse si en cada buzón deben ponerse al menos dos cartas?

Solución:

a) $\binom{15}{12}$ *formas.*

b) $\binom{7}{4}$ *formas.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de reconocer que no existe el orden y hay objetos idénticos y que hagan la acción de restar en el inciso *b)* las cartas que ya se pusieron en los buzones. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos. Si los alumnos interiorizaron las acciones en un proceso, entonces reconocerán que se trata de una combinación con repetición, escribirán la ecuación correspondiente $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ y usarán la fórmula: $\binom{n+m-1}{m}$ con n objetos tomados de m en m. Es importante analizar si aplican la fórmula correcta y la forma en que la usan.

<u>*PREGUNTA 6*</u>

Esta pregunta es de otro tema.

<u>*PREGUNTA 7*</u>

¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra mississippi que no tengan las letras s consecutivas? ***¡¡¡EXPLICA***

DETALLADAMENTE QUÉ FÓRMULAS USAS Y PORQUÉ!!! La explicación cuenta la mitad de la pregunta.

Solución: $\frac{7!}{4!2!}\binom{8}{4}$ *palabras distintas.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de restar del total de letras las cuatro letras "*s*" para ordenar primero las letras restantes y después las cuatro "*s*" de forma que no queden consecutivas. Si los alumnos ejecutan únicamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos. Si los alumnos interiorizaron las acciones en un proceso, entonces reconocerán que para el caso de las letras *"s"* se trata de una combinación y usarán la fórmula correspondiente $\binom{n}{m}$ con n total de objetos y m objetos a seleccionar. Mientras que para las demás letras se trata de una permutación distinguible y usarán la fórmula correspondiente $\frac{n!}{n_1!n_2!.....n_t!}$, n el total de objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo, … , n_t de un t'ésimo tipo donde $n_1 + n_2 + ... + n_t = n$. Es posible que algunos alumnos hayan encapsulado estos procesos en objetos, en ese caso serán capaces de usar, en un mismo problema, dos fórmulas de manera flexible y reconocer sin dificultad que en una parte el problema incluye orden y en otra no.

<u>*PREGUNTA 8*</u>

¡¡EXPLICA DETALLADAMENTE!!

a) Escribe la fórmula de ordenación sin repetición y de combinación sin repetición. Explica sus componentes.

b) Escribe un problema que se resuelva con ordenación sin repetición. Explica claramente.

c) Escribe un problema que se resuelva con combinación sin repetición. Explica claramente.

d) Explica la diferencia entre ambas fórmulas y cómo puedes pasar de una a otra. Explica claramente.

Solución:

a) $O_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ *ordenación sin repetición de n objetos tomados de m en m.* $\dbinom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ *combinación sin repetición de n objetos tomados de m en m.*

b) *Problema.*

c) *Problema.*

d) $\dbinom{n}{m} = \dfrac{O_n^m}{m!}$.

En este problema se quiere saber si han interiorizado las acciones de enumerar, sumar, multiplicar, agrupar, etc. en procesos y que hayan a su vez encapsulado estos procesos en objetos que les permitan escribir las fórmulas correctas, explicar sus componentes y plantear problemas que se resuelvan con dichas fórmulas.

2.5.3 EXAMEN FINAL

Considerando que el alfabeto tiene 27 letras, ¿cuántas palabras de 8 letras hay

a) *que comiencen con una vocal, si las letras no se pueden repetir?*

b) *que contengan al menos una vocal, si las letras se pueden repetir?*

c) *que contengan exactamente una vocal, si las letras se pueden repetir?*

d) *que tengan exactamente tres letras U y dos letras O, si las demás letras no se pueden repetir?*

Solución:

a) $5O_{26}^{7} = 5\left(\frac{26!}{19!}\right)$ *palabras.*

b) $OR_{27}^{8} - OR_{22}^{8} = 27^{8} - 22^{8}$ *palabras.*

c) $40 \cdot OR_{22}^{7}$ *palabras.*

d) $\binom{8}{3}\binom{5}{2}O_{25}^{3}$ *palabras.*

En este problema se espera que los alumnos hagan la acción de separar las vocales de las consonantes. Además, la acción de distinguir, en cada uno de los incisos, si las letras se pueden o no repetir, cuántas vocales debe haber y en que lugar ó lugares se pueden poner. Si efectúan únicamente acciones puede ser que intenten escribir todos los casos y contarlos. Si los alumnos interiorizaron las acciones en un proceso, entonces reconocerán que en algunas palabras se usa la fórmula de ordenación con repetición y usarán la fórmula correspondiente $OR_{n}^{m} = n^{m}$, en otras se usa la fórmula de ordenación y usarán la fórmula correspondiente $O_{n}^{m} = \frac{n!}{(n-m)!}$, en otras se usa la fórmula de combinación $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ y en algunas se usan varias de las fórmulas anteriores con n total de objetos y m objetos a seleccionar. Si los alumnos son capaces de usar, en un mismo problema, dos fórmulas y diferenciar que en una parte hay orden y en otra no, es posible que hayan encapsulado estos procesos en el objeto conteo.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRIMERA EXPERIENCIA

Se hará el análisis con la Teoría APOE de los problemas con orden, sin orden, del examen de conteo y del examen final.

3.1 ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE CONTEO CON ORDEN

En esta sección se analizará la serie de problemas con orden. Esta serie está diseñada para el estudio del tema de ordenaciones. El análisis se hará igual que el de la serie sin orden con las mismas etapas. Esta serie fue la primera que los alumnos resolvieron. Se aplicaron las dos series a los alumnos de la primera experiencia, semestre agosto – diciembre del 2006 en el ITAM en la materia de Álgebra Superior I.

ETAPA 1. Problemas resueltos en clase por equipo antes de impartir el tema.

Los alumnos resolvieron primero la serie de problemas con orden. En esta etapa el maestro repartió entre los alumnos la serie y les pidió que entregaran todo lo que escribían, independientemente de que pensaran que era un procedimiento correcto o no. Se analizarán las preguntas 3, 6, 8 y 13 en los equipos uno (solución buena), cuatro (solución regular) y siete (solución buena). A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

<u>*PREGUNTA 3*</u>

Los coches marca BMW se producen en cuatro modelos, de ocho colores, tres potencias de motor y dos tipos de transmisión.

a) ¿Cuántos coches distintos pueden fabricarse?

b) ¿Cuántos coches distintos de color azul se pueden fabricar?

c) *¿Cuántos coches distintos de color azul y potencia de motor V-8 pueden fabricarse?*

Solución:

a) *4 x 8 x 3 x 2 = 192 coches distintos.*

b) *4 x 3 x 2 = 24 coches azules.*

c) *4 x 2 = 8 coches azules y motor V-8.*

<u>*PREGUNTA 6*</u>

En cierta transmisión existen dos sonidos, uno corto, llamado estrella y uno largo, llamado diagonal. Con estos sonidos pueden formarse señales de uno, dos ó tres sonidos. ¿Cuántas señales de un sonido, de dos sonidos y de tres sonidos existen?

Solución: 2 señales de un sonido, 2 x 2 = 4 señales de dos sonidos y 2 x 2 x 2 = 8 señales de tres sonidos.

<u>*PREGUNTA 8*</u>

Las placas de los coches en una ciudad son de tres letras. Si se usa el alfabeto de veintiséis letras, ¿cuántas:

a) *placas distintas hay?*

b) *placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con una vocal?*

c) *si no se permiten las repeticiones, ¿cuántas placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con la letra q? ¿Cuántas terminan con vocal?*

Solución:

a) *26 x 26 x 26 =* 26^3 *= 17576 placas distintas.*

b) *26 x 26 =* 26^2 *= 676 placas que comienzan con q. 26 x 26 x 5 = 5 x* 26^2 *= 3380 placas que terminan con vocal.*

c) *25 x 24 = 600 placas que comienzan con q. 25 x 24 = 600 placas que terminan con q. 25 x 24 x 5 = 3000 placas que terminan con vocal.*

PREGUNTA 13

Con las letras de la palabra dedo, ¿cuántas

a) palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son distintas?

b) palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son iguales?

Solución:

a) $4! = 24$ *palabras.*

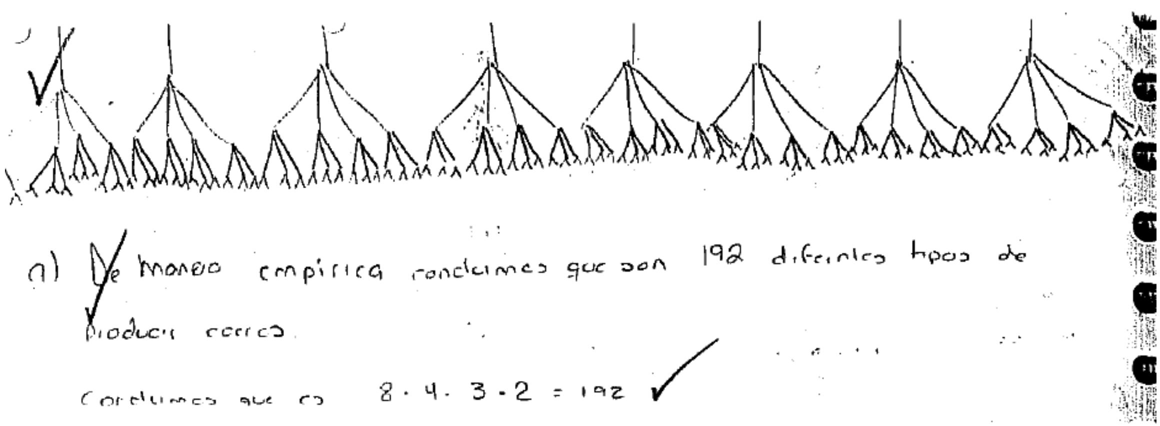
b) $\dfrac{4!}{2!} = 12$ *palabras distintas.*

El análisis de las preguntas por equipo es el siguiente.

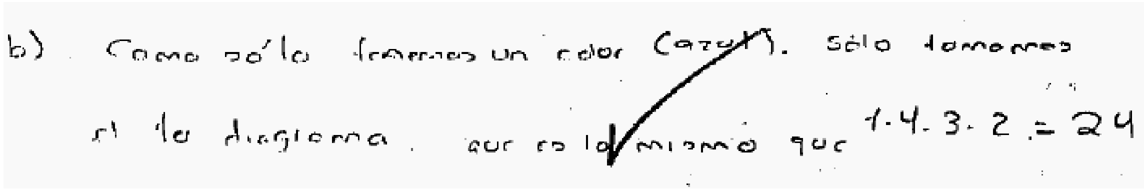
EQUIPO 1

Este equipo está formado por tres alumnos que obtuvieron 7, 9.6 y 7.6 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.8.

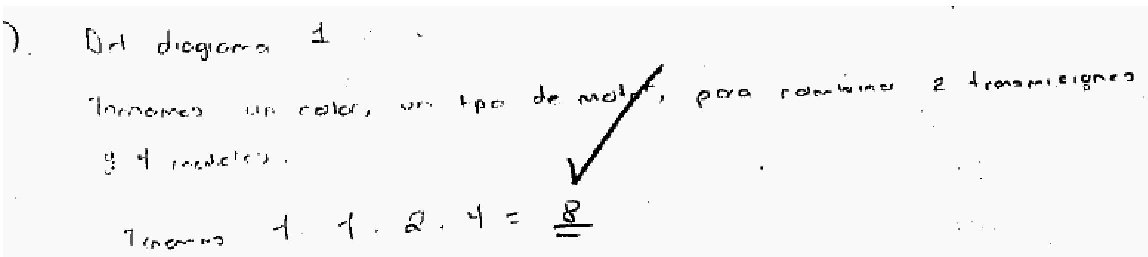
Pregunta 3. a) Los miembros del equipo hacen un diagrama, de todos los casos, por color, modelo, potencia de motor y tipo de transmisión como acción para desglosar el problema y contar físicamente. Al parecer traducen el diagrama de árbol en un producto y multiplican los datos relevantes como proceso para encontrar el resultado correcto.



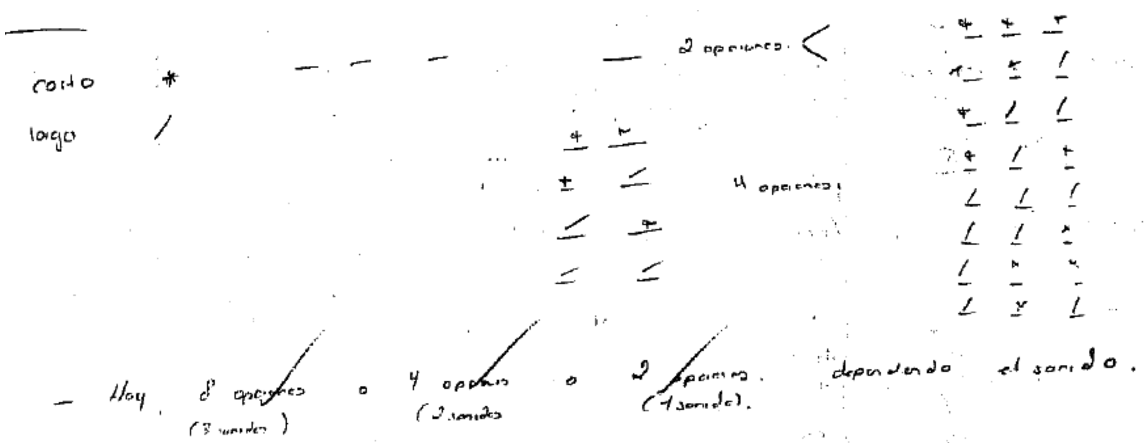
b) En este caso se dan cuenta que solamente una rama del árbol es necesaria y hacen la acción de contar esa parte. Al igual que el inciso anterior multiplican los datos relevantes como proceso para encontrar el resultado.



c) Hablan del diagrama y nuevamente multiplican los datos relevantes como proceso para encontrar el resultado.



Pregunta 6. Hacen un diagrama con uno, dos y tres sonidos como acción para desglosar el problema y contar. Usan el diagrama y cuentan para encontrar las señales que se piden. No realizan un producto como en la pregunta anterior.



Pregunta 8. Resuelven todos los incisos con el producto de las letras que pueden ir en cada lugar de la placa.

[redacted]

(8) 26 26 26.

letra

a) No dice que no se pueda repetir en la (a).

$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$

Por como analizamos en los diagramas ~~anteriores~~. Muy bien. Generalizan anterior

b) 9 26 26

Los que empiezan con 9 son 676.

26 26 (5) — son las vocales a, e, i, o, u

No empiezan con 9 y son 3380 no se pedía

9 26 5

Empiezan con 9 y termina las vocales (5) son 130

c) 9 25 24
1 1

Aquí no tomamos la 9, por eso sólo son "25 opciones"

No se toma la 9 ni la anterior ∴ 24 opciones.

Son $25 \cdot 24 = 600$

25 . 24 9

Por la misma razón, la primera sólo hay 25 opciones, por quitar la 9

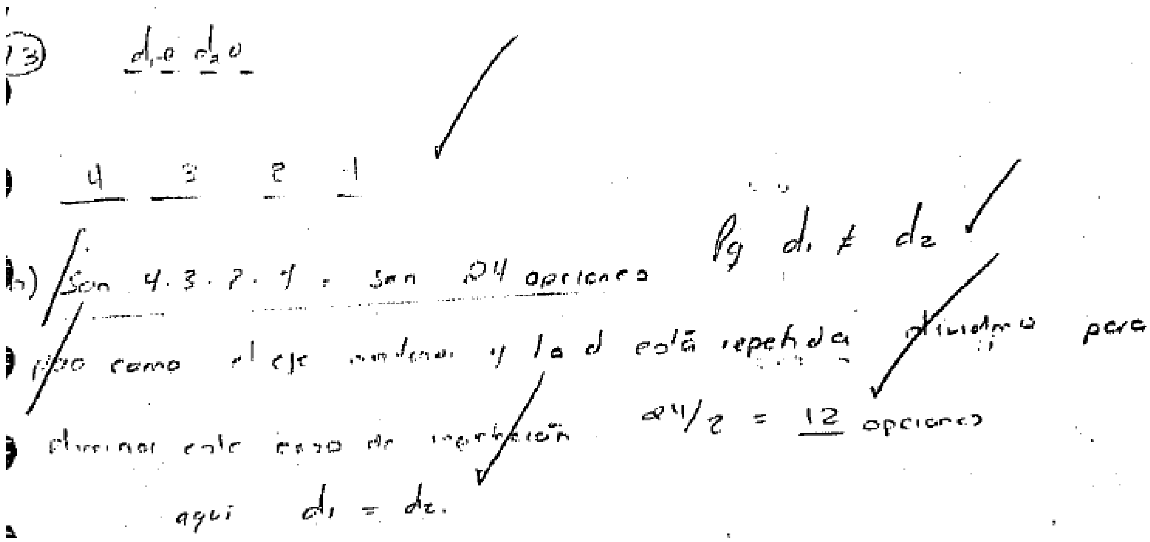
En la segunda es sin la 9 y la anterior

$25 \cdot 24 = 600$

25 . 24 1 por los (5) casos de las vocales

Si ponemos a sería $25 \cdot 24 \cdot 9$

Pregunta 13. a) Los miembros del equipo no necesitan escribir las palabras y hacen el producto correspondiente. b) Se dan cuenta que hay dos letras iguales por lo que, para eliminar las palabras idénticas que resultan de cambiar estas dos letras, dividen entre dos.



13) d_1 e d_2 o

4 3 2 1

b) Son 4 · 3 · 2 · 1 = Son 24 opciones Pq $d_1 \neq d_2$

pero como el [illegible] [illegible] y la d está repetida dividimos para

eliminar este caso de repetición 24/2 = 12 opciones

aquí $d_1 = d_2$.

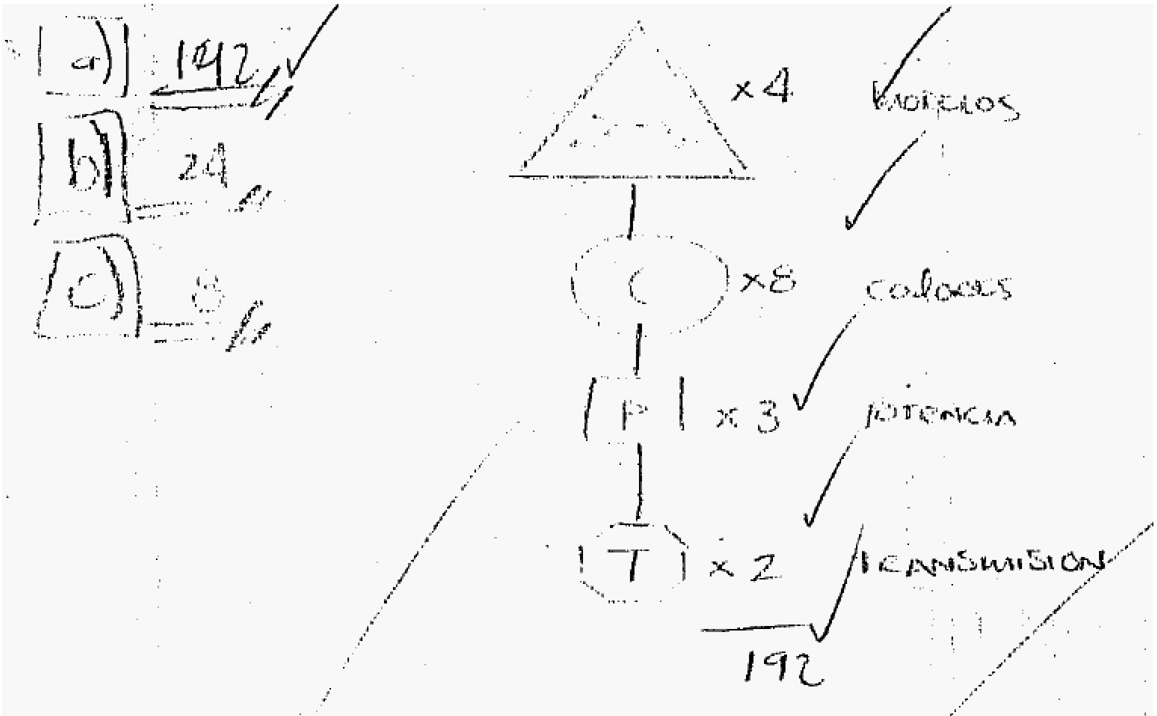
En las preguntas 3 y 6, los miembros de este equipo hicieron un diagrama y contaron los casos. En la pregunta 3 (tal vez por la cantidad de casos posibles, 192) parece que traducen el diagrama en una multiplicación y hacen los productos necesarios para encontrar las respuestas. Sin embargo, necesitaron usar tanto el diagrama como el producto. En las preguntas 8 y 13 ya no tuvieron necesidad de contar físicamente haciendo un diagrama ó escribiendo todos los casos y encontraron el resultado por medio del producto de los datos relevantes.

Analizando las cuatro preguntas anteriores parece que los miembros del equipo han interiorizado la acción de desglosar el problema al darse cuenta de que basta multiplicar. Hacen así el proceso del producto con los datos relevantes.

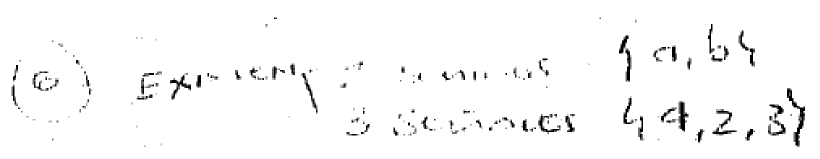
<u>EQUIPO 4</u>

Este equipo está formado por dos alumnos que obtuvieron 7.4 y .4 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.8. No se analizará la pregunta 13 pues no la resolvieron.

Pregunta 3. Los miembros del equipo hacen como acción un diagrama abreviado indicando productos. Responden los tres incisos con productos.

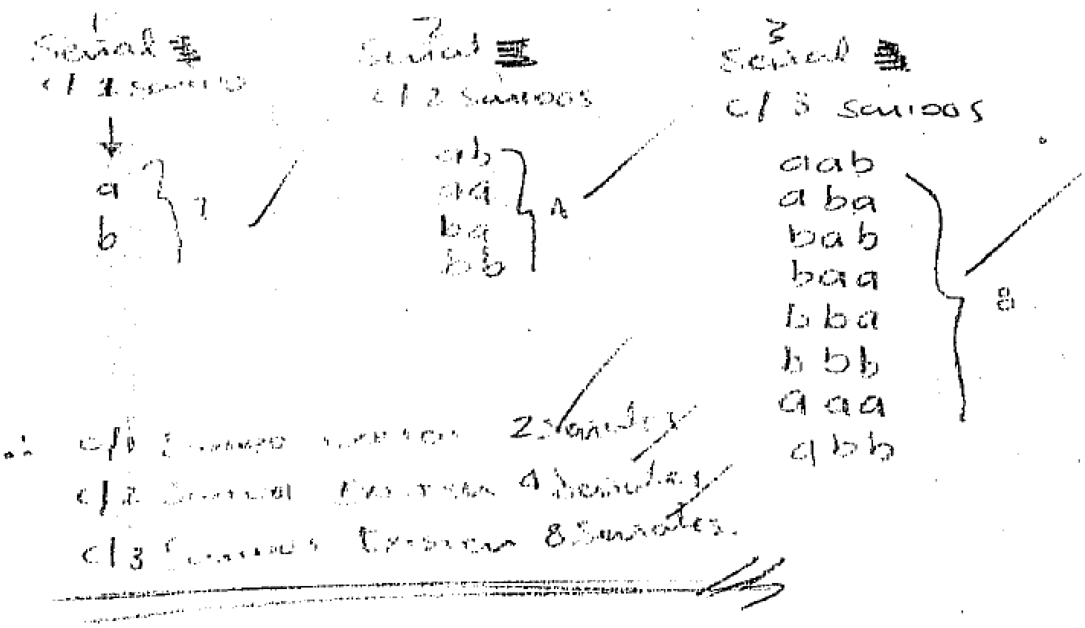


Pregunta 6. Los miembros del equipo escriben todos los casos de señales con uno, dos y tres sonidos y los cuentan.

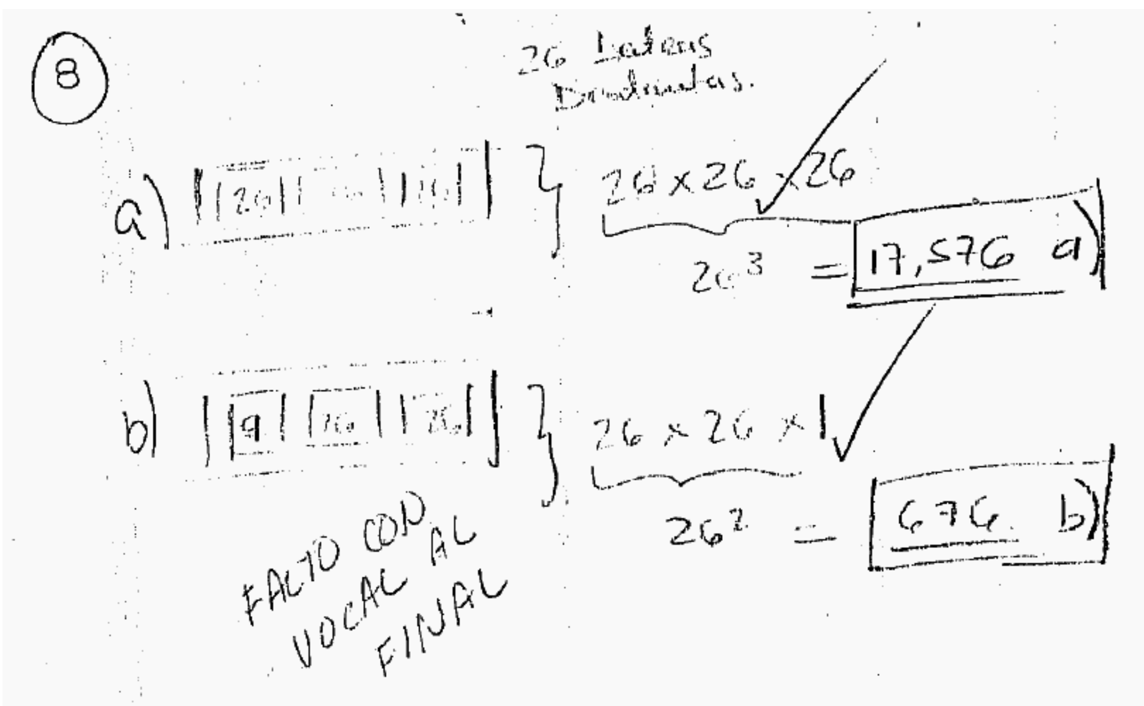


Se reescribe lo anterior pues no es muy legible:

“(6) Existen 2 sonidos {a, b}
3 señales {1, 2, 3}”



Pregunta 8. En esta pregunta los miembros del equipo parecen haber interiorizado la acción de contar y fueron capaces de hacer los productos sin necesidad de hacer un diagrama. No resuelven parte del inciso b) y del inciso c) sólo resuelven una parte de forma incorrecta.



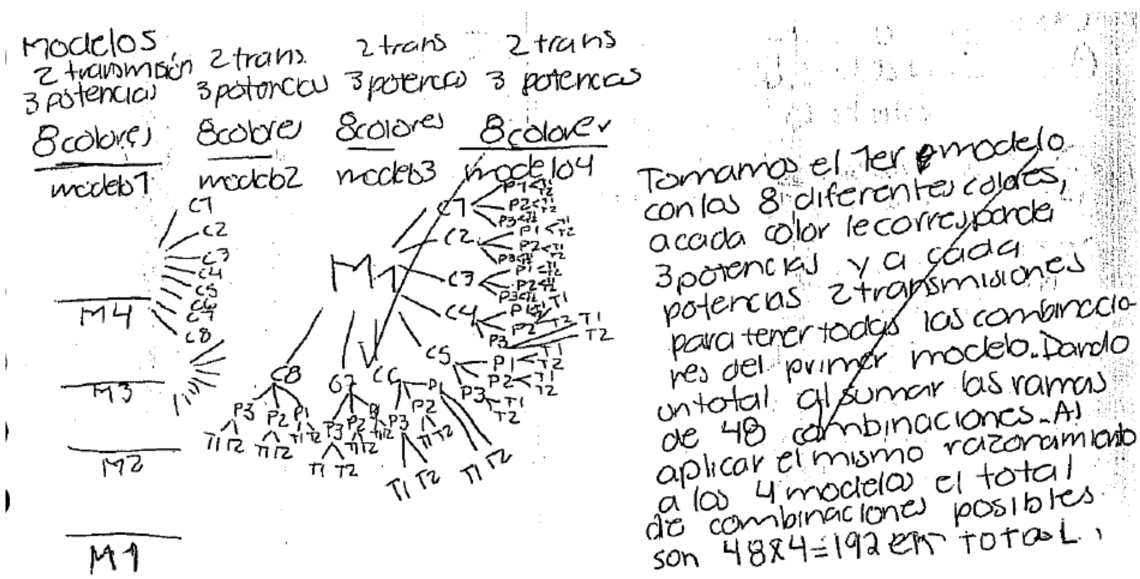
En la pregunta 3, los miembros de este equipo hicieron un diagrama abreviado y fueron capaces de multiplicar para resolver los incisos. Para la pregunta 8, en la parte que contestaron correctamente, utilizaron productos. Sin embargo, en la pregunta 6 escribieron todos los casos como acción para desglosar el problema y contar físicamente.

Los miembros de este equipo parecen haber reflexionado sobre las acciones que utilizaron en los primeros problemas y esto los lleva a responder algunas preguntas con el producto correcto sin necesidad de desglosar por completo los problemas. Sin embargo, aunque respondieron algunas preguntas con productos y se observa algo de reflexión, no se puede concluir que han interiorizado dichas acciones en un proceso.

<u>*EQUIPO 7*</u>

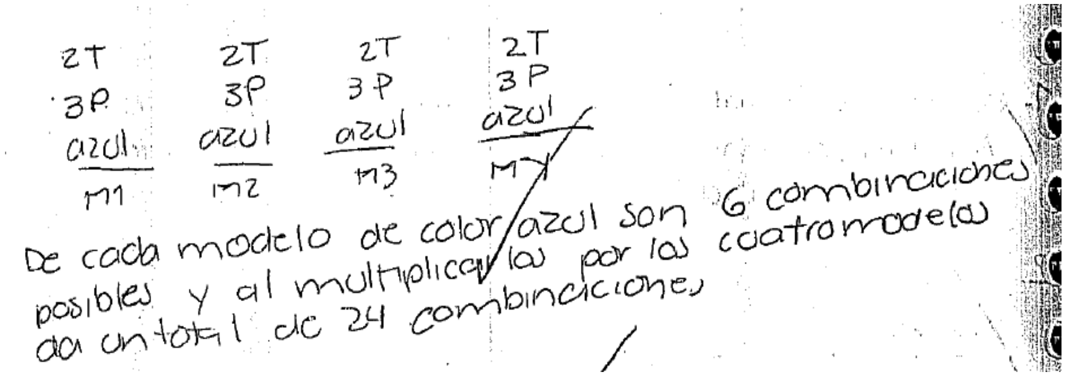
Este equipo está formado por tres alumnos que obtuvieron 6.2, 10.6 y 10.8 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.8. No se analizará la pregunta 13 pues no la resuelven.

Pregunta 3. a) Los miembros del equipo hacen un diagrama para un modelo por color, potencia y transmisión como acción para desglosar el problema y contar físicamente. Multiplican por cuatro pues existen cuatro modelos.



b) y c) solamente hacen la acción de multiplicar los datos que necesitan sin necesidad de dibujar un diagrama y contar físicamente.

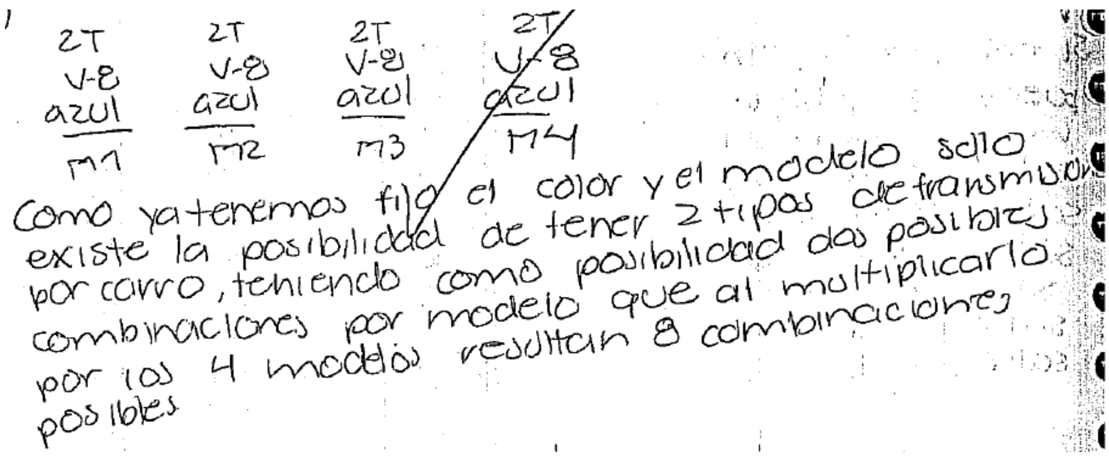
Inciso b)



2T	2T	2T	2T
3P	3P	3P	3P
azul	azul	azul	azul
M1	M2	M3	M4

De cada modelo de color azul son 6 combinaciones posibles y al multiplicarlas por los cuatro modelos da un total de 24 combinaciones

Inciso c)



2T	2T	2T	2T
V-8	V-8	V-8	V-8
azul	azul	azul	azul
M1	M2	M3	M4

Como ya tenemos fijo el color y el modelo sólo existe la posibilidad de tener 2 tipos de transmisión por carro, teniendo como posibilidad dos posibles combinaciones por modelo que al multiplicarlo por los 4 modelos resultan 8 combinaciones posibles

Pregunta 6. Los alumnos hacen un diagrama por sonido. La respuesta es equivocada pues no hacen señales con los sonidos. Al parecer no entienden la pregunta.

pueden colocarse, de

6\. Sonido A Estrella < 1S, 2S, 3S

Sonido B Diagonal < 1S, 2S, 3S

señal de 1 * 3S ⇒ 2

señal de 2 *R, */, //, /-2 4

De 1 sonido se pueden hacer 2 señales una con estrella otra con diagonal.
De 2 sonidos se pueden hacer 2 señales una con estrella y otra con diagonal.
De 3 sonidos se pueden hacer 2 señales una con estrella y otra con diagonal.

Pregunta 8. En todos los incisos hacen el producto de las letras que pueden ir en cada lugar de la placa.

8\. a)

26 letras 26 26 $26 \times 3 = 78$ placas distintas

en cada espacio pueden haber 26 letras ya que se pueden repetir. y en total hay ~~78~~ placas

$26 \times 26 \times 26 = 26^3 \neq 26 \times 3$

b)

Q 26 letras 5 vocales

en el primer espacio la q esta fija. en el segundo espacio puedo poner cualquiera de las 26 letras del abecedario y en el tercer espacio solo tengo 5 opciones que son las vocales. multiplico 26 x 5 y tengo un total de 130 placas. pero distintas?

Cuantas comienzan con la letra q

q 25 24.

En el 1er espacio la q ~~esta~~ fija. En el segundo
espacio puedo poner 25 letras porque ya quite
la q. En el tercer espacio puedo poner 24 letras
del abecedario. ~~en total~~.
porque ya quite 2 letras

– Cuantas terminan con la letra q

$26 - 1 = 25$
↓
q

25 24 q

En el ~~tercer~~ primer espacio puedo
poner 25 letras porque ya quite la
q. En el segundo espacio puedo poner
24 letras porque ya quite la q y la
letra que utilize en el segundo espacio.
En el tercer espacio la q es fija.

pero solo pones 1 vocal al final

– cuantas terminan con vocal

26 - 5 vocales = 21.

21 letras 20 letras 5 ~~opciones~~ vocales

en el primer espacio puedo poner 21 letras porque
ya quite las vocales. En ~~la~~ el segundo espacio puedo
poner 20 letras porque quite las vocales y ya
puse una letra en el primer espacio.

En la pregunta 1 los miembros de este equipo hicieron un diagrama para un modelo y fueron capaces de multiplicar por los modelos que existen. En la pregunta 6 hicieron un diagrama equivocado obteniendo una respuesta incorrecta. En la pregunta 8 no necesitaron desglosar el problema y parece que han interiorizado dicha acción en un proceso de conteo con el que encontraron las respuestas efectuando la multiplicación de los datos relevantes. La pregunta 13 no la resolvieron. No se puede concluir si interiorizaron las acciones en un proceso, aunque parece que están en camino de hacerlo.

ETAPA 2. Problemas resueltos en clase mediante discusión global.

En esta etapa se impartió la clase sobre el tema de ordenaciones, es decir donde existe orden, y consistió en resolver, junto con los alumnos a través de una discusión en grupo, los problemas 1, 2, 6, 8 y 10 de la serie de problemas con orden sin mencionar explícitamente las definiciones de los conceptos involucrados. Dichos problemas se resolvieron en el pizarrón generando discusión entre los alumnos cuando no lo habían resuelto de la misma manera. Al ir avanzando se les preguntaba si existía alguna forma general de resolverlos para conducirlos a encontrar las fórmulas de conteo.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 1

Se va a escoger un representante de alumnos de las carreras de matemáticas y actuaría. En la carrera de matemáticas hay cincuenta y cinco alumnos y en la de actuaría hay veinticinco alumnos. ¿Cuántos candidatos hay?

Solución: 55 + 25 = 80 candidatos.

PREGUNTA 2

Una tienda tiene seis puertas. ¿De cuántas maneras es posible entrar por una puerta y salir por otra?

Solución: 6 x 5 = 30 formas distintas.

PREGUNTA 6

En cierta transmisión existen dos sonidos, uno corto, llamado estrella y uno largo, llamado diagonal. Con estos sonidos pueden formarse señales de uno, dos ó tres sonidos. ¿Cuántas señales de un sonido, de dos sonidos y de tres sonidos existen?

Solución: 2 señales de un sonido, 2 x 2 = 4 señales de dos sonidos y 2 x 2 x 2 = 8 señales de tres sonidos.

PREGUNTA 8

Las placas de los coches en una ciudad son de tres letras. Si se usa el alfabeto de veintiséis letras, ¿cuántas:

a) *placas distintas hay?*
b) *placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con una vocal?*
c) *si no se permiten las repeticiones, ¿cuántas placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con la letra q? ¿Cuántas terminan con vocal?*

Solución:

a) $26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17576$ *placas distintas.*
b) $26 \times 26 = 26^2 = 676$ *placas que comienzan con q.* $26 \times 26 \times 5 = 5 \times 26^2 = 3380$ *placas que terminan con vocal.*
c) $25 \times 24 = 600$ *placas que comienzan con q.* $25 \times 24 = 600$ *placas que terminan con q.* $25 \times 24 \times 5 = 3000$ *placas que terminan con vocal.*

PREGUNTA 10

Un profesor de matemáticas tiene siete libros en su librero. Tres son de matemáticas discretas y cuatro de álgebra superior. ¿De cuántas formas puede ordenar los libros si:

a) *no hay restricciones?*
b) *si se deben alternar las materias?*
c) *si todos los libros de matemáticas discretas deben estar juntos?*
d) *si todos los libros de álgebra superior deben estar juntos y los de matemáticas discretas también?*
e) *si los libros de matemáticas discretas deben colocarse de forma que tengan dos libros de álgebra superior a cada lado?*

Solución:

a) $7!$ *formas de ordenar los libros.*
b) $4!3!$ *formas de alternar las materias.*
c) $5!3!$ *formas de poner los libros de matemáticas discretas juntos.*

d) *2!4!3! formas de poner los libros de matemáticas juntos y de álgebra juntos.*

e) *3!4! formas de poner dos libros de álgebra a cada lado de los libros de matemáticas.*

Durante la discusión en grupo el maestro fue haciendo distintas preguntas. Se plantearon primero los problemas y se les preguntó cómo lo habían resuelto por equipo. Algunos alumnos mencionaron la posibilidad de desglosar los problemas para contar físicamente, pero la mayoría mostraron haber interiorizado dicha acción en un proceso y prefirieron multiplicar para resolverlos. El maestro fue anotando las preguntas, las respuestas y la discusión de cada problema para hacer el análisis correspondiente.

El análisis de las preguntas es el siguiente.

Pregunta 1. La mayoría de los alumnos reconoció al "o" como una suma e hicieron la acción de sumar los posibles candidatos. Se enunció el principio aditivo del conteo.

Pregunta 2. La mayoría de los alumnos reconoció al "y" como un producto y multiplicaron para encontrar el resultado. Se enunció el principio del producto del conteo. En la resolución que los alumnos habían hecho por equipos, excepto un equipo, todos habían hecho algún tipo de diagrama para resolver este problema. En la discusión en clase no tuvieron la necesidad de hacer algún diagrama. Al parecer han reflexionado sobre las acciones que utilizaron y las han interiorizado en un proceso que les permitió hacer el producto sin tener que desglosar el problema y contar físicamente en el caso de los problemas sencillos.

Pregunta 6. Para las señales de un sonido contestaron que eran dos. Para las señales de dos y tres sonidos algunos dieron la respuesta mientras otros enunciaban los distintos casos. Se escribieron en el pizarrón todas las posibilidades y se les preguntó si veían algún patrón. Encontraron que las respuestas eran: 2, $2 \cdot 2$ y $2 \cdot 2 \cdot 2$. Algunos estudiantes propusieron 2^n, con n el número de sonidos. A los alumnos les quedó claro que existe orden pues al cambiar los sonidos se cambia la señal. Se observó que los alumnos han reflexionado e interiorizado algunas de las acciones que habían utilizado.

Pregunta 8. a) La mayoría de los alumnos han reflexionado e inmediatamente respondieron $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3$. b) La mayoría respondió $1 \cdot 26 \cdot 26 = 26^2$ y $26 \cdot 26 \cdot 5 = 26^2 \cdot 5$. En este momento se les pidió que generalizaran esta respuesta y la de la pregunta anterior. Discutiendo entre ellos y de manera, relativamente fácil, llegaron a la fórmula de ordenaciones con repetición de *n* objetos tomados de *m* en *m*: $OR_n^m = n^m$. El maestro les aclaró los conceptos de orden y repetición y, al parecer, no tuvieron problemas para entenderlos. Reconocieron que la fórmula anterior resuelve problemas con orden y donde se permite la repetición. c) Se dieron cuenta que el problema es diferente a los que habían resuelto en incisos anteriores pues en ellos había repetición. Discutieron entre ellos y estuvieron de acuerdo en que debía ser un producto de números que va descendiendo para evitar la repetición. Concluyeron que las respuestas son: $1 \cdot 25 \cdot 24$, $25 \cdot 24 \cdot 1$ y $25 \cdot 24 \cdot 5$. Se les pidió que generalizaran la respuesta. Todos respondieron que era una ordenación sin repetición de *n* objetos tomados de *m* en *m* que se representaba como un producto que se detenía, pero los alumnos no fueron capaces de expresar esto mediante una fórmula. La maestra escribió la fórmula $O_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ y la discutió con los alumnos quienes parecieron entenderla. El periodo de discusión parece haberlos llevado a interiorizar sus acciones en un proceso en el que identifican las operaciones que se deben llevar a cabo sin necesidad de desglosar el problema.

Pregunta 10. a) La mayoría de los alumnos encontró rápidamente la solución: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Para este momento parece que han reflexionado sobre las acciones que han ejecutado pues encontraron la solución correcta sin necesidad de hacer un diagrama ó escribir los casos. b) Se dieron cuenta que la secuencia MAMAMAA no es válida y la secuencia AMAMAMA si lo es. La mayoría encontró la solución: $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$. c) Nuevamente, la mayoría de los alumnos fue capaz de encontrar la solución: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Tomaron a los tres libros de matemáticas como un objeto y escribieron los cinco lugares donde pueden acomodarlos, es decir, necesitaron hacer la acción de escribir los lugares, aunque para ordenar los libros ya no escribieron los casos. d) Resolvieron correctamente 4·3·2·1·3·2·1·2·1 sin necesidad de escribir los casos. e) Resolvieron correctamente 3·2·1·4·3·2·1 sin necesidad de escribir todos los casos. La maestra definió *n* factorial: *n!=n(n-1)(n-2)…1* y les pidió que encontraran una fórmula que describiera sus acciones. La mayoría de los estudiantes identificó el problema como una ordenación sin repetición de *n* objetos tomados de *n* en *n* y escribió la fórmula de ordenación $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ que se había encontrado en la pregunta anterior, pero con índices iguales (*n* = *m*): $O_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$; es decir, identificaron la fórmula y la aplicaron correctamente. La maestra explicó a continuación que una ordenación de *n* elementos tomados de *n* en *n* se llama permutación de los *n* elementos. El periodo de reflexión los ha llevado a interiorizar sus acciones en un proceso que les permite entender los componentes de las fórmulas e identificar los problemas en los que se pueden emplear.

ETAPA 3. Problemas resueltos en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

En esta etapa la maestra escribió en el pizarrón las fórmulas que se habían encontrado: ordenación con repetición, ordenación sin repetición y permutación y pidió a los alumnos que resolvieran los problemas 7, 11, 12 y 15. Para esto los alumnos tuvieron veinte minutos de la clase.

Para esta parte se analizarán las respuestas a las preguntas 7 y 15 de los alumnos Carlos (9.6 de calificación en el examen de conteo), David (7 de calificación en el examen de conteo), Dulce (6.2) y Erick (.4) que forman parte de los equipos que se utilizaron en la etapa uno.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 7

Las claves lada en cierta región son de tres dígitos, pero el dígito intermedio debe ser cero ó uno. Las claves lada cuyos últimos dos dígitos son uno están siendo usadas para otros fines, por ejemplo, 911. Con estas condiciones, ¿cuántas claves lada hay disponibles?

Solución: (10 x 10) + (10 x 9) = 190 claves lada.

PREGUNTA 15

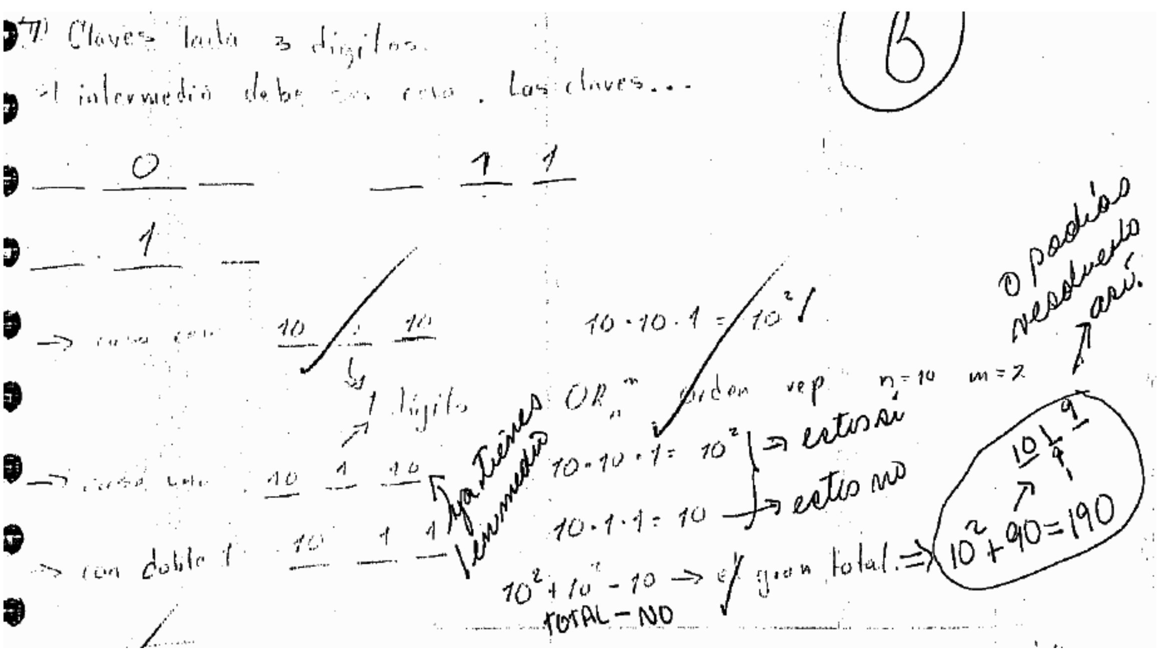
¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?

Solución: 9 + (9)(9) + (9)(9)(8) = 738 números.

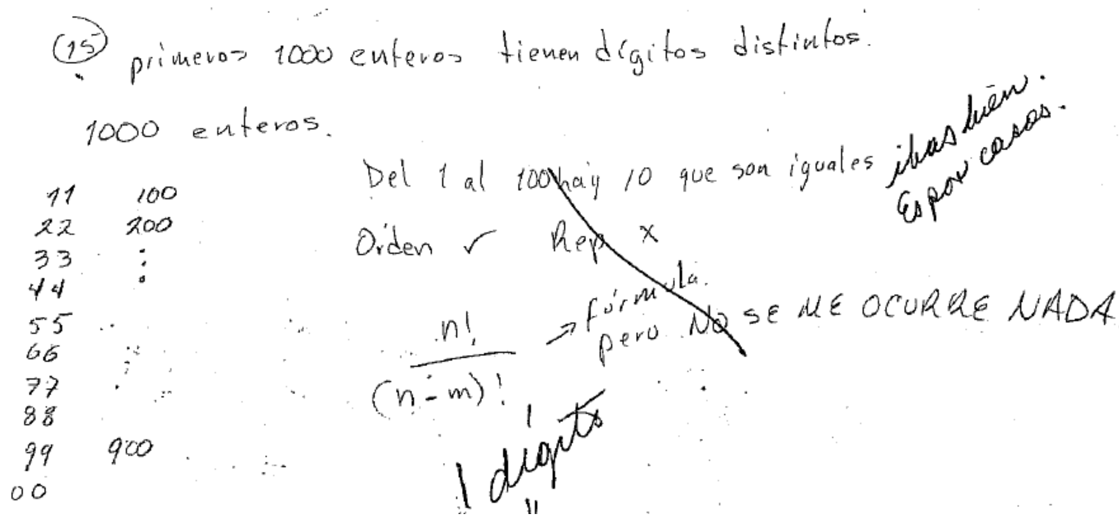
El análisis de las preguntas por alumno es el siguiente.

CARLOS

Pregunta 7. Escribe tres casos: con cero, con uno y con doble uno. Resuelve los tres correctamente y obtiene el total menos los casos no válidos. Escribe la fórmula que utiliza.



Pregunta 15. Escribe la fórmula correcta pero no es capaz de utilizarla para resolver el problema.



(15) primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos.

1000 enteros.

11 100
22 200
33 :
44
55
66
77
88
99 900
00

Del 1 al 100 hay 10 que son iguales

Orden ✓ Rep x

$\frac{n!}{(n-m)!}$ → fórmula pero NO SE ME OCURRE NADA.

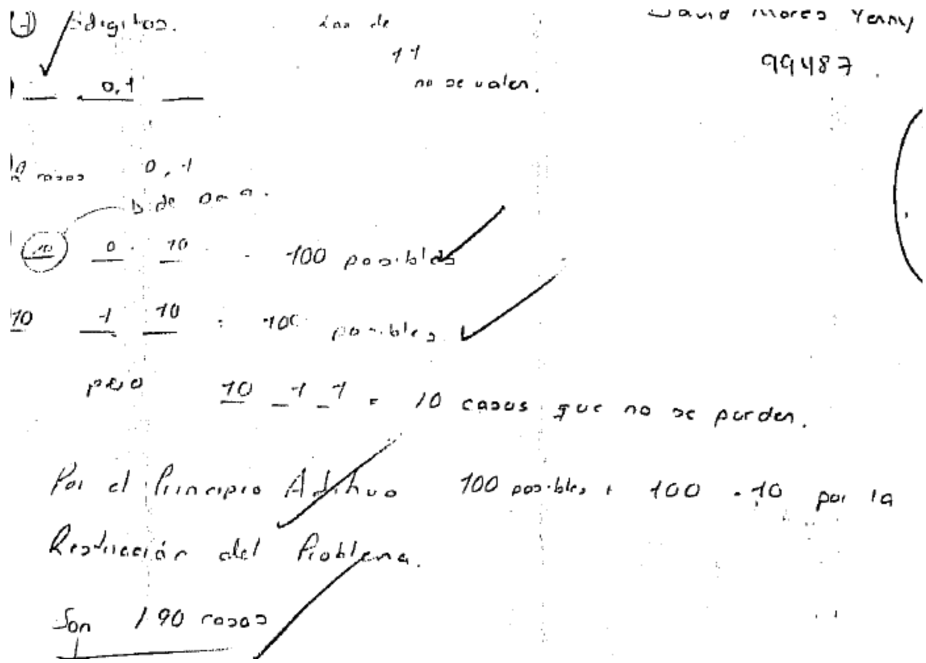
¡Ibas bien! Es por casos.

1 dígito

Este alumno resuelve una pregunta de forma correcta aplicando la fórmula de ordenación con repetición. Sin embargo, en la otra pregunta reconoce que debe utilizar la fórmula de ordenación pero no sabe cómo aplicarla. Aparentemente el problema es que no separa por casos y tampoco hace la acción correspondiente. Al parecer el periodo de reflexión lo ha llevado a interiorizar las acciones en un proceso que le permite encontrar las fórmulas que debe usar, pero todavía no es capaz de aplicarlas en forma correcta cuando un problema necesita separarse en casos.

DAVID

Pregunta7. Resuelve encontrando el total de casos menos los no válidos. Menciona el principio aditivo.



14) 3 dígitos. Los de 11 no se valen.

99487

10 casos 0, 1

10 0 10 = 100 posibles

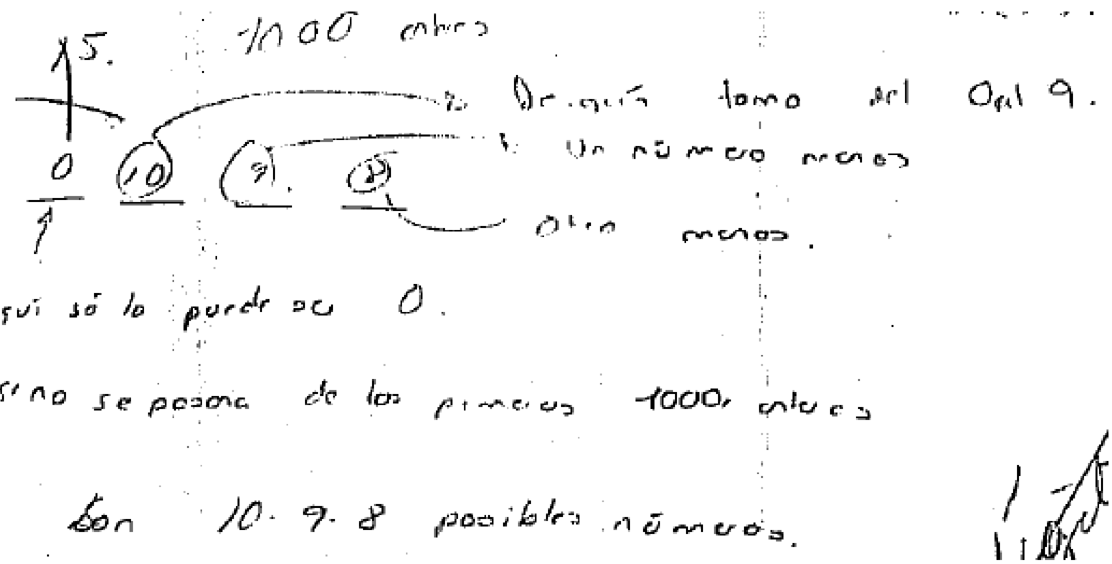
10 1 10 = 100 posibles

pero 10 1 1 = 10 casos que no se pueden.

Por el Principio Aditivo 100 posibles + 100 - 10 por la Restricción del Problema.

Son 190 casos

Pregunta 15. Resuelve incorrectamente pues sólo toma números de tres dígitos. Reconoce que existe orden y los dígitos no se repiten.



15. 1000 enteros

De aquí tomo del 0 al 9.

Un número menos

0 10 9 8

Otro menos.

Aquí sólo lo puede ser 0.

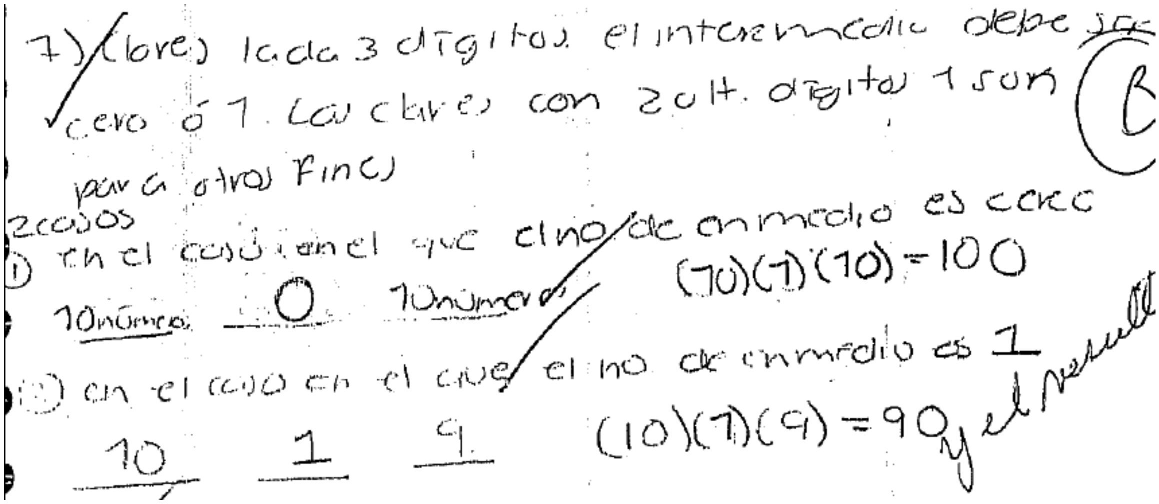
Si no se pasa de los primeros 1000 enteros

Son 10 · 9 · 8 posibles números.

Este alumno, aun y cuando no resuelve correctamente el segundo problema, parece haber interiorizado las acciones de conteo en un proceso que le permite identificar el tipo de problema y encontrar las fórmulas que deben utilizarse.

DULCE

Pregunta 7. Escribe dos casos: con cero en medio y con uno en medio. Resuelve ambos correctamente pero olvida poner la respuesta con el total.



7) Claves cada 3 dígitos el intermedio debe ser cero ó 1. Las claves con 2 ult. dígitos 1 son para otros fines

B

2 casos

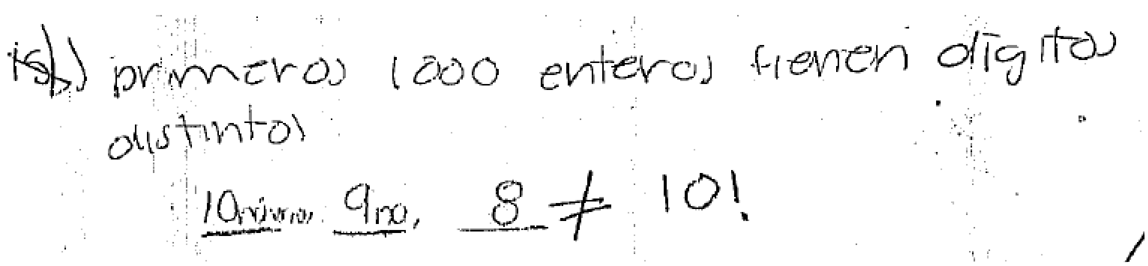
1) en el caso en el que el no de en medio es cero

10 números 0 10 números (10)(1)(10) = 100

2) en el caso en el que el no de en medio es 1

10 1 9 (10)(1)(9) = 90 y el resull

Pregunta 15. Resuelve incorrectamente pues sólo toma números de tres dígitos. Escribe "10!" y no explica a que se refiere. Reconoce que existe orden y los dígitos no se repiten.



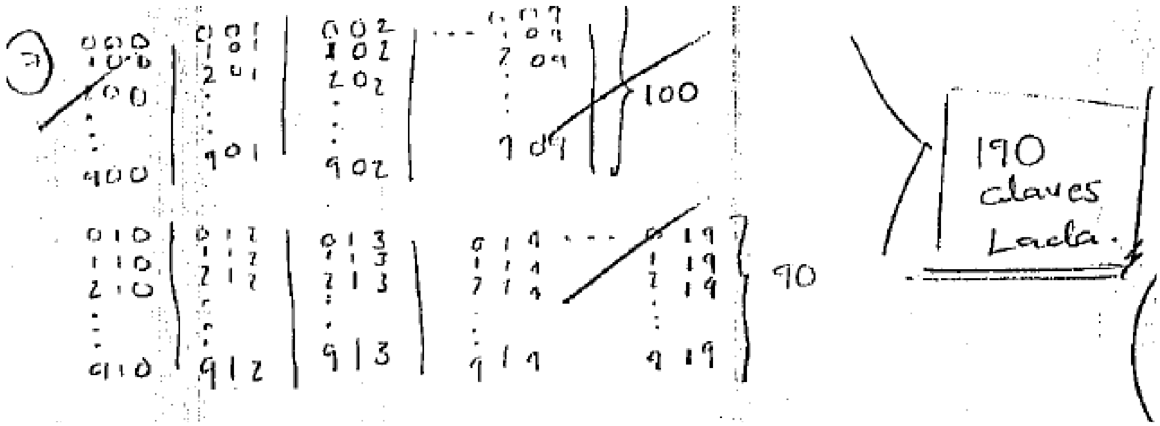
15 b) primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos

10 números 9 no, 8 ≠ 10!

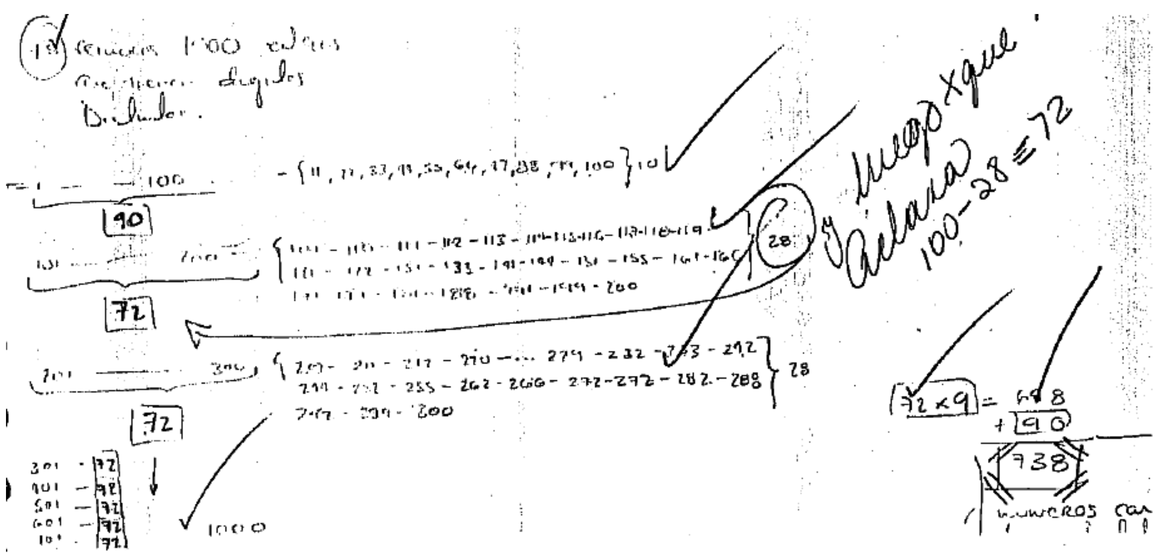
Esta alumna resuelve de forma incorrecta un problema, no reconoce el tipo de problema al que pertenece y aplica una fórmula sin justificación, por lo que no se puede concluir que haya interiorizado las acciones de conteo en el proceso correspondiente.

ERICK

Pregunta 7. Hace tablas con los casos con cero en medio y cuenta. Escribe otras tablas con uno en medio y cuenta. Suma ambos resultados. Parece requerir la acción de desglosar el problema para contar físicamente los datos. Reconoce que existen dos casos, orden y repetición.



Pregunta 15. Nuevamente necesita escribir unos casos como acción para desglosar el problema y contar físicamente. Encuentra los casos válidos del 1 al 100, del 101 al 200, del 201 al 300 y generaliza. Al final multiplica y suma.



Parece que este alumno, aunque ha tenido un periodo de reflexión, no ha interiorizado completamente las acciones en un proceso y necesita desglosar los problemas para contar físicamente.

ETAPA 4. Problemas resueltos en forma individual como tarea.

En esta etapa los alumnos resolvieron los problemas con orden como tarea con la finalidad de reforzar la comprensión de los conceptos matemáticos de conteo con orden. Para esta parte se analizarán las respuestas a las preguntas 5 y 11 de los mismos alumnos excepto Erick que no entregó la tarea y Carlos no resuelve la pregunta 11.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 5

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras a, b, c, d, e, e, e, e, e de forma que ninguna letra e sea adyacente a otra?

Solución: 4! = 24 maneras.

PREGUNTA 11

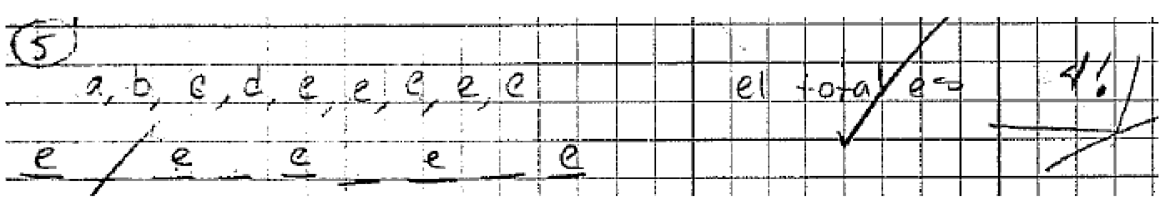
¿Cuántos enteros entre 10,000 y 100,000 están formados sólo por los dígitos 6, 7 u 8? ¿Cuántos habrá que no tengan más que los dígitos 6, 7, 8 ó 0?

Solución: 3^5 *= 243 números formados por 6, 7 u 8.* $3(4^4)$ *= 768 números formados por 6, 7, 8 ó 0.*

El análisis de las preguntas por alumno es el siguiente.

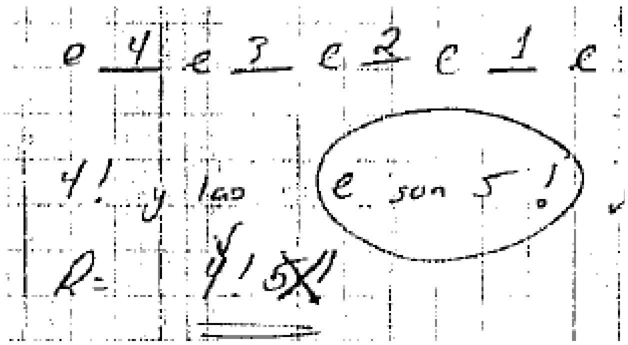
CARLOS

Pregunta 5. Separa las letras "*e*" de las demás. Utiliza correctamente la fórmula de permutación para las demás letras. Reconoce que en el problema existe orden y no repetición. Al parecer ha interiorizado las acciones de conteo en un proceso.

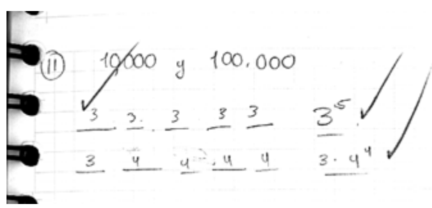


DAVID

Pregunta 5. Separa las letras *"e"* de las demás. Utiliza correctamente la fórmula de permutación para las demás letras pero se equivoca con las letras *e.* Reconoce que existe orden y no hay repetición.



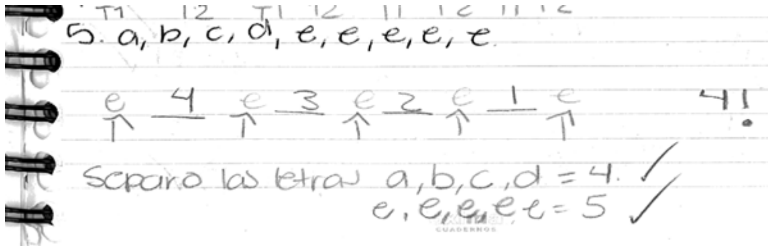
Pregunta 11. Sabe qué dígitos pueden ir en los distintos lugares. Reconoce que existe orden y repetición.



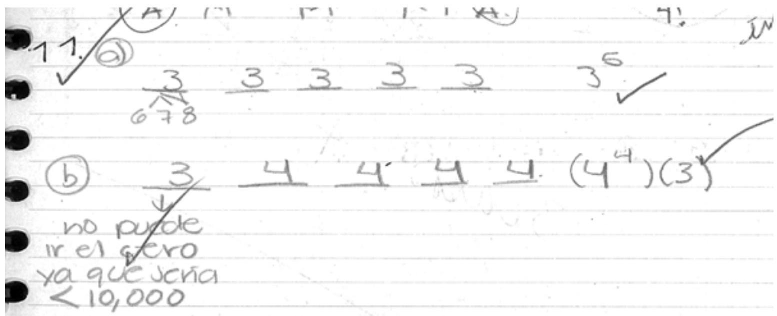
Este alumno, aún y cuando tiene un resultado incorrecto, parece haber interiorizado las acciones de conteo y, posiblemente, ha construido el proceso que le permite reconocer el tipo de problema que se le presenta y aplicar las fórmulas correspondientes.

DULCE

Pregunta 5. Separa las letras *"e"* de las demás. Utiliza correctamente la fórmula de permutación para las demás letras. Reconoce que existe orden y no hay repetición.



Pregunta 11. Sabe qué dígitos pueden ir en los distintos lugares. Reconoce que existe orden y repetición.



Esta alumna parece que ha interiorizado las acciones en un proceso que le permite identificar y resolver los problemas sin desglosarlos aplicando las fórmulas correspondientes de forma correcta.

Evolución en las respuestas.

Como se mencionó anteriormente los alumnos tuvieron la oportunidad de resolver los problemas con orden en varias ocasiones. Primero sin haber estudiado el tema, después durante clase y finalmente como tarea. Se analizarán las preguntas 2, 6 y 13 para estudiar la manera en que evoluciona su forma de resolverlos. Esto permitirá refinar la descomposición genética inicial para hacerla más acorde a las estrategias de los alumnos. En total hubo diez equipos y quince alumnos entregaron la tarea.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 2

Una tienda tiene seis puertas. ¿De cuántas maneras es posible entrar por una puerta y salir por otra?

Solución: 6 x 5 = 30 formas distintas.

PREGUNTA 6

En cierta transmisión existen dos sonidos, uno corto, llamado estrella y uno largo, llamado diagonal. Con estos sonidos pueden formarse señales de uno, dos ó tres sonidos. ¿Cuántas señales de un sonido, de dos sonidos y de tres sonidos existen?

Solución: 2 señales de un sonido, 2 x 2 = 4 señales de dos sonidos y 2 x 2 x 2 = 8 señales de tres sonidos.

PREGUNTA 13

Con las letras de la palabra dedo, ¿cuántas

a) *palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son distintas?*
b) *palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son iguales?*

Solución:

a) *4! = 24 palabras.*
b) $\frac{4!}{2!}$ *= 12 palabras distintas.*

El análisis de las preguntas es el siguiente.

Pregunta 2. Cuando los equipos resolvieron esta pregunta por primera vez, nueve de ellos hicieron un diagrama, dibujo ó escribieron los casos. Encontraron el resultado contando físicamente, sumando ó multiplicando lo que veían en su dibujo. Solamente un equipo escribió el producto sin ninguna explicación.

De los alumnos que entregaron la tarea, uno escribió todas las posibilidades e hizo el producto, otro escribió dos casos e hizo el producto y los demás hicieron el producto. Esto puede significar que la primera vez que los alumnos intentan resolver el problema necesitan hacer alguna clase de diagrama como acción para desglosar el problema y contar físicamente. Al tener más oportunidades de reflexión logran interiorizar las acciones de conteo en un proceso y el diagrama se vuelve innecesario, en la mayoría de los casos, ó se usa como un modo de comprobación. Aparentemente los alumnos lograron hacer las construcciones mentales que les permiten resolver el problema sin tener que contar físicamente todos los casos e hicieron el producto correspondiente.

Pregunta 6. Tres equipos no entendieron esta pregunta y los restantes hicieron un diagrama. Encontraron el resultado contando físicamente, sumando ó multiplicando lo que veían en su diagrama.

De los alumnos que entregaron la tarea dos escribieron los casos y los demás hicieron el producto. Hubo cuatro alumnos que escribieron la fórmula general. Esto puede significar que la primera vez que los alumnos intentan resolver el problema necesitan hacer alguna clase de diagrama como acción para desglosar el problema y contar físicamente. Al cabo del tiempo y con oportunidades de reflexión interiorizan las acciones en un proceso y el diagrama se vuelve innecesario en la mayoría de los casos. Parece que los estudiantes han hecho las construcciones mentales necesarias para resolver el problema sin tener que contar físicamente todos los casos.

Pregunta 13. Esta pregunta no la resolvieron cuatro equipos y los otros cuatro la resolvieron correctamente. Tres de ellos hicieron los productos sin necesidad de escribir las palabras y el otro equipo escribió varios casos. Los otros dos equipos tuvieron problemas con la letra que se repite. Esta pregunta es una de las últimas por lo que, posiblemente cuando llegan a ella ya han resuelto problemas similares que los han llevado a reflexionar e interiorizar sus acciones en un proceso. De los equipos que tuvieron correcta esta pregunta sólo uno de ellos requirió hacer la acción de escribir las palabras, mientras, que los otros hicieron el producto directamente.

De los alumnos que entregaron la tarea uno no resolvió este problema y los otros lo resolvieron correctamente sin necesidad de escribir las palabras y usando la fórmula de permutación, dado que escriben el factorial. Se observa cómo la primera vez que algunos alumnos intentan resolver este problema no logran hacerlo exitosamente, en cambio, al hacer la tarea sólo un alumno no fue capaz de resolverlo. Parece que la mayoría de los alumnos han hecho las construcciones mentales, es decir, han interiorizado las acciones de desglosar el problema en el proceso que se requiere en la solución de este problema.

3.2 ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE CONTEO SIN ORDEN

En esta sección se analizará la serie de problemas sin orden. Esta serie está diseñada para el estudio del tema de combinaciones. El análisis se hará de la misma manera que el de la serie con orden, con las mismas etapas. Esta serie fue la segunda que resolvieron los alumnos.

Cuando resolvieron estos problemas los alumnos ya habían resuelto la serie de problemas con orden. En esta nueva serie los alumnos tendrán que reconocer que los problemas no tienen orden. Se analizarán las acciones qué efectúan los alumnos para quitar el orden.

ETAPA 1. Problemas resueltos en clase por equipo antes de impartir el tema.

Esta etapa resultó muy diferente a la etapa uno de la serie de problemas con orden. Los alumnos tuvieron gran dificultad con el hecho de que no hubiera orden. Solamente dos equipos intentaron resolver todos los problemas, los demás nueve o menos. Por esto se analizarán las preguntas 1, 2 y 3 pues éstas las resolvieron los mismos equipos que se utilizaron en el análisis de los problemas con orden: los equipos uno (solución regular), cuatro (solución mala) y siete (solución buena). A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 1

¿De cuántas formas se puede escoger un equipo de basketball (5 jugadores) de entre doce jugadores posibles? ¿Cuántos equipos incluyen al más débil y al más fuerte?

Solución: $\binom{12}{5} = 792$ *equipos.* $\binom{10}{3} = 120$ *equipos con el más débil y el más fuerte.*

PREGUNTA 2

Un entrenador debe seleccionar a once alumnos de su clase para jugar en un torneo de fútbol. Si puede formar 12,376 equipos, ¿cuántos alumnos tiene en su clase?

Solución: $\binom{n}{11} = 12376 \Rightarrow n \approx \sqrt[11]{12376(11!)} = 17$ *alumnos en la clase.*

PREGUNTA 3

¿De cuántas formas se pueden distribuir diez monedas (idénticas) entre cinco niños:

a) si no hay restricciones?
b) si cada niño recibe una moneda como mínimo?
c) si el niño mayor obtiene al menos dos monedas?

Solución:

a) $\binom{14}{10} = 1001$ *formas de repartir las monedas.*

b) $\binom{9}{5} = 126$ *formas de repartir las monedas con una como mínimo.*

c) $\binom{12}{8} = 495$ *formas de repartir las monedas con el mayor mínimo dos.*

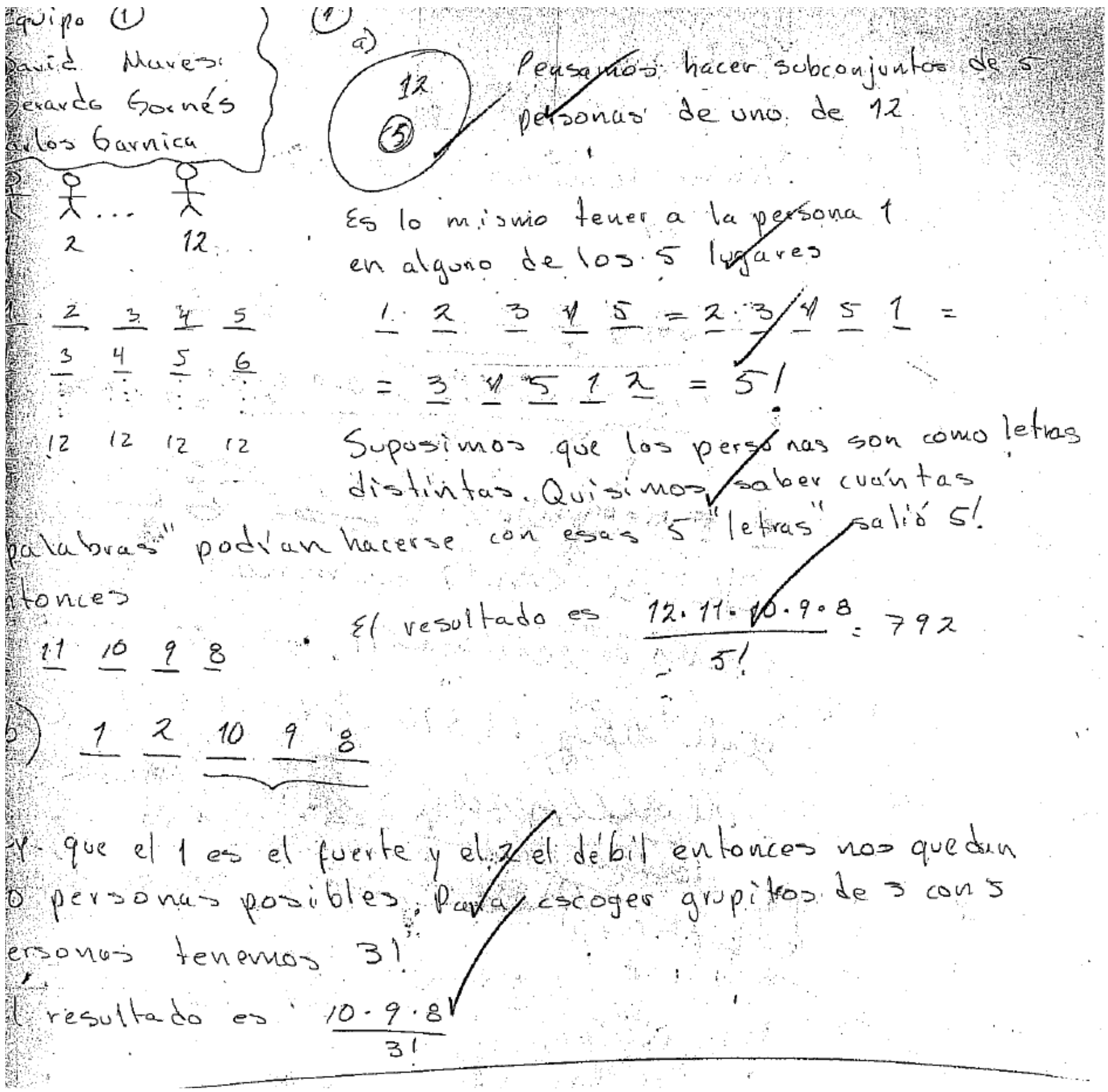
El análisis de las preguntas por equipo es el siguiente.

EQUIPO 1

Este equipo está formado por cinco alumnos que obtuvieron 5.4, 10, 10, 8.3 y 9.8 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.8.

Pregunta 1. Los miembros del equipo resolvieron este problema haciendo subconjuntos. Se dieron cuenta que no hay repeticiones y en la segunda pregunta restaron los dos ya elegidos del total de personas y del número de elementos en el equipo.

Escribieron algunos casos para ejemplificar los casos iguales por el hecho de que no existe el orden y dividieron a la ordenación para quitar el orden. Podría pensarse que la fórmula de ordenación la han encapsulado en un objeto sobre el cual hacen la acción de dividir para encontrar los casos donde el orden no existe.



Equipo (1)
David Mares
Gerardo Gornés
Carlos Garnica

(4) a)

12
(5)

Pensamos hacer subconjuntos de 5 personas de uno de 12

1 ... 12

Es lo mismo tener a la persona 1 en alguno de los 5 lugares

1 2 3 4 5 = 2 3 4 5 1 =
= 3 4 5 1 2 = 5!

1 2 3 4 5
2 3 4 5 6
⋮
12 12 12 12

Supusimos que las personas son como letras distintas. Quisimos saber cuántas "palabras" podían hacerse con esas 5 "letras" salió 5!

entonces
12 11 10 9 8

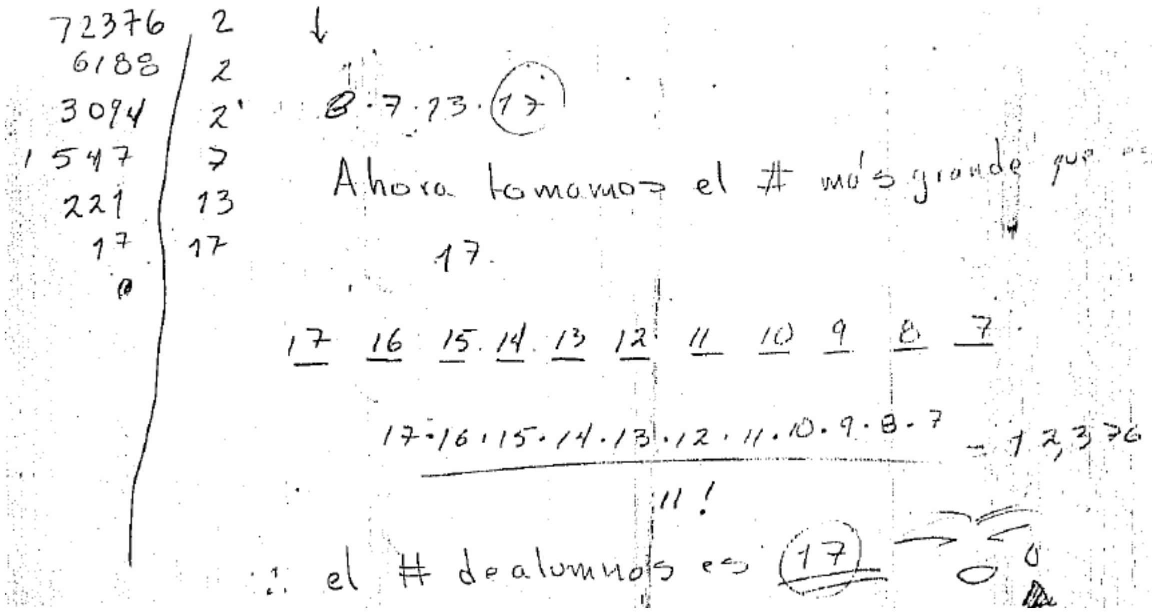
El resultado es $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = 792$

b) 1 2 10 9 8

Ya que el 1 es el fuerte y el 2 el débil entonces nos quedan 10 personas posibles. Para escoger grupitos de 3 con 5 personas tenemos 3!

El resultado es $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$

Pregunta 2. Los miembros de este equipo se dan cuenta que no existe el orden. Reconocen que el problema es encontrar el número de alumnos y lo resuelven correctamente.



72376	2
6188	2
3094	2
1547	7
221	13
17	17
1	

$8 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$

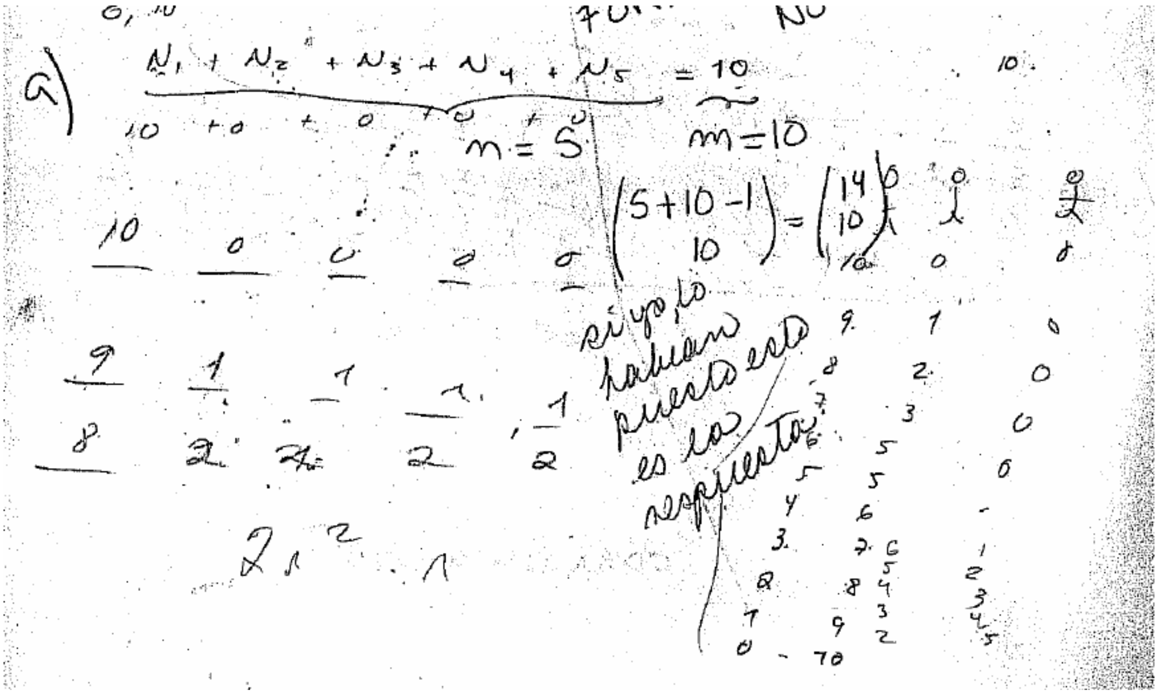
Ahora tomamos el # más grande que es 17.

17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7

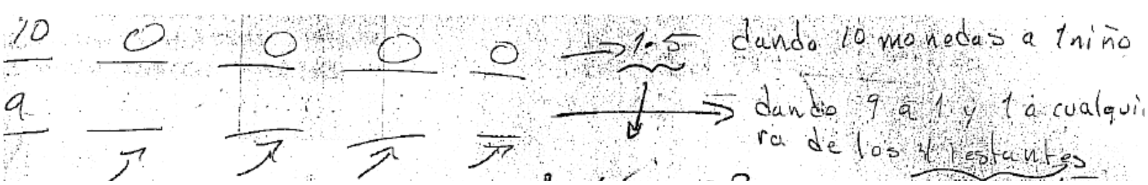
$$\frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{11!} = 72376$$

∴ el # de alumnos es 17

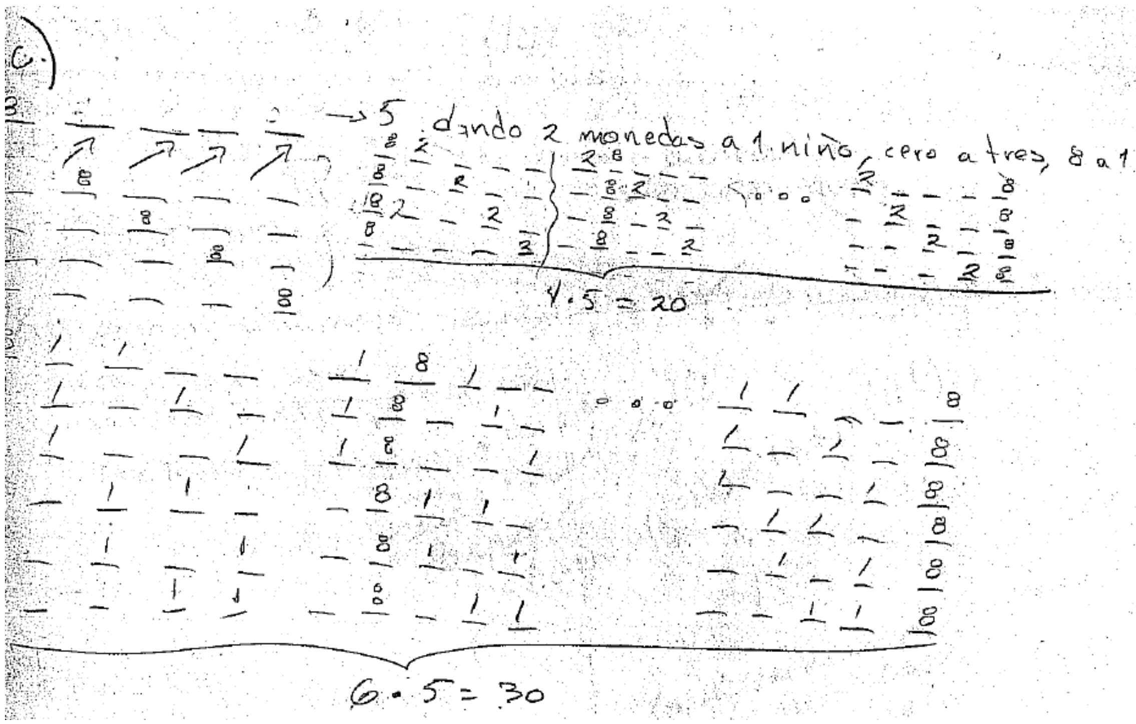
Pregunta 3. a) Nuevamente reconocen que no hay orden y no hay repetición. Intentan resolver con la fórmula de combinación sin repetición pero no saben aplicarla correctamente.



b) Escriben algunos casos pero no resuelven.



c) Escriben algunos casos pero no resuelven.

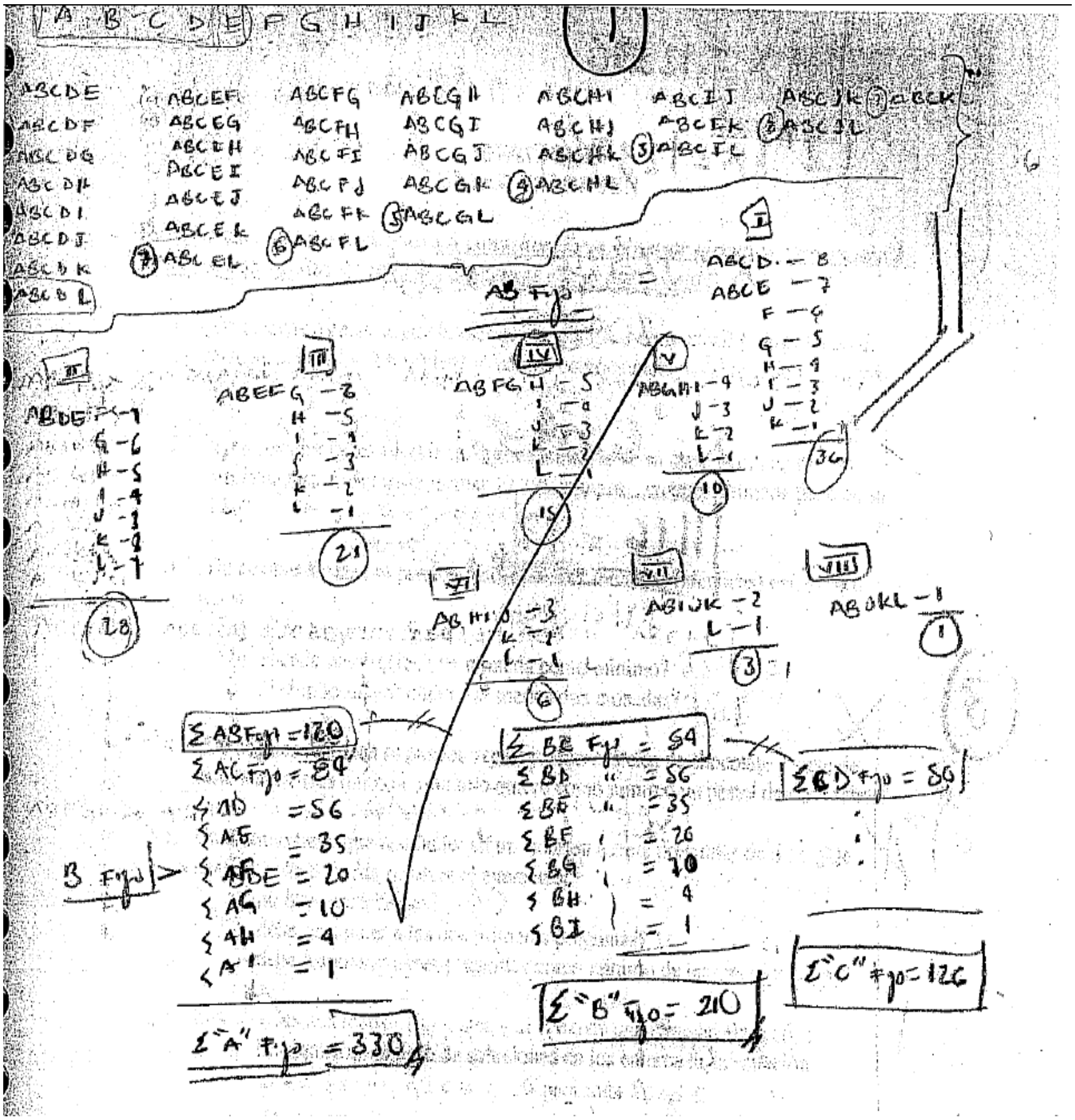


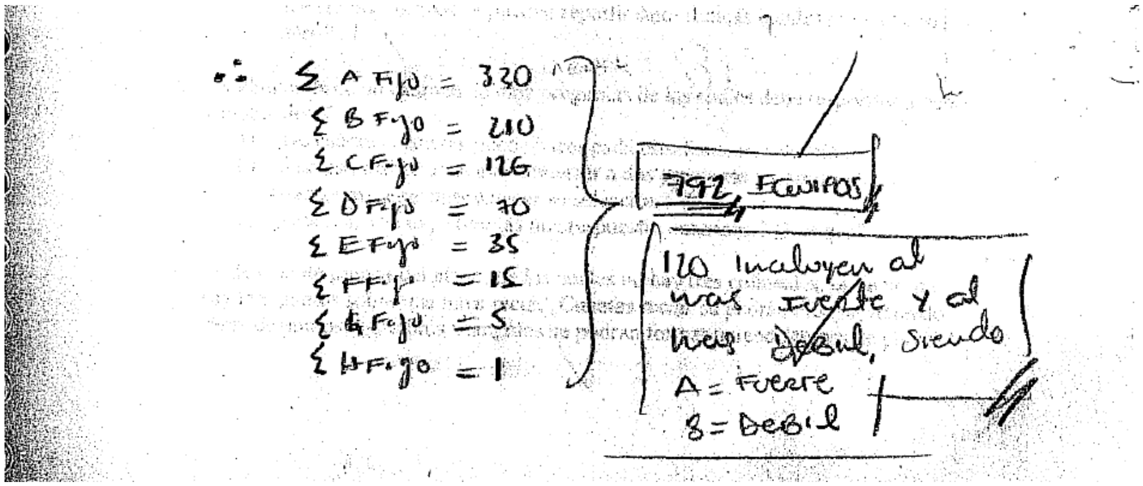
Parece que los miembros de este equipo al resolver los problemas con orden de la serie anterior, han reflexionado sobre las acciones de contar físicamente interiorizándolas en el proceso de un algoritmo desarrollado por ellos mismos. Para los miembros de este equipo ya no es necesario desglosar el problema en casos para contar físicamente. Al parecer todos ó algunos de los miembros del equipo conocen el tema y tal vez alguna fórmula. La pregunta uno y dos la resuelven correctamente y explican con claridad lo que hicieron, pero en la pregunta tres saben cuál fórmula usar pero no resuelven correctamente. Hacen la acción de aplicar las fórmulas pero, es claro, que no las han interiorizado dado que en unos incisos no resuelven correctamente y en otros no las usan. A juzgar por sus soluciones se puede concluir que han reflexionado sobre sus acciones aunque no han logrado interiorizarlas en un proceso.

<u>EQUIPO 4</u>

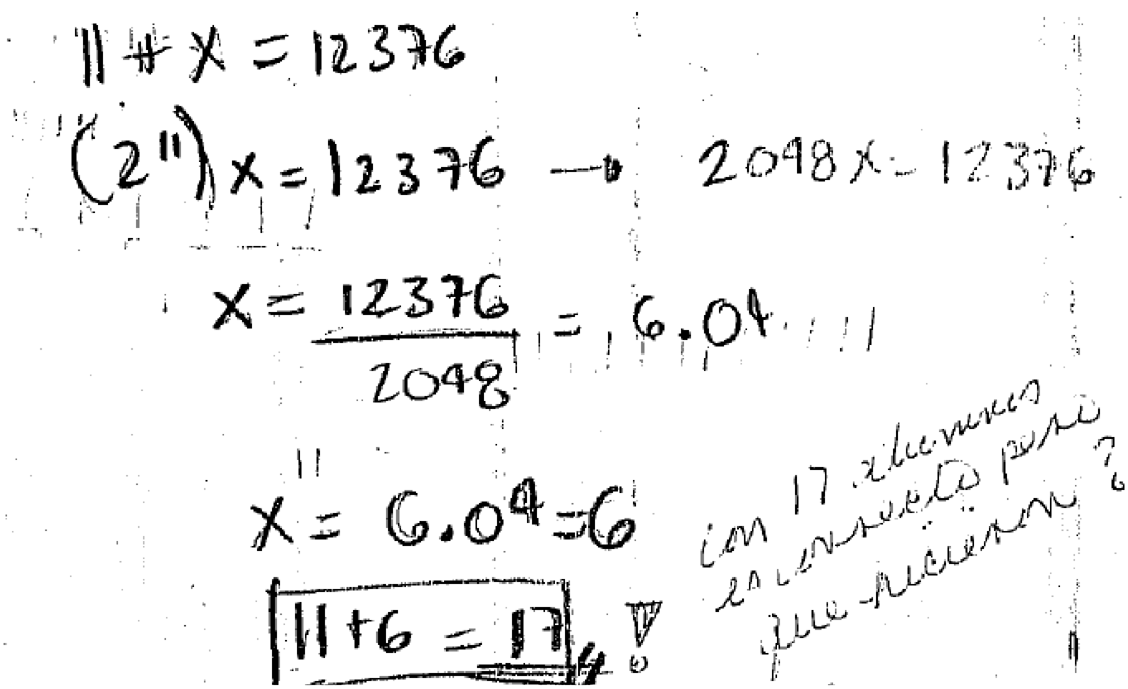
Este equipo está formado por seis alumnos que obtuvieron 9.7, 5.3, 10, 5.1, 9.4 y 4.5 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.8.

Pregunta 1. Los miembros del equipo escriben varios casos como acción para desglosar el problema y contar físicamente. Para la segunda pregunta fijan a dos personas y cuentan los casos.





Pregunta 2. Encuentran la solución correcta planteando una ecuación pero no explican que hicieron.

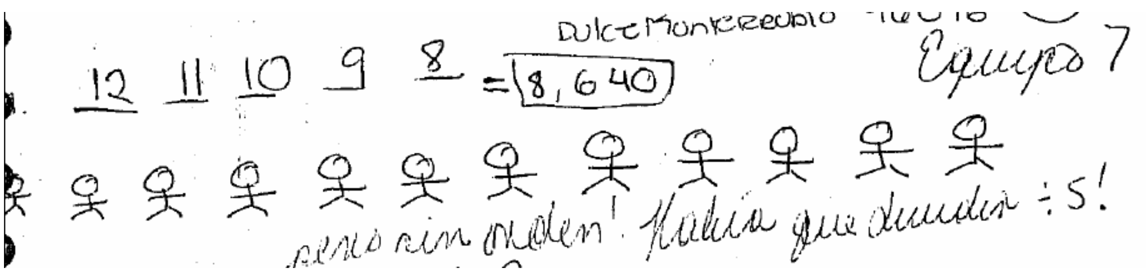


Los miembros de este equipo resolvieron de esta serie solamente los problemas uno y dos. Los demás problemas ni siquiera los intentaron. Por la respuesta al primer problema parece que necesitan hacer la acción de desglosar el problema para contar físicamente, por lo que, al parecer, no han interiorizado dichas acciones en un proceso.

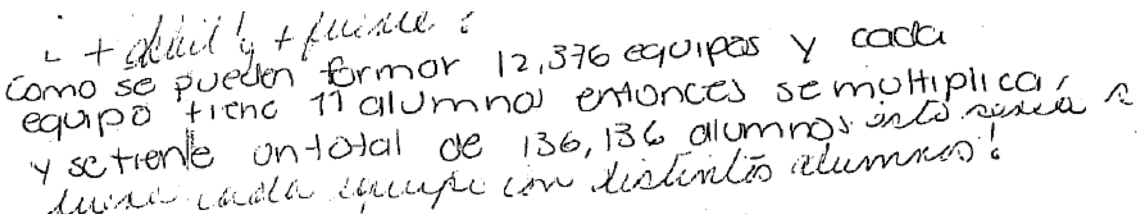
EQUIPO 5

Este equipo está formado por cinco alumnos que obtuvieron 7.8, 5.2, 6.6, 7.3 y 6.9 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.8.

Pregunta 1. Los miembros de este equipo resuelven la pregunta de forma incorrecta pues resuelven con orden. No escriben casos y no contestan la segunda parte.

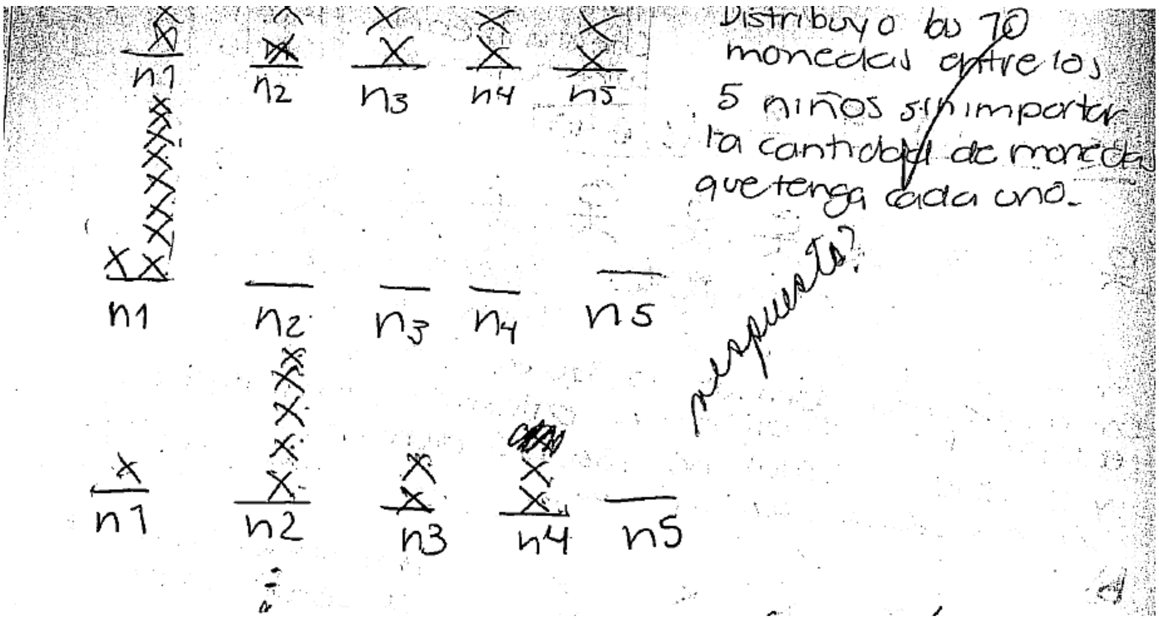


Pregunta 2. Resuelven de forma incorrecta pues multiplican el número de equipos por once como si cada equipo tuviera alumnos distintos. No dicen nada sobre el hecho de que no existe el orden.

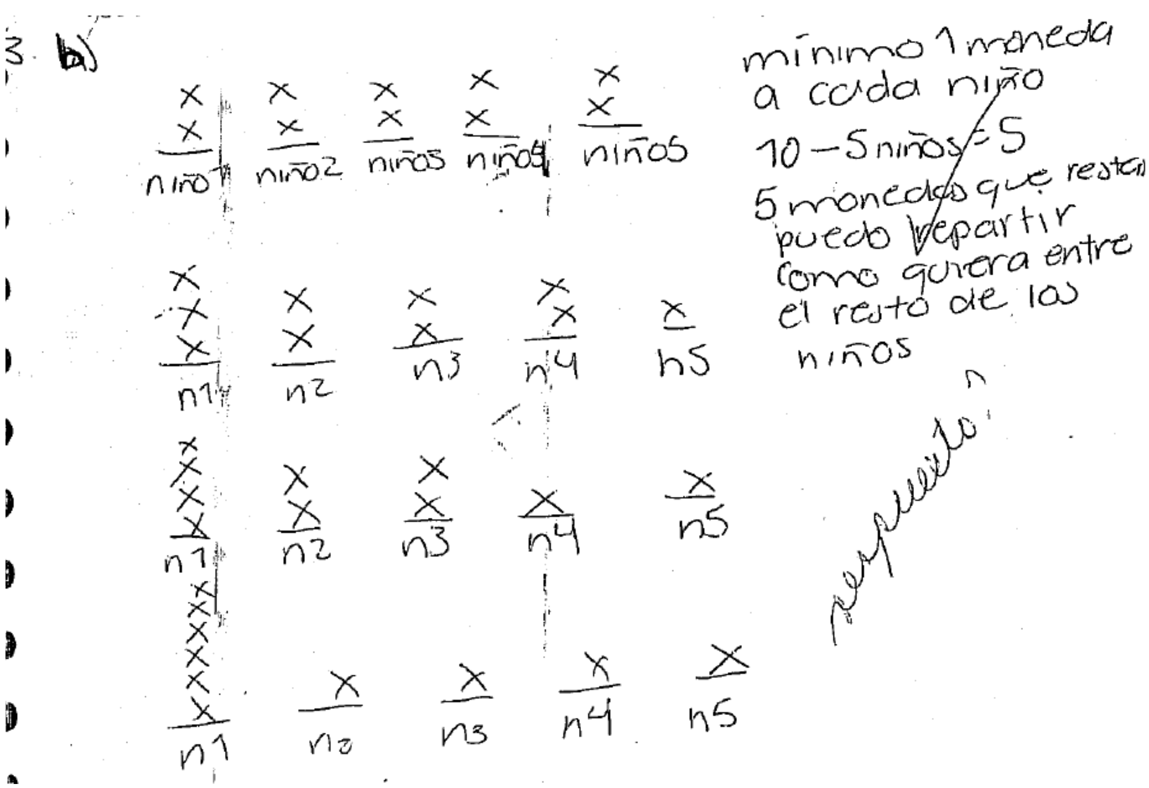


Pregunta 3. En los tres incisos hacen la acción de restar para encontrar la cantidad de monedas de cada uno: a) 10, b) 5 y c) 8. Necesitan hacer la acción de escribir varios casos para desglosar el problema y contar físicamente, pero como los resultados son números grandes ponen puntos suspensivos como respuesta. Nuevamente, no mencionan el hecho de que no hay orden.

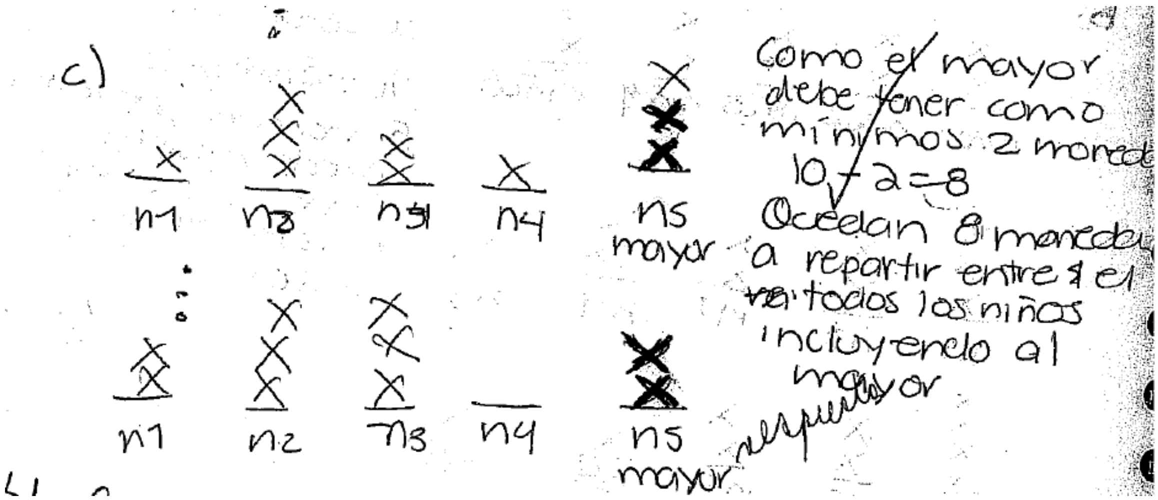
Inciso a)



Inciso b)



Inciso c)



Los miembros de este equipo resuelven la primera pregunta como un producto sin necesidad de escribir algunos casos. Parece que con la serie de problemas con orden han interiorizado la acción de desglosar el problema en un producto, pero no se dan cuenta de que el problema que se les presenta es distinto pues no tiene orden. En ninguna de las tres preguntas mencionan o utilizan el hecho de que no existe el orden.

ETAPA 2. Problemas resueltos en clase mediante discusión global.

En esta etapa se impartió la clase sobre el tema de combinaciones, es decir, donde el orden no importa y consistió en resolver, junto con los alumnos a través de una discusión en grupo, los problemas 1, 4, 7 y 11 a) de la serie de problemas sin orden sin explicitar los conceptos involucrados en ellos. La mayoría de los alumnos no había resuelto por equipo los problemas 4, 7 y 11. Primero se resolvieron las preguntas 1, 7 y 11a) pues son combinaciones sin repetición y después la pregunta 4 que es una combinación con repetición.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 1

¿De cuántas formas se puede escoger un equipo de basketball (5 jugadores) de entre doce jugadores posibles? ¿Cuántos equipos incluyen al más débil y al más fuerte?

Solución: $\binom{12}{5} = 792$ *equipos.* $\binom{10}{3} = 120$ *equipos con el más débil y el más fuerte.*

PREGUNTA 4

¿De cuántas maneras se pueden repartir ocho pasteles de chocolate y siete de canela entre tres niños si cada uno quiere como mínimo un pastel de cada sabor?

Solución: $\binom{7}{5}\binom{6}{4} = 315$ *formas de repartir los pasteles.*

PREGUNTA 7

Un alumno hace un examen de diez preguntas de las cuales debe responder a ocho y omitir dos.

a) ¿De cuántas maneras puede hacer cada estudiante su selección?

b) Si un estudiante tiene que contestar a dos preguntas y omitir ocho, ¿de cuántas maneras puede hacer su selección?

c) ¿Qué relación hay entre las dos respuestas anteriores? ¿Por qué?

Solución:

a) $\binom{10}{8} = 45$ *formas de contestar el examen.*

b) $\binom{10}{2} = 45$ *formas de contestar dos preguntas.*

c) $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$ *es lo mismo.*

PREGUNTA 11

¿De cuántas formas se puede dar una mano de cinco cartas de una baraja (con cincuenta y dos cartas divididas en cuatro palos con trece cartas cada palo) para obtener:

a) cinco cartas del mismo palo?

Solución:

a) $\binom{4}{1}\binom{13}{5}$

Durante la discusión en grupo el maestro realizó distintas preguntas. Pocos alumnos habían intentado resolver en equipos los problemas planteados, a ellos, el maestro les preguntó cómo lo habían resuelto. La mayoría de los alumnos había planteado la fórmula de ordenación para resolverlos. Se discutió que en estos problemas no hay orden, pero, la mayoría de los alumnos no supo qué hacer. El maestro escribió en el pizarrón distintas secuencias que, al no existir orden, deben contarse como una sola. Se concluyó que la fórmula que plantearon debe dividirse para quitar el orden. Muy pocos alumnos lo habían hecho, pero durante la discusión aparentemente quedó claro. El maestro fue anotando las preguntas, las respuestas y la discusión de cada problema para hacer el análisis correspondiente.

El análisis de las preguntas es el siguiente.

Pregunta 1. La mayoría de los alumnos opina que si existiera orden se usaría la fórmula de ordenación sin repetición $O_{12}^{5} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$, pero en este caso no había orden. La mayoría de los alumnos llega a este punto: utilizan la fórmula de ordenación, pero están conscientes de que debe hacerse algo más pues en este caso no hay orden. Sin embargo, muchos no saben qué hacer. Algunos dijeron que había secuencias que debían contarse como una. El maestro escribió en el pizarrón algunas combinaciones de letras *abcde* = *bcdea* = *cdeab* = *deabc* = *eabcd* para mostrar que, como no existe el orden, estas secuencias son la misma. En la solución por equipos algunos grupos lo habían notado, por lo que entendieron qué era lo que se buscaba. La mayoría de los alumnos pareció reconocer que estas secuencias consistían en la permutación de los cinco miembros del equipo, es decir, en total 5! La mayoría de los alumnos concluyó que había que dividir la ordenación sin repetición para encontrar las combinaciones.

Para la segunda parte la mayor parte de los estudiantes resta los dos jugadores ya elegidos del total de jugadores y del número de elementos del equipo. Sin embargo, algunos alumnos no lo hacen. Contestan rápidamente que es una ordenación sin repetición pero dividida entre 3! para quitar el orden.

Al parecer al haber resuelto los problemas con orden interiorizaron la acción de contar de manera explícita o de enumerar casos en un proceso que incluye el uso de operaciones. Sin embargo, para quitar el orden sí requirieron hacer la acción de escribir algunos casos para encontrar las secuencias que, al no haber orden, se cuentan como una. Parece que el periodo de reflexión en la solución de los primeros problemas, los ha llevado a interiorizar dichas acciones en un proceso y al resolver la segunda parte son capaces de dividir la ordenación para quitar el orden. Parece que la mayoría de los alumnos ha encapsulado la fórmula de ordenación en un objeto que dividen para quitar el orden.

Pregunta 7. En los incisos a) y b) reconocen que no hay orden por lo que es necesario dividir la ordenación sin repetición entre la permutación. Parece que han interiorizado las acciones de contar de manera explícita y el uso de la fórmula de ordenación. También parece que han encapsulado la ordenación en un objeto que utilizan para quitar el orden. Para el inciso c) al haber resuelto los dos incisos anteriores, se dan cuenta que es lo mismo, pero no encuentran la razón , lo cual indica, posiblemente, que no han interiorizado todas las acciones en un proceso.

Pregunta 11. Se definió que una baraja cuenta con cincuenta y dos cartas, cuatro palos y trece cartas por palo. a) Los alumnos no saben cómo resolver el problema, pero se dan cuenta (todos han jugado cartas alguna vez) que no existe el orden y que se resuelve dividiendo una ordenación para quitar el orden. Posiblemente tienen una concepción de tipo objeto. Se les explicó que debían separar los palos de los números pues ninguno de ellos propuso esta acción. Esta idea les resultó difícil y fue necesario hacer la acción de escribir varias manos de póquer para promover la reflexión entre los alumnos. Finalmente, se resolvió el problema a través de las acciones encontradas.

Se les pidió que intentaran generalizar lo que se había hecho. Discutiendo entre ellos y, de manera relativamente fácil, obtuvieron la fórmula de combinaciones sin repetición, o simplemente combinaciones, de n elementos tomados de m en m:

$\binom{n}{m} = \frac{O_n^m}{m!}$, usando la fórmula de ordenaciones sin repetición que ya conocían. Se desarrolló esta fórmula conjuntamente con los alumnos, para simplificarla y se llegó a $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. La maestra aclaró los conceptos de orden y repetición. Puede considerarse que el periodo de reflexión sobre las acciones condujo a los estudiantes a interiorizar algunas acciones en un proceso.

Pregunta 4. Los alumnos al analizar la pregunta se dan cuenta que no hay orden y deben repartir por separado los pasteles de chocolate y de canela. Restan del total de pasteles de cada sabor los tres que ya repartieron. Resuelven usando la fórmula de combinaciones que se acaba de desarrollar; pero la aplican de manera incorrecta, lo que nos indica que si bien ha habido un proceso de reflexión no se han interiorizado las acciones descritas en la fórmula. La maestra hace notar que hay cinco pasteles iguales de chocolate y cuatro pasteles iguales de canela, es decir, que existen objetos idénticos.

En este caso, se usa la fórmula de combinaciones con repetición. La maestra propuso resolverlo como permutación distinguible pues este tema ya se había cubierto y los alumnos encontraron la solución. Sin embargo, no pudieron generalizar para encontrar la fórmula de combinación con repetición de *n* elementos tomados de *m* en *m*: $\binom{n+m-1}{m}$, lo que demuestra que no han interiorizado todas las acciones que se requieren para ello.

ETAPA 3. Problemas resueltos en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

En esta etapa la maestra escribió en el pizarrón las fórmulas de combinación y combinación con repetición y pidió a los alumnos que resolvieran los problemas 2, 7, 10 y 12 en los veinte minutos que quedaban de clase.

Para esta parte se analizarán las respuestas a las preguntas 7 y 12 de los alumnos David, Dulce y Erick al igual que en la sección de conteo con orden. Carlos no asistió a esta sesión.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

<u>*PREGUNTA 7*</u>

Un alumno hace un examen de diez preguntas de las cuales debe responder a ocho y omitir dos.

a) ¿De cuántas maneras puede hacer cada estudiante su selección?

b) Si un estudiante tiene que contestar a dos preguntas y omitir ocho, ¿de cuántas maneras puede hacer su selección?

c) ¿Qué relación hay entre las dos respuestas anteriores? ¿Por qué?

Solución:

a) $\binom{10}{8} = 45$ *formas de contestar el examen.*

b) $\binom{10}{2} = 45$ *formas de contestar dos preguntas.*

c) $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$ *es lo mismo.*

<u>*PREGUNTA 12*</u>

¿De cuántas maneras puede escoger el ganador de un premio tres discos compactos de la lista de los diez de mayor éxito, si se permiten las repeticiones?

Solución: $\binom{12}{3}$ *formas de escoger.*

El análisis de las preguntas por alumno es el siguiente.

<u>*DAVID*</u>

Pregunta 7. a) y b) Reconoce que no hay orden ni repetición y resuelve usando la fórmula de combinaciones.

10 preguntas

8 Respuestas

$\binom{n}{m}$ $\quad \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{10!}{8!(2!)}$ Por que no hay repetición

$\binom{n}{m}$ $\quad \frac{10}{2!\,8!}$ Igual no hay repetición

c) Se da cuenta que al aplicar la fórmula de combinación se llega al mismo resultado y lo relaciona con las preguntas.

Porque al escoger 8 o 2 preguntas se repite la misma combinación. (ya que de una aparecen 2) y en la 6 son los 2 por escoger.

Pregunta 12. Reconoce que hay repetición y usa la fórmula de combinaciones con repetición. Nuevamente no necesita desglosar el problema.

12 10 discos.

escogo 3. vale repetición.

$X_1 + X_2 + X_3 = m$

Como hay Repetición $\quad \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n+m-1-m)!}$

$$\frac{(10+3-1)!}{3!\,(10+3-1-3)!} = \frac{12!}{3!\;9!}$$

Por las repeticiones que pueden existir

Se observa en las respuestas que el alumno ha interiorizado la acción de escribir los casos para desglosar el problema y contar físicamente en un proceso que le permite dar una razón para justificar sus resultados y usar las fórmulas adecuadas.

<u>*DULCE*</u>

Pregunta 7. a) y b) Reconoce que no hay orden ni repetición y resuelve usando la fórmula de combinaciones.

7) 10 preguntas responder 8

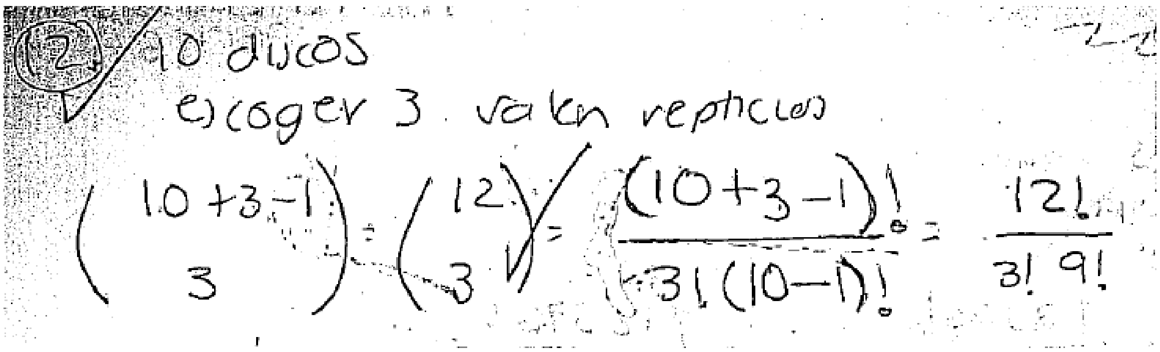
a) $\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10!}{8!\,2!}$ De las 10 preguntas tomo 8

b) $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!}$ De las 10 preguntas tomo 2.

c) Al desarrollar las combinaciones se da cuenta que llega a lo mismo y lo relaciona con las preguntas.

c) Las respuestas son iguales porque de las 2 formas estoy separando las 10 preguntas en: 8 y en 2

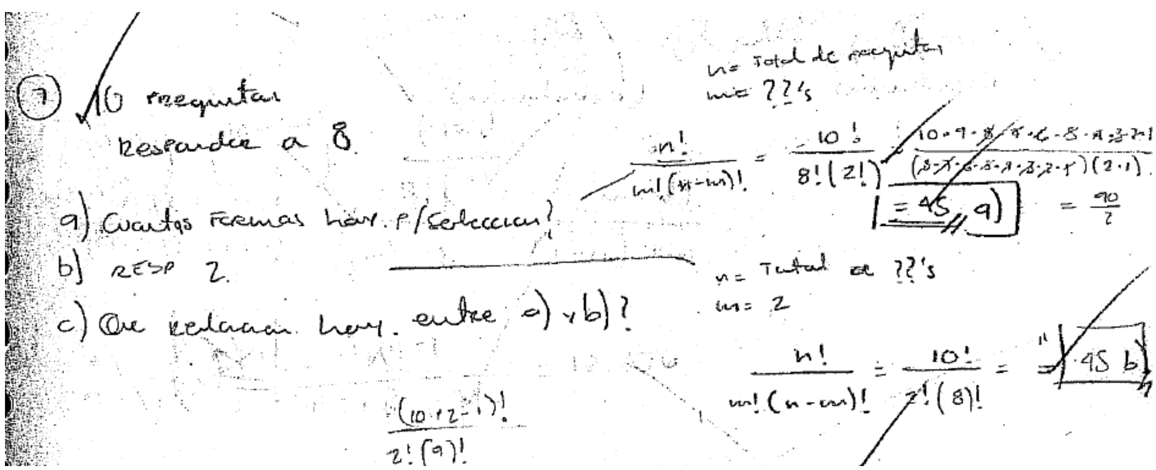
Pregunta 12. Reconoce que hay repetición y usa la fórmula de combinaciones con repetición.



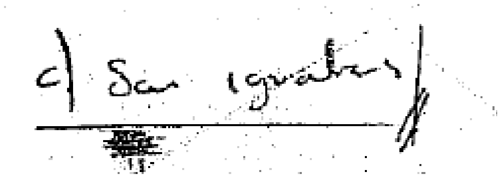
Esta alumna ha tenido un proceso de reflexión y probablemente de interiorización por lo que es capaz de usar correctamente las fórmulas y no necesita hacer la acción de desglosar el problema ó escribir algunos casos para contar físicamente.

ERICK

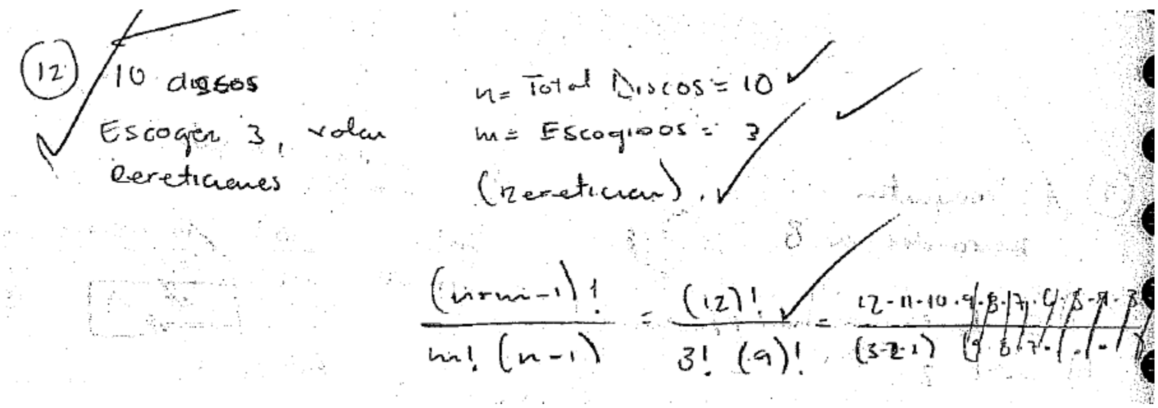
Pregunta 7. a) y b) Reconoce que no hay orden ni repetición y resuelve usando la fórmula de combinaciones.



c) Responde correctamente sin dar explicación.



Pregunta 12. Reconoce que existen las repeticiones y usa la fórmula de combinación con repetición.



Este alumno no necesita desglosar el problema para contar físicamente. Al parecer ha reflexionado sobre las acciones involucradas en las fórmulas y las ha interiorizado en un proceso que le permite aplicarlas correctamente.

ETAPA 4. Problemas resueltos en forma individual como tarea.

En esta etapa los alumnos resolvieron los problemas sin orden como tarea con la finalidad de reforzar la comprensión de los conceptos matemáticos de conteo sin orden. Para esta parte se analizarán las respuestas a las preguntas 5 y 6 de los mismos alumnos con excepción de David y Erick quienes no entregaron la tarea.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 5

Un alumno tiene que responder en un examen a siete preguntas de diez. ¿De cuántas formas puede resolver el examen si:

a) no hay restricciones?

b) debe responder a las dos primeras preguntas?

c) debe responder a tres preguntas como mínimo de las cinco primeras?

Solución:

a) $\binom{10}{7} = 120$ *formas de contestar el examen.*

b) $\binom{8}{5} = 56$ *formas de contestar el examen respondiendo las dos primeras preguntas.*

c) $\binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\binom{5}{2} = 110$ *formas de contestar el examen respondiendo mínimo tres de las cinco primeras preguntas.*

PREGUNTA 6

Resuelve los dos incisos siguientes y di si existe una relación entre ellos.

a) Encuentra el número de soluciones en los enteros de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ *con* $x_i \geq 0$ *para toda* $1 \leq i \leq 4$.

b) ¿De cuántas formas se pueden repartir siete canicas iguales entre cuatro niños?

Solución:

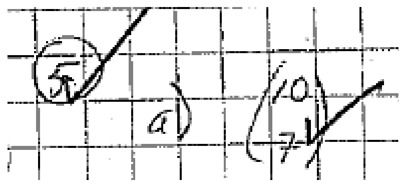
a) $\binom{10}{7} = 120$ *soluciones enteras.*

b) $\binom{10}{7} = 120$ *formas de repartir las canicas.*

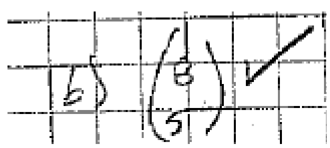
El análisis de las preguntas por alumno es el siguiente.

CARLOS

Pregunta 5. a) Reconoce que no hay orden ni repetición y utiliza correctamente la fórmula de combinaciones.

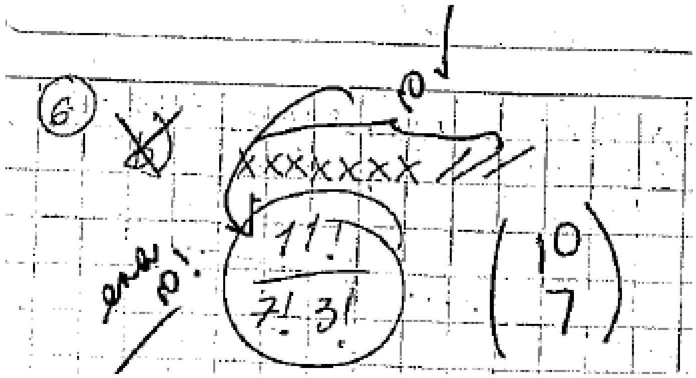


b) Resta del total de preguntas y de las preguntas a responder las dos preguntas que tiene que contestar y utiliza correctamente la fórmula de combinaciones.



c) Separa las cinco primeras preguntas de las cinco últimas y utiliza la fórmula de combinaciones. Sin embargo, sólo hace un caso aplicando la fórmula adecuada pero usando datos erróneos. No reconoce que se pedían tres como mínimo.

Pregunta 6. a) Necesita desglosar el problema y resuelve como permutación distinguible, pero se equivoca al sumar.

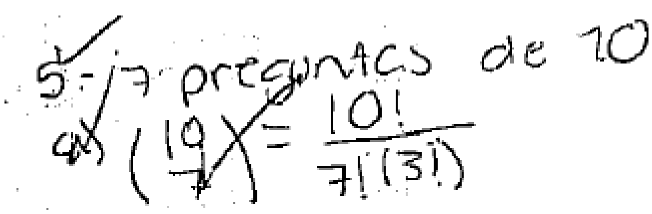


b) y c) no resuelve.

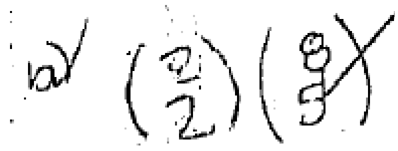
Este alumno es capaz de usar la fórmula de combinaciones correctamente y no necesita hacer la acción de escribir algunos casos para contar. Al parecer ha reflexionado sobre las acciones involucradas en dicha fórmula y las ha interiorizado en un proceso que le permite aplicarla correctamente. Sin embargo, en la pregunta donde hay repetición necesita hacer la acción de desglosar el problema y no utiliza la fórmula de combinación con repetición. Al parecer esta fórmula no la ha interiorizado pues no la aplica.

<u>*DULCE*</u>

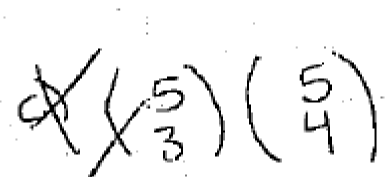
Pregunta 5. a) Reconoce que no hay orden ni repetición y utiliza correctamente la fórmula de combinaciones.



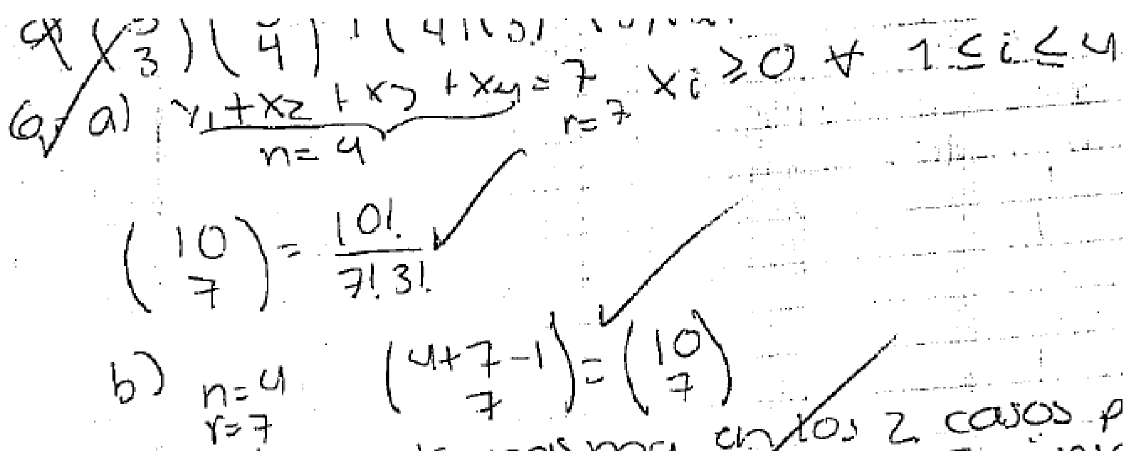
b) Resta del total de preguntas y de las preguntas a responder las dos preguntas que tiene que contestar y utiliza correctamente la fórmula de combinaciones.



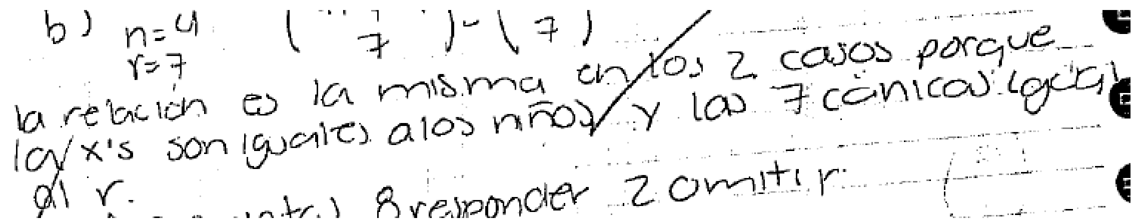
c) Separa las cinco primeras preguntas de las cinco últimas y utiliza la fórmula de combinaciones. Sin embargo, sólo responde un caso. No reconoce que se pedían tres como mínimo.



Pregunta 6. a) y b) reconoce que se trata de una combinación con repetición. Escribe la ecuación y resuelve con la fórmula correctamente.



c) Se observa que ha tenido un proceso de reflexión pues se da cuenta que la ecuación que plantea es la misma en ambos incisos. Al parecer ha interiorizado la acción de relacionar las variables del inciso a) con los niños y las canicas del inciso b) en un proceso.


b) n=4 (7)-(7)
r=7
la relación es la misma en los 2 casos porque las x's son iguales a los niños y las 7 canicas iguales al r.
8 responder 2 omitir

Esta alumna, aún y cuando no responde correctamente todos los incisos reconoce las características de los problemas y aplica de forma correcta la fórmula por lo que parece que ha interiorizado las acciones correspondientes al conteo en un proceso.

Evolución en las respuestas.

Como se mencionó anteriormente los alumnos tuvieron la oportunidad de resolver los problemas sin orden en varias ocasiones. Primero sin haber estudiado el tema, después durante clase y como tarea. Se analizarán las preguntas 1 y 4 para estudiar la manera en que evoluciona su forma de resolverlos. Esto permitirá refinar la descomposición genética inicial para hacerla más acorde a las estrategias de los alumnos. En total hubo diez equipos, pero uno no entregó su solución y diez alumnos entregaron la tarea.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

<u>*PREGUNTA 1*</u>

¿De cuántas formas se puede escoger un equipo de basketball (5 jugadores) de entre doce jugadores posibles? ¿Cuántos equipos incluyen al más débil y al más fuerte?

Solución: $\binom{12}{5} = 792$ *equipos.* $\binom{10}{3} = 120$ *equipos con el más débil y el más fuerte.*

<u>*PREGUNTA 4*</u>

¿De cuántas maneras se pueden repartir ocho pasteles de chocolate y siete de canela entre tres niños si cada uno quiere como mínimo un pastel de cada sabor?

Solución: $\binom{7}{5}\binom{6}{4} = 315$ *formas de repartir los pasteles.*

El análisis de las preguntas es el siguiente.

Pregunta 1. Cuando los alumnos resolvieron estos problemas por equipos, tres de ellos dividieron para quitar el orden (probablemente han encapsulado en un objeto a la ordenación) y explicaron la diferencia entre un problema con orden y otro sin orden; otros dos equipos utilizaron la fórmula, lo cuál no era válido pues la idea era que enfrentaran el problema sin tener ó usar conocimientos previos; otros dos escribieron los casos como acción para desglosar el problema y contar físicamente y los restantes resolvieron considerando que había orden.

De los alumnos que entregaron la tarea, seis utilizan correctamente la fórmula de combinación, uno utiliza la fórmula de ordenación y divide para quitar el orden y tres resuelven como ordenación. Si lo comparamos con los problemas con orden se observa que han reflexionado sobre las acciones de suma y enumeración de casos y las han interiorizado en un proceso en el que no necesitan escribir algunos casos para contar físicamente ni en el momento en que resolvieron por equipo ni cuando hicieron la tarea. Además, siete de ellos utilizan las fórmulas correctamente. Sin embargo, hay tres alumnos que siguen resolviendo como si en el problema importara el orden.

En la segunda parte de esta pregunta se advierte que todos los alumnos han interiorizado la acción de restar del total de jugadores y del número de elementos del equipo a los jugadores que ya han sido seleccionados. Siete de ellos han interiorizado la acción de enumerar los casos y utilizan las fórmulas correctas, pero dos no resuelven y uno resuelve como si existiera orden.

Se puede concluir, a partir de estos resultados, que la mayoría de los alumnos ya no necesita hacer la acción de desglosar el problema para contar cada caso, aun y cuando algunos de entre ellos no han logrado diferenciar entre un problema que tenga orden y otro que no lo tenga. Algunos han interiorizado las acciones en un proceso que les permite usar las fórmulas adecuadas de manera correcta.

Pregunta 4. Cinco equipos resolvieron la pregunta; solamente dos de ellos separan los sabores y restan los que ya repartieron, sin embargo ningún estudiante resolvió la pregunta correctamente.

En comparación, de los diez alumnos que entregaron la tarea solamente uno resuelve incorrectamente, los demás utilizan la fórmula de combinaciones de manera correcta. Nueve de ellos han interiorizado la acción de separar los sabores y la acción de restar los que ya repartieron. Nuevamente se puede concluir que no necesitan hacer la acción de desglosar el problema para contar físicamente y pueden usar la fórmula de manera correcta. En este caso, parece que el hecho de que no hubiera orden no representó un problema para los alumnos.

3.3 ANÁLISIS DEL EXAMEN DE CONTEO

El examen de conteo fue resuelto por veintiséis alumnos. Constó de nueve preguntas y tuvo una duración de dos horas. Aunque las preguntas 5 y 9 forman parte del tema de conteo, no se consideraron para el análisis dado que quedan fuera del interés particular de este trabajo. A continuación se analizan las preguntas 1 y 3 que incluyen situaciones que tienen orden para analizar la forma en que los alumnos responden después de haber trabajado en las clases, discutido, resuelto la tarea y estudiado.

Para esta parte se analizarán las respuestas de los alumnos Carlos, David, Dulce y Erick quienes fueron estudiados en las etapas anteriores. A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 1

En una taquería se pueden pedir los tacos al pastor con o sin cebolla, con o sin cilantro, con o sin piña y con o sin salsa. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los tacos?

Solución: $OR_2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16.$

PREGUNTA 3

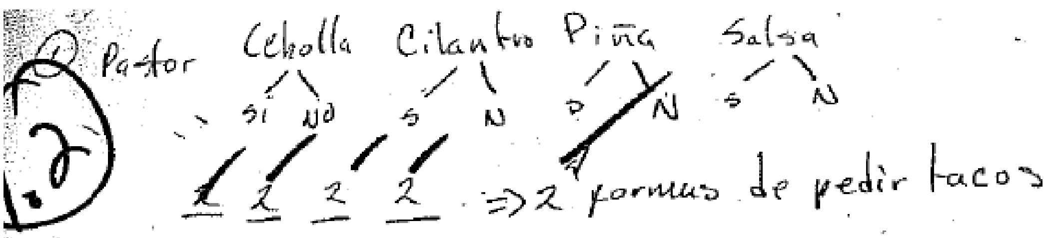
¿Cuántos enteros entre 1000 y 9999 inclusive tienen dígitos distintos? ¿De ellos, cuántos son impares?

Solución: 9 x 9 x 8 x 7 = 4536 números con dígitos distintos. 8 x 8 x 7 x 5 = 2240 impares.

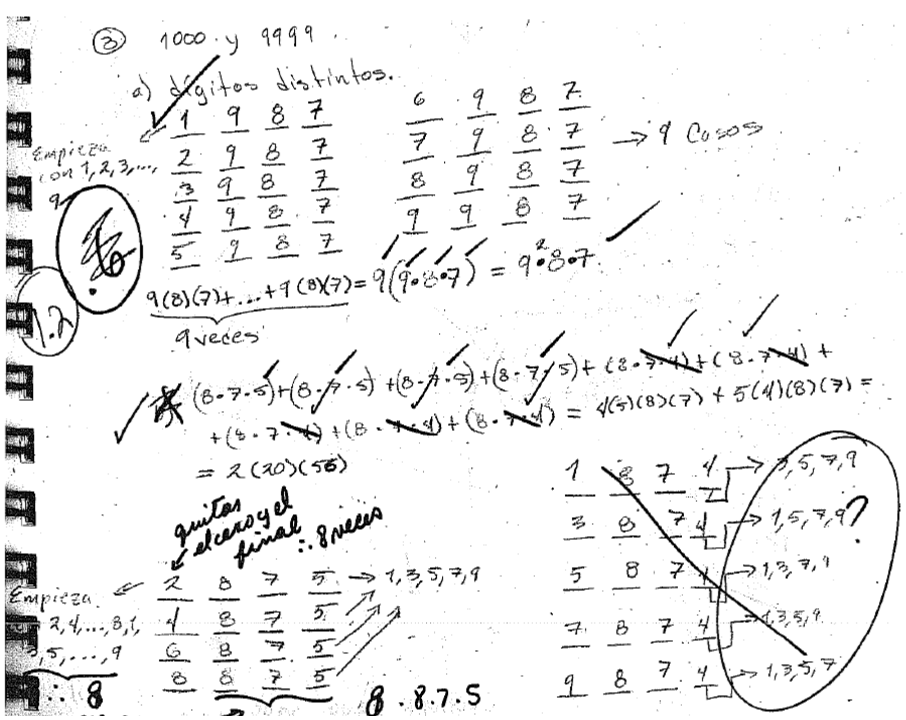
El análisis de las preguntas por alumno se considera en lo que sigue.

CARLOS

Pregunta 1. Reconoce que cada ingrediente puede o no estar presente. Hace un diagrama con los casos y multiplica. Encuentra la solución correcta. Reconoce que existe orden y hay repetición.



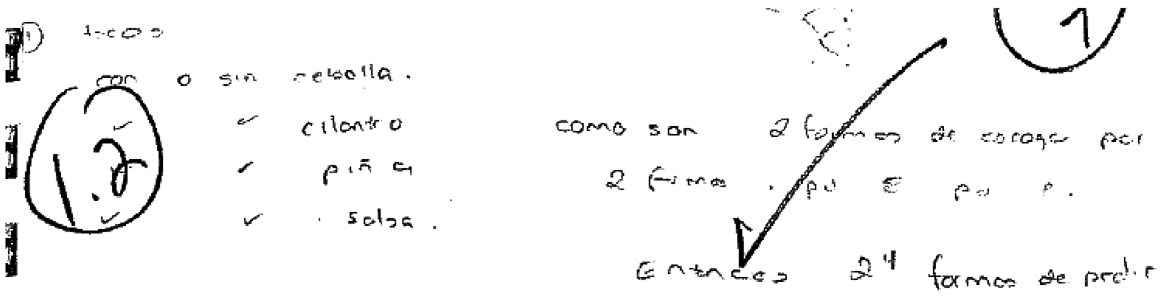
Pregunta 3. En este caso, desglosa una parte y resuelve la otra con el producto.



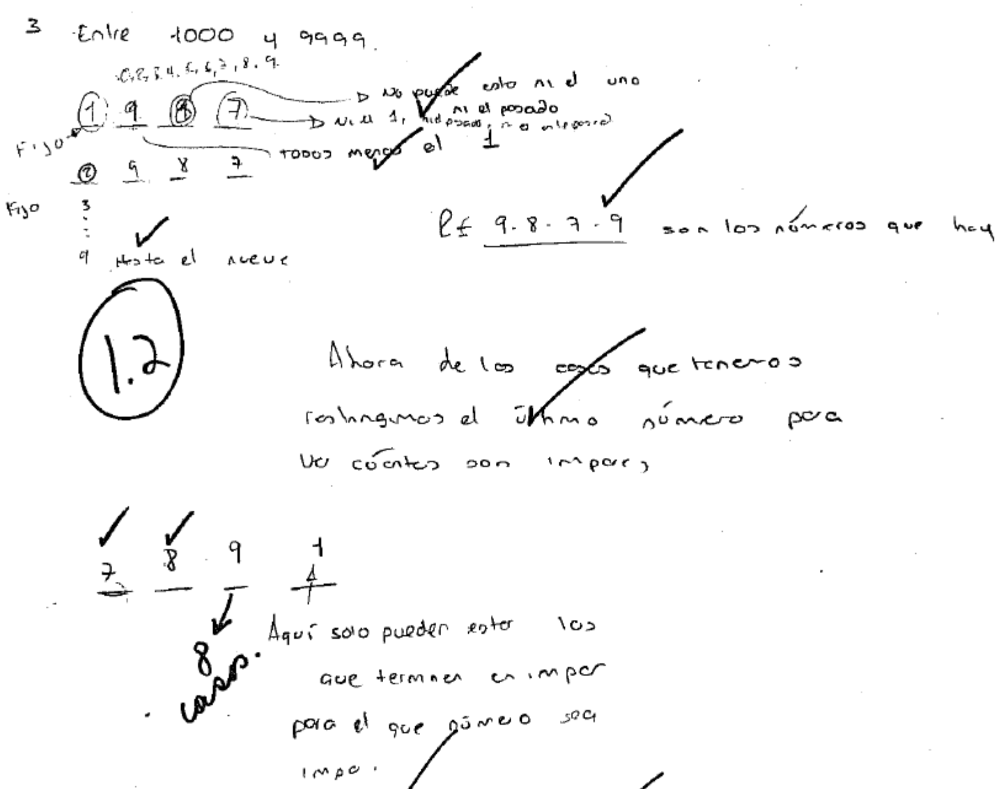
Este alumno desglosa el problema, aunque sea parcialmente, para encontrar el total de casos. Sin embargo, responde también con el producto por lo que parece que el periodo de reflexión lo ha llevado a interiorizar la acción de desglosar en un producto.

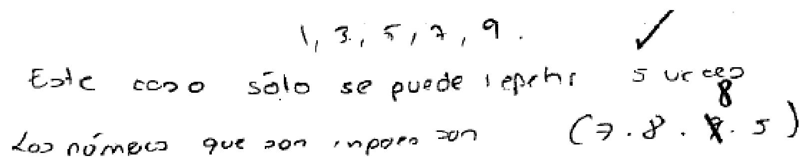
<u>*DAVID*</u>

Pregunta 1. Reconoce que hay dos opciones para cada ingrediente. Utiliza correctamente la fórmula de ordenación con repetición.



Pregunta 3. Reconoce qué dígitos pueden ir en las distintas posiciones del número. Explica claramente su proceso de razonamiento. Reconoce que existe orden y no hay repetición.

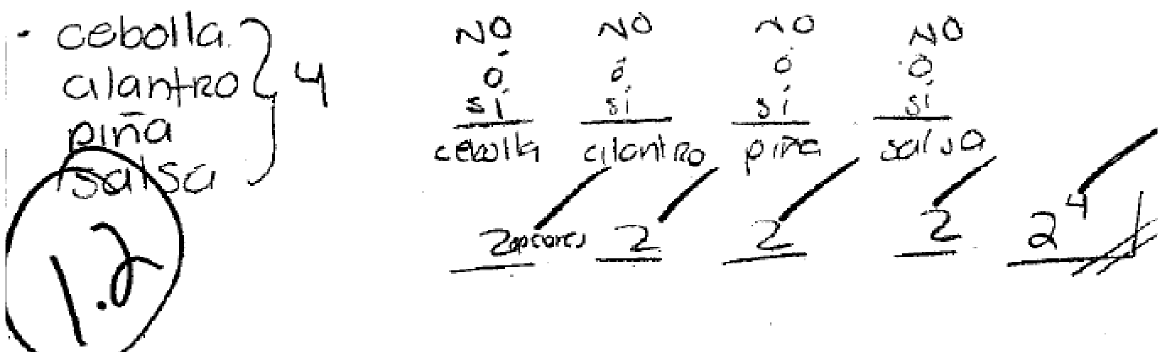




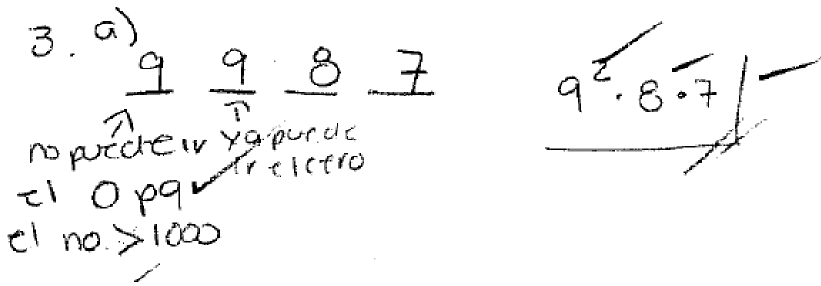
Este alumno no necesita desglosar los problemas en un diagrama para sumar físicamente los casos. Al parecer ha interiorizado esta acción en un proceso que le permite hacer el producto con los datos relevantes y aplicar las fórmulas adecuadas.

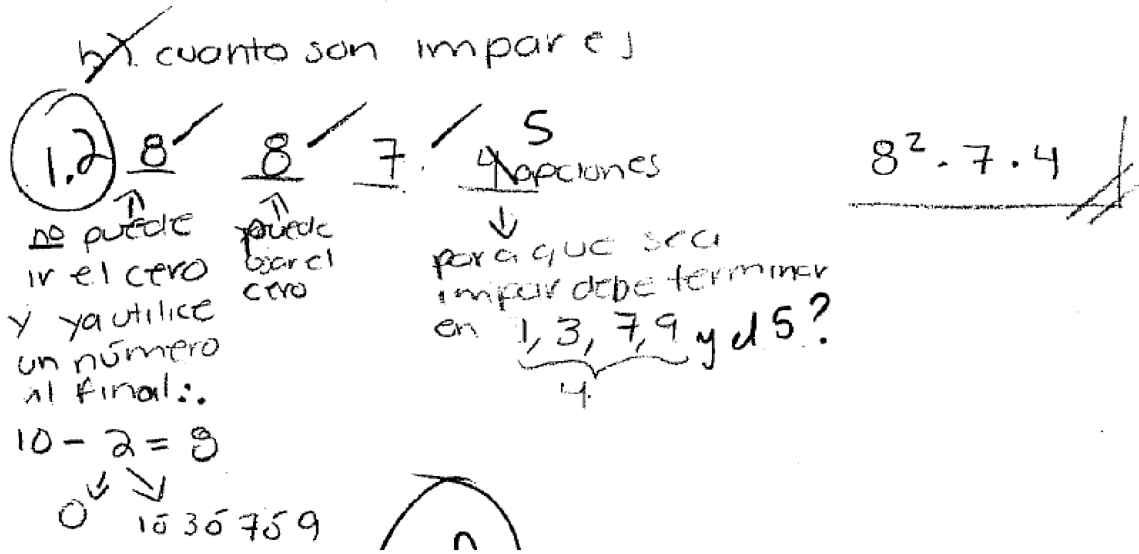
DULCE

Pregunta 1. Reconoce que cada ingrediente tiene dos opciones. Utiliza correctamente la fórmula de ordenación con repetición.



Pregunta 3. Explica claramente su solución. Encuentra los dígitos que pueden ir en los distintos lugares y hace el producto. Reconoce que existe orden y no hay repetición. Se equivoca en la solución de los impares pues no considera al número cinco como impar.

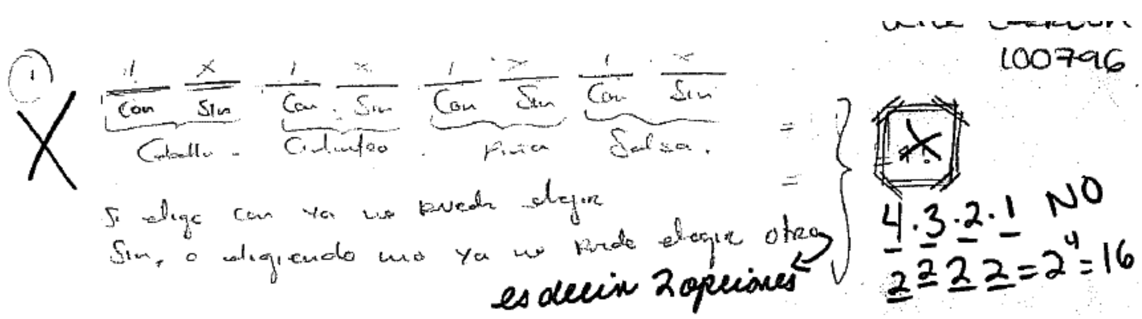




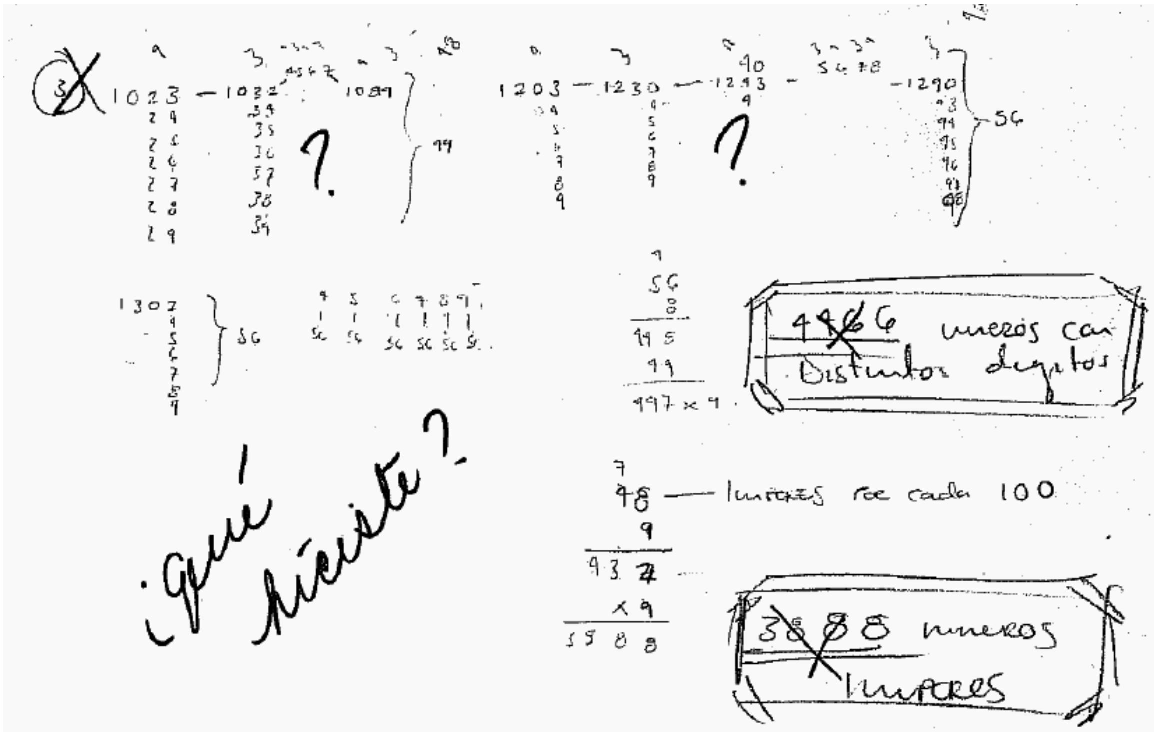
Esta alumna no necesita desglosar el problema para contar físicamente. Al parecer ha interiorizado las acciones en un proceso que le permite aplicar las fórmulas correctas y efectuar el producto.

<u>*ERICK*</u>

Pregunta 1. Este alumno escribe los ingredientes con las dos posibilidades como acción para desglosar el problema. Reconoce que cada ingrediente puede o no estar, pero aplica la fórmula de permutación que no es la adecuada para este problema.



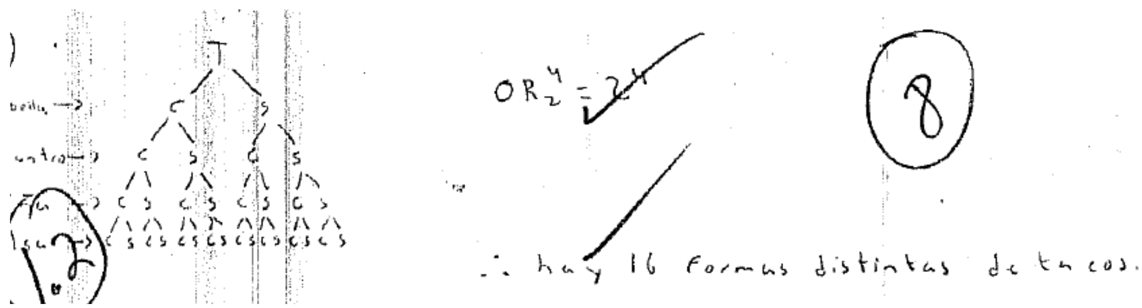
Pregunta 3. Escribe varios casos y hace unos productos, pero no explica su procedimiento. Llega a un resultado incorrecto.



Este alumno no ha hecho las construcciones mentales necesarias para resolver los problemas. Sigue desglosando los casos para contarlos físicamente, lo cual hace evidente que no interiorizado la acción de desglosar el problema en un proceso que le permita multiplicar los datos relevantes. En la segunda pregunta, tal vez debido a la gran cantidad de casos, hace algunos productos para encontrar el resultado, pero estos productos no son adecuados y no llega a la solución correcta. Al parecer utiliza la fórmula de memoria como acción, sin darse cuenta que no es la apropiada.

Ahora se analizará el grupo en general.

Pregunta 1. En las respuestas a esta pregunta, sólo un alumno hizo un árbol pero lo hizo, más bien con el objetivo de comprobar su respuesta, pues también incluye la solución mediante el uso de la fórmula.



Los demás alumnos resuelven correctamente, excepto uno que se olvida de la salsa y otro que considera que se puede o no pedir el taco. Todos los estudiantes reconocen que cada ingrediente puede o no estar presente en los tacos por lo que hay dos opciones. Al parecer los alumnos ya no requieren en este momento hacer algún diagrama como acción para desglosar el problema y contar físicamente los casos.

Pregunta 3. Entre las respuestas a esta pregunta se encontró que un alumno escribe varios casos y cuenta, pero no llega al resultado correcto. Este alumno es Erick, quien se analizó antes. Reprobó este examen y el curso.

Los demás alumnos reconocen que el primer dígito no puede ser cero, que existe el orden y no hay repetición. Ellos resuelven correctamente. Dos de entre los alumnos que responden correctamente consideran números de cinco dígitos. Nuevamente se encuentra que los alumnos han reflexionado y esta reflexión les ha permitido interiorizar las acciones necesarias para resolver este problema con un proceso. La mayoría no requiere desglosar el problema para contar.

Se puede concluir que, al parecer, los alumnos han reflexionado y no necesitan ya hacer la acción de dibujar un diagrama o árbol para contar físicamente. Son capaces de determinar que existe el orden y de usar la fórmula correcta ya sea indicándola o poniendo las casillas y los valores correspondientes. Muestran comprensión de la fórmula.

A continuación se analizarán las preguntas 4 y 8 que no tienen orden para seguir la forma en que los alumnos las contestan después de haber resuelto los problemas en clase, discutido acerca de ellos, resuelto la tarea y estudiado. Se analizarán las respuestas de los mismos alumnos.

Se muestran en primer término las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

<u>*PREGUNTA 4*</u>

Un club tiene sesenta miembros: treinta hombres de negocios y treinta profesores. ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de ocho miembros si:

a) debe estar integrado por lo menos por tres hombres de negocios y al menos tres profesores?

b) la única condición es que al menos uno de los ocho sea un hombre de negocios?

Solución:

a) $\binom{30}{3}\binom{30}{5}+\binom{30}{4}\binom{30}{4}+\binom{30}{5}\binom{30}{3}$ *comités.*

b) $\binom{60}{8}-\binom{30}{8}$ *comités.*

<u>*PREGUNTA 8*</u>

En una fiesta de niños se tienen cuatro cofres de pirata llenos con monedas de uno, cinco, diez y veinticinco centavos. De los cuatro cofres cada niño puede escoger veinte monedas en total para hacer su tesoro. ¿De cuántas formas puede un niño seleccionar su tesoro?

Solución: $\binom{23}{20}$ *tesoros.*

Antes de hacer el análisis de las preguntas se hará una observación a la solución de la pregunta cuatro. Se trata de una pregunta donde el orden no existe por lo que debe resolverse con la fórmula de combinaciones. Sin embargo, no puede aplicarse dicha fórmula directamente, sino que debe dividirse el problema en tres casos. Caso uno: escoger tres hombres de negocios y cinco profesores. Caso dos: escoger cuatro hombres de negocios y cuatro profesores. Caso tres: escoger cinco hombres de negocios y tres profesores. Los casos son excluyentes por lo que deben sumarse.

No puede resolverse en un solo caso: escoger tres hombres de negocios, escoger tres profesores y de las demás personas escoger dos para completar los ocho miembros del comité: $\binom{30}{3}\binom{30}{3}\binom{54}{2}$. Esta solución es incorrecta pues hay secuencias que son iguales y se cuentan más de una vez. Supongamos que los hombres de negocios se numeran del uno al treinta en número arábigo y los profesores se numeran del uno al treinta en número romano. Al escoger a tres hombres de negocios de los treinta que existen, una selección es 1, 2 y 3. Al escoger a tres profesores de los treinta que existen, una selección es I, II y III. Al escoger a dos personas de las restantes una selección es 4 y 5. Es decir, el comité estaría formado por las personas 1, 2, 3, I, II, III, 4 y 5. Con esta solución otra posibilidad sería que se escogieran las personas 1, 4, 5, I, II, III, 2 y 3. Sin embargo, al no existir el orden, estos dos comités son iguales. Por lo anterior, es necesario que este problema se divida en casos para no tener secuencias que se cuenten más de una vez.

El análisis de las preguntas por alumno se considera en lo que sigue.

CARLOS

Pregunta 4. Reconoce que no hay orden y utiliza la fórmula de combinaciones. Reconoce que debe resolver por casos ambos incisos y encuentra el resultado correcto.

(4) 60 miembros: 30 hombres de negocios, 30 profesores
$\longrightarrow$ Comité de 8 miembros.
a) por lo menos 3 H.N. y al menos 3 PR
I) Que sean 4 y 4 $\binom{30}{4}\binom{30}{4}$
II) Que sean 5 y 3 $\binom{30}{5}\binom{30}{3}$ $\rightarrow$ Son 2 casos pues pueden ser 5 HN y 3 PR ó 5 PR y 3 H.N.
$\therefore$ la solución es $\binom{30}{4}\binom{30}{4}+\binom{30}{5}\binom{30}{3}\cdot 2$

b) Al menos 1 es HN.

1.2

i) 1HN solamente $\binom{30}{1}\binom{30}{7}$

ii) 2HN " $\binom{30}{2}\binom{30}{6}$

iii) 3HN " $\binom{30}{3}\binom{30}{5}$

iv) 4HN " $\binom{30}{4}\binom{30}{4}$

v) 5HN " $\binom{30}{5}\binom{30}{3}$

vi) 6HN " $\binom{30}{6}\binom{30}{2}$

vii) 7HN " $\binom{30}{7}\binom{30}{1}$

viii) 8HN $\binom{30}{8}$

∴ Sol es

$$\binom{30}{1}\binom{30}{7}+\binom{30}{2}\binom{30}{6}+\binom{30}{3}\binom{30}{5}+\binom{30}{4}\binom{30}{4}+\binom{30}{5}\binom{30}{3}+\binom{30}{6}\binom{30}{2}+$$
$$+\binom{30}{7}\binom{30}{1}+\binom{30}{8}.$$

Pregunta 8. Reconoce que no existe orden y hay objetos idénticos. Aplica correctamente la fórmula de combinaciones con repetición.

8 4 cofres, 20 monedas

1.2

$$\underbrace{c_1+c_2+c_3+c_4}_{n=4} = \underset{m=20}{20} \qquad \binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20}$$

Este alumno ha interiorizado el uso de las fórmulas de combinación y el dividir un problema en casos en un proceso que le permite aplicar las fórmulas de forma correcta y encontrar los casos relevantes.

DAVID

Pregunta 4. Reconoce que no existe el orden y utiliza la fórmula de combinaciones, sin embargo no resuelve por casos. Además, se equivoca pues suma las combinaciones que encuentra en lugar de multiplicarlas. Confunde el principio aditivo con el principio del producto.

60 miembros.
30 por neg. 30 profesores.
comité de 8 miembros.

a) Debe estar restringido por 3 y 3.

Como debe haber 3 de negocios

$\binom{30}{3}$ para sacar los 3 neg

Similar para los profesores $\binom{30}{3}$

Quedan dos lugares vacíos para los que quedan sin escoger

60 en total menos 6 = 54

$\binom{54}{2}$ los últimos dos lugares

Formas del comité. $\binom{30}{3} + \binom{30}{3} + \binom{54}{2}$

y ona escoger a 8!
CASOS
3 neg 5 pro
4 " 4 "
5 "

b) Si tenemos que uno debe ser de negocios.

entonces $\binom{30}{1}$ para sacar al de negocios

y el resto $\binom{59}{7}$ todos menos el selecto.

Por lo tanto. $\binom{30}{1} + \binom{59}{7}$

Pregunta 8. Reconoce que no hay orden y existen objetos idénticos. Aplica correctamente la fórmula de combinaciones con repetición.

8. 4 cofres de pirata. 1, 5, 10 y 25 ...

De los cuatro cofres, cada niño puede escoger veinte monedas.

4 cofres 1, 5, 10, 25.

1.2

tiene 4 opciones, y un total de 20 monedas.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

No hay ninguna restricción ya que puede escoger 20 en el todo 1. y 0 en los otros 3

Por lo tanto $n=4$ $m=20$

$\binom{n+m-1}{m} = \binom{23}{20}$ formas de escoger sus monedas cada niño.

Este alumno no reconoce que debe dividir el problema cuatro en casos para que ciertas secuencias no se repitan. Sin embargo, ha interiorizado la acción de reconocer que no existe orden y existen objetos idénticos en un proceso que le permite aplicar la fórmula de combinaciones con repetición.

DULCE

Pregunta 4. Reconoce que no hay orden y utiliza la fórmula de combinaciones. Reconoce que debe resolver por casos ambos incisos y encuentra el resultado correcto.

4. 60 miembros (1.2) comité de 8 miembros
30 H. negocios
30 H profesores

a) 3 negocios al menos y 3 profesores al menos

$$\binom{30}{3}\binom{30}{5}+\binom{30}{4}\binom{30}{4}+\binom{30}{5}\binom{30}{3}$$

de los 30 hombres de negocios tomo 3 porque son el mínimo que pueden haber

comité $8-3=5$ que ya puse → tomo 5 profesores de los 30

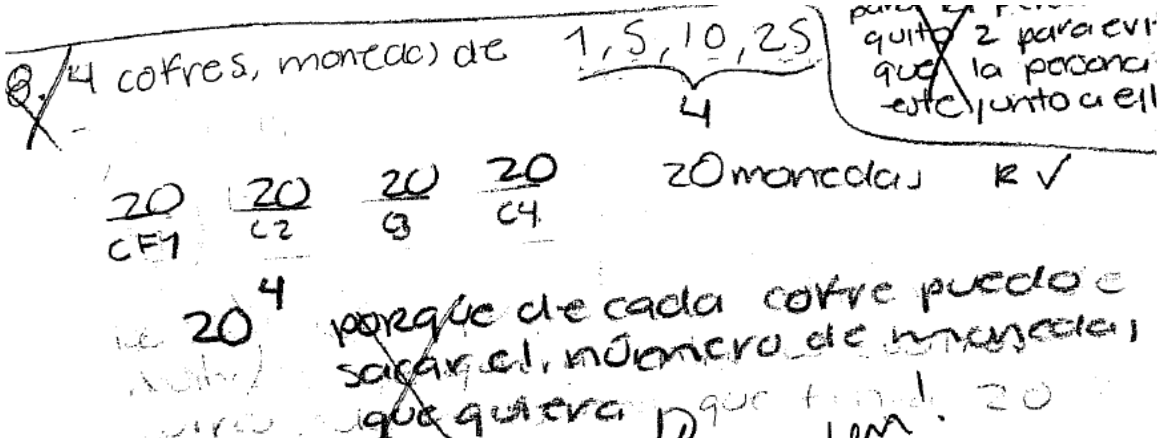
ya NO puedo continuar con las combinaciones porque deben haber por lo menos 3 profesores

b) al menos 1 sea hombre de negocios

$$\binom{30}{1}\binom{30}{7}+\binom{30}{2}\binom{30}{6}+\binom{30}{3}\binom{30}{5}+\binom{30}{4}\binom{30}{4}+$$
$$\binom{30}{5}\binom{30}{3}+\binom{30}{6}\binom{30}{2}+\binom{30}{7}\binom{30}{1}+\binom{30}{8}$$

hombre de negocios

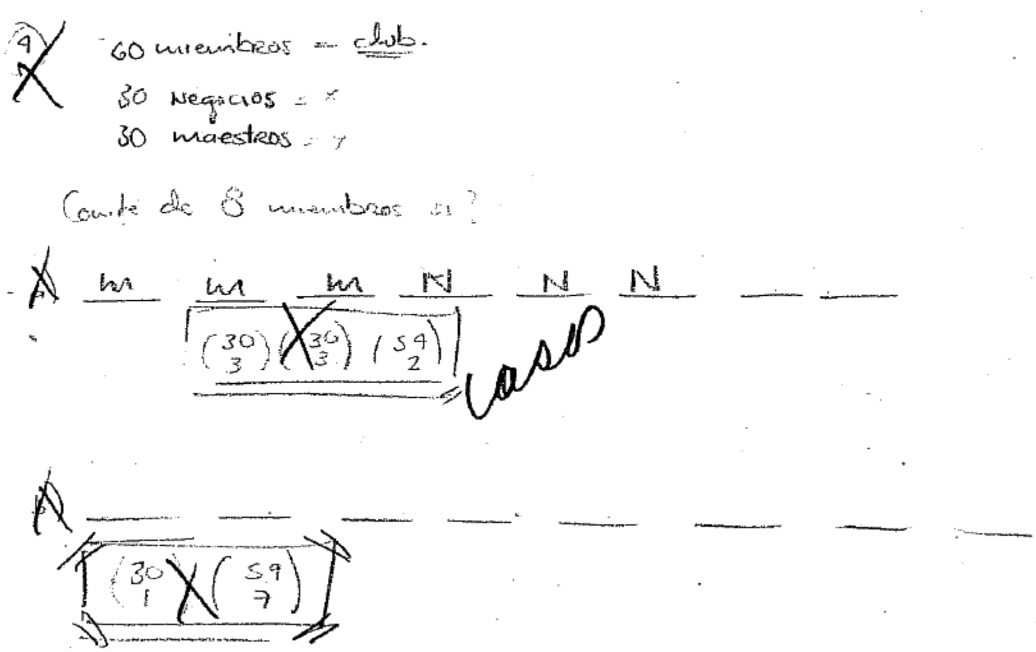
Pregunta 8. Resuelve incorrectamente como una ordenación con repetición.



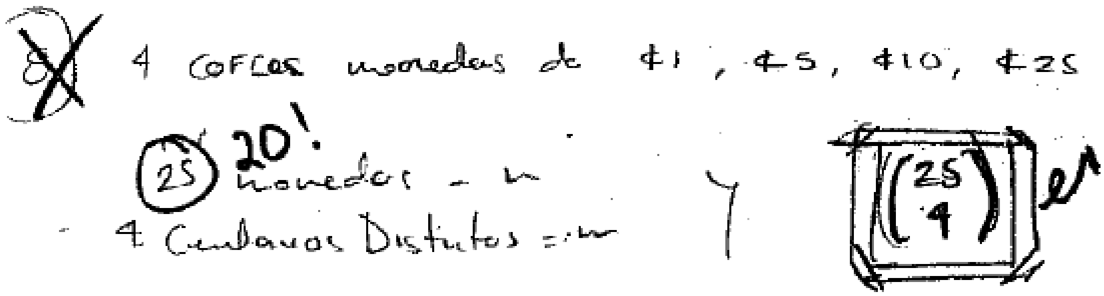
Esta alumna parece que ha interiorizado la acción que le permite distinguir que la pregunta cuatro debía resolverse por casos y no tiene orden. Sin embargo, la pregunta ocho la resuelve con orden. Al parecer no ha interiorizado dichas acciones en un proceso de conteo que le permita reconocer cuando un problema tiene o no orden.

ERICK

Pregunta 4. Reconoce que no existe el orden y utiliza la fórmula de combinaciones. No necesita desglosar el problema para contar. Sin embargo, resuelve incorrectamente pues no separa en casos.



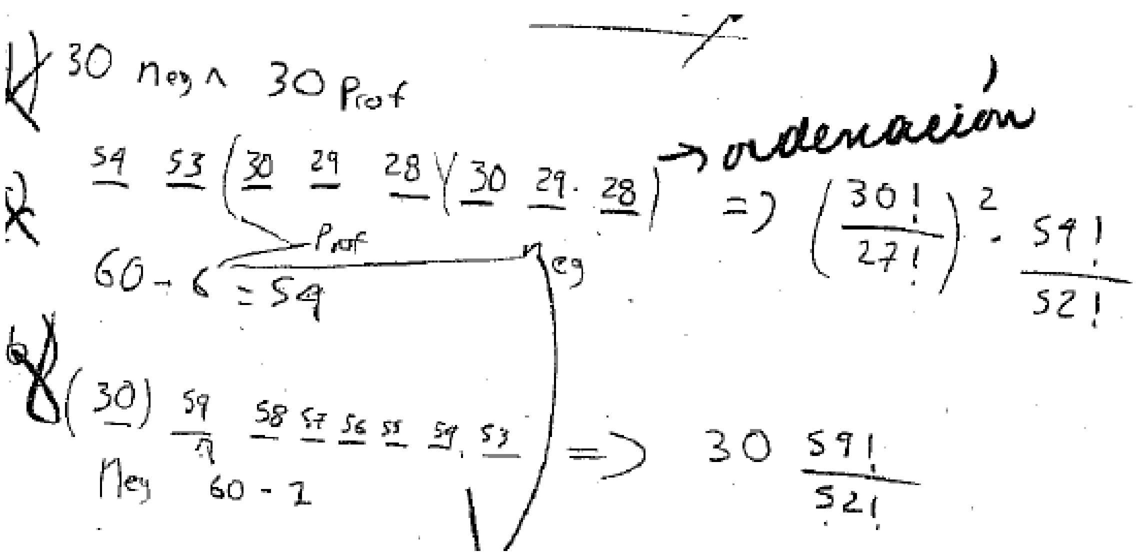
Pregunta 8. Resuelve como combinación, pero no reconoce que existen objetos idénticos. La acción de reconocer objetos idénticos es importante pues indica que debe utilizarse la fórmula de combinaciones con repetición.



Este alumno reconoce que no existe el orden y utiliza la fórmula de combinaciones. Sin embargo, resuelve de forma incorrecta pues en la pregunta cuatro no divide en casos y en la pregunta ocho al existir objetos idénticos debe usarse la fórmula de combinación pero con repetición.

Ahora se analizará el grupo en general.

Pregunta 4. a) Dos alumnos resuelven como ordenación ambos incisos, a continuación se presenta la solución de uno de ellos.



Los demás reconocen que no existe el orden y utilizan la fórmula de combinaciones; sin embargo, dos alumnos admiten las repeticiones en las personas y utilizan combinaciones con repetición. Nuevamente se observa que los estudiantes no necesitan escribir algunos casos para resolver el problema. La forma correcta de resolverlo era por casos, pero varios alumnos no se dan cuenta de ello. Para los alumnos sigue siendo difícil reconocer cuándo un problema debe dividirse por casos para que ciertas combinaciones no se repitan. b) Ningún alumno necesita desglosar el problema para resolverlo. Quince alumnos lo resuelven correctamente ya sea por casos o restando del total.

Ha habido un periodo de reflexión y los alumnos no necesitan hacer la acción de escribir los casos para contar físicamente. Han interiorizado dichas acciones y son capaces de ver que no existe el orden y de usar correctamente la fórmula. Sin embargo, muchos de ellos no han interiorizado la acción de separar en casos el problema.

Pregunta 8. Esta pregunta estaba en la serie de problemas sin orden que los alumnos habían resuelto anteriormente. Dos alumnos resuelven como ordenación con repetición, a continuación se presenta la solución de uno de ellos.

4^{20} 4 = cofres y 20 monedas a escojer

Otros dos resuelven como combinación, pero no reconocen que existen objetos idénticos por lo que no utilizan la fórmula de combinaciones con repetición.

4 cofres de piratas
monedas de uno, cinco, diez y veinticinco ¢
cada niño escoge veinte monedas en total

$\binom{20}{4}$ ya que puedes escoger veinte objetos (monedas) de 4 cofres

Los demás resuelven correctamente, escriben la ecuación y la fórmula de combinación con repetición. Al parecer han interiorizado las acciones de conteo y desglose de casos en un proceso que les permite aplicar la fórmula correcta.

3.4 ANÁLISIS DEL EXAMEN FINAL

El examen final de Álgebra Superior I en el ITAM es el mismo para todos los grupos, con el fin de tener mayor información para este trabajo, se agregó una pregunta de conteo, la número quince de la serie de problemas con orden, para poder analizarla y comparar los resultados obtenidos con el resto de la información mencionada en la metodología. El examen final fue presentado por veintisiete alumnos, de entre ellos, solamente uno no resolvió esta pregunta. Para esta parte se analizarán las respuestas de los alumnos Carlos, David y Dulce quienes fueron estudiados en las etapas anteriores. No se analizará la respuesta de Erick puesto que no presentó el examen final.

A continuación se muestra la pregunta y su solución, para más adelante hacer el análisis.

¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?
Solución: $9 + 9^2 + 9^2(8) = 738$ *números con dígitos distintos.*

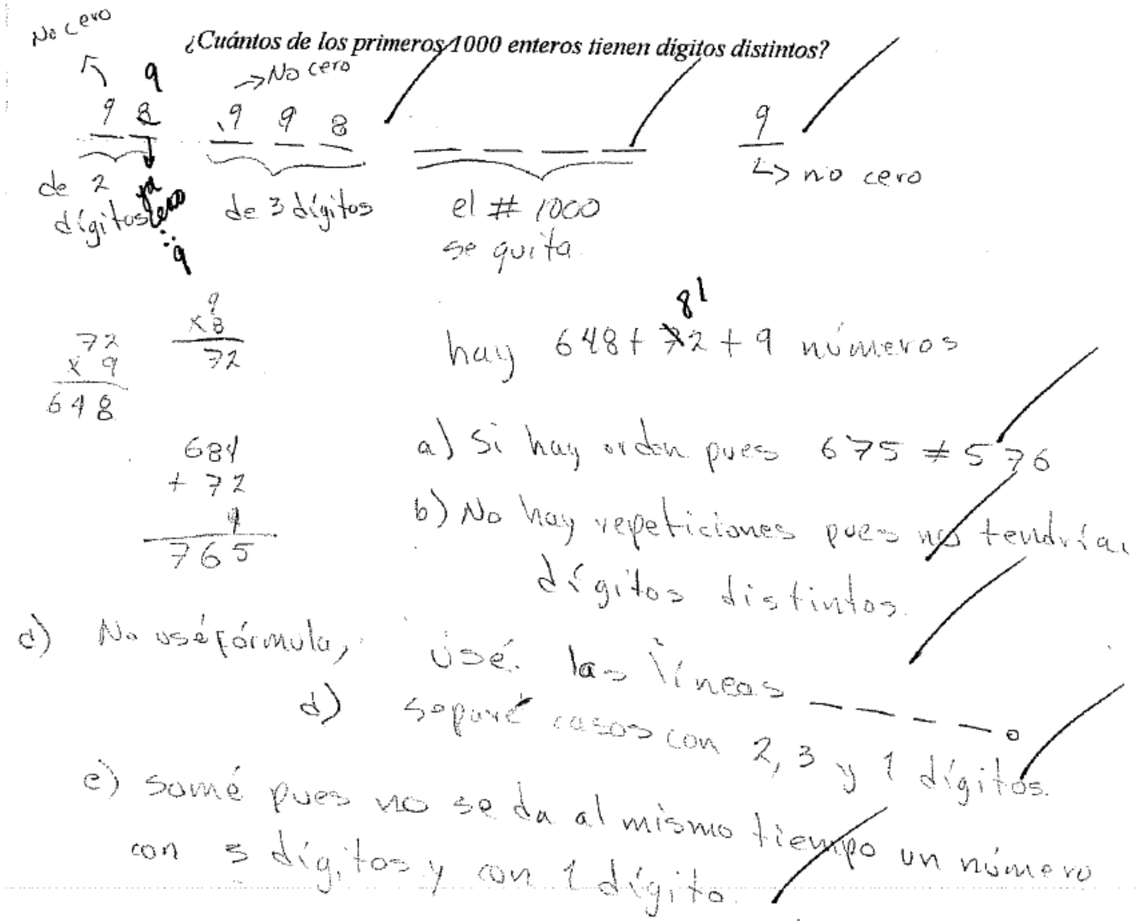
Antes de hacer el análisis de la pregunta debe notarse que es una pregunta donde el orden existe, por lo que debe resolverse con la fórmula de ordenaciones, pero no puede aplicarse dicha fórmula directamente sino que debe dividirse el problema en tres casos. Caso uno: números de un dígito. Caso dos: números de dos dígitos. Caso tres: números de tres dígitos. Los casos son excluyentes por lo que deben sumarse.

No puede resolverse como un solo caso: $10 \cdot 9 \cdot 8$ pues se cuentan menos números de los posibles. Al considerar solamente números de tres dígitos los números del cero al nueve serían 001, 002, 003, 004, …, 009 y como tienen dos ceros no se contarían pues se piden dígitos distintos. Asimismo los números 010, 020, … , 090 tampoco se tomarían en cuenta. Por lo anterior, es necesario que este problema se divida en casos para no tener números que no se cuenten.

El análisis de la pregunta por alumno se considera en lo que sigue.

CARLOS

Reconoce que hay orden, no se permiten las repeticiones y que existen distintos casos.


¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?

No cero

9 8 de 2 dígitos

→ No cero

9 9 8 de 3 dígitos

_ _ _ _ el # 1000 se quita

9 → no cero

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 9 \\ \hline 648 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ \times\ 8 \\ \hline 72 \end{array}$$

hay 648 + ~~72~~ 81 + 9 números

$$\begin{array}{r} 684 \\ +\ 72 \\ 9 \\ \hline 765 \end{array}$$

a) Si hay orden pues 675 ≠ 576

b) No hay repeticiones pues no tendrían dígitos distintos.

d) No usé fórmula, usé las líneas _ _ _ _.

d) Separé casos con 2, 3 y 1 dígitos.

e) Sumé pues no se da al mismo tiempo un número con 3 dígitos y con 1 dígito.

Reconoció que es una ordenación sin repetición y que debe dividirse en tres casos. Explica claramente su solución. Aunque tiene un error muestra que, al parecer, ha interiorizado las acciones en un proceso que le permite dividir en casos y hacer los productos relevantes.

DAVID

Se da cuenta de que existe el orden, aunque la explicación que da para esta parte es incorrecta. Reconoce que no hay repetición por lo que el número de dígitos disminuye. Sin embargo, resuelve de forma incorrecta pues no divide en casos.

Pide que de los primeros 1000. busca cuáles son distintos.

Si hay orden, ya que tomas un número y en consecuencia el sig. no lo puede tomar y el que sigue tampoco. esto sería repeticiones. No orden

Orden significa que por ej. $12 \neq 21$.

∴ No hay repetición, ya que pide que tengan dígitos distintos.

No use fórmula, porque al momento de poner el primer número

me doy cuenta, que en el sig espacio se elimina el anterior y el tercero.

es igual.

Los únicos casos que podrán existir son los primeros 10 ya que

sería si está el 0, queda 2 espacios para los del 1-9 y

el tercer espacio para 1-9, sin el anterior.

En caso de que no sea 0 el 1er número el 2do tendría 0-9. sin

tomar el 1er número

. dos casos se multip. ya que pasa todo simultáneamente.

Por lo tanto la Respuesta

es.

$\underline{10} \quad \underline{9} \quad \underline{8}$

1 ① ②

Por la primera cifra entre (0-9). = 10.

① por que sólo quedan (0-9) sin tomar el primero. = 9

② sólo queda (0-9) sin tomar los 2 primeros = 8

Este alumno respondió de forma incorrecta. Reconoció que es una ordenación sin repetición, pero no divide en tres casos. Parece que no ha interiorizado la acción de dividir en casos en un proceso, aunque aplica correctamente la fórmula y entiende sus componentes, lo que indica que posiblemente ha interiorizado las acciones involucradas en la fórmula en un proceso.

<u>DULCE</u>

Reconoce que hay orden y no se permiten las repeticiones. Divide correctamente en casos.

¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?

1 dígito: $\underline{10}$ 10 2 dígitos: $\underline{9}$ $\underline{9}$ 9^2

3 dígitos: $\underline{9}$ $\underline{9}$ $\underline{8}$ $9^2 \cdot 8$ Sol: $10+9^2+9^2 8$

① Si hay orden porque si muevo los lugares se forman números diferentes

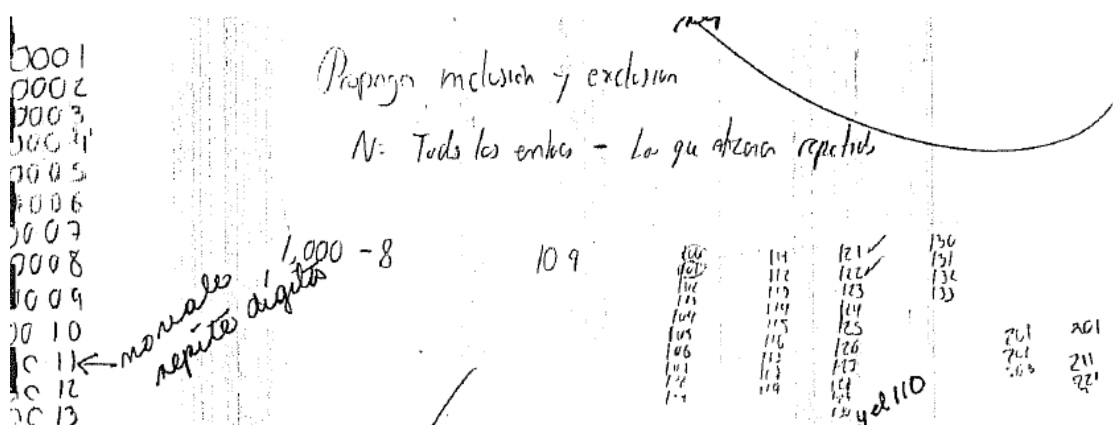
② No hay repeticiones porque me piden que los dígitos sean distintos ∴ si ya utilice un número en el siguiente lugar no puedo poner el mismo, tienes que ser uno diferente.

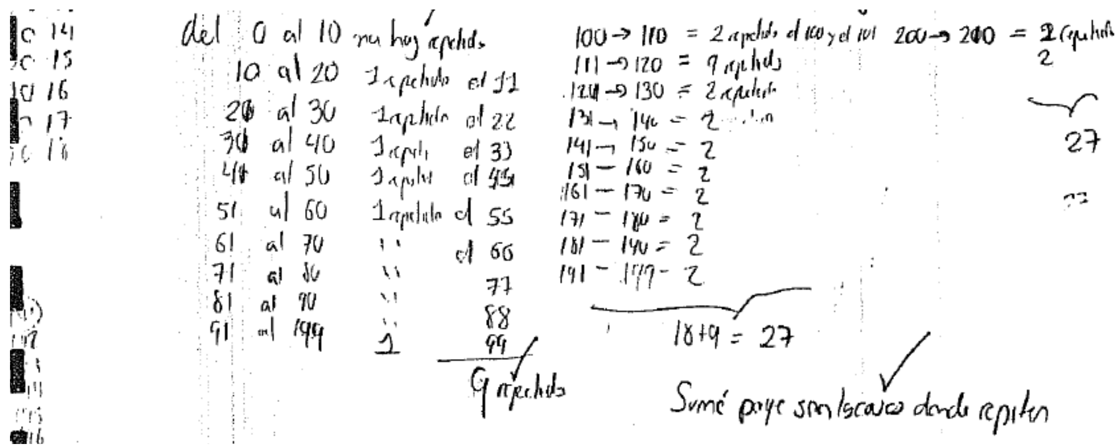
No utilice fórmula porque no es necesaria y puedo resolverlo por caso en el primer caso tome los números de un solo dígito que menores a 1000 y tomando en cuenta el número cero son 10. En el segundo caso tome los números de dos dígitos; en el primer lugar quite el cero porque entonces seria un número de un dígito. En el tercer caso tome los numeros de 3 digitos y al final uní las soluciones con una suma porque es una "o" es decir que solo se puede utilizar una de los 3 casos para que no se repitan los dígitos.

Esta alumna respondió de forma correcta y explicó todo el proceso de solución. Reconoció que el problema requiere la fórmula de ordenación sin repetición y que debe dividirse en tres casos. Al parecer ha interiorizado las acciones en un proceso que le permite dividir en casos y hacer los productos relevantes.

Se presenta a continuación el análisis del grupo en general.

Un alumno intenta escribir todos los casos para contarlos, al parecer, no ha logrado interiorizar las acciones en un proceso pues necesita desglosar el problema para físicamente contar.

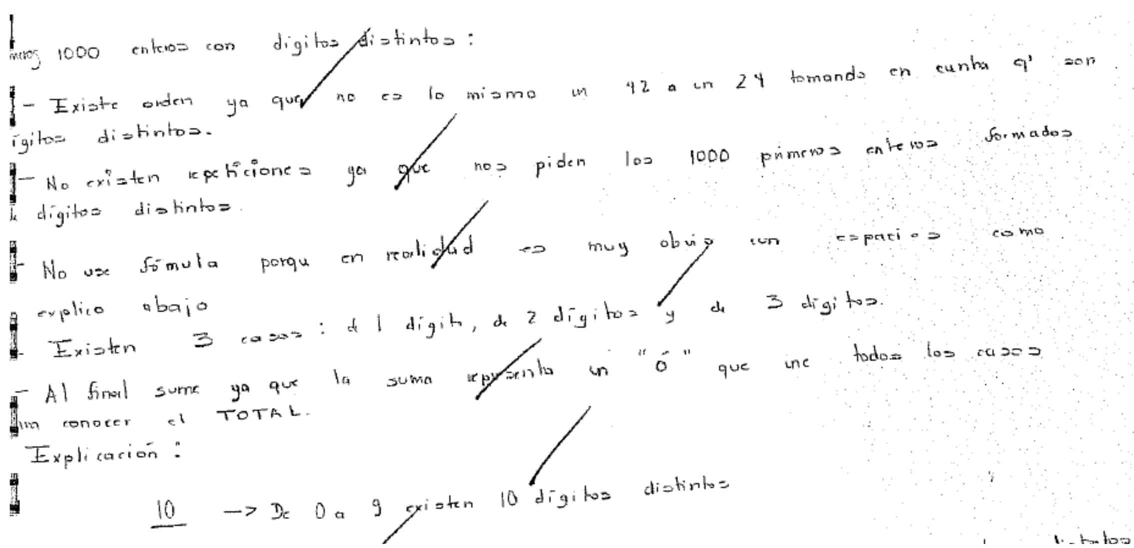




del 0 al 10 no hay repetidos
10 al 20 1 repetido el 11
20 al 30 1 repetido el 22
30 al 40 1 repetido el 33
41 al 50 1 repetido el 44
51 al 60 1 repetido el 55
61 al 70 el 66
71 al 80 77
81 al 90 88
91 al 99 1 99
9 repetidos
100 → 110 = 2 repetidos el 100 y el 101
111 → 120 = 9 repetidos
121 → 130 = 2 repetidos
131 → 140 = 2
141 → 150 = 2
151 → 160 = 2
161 → 170 = 2
171 → 180 = 2
181 → 190 = 2
191 → 199 = 2
200 → 200 = 2 repetidos
18+9 = 27
27
Sumé porque son los casos donde repiten

Para resolver este problema se necesitaba desglosarlo en tres casos: números de uno, dos y tres dígitos. Quince alumnos reconocieron la existencia de estos tres casos, mientras que diez alumnos no lo hicieron y resolvieron el problema con un solo caso. Sin embargo, todos reconocieron que el número de dígitos posibles dependía de si se trataba de centenas, decenas o unidades.

Durante el examen se pidió a los alumnos que explicaran todo su procedimiento. A continuación se muestra el caso de una alumna que resuelve y explica correctamente.



1000 enteros con dígitos distintos:
- Existe orden ya que no es lo mismo un 42 a un 24 tomando en cuenta q' son dígitos distintos.
- No existen repeticiones ya que nos piden los 1000 primeros enteros formados de dígitos distintos.
- No use fórmula porque en realidad es muy obvio con espacios como explico abajo
- Existen 3 casos: de 1 dígito, de 2 dígitos y de 3 dígitos.
- Al final sume ya que la suma representa un "ó" que une todos los casos sin conocer el TOTAL.
Explicación:
10 → De 0 a 9 existen 10 dígitos distintos

$9 \quad 9$ → De 2 dígitos hay $9^2 = 81$ números con dígitos distintos sin contar el 0 en el primer espacio, ya q' entonces sería un número de un dígito.

↓ sin el 0 ↓ sin el primero pero si 0

$9 \quad 9 \quad 8$ → De 3 dígitos hay $9^2 \cdot 8 = 648$ números con dígitos distintos.

↓ sin el 0 ↓ sin el primero pero si 0 ↓ sin los dos primeros.

∴ La sol $10 + 81 + 648 = 739$ números de los primeros 1000 con dígitos distintos

Así como el de una alumna que resuelve como un solo caso.

como deben ser distintos hacemos los primeros 999 y no cambia.

$\underline{10} \quad \underline{9} \quad \underline{8} = (10)(9)(8)$

a)- Si hay orden ya q' no es el mismo número 987 q' 789

b) No hay repeticiones ya q' los dígitos deben ser distintos, si ocupo un dígito en el primer lugar ya no lo puedo repetir

c) No use formula

d) Lo resolví por casillas como son los primeros 1000 núm. puedo tomar 999 sin afectar el total. y ocupan 3 casillas en la primer casilla pueden ir 10 dígitos, en la segunda como ya ocupe un dígito solo puedo ocupar 9 y así en la 3 solo 8.

e) —

f) Multipliqué xq' es y' multipliqué porq' pueden ir distintos números en cada casilla.

Al parecer ambas alumnas han reflexionado y no necesitan hacer la acción de escribir los casos para contar físicamente. También, se han dado cuenta que el lugar dentro del número determina los dígitos que pueden usarse. Han logrado interiorizar estas acciones en un proceso.

3.5 DISCUSIÓN

En este capítulo se analizaron las respuestas de los alumnos del semestre agosto – diciembre del 2006 a las diversas actividades diseñadas con base en la descomposición genética para construir los conceptos relacionados con el conteo. A lo largo del análisis se hizo evidente que la acción de desglosar el problema para contar físicamente fue interiorizada, probablemente, por la mayoría de los alumnos, en un producto que les permitía encontrar la solución. El uso correcto de las fórmulas y la explicación de los distintos componentes de ellas indican que los alumnos han reflexionado sobre las acciones que a lo largo del trabajo sobre el tema han tenido oportunidad de realizar. Esta reflexión les ha permitido, al parecer, interiorizar dichas acciones en un proceso con el que pueden distinguir qué fórmula usar en cada problema y cómo aplicarla correctamente.

Si comparamos los resultados de los alumnos en las actividades relacionadas a problemas donde el orden es importante con los problemas donde no lo es, parece que han reflexionado sobre las acciones de suma y enumeración de casos y las han interiorizado en un proceso en el que generalizan estas acciones pues, al resolver la serie de problemas donde el orden no existe van dejando progresivamente de contar físicamente.

Sin embargo, la serie diseñada con los ejercicios donde el orden no existe fue resuelta por muy pocos alumnos la primera vez que la intentaron. La maestra se percató de que el hecho de que el orden no fuera importante orden causó que los alumnos tuvieran dificultades y no supieran cómo enfrentar estos problemas. Con el análisis teórico se estudió la información recabada para averiguar si los alumnos efectivamente llevaban a cabo las construcciones mentales que se habían propuesto en la descomposición genética al aprender estos conceptos. El resultado de este estudio mostró que dicha descomposición no incluía la necesidad de hacer acciones específicas que permitieran a los alumnos distinguir entre los ejercicios que incluyen orden y los que no lo incluyen. Esta conclusión llevó a que se revisará la descomposición genética y se hicieron algunos cambios con el fin de refinarla y que diera cuenta de mejor manera de las observaciones del trabajo con los alumnos. Una vez refinada la descomposición genética, se decidió cambiar la serie de problemas sin orden y llevar a cabo una segunda experiencia para probar si de esta manera la descomposición genética daba cuenta de las acciones de los alumnos. También para analizar si la inclusión de problemas distintos permitía a los alumnos avanzar en la comprensión de los conceptos relacionados con el orden.

Para la segunda experiencia (semestre enero – mayo del 2007) se aplicó la misma serie de problemas con orden, pero se diseñó una nueva segunda serie que incluyera problemas con y sin orden. La finalidad de esta nueva serie es, cómo se mencionó, lograr que los alumnos diferencien un problema con orden de otro sin orden.

Antes de presentar el examen de conteo los alumnos de la primera experiencia (semestre agosto – diciembre del 2006) han tenido la oportunidad de resolver varios problemas con y sin orden, han estudiado y la maestra les resolvió dudas en una clase de dos horas. Los resultados del análisis que se ha presentado en este capítulo permite observar que al resolver el examen, los alumnos dan muestras de haber evolucionado en el conocimiento del tema de conteo: ordenaciones y combinaciones. En un principio la mayoría de los alumnos realizaba un diagrama ó un dibujo ó escribía los casos como acción para desglosar el problema y contarlos físicamente. Más adelante, interiorizan estas acciones en un proceso que les permite encontrar el resultado por medio de un producto. En este examen, muy pocos alumnos hacen un diagrama, algunos solamente lo usan para comprobar su respuesta. Al parecer han tenido oportunidad de reflexionar sobre sus acciones interiorizándolas en un proceso que les permite resolver los problemas usando las fórmulas adecuadas y mostrando comprensión de sus distintas componentes.

Cuando los alumnos resuelven el examen final han reflexionado sobre las acciones que realizaron durante la puesta en práctica del diseño de clase y aparentemente las han interiorizado en el proceso que les permite escribir directamente la fórmula que corresponde al problema y resolver correctamente. También, se han dado cuenta que las opciones de dígitos en las centenas, decenas y unidades depende de si se trata de un número de uno, dos ó tres dígitos. Se puede concluir que los alumnos han logrado interiorizar algunas acciones en un proceso.

Solamente un alumno no logró hacer la interiorización comentada anteriormente y su estrategia de solución continuó ligada a la acción de contar los casos explícitamente ó hacer un diagrama del cual sea posible contar.

La maestra ha impartido este curso durante varios años y el promedio del examen de conteo, generalmente, era de seis o menos. En el semestre que se reporta en este capítulo el promedio de los alumnos fue de 8.06, muy por encima de lo esperado. Parece que los alumnos entendieron mejor este tema al tener la oportunidad, a través del trabajo con las actividades diseñadas con base en la descomposición genética, de hacer repetidamente acciones de conteo y de reflexionar sobre ellas hasta lograr, en la mayoría de los casos, interiorizarlas.

Uno de los aspectos importantes de la Teoría APOE consiste en la necesidad de poner a prueba con estudiantes la descomposición genética diseñada, para verificar si las hipótesis que contiene respecto a las construcciones mentales de los alumnos se ven reflejadas a través del proceso de aprendizaje. De no ser así, la teoría sugiere refinar la descomposición genética. El análisis de todas las tareas que los estudiantes llevaron a cabo durante el semestre y que se relatan en este capítulo llevó justamente a refinar la descomposición genética y diseñar una nueva serie de actividades que incluyera problemas con y sin orden con la finalidad de que los alumnos reconozcan esta diferencia. En la segunda experiencia, semestre enero – mayo del 2007, se aplicó esta nueva serie y se utilizó la misma serie de problemas con orden, para comparar los resultados. Estos se muestran en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA SEGUNDA EXPERIENCIA

Se hará el análisis con la Teoría APOE de los problemas con orden, con y sin orden, del examen de conteo y del examen final.

4.1 ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE CONTEO CON ORDEN

Se aplicó, nuevamente, la serie con orden a los alumnos del semestre enero - mayo del 2007 en el ITAM en la materia Álgebra Superior I.

En esta sección se analizará la serie de problemas con orden. Esta serie está diseñada para el estudio del tema de ordenaciones. El análisis se hará igual al del semestre anterior (primera experiencia) en las etapas uno, dos y tres con las mismas preguntas. La etapa cuatro no se analizó por tener resultados muy semejantes al semestre anterior. Los alumnos resolvieron primero esta serie.

ETAPA 1. Problemas resueltos en clase por equipo antes de impartir el tema.

Los alumnos resolvieron primero la serie de problemas con orden. En esta etapa el maestro repartió entre los alumnos la serie y les pidió que entregaran todo lo que escribían, independientemente de que pensaran que era un procedimiento correcto o no. Se analizarán las preguntas 3, 6, 8 y 13 en los equipos uno (solución regular), cuatro (solución buena) y cinco (solución buena). A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

<u>*PREGUNTA 3*</u>

Los coches marca BMW se producen en cuatro modelos, de ocho colores, tres potencias de motor y dos tipos de transmisión.

a) *¿Cuántos coches distintos pueden fabricarse?*

b) *¿Cuántos coches distintos de color azul se pueden fabricar?*

c) *¿Cuántos coches distintos de color azul y potencia de motor V-8 pueden fabricarse?*

Solución:

a) *$4 \times 8 \times 3 \times 2 = 192$ coches distintos.*

b) *$4 \times 3 \times 2 = 24$ coches azules.*

c) *$4 \times 2 = 8$ coches azules y motor V-8.*

<u>*PREGUNTA 6*</u>

En cierta transmisión existen dos sonidos, uno corto, llamado estrella y uno largo, llamado diagonal. Con estos sonidos pueden formarse señales de uno, dos ó tres sonidos. ¿Cuántas señales de un sonido, de dos sonidos y de tres sonidos existen?

Solución: 2 señales de un sonido, $2 \times 2 = 4$ señales de dos sonidos y $2 \times 2 \times 2 = 8$ señales de tres sonidos.

<u>*PREGUNTA 8*</u>

Las placas de los coches en una ciudad son de tres letras. Si se usa el alfabeto de veintiséis letras, ¿cuántas:

a) *placas distintas hay?*

b) *placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con una vocal?*

c) *si no se permiten las repeticiones, ¿cuántas placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con la letra q? ¿Cuántas terminan con vocal?*

Solución:

a) *$26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17576$ placas distintas.*

b) *$26 \times 26 = 26^2 = 676$ placas que comienzan con q. $26 \times 26 \times 5 = 5 \times 26^2 = 3380$ placas que terminan con vocal.*

c) *$25 \times 24 = 600$ placas que comienzan con q. $25 \times 24 = 600$ placas que terminan con q. $25 \times 24 \times 5 = 3000$ placas que terminan con vocal.*

PREGUNTA 13

Con las letras de la palabra dedo, ¿cuántas

a) palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son distintas?

b) palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son iguales?

Solución:

a) $4! = 24$ palabras.

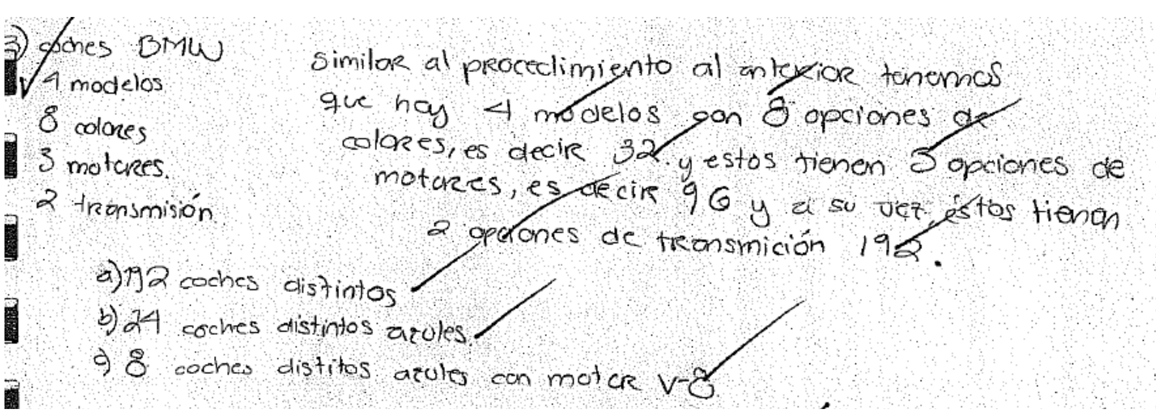
b) $\frac{4!}{2!} = 12$ palabras distintas.

El análisis de las preguntas por equipo es el siguiente.

EQUIPO 1

Este equipo está formado por cinco alumnos que obtuvieron 5.4, 10, 10, 8.3 y 9.8 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10. No se analizará la pregunta 13 pues no la resolvieron.

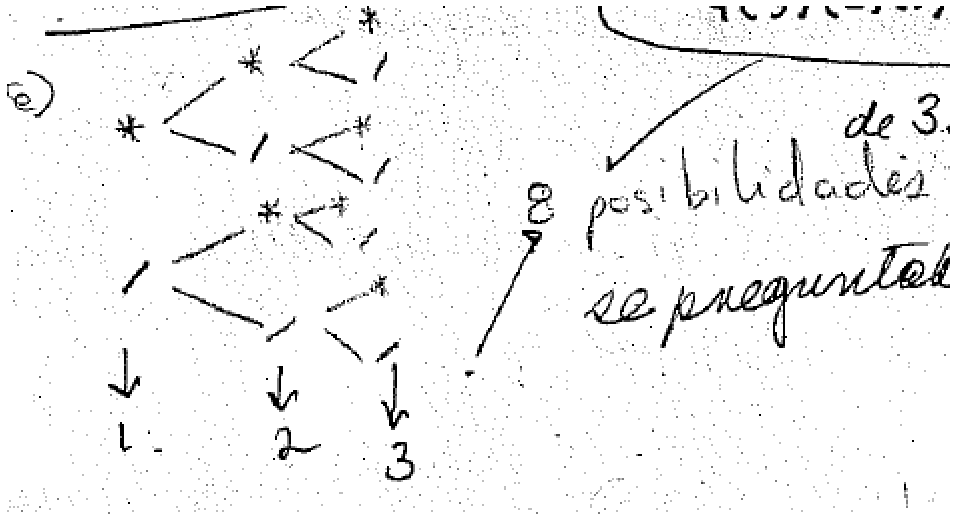
Pregunta 3. Los miembros del equipo en la pregunta dos hacen como acción un diagrama para desglosar el problema. Al parecer traducen el diagrama en un producto y multiplican para encontrar el resultado correcto. Al contestar esta pregunta hacen referencia a lo que hicieron en la pregunta anterior y responden los tres incisos con el producto de los datos relevantes en cada uno para encontrar el resultado correcto.


3) coches BMW
4 modelos
8 colores
3 motores.
2 transmisión

Similar al procedimiento al anterior tenemos que hay 4 modelos con 8 opciones de colores, es decir 32 y estos tienen 3 opciones de motores, es decir 96 y a su vez éstos tienen 2 opciones de transmición 192.

a) 192 coches distintos
b) 24 coches distintos azules.
c) 8 coches distitos azules con motor V-8.

Pregunta 6. Hacen la acción de dibujar un árbol con uno, dos y tres sonidos para desglosar el problema y contar físicamente. Solamente responden el caso de tres sonidos.



Pregunta 8. a) y b) Resuelven con el producto de las letras que pueden ir en cada lugar.

8) a) 17,576 posibi $= 26 \times 26 \times 26 = 26^3$

b) $1 \cdot 26 \cdot 26$ y $26 \cdot 26 \cdot 5$

empiezan con g 676 y · 3380 terminan en vocal tomando en cuenta que en la primera letra se toma la posibilidad de 26 letras en el primer dígito

c) a b c

$1 \cdot 25 \cdot 25$ menos los 25

c) Responden restando del total los casos donde hay repeticiones. La última parte la responden de forma incorrecta, pero al parecer es un error de operación pues multiplicaron correctamente en las demás partes de esta pregunta.

c) a b c — en el primer dígito
1·25·25 menos las 25 repeticiones que puede haber
24 24 5 . en los dos últimos dígitos
5 24=600
quitas la que pusiste en el 2° lugar.
lo mismo que 1 25 25 - 25 = 600

- 600 posibilidades de placas que comienzan con la letra a
- 600 placas terminan con la letra a.
- 2184 terminan con vocal 5 25 24 = 3000

Los miembros de este equipo en la pregunta 6 hicieron un árbol para desglosar el problema y contar físicamente todos los casos. Sin embargo, en las preguntas 3 y 8 utilizaron productos y explicaron de forma correcta su procedimiento por lo que parece que han interiorizado dichas acciones en un proceso.

EQUIPO 4

Este equipo está formado por seis alumnos que obtuvieron 9.7, 5.3, 10, 5.1, 9.4 y 4.5 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.

Pregunta 3. Los miembros de este equipo hacen la multiplicación de los datos relevantes en cada inciso.

3) a) 4×8×3×2 = 192
b) 4×3×2 = 24
c) 4×2 = 8

Pregunta 6. Los miembros de este equipo responden con la potencia 2^n de forma correcta.

6) Un sonido $= 2^1$

Dos sonidos $= 2^2$.

Tres sonidos $= 2^3$.

Pregunta 8. Los miembros de este equipo responden multiplicando los datos relevantes en cada inciso.

8) a) $26 \times 26 \times 26 = 17576$

b) 1) $26 \times 26 = 676$ 2) $26 \times 26 \times 5 = 3380$

c) 1) $4 \times 25 \times 24 = 600$ = 2) $\underline{25}\ \underline{24}\ \underline{1}$ idem

3) $25 \times 24 \times 5 = 3000$

Pregunta 13. a) Responden multiplicando y no explican su procedimiento.

13) a) $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

b) Hacen un producto pero incorrecto.

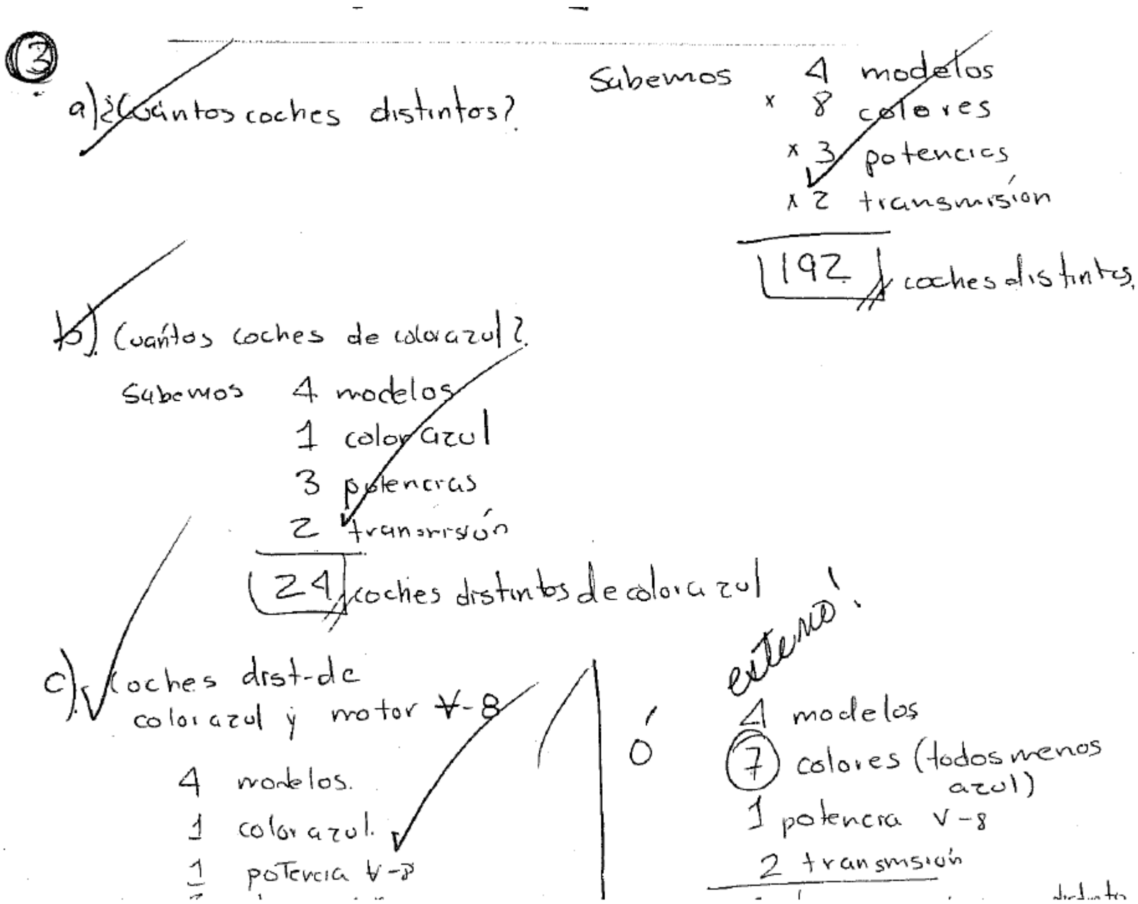
b) $3 \times 2 \times 1 = \cancel{6}$

Los miembros de este equipo no necesitaron hacer la acción de desglosar los problemas para contar físicamente. Puede notarse que algunos de ellos tenían conocimiento del tema pues en la pregunta 6 responden, al parecer, con la fórmula correcta, ordenación con repetición. Sin embargo, no se pueden analizar sus respuestas con detalle pues en general dieron respuestas, en la mayoría de los casos correctas, pero sin explicar su procedimiento. Aparentemente no requieren hacer las acciones físicas para contar y se puede concluir que las han interiorizado en un proceso.

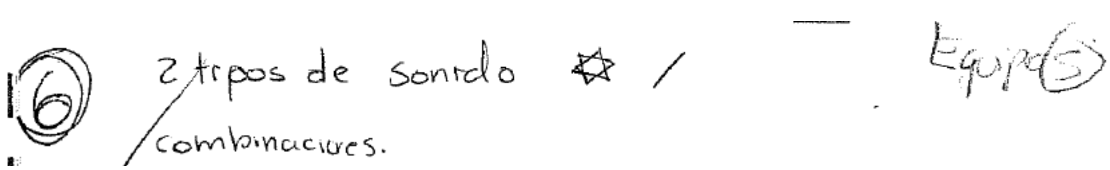
EQUIPO 5

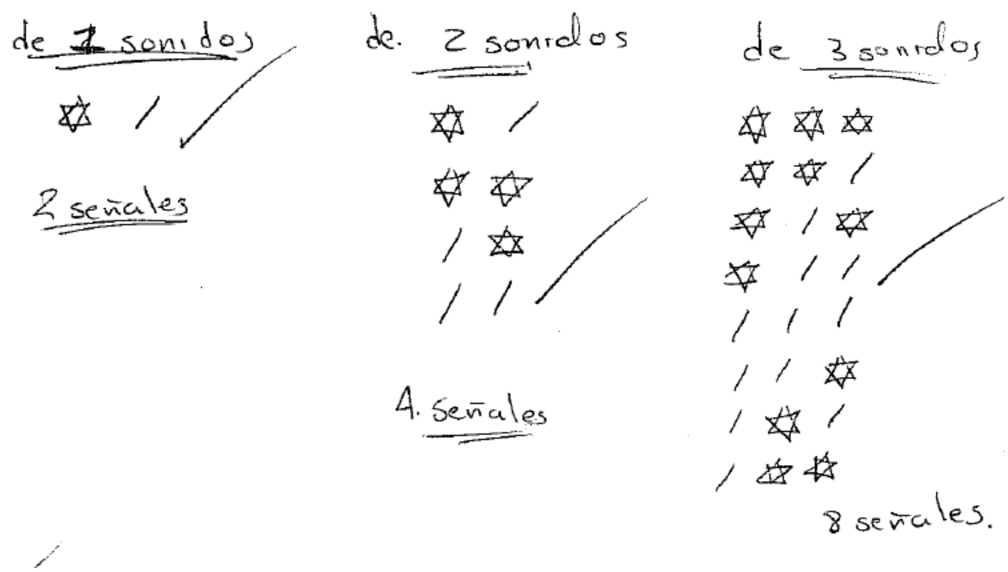
Este equipo está formado por cinco alumnos que obtuvieron 7.8, 5.2, 6.6, 7.3 y 6.9 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.

Pregunta 3. Los miembros de este equipo reconocen los datos relevantes en cada inciso y multiplican para encontrar las respuestas correctas.

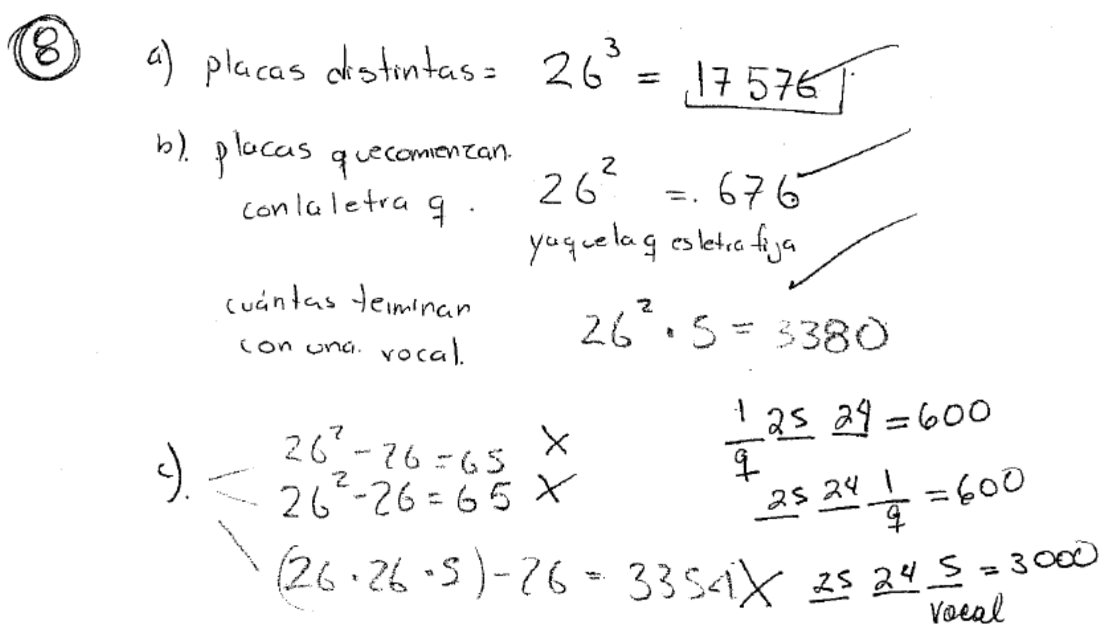

3
a) ¿Cuántos coches distintos?
Sabemos 4 modelos
x 8 colores
x 3 potencias
x 2 transmisión
$\boxed{192}$ coches distintos.
b) Cuántos coches de color azul?
Sabemos 4 modelos
1 color azul
3 potencias
2 transmisión
$\boxed{24}$ coches distintos de color azul
c) Coches dist de color azul y motor V-8
4 modelos.
1 color azul.
1 potencia V-8
ó
¡externo!
4 modelos
7 colores (todos menos azul)
1 potencia V-8
2 transmisión

Pregunta 6. Hacen la acción de escribir las señales de uno, dos y tres sonidos para desglosar el problema y contar físicamente.


6
2 tipos de sonido ✡
combinaciones.
Equipo 5

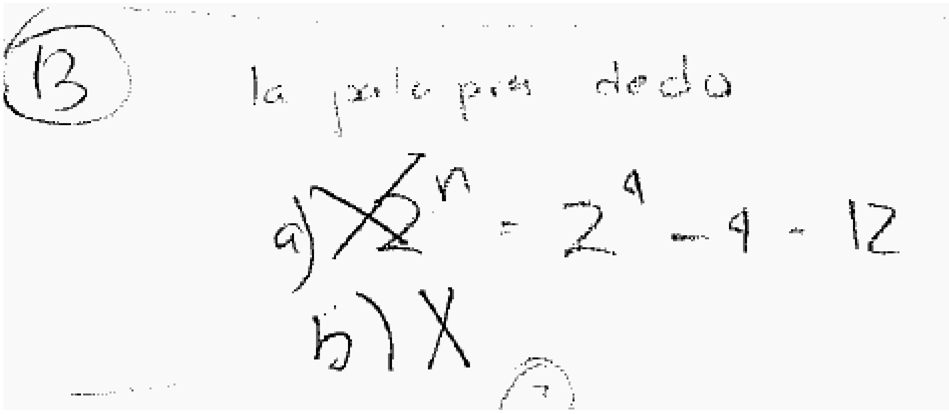


Pregunta 8. Los miembros del equipo responden multiplicando los datos relevantes.



Pregunta 13. a) Los miembros del equipo al contestar la pregunta anterior, sin explicar porqué, escriben que 2^n es el número de palabras que se pueden formar. Esto es incorrecto. En este inciso utilizan esa solución que propusieron y restan cuatro, al parecer

por la letra repetida. b) No lo resuelven. Parece que no supieron cómo enfrentar este problema, pues ni siquiera escribieron algunas palabras para contarlas.



Los miembros de este equipo hicieron el producto para encontrar la respuesta de las preguntas 3, 8 y 13, aunque ésta última de forma incorrecta. Sin embargo, en la pregunta 6 escribieron todos los casos como acción para desglosar el problemas y contar físicamente. Esto puede deberse a que en esta pregunta el número de soluciones era muy pequeño (2, 4 y 8 señales). Aunque respondieron algunas preguntas como productos y se observa algo de reflexión sobre la acción de contar, en otros casos llevan a cabo las acciones o utilizan fórmulas de manera incorrecta; por ello no se puede concluir que han interiorizado dichas acciones en un proceso.

ETAPA 2. Problemas resueltos en clase mediante discusión global.

En esta etapa se impartió la clase sobre el tema de ordenaciones, es decir donde existe orden. Esta clase consistió en resolver, junto con los alumnos a través de una discusión en grupo, los problemas 1, 2, 6, 8 y 10 de la serie de problemas con orden sin mencionar explícitamente las definiciones de los conceptos involucrados. Los problemas se resolvieron en el pizarrón, lo que generó discusión entre los alumnos cuando no lo habían resuelto de la misma manera. Al ir avanzando se les preguntaba si existía alguna forma general de resolverlos para conducirlos a encontrar las fórmulas.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 1

Se va a escoger un representante de alumnos de las carreras de matemáticas y actuaría. En la carrera de matemáticas hay cincuenta y cinco alumnos y en la de actuaría hay veinticinco alumnos. ¿Cuántos candidatos hay?

Solución: 55 + 25 = 80 candidatos.

PREGUNTA 2

Una tienda tiene seis puertas. ¿De cuántas maneras es posible entrar por una puerta y salir por otra?

Solución: 6 x 5 = 30 formas distintas.

PREGUNTA 6

En cierta transmisión existen dos sonidos, uno corto, llamado estrella y uno largo, llamado diagonal. Con estos sonidos pueden formarse señales de uno, dos ó tres sonidos. ¿Cuántas señales de un sonido, de dos sonidos y de tres sonidos existen?

Solución: 2 señales de un sonido, 2 x 2 = 4 señales de dos sonidos y 2 x 2 x 2 = 8 señales de tres sonidos.

PREGUNTA 8

Las placas de los coches en una ciudad son de tres letras. Si se usa el alfabeto de veintiséis letras, ¿cuántas:

a) *placas distintas hay?*
b) *placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con una vocal?*
c) *si no se permiten las repeticiones, ¿cuántas placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con la letra q? ¿Cuántas terminan con vocal?*

Solución:

a) *26 x 26 x 26 =* 26^3 *= 17576 placas distintas.*
b) *26 x 26 =* 26^2 *= 676 placas que comienzan con q. 26 x 26 x 5 = 5 x* 26^2 *= 3380 placas que terminan con vocal.*
c) *25 x 24 = 600 placas que comienzan con q. 25 x 24 = 600 placas que terminan con q. 25 x 24 x 5 = 3000 placas que terminan con vocal.*

PREGUNTA 10

Un profesor de matemáticas tiene siete libros en su librero. Tres son de matemáticas discretas y cuatro de álgebra superior. ¿De cuántas formas puede ordenar los libros si:

a) *no hay restricciones?*
b) *si se deben alternar las materias?*
c) *si todos los libros de matemáticas discretas deben estar juntos?*
d) *si todos los libros de álgebra superior deben estar juntos y los de matemáticas discretas también?*
e) *si los libros de matemáticas discretas deben colocarse de forma que tengan dos libros de álgebra superior a cada lado?*

Solución:

a) *7! formas de ordenar los libros.*
b) *4!3! formas de alternar las materias.*
c) *5!3! formas de poner los libros de matemáticas discretas juntos.*
d) *2!4!3! formas de poner los libros de matemáticas juntos y de álgebra juntos.*
e) *3!4! formas de poner dos libros de álgebra a cada lado de los libros de matemáticas.*

Durante la discusión en grupo el maestro fue haciendo distintas preguntas. Se plantearon primero los problemas y la maestra preguntó cómo los habían resuelto por equipos. Algunos alumnos hablan de desglosar los problemas para contar físicamente, pero la mayoría hace multiplicaciones para resolverlos. El maestro fue anotando las preguntas, las respuestas y la discusión de cada problema para hacer el análisis correspondiente.

El análisis de las preguntas es el siguiente.

Pregunta 1. La mayoría de los alumnos reconoció al “o” como una suma e hicieron la acción de sumar los posibles candidatos. Se enunció el principio aditivo del conteo.

Pregunta 2. La mayoría de los alumnos reconoció al "y" como un producto y multiplicaron el número de puertas. Se enunció el principio del producto del conteo. En la resolución que habían hecho por equipos, excepto dos equipos (uno de ellos parece que tenía algún conocimiento del tema), habían hecho algún tipo de diagrama para resolver este problema. En la discusión en clase no tuvieron la necesidad de hacer algún diagrama. Al parecer han reflexionado sobre las acciones que han utilizado y las han interiorizado en un proceso que les permite hacer el producto sin tener que desglosar el problema y contar físicamente todos los casos.

Pregunta 6. Para las señales de un sonido contestaron que eran dos. Para las señales de dos y tres sonidos algunos dieron la respuesta mientras otros enunciaban los distintos casos. Se escribieron en el pizarrón todas las posibilidades y se les preguntó si veían algún patrón. Encontraron que las respuestas eran: 2, 2·2 y 2·2·2. Sin embargo, no lograron generalizar y el maestro tuvo que proponer la potencia 2^n, con n el número de sonidos. Al parecer entendieron el porqué de esta fórmula. A los alumnos les quedó claro que existe orden pues al cambiar los sonidos se cambia la señal. Se observó que los alumnos han reflexionado e interiorizado algunas de las acciones que habían utilizado.

Pregunta 8. a) La mayoría de los alumnos ha reflexionado e inmediatamente respondieron $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3$. b) La mayoría responde $1 \cdot 26 \cdot 26 = 26^2$ y $26 \cdot 26 \cdot 5 = 26^2 \cdot 5$. Discuten entre ellos pues para algunos la segunda respuesta es 26·26·1 y esto 5 veces. Llegan a la conclusión que ambas respuestas son iguales. En este momento se les pidió que generalizaran esta respuesta y la de la pregunta anterior. Discutiendo entre ellos y de manera relativamente fácil llegaron a la fórmula de ordenaciones con repetición de n objetos tomados de m en m: $OR_n^m = n^m$. El maestro aclaró los conceptos de orden y repetición y, al parecer, no tuvieron problemas para entenderlos. c) Reconocen que el problema es diferente a los anteriores pues no existe repetición. Discutieron entre ellos y llegaron al acuerdo de que la respuesta debe ser un producto de números que va descendiendo y así evitar la repetición. Concluyen que las respuestas son: 1·25·24, 25·24·1 y 25·24·5. Ésta última causó conflicto pues pensaban que en la primera casilla había que restar las cinco vocales y escribir 21·20·5, pero discutiendo entre ellos concluyen que esta forma de resolver el problema es incorrecta. Se les pidió que generalizaran la respuesta. Todos respondieron que era una ordenación sin repetición de *n* objetos tomados de *m* en *m* que se representaba como un producto que se detenía, pero no fueron capaces de expresar esto mediante una fórmula. El maestro escribió la fórmula $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ y los alumnos parecieron entenderla. El periodo de discusión parece haberlos llevado a interiorizar sus acciones en un proceso.

Pregunta 10. a) La mayoría de los alumnos encontró rápidamente la solución: 7·6·5·4·3·2·1. Para este momento parece que han reflexionado sobre las acciones que han ejecutado pues encontraron la solución correcta sin necesidad de hacer un diagrama ó escribir los casos. b) Se dan cuenta que la secuencia MAMAMAA no es válida y la secuencia AMAMAMA si lo es. La mayoría encontró la solución: 4·3·3·2·2·1·1. c) Nuevamente, la mayoría de los alumnos es capaz de encontrar la solución: 5·4·3·2·1·3·2·1. Tomaron a los tres libros de matemáticas como uno solo y escribieron los cinco lugares donde pueden acomodarlos, es decir, necesitan hacer la acción de escribir los lugares, aunque para ordenar los libros no escriben los casos. d) Resolvieron correctamente 4·3·2·1·3·2·1·2·1 sin necesidad de escribir los casos. e) Algunos alumnos entendieron el problema como dos libros de álgebra a cada lado de un libro de matemáticas por lo que concluyeron que no existía solución pues no había la cantidad suficiente de libros. La maestra aclaró esta confusión y resolvieron correctamente 3·2·1·4·3·2·1 sin necesidad de escribir todos los casos. Algunos alumnos hicieron notar que los incisos b) y e) tenían la misma respuesta. La maestra definió *n* factorial: *n!=n(n-1)(n-2)…1* y les pidió que encontraran una fórmula que describiera sus acciones. La mayoría de los estudiantes identificó como ordenación sin repetición de *n* objetos tomados de *n* en *n* y escribieron la fórmula anterior pero con índices iguales: $O_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$; es decir, identificaron la fórmula y la aplicaron correctamente. La maestra explicó a continuación que una ordenación de *n* elementos tomados de *n* en *n* se llama permutación de los *n* elementos. El periodo de reflexión los ha llevado a interiorizar las acciones en un proceso que les permite entender los componentes de las fórmulas.

ETAPA 3. Problemas resueltos en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

En esta etapa la maestra escribió en el pizarrón las fórmulas que se habían encontrado: ordenación con repetición, ordenación sin repetición y permutación. Pidió a los alumnos que resolvieran los problemas 7, 11, 12 y 15. Para esto los alumnos tuvieron veinte minutos de la clase.

Para esta parte se analizarán las respuestas a las preguntas 7 y 15 de los alumnos Luis Andrés (10 de calificación en el examen de conteo), Juan Pablo (9.7 de calificación en el examen de conteo), Francisco (8.3, no resuelve la pregunta 15), Karen (7.3), Sergio (5.3) y Alma (4.5, no asistió a esta clase), que forman parte de los equipos que se utilizaron en la etapa uno.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 7

Las claves lada en cierta región son de tres dígitos, pero el dígito intermedio debe ser cero ó uno. Las claves lada cuyos últimos dos dígitos son uno están siendo usadas para otros fines, por ejemplo, 911. Con estas condiciones, ¿cuántas claves lada hay disponibles?

Solución: (10 x 10) + (10 x 9) = 190 claves lada.

PREGUNTA 15

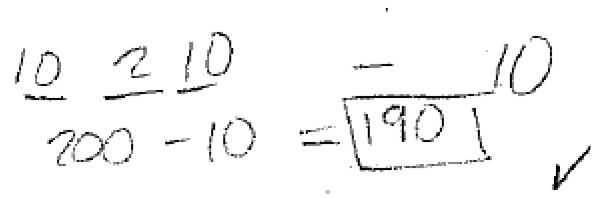
¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?

Solución: 9 + (9)(9) + (9)(9)(8) = 738 números.

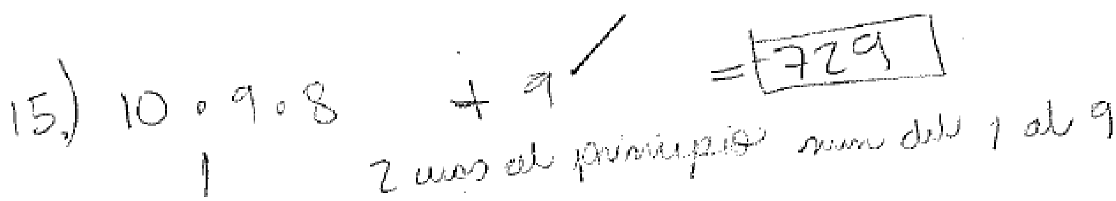
El análisis de las preguntas por alumno es el siguiente.

LUIS ANDRÉS

Pregunta 7. Resuelve poniendo en cada casilla los dígitos válidos. Encuentra el total de casos menos los casos no válidos.



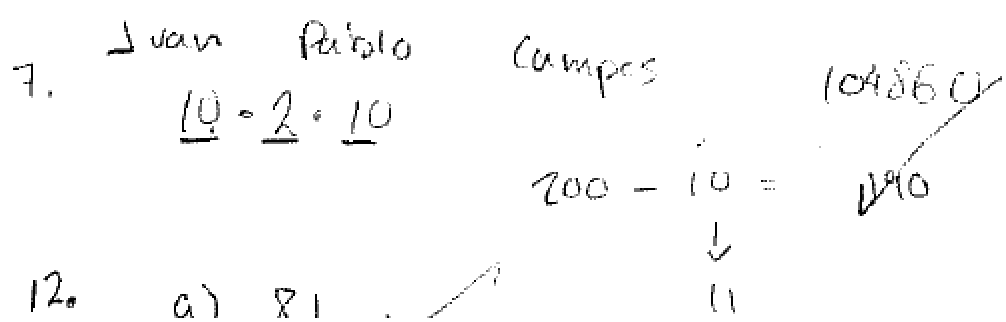
Pregunta 15. Resuelve incorrectamente pues solamente analiza los números de uno y tres dígitos. Resuelve correctamente los de un dígito y de forma incorrecta los de tres dígitos. Suma ambos resultados. Reconoce que existe orden y los dígitos no se repiten.



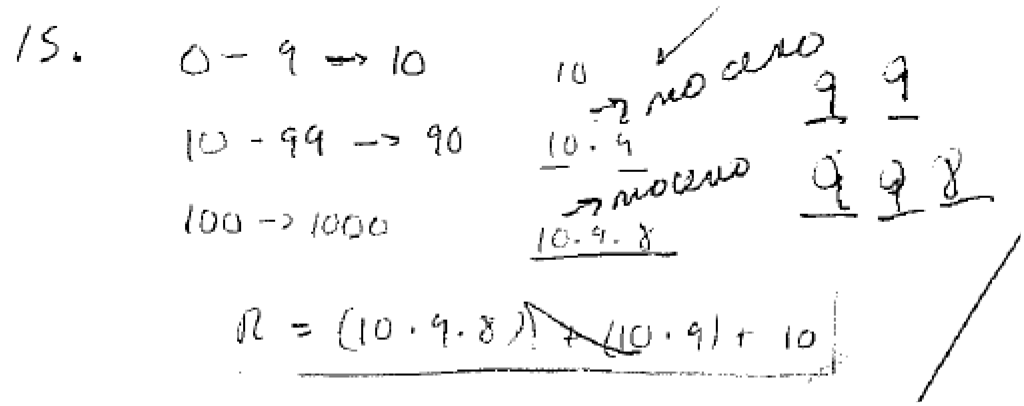
Este alumno no necesita desglosar el problema para contar físicamente los casos válidos. Aún y cuando el resultado de la segunda pregunta no es correcto, parece haber interiorizado las acciones en un proceso

JUAN PABLO

Pregunta 7. Resuelve poniendo en cada casilla los dígitos válidos. Encuentra el total y resta los casos no válidos.



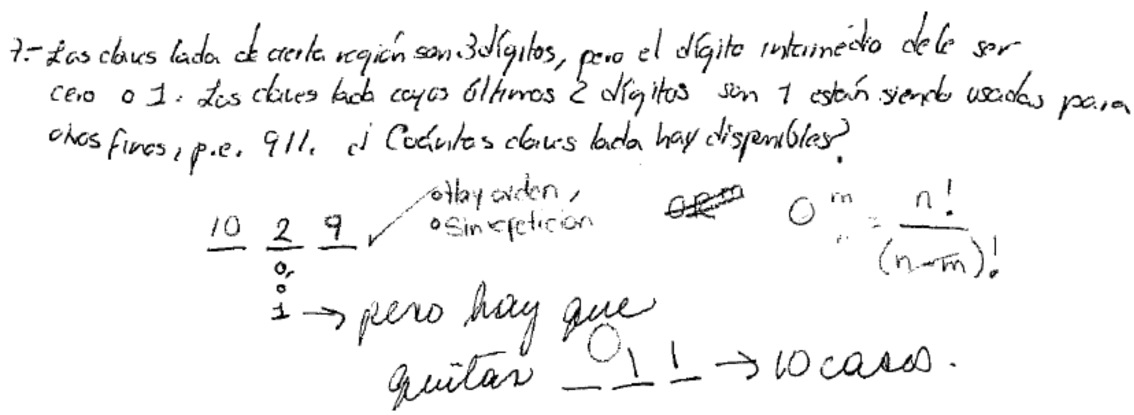
Pregunta 15. Divide el problema en números de uno, dos y tres dígitos. Sin embargo, en dos y tres dígitos permite que el primer dígito valga cero, por lo que su resultado es incorrecto. Reconoce que existe orden y los dígitos no se repiten.



Este alumno no necesita desglosar el problema para contar físicamente los casos válidos. Aún y cuando el resultado del segundo problema no es correcto, parece haber interiorizado las acciones en un proceso y divide el problema en casos de manera correcta.

FRANCISCO

Pregunta 7. Permite que el dígito de en medio valga cero ó uno y para quitar los casos no válidos hace la acción de permitir en la última casilla nueve dígitos, lo cual es incorrecto. Reconoce que existe orden y no repetición. Escribe la fórmula correcta.



Este alumno no necesita desglosar el problema para contar caso por caso. Aún y cuando el resultado no es correcto, parece haber interiorizado las acciones en un proceso.

KAREN

Pregunta 7. Escribe dos casos: con cero y uno en medio. Escribe la fórmula que utiliza.

7.- 3 dígitos
El de en medio 0 y 1
Claves con 2 últimos dígitos 1 son para otros fines
¿Cuántas claves todo hay disponibles

$$\frac{10}{0\text{-}9}\;\frac{1}{0}\;\frac{10}{0\text{-}9} = OR_n^m = OR_{10}^2 = 10^2 = 100$$

$$\frac{10}{0\text{-}9}\;\frac{1}{1}\;\frac{9}{0\text{-}9 \text{ sin } 1} = 10\cdot 1\cdot 9 = 10\cdot 9 = 90$$

En total hay $100 + 90 = \underline{\underline{190}}$

Pregunta 15. Escribe tres casos: números de uno, dos ó tres dígitos. Reconoce que existe orden y no hay repeticiones, pero en lugar de contar dígitos en cada casilla cuenta números. Divide en casos y los suma para encontrar el resultado.

15.- ¿Cuántos de los primeros 1,000 enteros tienen dígitos distintos?

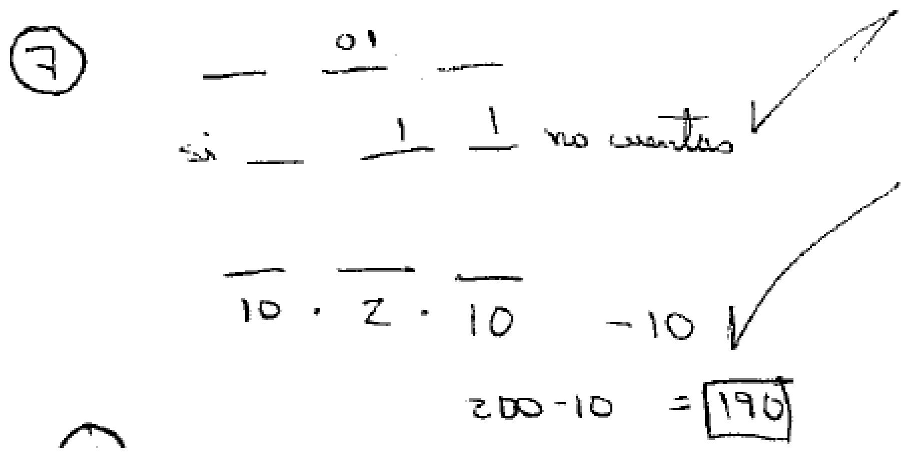
1,000	1,000	→ son ya todos
1,000 999	(1,000)(999)	y y éstos de donde?
1,000 999 998	(1,000)(999)(998)	

1,000 + (999,000) + (1,000)(999)(998)

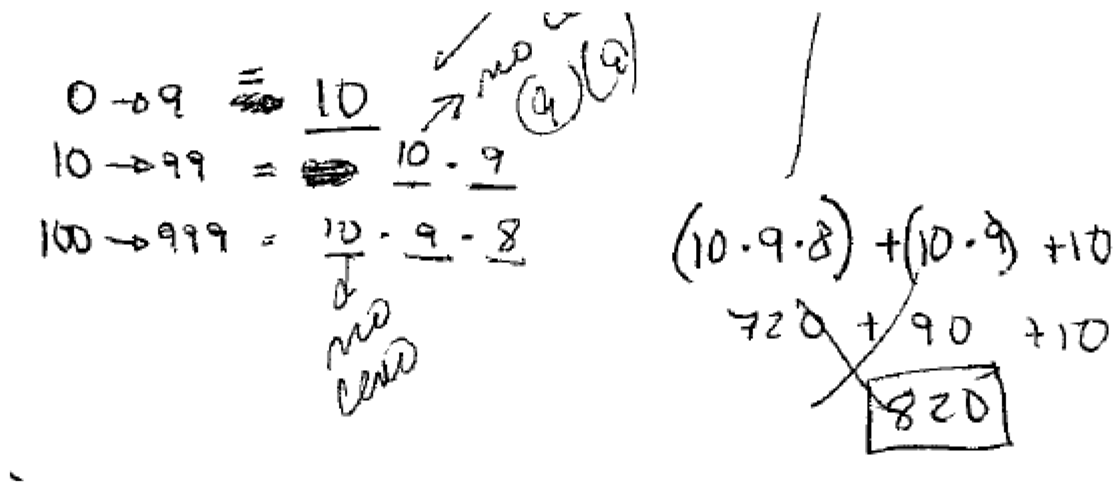
Esta alumna utiliza las fórmulas correctamente en el primer problema. Sin embargo, en el segundo problema no analiza el resultado que encuentra, pues el total de números es mil y su resultado es mayor, lo cual es un absurdo. Al parecer ha reflexionado sobre sus acciones, pero no es posible concluir que las ha interiorizado en un proceso que le permita aplicar correctamente las fórmulas.

<u>*SERGIO*</u>

Pregunta 7. Resuelve poniendo en cada casilla los dígitos válidos. Encuentra el total de casos menos los casos no válidos.



Pregunta 15. Divide el problema en números de uno, dos y tres dígitos. Sin embargo, en dos y tres dígitos permite que el primer dígito valga cero, por lo que su respuesta es incorrecta. Reconoce que existe orden y los dígitos no se repiten.



Este alumno no necesita desglosar el problema para contar caso por caso. Aún y cuando el resultado no es correcto, parece haber interiorizado las acciones en un proceso.

4.2 ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS CON Y SIN ORDEN

En esta sección se analizará una serie de problemas que contiene casos en los que hay orden y otros en los que no lo hay. Esta serie está diseñada para el estudio del tema de combinaciones. En la primera experiencia (semestre agosto – diciembre del 2006) fue evidente que, al resolver la serie de problemas de conteo sin orden, los alumnos tuvieron grandes dificultades con el hecho de que no hubiera orden y tuvieron también dificultades para distinguirlos de los problemas con orden. De los diez equipos que se formaron un equipo resolvió dos problemas, tres equipos resolvieron tres problemas, un equipo cinco problemas, uno siete problemas, uno nueve problemas, uno no entregó su solución y solamente dos intentaron resolver todos los problemas.

La maestra decidió cambiar la finalidad de la serie. La primera serie estaba compuesta por problemas que no tenían orden y se pedía a los alumnos que encontraran la solución. Para la segunda experiencia se diseñó una nueva serie de problemas que pusiera más bien énfasis en la diferencia entre un problema con orden y otro sin orden como resultado del refinamiento de la descomposición genética. Se pidió a los alumnos que encontraran la solución de un mismo problema con y sin orden y que compararan los resultados. Más adelante se pidió que encontraran la relación que existe entre ambas respuestas. La finalidad de esta nueva serie consiste en que los alumnos se den cuenta de la importancia que tiene el orden en el tema de conteo y logren distinguir un problema que tenga orden de otro que no lo tenga y, además que sean capaces de resolver ambos de manera correcta. El análisis se hará de la misma manera que se hizo para el de la serie de problemas con orden, con las mismas etapas. Esta serie fue la segunda que los estudiantes resolvieron.

ETAPA 1. Problemas resueltos en clase por equipo antes de impartir el tema.

A partir del análisis de los resultados de la solución de problemas en los que hay orden, se puede concluir que, al parecer, la mayor parte de los alumnos han tenido oportunidad de reflexionar sobre sus acciones y las han interiorizado en un proceso. Esta interiorización les permitió resolver con mayor facilidad esta serie.

Todos los equipos entregaron una buena solución y la mayoría intentó resolver todos los problemas. Se analizarán las preguntas 1, 2 y 3 en los mismos equipos que se utilizaron para los problemas con orden: los equipos uno, cuatro y siete.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

<u>*PREGUNTA 1*</u>

Sean las letras a, b, c, d, e. No puedes repetir las letras.

a) *¿Cuántos conjuntos de tres letras se pueden formar? Recuerda que en los conjuntos no existe el orden y, por ejemplo, los conjuntos* $\{a,b,c\}$ *y* $\{b,c,a\}$ *son iguales.*

b) *¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar? En este caso existe orden y las palabras abc y bca son distintas.*

c) *¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los dos incisos anteriores?*

Solución:

a) $\binom{5}{3} = 10$ *conjuntos de tres elementos.*

b) $O_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ *palabras de tres letras.*

c) *Debe dividirse el inciso b) entre 3!= 6 (permutaciones de tres elementos) para obtener el inciso a).*

<u>*PREGUNTA 2*</u>

Sean los números 1, 2, 3, 4. No puedes repetir los números.

a) *¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse? Recuerda que existe orden pues* $12 \neq 21$.

b) *¿Cuántos conjuntos de dos elementos pueden formarse? En este caso no hay orden* $\{1,2\} = \{2,1\}$.

c) *¿Qué diferencia hay entre los dos incisos anteriores?*

d) ¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los incisos a) y b)?

Solución:

a) $O_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ *números de dos dígitos.*

b) $\binom{4}{2} = 6$ *conjuntos de dos elementos.*

c) En el inciso a) hay orden mientras que en b) no lo hay.

d) Debe dividirse el inciso a) entre 2!= 2 (permutaciones de dos elementos) para obtener el inciso a).

PREGUNTA 3

Sean los números 1, 2, 3, 4. Se van a formar números de cuatro dígitos (no se puede repetir los números), ¿dé cuántas formas puedes seleccionar al primer dígito, al segundo, al tercero y al cuarto? ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse?

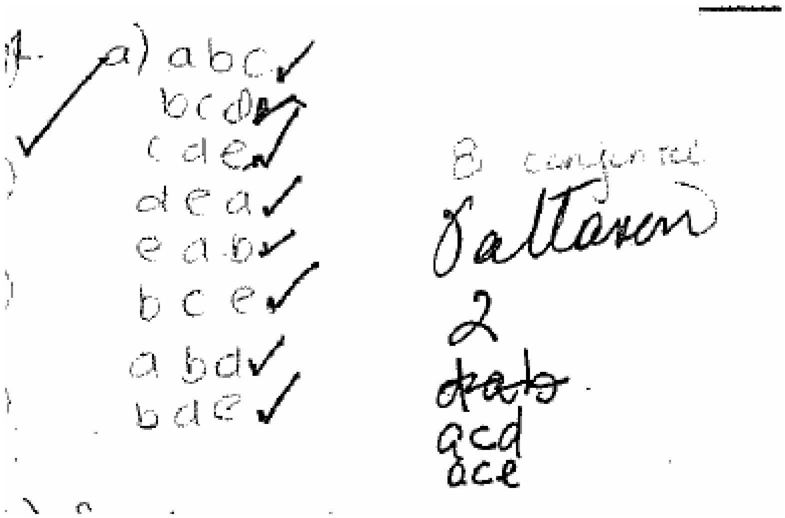
Solución: 4 formas de seleccionar el primer dígito, 3 formas de seleccionar el segundo, 2 formas de seleccionar el tercero y 1 forma de seleccionar el cuarto. $P_4 = 4! = 24$ *números de cuatro dígitos.*

El análisis de las preguntas por equipo es el siguiente.

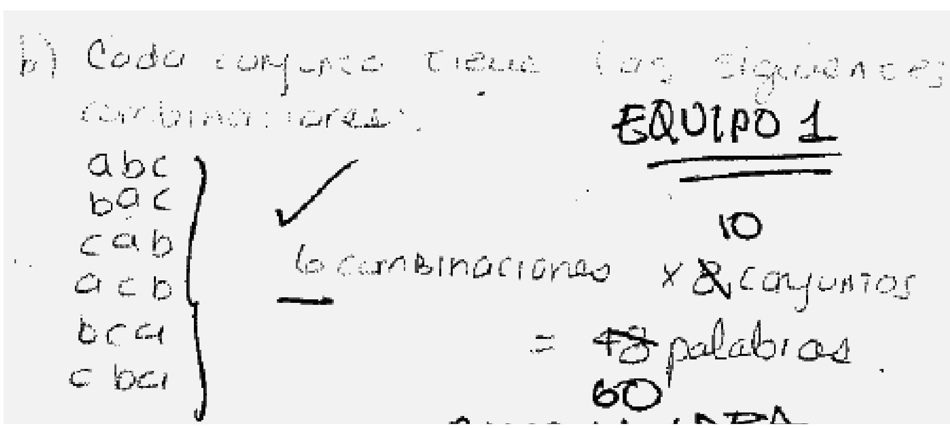
EQUIPO 1

Este equipo está formado por cinco alumnos que obtuvieron 5.4, 10, 10, 8.3 y 9.8 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.

Pregunta 1. a) Los miembros del equipo escriben los distintos conjuntos y los cuentan. No llegan al resultado correcto pues les faltó especificar dos conjuntos.



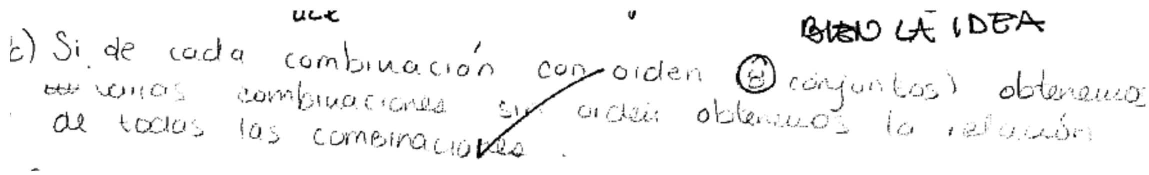
b) Para uno de los conjuntos que encontraron en el inciso anterior, escriben todas las palabras que pueden formarse. Después multiplican los conjuntos por el número de palabras para encontrar el total de palabras. La multiplicación es la operación apropiada, pero al haber resuelto el inciso a) mal no llegan al resultado correcto tampoco en este inciso.



Se reescribe la respuesta anterior pues no está muy legible.

"b) Cada conjunto tiene las siguientes combinaciones:
abc
bac
cab
acb *6 combinaciones x 8 conjuntos*
bca *= 48 palabras."*
cba"

c) Explican correctamente la relación entre ambos incisos.

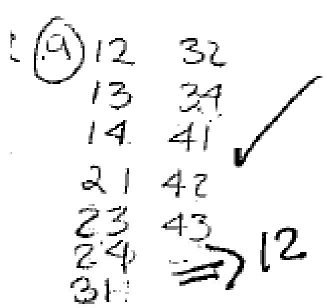


Se reescribe la respuesta anterior pues no está muy legible.

"c) Si de cada combinación con orden (8 conjuntos) obtenemos varias combinaciones sin orden obtenemos la relación de todas las combinaciones."

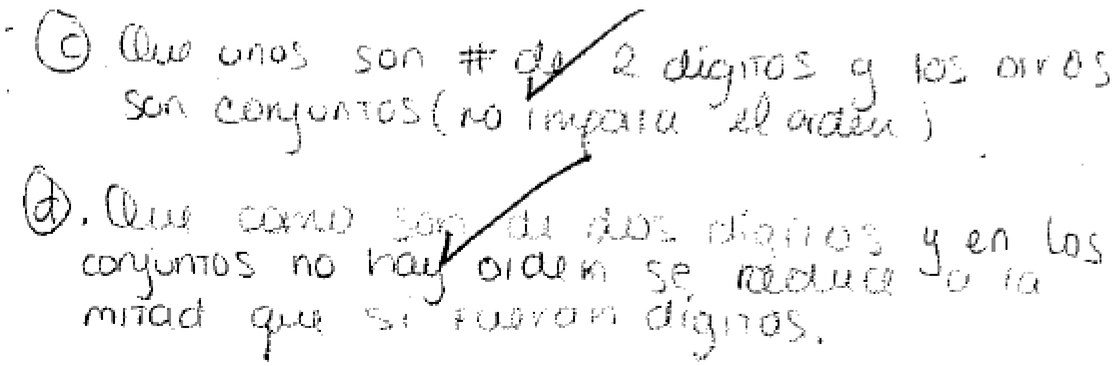
En esta pregunta, en el inciso a), los miembros del equipo hacen la acción de escribir todos los conjuntos para contarlos. En el inciso b) hacen la acción de escribir todas las combinaciones pero solamente para un conjunto y después multiplican para encontrar el total. Al parecer cuando resolvieron el inciso a) y la primera parte del inciso b), reflexionaron sobre sus acciones y para el resultado final del inciso b) no necesitaron escribir todos los casos y resolvieron con un producto. En el inciso c) llegan a la conclusión que existen más casos con orden (palabras) que sin orden (conjuntos).

Pregunta 2. a) Los miembros del equipo escriben todos los números como acción para desglosar el problema y contar físicamente.



b) Escriben el resultado correcto sin explicar su procedimiento.

c) y d) Explican correctamente.


c) Que unos son # de 2 digitos y los otros son conjuntos (no importa el orden)

d). Que como son de dos digitos y en los conjuntos no hay orden se reduce a la mitad que si fueran digitos.

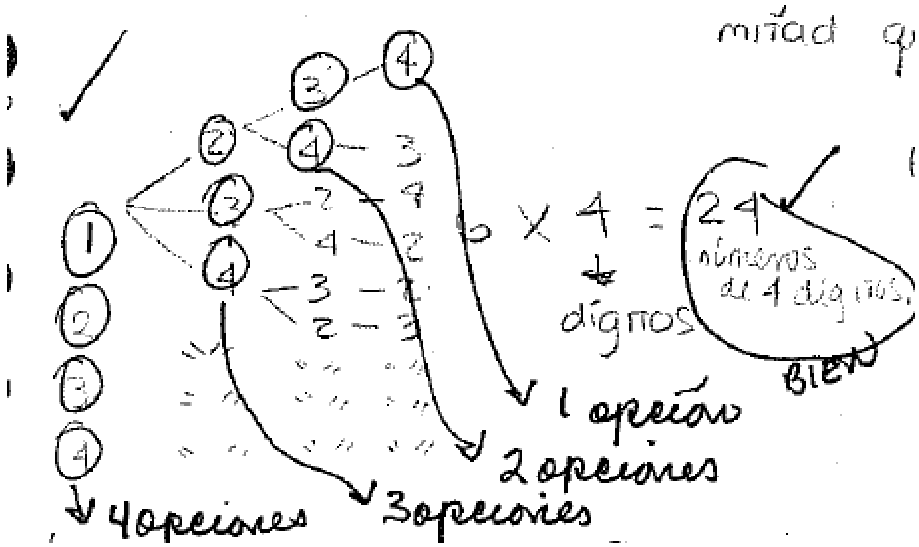
Se reescribe la respuesta anterior pues no está muy legible.

"c) Que unos son # de 2 dígitos y los otros son conjuntos (no importa el orden).

d) Que como son de dos dígitos y en los conjuntos no hay orden se reduce a la mitad que si fueran dígitos."

En esta pregunta, los miembros del equipo desglosan el problema para contar en el inciso a), pero en el inciso b) escriben el resultado sin desglosarlo. Aún y cuando no explican qué hicieron, por la respuesta del inciso d), es posible concluir que dividieron para quitar el orden. Reconocen la diferencia entre ambos incisos, es decir, que uno tiene orden y el otro no.

Pregunta 3. Los miembros del equipo hacen un árbol con los números que empiezan con el dígito uno como acción para desglosar el problema y contar físicamente. Indican que para los dígitos dos, tres y cuatro sería lo mismo por lo que multiplican para encontrar el total.



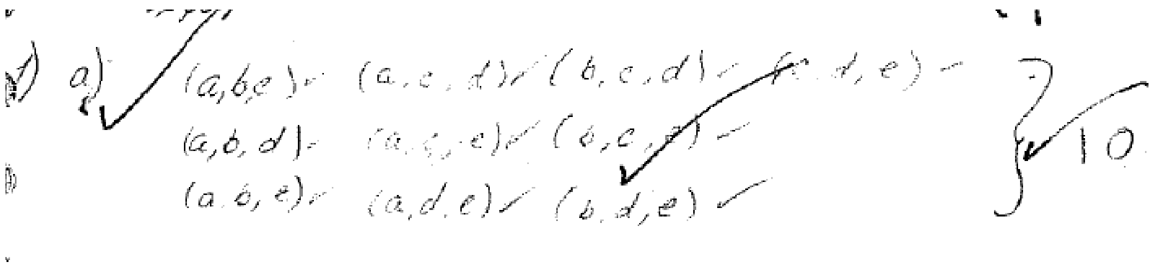
En esta pregunta los alumnos hacen un diagrama parcial como acción para desglosar el problema, pero no necesitan repetir el diagrama para todos los dígitos y multiplican por cuatro por ser el total de dígitos permitidos.

En estas tres preguntas podemos notar que los miembros del equipo han reflexionado sobre sus acciones y no necesitan desglosar totalmente los problemas, sino que hacen un diagrama de alguna parte del problema y resuelven con un producto. A juzgar por sus respuestas se puede concluir que han reflexionado sobre sus acciones y están empezando a interiorizarlas en un proceso de conteo.

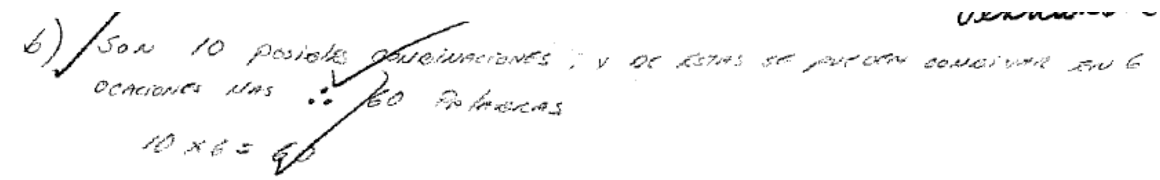
EQUIPO 4

Este equipo está formado por seis alumnos que obtuvieron 9.7, 5.3, 10, 5.1, 9.4 y 4.5 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.

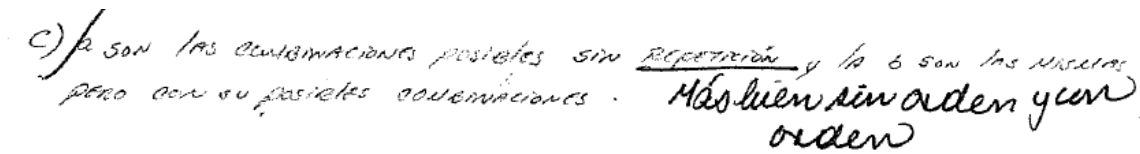
Pregunta 1. a) Los miembros del equipo escriben todos los posibles conjuntos y los cuentan.



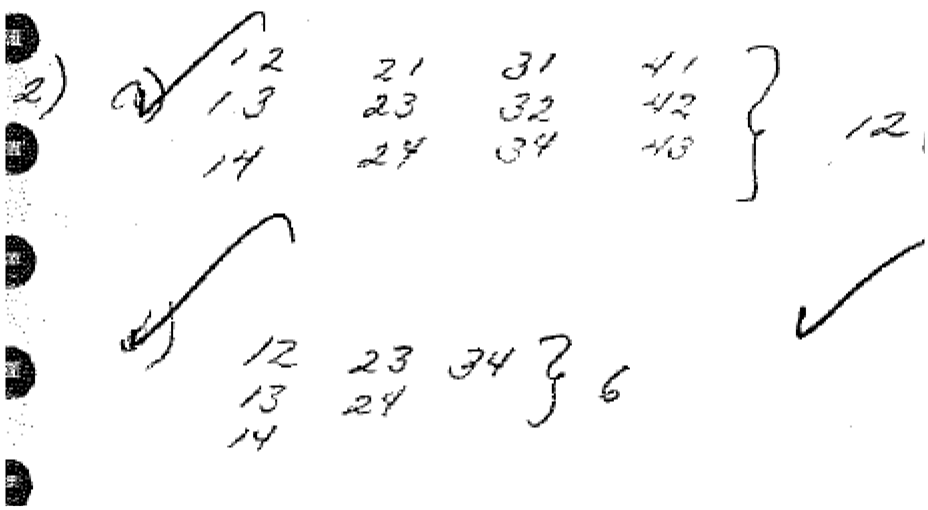
b) En este caso ya no escriben todas las posibilidades sino que encuentran que hay seis combinaciones para cada uno de los conjuntos del inciso a) y multiplican para encontrar el total de palabras.



c) Usan la palabra repetición cuando quieren decir orden, por lo que es confusa su explicación.



Pregunta 2. a) y b) escriben todos los números posibles como acción para desglosar el problema y contar físicamente.



c) A diferencia de la pregunta anterior contestan correctamente aclarando que en un caso hay orden y en el otro no.

b) En a) se cuenta con orden y en b) es sin orden

d) No responden a la pregunta sino que responden otra vez al inciso c) pero ahora aparece nuevamente la confusión entre los términos orden y repetición.

b) En a) cuentas todos los casos y en b) se eliminan las repeticiones NO HAY REPETICIONES! MAS BIEN ES ORDEN O NO ORDEN

Reconocen la diferencia entre ambos incisos, es decir, uno tiene orden y el otro no, aunque siguen confundiendo las palabras orden y repetición.

Pregunta 3. Escriben la respuesta correcta sin explicar su procedimiento.

3) $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Los miembros del equipo hacen la acción de desglosar las preguntas 2 y 1a) para contar los casos. Sin embargo, en la pregunta 1b) y 3, parece que han interiorizado la acción de desglosar el problema pues multiplican para encontrar la solución sin necesidad de escribir todos los casos.

EQUIPO 5

Este equipo está formado por cinco alumnos que obtuvieron 7.8, 5.2, 6.6, 7.3 y 6.9 de calificación en el examen de conteo sobre un total de 10.

Pregunta 1. a) Los miembros del equipo necesitan escribir todos los conjuntos como acción para contar físicamente.

a

abc
abd
abe
acd
ace
ade
bcd
bce
bde
cde

10 conjuntos diferentes

b) Escriben todas las palabras que empiezan con la letra *"a"* como acción para contar, sin embargo, para las demás letras hacen el producto y no escriben todos los casos.

b

1

abc
abd
abe
acb
acd
ace
adb
adc
ade
aeb
aec
aed

ya no quiso empezar con b)

estas son las palabras que se forman empezando con la letra a, se forman 12. Empezando con las otras 4 obtenemos 12 de cada una.

c) Usan la palabra repetición cuando quieren decir orden, por lo que su explicación es confusa.

(a) La relación que hay es
que el inciso a es
subconjunto del inciso b.

En el inciso a no se
pueden repetir las letras,
(son subconjuntos) y en el
inciso b sí se pueden repetir
(son palabras), por lo tanto
podemos tener 60 palabras
y sólo 10 subconjuntos.

Pregunta 2. a) y b) Escriben todos los números como acción para desglosar el problema y contar físicamente.

2 a

12 21 31 41
13 23 32 42
14 24 34 43

12 digitos (números) pueden formarse con 2 digitos.

b

12 23
13 24
14 34

6 conjuntos de 2 digitos se pueden hacer.

c) Nuevamente usan la palabra repetir en lugar de orden.

(c) cuando no se repiten es subconjunto de los otros

d) Reconocen que el inciso a) es el doble del b), pero no explican por qué.

(d) El a es el doble de b y b es subconjunto de a

Reconocen que en un caso existe orden y en el otro no.

Pregunta 3. Los miembros del equipo escriben todos los números que empiezan con el dígito uno como acción para desglosar el problema y contar físicamente. Indican que para los dígitos dos, tres y cuatro sería lo mismo por lo que multiplican para encontrar el total. Reconocen que existe el orden y no pueden repetirse los números.

(3) a) El primer dígito 4 opciones, el segundo 3, el tercero 2 y el cuarto uno. Porque al poner el primero tienes 4 números, pero el segundo ya no puedes repetir y solo te quedan 3, y luego solo 2 y al final solo hay un número

b)
1234
1243
1324
1342
1423
1432

6, y cada número toma el lugar uno, por lo tanto 6×4=24

Los miembros del equipo hacen la acción de desglosar los problemas 1a) y 2 para contar físicamente los casos. Sin embargo, al parecer han reflexionado sobre sus acciones y no necesitan desglosar totalmente los demás problemas sino solamente una parte y resuelven con un producto. Se observa una reflexión sobre sus acciones que los conduce posiblemente a interiorizarlas en un proceso.

ETAPA 2. Problemas resueltos en clase mediante discusión global.

En esta etapa se impartió la clase sobre el tema de combinaciones, es decir el caso en el que el orden no importa. Esta clase consistió en resolver, junto con los alumnos a través de una discusión en grupo, los problemas 1, 2, 4 y 5 de la serie de problemas con y sin orden sin explicitar los conceptos involucrados en ellos.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 1

Sean las letras a, b, c, d, e. No puedes repetir las letras.

a) ¿Cuántos conjuntos de tres letras se pueden formar? Recuerda que en los conjuntos no existe el orden y, por ejemplo, los conjuntos $\{a,b,c\}$ *y* $\{b,c,a\}$ *son iguales.*

b) ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar? En este caso existe orden y las palabras abc y bca son distintas.

c) ¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los dos incisos anteriores?

Solución:

a) $\binom{5}{3} = 10$ *conjuntos de tres elementos.*

b) $O_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ *palabras de tres letras.*

c) Debe dividirse el inciso b) entre 3!= 6 (permutaciones de tres elementos) para obtener el inciso a).

PREGUNTA 2

Sean los números 1, 2, 3, 4. No puedes repetir los números.

a) ¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse? Recuerda que existe orden pues $12 \neq 21$.

b) ¿Cuántos conjuntos de dos elementos pueden formarse? En este caso no hay orden $\{1,2\} = \{2,1\}$.

c) ¿Qué diferencia hay entre los dos incisos anteriores?

d) ¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los incisos a) y b)?

Solución:

a) $O_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ *números de dos dígitos.*

b) $\binom{4}{2} = 6$ *conjuntos de dos elementos.*

c) En el inciso a) hay orden mientras que en b) no lo hay.

d) Debe dividirse el inciso a) entre 2!= 2 (permutaciones de dos elementos) para obtener el inciso a).

<u>*PREGUNTA 4*</u>

Se tienen doce jugadores posibles y se quiere escoger un equipo de basketball (5 jugadores). ¿Dé cuántas formas puedes seleccionar al primer jugador, de cuántas al segundo, al tercero, al cuarto y al quinto? ¿Cuántos equipos se pueden formar, si el orden de los jugadores no importa?

Solución: 12 formas de escoger el primer jugador, 11 formas de escoger el segundo, 10 formas de escoger el tercero, 9 formas de escoger el cuarto y 8 formas de escoger el quinto. $\binom{12}{5} = 792$ *equipos distintos.*

<u>*PREGUNTA 5*</u>

De los equipos encontrados en la pregunta anterior, ¿cuántos incluyen al jugador más débil y al más fuerte?

Solución: $\binom{10}{3} = 120$ *equipos incluyendo al más débil y al más fuerte.*

Durante la discusión en grupo el maestro fue haciendo distintas preguntas. Se plantearon primero los problemas y se les preguntó cómo los habían resuelto por equipos. La mayoría de los alumnos, al parecer, ha interiorizado las acciones en un proceso y son capaces de aplicar correctamente la fórmula de ordenación para resolver los incisos donde existe el orden. Se discute que en algunos incisos no existe el orden. El maestro escribió en el pizarrón distintas secuencias que al no existir el orden deben contarse como una sola. Algunos alumnos reconocen que son las permutaciones de los elementos. Se concluye que la fórmula de ordenación debe dividirse para quitar el orden. A diferencia de la primera experiencia muchos alumnos, al resolver esta serie por equipos, habían ya hecho esta división para quitar el orden en las actividades que no lo tenían. El maestro fue anotando las preguntas, las respuestas y la discusión de cada problema para hacer el análisis correspondiente.

El análisis de las preguntas es el siguiente.

Pregunta 1. a) Resuelven con la fórmula de ordenación sin repetición, $O_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$, pero aclaran que en este caso no hay orden por lo que debe hacerse otra operación. Escriben distintas secuencias que, forman el mismo conjunto, puesto que no existe el orden. Algunos alumnos reconocen que estas secuencias son la permutación de las tres letras, es decir, 3!, y concluyen que debe dividirse la ordenación anterior para quitar el orden y encontrar el resultado. b) Resuelven con la misma ordenación que el inciso a). Al parecer han interiorizado la fórmula en un proceso pues saben aplicarla correctamente y no hacen la acción de desglosar el problema. c) Reconocen que en un inciso el orden existe mientras que en el otro no. Aclaran que se necesita dividir a la ordenación para quitar el orden.

Pregunta 2. a) La mayoría de los alumnos resuelve inmediatamente con la fórmula de ordenación sin repetición. b) Usan el resultado del inciso anterior y para quitar el orden dividen entre la permutación de los dos números. Parece que han interiorizado las acciones de contar de manera explícita, el uso de la fórmula de ordenación y cómo quitar el orden en un proceso. c) Reconocen que en un inciso existe orden mientras que en el otro no. d) Al parecer el problema anterior les permite saber, a la mayoría, que debe dividirse la ordenación entre la permutación para quitar el orden.

Pregunta 4. La mayoría de los alumnos resuelve correctamente usando la fórmula que han encontrado: dividir la ordenación entre la permutación de los elementos. No necesitan hacer la acción de escribir los equipos que serían iguales por no existir el orden y encuentran rápidamente la solución.

Pregunta 5. Algunos de los estudiantes restan los dos jugadores ya elegidos del total de jugadores y del número de elementos del equipo. Contestan rápidamente que es una ordenación sin repetición pero dividida entre 3! para quitar el orden. Al parecer al haber resuelto los problemas con orden interiorizaron la acción de contar de manera explícita o de enumerar casos en un proceso que incluye el uso de operaciones para encontrar el resultado.

Se pidió a los alumnos que intentaran generalizar lo que se había hecho. Discutiendo entre ellos y, de manera fácil, obtuvieron la fórmula de combinaciones sin repetición, o simplemente combinaciones, de *n* elementos tomados de *m* en *m:* $\binom{n}{m} = \frac{O_n^m}{m!}$, usando la fórmula de ordenaciones sin repetición. Se desarrolló esta fórmula para simplificarla y se llegó a $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. La maestra aclaró los conceptos de orden y repetición. Puede considerarse que el periodo de reflexión sobre las acciones condujo a los estudiantes a interiorizar algunas acciones en un proceso.

En esta etapa, al haber resuelto los problemas con orden, los alumnos han, al parecer, interiorizado la acción de contar de manera explícita o de enumerar casos en un proceso que incluye el uso de operaciones. Para quitar el orden sí requirieron hacer la acción de escribir algunos casos para encontrar las secuencias que, al no haber orden, se cuentan como una. Sin embargo, el periodo de reflexión que han tenido los alumnos en la solución de los primeros problemas, los ha llevado a interiorizar dichas acciones en un proceso y al resolver los demás problemas son capaces de dividir la ordenación para quitar el orden.

ETAPA 3. Problemas resueltos en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

En esta etapa la maestra escribió en el pizarrón la fórmula de combinación y pidió a los alumnos que resolvieran los problemas 6, 7 y 8 en los veinte minutos que quedaban de clase. Para esta parte se analizarán las respuestas a las preguntas 6 y 7 de los alumnos que se usaron en la sección de conteo con orden.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 6

Si tienes diez objetos y quieres escoger a los diez objetos, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes?

Solución: $\binom{10}{10} = 1$ *forma.*

<u>*PREGUNTA 7*</u>

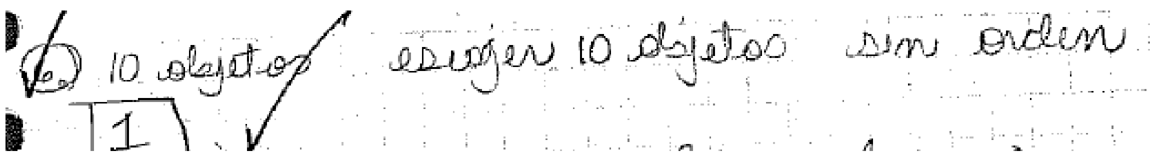
Si tienes diez objetos y quieres escoger seis de ellos, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes?

Solución: $\binom{10}{6} = 210$ *formas.*

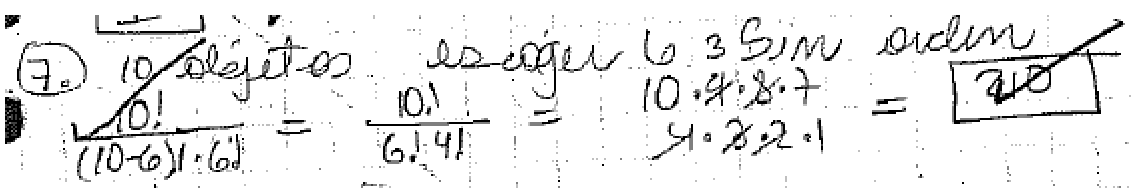
El análisis de las preguntas por alumno es el siguiente.

<u>*LUIS ANDRES*</u>

Pregunta 6. Reconoce que el orden no importa y solamente existe una forma de tomar diez objetos de diez objetos. Al parecer responde sin usar la fórmula de combinaciones.

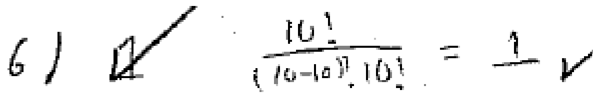


Pregunta 7. Reconoce que no hay orden y resuelve usando la fórmula de combinaciones.

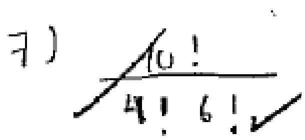


<u>*JUAN PABLO*</u>

Pregunta 6. Reconoce que el orden no importa y solamente existe una forma de tomar diez objetos de diez objetos y contesta correctamente. Parece que quiere comprobar su respuesta pues resuelve también con la fórmula de combinaciones.

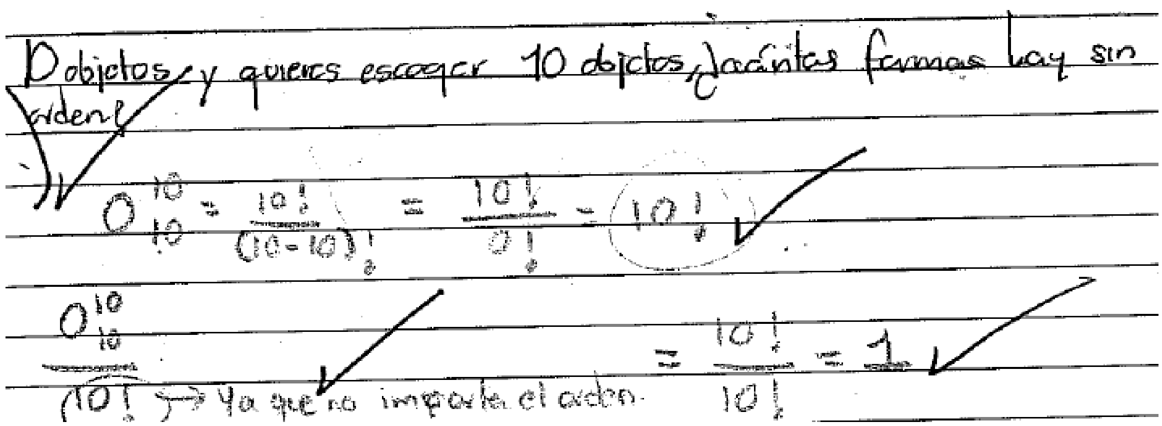


Pregunta 7. Reconoce que no hay orden y resuelve usando la fórmula de combinaciones.

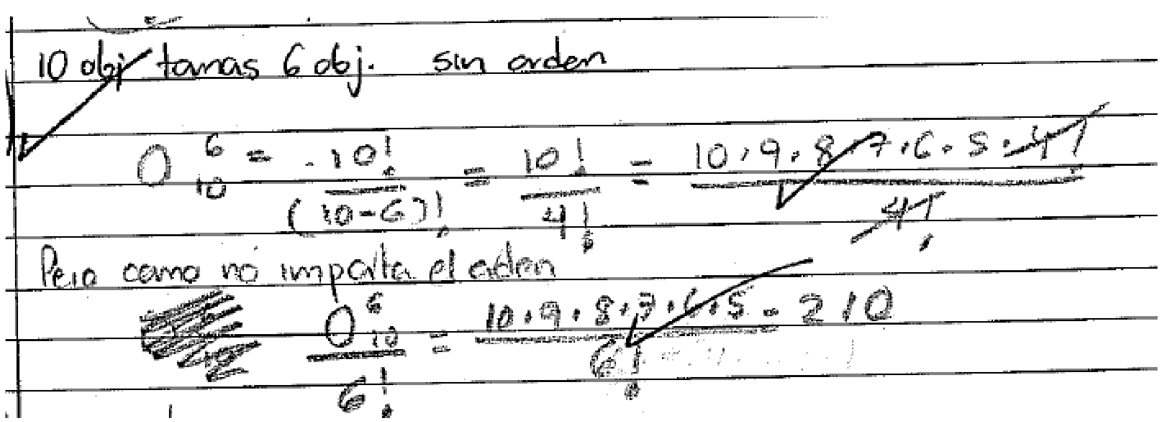


FRANCISCO

Pregunta 6. Reconoce que el orden no importa. Resuelve dividiendo la ordenación entre la permutación para quitar el orden.



Pregunta 7. Reconoce que el orden no importa y nuevamente, resuelve dividiendo la ordenación entre la permutación para quitar el orden. Utiliza la fórmula que se encontró en la discusión en clase en lugar de la fórmula de combinaciones.



Puede ser que este alumno haya encapsulado el proceso involucrado en el uso de la fórmula de ordenación en un objeto que le permite resolver ambos problemas usando la fórmula de ordenación y dividiéndola para quitar el orden.

KAREN

Pregunta 6. Reconoce que el orden no importa y resuelve con la fórmula de combinación. Escribe la fórmula en general y después sustituye los valores de este problema.

10 objetos hay = n
Escoger 10 obj. = m
Sin orden

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{10!}{(10-10)!\,10!} = \frac{10!}{0!\,10!} = \frac{10!}{10!} = 1$$

∴ Solo hay 1 forma

Pregunta 7. Reconoce que el orden no importa y resuelve con la fórmula de combinación. Nuevamente, escribe la fórmula en general y sustituye los datos del problema.

Hay 10 objetos = n
Tomo 6 = m
Sin orden

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{10!}{(10-6)!\,6!} = \frac{10!}{4!\,6!}$$

SERGIO

Pregunta 6. Reconoce que el orden no importa y resuelve con la fórmula de combinaciones.

6) 10 objetos s/orden.

$$\frac{10!}{(10-10!)10!} = \frac{10!}{(1)10!} = \boxed{1}$$

Pregunta 7. Reconoce que el orden no importa y resuelve con la fórmula de combinaciones.

7) 10 objetos escoger 6 s/orden.

$$\frac{10!}{(10-6)!\,6!} = \boxed{\frac{10!}{4!\,6!}} =$$

ALMA

Pregunta 6. Reconoce que el orden no importa y resuelve con la fórmula de combinaciones. Escribe la fórmula en general y después sustituye los valores de este problema.

Alma Lucia Fran

) 10 OBJETOS n
10 TOMAN m

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \binom{10}{10} = \frac{10!}{(10-10)!\,10!} = \frac{10!}{0!\,10!} = 1$$

Pregunta 7. Reconoce que el orden no importa y resuelve con la fórmula de combinaciones.

) 10 objetos n
6 obj. m $= \binom{10}{6} = \dfrac{10!}{(10-6)!\,6!} = \dfrac{10!}{(4!)(6!)}$

Las respuestas anteriores muestran que los alumnos son capaces de usar las fórmulas y no necesitan hacer la acción de desglosar el problema ó escribir algunos casos para contar físicamente. Al parecer han reflexionado sobre las acciones involucradas en la aplicación de la fórmula y las han interiorizado en un proceso que les permite aplicarla correctamente.

ETAPA 4. Problemas resueltos en forma individual como tarea.

En esta etapa los alumnos resolvieron los problemas con y sin orden como tarea con la finalidad de reforzar la comprensión de los conceptos matemáticos de conteo. Para esta parte se analizarán las respuestas a las preguntas 3 y 4 de los mismos alumnos.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 3

Sean los números 1, 2, 3, 4. Se van a formar números de cuatro dígitos (no se puede repetir los números), ¿dé cuántas formas puedes seleccionar al primer dígito, al segundo, al tercero y al cuarto? ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse?

Solución: 4 formas de seleccionar el primer dígito, 3 formas de seleccionar el segundo, 2 formas de seleccionar el tercero y 1 forma de seleccionar el cuarto. $P_4 = 4! = 24$ *números de cuatro dígitos.*

PREGUNTA 4

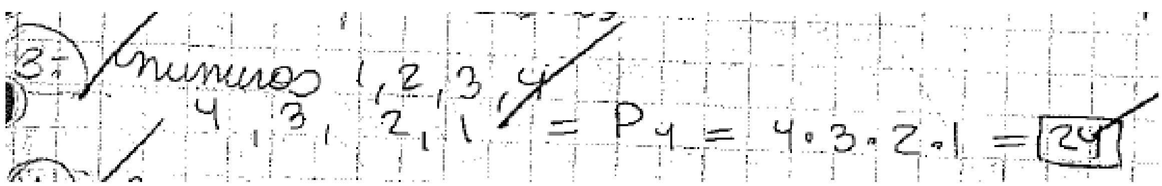
Se tienen doce jugadores posibles y se quiere escoger un equipo de basketball (5 jugadores). ¿Dé cuántas formas puedes seleccionar al primer jugador, de cuántas al *segundo, al tercero, al cuarto y al quinto? ¿Cuántos equipos se pueden formar, si el orden de los jugadores no importa?*

Solución: 12 formas de escoger el primer jugador, 11 formas de escoger el segundo, 10 formas de escoger el tercero, 9 formas de escoger el cuarto y 8 formas de escoger el quinto. $\binom{12}{5} = 792$ *equipos distintos.*

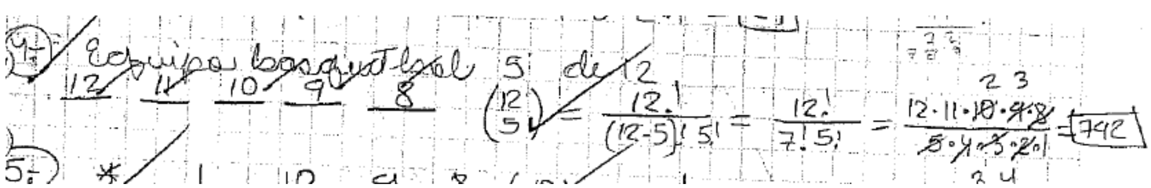
El análisis de las preguntas por alumno es el siguiente.

<u>LUIS ANDRÉS</u>

Pregunta 3. Reconoce que existe orden y utiliza la fórmula de permutación.

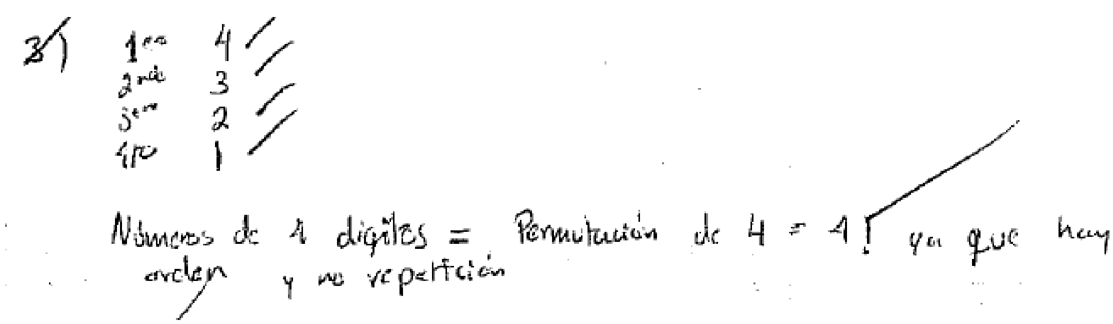


Pregunta 4. Reconoce que el orden no importa y resuelve usando la fórmula de combinaciones.



<u>JUAN PABLO</u>

Pregunta 3. Reconoce que existe orden y utiliza la fórmula de permutación. Explica porqué esa fórmula es la correcta.



Pregunta 4. Reconoce que el orden no importa y resuelve dividiendo la ordenación entre la permutación para quitar el orden.

4) 1ero 12 4to 9
2ndo 11 5to 8
3ero 10

~~Luego~~ Equipos: como no hay orden $\frac{O^5_{12}}{5!} = \binom{12}{5}$

FRANCISCO

Pregunta 3. Explica cuántas opciones tiene cada dígito. Reconoce que existe orden y utiliza la fórmula de permutación.

3.- Sean los números 1,2,3,4. Se van a formar números de 4 dígitos. ¿De cuántas formas puedes seleccionar al primer dígito, al segundo, al tercero y al cuarto? ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse?
Hay orden sin repetición

4 3 2 1

FORMAS DE SELECCIONAR EL 1er dígito → 4
2° → 3
3° → 2
4° → 1

4! = "Números de 4 dígitos"

Pregunta 4. Reconoce las opciones que tiene cada jugador. Reconoce que el orden no importa y resuelve dividiendo la ordenación entre la permutación para quitar el orden.

4.- Se tienen 12 jugadores, y se quiere escoger a 1 equipo de 5.
a) Formas de seleccionar al 1°, 2°, ... 5° jugador

$\frac{12}{1}\ \frac{11}{2}\ \frac{10}{3}\ \frac{8}{4}\ \frac{7}{5}$

$O^5_{12} = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!} = 95040$

Orden sin Repetición

b) si el orden no importa

$\frac{O^5_{12}}{5!} = \frac{95040}{5!} = 792$

KAREN

Pregunta 3. Explica cuántas opciones tiene cada dígito. Reconoce que existe orden y utiliza la fórmula de ordenación.

3.- Con los números 1,2,3,4. Se van a formar números de 4 dígitos ¿De cuántas formas pueden seleccionar al primer dígito, al 2º, al 3º y al 4º?

Orden ✓ $\quad \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$ Como es con orden y no hay repet. al escoger el 1er dígito tenemos 4 opciones, después solo 3 pues uno ya lo escogimos, y así suces.

Repet

¿Cuántos números de 4 dígitos pueden formarse?

Es una ordenación con n=4, m=4

$$P_n = O_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4!}{1} = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24 \text{ números}$$

Pregunta 4. Reconoce las opciones que tiene cada jugador. Reconoce que el orden no importa y resuelve con la fórmula de combinaciones.

4.- Se tienen 12 jugadores posibles y se quiere escoger un equipo de basket (5 jugad.) ¿De cuántas formas puedes seleccionar al 1er jugador, al 2º, al 3º, al 4º y al 5º?

$\frac{12}{1^{er}}\ \frac{11}{2^{o}}\ \frac{10}{3^{o}}\ \frac{9}{4^{o}}\ \frac{8}{5^{o}}$ ⇒ Debido a que no hay repeticiones, porque un jugador no lo puedes elegir 2 veces.

¿Cuántos equipos se pueden formar, si el orden de los jugadores no importa?

Orden ∴ Es una combinación

Repet

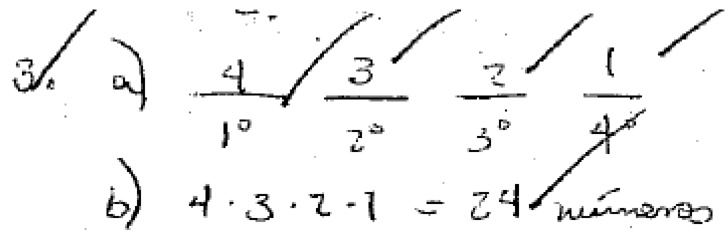
$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{(12-5)!5!} = \frac{12!}{7!5!}$$

n=12 jugadores

m=5

SERGIO

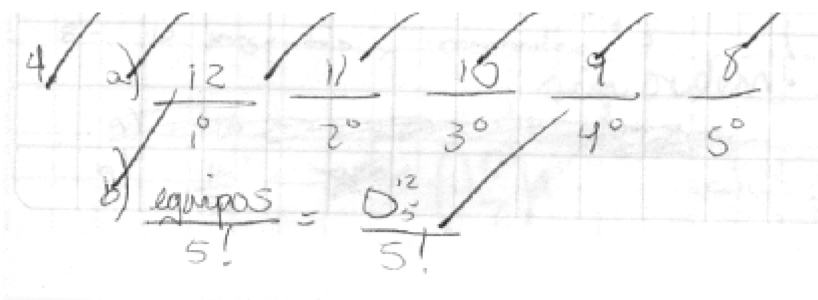
Pregunta 3. Reconoce cuántas opciones tiene cada dígito y multiplica para encontrar el total de números.



3\. a) $\frac{4}{1°}$ $\frac{3}{2°}$ $\frac{2}{3°}$ $\frac{1}{4°}$

b) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números

Pregunta 4. Reconoce las opciones que tiene cada jugador, que el orden no importa y resuelve dividiendo la ordenación entre la permutación para quitar el orden.

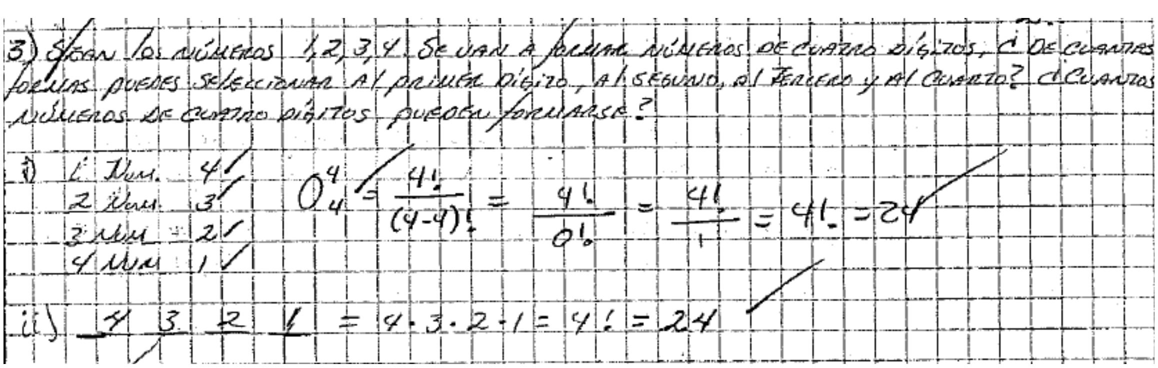


4 a) $\frac{12}{1°}$ $\frac{11}{2°}$ $\frac{10}{3°}$ $\frac{9}{4°}$ $\frac{8}{5°}$

b) $\frac{\text{equipos}}{5!} = \frac{O^{12}_{5}}{5!}$

ALMA

Pregunta 3. Explica cuántas opciones tiene cada dígito. Reconoce que existe orden y utiliza tanto la fórmula de ordenación como la fórmula de permutación.



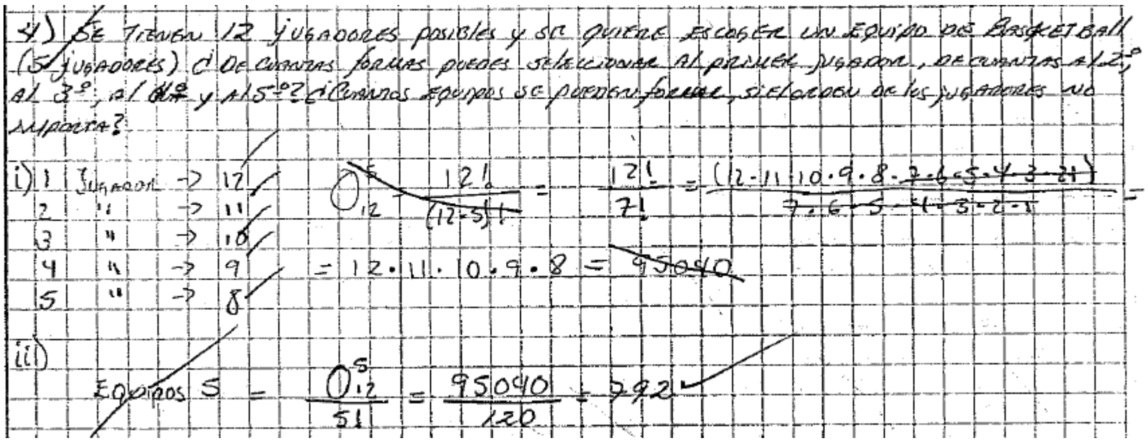
3\) Sean los números 1, 2, 3, 4. Se van a formar números de cuatro dígitos. ¿De cuántas formas puedes seleccionar al primer dígito, al segundo, al tercero y al cuarto? ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse?

i) 1 Núm. 4
2 Núm. 3
3 Núm. 2
4 Núm. 1

$O^4_4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4!}{1} = 4! = 24$

ii) 4 3 2 1 $= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$

Pregunta 4. Reconoce las opciones que tiene cada jugador. Reconoce que el orden no importa y resuelve dividiendo la ordenación entre la permutación para quitar el orden.



4) Se tienen 12 jugadores posibles y se quiere escoger un equipo de Basketball (5 jugadores) ¿De cuantas formas puedes seleccionar al primer jugador, de cuantas al 2º, al 3º, al 4º y al 5º? ¿Cuantos equipos se pueden formar, si el orden de los jugadores no importa?

i) 1 Jugador → 12
2 " → 11
3 " → 10
4 " → 9
5 " → 8

$O^5_{12} = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$

ii) Equipos 5 $= \frac{O^5_{12}}{5!} = \frac{95040}{120} = 792$

Los alumnos cuyo trabajo se analiza son capaces de usar las fórmulas correctamente pues no necesitan hacer la acción de escribir algunos casos para contar. Al parecer han reflexionado sobre las acciones involucradas en las fórmulas y las han interiorizado en un proceso que les permite aplicarlas correctamente y distinguir entre un problema con orden de otro sin orden usando las fórmulas correspondientes. Algunos de ellos parecen haber encapsulado el proceso en un objeto que les permite usar la fórmula de ordenación y dividirla para quitar el orden en lugar de usar la fórmula de combinaciones.

Evolución en las respuestas.

Como se mencionó anteriormente los alumnos tuvieron la oportunidad de resolver los problemas con y sin orden en varias ocasiones. Primero sin haber estudiado el tema, después durante clase y como tarea. Se analizarán las preguntas 2 y 9 para estudiar la manera en que evoluciona la forma en que los alumnos los resuelven. En total hubo siete equipos y treinta y cuatro alumnos entregaron la tarea.

A continuación se muestran las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 2

Sean los números 1, 2, 3, 4. No puedes repetir los números.

a) *¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse? Recuerda que existe orden pues* $12 \neq 21$.

b) *¿Cuántos conjuntos de dos elementos pueden formarse? En este caso no hay orden* $\{1,2\} = \{2,1\}$.

c) *¿Qué diferencia hay entre los dos incisos anteriores?*

d) *¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los incisos a) y b)?*

Solución:

a) $O_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ *números de dos dígitos.*

b) $\binom{4}{2} = 6$ *conjuntos de dos elementos.*

c) *En el inciso a) hay orden mientras que en b) no lo hay.*

d) *Debe dividirse el inciso a) entre 2!= 2 (permutaciones de dos elementos) para obtener el inciso a).*

PREGUNTA 9

Se tienen n objetos y quieres escoger k de ellos, con k < n, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes? ¿Cuántas formas hay de escogerlos si el orden si importa? Explica todo lo que haces.

Solución: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *formas de escoger sin orden.* $O_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ *formas de escoger con orden.*

El análisis de las preguntas es el siguiente.

Pregunta 2. Cuando los alumnos resolvieron en equipo los incisos a) y b) cuatro equipos hicieron la acción de escribir todos los números para contar físicamente y los tres equipos restantes, al parecer, han interiorizado la acción de enumerar en un producto pues multiplican para encontrar la respuesta. Esto contrasta con la primera serie en que resolvieron los problemas con orden. Cuando hicieron los problemas con orden en equipos, en la pregunta dos; nueve hicieron un diagrama y solamente uno hizo el producto. El periodo de reflexión que los alumnos han tenido, aún al cambiar los problemas, les permite hacer productos en lugar de enumerar los casos.

De los alumnos que entregaron la tarea, treinta usan la fórmula de ordenaciones, dos hacen el producto de los dígitos válidos y dos dividen la ordenación para quitar el orden. Al parecer, la primera vez que intentaron resolver el problema necesitaron escribir los casos como acción para desglosar el problema y contar. Sin embargo, después de reflexionar sobre sus acciones, han interiorizado las acciones en un proceso y el enumerar los casos se vuelve innecesario. Parece que han hecho las construcciones mentales necesarias para resolver el problema sin contar físicamente.

Al resolver el inciso c), por equipos, todos mencionan que la diferencia está en que los conjuntos no tienen orden y los números si. Sin embargo, en el inciso d) solamente cuatro equipos hablan de dividir entre dos para quitar el orden y de estos solamente dos dan una razón.

De los alumnos que entregaron la tarea todos mencionan, en el inciso c), al orden como lo que los diferencia. En el inciso d), excepto dos alumnos, los demás explican por qué debe dividirse la ordenación para quitar el orden. Parece que, en este momento, son capaces de entender la fórmula de ordenación y cómo a partir de ésta se llega a la fórmula de combinación. Es decir, parece que han encapsulado el proceso involucrado en este tipo de conteo en un objeto y pueden usar dicho objeto a través de la fórmula de ordenación y dividir para quitar el orden. El periodo de reflexión les ha permitido entender las componentes de ambas fórmulas y su relación.

Pregunta 9. En esta pregunta se pedía a los alumnos que generalizaran las acciones que habían hecho en ambas series y encontraran una fórmula para resolver los problemas que tuvieran orden y otra para los problemas sin orden. En el caso de la fórmula sin orden un equipo no resuelve el problema, dos equipos escriben una fórmula incorrecta, dos escriben la fórmula correcta, pero sin explicación, y dos escriben la fórmula correcta explicando de dónde la obtuvieron. En el caso de la fórmula con orden un equipo no resuelve el problema, dos equipos escriben una fórmula incorrecta, un equipo escribe la fórmula correcta, pero sin explicación, y tres equipos escriben la fórmula correcta explicando de dónde la obtuvieron.

De los alumnos que entregaron la tarea para la fórmula sin orden dos alumnos no resuelven, uno escribe la fórmula con los índices al revés y los demás (treinta y uno) escriben la fórmula correcta, de ellos catorce explican sus componentes. Para la fórmula con orden ocho alumnos no resuelven y los demás escriben la fórmula correcta, de ellos nueve explican sus componentes.

Al resolver este problema por equipos son muy pocos los alumnos que escriben la fórmula y la explican. Sin embargo, al resolver la tarea treinta y un alumnos en el caso sin orden y veintiséis en el caso con orden encontraron las fórmulas correctas. Al parecer, han interiorizado las acciones involucradas en el uso de las fórmulas, pues son capaces de explicar correctamente sus componentes.

4.3 ANÁLISIS DEL EXAMEN DE CONTEO

El examen de conteo fue resuelto por treinta y ocho alumnos. Constó de ocho preguntas y se les dieron dos horas para resolverlo. La pregunta 6 forma parte del tema de conteo, sin embargo no se consideró para el análisis pues queda fuera del interés particular de este trabajo. A continuación se analiza la pregunta 2 que incluye situaciones que tienen orden para analizar la forma en que los alumnos las responden después de haber trabajado en las clases, discutido, resuelto la tarea y estudiado.

Para esta parte se analizarán las respuestas de los alumnos que fueron estudiados en las etapas anteriores. A continuación se muestra la pregunta 2 y su solución, seguida por el análisis.

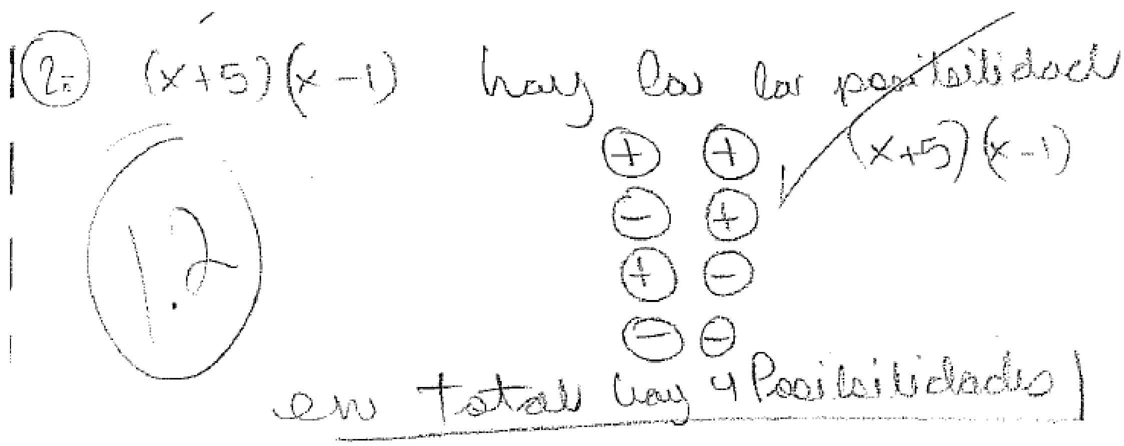
PREGUNTA 2

Si tenemos el siguiente producto de dos binomios con un término común (x+5)(x-1), ¿cuántas formas posibles hay para los signos de los factores?

Solución: 2x2=4.

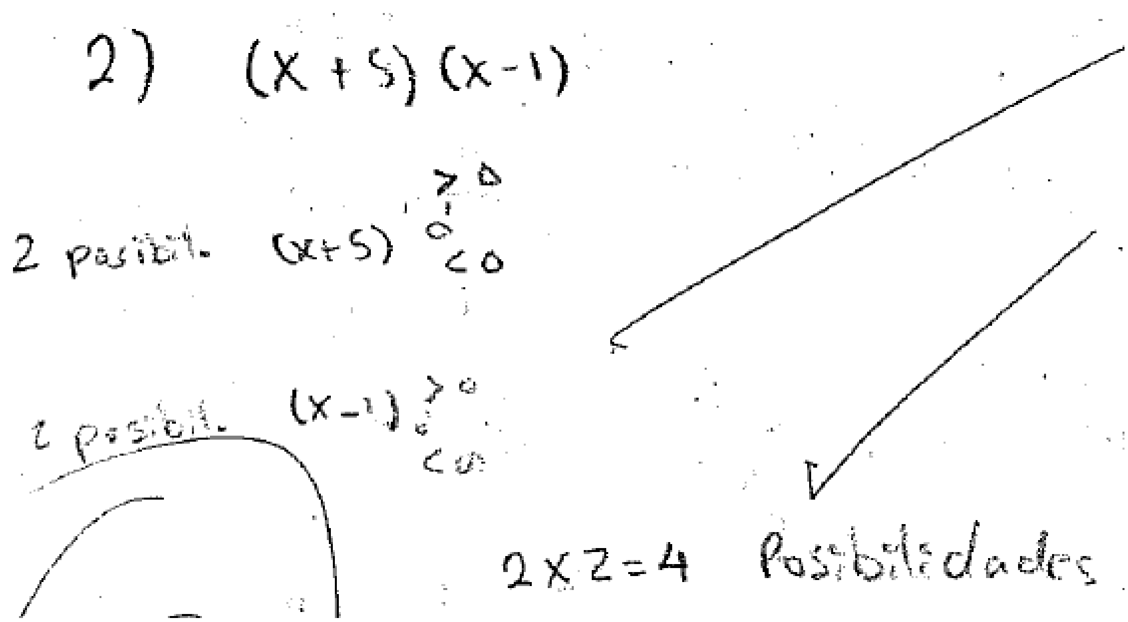
LUIS ANDRÉS

Escribe los casos posibles como acción para desglosar el problema y encontrar el resultado. Al parecer todavía necesita realizar dicha acción para contar físicamente pues no utiliza ninguna fórmula.



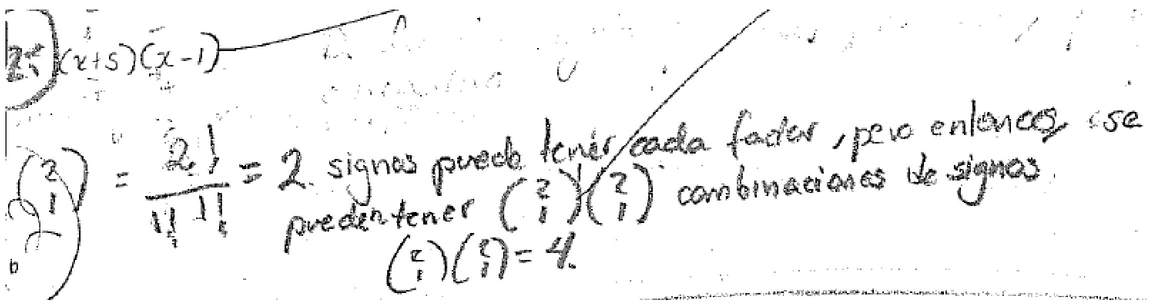
JUAN PABLO

Reconoce que cada factor tiene dos posibilidades, dos signos y hace la acción de multiplicar para encontrar el total de casos. Al parecer ha interiorizado la acción de enumerar los casos en un producto.



FRANCISCO

Reconoce que cada factor puede tener dos signos, pero resuelve como combinación. No necesita desglosar el problema para contar físicamente.



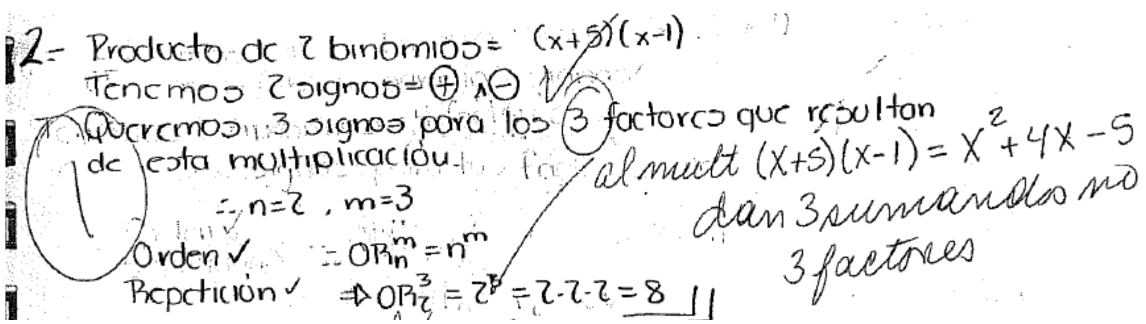
2.- $(x+5)(x-1)$

$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\,1!} = 2$ signos puede tener cada factor, pero entonces se pueden tener $\binom{2}{1}\binom{2}{1}$ combinaciones de signos.

$\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 4$

KAREN

Encuentra los signos del trinomio que resulta al multiplicar los binomios. Reconoce que existe orden y repetición. Ha interiorizado la acción de desglosar el problema en la fórmula de ordenación con repetición. Escribe la fórmula general y sustituye los datos del problema. Responde correctamente lo que ella entiende.



2.- Producto de 2 binomios = $(x+5)(x-1)$

Tenemos 2 signos = $\oplus$ y $\ominus$

Queremos 3 signos para los 3 factores que resultan de esta multiplicación

$\therefore n=2,\ m=3$

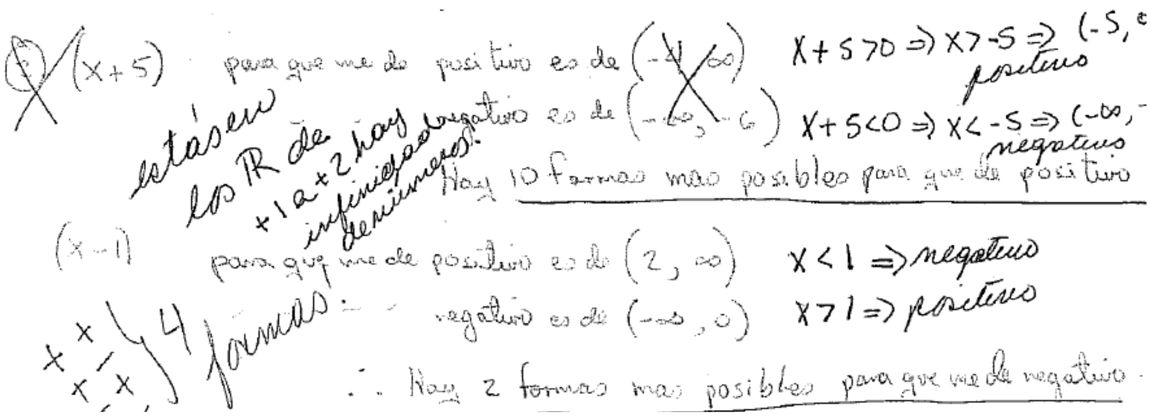
Orden ✓ $\therefore OR_n^m = n^m$

Repetición ✓ $\Rightarrow OR_2^3 = 2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = \underline{8}$

al mult $(x+5)(x-1) = x^2+4x-5$ no dan 3 sumandos no 3 factores

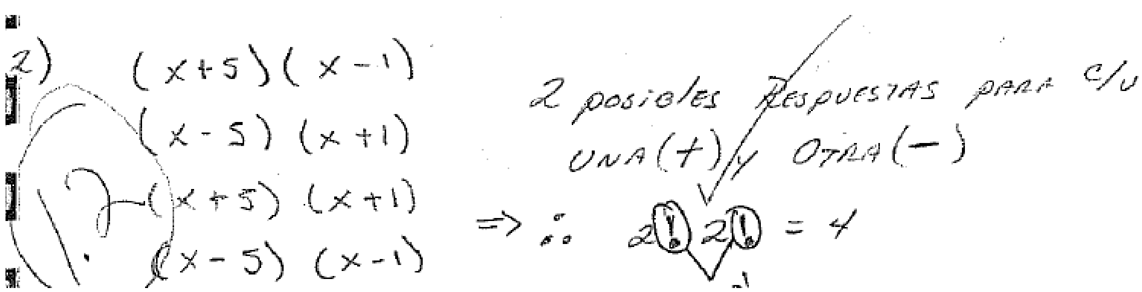
SERGIO

Resuelve el problema encontrando los valores de *x* para los cuáles el factor es positivo o negativo por lo que resuelve de forma incorrecta.



ALMA

Reconoce que tiene dos opciones: positivo y negativo, pero cambia el signo de en medio en lugar del de los factores. Escribe los cuatro casos, pero no como acción para desglosar el problema, sino para explicar su procedimiento. Sin embargo, escribe una solución incorrecta pues utiliza la fórmula de permutación, ordenación sin repetición, en lugar de ordenación con repetición.



A continuación se analiza para los mismos alumnos la pregunta 3 que no tiene orden para seguir la forma en que los alumnos la responden después de haber resuelto los problemas en clase, discutido acerca de ellos, resuelto la tarea y estudiado.

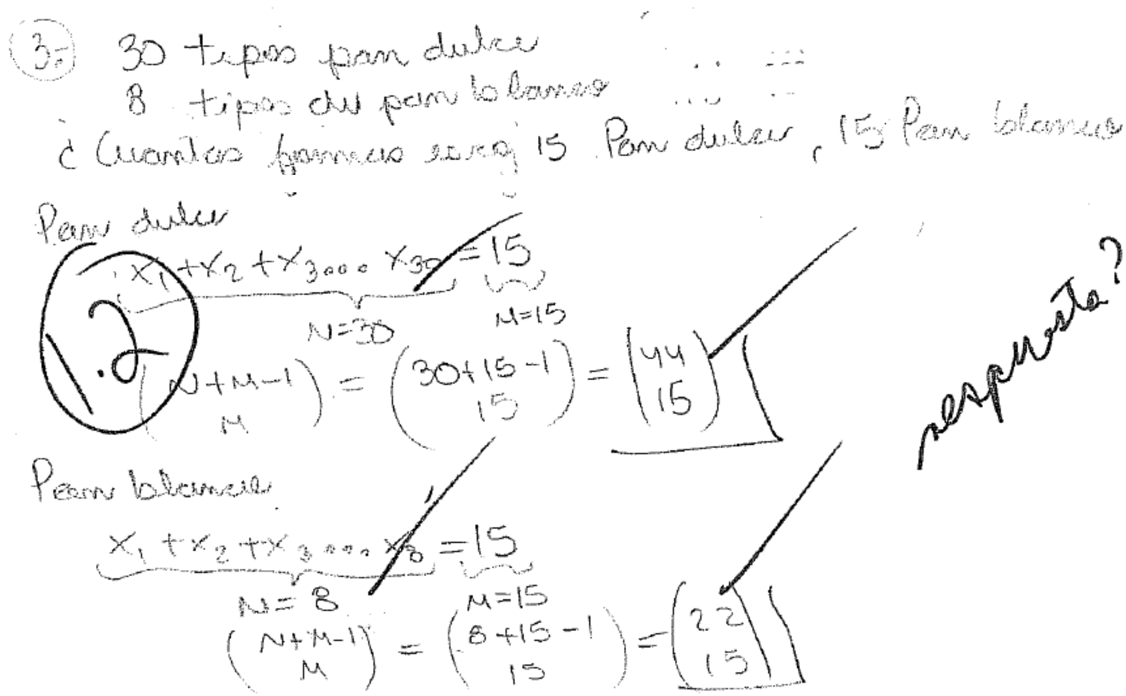
PREGUNTA 3

En una panadería hay treinta tipos de pan dulce y ocho tipos de pan blanco. ¿Dé cuántas formas puede una persona escoger quince panes dulces y quince panes blancos?

Solución: $\binom{44}{15}\binom{22}{15}$.

<u>*LUIS ANDRÉS*</u>

Resuelve por separado el pan dulce del pan blanco. Reconoce que no hay orden y existen objetos idénticos. Al parecer ha interiorizado las acciones en un proceso pues escribe la ecuación correcta y usa la fórmula de combinación con repetición. Sin embargo olvida poner la respuesta.



3.- 30 tipos pan dulce
8 tipos de pan blanco
¿Cuantas formas escoger 15 Pan dulce, 15 Pan blanco

Pan dulce

$\underbrace{x_1+x_2+x_3\ldots x_{30}}_{N=30}=\underbrace{15}_{M=15}$

1.2

$\binom{N+M-1}{M}=\binom{30+15-1}{15}=\boxed{\binom{44}{15}}$

Pan blanco

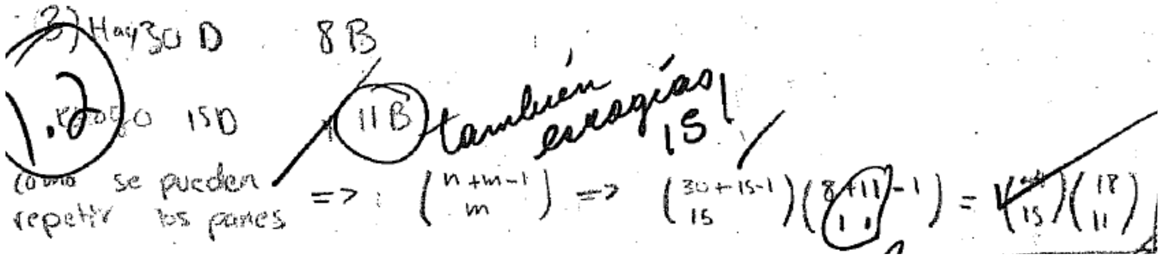
$\underbrace{x_1+x_2+x_3\ldots x_8}_{N=8}=\underbrace{15}_{M=15}$

$\binom{N+M-1}{M}=\binom{8+15-1}{15}=\boxed{\binom{22}{15}}$

respuesta?

<u>*JUAN PABLO*</u>

Reconoce que no hay orden y hay repetición. Utiliza correctamente la fórmula de combinación con repetición. Se equivoca al copiar el problema y escoge once panes blancos en lugar de quince. Sin embargo, al parecer ha interiorizado las acciones de contar en un proceso pues aplica correctamente la fórmula.

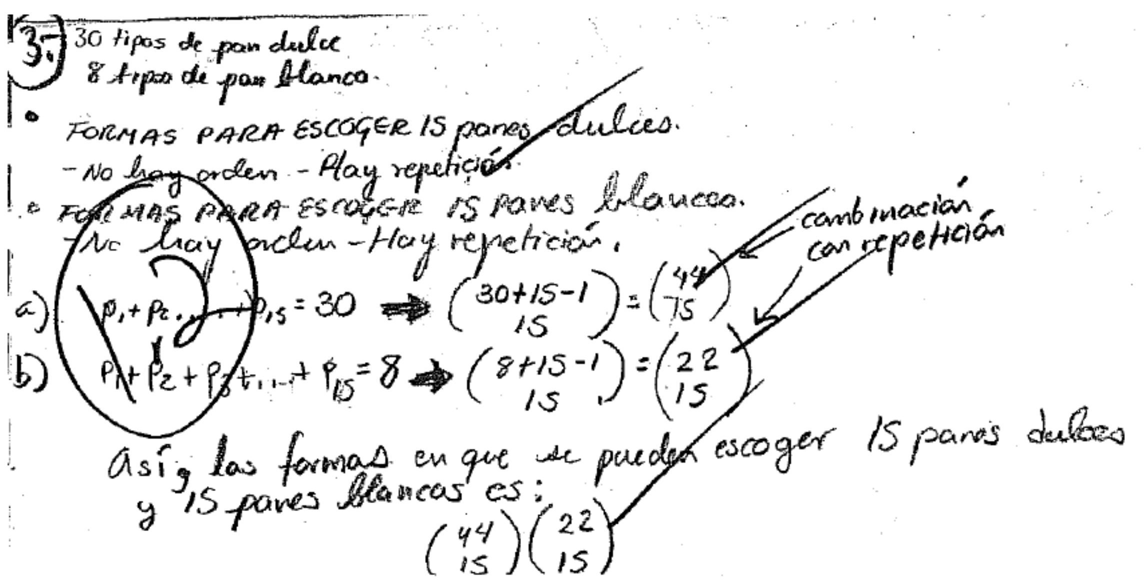

3) Hay 30 D 8 B

15 D 11 B también escogías 15!

Como se pueden repetir los panes $\Rightarrow \binom{n+m-1}{m} \Rightarrow \binom{30+15-1}{15}\binom{8+11-1}{11} = \binom{44}{15}\binom{18}{11}$

FRANCISCO

Separa el pan dulce del pan blanco y al final usa el principio del producto para encontrar el total. Reconoce que no hay orden y hay repetición. Al parecer ha interiorizado las acciones en un proceso pues escribe la ecuación correcta y usa la fórmula de combinación con repetición.


3. 30 tipos de pan dulce
8 tipos de pan blanco.

• FORMAS PARA ESCOGER 15 panes dulces.
- No hay orden - Hay repetición

• FORMAS PARA ESCOGER 15 PANES blancos.
- No hay orden - Hay repetición.

combinación con repetición

a) $p_1+p_2+\dots+p_{15}=30 \Rightarrow \binom{30+15-1}{15}=\binom{44}{15}$

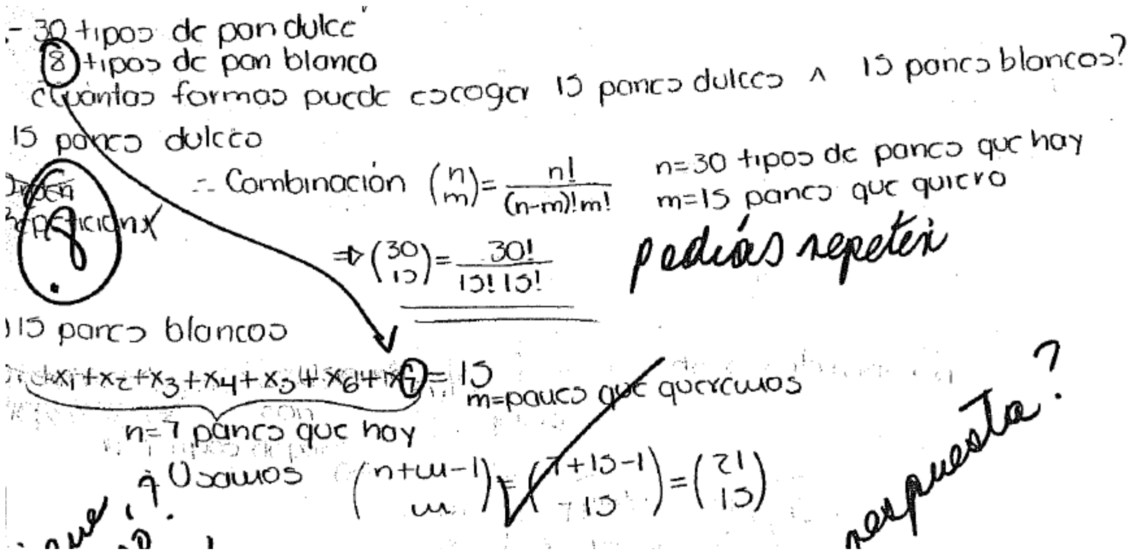
b) $p_1+p_2+p_3+\dots+p_{15}=8 \Rightarrow \binom{8+15-1}{15}=\binom{22}{15}$

Así, las formas en que se pueden escoger 15 panes dulces y 15 panes blancos es:

$\binom{44}{15}\binom{22}{15}$

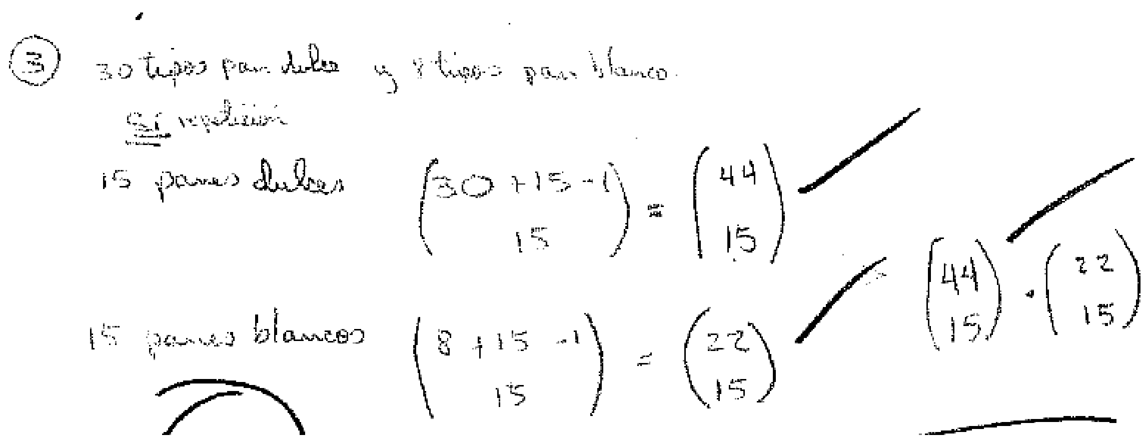
KAREN

Reconoce que no hay orden. En el caso del pan dulce no permite las repeticiones, probablemente porque son treinta panes y escogerá quince. Utiliza correctamente la fórmula de combinaciones. En el caso del pan blanco permite las repeticiones, aclara que hay siete panes y se escogerán quince. Utiliza correctamente la fórmula de combinaciones con repetición. Tiene un error al copiar el problema pues son ocho panes en total y no siete. Se olvida de poner la respuesta final. Al parecer ha encapsulado en un objeto las fórmulas pues utiliza dos fórmulas distintas al tener datos diferentes en un mismo problema.



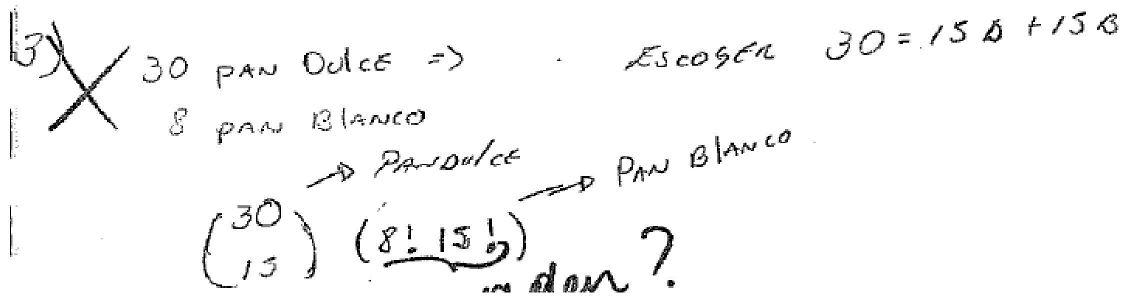
<u>*SERGIO*</u>

Reconoce que no hay orden y hay repetición. Al parecer ha interiorizado las acciones de contar en un proceso pues usa correctamente la fórmula de combinación con repetición. Resuelve por separado los dos tipos de pan y al finalizar utiliza el principio del producto para encontrar el total.



ALMA

Para seleccionar el pan dulce reconoce que no hay orden pero no permite repeticiones lo cual la lleva a utilizar la fórmula de combinaciones de forma correcta. Sin embargo, tiene conflicto con el pan blanco pues solamente hay ocho tipos y debe seleccionar quince. En este caso, permite el orden y utiliza la fórmula de permutaciones, lo cual es incorrecto.



3) 30 pan Dulce => Escoger 30 = 15 D + 15 B

8 pan Blanco

→ Pan dulce → Pan Blanco

$\binom{30}{15}$ (8! 15!)

?

A continuación se analizarán las preguntas 4 y 7 que incluyen situaciones que tienen y no tienen orden para analizar la forma en que los mismos alumnos responden después de haber resuelto los problemas en clase, discutido acerca de ellos, resuelto la tarea y estudiado. Se muestran en primer término las preguntas y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 4

En un salón hay siete niñas y nueve niños.

a) ¿Dé cuántas formas puede el profesor de deportes formarlos de tal manera que en la fila aparezcan primero las niñas y después los niños?

b) ¿Dé cuántas formas puede formarlos de tal manera que la fila siga el siguiente patrón: MHMHHMHMHHMHMHHM.

c) ¿Cuántos equipos de fútbol (once jugadores) se pueden formar de tal manera que el número de hombres en el equipo sea siempre al menos uno más que el número de mujeres?

Solución:

a) *7!9! filas.*

b) *7!9! filas.*

c) $\binom{9}{9}\binom{7}{2}+\binom{9}{8}\binom{7}{3}+\binom{9}{7}\binom{7}{4}+\binom{9}{6}\binom{7}{5}$ *equipos.*

PREGUNTA 7

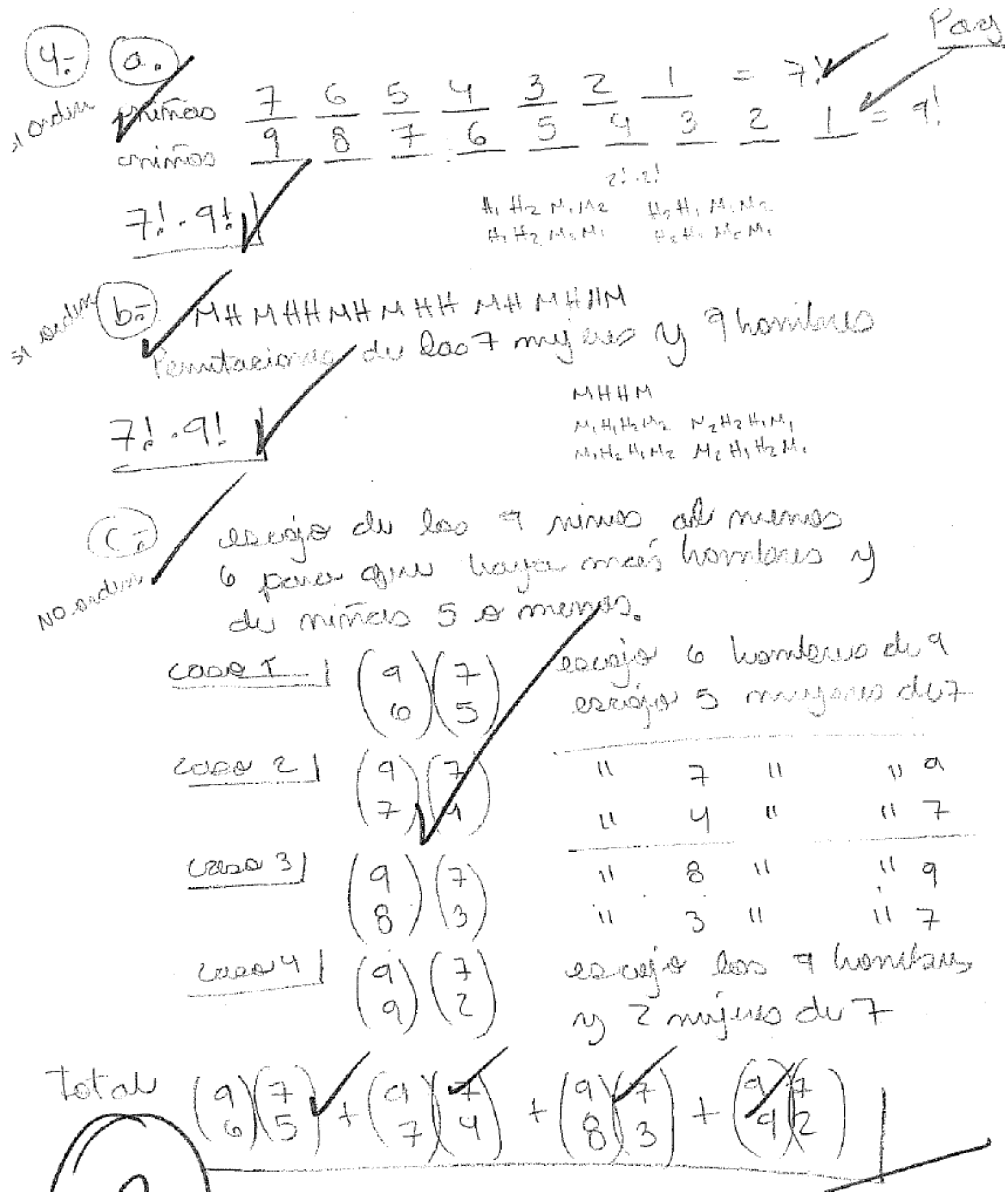
¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra mississippi que no tengan las letras s consecutivas? ***¡¡¡EXPLICA DETALLADAMENTE QUÉ FÓRMULAS USAS Y PORQUÉ!!! La explicación cuenta la mitad de la pregunta.***

Solución: $\frac{7!}{4!2!}\binom{8}{4}$ *palabras distintas.*

A continuación se muestra el análisis de las preguntas.

LUIS ANDRÉS

Pregunta 4. a) y b) Reconoce que existe orden y no hay repeticiones. Explica claramente su respuesta. Utiliza correctamente la fórmula de permutación. c) Reconoce que ahora no hay orden ni repetición. Separa en casos. Utiliza correctamente la fórmula de combinaciones.



Pag

4.- a.- si orden

niñas $\frac{7}{9}\ \frac{6}{8}\ \frac{5}{7}\ \frac{4}{6}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{}{2}\ \frac{}{1}$ $= 7!$ $= 9!$

niños

$7!\cdot 9!$

2!·2!

$H_1H_2M_1M_2$ $H_2H_1M_1M_2$

$H_1H_2M_2M_1$ $H_2H_1M_2M_1$

si orden b.- MH MHHMHMHH MH MHHM

Permutaciones de las 7 mujeres y 9 hombres

$7!\cdot 9!$

MHHM

$M_1H_1H_2M_2$ $M_2H_2H_1M_1$

$M_1H_2H_1M_2$ $M_2H_1H_2M_1$

NO orden c.- escojo de los 9 niños al menos 6 para que haya más hombres y de niñas 5 o menos.

caso 1 | $\binom{9}{6}\binom{7}{5}$ escojo 6 hombres de 9 escojo 5 mujeres de 7

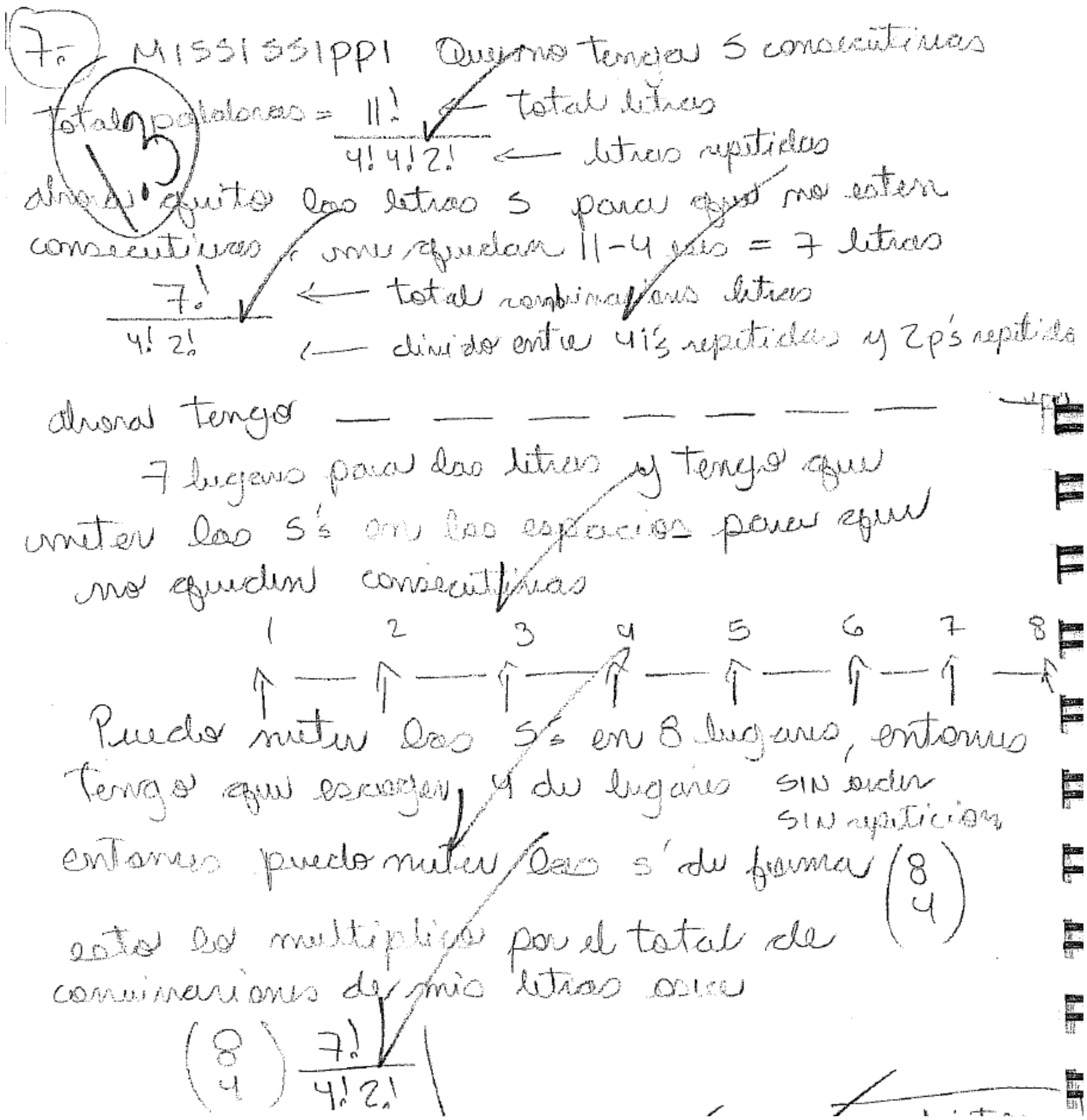
caso 2 | $\binom{9}{7}\binom{7}{4}$ " 7 " " 9 " 4 " " 7

caso 3 | $\binom{9}{8}\binom{7}{3}$ " 8 " " 9 " 3 " " 7

caso 4 | $\binom{9}{9}\binom{7}{2}$ escojo los 9 hombres y 2 mujeres de 7

Total $\binom{9}{6}\binom{7}{5}+\binom{9}{7}\binom{7}{4}+\binom{9}{8}\binom{7}{3}+\binom{9}{9}\binom{7}{2}$

Pregunta 7. Separa las letras *"s"* de las demás letras. Reconoce que las demás letras tienen orden y utiliza la fórmula de permutación distinguible. Para las letras *"s"* reconoce que se trata de escoger lugares por lo que no existe orden ni repetición. Usa la fórmula de combinaciones. Al final multiplica para encontrar el total de casos. Explica claramente todos los pasos.



7. MISSISSIPPI Quiero no tener S consecutivas

Total palabras = $\frac{11!}{4!4!2!}$ ← total letras
← letras repetidas

ahora quito las letras S para que no esten consecutivas me quedan 11−4 s's = 7 letras

$\frac{7!}{4!2!}$ ← total combinaciones letras
← divido entre 4 i's repetidas y 2 p's repetidas

ahora tengo _ _ _ _ _ _ _
7 lugares para las letras y tengo que meter las S's en los espacios para que no queden consecutivas

1 2 3 4 5 6 7 8

Puedo meter las S's en 8 lugares, entonces tengo que escoger 4 de lugares sin orden sin repeticion

entonces puedo meter las s' de forma $\binom{8}{4}$

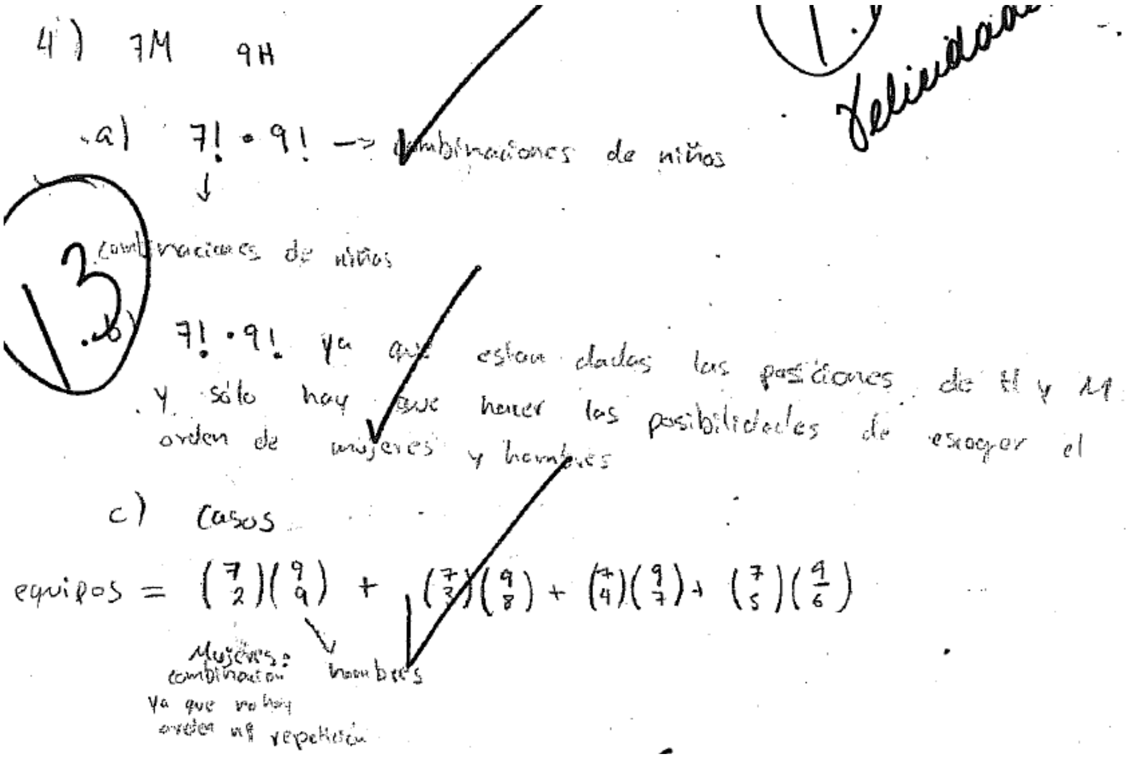
esto lo multiplico por el total de combinaciones de mis letras osea

$\binom{8}{4}\frac{7!}{4!2!}$

Este alumno, al parecer, ha encapsulado las fórmulas en un objeto que le permite aplicar distintas fórmulas en un mismo problema. Además explica claramente su procedimiento.

<u>JUAN PABLO</u>

Pregunta 4. a) y b) Reconoce que existe orden y no hay repetición. Utiliza correctamente la fórmula de permutación. c) Reconoce que sigue sin haber repeticiones, pero ahora no hay orden y utiliza la fórmula de combinaciones.



4) 7M 9H

a) $7! \cdot 9!$ → combinaciones de niños

↓

combinaciones de niños

b) $7! \cdot 9!$ ya que están dadas las posiciones de H y M y sólo hay que hacer las posibilidades de escoger el orden de mujeres y hombres

c) casos

equipos = $\binom{7}{2}\binom{9}{9} + \binom{7}{3}\binom{9}{8} + \binom{7}{4}\binom{9}{7} + \binom{7}{5}\binom{9}{6}$

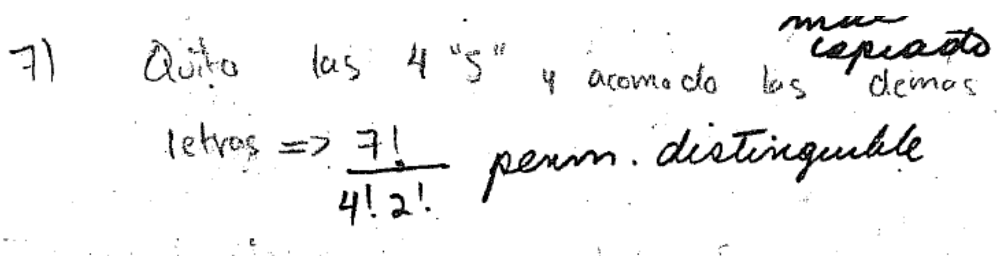
Mujeres: combinación ya que no hay orden ni repetición

hombres

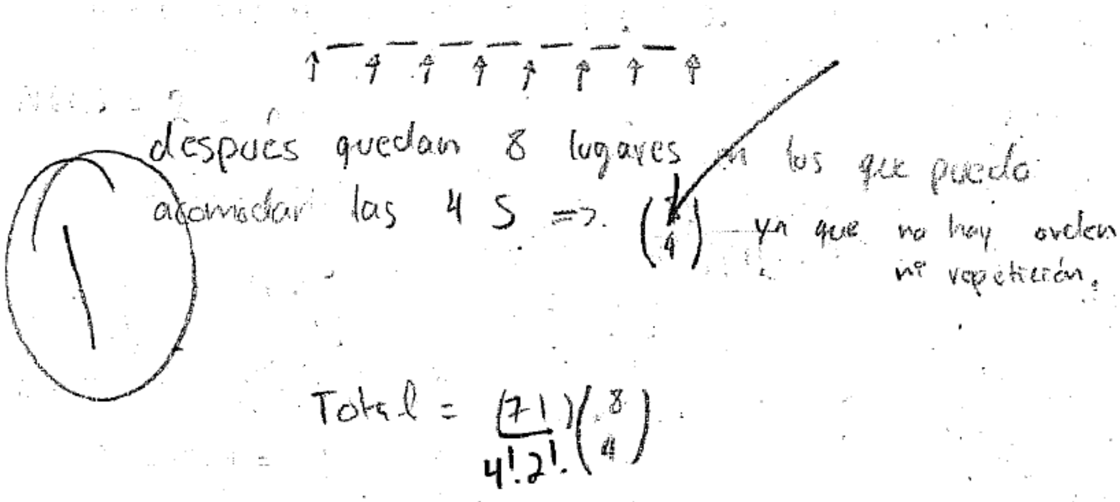
1. felicidades

3

Pregunta 7. Separa las letras *"s"* de las demás letras. Reconoce que para las demás letras existe el orden, pero no se da cuenta de que existen objetos idénticos por lo que resuelve como permutación y no como permutación distinguible. Para las letras *"s"* reconoce que no hay orden ni repetición y utiliza la fórmula de combinaciones.



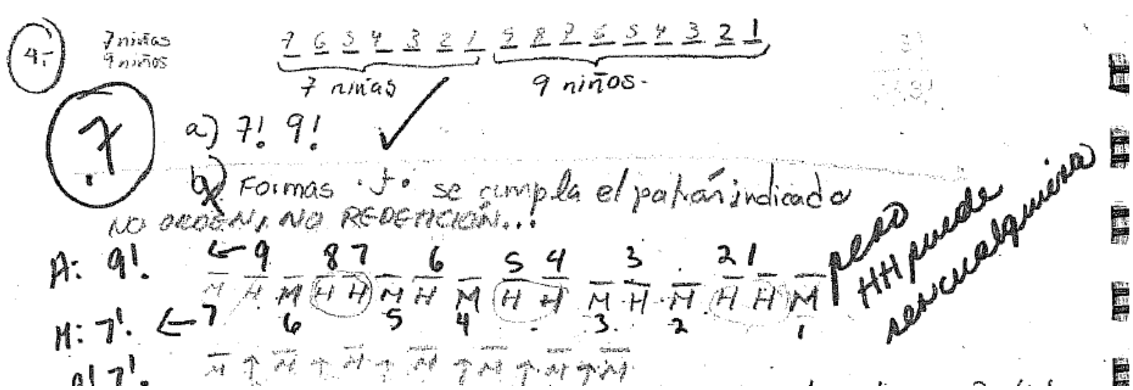
7) Quito las 4 "S" y acomodo las mas repetidas demas letras => $\frac{7!}{4!\,2!}$ perm. distinguible

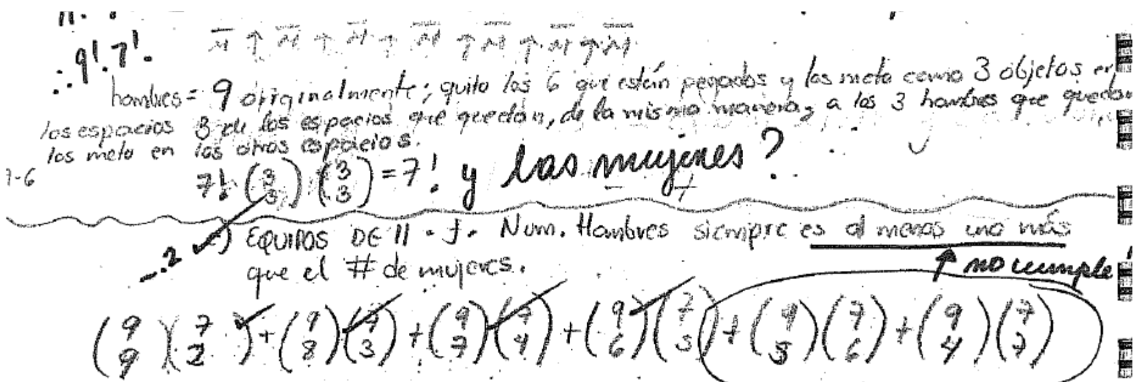


Aún y cuando, tiene un error, este alumno parece haber encapsulado las fórmulas en un objeto y puede aplicar distintas fórmulas en un mismo problema.

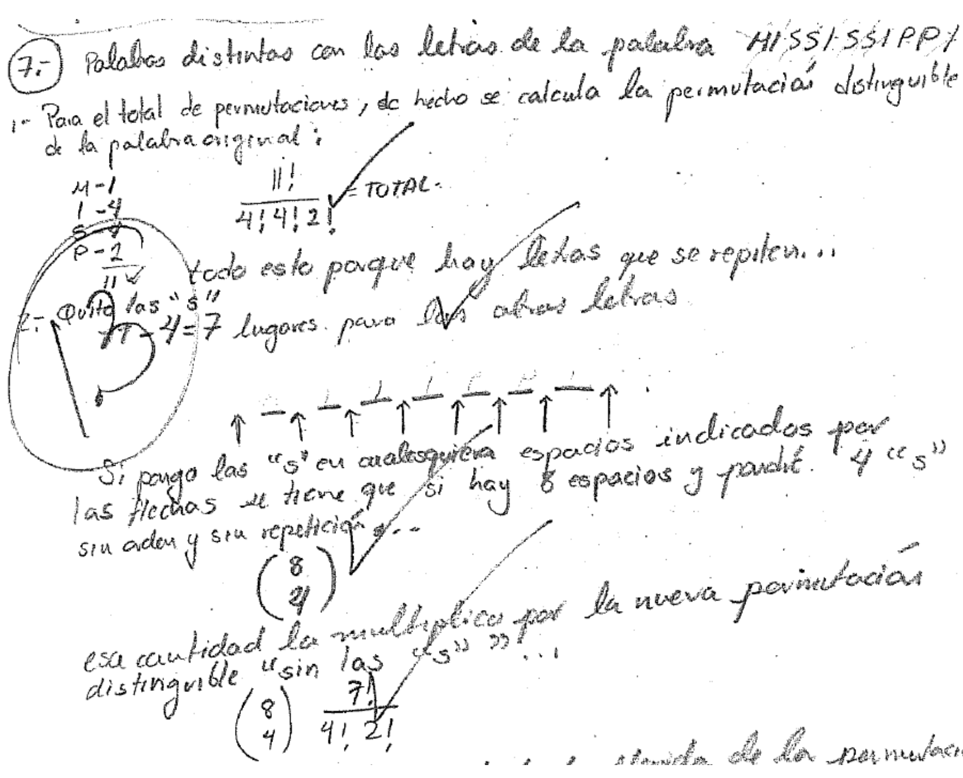
FRANCISCO

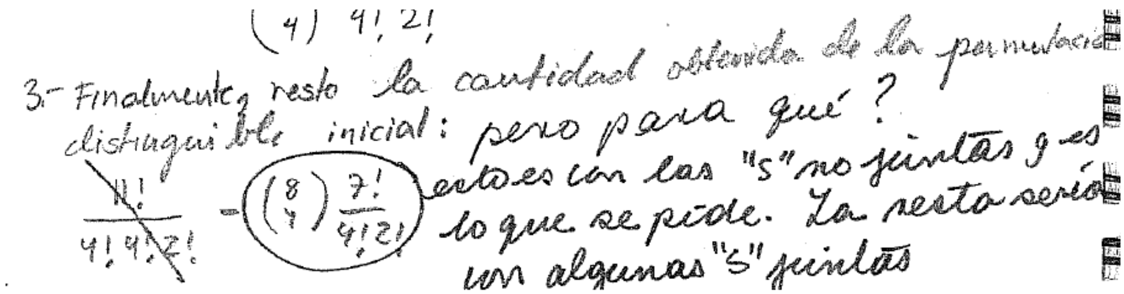
Pregunta 4. a) Reconoce que existe orden y no hay repetición. Resuelve correctamente como una permutación. b) Resuelve solamente para los hombres. Utiliza la fórmula de permutación, pero agrega dos combinaciones erróneas. c) Reconoce que no hay orden ni repetición. Separa en seis casos: cuatro de ellos son los correctos, sin embargo, dos no cumplen la condición de que al menos haya un hombre más que el número de mujeres. Utiliza correctamente la fórmula de combinaciones.





Pregunta 7. Explica claramente todo su procedimiento. Reconoce que una parte del problema tiene orden y objetos idénticos por lo que usa la fórmula de permutación distinguible, mientras que la otra parte no tiene ni orden ni repetición y utiliza la fórmula de combinación. Usando el principio del producto multiplica ambos resultados. Sin embargo, al final resta del total el producto anterior, lo que le da la respuesta opuesta; el total de palabras con algunas letras *"s"* juntas.




(4) 4! 2!

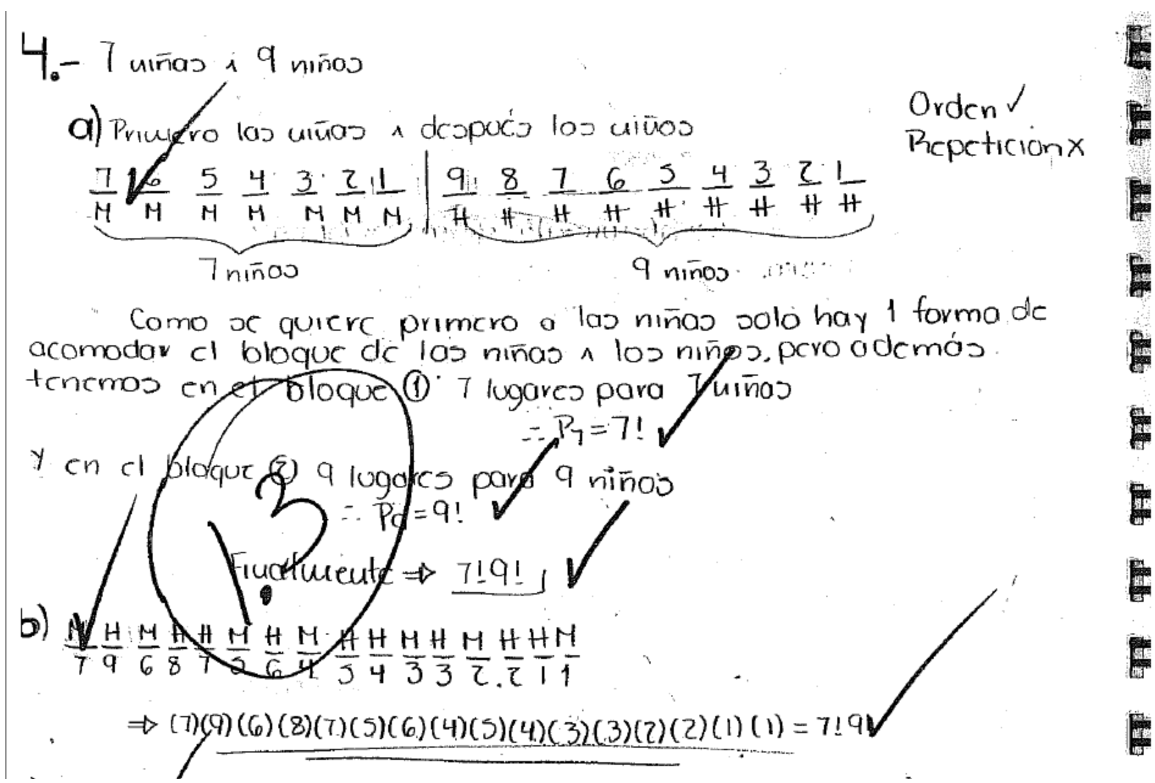
3.- Finalmente, resto la cantidad obtenida de la permutación distinguible inicial: pero para qué?

$\frac{11!}{4!4!2!} - \binom{8}{4}\frac{7!}{4!2!}$ esto es con las "s" no juntas y es lo que se pide. La resta sería con algunas "s" juntas

Este alumno, aunque resuelve un inciso de forma incorrecta, al parecer, ha encapsulado las fórmulas en un objeto que le permite usar distintas fórmulas en un mismo problema.

<u>*KAREN*</u>

Pregunta 4. a) y b) Reconoce que existe orden y no hay repeticiones. Utiliza la fórmula de permutaciones. c) Reconoce que en este caso sigue sin haber repeticiones pero ahora el orden no importa. Utiliza la fórmula de combinaciones.


4.- 7 niñas y 9 niños

a) Primero las niñas y después los niños

Orden ✓
Repetición X

7 6 5 4 3 2 1 | 9 8 7 6 5 4 3 2 1
M M M M M M M | H H H H H H H H H

7 niños — 9 niños

Como se quiere primero a las niñas solo hay 1 forma de acomodar el bloque de las niñas y los niños, pero además tenemos en el bloque ① 7 lugares para 7 niñas $\therefore P_7 = 7!$

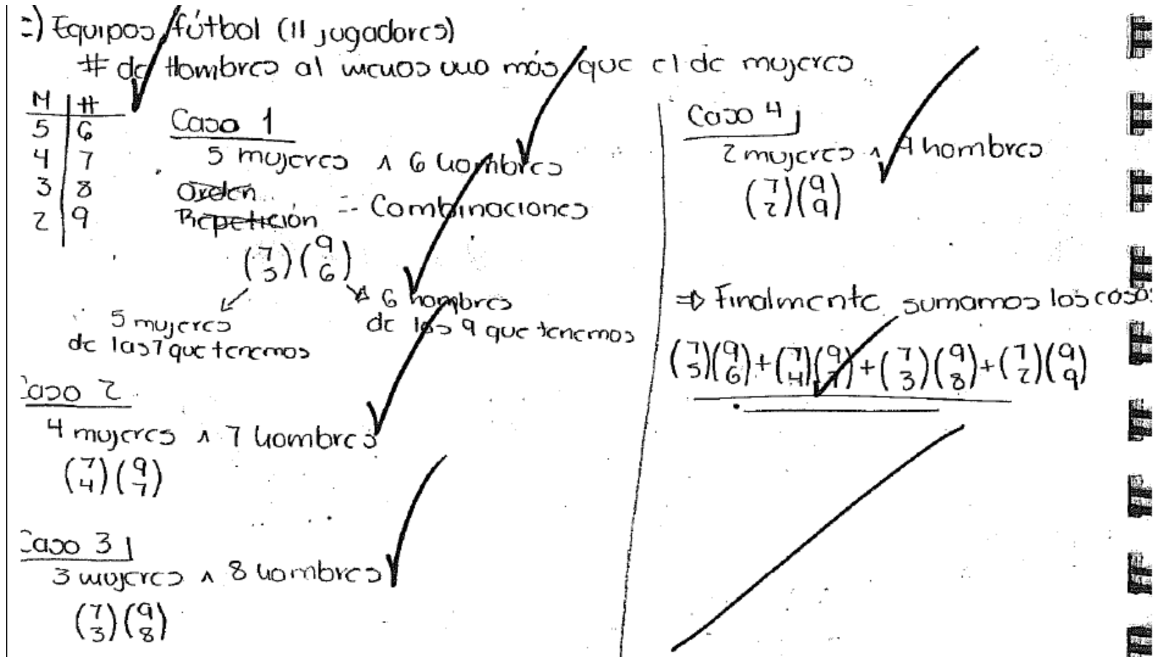
y en el bloque ② 9 lugares para 9 niños $\therefore P_9 = 9!$

Finalmente $\Rightarrow$ 7!9!

13

b) M H M H M H M H H H H H H H H H
7 9 6 8 7 5 6 4 5 4 3 3 2 2 1 1

$\Rightarrow (7)(9)(6)(8)(7)(5)(6)(4)(5)(4)(3)(3)(2)(2)(1)(1) = 7!9!$


:) Equipos fútbol (11 jugadores)
de hombres al menos uno más que el de mujeres

M	H
5	6
4	7
3	8
2	9

Caso 1
5 mujeres ∧ 6 hombres
~~Orden~~
~~Repetición~~ ∴ Combinaciones
$\binom{7}{5}\binom{9}{6}$
5 mujeres de las 7 que tenemos
6 hombres de los 9 que tenemos

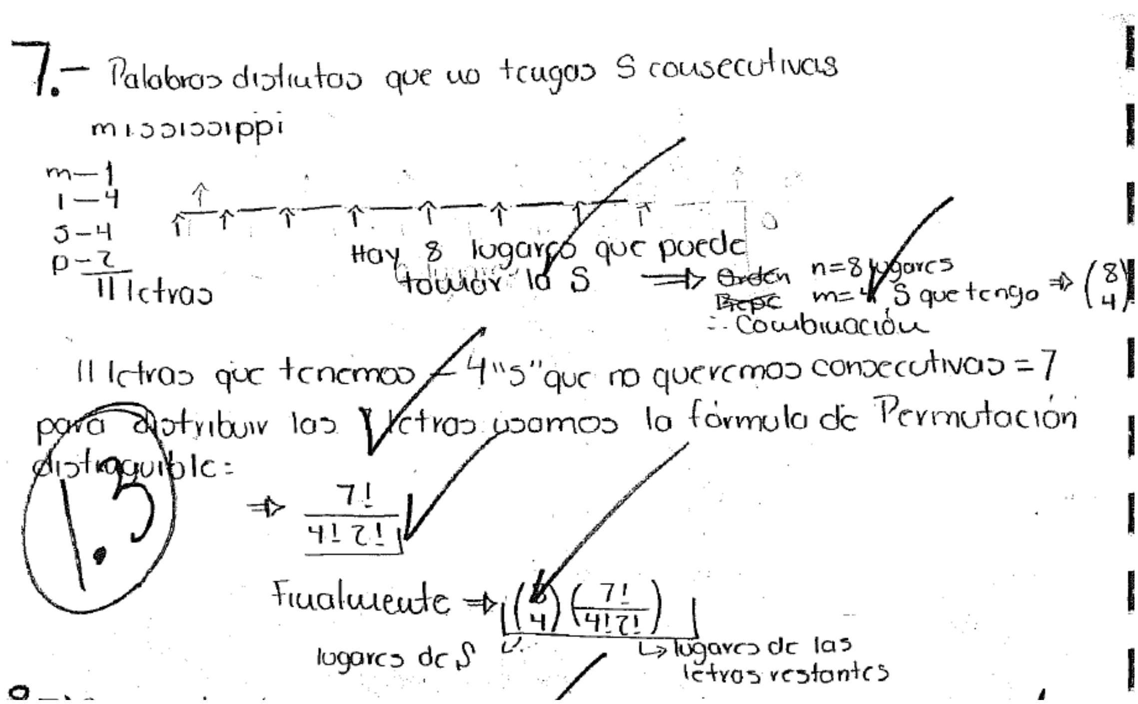
Caso 2
4 mujeres ∧ 7 hombres
$\binom{7}{4}\binom{9}{7}$

Caso 3
3 mujeres ∧ 8 hombres
$\binom{7}{3}\binom{9}{8}$

Caso 4
2 mujeres ∧ 9 hombres
$\binom{7}{2}\binom{9}{9}$

⇒ Finalmente sumamos los casos
$\binom{7}{5}\binom{9}{6}+\binom{7}{4}\binom{9}{7}+\binom{7}{3}\binom{9}{8}+\binom{7}{2}\binom{9}{9}$

Pregunta 7. Separa las letras *"s"* de las demás letras. Utiliza correctamente la fórmula de permutación distinguible para las demás letras y la fórmula de combinaciones para las letras *"s"*.


7.– Palabras distintas que no tengan S consecutivas
mississippi

m — 1
i — 4
s — 4
p — 2
11 letras

Hay 8 lugares que puede tomar la S ⇒ ~~Orden~~ ~~Repe~~ ∴ Combinación
n = 8 lugares
m = 4 S que tengo ⇒ $\binom{8}{4}$

11 letras que tenemos − 4 "s" que no queremos consecutivas = 7
para distribuir las 7 letras usamos la fórmula de Permutación distinguible:
⇒ $\frac{7!}{4!\,2!}$

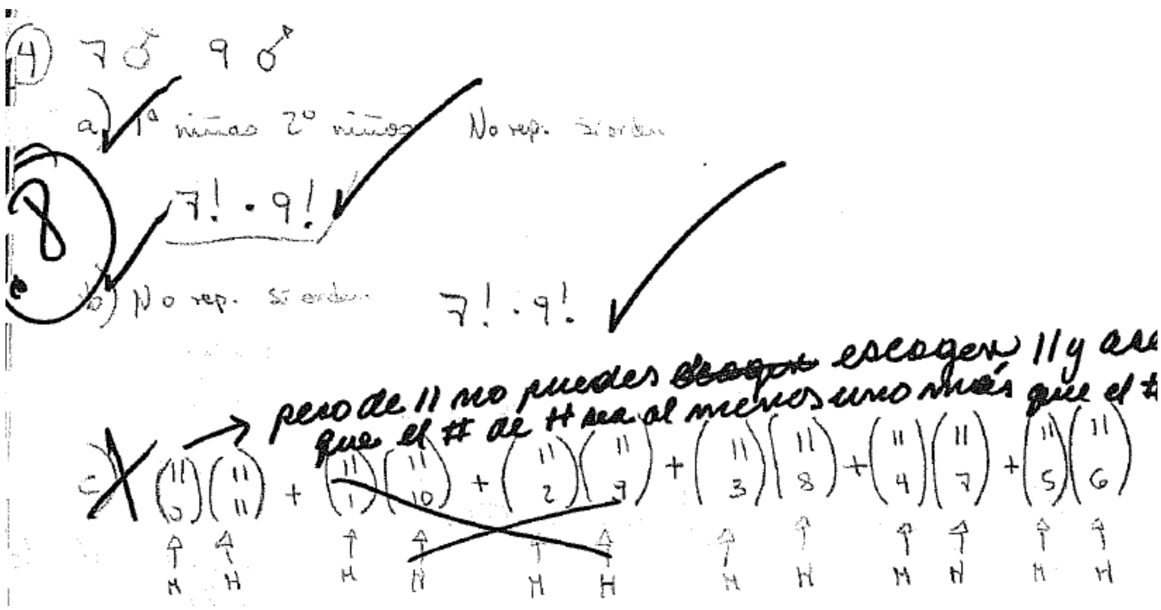
Finalmente ⇒ $\binom{8}{4}\left(\frac{7!}{4!\,2!}\right)$
lugares de S
lugares de las letras restantes

1.5

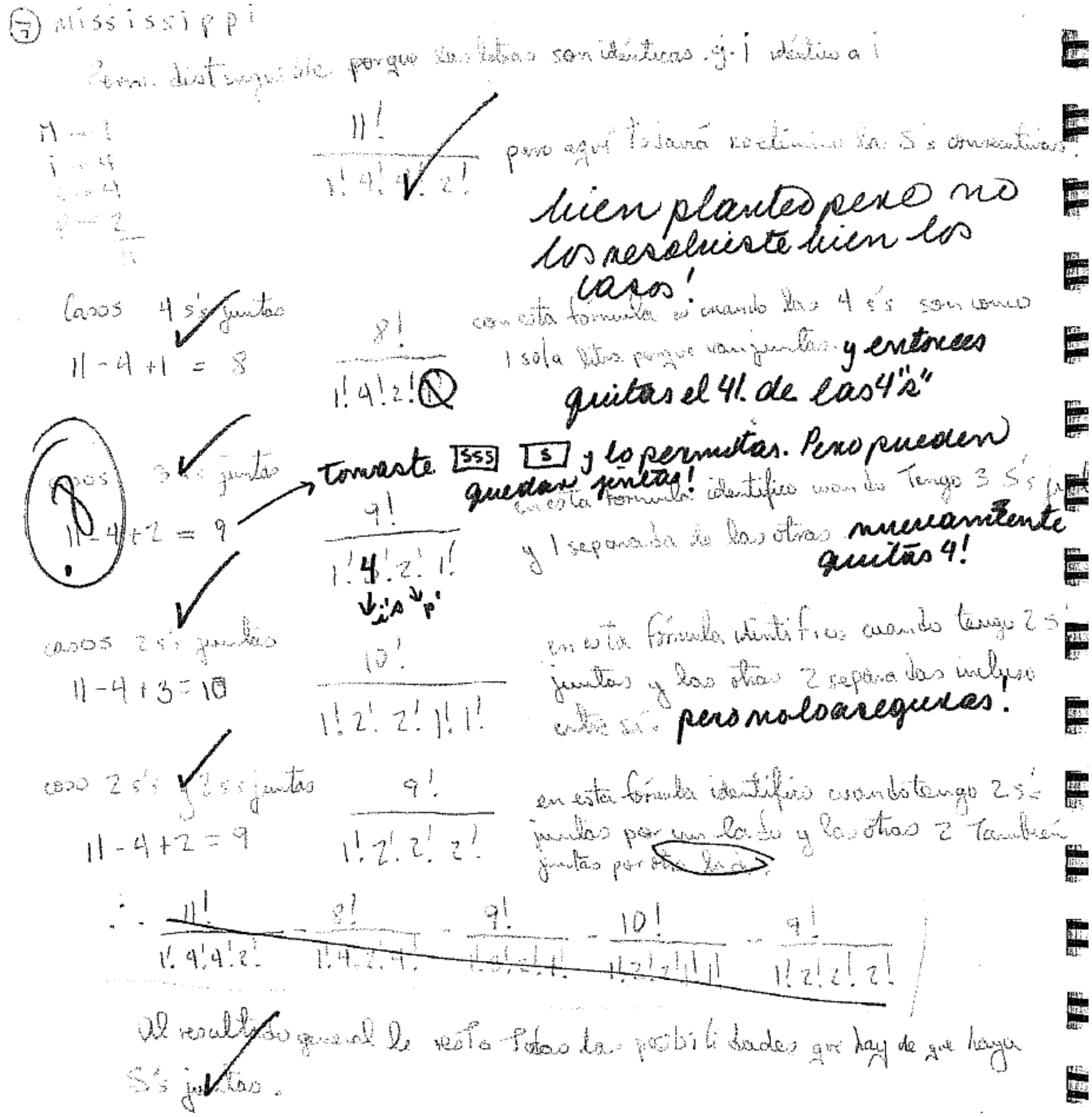
Esta alumna al parecer ha encapsulado el proceso de aplicación de las fórmulas en un objeto pues utiliza dos fórmulas distintas en un mismo problema.

<u>*SERGIO*</u>

Pregunta 4. a) y b) Reconoce que hay orden y no repeticiones. Utiliza correctamente la fórmula de permutaciones. c) Reconoce que no hay orden ni repeticiones y utiliza la fórmula de combinaciones. Sin embargo, resuelve de forma incorrecta pues escoge de once personas lo que no asegura la condición que se pide.



Pregunta 7. Separa las letras *"s"* de las demás letras. Separa por casos para encontrar las palabras donde las letras *"s"* estén juntas, lo cual es correcto, pero lo resuelve de forma incompleta. Encuentra el total de palabras distintas que hay con la fórmula de permutación distinguible y hace la acción de restar los casos que resolvió, esto último es correcto.



(7) mississippi

Perm. distinguible porque las letras son idénticas, ej. i idéntica a i

m → 1
i → 4
s → 4
p → 2
11

$\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$ pero aquí tomará en cuenta las S's consecutivas.

bien planteado pero no los resolviste bien los casos!

casos 4 s's juntas
$11-4+1=8$ $\quad \frac{8!}{1!\,4!\,2!\,1!}$ con esta fórmula es cuando las 4 s's son como 1 sola letra porque van juntas y entonces quitas el 4! de las 4 "s" y los permutas. Pero pueden quedar juntas!

casos 3 s's juntas
$11-4+2=9$ $\quad \frac{9!}{1!\,4!\,2!\,1!}$ tomaste $\boxed{SSS}$ $\boxed{S}$ con esta fórmula identifico cuando tengo 3 S's juntas y 1 separada de las otras nuevamente quitas 4!

i's p'

casos 2 s's juntas
$11-4+3=10$ $\quad \frac{10!}{1!\,2!\,2!\,1!\,1!}$ en esta fórmula identifico cuando tengo 2 S's juntas y las otras 2 separadas incluso entre sí. pero no los agregas.

caso 2 s's y 2 s's juntas
$11-4+2=9$ $\quad \frac{9!}{1!\,2!\,2!\,2!}$ en esta fórmula identifico cuando tengo 2 S's juntas por un lado y las otras 2 también juntas por otro lado

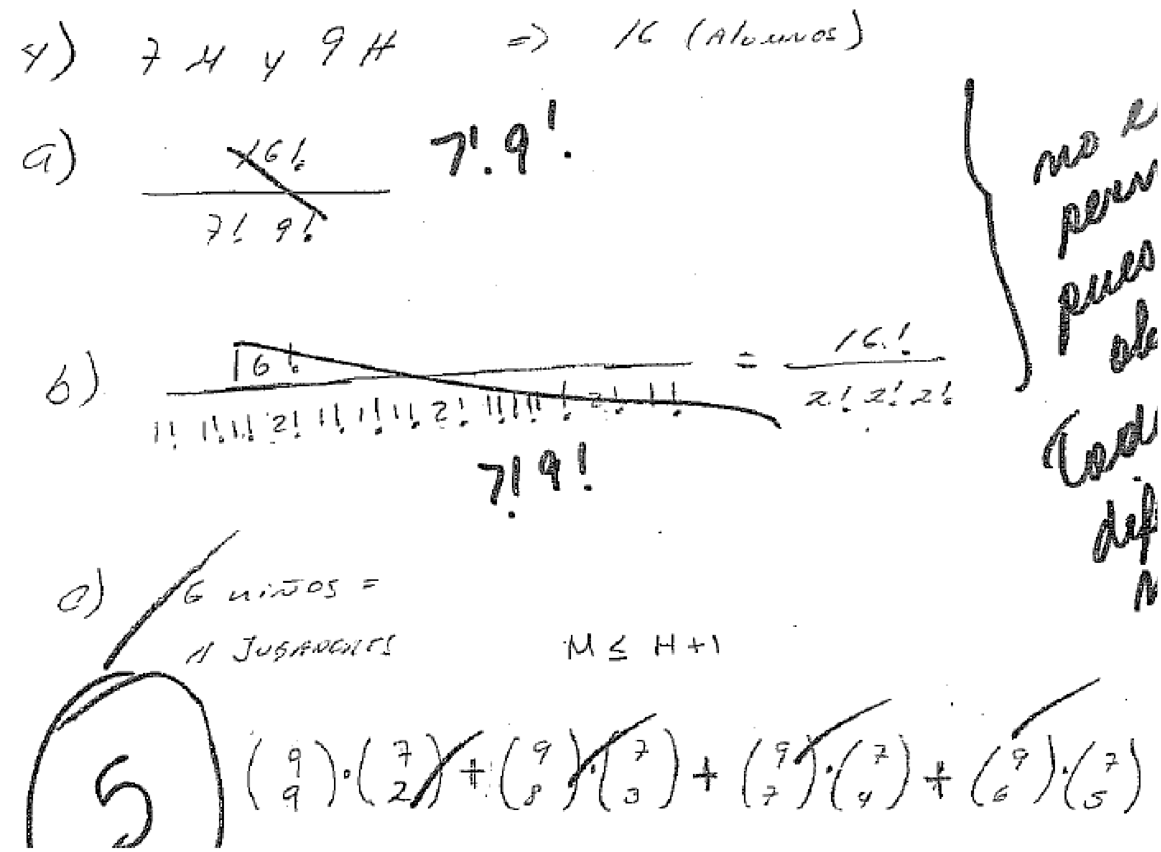
$\therefore \frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} - \frac{8!}{1!\,4!\,2!\,4!} - \frac{9!}{1!\,4!\,2!\,1!} - \frac{10!}{1!\,2!\,2!\,1!\,1!} - \frac{9!}{1!\,2!\,2!\,2!}$

Al resultado general le resto todas las posibilidades que hay de que haya S's juntas.

Este alumno, aún y cuando llegó a algunos resultados incorrectos, parece haber interiorizado las acciones en un proceso que le permite aplicar correctamente las fórmulas.

ALMA

Pregunta 4. a) y b) Reconoce que existe el orden. Sin embargo, suma todos los alumnos y resuelve como permutación distinguible, es decir, como si existieran objetos iguales. Supone que todas las niñas son iguales y todos los niños también. c) Reconoce que no hay orden ni repetición y separa en casos. Utiliza correctamente la fórmula de combinaciones.


4) 7 M y 9 H ⇒ 16 (Alumnos)

a) $\cancel{\dfrac{16!}{7!\,9!}}$ $7!\cdot 9!$

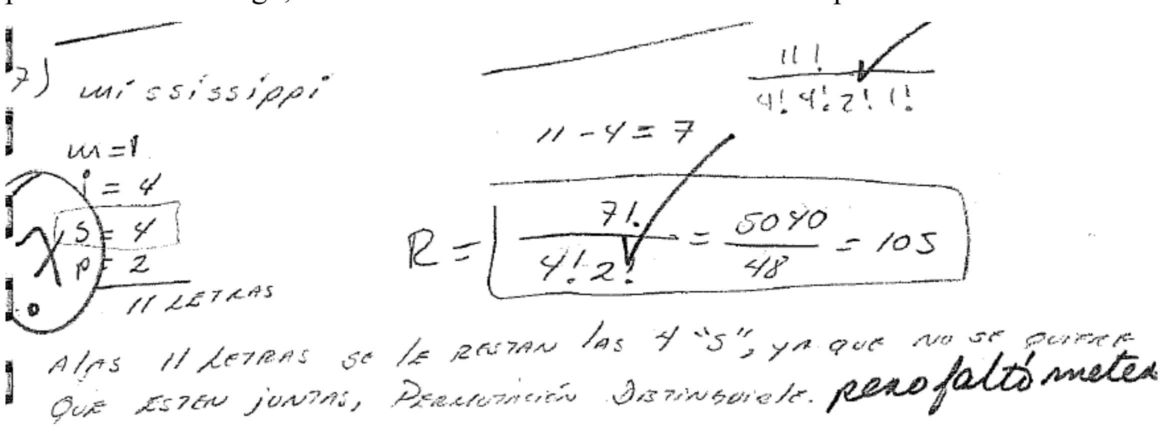
b) $\cancel{\dfrac{16!}{1!\,1!\,1!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!}} = \dfrac{16!}{2!\,2!\,2!}$

$7!\,9!$

c) 16 niños = 11 jugadores $M \leq H+1$

5 $\binom{9}{9}\cdot\binom{7}{2} + \binom{9}{8}\cdot\binom{7}{3} + \binom{9}{7}\cdot\binom{7}{4} + \binom{9}{6}\cdot\binom{7}{5}$

Pregunta 7. Separa las letras *"s"* de las demás letras. Reconoce que existe orden. Aplica correctamente la fórmula de permutación distinguible. Explica claramente este proceso. Sin embargo, se olvida de meter nuevamente las letras que sacó.


7) mississippi

m = 1
i = 4
s = 4
p = 2
11 letras

$\dfrac{11!}{4!\,4!\,2!\,1!}$

11 − 4 = 7

$R = \boxed{\dfrac{7!}{4!\,2!} = \dfrac{5040}{48} = 105}$

A las 11 letras se le restan las 4 "s", ya que no se quiere que estén juntas, permutación distinguible. pero faltó meter

Al parecer esta alumna no ha interiorizado las fórmulas en un proceso pues a veces las aplica correctamente y otras veces no.

Por último se analiza la pregunta 8 donde se pide que escriban las fórmulas, su descripción y unos problemas donde aplicarlas. Se analizarán las respuestas de los mismos alumnos. Se muestra en primer término la pregunta y su solución, para más adelante hacer el análisis.

PREGUNTA 8

¡¡EXPLICA DETALLADAMENTE!!

a) Escribe la fórmula de ordenación sin repetición y de combinación sin repetición. Explica sus componentes.

b) Escribe un problema que se resuelva con ordenación sin repetición. Explica claramente.

c) Escribe un problema que se resuelva con combinación sin repetición. Explica claramente.

d) Explica la diferencia entre ambas fórmulas y cómo puedes pasar de una a otra. Explica claramente.

Solución:

a) $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ *ordenación sin repetición de n objetos tomados de m en m.* $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ *combinación sin repetición de n objetos tomados de m en m.*

b) Problema.

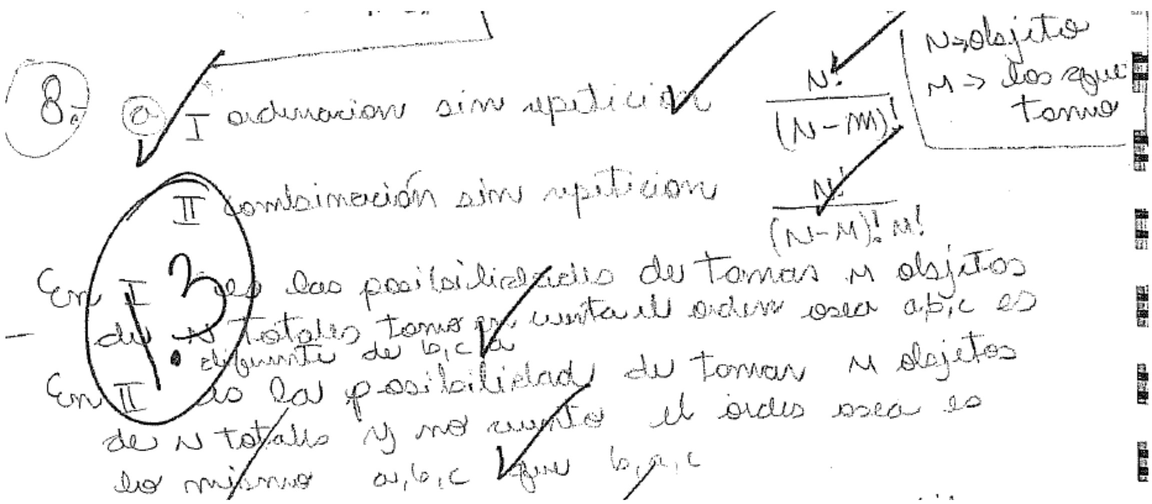
c) Problema.

d) $\binom{n}{m} = \frac{O_n^m}{m!}$.

El análisis de la pregunta por alumno se considera en lo que sigue.

LUIS ANDRÉS

a) Escribe ambas fórmulas correctamente y explica su uso.



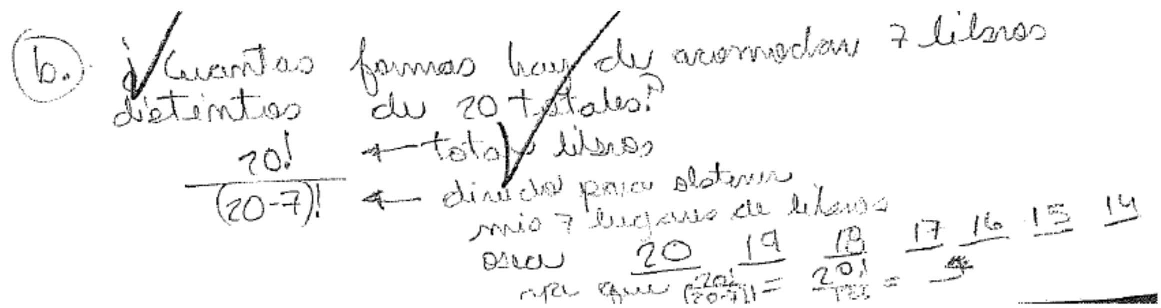
8. a. I ordenación sin repetición $\frac{N!}{(N-M)!}$ N → objetos, M → los que tomo

II combinación sin repetición $\frac{N!}{(N-M)!\,M!}$

En I es las posibilidades de tomar M objetos de N totales tomo en cuenta el orden osea a,b,c es diferente de b,c,a

En II es las posibilidades de tomar M objetos de N totales y no cuento el orden osea es lo mismo a,b,c que b,a,c

b) Plantea un problema, lo resuelve por medio de la fórmula y explica claramente la solución.



b. ¿Cuantas formas hay de acomodar 7 libros distintos de 20 totales?

$20!$ ← total libros

$(20-7)!$ ← divido para obtener mis 7 lugares de libros

osea 20 19 18 17 16 15 14

ya que $\frac{20!}{(20-7)!} = \frac{20!}{13!} =$

c) Nuevamente plantea un problema y lo resuelve por medio de la fórmula de combinaciones. También resuelve con la fórmula de ordenaciones y divide para quitar el orden. Explica claramente.

c.) ¿cuantos equipos de 3 personas se pueden hacer con 5 personas?

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!}$$

← Total

← divido entre numero de personas que escojo para tener mis lugares y tambien quito orden

$$\frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}$$

→ mis lugares

→ quito el orden porque no importa

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10$$

d) Explica claramente la diferencia entre las fórmulas y cómo pasar de una a otra.

d.) La diferencia entre ambas formulas y en la que en una importa el orden y en la otra no para Pasar de $\frac{N!}{(N-M)!}$ a $\frac{N!}{(N-M)!\,M!}$

Solo hay que dividir por M! estos los objetos que tomo para quitar el orden.

permutaciones

El periodo de reflexión y estudio ha llevado a este alumno ha interiorizar las acciones de suma y resta en un proceso que le permite explicar las fórmulas, sus componentes y plantear un problema donde éstas se usen. Asimismo parece que maneja las fórmulas como un objeto pues es capaz de pasar de una fórmula a otra.

JUAN PABLO

a) Escribe ambas fórmulas y las explica.

8) a) quiero ordenar n elementos en m lugares $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

donde la n! es la ordenación de todos los elementos sin repetición y se divide entre (n-m)! para que sólo se haga la ordenación en el número de m deseados.

3

$n = 7 \quad m = 4$ m casillas

$\frac{7!}{3!} \qquad \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$ Al igual que la fórmula anterior tengo n elementos para m lugares sólo que como no hay orden, tengo que dividir entre m! Ej. si tengo m=3 lugares es lo mismo:

$m! = 6$ abc = bca = bac = acb = cab = cba

b) Plantea y resuelve correctamente un problema usando la fórmula correspondiente.

b) Tengo cuatro letras a, b, c, d, con dichas letras ¿cuántas palabras de 2 letras puedo formar?

Sol = $\frac{4!}{2!}$ ya que hay orden en las palabras, los elementos no se repiten y tengo 4 elementos para acomodar en 2 lugares.

c) Nuevamente resuelve de forma correcta.

c) Tengo 7 mujeres y necesito escoger 2

$\binom{7}{2}$ = ya que es igual hay m=2 lugares y n elementos. Pero como no importa el orden en que escoja tengo que dividir entre m!

d) Explica brevemente de forma correcta. En el inciso a) ya había dado la explicación completa.

d) ~~En~~ la combinación sin rep. divido entre m! la fórmula de la ordenación, ya que como no hay orden necesito eliminar los resultados repetidos.

Este alumno ha interiorizado las acciones en un proceso que ha encapsulado en un objeto que le permite usar las fórmulas de manera correcta y explicar sus componentes.

FRANCISCO

a) Escribe las dos fórmulas y explica sus componentes. Resuelve también el inciso d) al explicar como pasar de la fórmula de ordenación sin repetición a la de combinación sin repetición.

8.1 a) ① Fórmula de ordenación sin repetición

$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ "quiere decir que de n elementos disponibles tomo m, pero importa el orden en el que los tome..."

1.3

de n elementos que no pueden repetirse, se obtiene el n! y se divide entre el factorial de los elementos que quedan después de haber tomado m

② Fórmula de combinación sin repetición

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

* de hecho, esta fórmula procede de la anterior, pues a las ordenaciones sin repetición, se les quiere quitar precisamente el orden; esto se logra dividiendo entre la cantidad que tomo

$$\frac{O_n^m}{m!} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{\frac{m!}{1}} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$ d)

b) Plantea y resuelve correctamente un problema.

b) Problema que se resuelva con ordenación sin repetición;
Existe un programa para computadora que crea frases de manera aleatoria; cada frase está formada por 3 palabras. que no pueden repetirse en la misma frase. Si existen 150 palabras registradas ¿Cuántas frases diferentes pueden formarse?

$$O_n^m \Rightarrow O_{150}^3 = \frac{150!}{(150-3)!} = \frac{150!}{147!} = \frac{150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot \cancel{147!}}{\cancel{147!}}$$

c) Plantea y resuelve correctamente un problema.

c) Problema que se resuelve con combinación sin repetición...
Un respetuoso alumno estima mucho a sus maestras de Algebra y Geometría. Como se acerca el día del maestro, y él tiene 4 perfumes que su mamá nunca ha abierto, decide regalárselos
¿De cuántas formas puede regalar los 4 perfumes a las 2 maestras?

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2!}} = 6 \text{ formas}$$

pues debe repartir 4 perfumes a 2 maestras y no puede darle más de una vez el mismo perfume a cada una.

d) Explica claramente.

d) Explica la diferencia entre ambas fórmulas y cómo se pasa de una a otra.

O_n^m y $\binom{n}{m}$ se parecen porque en ambas no se permite la repetición; así, la única diferencia (a pesar de ser una es muy importante) es que en la primera existe el orden, y en la segunda NO. De manera que podemos ... en las ordenaciones, porque

(a pesar de ser una es ...) De manera que podemos
existe el orden y en la segunda NO.
esperar un resultado mayor en las ordenaciones, porque
muchas combinaciones contienen los mismos elementos.

* la transición de una fórmula a otra es sencilla, pues
sólo hay que quitarle el orden a las O_n^m ...!

$$\frac{O_n^m}{m!} = \frac{\frac{n}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n}{(n-m)!\,m!} = \binom{n}{m}$$

Este alumno también ha interiorizado las acciones como suma y resta en un proceso que lo lleva a aplicar correctamente las fórmulas, explicar sus componentes y plantear problemas donde usarlas. Además parece haber encapsulado el proceso en un objeto que le permite pasar de una fórmula con orden a otra sin orden y viceversa.

<u>*KAREN*</u>

a) Escribe la fórmula de ordenación sin repetición. No escribe la de combinación sin repetición.

8.- a) Ordenación y ~~Repetición~~ $\Rightarrow O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ n=Objetos que tenemos
m=Objetos que queremos

b) Plantea un problema y lo resuelve por medio de la fórmula. Se equivoca en el orden de los índices, pero resuelve correctamente.

b) En una ciudad las placas constan de 3 letras ¿Cuántas placas hay si las letras no se pueden repetir?

Orden
~~Repetición~~

26 25 24

n=26 letras del alfabeto
m=3 para las placas

$\Rightarrow O_3^{26} = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = 26\cdot 25\cdot 24$

c) Plantea y resuelve por medio de la fórmula de manera correcta.

c) ¿Cuántos equipos de 4 niños se pueden formar si tenemos 15 candidatos?

~~Orden~~
~~Repetición~~ ∴ Combinación con $n=15 \wedge m=4 \Rightarrow \binom{15}{4} = \frac{15!}{11!4!}$

d) Explica claramente.

d) En la primera hay orden, por lo que no es lo mismo tener 12 que 21, por ejemplo, y en la segunda no hay orden por lo cual $12=21$, con esto vemos que mientras en la primera se obtienen 2 formas en la segunda 1, entonces es necesario que dividamos entre los objetos que queremos para eliminar uno de 12 ó 21, por, ejemplo c/orden $\frac{n!}{(n-m)!}$ si queremos s/orden $\Rightarrow \frac{n!}{(n-m)!(m)!}$ → Para eliminar el orden.

Esta alumna en el inciso a) no escribe la fórmula de combinaciones al parecer por un olvido pues en el inciso c) y d) la escribe y la usa de forma correcta. Al parecer ha interiorizado las acciones en un proceso que le permite identificar qué fórmula aplicar en cada problema y explicar sus componentes. Además parece haber encapsulado el proceso en un objeto que le permite pasar de una fórmula con orden a otra sin orden y viceversa.

SERGIO

a) Escribe ambas fórmulas correctamente y las explica.

) a) $O_b^a = \frac{b!}{(b-a)!}$ ordenación s/repetición

En el numerador pongo todas las casillas y abajo lo estoy eliminando el número de casillas que ya no se piden.

13

$\binom{b}{a} = \frac{b!}{(b-a)!a!}$ combinación s/repetición

lo igual que la de ordenación solo que le quito las que significan lo mismo.

b) Plantea un problema y lo resuelve correctamente explicando su procedimiento.

b) Las placas tienen 3 dígitos de 9 posibles (1, 2, 3, . . . 9) ¿Cuántas placas puede haber si no se pueden repetir los dígitos?

$$\frac{9}{1^\circ} \quad \frac{8}{2^\circ} \quad \frac{7}{3^\circ}$$

En el 1° Tengo 9 posibilidades, en el 2° solo 8 porque ya utilice 1, y en el 3° solo 7 porque ya utilice 2. Por eso $\frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} =$

$$\frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot7\cdot8\cdot9}{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}} = 7\cdot8\cdot9 = \frac{9!}{(9-3)!}$$

c) Nuevamente plantea y resuelve correctamente. Explica la diferencia con el problema anterior.

c) Tengo 5 pelotas en una bolsa y debo Tomar 3. ¿Cuántas posibilidades hay? A diferencia del problema de arriba, aquí da igual si Tomo la pelota roja y luego la verde, que la verde y luego la roja. Por eso es la misma fórmula que arriba pero quitándole además las distintas formas de Tomar las pelotas que Todas ellas serán 1 manera. Que en este caso serían 3!.

$$\frac{5!}{(5-3)!\,3!}$$

d) Explica correctamente.

d) $\frac{b!}{(b-a)!}$ se utiliza cuando por ejemplo: $abc \neq acb$

pero cuando esos dos signif. son lo mismo, es decir, $abc = acb$

entonces tengo que dividir $\frac{b!}{(b-a)!}$ entre $a!$ $\Rightarrow \frac{\frac{b!}{(b-a)!}}{a!}$

y por la ley del sandwich queda $\frac{b!}{(b-a)!\,a!}$

Este alumno resuelve y explica claramente toda la pregunta. Es capaz de usar las fórmulas de manera correcta, explicar sus componentes y plantear un problema donde usar dichas fórmulas. Parece haber encapsulado el proceso en un objeto que le permite pasar de una fórmula con orden a otra sin orden y viceversa.

<u>*ALMA*</u>

a) Escribe correctamente la fórmula de ordenación sin repetición, pero escribe la fórmula de combinación con repetición y se pide la de combinación sin repetición.

8) a) $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ y $\cancel{\binom{n+m-1}{m}}$

b) Solamente escribe la fórmula pero no plantea ningún problema.

8) b) $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

c) Escribe un problema, la solución y explica su procedimiento.

8c) De una baraja con 52 cartas quiero sacar 3 cartas. ¿Cuántas formas hay de hacerlo?

$\binom{52}{3}$

Tenemos 52 cartas, estas se dividen en 4 palos y cada palo tiene 13 números, por lo tanto no se puede repetir ninguna carta.

d) No resuelve.

Esta alumna en el inciso a) no escribió la fórmula de combinaciones sin repetición y sin embargo, en el inciso c) no solamente escribe la fórmula correcta sino que propone un problema y lo resuelve con dicha fórmula. Asimismo, en el inciso a) escribe la fórmula correcta de ordenaciones sin repetición, en el inciso b) nuevamente la escribe, pero no es capaz de encontrar un problema donde aplicar dicha fórmula. Al parecer no ha interiorizado completamente las acciones en un proceso.

4.4 ANÁLISIS DEL EXAMEN FINAL

El examen final de Álgebra Superior I en el ITAM es el mismo para todos los grupos. Este examen incluyó una pregunta de conteo. Se analizará dicha pregunta y se compararán los resultados obtenidos con el resto de la información mencionada en la metodología. El examen final fue presentado por treinta y ocho alumnos. Para esta parte se analizarán las respuestas de los alumnos que fueron estudiados en las etapas anteriores.

A continuación se muestra la pregunta y su solución, para más adelante hacer el análisis.

Considerando que el alfabeto tiene 27 letras, ¿cuántas palabras de 8 letras hay

a) *que comiencen con una vocal, si las letras no se pueden repetir?*

b) *que contengan al menos una vocal, si las letras se pueden repetir?*

c) *que contengan exactamente una vocal, si las letras se pueden repetir?*

d) *que tengan exactamente tres letras U y dos letras O, si las demás letras no se pueden repetir?*

Solución:

a) $5O_{26}^{7} = 5\left(\frac{26!}{19!}\right)$ *palabras.*

b) $OR_{27}^{8} - OR_{22}^{8} = 27^8 - 22^8$ *palabras.*

c) $40 \cdot OR_{22}^{7}$ *palabras.*

d) $\binom{8}{3}\binom{5}{2}O_{25}^{3}$ *palabras.*

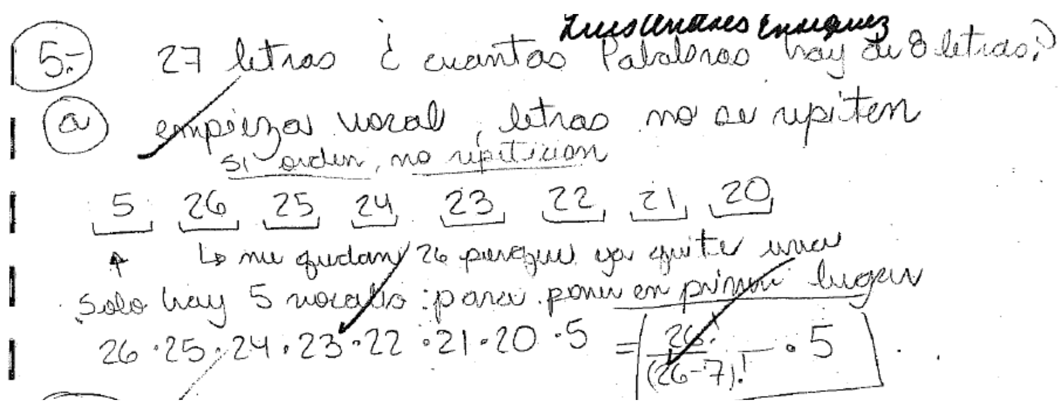
Antes de hacer el análisis de la pregunta se hará una observación a la solución del inciso b). En este inciso el orden existe y se permiten las repeticiones, por lo que debe resolverse con la fórmula de ordenación con repetición. Como se pide que al menos se tenga una vocal la forma más fácil de resolverlo es restando al total de palabras las palabras que no tengan vocales con lo que quedan las palabras que al menos tengan una vocal, es decir, $OR_{27}^{8} - OR_{22}^{8} = 27^8 - 22^8$ palabras.

Si no se resuelve de esta forma entonces debe separarse por casos y encontrar las palabras con una, dos, tres, cuatro y cinco vocales. Como los casos son excluyentes se suman. No puede resolverse en un solo caso: cinco vocales, ocho lugares para esa vocal y para los demás lugares ordenar las veintisiete letras permitiendo la repetición, es decir, $5 \cdot 8 \cdot 27^7$. Esta solución es incorrecta pues hay palabras que son iguales y se cuentan más de una vez. Supongamos que se escoge la vocal *"a"* y se coloca en el primer lugar. Después, se escogen las letras *"b, c, d, e, f, g, h"* y se colocan en orden alfabético en los lugares restantes. Es decir, se forma la palabra *abcdefgh*. Con esta solución otra posibilidad sería que se escogiera la vocal *"e"* y se colocara en el quinto lugar. Después, se escogen las letras *"a, b, c, d, f, g, h"* y se colocan en orden alfabético en los lugares restantes. Nuevamente se forma la palabra *abcdefgh*. Estas dos palabras son la misma y se están contando más de una vez. Por lo anterior, si se resuelve de esta forma, es necesario que se divida en casos para no tener palabras que se cuenten más de una vez.

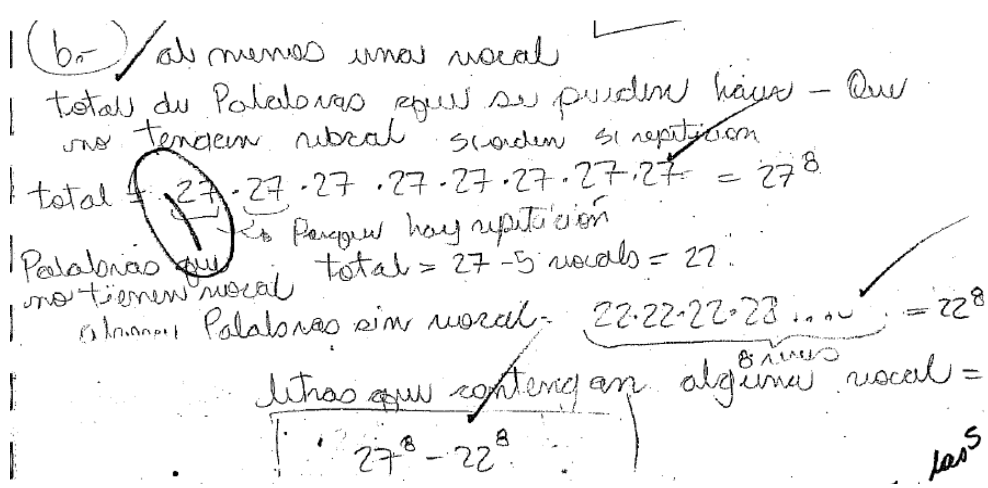
El análisis de la pregunta por alumno se considera en lo que sigue.

<u>*LUIS ANDRÉS*</u>

a) Reconoce que hay orden y no hay repetición. Resuelve correctamente para la primera letra y para las demás utiliza la fórmula de ordenación de forma correcta.


Luis Andrés Enríquez
5.- 27 letras ¿cuántas palabras hay de 8 letras?
a) empiezan vocal, letras no se repiten
si orden, no repetición
5 26 25 24 23 22 21 20
Lo me quedan 26 porque ya quité una
Solo hay 5 vocales para poner en primer lugar
$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 5 = \boxed{\frac{26!}{(26-7)!} \cdot 5}$

b) Responde restando del total las palabras sin vocales.


b.- al menos una vocal
total de palabras que se pueden hacer – que no tengan vocal
si orden si repetición
total = $27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 = 27^8$
Porque hay repetición
Palabras que no tienen vocal total = 27 − 5 vocales = 22
Palabras sin vocal – $\underbrace{22 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 22 \ldots}_{8 \text{ veces}} = 22^8$
letras que contengan alguna vocal =
$\boxed{27^8 - 22^8}$
las 5

c) Resta del total de letras solamente cuatro vocales, con lo que no asegura que quede exactamente una vocal en la palabra que se forme. Se olvida de restar el lugar de la vocal.

X exactamente una vocal

si orden sin repetición

debes quitar 5 vocales p/ no meter otra.

t.1 Total letras = 27 − 4 vocales = $\cancel{23}$ y me queda una vocal asegura una vocal. pero se pedía EXACTO

$\underbrace{\underline{23}\ \ \underline{23}\ \ \ldots}_{8\ \text{veces}} = 23^8$

8 veces y la vocal q' ya metiste? serían 7 lugares.

Pero: puedo meter cualquiera de las 5 vocales osea escoger 1 de 5 = $\binom{5}{1} = 5$

total: combinaciones $\boxed{\cancel{23^8 \cdot 5}}$ $\quad 22^7(8)(5)$

d) Separa las letras *"u"* y *"o"* y utiliza la fórmula de ordenación para las demás letras. Reconoce que las letras que separó deben ponerse en los espacios disponibles sin orden por lo que usa la fórmula de combinaciones. Sin embargo, resuelve incorrectamente pues usa una combinación para las letras *"u"* y *"o"*.

d.- tres letras U y 2 letras O y las demas letras no se pueden repetir,

∴ Si orden NO repetición

UUU OO ___ ___ ___ me quedan 3 espacios

los tres espacios los puedo poner como las 27 − 2 letras que tengo osea O y U porque no hay repetición

$\underline{25}\ \underline{24}\ \underline{23}$

Faltaría escoger donde se ponen las 3 U's y las 2 O's

osea 4 ___ 4 ___ 4 ___ 4   4 espacios

Pero también como son 5 letras las que estoy poniendo puedo hacer ej: UUU ___ OO ___

las letras pueden ir juntas entonces 4 espacios + 4 espacios que pueden ocupar las 5 letras

es como escojer 5 de 8 espacios osea $\binom{8}{5}$

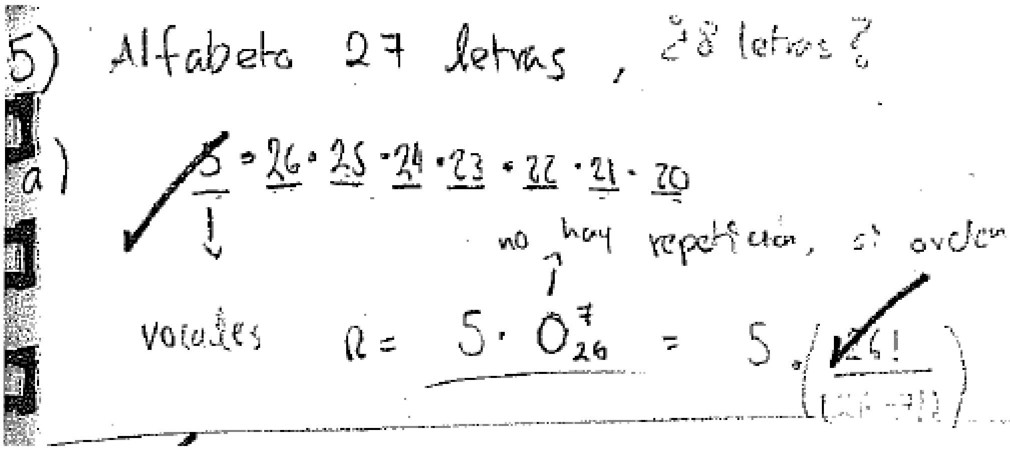
entonces $\boxed{\binom{8}{5} \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}$

pero debes separar U's y O's

Este alumno explica claramente sus procedimientos. Aunque tiene algunos errores parece haber interiorizado las acciones de conteo en un proceso que le permite usar las fórmulas de manera correcta. En el inciso d) parece haber encapsulado el proceso en un objeto que le permite usar tanto la fórmula de ordenación como la de combinación en un mismo problema.

JUAN PABLO

a) Reconoce que existen cinco vocales y utiliza la fórmula de ordenación sin repetición para las demás letras.



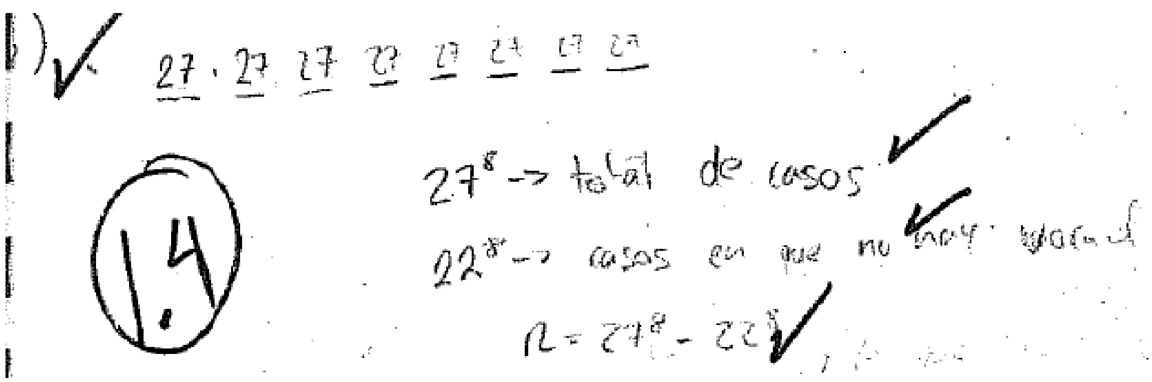
5) Alfabeto 27 letras , ¿8 letras?

a) $\underline{5} \cdot \underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{24} \cdot \underline{23} \cdot \underline{22} \cdot \underline{21} \cdot \underline{20}$

vocales no hay repetición, sí orden

$R = 5 \cdot O_{26}^{7} = 5 \cdot \left(\frac{26!}{(26-7)!} \right)$

b) Resuelve restando del total las palabras que no tienen vocales.



b) $\underline{27} \cdot \underline{27}\ \underline{27}\ \underline{27}\ \underline{27}\ \underline{27}\ \underline{27}\ \underline{27}$

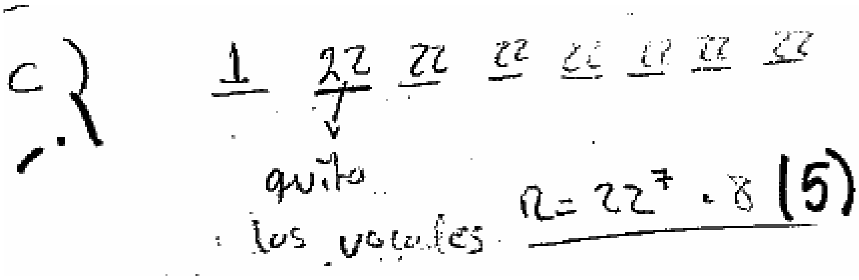
$27^8 \rightarrow$ total de casos

$22^8 \rightarrow$ casos en que no hay vocal

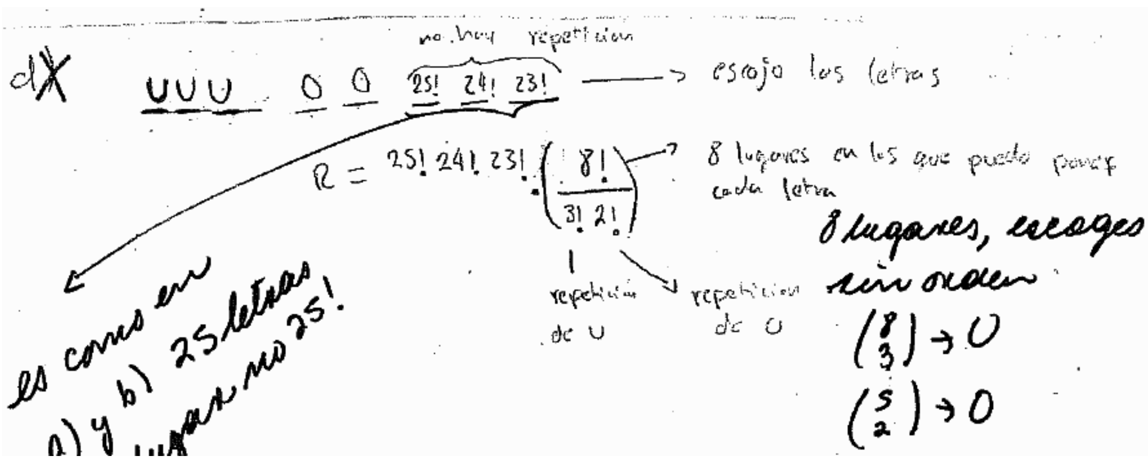
$R = 27^8 - 22^8$

1.4

c) Separa correctamente las vocales de las consonantes. Ordena las consonantes correctamente. Sin embargo, solamente pone un caso para las vocales.



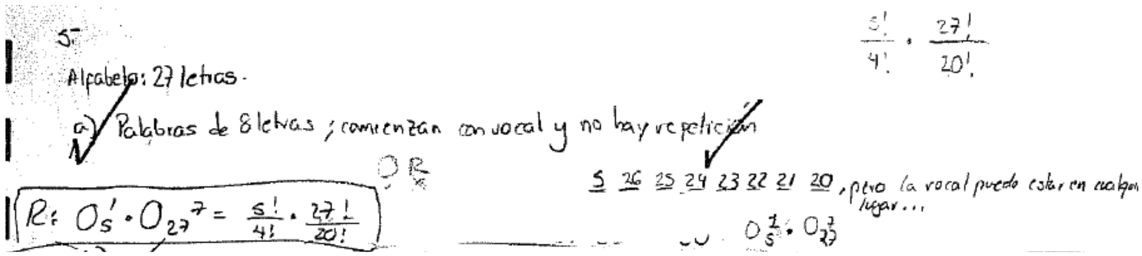
d) Separa las letras *"u"* y *"o"*. Ordena las demás letras, pero pone factorial. Escoge los lugares para las letras *"u"* y *"o"*, pero con orden por lo que su respuesta es incorrecta.



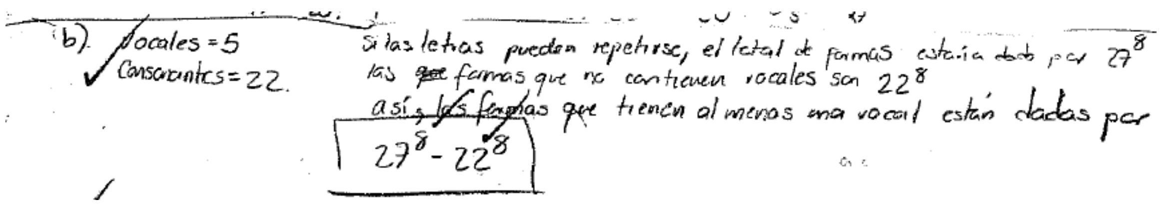
Este alumno ha interiorizado las acciones de conteo en un proceso que le permite usar de forma correcta las fórmulas. Se equivocó en el último inciso por lo que no tuvo que usar fórmulas distintas en un mismo problema y no es posible saber si ha encapsulado las fórmulas en un objeto.

<u>*FRANCISCO*</u>

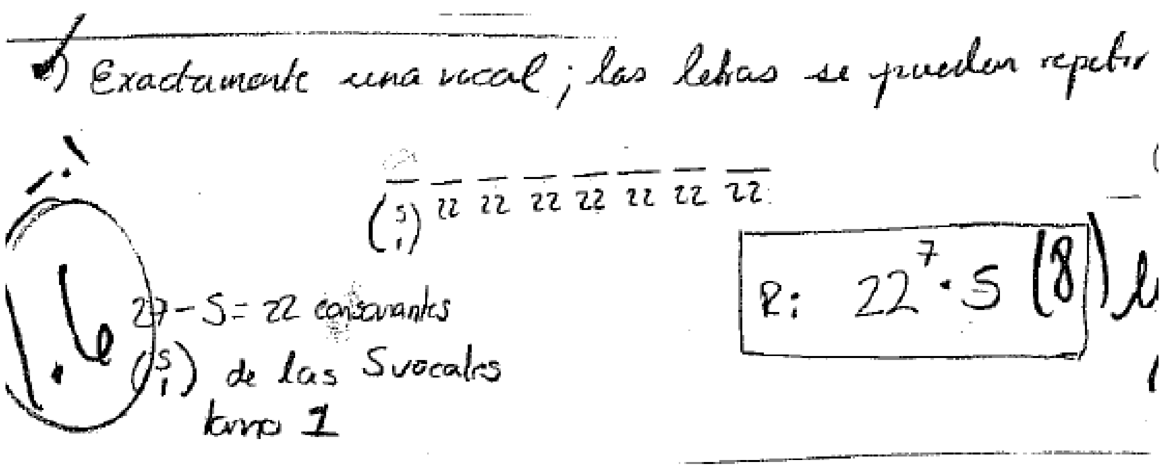
a) Reconoce que existe orden y no hay repetición. Separa la vocal para el primer lugar de la palabra. Utiliza correctamente la fórmula de ordenación.


5.
Alfabeto: 27 letras.
a) Palabras de 8 letras; comienzan con vocal y no hay repetición
R: $O_5^1 \cdot O_{27}^7 = \frac{5!}{4!} \cdot \frac{27!}{20!}$
$\frac{5!}{4!} \cdot \frac{27!}{20!}$
5 26 25 24 23 22 21 20, pero la vocal puede estar en cualquier lugar...
$O_5^1 \cdot O_{27}^7$

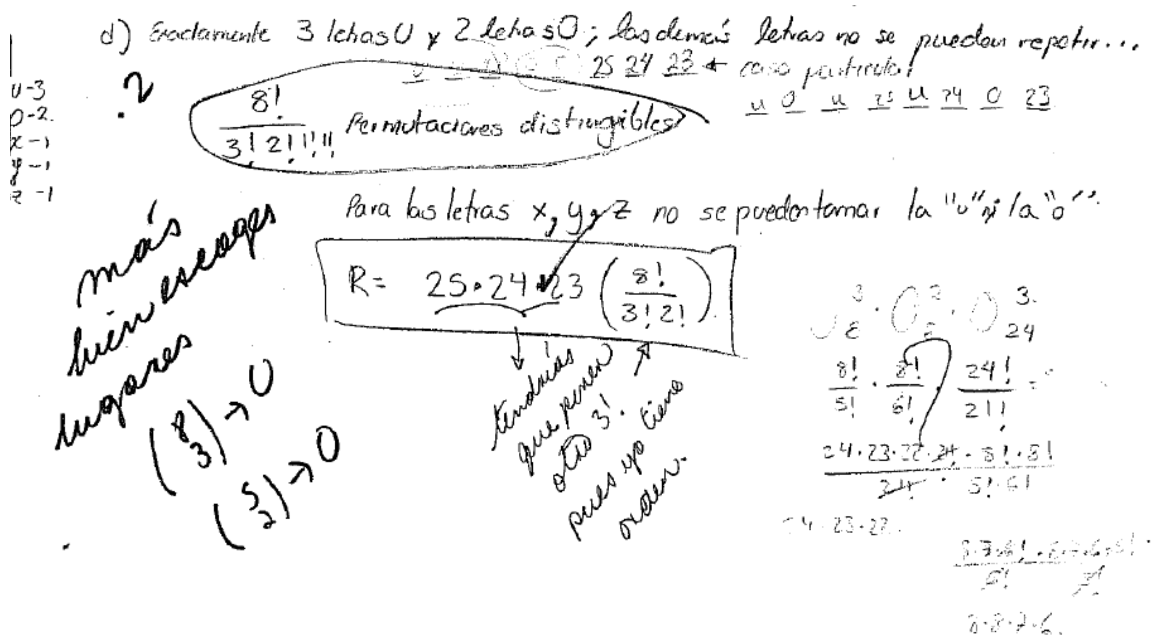
b) Responde restando del total las palabras sin vocales. Utiliza correctamente la fórmula de ordenación con repetición.


b) Vocales = 5
Consonantes = 22.
Si las letras pueden repetirse, el total de formas estaría dado por 27^8
las formas que no contienen vocales son 22^8
así, las formas que tienen al menos una vocal están dadas por
$27^8 - 22^8$

c) Hace la acción de restar las vocales para separar vocales de consonantes y tener exactamente una vocal. Sin embargo, sólo permite que la vocal sea la primera letra de la palabra, por lo que su respuesta es incorrecta. Ordena correctamente las vocales.


c) Exactamente una vocal; las letras se pueden repetir
$\binom{5}{1}$ 22 22 22 22 22 22 22
27 − 5 = 22 consonantes
$\binom{5}{1}$ de las 5 vocales tomo 1
R: $22^7 \cdot 5$ (8)

d) Separa las letras *"u"* y *"o"*, pero usa la fórmula de permutación distinguible por lo que su respuesta es incorrecta. Ordena correctamente las demás letras.



d) Exactamente 3 letras U y 2 letras O; las demás letras no se pueden repetir...

25 24 23 ← caso particular

u o u 25 u 24 o 23

u-3
o-2
x-1
y-1
z-1

?

$\frac{8!}{3!\,2!\,1!\,1!\,1!}$ Permutaciones distinguibles

Para las letras x, y y z no se pueden tomar la "u" ni la "o".

$$R = \underbrace{25 \cdot 24 \cdot 23}\left(\frac{8!}{3!\,2!}\right)$$

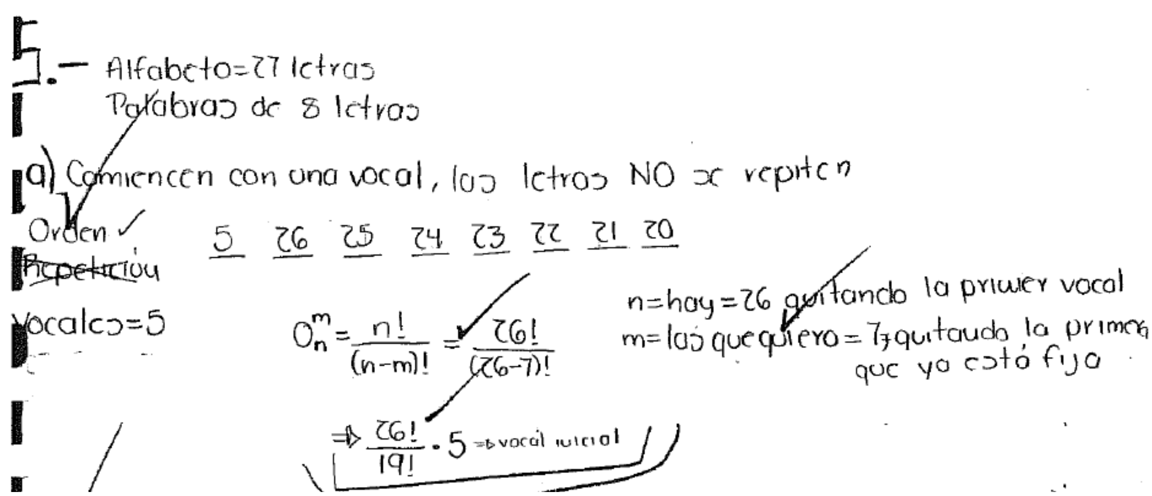
tendrías que poner otro 3! pues ya tiene orden.

más bien escoges lugares

$\binom{8}{3} \to U$

$\binom{5}{2} \to O$

24·23·22



5.- Alfabeto=27 letras
Palabras de 8 letras

a) Comiencen con una vocal, las letras NO se repiten

Orden ✓
~~Repetición~~
Vocales=5

5 26 25 24 23 22 21 20

$$O^m_n = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{26!}{(26-7)!}$$

n = hay = 26 quitando la primer vocal
m = las que quiero = 7 quitando la primera que ya está fija

$\Rightarrow \frac{26!}{19!} \cdot 5 \Rightarrow$ vocal inicial

Este alumno, aún y cuando tiene algunos errores, parece haber interiorizado las acciones de suma y resta en un proceso que le permite usar adecuadamente las fórmulas.

<u>*KAREN*</u>

a) Resuelve correctamente usando la fórmula de ordenación. Explica claramente su procedimiento.

b) Resuelve restando del total las palabras sin vocal usando la fórmula de ordenación con repetición. Explica claramente.

b) Que contenga al menos una vocal si las letras se pueden repetir

Orden ✓
Repetición ✓
n = 27
m = 8

1.7

① Sacamos el total de palabras sin restricciones

$OR_n^m = n^m = 27^8$

② Sacamos el caso en el que no haya vocales

n = 27 − 5 vocales = 22
m = 8

$OR_n^m = 22^8$

③ Para saber cuántas palabras tienen al menos una vocal restamos al total los casos que no tienen ni una.

$27^8 - 22^8$

c) Resuelve correctamente usando la fórmula de ordenación con repetición para las consonantes y encontrando el lugar para las cinco vocales. Explica claramente.

c) Exactamente una vocal si las letras se pueden repetir

Orden ✓
Repetición ✓

vocal __ __ __ __ __ __ __

Fijamos una vocal, por lo cual de los 8 lugares solamente nos quedan 7 = m

Y como solo queremos una vocal, la que ya fijamos, restamos las vocales al alfabeto 27 − 5 = 22 = n

① $OR_n^m = OR_{22}^7 = 22^7$

② Pero esa vocal puede ocupar 8 lugares dif.
∴ se multiplica por 8

③ Y además ∃ 5 vocales.

Finalmente ⇒ $22^7 \cdot 8 \cdot 5$

d) Separa las letras *"u"* y *"o"*, pero las permuta en lugar de escoger sin orden los lugares donde ponerlas. Utiliza la fórmula de ordenaciones para las demás letras.

d) 3 letras U y 2 letras O. y las demás no se pueden repetir

∴

u u u 25 o o 24 23

Ya tenemos 3"U" y 2"O" ∴ nos quedan para escoger 3, pero como no se pueden repetir.

27 - 2(que escogimos) = 25 = n

m = 3 que queremos

Orden ✓, ~~Repetición~~ $O_n^m = O_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25\cdot 24\cdot 23$

Y para las 3"U" y las 2"O" tenemos 5 elementos que pueden ocupar 5 lugares ∴ $O_n^n = P_n = P_5 = 5!$

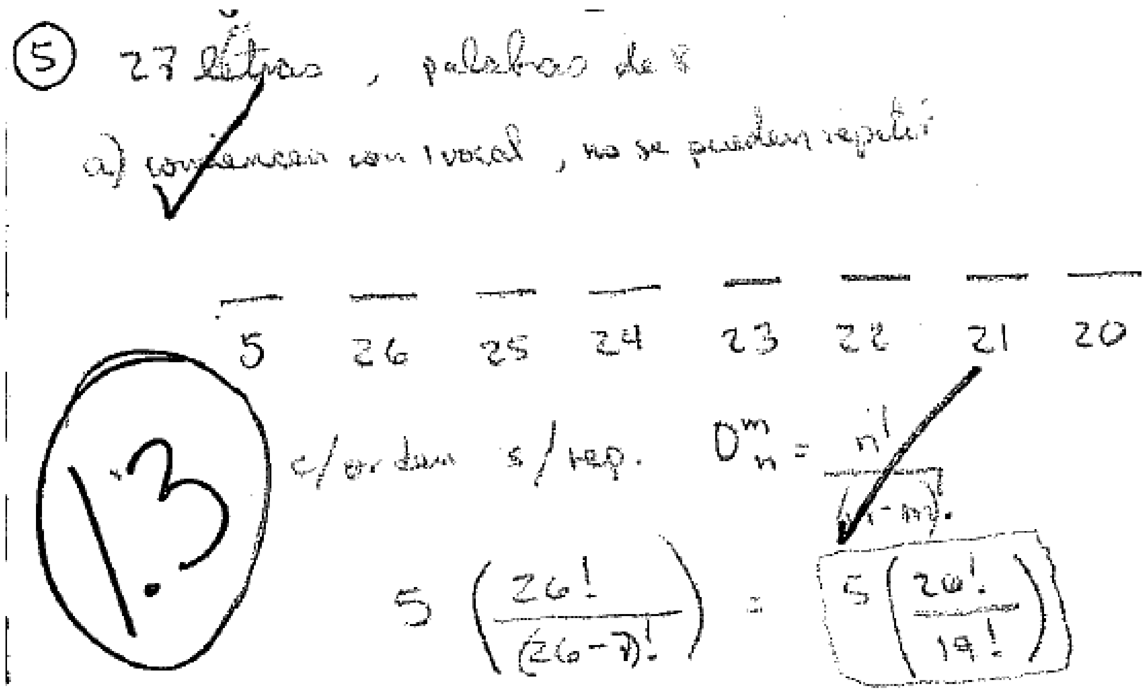
no puedes permutar, más bien es escoger lugares.

$\Rightarrow \frac{25!}{22!}\cdot \cancel{X} = 25\cdot 24\cdot 23\cdot 5!$

Esta alumna aplica de forma correcta y explica muy claramente el uso y las componentes de cada fórmula por lo que parece que ha interiorizado las acciones de suma y resta en un proceso que le permite el uso adecuado de las fórmulas.

<u>*SERGIO*</u>

a) Resuelve correctamente usando la fórmula de ordenación sin repetición y permitiendo cinco vocales para la primera letra.



5 27 letras, palabras de 8

a) comienzan con 1 vocal, no se pueden repetir

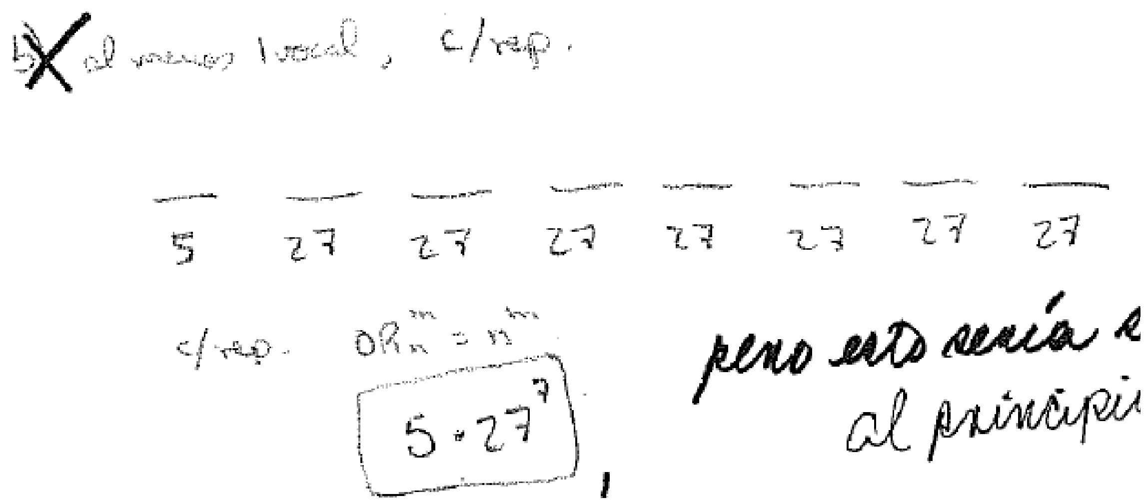
5 26 25 24 23 22 21 20

13

c/orden s/rep. $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

$5\left(\frac{26!}{(26-7)!}\right) = \boxed{5\left(\frac{26!}{19!}\right)}$

b) Al parecer no se fija que dice al menos y resuelve, de forma correcta, para una sola vocal al principio de la palabra.



b) al menos 1 vocal, c/rep.

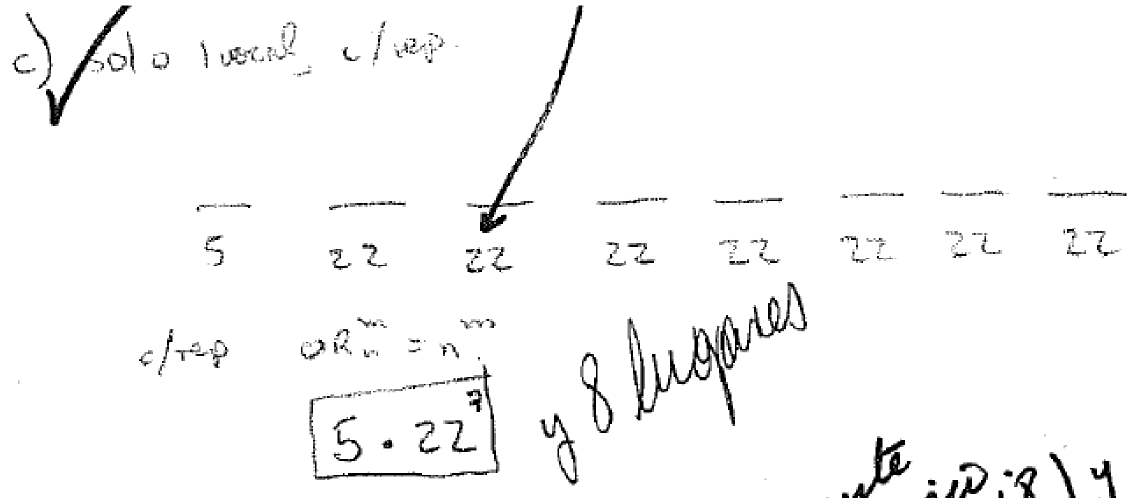
5 27 27 27 27 27 27 27

c/rep. $OR_n^m = n^m$

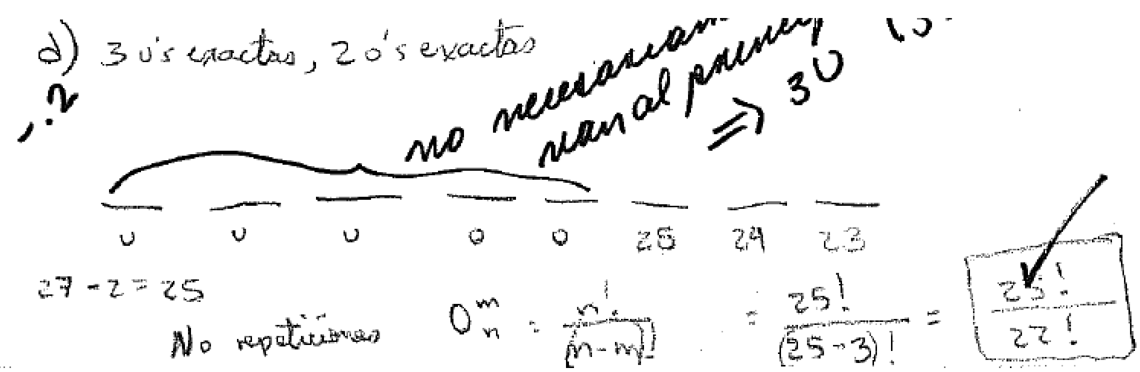
$\boxed{5 \cdot 27^7}$,

pero esto sería 1 al principio

c) Responde igual que el inciso anterior. En este caso si se pide exactamente una vocal pero puede ir en cualquier parte de la palabra y él la coloca solamente al principio.



d) Separa correctamente las letras *"u"* y *"o"* de las demás letras, pero las coloca como las primeras letras de la palabra. Utiliza la fórmula de ordenación sin repetición para las demás letras.



Este alumno usa correctamente las fórmulas, sin embargo, parece que al pedir una condición sobre las letras él las fija en los primeros lugares de la palabra. Al parecer ha interiorizado las acciones de conteo en un proceso que le permite usar correctamente las fórmulas. No se sabe si las ha encapsulado en un proceso pues al fijar las letras al principio de la palabra no tuvo necesidad de usar dos fórmulas en el mismo problema.

ALMA

a) Para la vocal del primer lugar utiliza la fórmula de permutación cuando en realidad son cinco vocales y, por lo tanto, solamente son cinco casos. Para las demás letras utiliza correctamente la fórmula de ordenación sin repetición.

Alma Orauco

5)

a) = 8 26 25 24 23 22 21 20

Vocal 27 - Vocal - ?

$\therefore$ 27 - 1 = 26

8 - 1 = 7

$$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{26!}{(26-7)!} = \frac{26!}{19!}$$

5! nada mas pues son 5 casos: a, é, í, ó, ú.

5! son las ordenaciones de las vocales, 26! es la resta de la vocal de las 27 letras restantes del alfabeto, como no se pueden repetir se le va restando la letra anterior.

b) Nuevamente utiliza de forma incorrecta la permutación para las vocales. No se da cuenta que debe dividir en casos.

b) $OR_n^m = n^m \cdot 5!$ $\quad 27^7 \cdot 5!$

27 27 27 27 27 27 27 5!

6

5! las ordenaciones de las vocales, 27^7 es la multiplicación de todas las posibilidades que hay en cada espacio para una letra y es 27 porque aquí sí hay repetición.

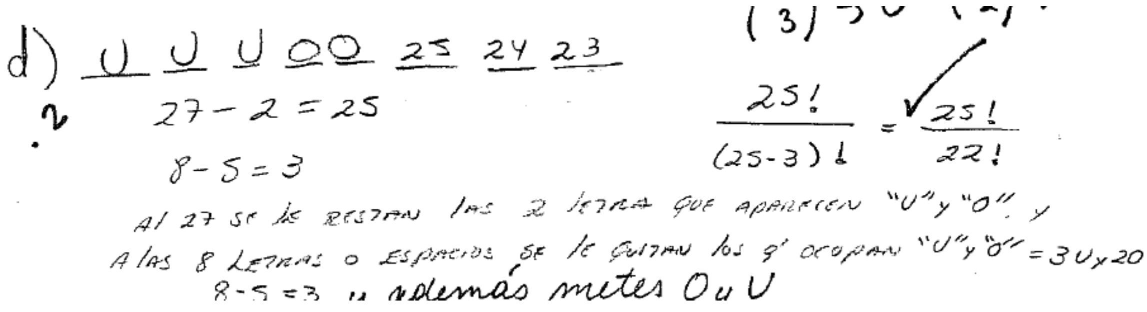
c) Contesta de forma incorrecta pues permite más de una vocal.

c) $OR_n^m = n^m = \frac{27^8}{27} = 27^7 \cdot 1$ se pide exacto 1 vocal.

27

8 - 1 = 7 ⇒ es el numero de veces que aparecen las 27 letras es el numero al q' se va a elevar el 27.

d) Separa las letras *"u"* y *"o"* y utiliza de forma correcta la fórmula de ordenación para las demás letras. Sin embargo, se olvida de meter nuevamente las letras que sacó.



Esta alumna confunde el escoger una vocal, que son cinco casos, con una permutación que son *5!* casos. Reconoce que hay orden y repetición y utiliza correctamente la fórmula de ordenación.

4.5 DISCUSIÓN

A lo largo del análisis hecho en este capítulo (segunda experiencia, semestre enero – mayo del 2007) se hizo evidente que la acción de desglosar el problema para contar físicamente fue interiorizada, por la mayoría de los alumnos, en un proceso que les permite encontrar la solución por medio del producto de los datos relevantes o la aplicación de una fórmula. Esto fue equivalente a los resultados obtenidos en la primera experiencia.

En esta segunda experiencia se aplicó la misma serie de problemas con orden y los resultados obtenidos son semejantes a los de la primera experiencia. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, se cambió la serie de problemas sin orden, al refinar la descomposición genética, por una nueva serie de problemas con y sin orden. Esta nueva serie cumplió la finalidad que se buscaba, llevar a los alumnos a distinguir cuándo un problema tiene orden y cuándo no lo tiene, lo cual los lleva a usar las fórmulas de ordenación o de combinación respectivamente. Algunos alumnos incluso encapsularon la fórmula de ordenación en un objeto que dividían para quitar el orden

Antes de presentar el examen los alumnos han tenido la oportunidad de resolver varios problemas con y sin orden, han estudiado y la maestra resolvió dudas en una clase de dos horas. Al hacer el análisis del examen de conteo se puede ver que los alumnos han evolucionado en el conocimiento del tema de conteo: ordenaciones y combinaciones. En un principio la mayoría de los alumnos realizaba un diagrama, dibujo ó escribía los casos como acción para desglosar el problema y contar físicamente los casos. Más adelante, interiorizan las acciones en un producto para encontrar el resultado. En el examen, muy pocos alumnos hacen un diagrama, algunos solamente lo usan para comprobar su respuesta. El uso correcto de las fórmulas y la explicación sobre los distintos componentes de ellas indica que la mayoría de los alumnos ha reflexionado sobre las acciones realizadas a lo largo de las distintas actividades propuestas y que esta reflexión los ha llevado a interiorizarlas en un proceso que les permite distinguir qué fórmula usar en cada problema y cómo aplicarla correctamente. Al parecer han tenido un proceso de reflexión que los ha llevado a interiorizar las acciones en un proceso de conteo. Además, parece que algunos alumnos han encapsulado el proceso en un objeto que les permite plantear problemas donde usar dichas fórmulas y explicar como pasar de una fórmula a otra, lo que no se logró en la experiencia del semestre anterior.

Al momento de llegar al análisis del examen final parece que los alumnos han reflexionado sobre las acciones que realizan durante la puesta en práctica del diseño de clase y las han interiorizado en el proceso que les permite escribir directamente la fórmula que corresponde al problema y resolver correctamente. Algunos de los errores que tienen resultan porque entienden el problema de forma diferente. Ninguno de los alumnos analizados tuvo la necesidad de desglosar el problema y escribir todas ó algunas de las palabras como acción para contar físicamente.

La maestra ha impartido este curso durante varios años y al igual que en la experiencia anterior, que también se estudia en este trabajo, el promedio del examen de conteo estuvo muy por encima de lo esperado. La serie de problemas con orden y la nueva serie de problemas con y sin orden que se diseñaron parece que llevaron a los alumnos a hacer las construcciones mentales adecuadas para una mejor comprensión del tema.

CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó el proceso de construcción de los conceptos de conteo, específicamente de los conceptos de ordenaciones y combinaciones, para contar elementos de conjuntos cuando son ó no tomados en cuenta los aspectos de orden y repetición en el marco de un curso de álgebra superior para estudiantes de las carreras de matemáticas aplicadas y actuaría. El análisis se hizo utilizando la Teoría APOE desarrollada por el profesor Ed Dubinsky y un grupo de investigadores formado por sus colaboradores (RUMEC). Esta teoría es adecuada para estudiar fenómenos de la educación matemática pues permite analizar con detalle la forma en que los alumnos construyen los conceptos matemáticos en el contexto de la educación superior y permite diseñar didácticas específicas basadas en modelos de las construcciones mentales de los alumnos.

La primera fase de un estudio que utiliza esta teoría parte de un análisis epistemológico de los conceptos a estudiar que conduce a una descripción detallada de cómo se puede aprender el concepto matemático en cuestión. A esta descripción se le llama descomposición genética. El fin de este análisis es describir en términos de la teoría las construcciones mentales específicas que hace un alumno en el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos de ordenación y combinación.

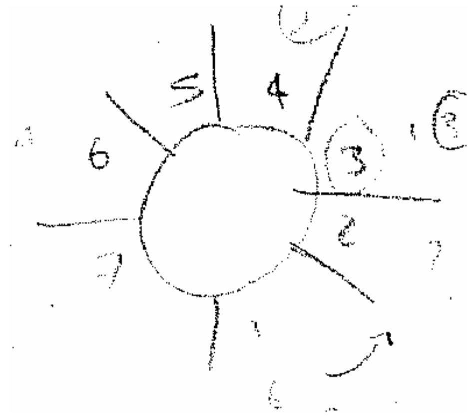
Uno de los objetivos de esta tesis consistió en determinar si era posible diseñar una estrategia de enseñanza basada en una descomposición genética que permitiera a los alumnos construir los conceptos relacionados con el conteo, dado que la experiencia docente muestra que son difíciles de aprender por parte de los alumnos.

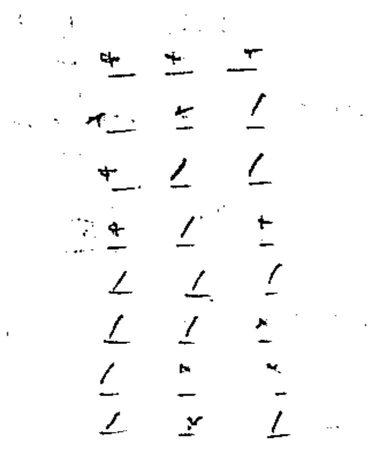
Para responder esta pregunta se hizo una descomposición genética que sirvió como base para diseñar dos series de problemas relacionados con el conteo: unos problemas que incluyeran orden y otros sin orden. En esta descomposición genética se mostraron las construcciones mentales que la maestra supone deben hacer los alumnos para comprender los conceptos matemáticos involucrados en este tipo de problemas de conteo, es decir, los conceptos relacionados con el tema de estudio: ordenación y combinación. Por lo tanto, la descomposición estuvo orientada a distinguir las características de orden y repetición que causan dificultades entre los alumnos. Es importante notar que parece que no existen investigaciones acerca del aprendizaje del tema de conteo en la universidad, por lo que puede considerarse que la descomposición genética de los conceptos tratados en la tesis puede constituir una contribución teórica de la misma.

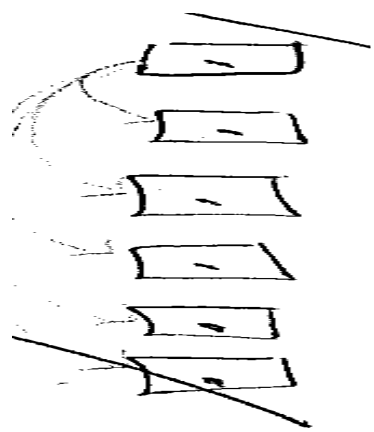
Esta descomposición genética se utilizó como base para el diseño de actividades que los alumnos resolvieron en repetidas ocasiones. El resultado del uso en clase de estas actividades y de la metodología específica planteada, en la que los estudiantes enfrentaban una y otra vez el mismo tipo de problemas con el fin de proporcionarles oportunidades de reflexión sobre sus acciones, de interiorización y de encapsulación, fue interesante y constituye una aportación al campo de la Educación Matemática.

Los resultados de la experiencia permitieron ver las estrategias seguidas por los alumnos en la solución de los problemas. Cuando los alumnos enfrentaron los problemas por primera vez, sus estrategias consistieron en utilizar métodos gráficos e iconográficos que les permitieran organizar la información y contar las posibilidades de una en una. En la mayoría de los casos los alumnos hicieron diagramas, enumeraron los casos y sumaron como acción para desglosar el problema y contar físicamente para encontrar el resultado. Poco a poco estas acciones fueron interiorizadas en procesos en los que los alumnos no tenían ya necesidad de contar todos los casos, sino que eran capaces de detectar ciertos patrones en la información y utilizar operaciones, como el producto, para generalizar los patrones. La deducción de las fórmulas durante la sesión en clase, apoyados por la maestra, puso también en evidencia el proceso de interiorización de las primeras acciones de los alumnos y la mayoría de ellos logró utilizarlas de manera efectiva y razonada en la solución de los problemas de conteo donde el orden fuera importante.

En el capítulo tres se hizo el análisis completo de las soluciones encontradas por los alumnos en la primera experiencia, semestre agosto – diciembre del 2006. A continuación se muestran algunos ejemplos de diagramas que hicieron los alumnos para desglosar los problemas antes de interiorizar dicha acción. Estos diagramas los utilizaron las primeras veces que resolvieron las series.







Más adelante interiorizan esta acción en un proceso (producto) y se encuentran respuestas como las siguientes donde hacen referencia a procedimientos que hicieron en problemas anteriores.

$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$

Por como analizamos en los diagramas ~~anteriores.~~

untotal al sumar los ...
de 48 combinaciones. Al
aplicar el mismo razonamiento
a los 4 modelos el total
de combinaciones posibles
son 48x4=192 en total.

En la solución de los exámenes encontramos que los alumnos han interiorizado diversas acciones en un proceso que les permite el uso, en forma razonada y correcta, de las fórmulas. Por ejemplo, tenemos la fórmula de ordenación y de combinación:

ORDENACION

$$O_n^m = O_8^4$$

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!} =$$

Sin embargo, la solución de problemas de conteo donde el orden no es importante provocó dudas que fueron difíciles de superar. Los alumnos no eran capaces de diferenciar entre los problemas que involucran conteo con orden y conteo sin orden; esto constituye un posible obstáculo en la construcción de los conceptos relacionados con este tema de las matemáticas y parecía indicar que había que incluir actividades específicas de diferenciación de problemas dentro de la descomposición genética con el fin de apoyar a los alumnos en la superación de dicho obstáculo. Como se acaba de mencionar, gran parte de los alumnos tuvo dificultades para diferenciar este tipo de problemas de los que se habían resuelto anteriormente y, si bien hubo algunos alumnos que lograron identificar las diferencias y utilizar los procedimientos que habían desarrollado con anterioridad y modificarlos para resolver el nuevo tipo de problemas, la mayor parte de los alumnos no mostraron una comprensión de las diferencias ni desarrollaron una estrategia eficiente para resolverlos. Los alumnos resolvieron estos problemas utilizando las mismas estrategias que usaron al resolver los problemas con orden, es decir, siguieron manteniendo el orden. Al parecer no pensaban que el hecho de que no hubiera orden afectaría la solución del problema, es decir, no lograban diferenciar las distintas clases de problemas.

A pesar de las dificultades, los resultados de los exámenes parcial y final indican una mejor comprensión del tema, al compararlos con los resultados obtenidos por los alumnos en exámenes similares en los años anteriores en que la misma maestra impartió el mismo curso utilizando una didáctica tradicional. Esto pone en evidencia que el uso de la descomposición genética para el diseño de las actividades específicas que brindan la oportunidad a los alumnos de construir su conocimiento y el trabajo colaborativo en los equipos son variables que jugaron un papel importante en el aprendizaje de los alumnos.

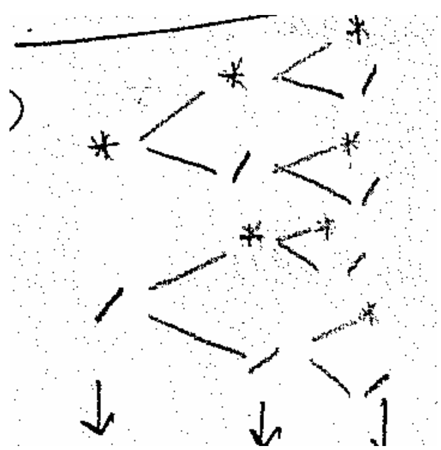
A raíz del análisis del trabajo de los alumnos en la primera experiencia surgió la necesidad de refinar la descomposición genética que se había propuesto. A partir de la nueva descomposición genética, se decidió cambiar la serie de problemas sin orden por una serie que incluyera problemas con y sin orden para lograr que los alumnos desarrollaran construcciones mentales que les permitiera ver la diferencia entre ambos problemas. Es decir, la finalidad de este cambio fue que los alumnos pudieran diferenciar entre los dos tipos de problemas e interiorizaran las acciones que permiten resolver exitosamente cada uno de ellos. Un factor importante de la Teoría APOE es justamente que los resultados de una primera experiencia sirvan para refinar la descomposición genética y resulten en una mejora en la didáctica, que a su vez, se traduce en un mejor aprendizaje de los conceptos por parte de los alumnos en una experiencia posterior.

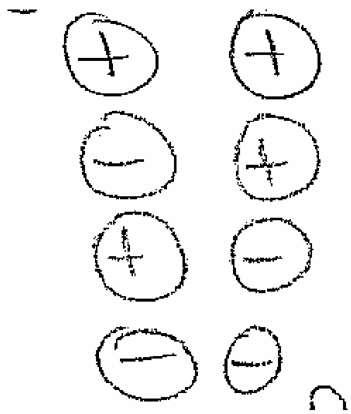
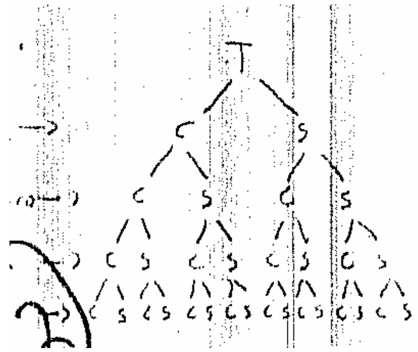
La experiencia se repitió a la luz del diseño didáctico basado en la segunda descomposición genética. Como se discutió en el capítulo cuatro, los estudiantes que participaron en esta segunda experiencia (semestre enero – mayo del 2007) lograron diferenciar los distintos tipos de problemas de conteo y aplicar estrategias eficaces en la solución de los problemas. Aunque el propósito de este trabajo no consiste en comparar el desempeño de los dos grupos utilizados en la experiencia, los resultados en los exámenes de este grupo que utilizó actividades diseñadas con base en la nueva descomposición genética fueron aún mejores que los del grupo del semestre anterior. Esto parece indicar que la descomposición genética refinada funciona adecuadamente para predecir las construcciones mentales que permiten a los alumnos construir los conceptos relacionados con el tema del orden.

Estos resultados permiten concluir que no solamente es posible diseñar una estrategia didáctica, sino además que el diseño mejoró de manera importante la distinción planteada en los alumnos y que en ello la descomposición genética resultó una herramienta fundamental.

El análisis completo de esta experiencia se describió en el capítulo 4. Nuevamente encontramos que al principio en la solución de los problemas los alumnos desglosan los problemas para físicamente contar los casos y encontrar el resultado.

Por ejemplo, tenemos los siguientes diagramas:



Más adelante interiorizan esta acción en un proceso que les permite efectuar el producto para encontrar la respuesta. Además, se encuentran respuestas donde hacen referencia a procedimientos que hicieron al resolver problemas anteriores.

por lo tonto ✓ $6 \times 4 = 24$

Similar al procedimiento al anterior

Por último, principalmente en la solución de los exámenes, encontramos el uso correcto de las fórmulas. Por ejemplo, tenemos la fórmula de combinación y de ordenación con repetición:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

$$OR_n^m = n^m =$$

En este semestre, la segunda secuencia hizo hincapié en que distinguieran un problema con orden de uno sin orden. En los siguientes extractos se puede ver que efectivamente hacen esta distinción.

En a) se cuenta con orden y en b) es sin orden

a) c/orden b) s/orden

Esto lleva a suponer que han interiorizado la acción de quitar el orden en un proceso que los lleva a dividir para quitar dicho orden. Se muestran a continuación dos casos.

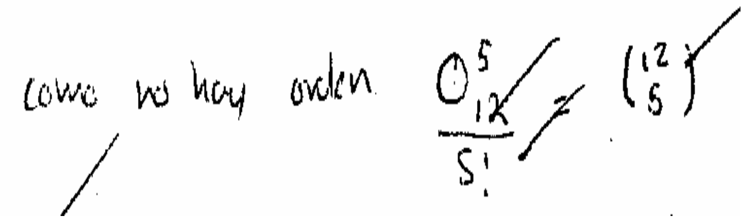
d). Que como son de dos digitos y en los conjuntos no hay orden se reduce a la mitad que si fueran digitos.

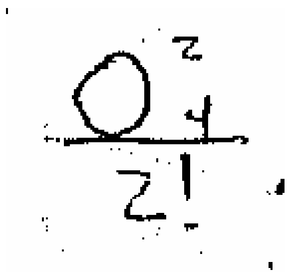
pero como el eje anterior y la d está repetida dividimos para eliminar este caso de repetición 24/2 = 12 opciones

Se reescribe la respuesta anterior pues no es legible.

> *"pero como el eje anterior y la d está repetida dividimos para eliminar este caso de repetición 24/2 = 12 opciones"*

Algunos alumnos incluso llegaron a encapsular el proceso en un objeto que dividen entre la permutación de los elementos para quitar el orden y encontrar la fórmula de combinaciones.





Además, los resultados de esta tesis ponen de manifiesto el tipo de dificultades que enfrentan los alumnos cuando resuelven problemas de conteo y las estrategias que siguen al intentar resolverlos. Esta información es una contribución importante a la educación matemática ya que, como se ha mencionado en los antecedentes al presente trabajo, se ha hecho muy poca investigación sobre el tema de conteo y la que se ha hecho se ha enfocado al estudio de estudiantes de nivel primaria y secundaria.

El tema de conteo se introduce en muchas ocasiones en los niveles medio y medio superior: secundaria y preparatoria. El trabajo didáctico que se realizó en esta tesis no supone algún conocimiento previo por parte de los alumnos. Se puede decir que la descomposición genética desarrollada para esta experiencia podría ser también de utilidad para diseñar didácticas específicas para esos niveles. Las series de problemas que se diseñaron con base en la descomposición genética podrían utilizarse con alumnos de estos niveles. Se esperaría que estos estudiantes hicieran al menos una parte de las construcciones mentales que se lograron con los estudiantes universitarios. El análisis de la pertinencia y efectividad de este diseño podría ser materia de una futura investigación.

El tema de conteo es muy amplio por lo que queda mucha investigación por realizar con el objetivo de identificar las construcciones mentales de los alumnos cuando abordan este tema de matemáticas. Por ejemplo, es necesario estudiar qué construcciones mentales se requieren y cómo reflejarlas en la descomposición genética para que los alumnos puedan identificar claramente los problemas que deben separarse en casos. Dentro de las series que se usaron en esta investigación, existen varios problemas de esta naturaleza, como por ejemplo el problema 5 de la serie sin orden y la pregunta 4 del examen de conteo de la primera experiencia y el problema 8 de la serie de problemas con y sin orden de la segunda experiencia, y se encontró que fueron pocos los alumnos que pudieron detectar los detalles que involucran muchos de los problemas de conteo que surgen en la experiencia cotidiana. Diferenciar distintos casos dentro de un mismo problema implica, en primer lugar, una comprensión profunda del problema. Además, este tipo de problemas requieren de estrategias que no son fáciles de generalizar, sino que necesitan de una experiencia que permita identificar las posibilidades de elección dentro del problema y clasificarlas por tipos que requieren de un tratamiento específico. Queda como tema de una futura investigación el diseño de una descomposición genética que aborde este problema y que permita desarrollar una estrategia didáctica que permita superar los problemas que se detectaron en la presente investigación.

ANEXOS

En este anexo se presentan algunas de las tablas que se realizaron tomando en cuenta el análisis a priori de los problemas para estudiar si los alumnos habían realizado las construcciones mentales que se esperaban según la descomposición genética diseñada. Estas tablas son las que se mencionan en la sección 2.2 Metodología y se usaron para el análisis de la solución de los problemas por parte de los alumnos. Las partes entre comillas se copiaron idénticas al texto escrito por los alumnos.

PRIMERA EXPERIENCIA. SEMESTRE AGOSTO – DICIEMBRE DEL 2006.

Pregunta 6 de la serie con orden resuelta por equipos antes de impartir el tema.

En cierta transmisión existen dos sonidos, uno corto, llamado estrella y uno largo, llamado diagonal. Con estos sonidos pueden formarse señales de uno, dos o tres sonidos. ¿Cuántas señales de un sonido, de dos sonidos y de tres sonidos existen?

EQUIPO	RECONOCER DOS FACTORES	SEÑAL DE UN SONIDO	SEÑAL DE DOS SONIDOS. MULTIPLICAR	SEÑAL DE TRES SONIDOS. MULTIPLICAR
1	Si.	Bien.	Escriben los casos y los cuentan.	Escriben los casos y los cuentan.
2	Si.	Hacen un diagrama con 1, 2 y 3 sonidos. Cuentan.	Usan el diagrama y cuentan.	Usan el diagrama y cuentan.
3	No entienden el problema. Confunden sonido y señal.	Hacen un diagrama con 3 casos para cada sonido. Multiplican 2x3=6.	No responden.	No responden.
4	Si.	Escriben todos los casos y cuentan.	Escriben los casos y cuentan.	Escriben los casos y cuentan.
5	Si.	Escriben los casos y cuentan.	Escriben los casos y cuentan.	Escriben los casos y cuentan.
6	No entienden el problema.	Hacen un diagrama con las 3 opciones por cada sonido.	No responden.	No responden.

EQUIPO	RECONOCER DOS FACTORES	SEÑAL DE UN SONIDO	SEÑAL DE DOS SONIDOS. MULTIPLICAR	SEÑAL DE TRES SONIDOS. MULTIPLICAR
7	No entienden el problema.	"De 1 sonido se pueden hacer 2 señales una con estrella otra con diagonal."	"De 2 sonidos se pueden hacer 2 señales una con estrella y otra con diagonal."	"De 3 sonidos se pueden hacer 2 señales una con estrella y otra con diagonal."
8	Si.	Escriben los casos y cuentan.	Escriben los casos y cuentan. Les falta un caso.	Escriben los casos y cuentan.
9	Si.	Solo respuesta.	Escriben los casos y cuentan.	Escriben los casos y cuentan. Ponen dos respuestas, la correcta, 8 y después 6. Cuentan mal pues si ponen los ocho casos.
10	Si.	Escriben los casos y cuentan.	Escriben los casos y cuentan	Escriben los casos y cuentan

Pregunta 8 de la serie con orden resuelta por equipos antes de impartir el tema.

Las placas de los coches en una ciudad son de tres letras. Si se usa el alfabeto de veintiséis letras, ¿cuántas:

a) placas distintas hay?
b) placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con una vocal?
c) si no se permiten las repeticiones, ¿cuántas placas comienzan con la letra q? ¿Cuántas terminan con la letra q? ¿Cuántas terminan con vocal?

Inciso a)

EQUIPO	RECONOCER REPETICIONES	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
1	Si. "No dice que no se pueda repetir en la a."	Multiplican. "Por como analizamos en los diagramas anteriores." Generalizan.
2	Si.	"26 x 26 x 26"
3	Si.	Si. Escriben solo el producto.
4	Si.	Si. Escriben solo el producto.
5	No resuelven.	
6	Si.	Hacen un "diagrama de árbol en formato abstracto." Multiplican.

EQUIPO	RECONOCER REPETICIONES	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
7	Si. "En cada espacio puede haber 26 letras ya que se pueden repetir."	Se equivocan, en lugar de 26^3 ponen "26 x 3 = 78."
8	Si.	Solo ponen la respuesta.
9	Si.	Solo ponen la respuesta.
10	Si.	Si.

Inciso b)

EQUIPO	PRIMER LUGAR FIJO. ÚLTIMO LUGAR FIJO, PERO SON CINCO CASOS	MULTIPLICAR LOS RESTANTES. PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
1	Si.	Si.
2	Si.	Si.
3	Si.	Si.
4	Solo resuelven con q al principio.	Si. Escriben solo el producto.
5	No resuelve.	
6	Lo resuelven como un solo caso. "Sabemos que en la primera casilla debe ir una letra "q", en la 2da casilla hay 26 letras posibles y en la tercera y última casilla solo 5 quedan las vocales."	Hacen el árbol incompleto. "Tendríamos un árbol de donde sale de una q $\rightarrow$ 26 $\rightarrow$ 5 $\Rightarrow$ 26 x 5 = 130."
7	Lo resuelven como un solo caso. "En el primer espacio la q está fija. En el segundo espacio puedo poner cualquiera de las 26 letras del abecedario y en el tercer espacio solo tengo 5 opciones que son las vocales."	Si.
8	Si.	Solo ponen la respuesta.
9	Si.	Solo ponen la respuesta.
10	Si.	Si.

Inciso c)

EQUIPO	PRIMER LUGAR FIJO ÚLTIMO LUGAR FIJO. ÚLTIMO LUGAR FIJO, PERO SON CINCO CASOS	NO VALEN LAS REPETICIONES	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
1	Si.	"Aquí no tomamos la q, por eso sólo son 25 opciones. No se toma la q ni la anterior $\therefore$ 24 opciones."	Si.

EQUIPO	PRIMER LUGAR FIJO ÚLTIMO LUGAR FIJO. ÚLTIMO LUGAR FIJO, PERO SON CINCO CASOS	NO VALEN LAS REPETICIONES	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”
2	Si.	“Porque no puedes repetir la q en los otros espacios.” Pero en el caso de las vocales quitaron todas: “quitas las posibles 5 vocales.”	Si.
3	Si.	Si.	Si. Escriben solo los productos.
4	Solo resuelven con q al principio.	Si.	Solo ponen el resultado y es incorrecto.
5	No resuelven.		
6	Si.	Si, pero en el caso de las vocales restaron al total de letras las 5 vocales. “26 – 5 vocales $\Rightarrow$ 21 formas distintas” e hicieron: “21 x 20 x 5 = 2100.”	Si.
7	Aquí si resuelven por separado las preguntas.	Si, pero en el caso de las vocales restaron al total de las letras las 5 vocales. “En el primer espacio puedo poner 21 letras porque ya quité las vocales.”	Si.
8	Si.	Si.	Solo ponen la respuesta.
9	Si.	Si.	Solo ponen la respuesta.
10	Si.	Si.	Si.

Pregunta 7 de la serie con orden resuelta en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

Las claves lada en cierta región son de tres dígitos, pero el dígito intermedio debe ser cero ó uno. Las claves lada cuyos últimos dos dígitos son uno están siendo usadas para otros fines, por ejemplo, 911. Con estas condiciones, ¿cuántas claves lada hay disponibles?

NOMBRE	RECONOCER DOS CASOS. UNO O CERO ENMEDIO	CON CERO CUALQUIER DÍGITO	CON UNO QUITAR EL CASO *11	MULTIPLICAR EN CADA CASO. SUMAR LOS DOS CASOS
Erick	Si.	Escribe todos los casos.	No los pone.	Cuenta.
Ozziel	Si.	“10 1 10 = 100”	“10 1 9 = 90”	Si.
Emilio	No.	No.	No.	Un caso “10 2 9 = 180”
David	Si.	“10 0 10 = 100”	“10 1 10 = 100 posibles pero 10 1 1 = 10 casos que no se pueden.”	Resta todos los casos posibles menos los que no se pueden. “100 posibles + 100 – 10” Menciona principio aditivo.
Irma	No.	Escribe “_ 0/1 1”	No.	“10·8·9”
Dulce	Si.	“10 1 10 = 100”	“10 1 9 = 90”	No pone resultado final.
Christiane	Si.	“10 1 10”	“10 1 9”	Multiplica todo.
Karla	No. Quita el 1 del último lugar.	No.	No.	Pone factorial a todo. “10!2!9!”
Christian	Dos soluciones. Quita al total de casos los que acaban en uno y quita al uno del último lugar.	No.	No.	“10 2 10 = 200 – 10 = 190 pues se usó el 1 y le excluyo quito 10.” Además “Como el 1 no puede estar en medio me queda una forma. Como el 3er espacio excluye el 1 entonces quedan 9 formas y cómo el 1er espacio puede escoger 10 me queda 10 1 9 = 90.”
Jorge	Si.	“10 0 10”	“10 1 9”	Si.
Cindy	No.	No.	No.	“10 2 9 = 180”
Lizette	No.	No.	No.	“10 2 9 = 180”

NOMBRE	RECONOCER DOS CASOS. UNO O CERO ENMEDIO	CON CERO CUALQUIER DÍGITO	CON UNO QUITAR EL CASO *11	MULTIPLICAR EN CADA CASO. SUMAR LOS DOS CASOS
Alicia	Si.	"10 0 9"	"10 1 1"	No resuelve.
Daniela	Si.	"10! 1 10!"	"10! 1 9!"	Si, pero usa factoriales.
Karim	No.	No.	No.	"10 2 9 = $3^{10} \cdot 3^{2} \cdot 3^{9}$"
Saulo	Si. Hace el total "10 2 10 = 200"	Resta del total.	Quita "se le resta al resultado 10."	"Total – no válidos. 200 – 10 = 190"
Gerardo	Si.	"9 1 9"	"9 1 8"	Si.
Jonathan	Si. Hace el total "10 2 10 = 200"	Resta del total.	Quita "10 que son los números que terminan en 11."	"Total – no válidos. 200 – 10 = 190"
Alonso	Si.	No.	No.	Escribe una lista con los casos que comienzan con 00 y 01 "son 19 números porque quitamos el 11 y como el primer lugar pueden ser 10 (10)(19)=190."
Yadira	No.	No.	No.	Escribe varios casos y resuelve con la fórmula de ordenaciones.
Carlos	Si.	"10 0 10"	"10 1 10 caso uno, con doble 1 10 1 10"	Hace el total menos los no válidos. "$10^{2}+10^{2}-10$"
Luisa	Si.	"Si el 2° num es cero entonces 10 2 10."	"Si el 2° número es uno 10 2 9."	Si, pero en medio pone 2 en lugar de uno.
Mauricio	Si.	"10 10"	"10 9"	Si.

Pregunta 15 de la serie con orden resuelta en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"	SUMAR LOS TRES CASOS
Erick	No. Escribe los números con dígitos iguales del 1 al 100, los cuenta y le dan 10. Escribe 28 números con dígitos iguales del 101 al 200 y sin explicar pone que son 72. Hace lo mismo de 201 a 300 y generaliza.	Resta de los 100 primeros los 10 que encontró, le da 90. Los 72 casos que encontró los multiplica por 9 (101 a 200, 201 a 300, 301 a 400, etc. 9 veces).	"72 x 9 = 648 + 90 = 738."
Ozziel	No. Solo toma de 3 dígitos.	"10 9 8"	No.
Emilio	No. Solo toma de 3 dígitos.	"10 9 8"	No.
David	No. Solo toma de 3 dígitos.	"10 9 8"	No.
Irma	No. Solo toma de 3 dígitos.	"10 9 8"	No.
Dulce	No. Solo toma de 3 dígitos.	"10 números 9 no. 8 10!" Esta igualdad no es cierta.	No.
Christiane	No. Solo toma de 3 dígitos.	"10 9 8 porque para saber cuantos enteros tienen dígitos distintos en el primer lugar puedo poner 10 dígitos porque incluyo el cero el segundo quito el que puse en el primero y a el tercero quito el del primero y el del segundo."	No.
Karla	No. Escribe los números del 1 al 34.	"9 + 9 + 9 9 x 100 = 900 dígitos 9 por cada 10 y 100 del 1-100 hay 10 grupos."	No.
Christian	No.	"1000!"	No.
Jorge	No resuelve.		

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"	SUMAR LOS TRES CASOS
Cindy	No. Escribe la fórmula de ordenación con repetición "n^m". No la usa.	"10 9 8 $\rightarrow$ $10^2 \cdot 9 + 1$" El 8 pues "0 no está permitido, quedaría 000 $\rightarrow$ no es entero." El 1 pues "1 $\rightarrow$ 1000."	No.
Lizette	No.	"1 9 8 7". Además pone "n=1000 $\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{1000!}{(1000-10)!}$ 1000 tot números 10 num dígitos."	No.
Alicia	No.	"$\frac{n!}{(m-m)!} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!}$"	No.
Daniela	Si. "Porque en el 1er son los dígitos del 1 …9, en 2 son los dígitos del (1,9) y los dígitos de (0..9) sin repetir el primer número y 3 ero los (1..9), después (0..9) sin repetir el 2ndo y (0..9) sin repetir 1er y seg dígito."	Si.	Si.
Karim	No.	Sin explicar: "2 9 8 7"	No.
Saulo	No.	Usa la fórmula de ordenaciones de 10 objetos en 6 lugares.	No.
Gerardo	No resuelve.		
Jonathan	No.	Usa la fórmula de ordenaciones de 10 objetos en 7 lugares.	No.
Alonso	No.	"10 9 8 10 dígitos, 9 porque ya no se repite el primero, 8 porque no se repite ni el primero ni el segundo."	No.
Yadira	No.	Usa la fórmula de ordenaciones de 9 objetos en 3 lugares.	No.
Carlos	No.	"Del 1 al 100 hay 10 que son iguales." Escribe la fórmula de ordenaciones sin repetición y "pero no se me ocurre nada."	No.
Luisa	No.	"1 8 7 6 = 8 x 7 x 6 Como son 9 dígitos (8 x 7 x 6)9 = 9!" Esta última igualdad no es cierta.	No.

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"	SUMAR LOS TRES CASOS
Mauricio	No.	"10 9 8 7". Además pone la fórmula de ordenaciones sin repetición.	No.

Pregunta 5 de la serie con orden resuelta en forma individual como tarea.

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras a, b, c, d, e, e, e, e, e de forma que ninguna letra e sea adyacente a otra?

NOMBRE	QUITAR LAS LETRAS "*E*	USAR POR SEPARADO LAS OTRAS LETRAS	MULTIPLICAR LAS OTRAS LETRAS	PONER LAS "*E*" ENTRE LAS OTRAS LETRAS
Erick	No entregó.			
Ozziel	No entregó.			
Emilio	Si.	Si.	Si.	Si, pero pone "5!"
David	Si.	Si.	Si.	Si, pero pone "5!"
Irma	Si.	Si.	Si.	Si.
Dulce	Si.	Si.	Si.	Si.
Christiane	No entregó.			
Karla	Si.	Si.	Si.	Si.
Christian	No entregó.			
Jorge	No entregó.			
Cindy	Si.	Si.	Si.	Si.
Lizette	Si.	Si.	Si.	Si, pero pone "5!"
Alicia	Si.	Si.	Si, pero pone "4!3!2!1!"	Si.
Daniela	Si.	Si, pero las deja fijas.	No, permuta las letras e.	Si, pero las permuta. Su solución es "5!"
Karim	No entregó.			
Saulo	No entregó.			
Gerardo	Si.	Si.	Si.	Si.
Jonathan	No entregó.			
Alonso	No entregó.			
Yadira	Si.	Si.	Si.	Si.
Carlos	Si.	Si.	Si.	Si.
Luisa	Si.	Si.	Si.	Si, pero pone "5!"
Mauricio	No entregó.			

NOMBRE	QUITAR LAS LETRAS "*E*	USAR POR SEPARADO LAS OTRAS LETRAS	MULTIPLICAR LAS OTRAS LETRAS	PONER LAS "*E*" ENTRE LAS OTRAS LETRAS
Aníbal	Si, pero puso solo 4 letras e.	Si.	Si.	Si, pero al poner 4 hay 2 formas. "2(4!)."
Israel	Si.	Si.	Si.	Si.

Pregunta 11 de la serie con orden resuelta en forma individual como tarea.

¿Cuántos enteros entre 10,000 y 100,000 están formados sólo por los dígitos 6, 7 u 8? ¿Cuántos habrá que no tengan más que los dígitos 6, 7, 8 ó 0?

NOMBRE	RECONOCER SOLO TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
Erick	No entregó.	
Ozziel	No entregó.	
Emilio	Si.	Si.
David	Si.	Si.
Irma	Si.	Si.
Dulce	Si.	Si.
Christiane	No entregó.	
Karla	Si.	Si.
Christian	No entregó.	
Jorge	No entregó.	
Cindy	Si.	Si.
Lizette	Si.	Si.
Alicia	Si.	Si.
Daniela	Si.	Si.
Karim	No entregó.	
Saulo	No entregó.	
Gerardo	No. "4 4 4 4 $=4^4$."	Si.
Jonathan	No entregó.	
Alonso	No entregó.	
Yadira	No.	No explica. Responde: "8!"
Carlos	No resuelve.	
Luisa	Si. Resuelve por casos, repitiendo muchos. Mal.	Si. "con mismo dígito 3 opciones. Con 2 dígitos 6,7 o 7,8 o 6,8 $3[2^5]$. Con 3 dígitos 3^5." Da como solución: "$3 + 3(2^5) + 3^5$."
Mauricio	No entregó.	
Aníbal	Si.	Si.
Israel	Si.	Si.

NOMBRE	SEPARAR PRIMER DÍGITO. NO PUEDE VALER CERO. 3 CASOS	DEMÁS DÍGITOS CUATRO CASOS	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
Erick	No entregó.		
Ozziel	No entregó.		
Emilio	No.	Si.	Si.
David	Si.	Si.	Si.
Irma	Si.	Si, pero solo pone 4 dígitos.	Si. "$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^4 = 192$"
Dulce	Si. "No puede ir el cero ya que sería < 10,000."	Si.	Si.
Christiane	No entregó.		
Karla	Si. Primer lugar pone: "6, 7, 8"	Si.	Si.
Christian	No entregó.		
Jorge	No entregó.		
Cindy	No.	Si.	Si. "$4^5 = 1024 – 1 = 1023$"
Lizette	Si.	Si.	Si.
Alicia	Si.	Si.	Si.
Daniela	Si.	Si.	Si.
Karim	No entregó.		
Saulo	No entregó.		
Gerardo	Si, pero toma 5 números.	Toma 5 números.	Si, pero incorrecto. "$4\ 5\ 5\ 5 = 4 \cdot 5^3$"
Jonathan	No entregó.		
Alonso	No entregó.		
Yadira	No resuelve.		
Carlos	No resuelve.		
Luisa	Si, pero resuelve mal.	Si.	Si.
Mauricio	No entregó.		
Aníbal	Si. "No puede ser "0""	Si.	Si.
Israel	Si.	Si.	Si.

Pregunta 1 de la serie sin orden resuelta por equipos antes de impartir el tema.

¿De cuántas formas se puede escoger un equipo de basketball (5 jugadores) de entre doce jugadores posibles? ¿Cuántos equipos incluyen al más débil y al más fuerte?

EQUIPO	NO REPETICIONES	QUITAR ORDEN	PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
1	Si.	"Supusimos que las personas son como letras distintas. Quisimos saber cuantas "palabras" podían hacerse con esas 5 letras, salió 5!"	"$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5!}$"
2	Si.	"Como no importa el orden, ie el jugador 1 sea elegido primero o al final, queremos quitar las repeticiones, aquí abc=cba entonces lo dividimos entre 5x4x3x2x1, así eliminamos los equipos repetidos."	"$\frac{12x11x10x9x8}{5x4x3x2}$"
3	Si.	Utilizan la fórmula de combinaciones.	"$\frac{12!}{5!7!}$"
4	Si.	Escriben los casos con A fijo, B fijo, C fijo, …, H fijo.	Suman todos los casos que encontraron.
5	Si.	Escriben los casos fijando a una persona.	Suman todos los casos que encontraron.
6	Si.	"Se pueden escoger de 12 con 5 personas." Escriben la fórmula de ordenaciones $\frac{n!}{(r-n)!}$, no quitan el orden.	"12 x 11 x 10 x 9 x 8."
7	Si.	No.	"12 11 10 9 8"

EQUIPO	NO REPETICIONES	QUITAR ORDEN	PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
8	Si.	Utilizan la fórmula de combinaciones, sin poner los factoriales.	"$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1(7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}$"
9	No entregaron.		
10	Si.	Si, dividen entre "12 tot de jugadores, 5 los q' van en el equipo, 2 max de equipos con 12 jugadores."	"$\frac{(12)(11)(10)(9)(8)}{(12)(5)(2)} = 792$"

EQUIPO	NO REPETICIONES	10 PERSONAS A ESCOGER 3	PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
1	Si.	"Nos quedan 10 personas posibles. Para escoger grupitos de 3."	"$\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}$"
2	Si.	"Ponemos al mas debil y al mas fuerte fijos." "Solo vamos a acomodar a 10 niños 3 en cada equipo."	"$\frac{10x9x8}{3x2x1}$"
3	Si.	No explican.	Solo respuesta correcta.
4	Si.	Cuentan los casos con "A=fuerte B=debil."	"120 incluyen al mas fuerte y al mas debil."
5	Si.	Cuentan los casos que "incluyen al + fuerte y al + debil."	"120 → equipos."
6	Si.	No explican.	"Equipos con más fuerte = 7,920. Equipos con + débil = 7,920."
7	No resuelven.		
8	"Pendiente."		
9	No entregaron.		
10	Si.	"Estan tanto el + fuerte como el mas debil." Dejan 11 jugadores. Parece que meten solo al débil.	"$\frac{(1)(11)(10)(9)(8)}{(12)(5)(2)} = 66$" Al primer 1 le ponen "debil."

Pregunta 2 de la serie sin orden resuelta por equipos antes de impartir el tema.

Un entrenador debe seleccionar a once alumnos de su clase para jugar en un torneo de fútbol. Si puede formar 12,376 equipos, ¿cuántos alumnos tiene en su clase?

EQUIPO	RECONOCER QUE FALTA N	DESPEJAR N	SOLUCIÓN
1	Si. “$\frac{?}{11!} = 12{,}376$”	“Pensamos en descomponer en primos 12,376.” “Ahora tomamos el # más grande que es 17.”	Correcta.
2	Si. “a $\Rightarrow$ num. de alumnos.”	“$\frac{axa-1xa-2x...a-10}{11x10x9x8x...x2x1}$ $= 12{,}376$”	“Nos rendimos.”
3	Si. Usan fórmula. “$\frac{(x)!}{11!(x-11)!} = 12{,}376$”	No explican.	Correcta. “17 alumnos.”
4	Si. “11+x=12376 $(2^{11}) = 12376 \rightarrow 2048x = 12376$ $x = \frac{12376}{2048} = 6.04$ $x = 6.04 = 6$”	“11 + 6 = 17”	Correcta.
5	Si. . “11+x=12376 $(2^{11}) = \frac{12376}{2^{11}} = x = 6.04 = 6$”	“11 + 6 = 17”	Correcta.
6	Si. Parece que usan la fórmula pero mal. “11 = 12376” x	No.	No.
7	No.	“Como se pueden formar 12,376 equipos y cada equipo tiene 11 alumnos entonces se multiplica y se tiene un total de 136,136 alumnos.”	Incorrecta.
8	“Sin fórmula no la podemos hacer.”		
9	No entregaron.		
10	Usan fórmula. “Buscamos alguna combinación de 11 con otro número para que den 12,376 combinaciones.”	“Prueba y error (11 de 11)=1 (12 de 11)=12 (13 de 11)=78 (14 de 11)=364 .. (17 de 11)=12,376.”	Correcta.

Pregunta 7 de la serie sin orden resuelta en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

Un alumno hace un examen de diez preguntas de las cuales debe responder a ocho y omitir dos.

a) ¿De cuántas maneras puede hacer cada estudiante su selección?
b) Si un estudiante tiene que contestar a dos preguntas y omitir ocho, ¿de cuántas maneras puede hacer su selección?
c) ¿Qué relación hay entre las dos respuestas anteriores? ¿Por qué?

Inciso a)

NOMBRE	QUITAR ORDEN	SOLUCIÓN
Luisa	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} =$ ” $\frac{10!}{8!2!}$
Alicia	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} =$ ” Llega hasta el resultado. $\frac{10!}{8!2!}$
Dulce	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} =$ ” $\frac{10!}{8!2!}$
Lizette	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10!}{8!(2!)}$ ”
Daniela	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8!2} = 45$ ”
Cindy	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{8!(2!)}$ ”
Emilio	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “No puedes contestar más de una pregunta 2 veces por lo tanto no se usa la fórmula con repetición.”	“$\frac{10!}{8!(2!)}$ ”
Israel	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{8!2!}$ ” Llega hasta el resultado.

NOMBRE	QUITAR ORDEN	SOLUCIÓN
Christiane	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “Aquí es sin repetición porque no puede responder a 2 preguntas iguales.”	“$\frac{10!}{8!(10-8)!}=\frac{10!}{8!(2!)}$” Llega hasta el resultado.
Saulo	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “Como se debe escoger 8 para responder de 10 preguntas, entonces no lleva orden y no se vale repetir usamos la fórmula $\binom{n}{m}$”	“$\binom{10}{8}=\frac{10!}{8!(10-8)!}=\frac{10!}{8!2!}$”
Christian	Si. Utiliza fórmula de combinaciones, pero solo la indica no pone valores.	“$\frac{n!}{n!(n-m)!}$” Está mal el denominador, debe ser *m!* en lugar de *n!*
Yadira	Si. Utiliza fórmula de combinaciones con repetición aunque dice “no hay rep porque no puedo escoger una preg varias veces.”	“$\binom{10+11-1}{8}=\frac{(10+8-1)!}{8!(10+8-1-8)}=\binom{20}{8}=\frac{17!}{8!(11)}$” Se olvida del factorial en el denominador y se equivoca en el 11.
Jorge	Si. Utiliza fórmula de combinaciones con repetición. Ver c)	“$\frac{(10+8-1)!}{8!(10+8-1-8)}=\frac{17!}{8!9!}$”
Mauricio	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{8!(2!)}$”
David	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “Porque no hay repetición.”	“$\frac{10!}{8!(2!)}$”
Gerardo	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “$\binom{n}{m}$ porque no hay repeticiones. No se puede escoger la misma pregunta más de una vez.”	“$\frac{10!}{8!(10-8)!}=\frac{10!}{8!(2!)}$”

NOMBRE	QUITAR ORDEN	SOLUCIÓN
Erick	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{8!(2!)}$” Llega hasta el resultado.
Karim	No resuelve.	
Manuel	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\binom{10}{8}=\frac{10!}{8!2!}$”
Bruno	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{8!(10-8)!}=\frac{10!}{8!2!}$” Llega hasta el resultado.
Alvaro	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\binom{10}{8}$”

Inciso b)

NOMBRE	QUITAR ORDEN	SOLUCIÓN
Luisa	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!(10-2)!}=$” $\frac{10!}{2!8!}$
Alicia	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!(10-2)!}=$” Llega hasta el resultado. $\frac{10!}{2!8!}$
Dulce	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!8!}$”
Lizette	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{2!(8)!}$”
Daniela	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2!8!}=45$”
Cindy	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{2!(8!)}$”
Emilio	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “No puedes contestar más de una pregunta 2 veces por lo tanto no se usa la fórmula con repetición.”	“$\frac{10!}{2!(8!)}$”
Irma	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{2!8!}$”

NOMBRE	QUITAR ORDEN	SOLUCIÓN
Israel	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{2!8!}$” Llega hasta el resultado.
Christiane	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “Aquí es sin repetición porque no puedes responder a 2 preguntas iguales.”	“$\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10!}{2!(8!)}$” Llega hasta el resultado.
Saulo	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “Es lo mismo que en el inciso a), solo que ahora son 2 los que se deben responder se utiliza la formula $\binom{n}{m}$”	“$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!(10-2)!}=$” $\frac{10!}{2!8!}$
Christian	Si. Utiliza fórmula de combinaciones, pero mal y le resta algo.	“$\frac{n!}{n!(n-m)!}-\frac{(n+m-1)}{n!}$” Incorrecto.
Yadira	Si. Utiliza fórmula de combinaciones con repetición aunque dice “no hay rep porque no puedo escoger una preg varias veces.”	“$\binom{10+2-1}{2}=\frac{(10+2-1)!}{2!(10+2-1-2)}=\frac{11!}{2!(9)}$” Se olvida del factorial en el denominador.
Jorge	Si. Utiliza fórmula de combinaciones con repetición. Ver c)	“$\frac{(10+2-1)!}{2!(10+2-1-2)}=\frac{11!}{2!9!}$”
Mauricio	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{2!(8!)}$”
David	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “igual no hay repetición.”	“$\frac{10!}{2!8!}$”
Gerardo	Si. Utiliza fórmula de combinaciones. “$\binom{n}{m}$ porque no hay repeticiones. No se puede escoger la misma pregunta más de una vez.”	“$\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10!}{2!(8!)}$”
Erick	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	“$\frac{10!}{2!(8!)}$” Llega hasta el resultado.
Karim	No resuelve.	

NOMBRE	QUITAR ORDEN	SOLUCIÓN
Manuel	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	"$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!8!}$"
Bruno	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	"Es lo mismo que la a), lo vimos en clase."
Alvaro	Si. Utiliza fórmula de combinaciones.	"$\binom{10}{2}$"

Inciso c)

NOMBRE	RELACIÓN
Luisa	"Es el mismo num de exámenes."
Alicia	"En que en el inciso a y b el resultado es el mismo."
Dulce	"Las respuestas son iguales porque de las 2 formas estoy separando las 10 preguntas en 8 y en 2."
Lizette	"son iguales tomar 8 de 10 q' 2 de 10."
Daniela	"son iguales, es lo mismo."
Cindy	"es lo mismo a final de cuentas dado que primero se toman 8 de 10 y luego 2 de 10. 8!2!=2!8!"
Emilio	"por lo tanto la relación es que son iguales a y b."
Irma	"relación a – b son iguales."
Israel	"son iguales."
Christiane	"Da lo mismo porque como son tantas preguntas si escoges solo 2 hay muchas maneras porque son 10, si escoges 8 de 10 también hay las mismas opciones por ser el mismo número de preguntas."
Saulo	"La relación que hay en el inciso a y el b es que es el mismo número de combinaciones que puede haber para ambos."
Christian	"No sé."
Yadira	No resuelve.
Jorge	"En las dos existen las repeticiones ya que no importa si resuelven una u otra, se pueden repetir." Incorrecto.
Mauricio	"Es lo mismo."
David	"Porque al escoger 8 o 2 preguntas se repite la misma combinación. (ya que de una quedan 2) y en la b son los 2 por escoger."
Gerardo	"El inciso a y b son iguales."
Erick	"Son iguales."
Karim	No resuelve.
Manuel	No resuelve.
Bruno	"pues es la respuesta b)."
Alvaro	No resuelve.

Pregunta 12 de la serie sin orden resuelta en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

¿De cuántas maneras puede escoger el ganador de un premio tres discos compactos de la lista de los diez de mayor éxito, si se permiten las repeticiones?

NOMBRE	HAY REPETICIONES	SOLUCIÓN
Luisa	Si.	"$\binom{10+3-1}{3}=\binom{13}{3}$" Hace la resta mal.
Alicia	Si. Escribe la ecuación pero mal: "$x_1+x_2+x_3=10$"	"$\frac{(3+10-1)!}{10!(3-1)!}$" Pone los valores de *n* y *m* al revés.
Dulce	Si.	"$\binom{12}{3}$"
Lizette	Si. "vale repetir."	"$\frac{12!}{3!(10-1)!}$"
Daniela	Si. "si puedes repetir."	"$\frac{12!}{3!9!}$"
Cindy	Si. "valen repeticiones."	"$\frac{(3+10-1)!}{3!(9)!}$"
Emilio	Si. "puede haber repeticiones y por eso se usa fórmula con repetición."	"$\frac{12!}{3!(9)!}$"
Irma	Si. "se puede repetir."	"$\frac{12!}{3!9!}$"
Israel	Si. "ya que puede repetir discos."	"$\binom{10+3-1}{3}$"
Christiane	Si. "si se permite repetición."	"$\frac{12!}{3!(9)!}$"
Saulo	Si. "como se vale repetir."	"$\binom{10+3-1}{3}$"
Christian	Si.	"$\frac{12!}{3!(12-3)!}$"
Yadira	Si. "vale repet" pero resuelve con combinación.	"$\binom{10}{3}$"
Jorge	Si. "valen repeticiones."	"$\frac{(10+3-1)!}{3!(10+3-1-3)!}=\frac{12!}{3!9!}$"

NOMBRE	HAY REPETICIONES	SOLUCIÓN
Mauricio	Si. “porque hay repeticiones.”	“ $\frac{(10+3-1)!}{3!(10-1)!}=\frac{12!}{3!(9)!}$ ”
David	Si. “como hay repetición.”	“ $\frac{12!}{3!9!}$ ”
Gerardo	Si.	“ $\frac{(12)!}{3!(9)!}$ ”
Erick	Si. “valen repeticiones.”	“ $\frac{(12)!}{3!(9)!}$ ”
Karim	No.	“10 9 8”
Manuel	No resuelve.	
Bruno	Si.	“ $\frac{(10+3-1)!}{3!(10-1)!}=\frac{12!}{3!9!}$ ”
Alvaro	No resuelve.	

Pregunta 5 de la serie sin orden resuelta de forma individual como tarea.

Un alumno tiene que responder en un examen a siete preguntas de diez. ¿De cuántas formas puede resolver el examen si:

a) no hay restricciones?
b) debe responder a las dos primeras preguntas?
c) debe responder a tres preguntas como mínimo de las cinco primeras?

Inciso a)

NOMBRE	SIN RESTRICCIONES. QUITAR ORDEN	SOLUCIÓN
Alicia	Si.	“ $\binom{10}{7}$ ”
Dulce	Si.	“ $\binom{10}{7}$ ”
Daniela	Si.	“ $\binom{10}{7}$ ”
Cindy	Si.	“ $\frac{10!}{7!3!}$ ”
Irma	Si.	“ $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{7!}$ ”
Israel	Si.	“ $\binom{10}{7}$ ”
Yadira	Si.	“ $\binom{10}{7}$ ”

NOMBRE	SIN RESTRICCIONES. QUITAR ORDEN.	SOLUCIÓN
Gerardo	Si.	“$\binom{10}{7}$”
Karla	Si.	“$\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}$”
Carlos	Si.	“$\binom{10}{7}$”

Inciso b)

NOMBRE	RESTAR PREGUNTAS Y RESPUESTAS	SOLUCIÓN
Alicia	No.	“$\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{8}$” Incorrecta.
Dulce	Si.	“$\binom{2}{2}\binom{8}{5}$”
Daniela	“Fijas las 2. 1eras 10 – 2 = 8 y 7 – 2 = 5”	“$\binom{8}{5}$”
Cindy	“10 – 2 = 8, 7 – 2 = 5.”	“$\frac{8!}{3!5!}$”
Irma	Si.	“$\frac{8\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5!}$” Incorrecta.
Israel	Si resta a las preguntas pero sigue contestando 7.	“$\binom{8}{7}$” Incorrecta.
Yadira	No. Utiliza combinación con repetición.	“$\binom{10+3-1}{3}$” Incorrecta.
Gerardo	Si.	“$\binom{8}{5}$”
Karla	No.	“$\frac{10(9)}{2!}$” Incorrecta.
Carlos	Si.	“$\binom{8}{5}$”

Inciso c)

NOMBRE	SEPARAR 5 PRIMERAS DE 5 ÚLTIMAS	CASOS	SOLUCIÓN
Alicia	No.	No.	"$\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{8}{1}\cdots\binom{4}{1}$" Incorrecta.
Dulce	Si.	No.	"$\binom{5}{3}\binom{5}{4}$" Incorrecta.
Daniela	No. "Fija 3, 10 – 3 = 7, 7 – 3 = 4"	No.	"$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!3!}$" Incorrecta.
Cindy	"5 – 3 = 2, 5 – 4 = 1" Mal, quita 3 de las primeras 5 y 4 de las últimas 5.	No.	"$\left(\frac{5!}{3!2!}\right)\left(\frac{5!}{4!1!}\right)$" Incorrecta.
Irma	Si.	No.	"$\binom{5}{3}\binom{5}{2}$" Incorrecta.
Israel	No.	No.	"$\binom{10}{4}$" Incorrecta.
Yadira	No.	No.	"$\binom{10}{3}$" Incorrecta.
Gerardo	No resuelve.		
Karla	Si.	No.	"$\frac{5!}{2!}$"
Carlos	Si.	No.	"$\binom{5}{3}\binom{5}{2}$" Incorrecta.

Pregunta 6 de la serie sin orden resuelta de forma individual como tarea.
Resuelve los dos incisos siguientes y di si existe una relación entre ellos.

a) Encuentra el número de soluciones en los enteros de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ *con* $x_i \geq 0$ *para toda* $1 \leq i \leq 4$.

b) ¿De cuántas formas se pueden repartir siete canicas iguales entre cuatro niños?

Inciso a)

NOMBRE	PLANTEO	SOLUCIÓN
Alicia	Escribe la ecuación: "$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ con $x_i \geq 0$"	"$\binom{10}{7}$"
Dulce	Escribe la ecuación: "$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ con $x_i \geq 0$"	"$\binom{10}{7}$"
Daniela	Escribe la ecuación: "$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ con $x_i \geq 0$"	"$\binom{10}{7}$"
Cindy	Escribe la ecuación: "$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ con $x_i \geq 0$"	"$\frac{10!}{7!3!}$"
Irma	Escribe la ecuación: "$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ con $x_i \geq 0$"	"$\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$"
Israel	No.	"$\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$"
Yadira	No.	"$\frac{10!}{7!3!}$"
Gerardo	No.	"$\frac{(4+7-1)!}{7!(4-1)!}$"
Karla	Escribe la ecuación: "$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ con $x_i \geq 0$"	"$\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$"
Carlos	Hace un caso: "xxxxxxx///", pero se equivoca.	"$\frac{11!}{7!3!}$"

Inciso b)

NOMBRE	OBJETOS IGUALES	SOLUCIÓN	RELACIÓN
Alicia	Si, escribe la ecuación: "$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$"	"$\binom{10}{7}$"	No contesta.
Dulce	Si. "n = 4, r = 7."	"$\binom{10}{7}$"	"La relación es la misma en los 2 casos porque las x's son iguales a los niños y las 7 canicas igual al r"
Daniela	Si, escribe la ecuación: "$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$"	"$\binom{10}{7}$"	"Son iguales los 2 incisos."
Cindy	Hace un caso: "xxx/xxx/x/"	"$\frac{10!}{7!3!}$"	No contesta.
Irma	Hace un caso: "xx/xxx/x/x"	"$\frac{10!}{7!3!}$"	No contesta.
Israel	No.	"$\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$"	No contesta.
Yadira	Si. "7 can 4 niños", pero aplica mal la fórmula.	"$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4}$" Incorrecta.	No contesta.
Gerardo	Si.	"$\frac{10!}{7!3!}$"	No contesta.
Karla	Si.	"$\frac{10!}{7!3!}$"	No contesta.
Carlos	No contesta.		No contesta.

Pregunta 1 del examen de conteo.

En una taquería se pueden pedir los tacos al pastor con o sin cebolla, con o sin cilantro, con o sin piña y con o sin salsa. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los tacos?

NOMBRE	RECONOCER 2 OPCIONES POR INGREDIENTE	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
Erick	"Si elige con ya no puede elegir sin, o eligiendo uno ya no puede elegir otro."	Incorrecto "4!"
Ozziel	"Tienes 5 casilla a yenar entre 2 elecciones."	"2 2 2 2 = 16"
Emilio	"porque puedes escoger en cada objeto dos opciones con o sin y tienes 4 objetos."	"2 2 2 2 $\therefore 2^4$"
David	"como son 2 formas de escoger por 2 formas por 2 por 2."	"2^4 formas de pedir."

NOMBRE	RECONOCER 2 OPCIONES POR INGREDIENTE	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”
Irma	“sin o con”	“2^4”
Dulce	“No o si”	“2 2 2 2 $\therefore 2^4$”
Christiane	“2 opciones ya que le puedes poner o no cebolla”	“2^4”
Karla	“La fórmula utilizada es: $OR_2^4 = 2^4$ porque hay orden en cuanto pasas por cada uno de los alimentos y hay repetición ya que todos pueden ser si o todos pueden ser no.”	“2^4 maneras es decir de 16 maneras.”
Jorge	“Los tacos pueden ser con o sin cebolla = 2 tacos, con o sin cilantro = 4 tacos, con o sin piña = 8 tacos distintos.”	Incorrecto, le faltó la salsa. “2 2 2 = 2^3”
Cindy	“2 opciones, 2 opciones, 2 opciones, 2 opciones.”	“$\therefore 2^4$”
Lizette	“porque son 4 ingredientes que pueden ir o no ir.”	“2^4”
Alicia	“con o sin cebolla (2 opciones), con o sin cilantro, con o sin piña, con o sin salsa.”	“2^4=16”
Saulo	“En cada uno tiene 2 opciones con o sin, entonces como son 4 y se valen las repeticiones y si hay orden.”	“2^4=16”
Gerardo	“2 porque puede tener o no tener.”	“2^4”
Jonathan	No resuelve.	
Alonso	“cebolla 1 o 0, cilantro 1 o 0, piña 1 o 0, salsa 1 o 0”	“2^4”
Yadira	“4 pueden estar o no estar”	Le falta la R (repetición). “$O_2^4 = 2^4$”
Carlos	“cebolla s o n, cilantro s o n, piña s o n, salsa s o n.”	“2^4”
Luisa	“Con cebolla, sin cebolla 2 opciones, con o sin cilantro 2 opciones, con piña o sin piña 2 opciones, con salsa o sin salsa 2 opciones.”	“2 2 2 2 = 2^4”
Mauricio	“con, sin cebolla = 2, con, sin cilantro = 2, con, sin piña = 2, con, sin salsa = 2.”	“2 2 2 2 = 2^4”
Aníbal	“Cada posibilidad tiene 2 alternativas, hay 4 posibilidades.”	“2^4”
Israel	Hace un árbol con todos los casos.	“$OR_2^4 = 2^4$”
Alvaro	“Ce 2 opciones, Ci 2, P 2, S 2.”	“2^4”
Karim	“con 5 alternativas c/u son 2 opciones (F o V).”	Incorrecta, toma con o sin taco. “$(2)^5$”
Bruno	“Ceb – N ceb, Cil – N cil, p – N P, Salsa – N Sal”	“2^4=16”

NOMBRE	RECONOCER 2 OPCIONES POR INGREDIENTE	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”
Manuel	“cebolla: si o no 2 opciones, cilantro: si o no 2 opciones, piña: si o no 2 opciones, salsa: si o no 2 opciones.”	“$2^4=16$”

Pregunta 8 del examen de conteo.

En una fiesta de niños se tienen cuatro cofres de pirata llenos con monedas de uno, cinco, diez y veinticinco centavos. De los cuatro cofres cada niño puede escoger veinte monedas en total para hacer su tesoro. ¿De cuántas formas puede un niño seleccionar su tesoro?

NOMBRE	OBJETOS REPETIDOS	SOLUCIÓN
Erick	No, utiliza combinaciones.	Incorrecta. “$\binom{25}{4}$”
Ozziel	No, utiliza ordenaciones con repetición.	Incorrecta. “4^{20}”
Emilio	No, utiliza combinaciones.	Incorrecta. “$\binom{20}{4}$”
David	Si. “$x_1+x_2+x_3+x_4=20$”	“$\binom{n+m-1}{m}=\binom{23}{20}$”
Irma	Si. “$m_1+m_2+m_3+m_4=20$”	“$\binom{4+20-1}{20}=\binom{23}{20}$”
Dulce	No, utiliza ordenaciones con repetición.	Incorrecta. “20^4”
Christiane	Si. “$x_1+x_2+x_3+x_4=20$”	“$\binom{20+4-1}{20}=\binom{23}{20}$”
Karla	Si. “$m_1+m_5+m_{10}+m_{25}=20$”	“$\binom{4+20-1}{20}=\binom{23}{20}$”
Jorge	Si. “$c_1+c_2+c_3+c_4=20$”	“$\binom{20+4-1}{20}=\binom{23}{20}$”
Cindy	Si. “$m_1+m_2+m_3+m_4=20$”	“$\binom{20+4-1}{20}=\binom{23}{20}$”
Lizette	Si, “como se admiten repeticiones.”	“$\frac{23!}{20!3!}$”
Alicia	Si. “$x_1+x_2+x_3+x_4=20$”	“$\binom{4+20-1}{20}=\binom{23}{20}$”
Saulo	Si. “$o_1+o_2+o_3+o_4=20$”	“$\binom{4+20-1}{20}=\binom{23}{20}$”

NOMBRE	OBJETOS REPETIDOS	SOLUCIÓN
Gerardo	Si. “$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$”	“$\binom{20+4-1}{20} = \binom{23}{20}$”
Alonso	Si. “$m_1 + m_5 + m_{10} + m_{25} = 20$”	“$\binom{23}{20}$”
Yadira	Si. “$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$”	“$\binom{20+4-1}{20} = \binom{23}{20}$”
Carlos	Si. “$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$”	“$\binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20}$”
Luisa	Si. “$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$”	“$\binom{20+4-1}{20} = \binom{23}{20}$”
Mauricio	Si. “$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$”	“$\binom{20+4-1}{20} = \binom{23}{20}$”
Aníbal	“El niño puede escoger entre 4 cofres, 20 monedas, por tanto tiene C(20,4) posibilidades de escoger 1 tipo de moneda. Además existen 4 tipos distintos de monedas, que son C(4,1) posibles formas de tener algún tipo de moneda.”	Incorrecta. “C(4,1)C(20,4)”
Israel	Si. “$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$”	“$\binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20}$”
Alvaro	Si. “$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 20$”	“$\binom{23}{20}$”
Karim	Si. “A/B//CD A/B/C/D AB//C/D”	“$\binom{23}{20}$”
Bruno	Si. “1 + 5 + 10 + 25 = 20”	“$\binom{23}{20}$”
Manuel	Si. “$x_1 + x_5 + x_{10} + x_{25} = 20$”	“$\binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20}$”

Pregunta del examen final.
¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"	SUMAR LOS TRES CASOS
Erick	No resuelve.		
Ozziel	No. Considera solo de 3 dígitos, pero deja que el primer dígito sea cero.	"10·10 - 1·10-2." Incorrecto.	Solo considera un caso.
Emilio	"Si hay casos el primero es que solo sea un dígito, por lo tanto hay 9, en el segundo caso dos dígitos y hay 81, por que en el primer espacio no puede ir el cero y el tercer caso es para tres dígitos, pero de igual forma el primer espacio es de 9 opciones x que no va el cero."	"9 + 81 + 81·8"	"El resultado es la suma de todas las opciones porque son todas las alternativas posibles."
David	No. Considera solo de 3 dígitos, pero deja que el primer dígito sea cero.	"10 9 8" Incorrecto.	Solo considera un caso.
Irma	"(números con un solo dígito) ∴ Hay nueve casos en total. (números con 2 dígitos) 9 9 = 81 casos en total (números con 3 dígitos) 9 9 8 = 648 casos en total."	"9 + 81 + 648 = 730" Incorrecta la suma.	Si.

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"	SUMAR LOS TRES CASOS
Dulce	"en el primer caso tome los números de un solo dígito que menores a 1000 y tomando en cuenta el número cero son 10. En el segundo caso tome los números de dos dígitos; en el primer lugar quite el cero porque entonces sería un número de un dígito. En el tercer caso tome los números de 3 dígitos."	"$10 + 9^2 + 9^2 8$". Permitió el número 0.	"Al final uní las soluciones con una suma porque es una "o""
Christiane	No. Considera solo de 3 dígitos.	"Multiplique porque necesito los números al mismo tiempo para formar el grande, no por separado." "$9 \cdot 8 \cdot 7$". Incorrecto.	Solo considera un caso.
Karla	"Existen 3 casos: de 1 dígito, de 2 dígitos y de 3 dígitos."	"$10 + 81 + 648 = 739$". Permitió el número cero.	"Al final sumé ya que la suma representa un "ó" que une todos los casos para conocer el TOTAL."
Jorge	No. Considera solo de 3 dígitos, pero deja que el primer dígito sea cero.	"$10\ 9\ 8 = 720$". Incorrecto.	Solo considera un caso.
Cindy	"Caso 1: sólo tomar en cuenta las unidades. Caso 2: tomando unidades y decenas (decenas $\neq 0$). Caso 3. Tomando unidades, decenas, centenas (centenas $\neq 0$)."	"$9 + 81 + 648 = 738$."	Si.

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"	SUMAR LOS TRES CASOS
Lizette	No. Considera solo de 3 dígitos, pero deja que el primer dígito sea cero.	"(10)(9)(8)". Incorrecto.	Solo considera un caso.
Alicia	"se consideran los que solo es uno, dos dígitos, tres dígitos, cuatro dígitos (está solo el 1000)."	"10 + (9·9) + (9·9·8) + 1". Incorrecta sobre el 1.	Si.
Saulo	"Primero vemos los números con un solo dígito serían 9. Con dos dígitos 9 9 = 81. Con tres dígitos 9 9 8 = 648."	"9 + 81 + 648 = 90 + 648 = 738"	Si.
Gerardo	No. Considera solo de 3 dígitos.	"9 9 8". Incorrecto.	Solo considera un caso.
Alonso	"Está el caso cuando los número no comienzan con el 0 en el primer lugar y cuando los enteros son de 1, 2 y de 3 cifras."	"648 + 81 + 10 = 739". Permitió el número cero.	"Sumé cada caso porque un número no puede ser de 2 y de 3 cifras al mismo tiempo."
Yadira	No. Considera solo de 3 dígitos.	"9 9 8". Incorrecto.	Solo considera un caso.
Carlos	"separé casos con 2, 3 y 1 dígitos."	"648 + 72 + 9". Incorrecto, hace 9·8, en lugar de 9·9, 2 dígitos.	"Sumé pues no se da al mismo tiempo un número con 3 dígitos y con 1 dígito."
Luisa	"Lo vamos a dividir en casos, ya que los números van desde extensión 1 hasta extensión 3."	"$9 + 9^2 + 9^2 \times 8$"	"Sumamos todas las opciones de los 3 casos, porque no son eventos simultáneos, o se presenta el caso 1 o el 2 o el 3."

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”	SUMAR LOS TRES CASOS
Mauricio	“Caso 1 quedan 3 espacios y el primero no usamos el cero. Caso 2 Luego tomo 2 espacios y en el primero no uso el 0. Caso 3 después tomo 1 solo espacio y tengo 9.”	“$9^2 \cdot 8 + 9^2 + 9$”	“los casos los sume ya que son 3 casos distintos en términos de la sifra.”
Aníbal	“De un dígito. De dos dígitos. De 3 dígitos.”	“$9 + 9^2 + 9^2(8)$”	“Se usa el principio de la suma, ya que cada caso implica fenómenos distintos.”
Israel	No. “Tienes 4 lugares y los puedes llenar con los 10 dígitos.”	“Se multiplica porque son todos los posibles casos el primero y el segundo y el tercero y el cuarto.” “$O_{10}^{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$” Incorrecto.	Solo considera un caso.
Alvaro	No. Considera solo de 3 dígitos.	“9 8 7”. Incorrecto.	Solo considera un caso.
Karim	“No hay casos distintos.”	“(9)(8)(7)”. Incorrecto.	Solo considera un caso.
Bruno	“Van a tener 3 dígitos. Ahora para 2 dígitos y para 1 dígito.”	“$9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 + 9$”	“la suma es por los ó.”
Manuel	“Hay casos: el número tiene 1 dígito, 2 dígitos, 3 dígitos, 4 dígitos.”	“$(9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7)+(9 \cdot 9 \cdot 8)+81+10$” Incorrecto.	“Sumé porque los casos son independientes.”
Daniela	Si.	“$10 + 9^2 + 9^2(8)$”	“sume c/caso para saber el número total.”
Christian	“Hay que hacer casos. #1) del 0 al 100. “2) del 100-199, 201 → 300, …” Intenta escribir todos los casos y contarlos.	“1000 – 9 – 1 – 9(27)”. Incorrecto.	Si.

SEGUNDA EXPERIENCIA. SEMESTRE ENERO – MAYO DEL 2007.

Pregunta 6 de la serie con orden resuelta por equipos antes de impartir el tema.

En cierta transmisión existen dos sonidos, uno corto, llamado estrella y uno largo, llamado diagonal. Con estos sonidos pueden formarse señales de uno, dos o tres sonidos. ¿Cuántas señales de un sonido, de dos sonidos y de tres sonidos existen?

EQUIPO	RECONOCER DOS FACTORES	SEÑAL DE UN SONIDO	SEÑAL DE DOS SONIDOS. MULTIPLICAR	SEÑAL DE TRES SONIDOS. MULTIPLICAR
1	Si.	No resuelven.	No resuelven.	Hacen un diagrama y cuentan. "8 posibilidades."
2	Si.	Hacen un diagrama y cuentan. "2 señales."	Hacen un diagrama y cuentan. "4 señales."	En el diagrama ponen "2^1 2^2 2^3". Resuelven con esto la última señal. "señales 3 sonidos = 2^3 = 8 señales."
3	Si.	Escriben los casos y cuentan. "un sonido → 2 sonidos."	Escriben los casos y cuentan. "2 sonidos → 4 sonidos."	Escriben los casos y cuentan. "3 sonidos → 8 sonidos."
4	Si.	"Un sonido = 2^1."	"Dos sonidos = 2^2."	"Tres sonidos = 2^3."
5	Si.	Escriben los casos y cuentan. "de 1 sonidos 2 señales."	Escriben los casos y cuentan. "de 2 sonidos 4 señales."	Escriben los casos y cuentan. "de 3 sonidos 8 señales."
6	Si.	Escriben los casos. "1 sonido hay 2."	Escriben los casos. "2 sonidos hay 2x2=4"	Escriben los casos. "3 sonidos hay 2^3=8"
7	Si.	Escriben los casos. "De un sonido son 2 (obvio)."	Escriben los casos y cuentan. "De 2 sonidos son 4."	Escriben los casos y cuentan. "De 3 sonidos son 8."

Pregunta 13 de la serie con orden resuelta por equipos antes de impartir el tema.
Con las letras de la palabra dedo, ¿cuántas

a) palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son distintas?
b) palabras se pueden formar, suponiendo que las letras d son iguales?

Inciso a)

EQUIPO	RECONOCER CUATRO LETRAS, CUATRO LUGARES.	NO VALEN REPETICIONES	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
1	No resuelven.		
2	No resuelven.		
3	"4 letras."	Si.	"4 x 3 x 2 = 24"
4	Si.	Si.	"4 x 3 x 2 x 1 = 24"
5	No.	No.	Incorrecta. "$2^n = 2^4 - 4 = 12$"
6	Si.	No.	Incorrecta. "$256 = 4^4$"
7	Si.	Si.	"4 x 3 x 2 x 1 = 24"

Inciso b)

EQUIPO	RECONOCER DOS LETRAS IGUALES	MULTIPLICAR Y DIVIDIR PARA QUITAR LAS PALABRAS IGUALES. PERMUTACIÓN DISTINGUIBLE.
1	No resuelven.	
2	No resuelven.	
3	Si.	"$\frac{4x3x2}{2} = 12$"
4	Si, pero restan una letra.	Incorrecta. "3 x 2 x 1 = 6"
5	No resuelven.	
6	No resuelven.	
7	Si, pero restan una letra.	Incorrecta. "3 x 3 x 2 x 1 = 18"

Pregunta 7 de la serie con orden resuelta en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

Las claves lada en cierta región son de tres dígitos, pero el dígito intermedio debe ser cero ó uno. Las claves lada cuyos últimos dos dígitos son uno están siendo usadas para otros fines, por ejemplo, 911. Con estas condiciones, ¿cuántas claves lada hay disponibles?

NOMBRE	RECONOCER DOS CASOS UNO O CERO EN MEDIO	CON CERO CUALQUIER DÍGITO	CON UNO QUITAR EL CASO *11	MULTIPLICAR EN CADA CASO. SUMAR LOS DOS CASOS
Sonia	Si.	"porque si es 0 el intermedio el último puede ser cualquier de los 9 dígitos."	"porque si es 1 intermedio el último no se puede repetir 1."	Incorrecta. "9·1·8 y 9·1·9"
Carlos A.	Si.	Si.	Si.	"claves lada: 10 2 10, reservadas 10 1 1 → 10^2 x 2 - 10"
Jessica	Si.	Si.	Si.	"(10x2x10) – 1(10) = 190"
Fabián	No.	No.	No.	Incorrecta "10 2 9"
Ana Laura	No.	No.	No.	Incorrecta "10 2 9"
Paulina	Si.	"Si es cero en medio."	"Si es 1 en medio."	Incorrecta, faltó sumar los casos. "10 x 10 = 100 10 x 9 = 90"
Ida	Si.	"Si el de en medio es 0 10x10x1."	"no puede haber 1 10x9."	"100 + 90 = 190"
María Fernanda	Si.	Si.	Si.	"200 → todas las opciones, 10 → las q terminan en 11, 200 – 10 = 190"
Andrea C.	No.	No.	No.	Incorrecta "10 2 9"

NOMBRE	RECONOCER DOS CASOS UNO O CERO EN MEDIO	CON CERO CUALQUIER DÍGITO	CON UNO QUITAR EL CASO *11	MULTIPLICAR EN CADA CASO. SUMAR LOS DOS CASOS
Luis Miguel	"Los separo xq' con 0 en medio se pueden tomar los 10 dígitos, pero con 1 no se puede tomar el 1 el tercero."	Si.	Si.	"100 + 90 = 190"
Juan Pablo	Si.	Si.	Si.	"200 – 10 = 190"
Sergio	Si.	Si.	"–11 no cuentas."	"200 – 10 = 190"
Gerardo	Si.	Si.	"x11 utilizadas."	"200 – 10 = 190"
Diego	Si.	No. "--8 → cualquiera de 2 -9."	No.	Incorrecta. "10 x 2 x 8"
Manuel	Si.	Si.	"restarle las combinaciones que terminen con 11."	"200 – 10 = 190"
Pedro	Si.	Si.	"total de combinaciones que acaban con 11."	"$10^2 \cdot 2 - 10$"
Antonio	Si.	Hace total menos no válidos.	"pero no puedo usar 1 en el final si hay 1 en el de en medio."	"200 – 10 = 190"
Luis Andrés	Si.	Si.	Si.	"200 – 10 = 190"
Marco	Si.	Si.	"-11 no se puede."	Incorrecta "9 2 8"
Marco Ahedo	Si.	Si.	"-11 no se puede."	"100 + 90 = 190"
Karen	Si.	Si.	Si.	"100 + 90 = 190"
Andrea	No entregó.			
Luis Fernando	Si.	Si.	Si.	Incorrecta, multiplica en lugar de sumar. "100 x 90"
Montserrat	Si.	No.	No.	Incorrecta "10 2 9"

NOMBRE	RECONOCER DOS CASOS UNO O CERO EN MEDIO	CON CERO CUALQUIER DÍGITO	CON UNO QUITAR EL CASO *11	MULTIPLICAR EN CADA CASO. SUMAR LOS DOS CASOS
Francisco	Si.	No.	No.	Incorrecta "10 2 9"
Jorge	"porque o es uno o es cero."	Si.	Si.	"100 + 90 = 190"
Rodrigo	No entregó.			
Ginette	Si.	Si.	"10 ladas que NO pueden ser usadas."	"200 – 10 = 190"
Lizbeth	No entregó.			
Bernardo	No entregó.			
Fernanda V.	Si.	No.	No.	Incorrecta. "10!2!9!"
Alma	No entregó.			
Yéssica	Si.	Si.	Si.	"$10^2 + (10)(9)$"
Estefany	Si.	Si.	"claves que están usándose."	"200 – 10 = 190"
Sebastián	Si.	No.	No.	Incorrecta. "9 x 2 x 9 – 9 x 1 x 1"
Cristina	No entregó.			

Pregunta 15 de la serie con orden resuelta en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

¿Cuántos de los primeros 1000 enteros tienen dígitos distintos?

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"	SUMAR LOS TRES CASOS
Sonia	No.	Incorrecta. "$9\ 8\ 7\ 6 = \frac{9!}{(9-4)!}$"	No.
Carlos A.	No.	Incorrecta. "$10\ 10\ 10\ 10\ \frac{10!}{(10-4)!}$"	No.
Jessica	No.	Incorrecta. "$\frac{1000!}{(1000-9)!}$"	No.
Fabián	No.	Incorrecta. "$9\ 8\ 7\ 6 = \frac{9!}{(9-4)!}$"	No.
Ana Laura	No.	Incorrecta. "9 8 7 6 = 9!"	No.

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”	SUMAR LOS TRES CASOS
Paulina	Si, pero en el caso de dos y tres dígitos permite cero en el primer lugar.	Incorrecta. “0 – 9 → 10 dif, 10 – 99 → 90 10 9, 100 – 999 → 10 9 8 =760”	Si.
Ida	Si, pero en el caso de dos y tres dígitos permite cero en el primer lugar.	Incorrecta. “0 – 9 → 10 dif, 10 – 99 → 90 10 9, 100 – 999 → 10 9 8 =760”	Si.
María Fernanda	No.	Incorrecta. “10 9 8 $= \frac{10!}{(10-3)!}$ ”	No.
Andrea C.	No.	Incorrecta. “Como no hay repetición, $O_n^m = \frac{10!}{(10-3)!}$.”	No.
Luis Miguel	Si, pero en el caso de dos y tres dígitos permite cero en el primer lugar.	Incorrecta. “10, 10 9 = $\frac{10!}{8!}$, 10 9 8 = $\frac{10!}{7!}$, R = $\frac{10!}{8!}+\frac{10!}{7!}+10$”	Si.
Juan Pablo	Si, pero en el caso de dos y tres dígitos permite cero en el primer lugar.	Incorrecta. “0 – 9 → 10, 10 – 99 → 90 10·9, 100 – 1000 → 10·9·8”	Si.
Sergio	Si, pero en el caso de dos y tres dígitos permite cero en el primer lugar.	Incorrecta. “0 → 9 = 10, 10 → 99 = 10·9, 100 → 999 = 10·9·8”	Si.
Gerardo	No.	Incorrecta. “10 9 8”	No.
Diego	No.	Incorrecta. “10 9 8”	No.
Manuel	Si.	“1 dígito 9 opciones, 2 dígitos 9·9, 3 dígitos 9 ·9 ·8.”	Si.
Pedro	Si, pero en el caso de dos y tres dígitos permite cero en el primer lugar.	Incorrecta. “0 - 9 → $O_n^1 = \frac{9!}{8!}$, 10 - 99 → $O_9^2 = \frac{9!}{7!}$, 100 - 1000 → $O_9^3 = \frac{9!}{6!}$. Total $9+\frac{9!}{7!}+\frac{9!}{6!}$.”	Si.
Antonio	No.	Incorrecta. “10 9 8”	No.
Luis Andrés	Si, pero resuelve el caso de 1 dígito y los de 2 y 3 dígitos los resuelve juntos.	Incorrecta. “10·9·8 + 9 = 729”	Si.

NOMBRE	EXISTEN NÚMEROS DE UNO, DOS O TRES DÍGITOS	MULTIPLICAR. PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”	SUMAR LOS TRES CASOS
Marco	No.	Incorrecta. “9 8 7 6 = $\frac{9!}{(9-4)!}$”	No.
Marco Ahedo	Si.	“1 al 9 = 9, 11 al 99 = 9 9 = 81, 100 al 999 = 9 9 8 = 648.” Total “90 + 648 = 738.”	Si.
Karen	Si, pero resuelve mal.	Incorrecta. “1000 + (1000)(999) + (1000)(999)(998)”	Si.
Andrea	No entregó.		
Luis Fernando	No.	Incorrecta. “10 9 10 → $(10^2)(9)$ + 1 = 901, 1 por el 1000.”	No.
Montserrat	No.	Incorrecta. “$P_{1000} = 1000!$”	No.
Francisco	No resuelve.		
Jorge	Si, pero resuelve mal.	Incorrecta. “$\frac{10!}{6!} + 9 + 9$, 9 por que son el 10, 20, …90 y 9 que son 01, 02, 03, …09.”	Si.
Rodrigo	No entregó.		
Ginette	Si, pero usa factorial.	Incorrecta. “9 + 9!8! + 9!8!7!”	Si.
Lizbeth	No entregó.		
Bernardo	No entregó.		
Fernanda V.	No.	Incorrecta. “10 9 8”	No.
Alma	No entregó.		
Yéssica	Si, pero resuelve mal.	Incorrecta. “R = 9 + 9(8) + 9(8)(7)”	Si.
Estefany	No.	Incorrecta. “$P_{1000} = 1000!$ contamos todos con orden.”	No.
Sebastián	Si, pero resuelve mal.	Incorrecta. “Del 1 al 9 todos 9. Del 10 al 99 8·8. Del 100 al 999 8·8·7 y el mil no cumple. $\therefore$ 9 + 8^2 + $8^2(7)$.”	Si.
Cristina	No entregó.		

Pregunta 1 de la serie con y sin orden resuelta por equipos antes de impartir el tema.

Sean las letras a, b, c, d, e. No puedes repetir las letras.

a) ¿Cuántos conjuntos de tres letras se pueden formar? Recuerda que en los conjuntos no existe el orden y, por ejemplo, los conjuntos $\{a,b,c\}$ *y* $\{b,c,a\}$ *son iguales.*

b) ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar? En este caso existe orden y las palabras abc y bca son distintas.

c) ¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los dos incisos anteriores?

Inciso a)

EQUIPO	QUITAR ORDEN	SOLUCIÓN
1	Escriben los casos, pero les faltan dos.	Incorrecta. "Son 8 conjuntos."
2	Escriben los casos. Cuentan.	"10"
3	Escriben los casos. Cuentan.	"6 + 3 + 1 = 10"
4	Escriben los casos. Cuentan.	"10"
5	Escriben los casos. Cuentan.	"10 conjuntos diferentes."
6	"Para eliminar el factor orden dividimos entre el número de combinaciones posibles de 3 opciones en 3 lugares. 3 x 2 x 1 = 6."	"$\frac{60}{6}=10$"
7	"Son 10 al contarlos 1 por 1."	"10"

Inciso b)

EQUIPO	CON ORDEN	SOLUCIÓN
1	"Cada conjunto tiene las siguientes combinaciones: abc, bac, cab, acb, bca, cba. 6 combinaciones x 8 conjuntos = 48 palabras." La idea es correcta pero eran 10 no 8 conjuntos.	Incorrecta. "6 x 8 = 48 palabras."
2	Escriben varios casos.	"2 x 5 = 60" Respuesta correcta pero operación no.
3	"el orden si importa."	"5 x 4 x 3 = 60".
4	"Son 10 posibles combinaciones y de estas se pueden combinar en 6 ocasiones más. $\therefore$ 60 palabras."	"10 x 6 = 60"
5	Escriben casos. "Estas son las palabras que se forman empezando con la letra a, se forman 12. Empezando con las otras 4 obtenemos 12 de cada una."	"Se pueden formar 60 palabras."
6	"5 x 4 x 3 = 60"	"60"
7	"5 x 4 x 3 = 60"	"60"

Inciso c)

EQUIPO	RELACIÓN
1	"Si de cada combinación con orden (8 conjuntos) obtenemos varias combinaciones sin orden obtenemos la relación de todas las combinaciones."
2	"En la primera no importa el orden y en la 2° si."
3	"$\frac{60}{6} = 10$"
4	"a son las combinaciones posibles sin repetición y la b son las mismas pero con sus posibles combinaciones."
5	"el inciso a es subconjunto del inciso b. En el inciso a no se pueden repetir las letras (son subconjuntos) y en el inciso b sí se pueden repetir (son palabras), por lo tanto podemos tener 60 palabras y sólo 10 subconjuntos."
6	"Quitar el factor orden."
7	"Se nota que a y b son divisibles por 10, b es divisible por a. El inciso b puede encontrarse por medio de una parte del factorial, es decir 5 x 4 x 3 = 60. Por lo tanto hay que encontrar una expresión tal que $\frac{5!}{n} = 60$. n debe ser por lo tanto igual a 2 x 1 = 2!"

Pregunta 2 de la serie con y sin orden resuelta por equipos antes de impartir el tema.

Sean los números 1, 2, 3, 4. No puedes repetir los números.

a) *¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse? Recuerda que existe orden pues* $12 \neq 21$.
b) *¿Cuántos conjuntos de dos elementos pueden formarse? En este caso no hay orden* $\{1,2\} = \{2,1\}$.
c) *¿Qué diferencia hay entre los dos incisos anteriores?*
d) *¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los incisos a) y b)?*

Inciso a)

EQUIPO	CON ORDEN	SOLUCIÓN
1	Escriben los casos.	No dan el total pero si tienen todos los casos.
2	Escriben los casos. Cuentan.	"Total 12"
3	"4 x 3 = 12, para cada decena hay 3 opciones de unidades porque no se pueden repetir."	"12"
4	Escriben los casos. Cuentan.	"12"
5	Escriben los casos. Cuentan.	"12 dígitos (números)."
6	"4 x 3 = 12"	"12"
7	"4 x 3 = 12"	"12"

Inciso b)

EQUIPO	SIN ORDEN	SOLUCIÓN
1	No explican.	"Son 6."
2	Escriben los casos. Cuentan.	"Total 6."
3	"#1 → 3 opciones. #2 → 2 opciones. #3 → 1opción. #4 → 0 opciones → cualquiera ya estaría repetido."	"3 + 2 + 1 + 0 = 6"
4	Escriben los casos. Cuentan.	"6"
5	Escriben los casos. Cuentan.	"6 conjuntos de 2 dígitos se pueden hacer."
6	"Igual que arriba para eliminar el factor orden dividimos entre 2 x 1 = 2. $\frac{12}{2} = 6$."	"6"
7	"Son 6 contando los casos."	"6"

Inciso c)

EQUIPO	DIFERENCIA
1	"Que unos son # de 2 dígitos y los otros son conjuntos (no importa el orden)."
2	"El orden."
3	"en una hay orden y en la otra NO!"
4	"en a) se cuenta con orden y en b) sin orden."
5	"cuando no se repiten es subconjunto de los otros."
6	"Eliminar factor orden."
7	"En a) existe el orden y en b) no, por lo tanto en b) hay que eliminar las repeticiones."

Inciso d)

EQUIPO	RELACIÓN
1	"Que como son de dos dígitos y en los conjuntos no hay orden se reduce a la mitad que si fueran dígitos."
2	"En el conjunto el orden importa."
3	"16 – 10 = 6 ??"
4	"en a) cuentas todos los casos y en b) se eliminan las repeticiones."
5	"el a es el doble de b y b es subconjunto de a."
6	"Dividir entre el no. de comb. de 2 opciones en 2 lugares."
7	"De la fórmula anterior vimos que había repeticiones observando esto nos dimos cuenta que al agregar al denominador un factorial que fuera el número de opciones a escoger algo por lo que queda $\frac{n!}{t!(n-t)!}$."

Pregunta 6 de la serie con y sin orden resuelta en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

Si tienes diez objetos y quieres escoger a los diez objetos, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes?

NOMBRE	ORDEN	SOLUCIÓN
Sonia	"pero quito el orden."	"10 objetos de 10 = 10! pero quito el orden $\frac{10!}{10!}=1$."
Carlos A.	Si.	"$\binom{10}{10}$"
Jessica	Si.	"$\binom{10}{10}$"
Fabián	"sin orden."	"$\frac{n!}{(n-m)!m!}=\frac{10!}{(10-10)!10!}=1$"
Ana Laura	No.	Incorrecta. "O_{10}^{10}"
Paulina	"sin orden."	"$\binom{n}{m}=\frac{10!}{(10-10)!10!}=1$"
Ida	"como no importa el orden."	"Tengo 10 objetos y tomo los 10, como no importa el orden solo hay <u>una</u> forma de hacerlo."
María Fernanda	"no importa el orden."	"Hay 1 forma porque no importa el orden."
Andrea	Si.	"$\frac{n!}{(n-m)!m!}=\frac{10!}{(10-10)!10!}=1$"
Luis Miguel	No.	Incorrecta. "$P_{10}=10!$"
Juan Pablo	Si.	"$\frac{10!}{(10-10)!10!}=1$"
Sergio	Si.	"$\frac{10!}{(10-10)!10!}=1$"
Gerardo	Si.	"$\frac{n!}{(n-m)!m!}=\frac{10!}{(10-10)!10!}=1$"
Diego	Si.	"$\frac{10!}{(10-10)!10!}=1$, solo hay una forma de elegir todos los objetos."
Manuel	"no importa el orden."	"Hay una manera porque no importa el orden."
Pedro	Si.	"$\binom{10}{10}$"

NOMBRE	ORDEN	SOLUCIÓN
Antonio	“sin orden”	“$\binom{10}{10}$”
Luis Andrés	Si.	“1”
Marco	“Para eliminar permutaciones.”	“$\frac{10!}{10!}=1$”
Marco Ahedo	“no hay orden.”	“1 pues se escogen todas y no hay orden.”
Karen	Si.	“$\binom{n}{m}=\frac{10!}{(10-10)!10!}=1$”
Andrea	“(sin orden).”	“$\binom{10}{10}$”
Luis Fernado	“sin orden.”	“$\binom{10}{10}=1$ $\therefore$ Hay una forma de escoger.”
Montserrat	“sin orden”	“$\binom{10}{10}=1$ forma.”
Francisco	“ya que no importa el orden.”	“$\frac{O_{10}^{10}}{(10)!}=\frac{10!}{10!}=1$”
Jorge	Si.	“$\binom{10}{10}$”
Rodrigo	Si.	“$\frac{O_{10}^{10}}{10!}=1$”
Ginette	Si.	“$\binom{n}{m}=\frac{10!}{(10-10)!10!}=1$”
Lizbeth	“sin orden.”	“$\binom{10}{10}$”
Bernardo	Si.	“Solo existe una forma: todos.”
Fernanda V.	Si.	“$\frac{10!}{10!0!}=1$”
Alma	Si.	“$\binom{10}{10}$”
Yéssica	Si.	“$\binom{10}{10}$”
Estefany	Si.	“$\binom{10}{10}$”

Pregunta 7 de la serie con y sin orden resuelta en clase de forma individual en el momento de dar el tema.

Si tienes diez objetos y quieres escoger seis de ellos, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes?

NOMBRE	ORDEN	SOLUCIÓN
Sonia	Si.	"$\frac{O_{10}^{6}}{6!} = \frac{\frac{10!}{4!}}{6!} = \frac{10!}{6!4!}$"
Carlos A.	Si.	"$\binom{10}{6}$"
Jessica	Si.	"$\binom{10}{6}$"
Fabián	Si.	"$\frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{10!}{(10-6)!6!}$"
Ana Laura	No.	Incorrecta. "$O_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!}$"
Paulina	Si.	"$\frac{10!}{(10-6)!6!}$"
Ida	Si.	"$\binom{10}{6}$"
María Fernanda	Si.	"$\frac{10!}{(10-6)!6!}$"
Andrea	Si.	"$\frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{10!}{(10-6)!6!}$"
Luis Miguel	No.	Incorrecta. "$O_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!}$"
Juan Pablo	Si.	"$\frac{10!}{4!6!}$"
Sergio	Si.	"$\frac{10!}{(10-6)!6!}$"
Gerardo	Si.	"$\frac{10!}{(10-6)!6!}$"
Diego	Si.	"$\frac{10!}{(10-6)!6!}$"
Manuel	"para quitar el orden."	Incorrecta. "$10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 = \binom{10}{5} = \frac{10!}{(10-5)!5!}$"

NOMBRE	ORDEN	SOLUCIÓN
Pedro	Si.	“$\binom{10}{6}$”
Antonio	“sin orden.”	“$\binom{10}{6}$”
Luis Andrés	Si.	“$\frac{10!}{(10-6)!6!}$”
Marco	“se divide por 6! porque es lo mismo escoger a,b,c,d,e,f que b,d,e,f,a,c.”	“$\frac{10!}{4!}$ se divide entre 6! $\frac{10!}{4!6!}$”
Marco Ahedo	Si.	“$\frac{10!}{6!(10-6)!}$”
Karen	Si.	“$\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!m!}=\frac{10!}{(10-6)!6!}$”
Andrea	Si.	“$\binom{10}{6}$”
Luis Fernado	Si.	“$\binom{10}{6}$”
Montserrat	Si.	“$\binom{10}{6}$”
Francisco	“pero como no importa el orden.”	“$\frac{O_{10}^{6}}{6!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6!}$”
Jorge	Si.	“$\binom{10}{6}$”
Rodrigo	Si.	“$\frac{O_{10}^{6}}{6!}=\frac{\frac{10!}{(10-6)!}}{6!}=\frac{10!}{4!6!}$”
Ginette	Si.	“$\binom{n}{m}=\frac{10!}{(10-6)!6!}$”
Lizbeth	Si.	“$\binom{10}{6}$”
Bernardo	No.	Incorrecta. “$\frac{10!}{(10-6)!}=\frac{10!}{4!}$”
Fernanda V.	Si.	“$\frac{10!}{4!6!}$”

NOMBRE	ORDEN	SOLUCIÓN
Alma	Si.	"$\binom{10}{6}$"
Yéssica	Si.	"$\binom{10}{6}$"
Estefany	Si.	"$\binom{10}{6}$"

Pregunta 3 de la serie con y sin orden resuelta en forma individual como tarea.

Sean los números 1, 2, 3, 4. Se van a formar números de cuatro dígitos (no se puede repetir los números), ¿dé cuántas formas puedes seleccionar al primer dígito, al segundo, al tercero y al cuarto? ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse?

NOMBRE	SELECCIONAR DÍGITOS	ORDEN	SOLUCIÓN
Sonia	"1° de 4, 2° de 3, 3° de 2 y 4° de 1."	No.	"sin orden ni repeticiones solo un número."
Carlos A.	"1° $\Rightarrow$ 4 formas, 2° $\Rightarrow$ 3 formas, 3° $\Rightarrow$ 2 formas, 4° $\Rightarrow$ 1 forma."	Si.	"$P_4 = 4!$"
Jessica	"1 de 4 formas, 2^{do} de 3 formas, 3^{ero} de 2 formas, 4^{to} de 1 forma."	Si.	"$P_4 = 4!$"
Fabián	No entregó.		
Ana Laura	"1^{er} num → 4 formas, 2^{do} num → 3 formas, 3^{er} num → 2 formas, 4^{to} num → 1 formas."	Si.	"$O_4^4 = 4!$"
Paulina	"4 3 2 1"	Si.	"$\frac{4!}{(4-4)!} = 4!$"
Ida	"4 4 4 4"	Si.	Incorrecta, permite repeticiones. "4^4=256"
María Fernanda	"4 4 4 4"	Si.	Incorrecta, permite repeticiones. "4^4=256.
Andrea	"1° dígito → 4 formas, 2° dígito → 3, 3° dígito → 2 formas, 4° dígito → 1."	Si.	"$O_4^4 = P_4 = 4!$"
Luis Miguel	"4 3 2 1"	Si.	"$O_4^4 = P_4 = 4!$"
Juan Pablo	"1^{ero} 4, 2^{ndo} 3, 3^{ero} 2, 4^{to} 1."	Si.	"permutación de 4 = 4!"
Sergio	"4 3 2 1"	Si.	"4·3·2·1 = 24 números."

NOMBRE	SELECCIONAR DÍGITOS	ORDEN	SOLUCIÓN
Gerardo	"1° = 4 formas, 2° = 3 formas, 3° = 2 formas, 4° = 1 forma."	Si.	Incorrecta, permite repeticiones. "4^4=256."
Diego	"4 3 2 1"	Si.	"4·3·2·1 = 4!"
Manuel	"4 3 2 1"	Si.	"4!"
Pedro	"4 3 2 1"	Si.	"$P_4 = 4!$"
Antonio	"el primer dígito de 4 maneras, al segundo de 3, al tercero 2 y al cuarto 1."	Si.	"4!"
Luis Andrés	"4 3 2 1"	Si.	"$P_4 = 4!$"
Marco	"En cada espacio pueden escoger 4 diferentes dígitos."	Si.	Incorrecta, permite repeticiones. "4^4=256."
Marco Ahedo	"4 3 2 1"	Si.	"4!"
Karen	"4 3 2 1"	Si.	"$O_4^4 = 4!$"
Andrea	"4 3 2 1"	No.	Incorrecta. "$\binom{4}{4} = 1$"
Luis Fernando	"Cada dígito se puede elegir 4 veces o maneras distintas."	Si.	Incorrecta, permite repeticiones. "4^4=256."
Montserrat	"1^{ero} dígito 4 formas, 2^{ndo} dígito 3 formas, 3^{ero} dígito 2 formas, 4to dígito 1 formas."	Si.	"$O_4^4 = 4!$"
Francisco	"1° dígito → 4 formas, 2° dígito → 3, 3° dígito → 2 formas, 4° dígito → 1."	Si.	"4!"
Jorge	"4 4 4 4"	Si.	Incorrecta, bien la permutación pero resuelve como OR. "$P_4 = 4^4$"
Rodrigo	"1° → 4 formas, 2° → 3, 3° → 2, 4° → 1."	Si.	"$O_4^4 = 4!$"
Ginette	No entregó.		
Lizbeth	"1er dígito → 4, 2° → 3, 3er → 2, 4° → 1."	Si.	"4!=24."
Bernardo	"En cada lugar pueden ir los 4 dígitos ya que los números 1234 y 4321 son diferentes igual se pueden repetir incluso en los cuatro espacios."	Si.	"4^4"
Fernanda V.	"4 4 4 4"	Si.	"4^4"
Alma	"1 num 4, 2 num 3, 3 num 2, 4 num 1."	Si.	"4!"

NOMBRE	SELECCIONAR DÍGITOS	ORDEN	SOLUCIÓN
Yéssica	"4 formas tanto el 1° como el 2°, 3° y 4°." Aquí permite las repeticiones, pero al final resuelve sin repetición.	Si.	"$O_4^4 = 4!$"
Estefany	"1° dígito = 4 formas, 2° dígito = 3 formas, 3° dígito = 2 formas, 4° dígito = 1 forma."	Si.	"$P_4 = 4!$"
Sebastián	No contesta.	Si.	"4!"
Cristina	"Al primer dígito lo puedo seleccionar de 4 formas, al segundo dígito lo puedo seleccionar de 3 formas, al tercer dígito lo puedo seleccionar de 2 formas, al cuarto dígito lo puedo seleccionar de 1 forma."	Si.	"$O_4^4 = 4!$"

Pregunta 4 de la serie con y sin orden resuelta en forma individual como tarea.

Se tienen doce jugadores posibles y se quiere escoger un equipo de basketball (5 jugadores). ¿Dé cuántas formas puedes seleccionar al primer jugador, de cuántas al segundo, al tercero, al cuarto y al quinto? ¿Cuántos equipos se pueden formar, si el orden de los jugadores no importa?

NOMBRE	SELECCIONAR JUGADORES	QUITAR ORDEN	PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
Sonia	Si.	"No hay orden."	"$\binom{12}{5}$"
Carlos A.	Si.	No.	Incorrecta. "O_{12}^5"
Jessica	Si.	No.	Incorrecta. "O_{12}^5"
Fabián	No entregó.		
Ana Laura	Si.	Si.	"Formas de elegir a los jugadores O_{12}^5. Equipos = $\frac{\frac{12!}{7!}}{5!} = \binom{12}{5}$"
Paulina	Si.	Si.	"$\frac{12!}{5!7!}$"
Ida	Si.	No.	Incorrecta. "O_{12}^5"
María Fernanda	Si.	No.	Incorrecta. "O_{12}^5"
Andrea	Si.	Si.	"$\binom{12}{5}$"

NOMBRE	SELECCIONAR JUGADORES	QUITAR ORDEN	PRINCIPIO DEL PRODUCTO "Y"
Luis Miguel	Si.	Si.	"$\binom{12}{5}$"
Juan Pablo	Si.	Si.	"$\frac{O_{12}^{5}}{5!}=\binom{12}{5}$"
Sergio	Si.	Si.	"$\frac{equipos}{5!}=\frac{O_{12}^{5}}{5!}$"
Gerardo	Si.	No.	Incorrecta. "O_{12}^{5}"
Diego	Si.	Si.	"$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5!}$, 5! → porq el orden no importa."
Manuel	Si.	Si.	"$\binom{12}{5}$"
Pedro	Si.	Si.	"$\binom{12}{5}$"
Antonio	Si.	Si.	"$\frac{O_{n}^{m}}{m!}$"
Luis Andrés	Si.	Si.	"$\binom{12}{5}$"
Marco	Si.	Si.	"$\frac{12!}{5!7!}$"
Marco Ahedo	Si.	Si.	"$\frac{12!}{5!7!}$"
Karen	Si.	Si.	"$\binom{12}{5}$"
Andrea	Si.	Si.	"$\binom{12}{5}$"
Luis Fernando	Si.	Si.	"$\binom{12}{5}$"
Montserrat	Si.	Si.	"$\binom{12}{5}$"
Francisco	Si.	Si.	"$\frac{O_{12}^{5}}{5!}$"
Jorge	No contesta.	Si.	"$\binom{12}{5}$"

NOMBRE	SELECCIONAR JUGADORES	QUITAR ORDEN	PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”
Rodrigo	Si.	Si.	“$\frac{O_{12}^{5}}{m!}$”
Ginette	No entregó.		
Lizbeth	Si.	Si.	“$\frac{O_{12}^{5}}{5!}$”
Bernardo	No contesta.	Si.	“$\frac{12!}{5!7!}$”
Fernanda V.	Si.	Si.	“$\frac{O_{12}^{5}}{5!}$”
Alma	Si.	Si.	“$\frac{O_{12}^{5}}{5!}$”
Yéssica	Si.	Si.	“$\binom{12}{5}$”
Estefany	Si.	Si.	“$\binom{12}{5}$”
Sebastián	Si.	Si.	“$\frac{12!}{5!7!}$”
Cristina	Si.	Si.	“$\binom{12}{5}$”

Pregunta 2 del examen de conteo.

Si tenemos el siguiente producto de dos binomios con un término común (x+5)(x-1), ¿cuántas formas posibles hay para los signos de los factores?

NOMBRE	RECONOCER DOS SIGNOS	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”
ALMA	“2 posibles respuestas para c/u una (+) y otra (–).”	“4”
CRISTINA	“Tenemos dos signos: + positivo y – negativo”	Incorrecta pues toma solo un factor. “2”
SALVADOR	Si. Resuelve encontrando los valores de x.	Incorrecta, pues considera al cero. “Hay 5 formas ya que el signo puede no existir.”
DIEGO	Si. Resuelve encontrando los valores de x. Correcta.	“ent. los factores tienen 3 posibles combinaciones de signos.”
JESSICA	Si.	“$\pm\pm$ orden repetición $2^2=4$ posibles combinaciones.”

NOMBRE	RECONOCER DOS SIGNOS	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”
RODRIGO	Si. Resuelve encontrando los valores de x y los de cada factor.	“Hay 4 posibilidades.”
GERARDO	Si. Escribe todos los casos.	“Solo existen 4 opciones para los signos.”
MARCO AHEDO	“Como el primer factor puede tener signos + ó – al igual que el segundo, cada factor puede tener dos signos.”	“Los sucesos son independientes entre si por lo que tengo 2 opciones para el primero y 2 opciones para el segundo. $2^2=4$”
JORGE	“Hay 2 posibilidades de signo para c/factor.”	“$2^2=4$”
ANDREA R.	No. “Hay cuatro combinaciones de signos y tenemos 2 términos.”	Incorrecta. “4^2”
CARLOS G.	Si.	Incorrecta. Resuelve el producto y encuentra el signo de los términos con x. “x^2+4x-5 , $x \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 0, 4x \geq 0$ y si $x \leq 0 \rightarrow x^2 \geq 0, 4x \leq 0$ sólo existen dos formas para los signos de los factores: +,+ ó +,–.”
IDA	Si.	Incorrecta. “$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$”
MARÍA FERNANDA	“Signos pueden ser +, –”	“2^2”
LUIS ANDRÉS	Si.	Escribe todos los casos. “En total hay 4 posibilidades.”
CARLOS	“2 signos.”	“$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=4$ de 2 signos escojo 1 para cada factor.”
PEDRO	“dos signos posibles.”	“Hay dos factores cada uno con dos signos posibles. $\therefore \exists$ 4 posibles combinaciones de signos.”
MANUEL	“positivo, negativo.”	“4”
SEBASTIÁN	“Cada factor tiene dos opciones.”	“$2 \cdot 2=4$ formas posibles p/los signos.”
ANTONIO	“Hay dos posibles formas de los signos: positivo y negativo.”	Incorrecta. “signo le tocara al producto: $(-1)^{n+1}$ donde n es el lugar que ocupa el término.”

NOMBRE	RECONOCER DOS SIGNOS	MULTIPLICAR PRINCIPIO DEL PRODUCTO “Y”
FRANCISCO	“2 signos puede tener cada factor.”	“pueden tener $\binom{2}{1}\binom{2}{1}$ combinaciones de signos $\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 4$.”
MARCO ANTONIO	“hay 2 y sólo 2 posibles signos: positivo y negativo (+, –)”	“abarcan las 4 opciones: +–, –+,– –,++, existen (2!)(2!) posibles combinaciones.”
LIZBETH	Si.	“2 2 = 2^2 = 4”
YESSICA	“Hay 2 formas posibles para cada factor.”	“pero como son dos factores, hay 4 formas posibles.”
MONTSERRAT	“2 posibles signos: +, –”	“2^2=4”
SERGIO	Si.	Incorrecta.
PAULINA	Si.	“2!2!=4”
JUAN PABLO	“2 posibil.”	“2 x 2 = 4 posibilidades”
ANDREA	“cada factor puede ser positivo o negativo.”	“2^2 = 4”
BERNARDO	Si.	Escribe los casos y cuenta. “Hay 4 formas posibles.”
ESTEFANY	“Cada factor tiene 2 posibilidades: + ó –”	“2^2=4”
ANA	“factor puede tener signo (+) ó (–).”	“2^2=4”
LUIS FERNANDO	“los signos de los factores (–,+)”	Incorrecta. “Hay 2 posibles formas de los signos de los factores (–,+)”
LUIS MIGUEL	“Si solo existen 2 signos.”	Incorrecta. “y de esos se tiene que escoger uno entonces # formas = $\binom{2}{1}$ = 2 formas posibles.”
SONIA	Si.	“$2^1 \cdot 2^1$ = 4”
FABIÁN	“como existen 2 posibilidades para cada factor.”	“2·2 = 4”
GINETTE	“tiene dos posibilidades + ó –.”	“en total hay 4 posibilidades para los signos de los factores.”
FERNANDA	“signos posibles x factor = 2.”	“2·2 = 4”
KAREN	“Tenemos 2 signos = + y –.”	Incorrecta. “Queremos 3 signos para los 3 factores que resultan de esta multiplicación. 2·2·2 = 8 2^2 = 4.”

Pregunta 8 del examen de conteo.

a) Escribe la fórmula de ordenación sin repetición y de combinación sin repetición. Explica sus componentes.

b) Escribe un problema que se resuelva con ordenación sin repetición. Explica claramente.

c) Escribe un problema que se resuelva con combinación sin repetición. Explica claramente.

d) Explica la diferencia entre ambas fórmulas y cómo puedes pasar de una a otra. Explica claramente.

Inciso a)

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
ALMA	"$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$"	Incorrecta. "$\binom{n+m-1}{m}$"
CRISTINA	"$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. Quiero tomar de n objetos sólo m número de objetos sin que se repitan, así tomo m objetos de n en m."	No resuelve.
SALVADOR	"$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ → ordenación sin repetición. n = número de objetos (total), m = objetos que se toman para ordenar."	"$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ → combinación sin repetición. n = número total de objetos, m = objetos que se toman para combinar."
DIEGO	"Le inventé la letra → $H = \frac{n!}{(n-k)!}$, n es el número de elementos que puedo tomar, como no se repiten se ordenan de la forma n! Primero puedo elegir cualquier elemento, después eligo cualquiera menos el que ya elegí, al final solo queda un elemento por ser elegido. n·(n-1)·(n-2)·(n-3)···(1). Sólo voy a tomar k elementos, entonces solo se ordenan n·(n-1)·(n-2)····(n-k+1) = $\frac{n!}{(n-k)!}$."	"Cuando solo los quiero combinar puedo usar la fórmula anterior pero quitándole las formas en las que se podrían ordenar los elementos ya elegidos, y esa es la forma en la que se ordenan k elementos = k! ent para quitarlo es $\frac{H}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$."

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
JESSICA	"$\frac{n!}{(n-m)!}$ = O sin R. n > m, sin n = m recibe el nombre de permutación."	"$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$"
RODRIGO	"$\frac{n!}{(n-m)!}$ las ordenaciones posibles sin repetición puesto que es una permutación hay orden."	"$\frac{n!}{(n-m)!m!}$ comb sin rep, no hay orden"
GERARDO	No resuelve.	Incorrecta, es O_n^m. "comb sin repetición $\binom{n}{m} \rightarrow \frac{n!}{(n-m)!}$. n es la cantidad de objetos que se utilizan, m la cantidad de "espacios" disponibles en los que se colocarán los objetos. Al realizar la operación vemos que (n-m)! es el resultado de los objetos que no se utilizarán."
MARCO AHEDO	"$\frac{n!}{(n-m)!}$ n es el número de elementos que pueden tomarse, m de cuantos en cuantos los tomo. Orden no repetición."	"$\frac{n!}{(n-m)!m!}$ n número de elementos que pueden tomarse, m número de elementos a tomar. No orden no repetición. – n! se usa para ordenar todos los elementos que se pueden tomar, es decir, si tengo n elementos en el primer lugar puedo poner los n, en el segundo n-1 y así sucesivamente. $\frac{1}{(n-m)!}$ se utiliza para restringir el número de lugares que se toman pues elimina por medio de la división los términos que podrían ordenarse pero ya no se toman."

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
JORGE	“$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ n es el total de elementos. m es el total de lugares disponibles. Donde n! son todas las combinaciones de los n elementos que tenemos y como m es el número de lugares disponibles n ≥ m por lo cual al dividir n! entre (n-m)! quitamos las combinaciones que ocuparían los lugares que hay de diferencia entre n y m.”	“$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ n! y (n – m)! tienen la misma función que en O_n^m y al dividirlo entre m! quitamos las repeticiones que hay debido al orden de los elementos.”
ANDREA R.	“Ordenación sin repetición $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ de n objetos tomo m número de objetos → no hay repetición → hay orden.”	“combinación sin repetición $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ ago combinaciones de n en m $\binom{n}{m}$ → no hay repetición. → no hay orden, por eso dividimos entre las permutaciones.”
CARLOS G.	“Si el orden importa y no pueden repetirse = $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.”	“Si el orden no importa y no pueden repetirse = $C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, siendo n el número total de elementos que se pueden escoger y r el número de elementos que se quieren escoger.”
IDA	“$O_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ m son los objetos que tengo, n son los objetos que tomo, (m –n)! quito los objetos que tomé, ab ≠ ba.” Debería decir objetos que no tomé.	“$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ m tengo, n tomo, n! los que tomé los permuto.”

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
MARÍA FERNANDA	“$O_n^m \rightarrow$ ordenación sin repetición $\frac{n!}{(n-m)!}$ elementos: n objetos, m tomo. n! → n (n–1) (n–2) (n–3) … 1 como estoy ordenando el primer objeto puede estar n veces, el 2do n–1 veces y así sucesivamente. Divido entre (n–m)! pues tengo que quitar las ordenaciones que se repiten.” Incorrecto el final.	“Combinación sin repetición $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$, n ≥ m, n objetos, m tomo. Tengo n objetos y quiero m de ellos, n! implica que el 1er objeto puede estar n veces, el 2do n–1 veces, etc; tengo que quitar las ordenaciones que se repiten por lo que divido en (n–m)! y finalmente multiplico por m! porque m son los objetos que tomo, los cuales pueden estar ordenados diferente: m m–1 m–2 …” Confuso.
LUIS ANDRÉS	“Ordenación sin repetición. $\frac{n!}{(n-m)!}$ n → objetos, m → los que tomo. Es las posibilidades de tomar m objetos de n totales tomo en cuenta el orden o sea a, b, c es diferente de b, c, a.”	“Combinación sin repetición $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ Es la posibilidad de tomar m objetos de n totales y no cuento el orden o sea es lo mismo a, b, c que b, a, c.”
CARLOS	“ordenación sin repetición: $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ de una colección de n objetos se toman m. Hay orden, no repetición.”	“combinación sin repetición: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ de una colección de n objetos se toman m; no hay orden, no hay repetición.”

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
PEDRO	"$O_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ con n ≥ m. Tengo n elementos y escojo m de ellos. n n–1 n–2 n–3 n–4 como hay orden y no hay repetición, cuando escojo el primero ya no puedo volver a escoger ese elemento y además se cambia de lugar sí altera la ordenación. Si escojo a los n elementos sería una permutación pero como sólo escojo m, tengo que "eliminar" los lugares que seguirían en el factorial después de escojerlos. Sea m = n – 4 $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)....1}{(n-4)(n-5)/n-6)...1}$ así queda una ordenación de m elementos."	"$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$. Para la combinación sin repetición se tiene la fórmula de la <u>ordenación sin repetición</u> y como no hay orden, no importa en qué lugar caiga cada elemento por ejemplo abc = cba entonces se divide entre m! que son las permutaciones de un conjunto de m elementos y con esto se eliminan las diferencias entre los conjuntos con los mismos elementos pero en diferente orden."
MANUEL	"$\dfrac{n!}{(n-m)!}$ → ordenación s/ repetición."	"$\dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ → combinación s/ repetición. La n! es para que no haya repetición, ya que una vez elegida una opción no se puede volver a tomar. Por c/ opción hay 1 opción menos que elegir, por eso se multiplican. El (n–m)! es para detener la multiplicación en el número de lugares que se toman en cuenta y eliminar los que sobran. La m! es para eliminar el factor orden."
SEBASTIÁN	"ordenación sin repetición: $\dfrac{n!}{(n-m)!}$"	"combinación sin repetición: $\dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ Donde n es el número de cosas, m es el número de lugares."

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
ANTONIO	“$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. Se tiene un total de n elementos que se quiere ordenar en m lugares. En el primer lugar se tienen n posibilidades de colocar un objeto. En el segundo, como ya se coloco uno, solo se tienen (n–1) posibilidades. n irá decreciendo de esa manera hasta que se hallan llenado los m lugares. n! = n (n–1)(n–2) … 1 pero si n > m se está multiplicando de mas por lo tanto dividimos entre la diferencia (n–m)! para que se “cancelen” los términos “extras” que se están multiplicando. ”	“$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Se quieren repartir m elementos entre n posibles “espacios” la diferencia es que en este caso no existe el orden y por lo tanto para eliminar los términos “extras” que se están multiplicando, es también necesario dividir entre el número de “espacios” factorial.”
FRANCISCO	“$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ quiere decir que de n elementos disponibles tomo m, pero importa el orden en el que los tome. De n elementos que no pueden repetirse, se obtiene el n! y se divide entre el factorial de los elementos que quedan después de haber tomado m. ”	“$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ * de hecho, esta fórmula procede de la anterior, pues a las ordenaciones sin repetición, se les quiere quitar precisamente el orden; esto se logra dividiendo entre una cantidad que tomo. $\frac{O_n^m}{m!} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{\frac{m!}{1!}}$ $= \frac{n!}{(n-m)!m!}$ ”

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
MARCO ANTONIO	“$\frac{n!}{(n-m)!m!}$ Ordenación sin repetición. Con un número (n) dado de opciones y un número de elecciones (m) las opciones totales se dividen en la resta de estas y la elección (n–m) para dejar sólo las tomadas además se divide entre las elecciones factorial (m!) ya que así se elimina la repetición si no importa el orden.” Incorrecta pone combinación sin repetición.	“Combinación sin repetición $\binom{n+r-1}{r}$. Dado n objetos y r objetos similares las formas en que se pueden acomodar se da por esa fórmula, si lo pensamos en variables r es el resultado (objetos similares en este caso números) y n donde se distribuirán (variables) el –1 es porque en realidad basta con r–1 divisiones para separar ej. °°|°°|°°° los dos palitos r dividen 3 veces las bolitas de aquí surge $\frac{\text{n bolitas} + \text{r palitos - 1}}{n!r!} = \binom{n+r-1}{r}$.” Incorrecta pone combinación con repetición.
LIZBETH	“Ordenación sin repetición → si hay orden. $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ → n = objetos, m = tomo. → n n–1 n–2 n–3 … → va decreciendo porque no hay repeticiones. (n–m)! → quito los que no tomo.”	“Combinación sin repetición → no hay orden. $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ → n! va decreciendo porque no hay repeticiones. (n–m)! → quito los que no tomo. m! → divido entre los objetos tomados para quitar el orden y es de acuerdo al número de objetos tomados.”

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
YESSICA	"$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ → ordenación sin repetición. En la ordenación se toman m objetos de n. Ejemplo 10 objetos y 4 lugares 10 9 8 7. A diferencia de la combinación en la ordenación hay orden. Ejem. 7 6 5 ≠ 5 7 6."	"$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ → combinación sin repetición. En la combinación se toman m objetos de un total de n. A diferencia de la ordenación no hay orden. En el ejemplo anterior 7 6 5 = 5 7 6. En la combinación se divide entre lo que se toma factorial (m!) para eliminar la ordenación."
MONTSERRAT	"Fórmula con ordenación sin repetición. $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ n! es mi total de objetos dividido entre: mi total de objetos menos los objetos que voy a repartir."	"Fórmula combinación sin repetición. $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ Es una ordenación sin repetición la cual la divido entre m! q' son los objetos q' voy a repartir. Es una combinación $\therefore$ No hay orden y por eso divido entre m!" Al principio se equivoca y pone ordenación en lugar de combinación.
SERGIO	"$O_a^b = \frac{b!}{(b-a)!}$ ordenación s/ repetición. En el numerador pongo todas las casilla y abajo le estoy eliminando el número de casillas que ya no se piden."	"$\binom{b}{a} = \frac{b!}{(b-a)!a!}$ combinación s/ repetición. Es igual que la ordenación solo que le quito las que significan lo mismo."
PAULINA	"Ordenación sin repetición $\frac{n!}{(n-m)!}$"	"$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ n = tamaño del arreglo, m = cuantos tomo. Comb sin repetición."

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
JUAN PABLO	“Quiero ordenar n elementos en m lugares. $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ donde n! es la ordenación de todos los elementos sin repetición y se divide entre (n–m)! para que sólo se haga la ordenación en el número de m deseados. Ej. n = 7, m = 4 $\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7!}{3!}$.”	“$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Al igual que la fórmula anterior tengo n elementos para m lugares. Sólo que como no hay orden, tengo que dividir entre m! Ej. Si tengo m = 3 lugares es lo mismo: abc = bca = bac = acb = cab =cba, m!=6.”
ANDREA	“$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ n es el # de objetos, m los que tomo. n! porque si tomo uno ya no lo puedo volver a tomar. Divido entre (n–m)! porque solo tengo un # limitado de “lugares”.”	“$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ n es el # de objetos, m los que tomo. Igual que arriba. Divido entre m! porque quito las que ahora son “iguales” como no hay orden {a,b} = {b,a}”
BERNARDO	“$OR_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ← número de elementos factorial para sacar número de posibles ordenaciones. m: numero de posiciones o lugares en los que se van a ordenar los elementos. (n–m)!: para eliminar los lugares donde no se puedan acomodar elementos.” Escribe OR en lugar de O.	No resuelve.
ESTEFANY	“$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, n! = el número de objetos (total), m = lo que voy a repartir, (n–m)! el número de objetos que tengo.” No son los que tengo sino los que no uso.	“$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$, n! el número total de objetos, m! para quitarle orden, (n–m)! el número de objetos que tengo.” No son los que tengo sino los que no uso.

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
ANA	"Ordenación sin repetición. $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, n! factorial de n, (n–m)! (total de obj – obj a ordenar)!, pero eliminarlos del n! n = total de objetos, m = objetos que se digan, ordenar, tomar, etc."	"Combinación sin repetición. $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ n! factorial de n, (n–m)! factorial de los obj a esoger y se eliminan los q' son iguales. n = total objetos, m = objetos a escoger."
LUIS FERNANDO	"$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ Hay n objetos, tomando m, sin importar el orden." Hay orden.	"$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ Hay n objetos, tomo m, pero el orden no importa."
LUIS MIGUEL	"ordenación sin repetición $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ m < n. n siempre q'ser mayor que m, donde n es el número de objetos diferentes que se tienen y m el número de lugares o posiciones para estos objetos en la fórmula se divide entre (n–m)! para quitar el m! del n! de arriba, que se da por el número de formas posibles para ordenar. " Confuso el final.	"combinación sin repetición $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{O_n^m}{m!}$ n > m poniendo a la orden sin repetición. Sin embargo esta se divide entre m! para eliminar el orden que se toma en la primera porque en la combinación ya no importa en que posición pongas n objetos y con el m! se elimina este orden."
SONIA	"$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, donde n ≥ m. Una ordenación es cuando se tiene m objetos tomados de n objetos en total y quiero las posibilidades de elección [n! = n(n–1)(n–2)(n–i) … (1)] es el total de objetos, quitando la posibilidad de repetición de los objetos totales. (n–m) porque no tomo todos los objetos, solo tomo m objetos de n y para evitar que se repitan uso factorial [n!]. Se dividen para descartar las ordenaciones posibles de los que no tomo." Confuso.	No resuelve.
FABIÁN	"$\frac{n!}{(n-m)!}$ n tengo, m tomo."	"$\frac{n!}{(n-m)!m!}$"

NOMBRE	ORDENACIÓN SIN REPETICIÓN	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN
GINETTE	"$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ n → elementos que tengo, m → elementos que tomo. n! las formas en las que puedo acomodar mis objetos. (n–m)! para quitar las repeticiones."	"$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ → como en la combinación sin repetición no hay orden, tenemos que quitar los casos como {a,b} = {b,a} que sean iguales, por eso dividimos entre m!"
FERNANDA	"ordenación sin rep. $OR_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ tengo m objetos n espacios para acomodar." Incorrecto, mete repetición en el nombre aunque pone la fórmula correcta.	"combinación sin rep. $\binom{m}{n}$ tengo m tomo n."
KAREN	"Ordenación si, repetición x. → $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ n = objetos que tenemos, m = objetos que queremos."	No resuelve.

Inciso b)

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
ALMA	No resuelve.	
CRI STINA	"Elegir 5 panes de 15 tipos, sin que elija dos veces el mismo." Incorrecto, no hay orden.	"$O_{15}^5 = \frac{15!}{(15-5)!}$"
SALVADOR	"La placa de un carrito de golf tiene 3 letras diferentes ¿Cuántas placas diferentes pueden haber?"	"Sol. 26 25 24, n= 26 (26 letras), m = 3. # placas = $O_{26}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} =$ (26)(25)(24) placas. ABC ≠ BCA → Hay orden. No hay repetición."
DIEGO	"¿De 10 niños como pueden aparecer 4 de ellos en una fila?"	"De los 10 niños solo voy a elegir a 4. n = 10, k = 4. En el primer lugar puede estar cualquiera de los 10, en el segundo solo puedo elegir a 9, en el tercero a 8 y en el cuarto a 7. ent. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{n!}{(n-k)!}$"

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
JESSICA	"¿De cuántas maneras puede elegir a 6 trabajadores de un grupo de 9 personas?" Incorrecto, no hay orden.	"Orden si, repetición no."
RODRIGO	"¿De cuántas maneras puedo sentar a 5 personas en una banca para 3?"	"$\frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$ = 5 4 3."
GERARDO	"→ Ordenar 7 niños según sus iniciales."	"Tiene orden ya que se piden las iniciales pero no hay repetición pues solo hay un niño y no 2 iguales."
MARCO AHEDO	"Palabras de tres letras que se usan con las letras A, B, C, D, E."	"$\frac{5!}{(5-3)!}$ Se toma 5 4 3. Se toman 3 elementos de cinco pero si importa el orden. En las palabras sí importa el orden."
JORGE	"¿Cuántas palabras distintas de 5 letras se pueden formar con la palabra triangulo, si no hay restricciones."	"Se utiliza la fórmula de ordenación sin repetición, ya que si importa el orden y no se pueden repetir letras. n = 9 ya que triangulo tiene 9 letras, m = 5 ya que se piden palabras de 5 letras. $O_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!}$."
ANDREA R.	"Tenemos 4 dígito 4, 3, 2, 1. ¿De cuántas maneras podemos ordenar para formar números de 2 dígitos."	"$O_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$. 4 3 = 12."
CARLOS G.	"Cuántas palabras de dos letras pueden formarse de abcd?"	"$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!}$"
IDA	"Tengo 7 libros distintos y los quiero acomodar en un estante donde solo quepan 4. ¿De cuántas formas lo puedo hacer?"	"m = 7, n = 4. $\frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!}$. Explicación → tengo 7 y necesito acomodarlos solo en 4 lugares 7 6 5 4 $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{7!}{3!}$"
MARÍA FERNANDA	"Sean las letras a, b, c, d. ¿Cuántas palabras de 2 letras puedo formar?"	"$O_n^m = \frac{4!}{2!2!}$ n = 4, m = 2" Incorrecto usa combinación.

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
LUIS ANDRÉS	“¿Cuántas formas hay de acomodar 7 libros distintos de 20 totales?”	“ $\frac{20!}{(20-7)!}$, 20! ← total libros. (20–7)! ← divido para obtener mis 7 lugares de libros o sea 20 19 18 17 16 15 14 ya que $\frac{20!}{(20-7)!} = \frac{20!}{13!}$.”
CARLOS	“Se tienen 10 canicas diferentes en una bolsa. ¿De cuántas maneras pueden tomarse 6 canicas?”	“Orden, no repetición. $O_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!}$.” Incorrecta, no hay orden.
PEDRO	“En una carrera de 8 coches, ¿cuántos diferentes podios (3 primeros lugares) puede haber?”	“Tengo 8 elementos y voy a escoger 3. Hay orden porque no es lo mismo ganar la carrera que llegar en tercero. $\therefore$ el número de podios diferentes es: $O_{8}^{3} = \frac{8!}{(8-3)!}$.”
MANUEL	“De cuántas maneras se pueden formar Juan, Pedro, Rodrigo y Marta en una fila de dos?”	“No hay repetición porque las personas no se pueden repetir. Si hay orden porque es diferente que Juan este enfrente de Pedro a lo contrario. $\frac{4!}{(4-2)!} = 4 \cdot 3 = 12$ ”
SEBASTIÁN	“¿De cuantas maneras puedes anotar 10 personas en una lista que tiene 7 lugares?”	“ $\frac{10!}{(10-7)!}$ ”
ANTONIO	“¿Cuántas placas diferentes puede haber si tenemos 26 letras y 6 espacios en la placa y no podemos repetir ninguna letra?”	“Si hay orden y no hay repetición. Espacios en la placa m = 6, total de letras n = 26. $O_{26}^{6} = \frac{26!}{(26-6)!}$ ”
FRANCISCO	“Existe un programa para computadora que crea frases de manera aleatoria; cada frase está formada por 3 palabras que no pueden repetirse en la misma frase. Si existen 150 palabras registradas ¿cuántas frases diferentes pueden formarse?”	“ $O_{n}^{m} \Rightarrow O_{150}^{3} = \frac{150!}{(150-3)!}$ ”

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
MARCO ANTONIO	"Se tienen que formar 2 equipos de fútbol de 3 personas de 7 que quieren jugar. ¿Cuántas formas hay de hacer los dos equipos?" Incorrecto es una combinación sin repetición.	"$\frac{7!}{4!3!} = \binom{7}{3}$. Este problema es de ordenación sin repetición porque para empezar es con personas las cuales no se pueden repetir, al igual es lo mismo escoger a la personas 1, 2, 3 ó 3, 2, 1 es el mismo equipo por eso se resuelve con $\frac{n!}{(n-m)!m!}$" Resuelve correctamente con la fórmula de combinación, pero pone que es la ordenación.
LIZBETH	"Palabras de 3 letras que se pueden formar con las letras de la palabra QUIERO."	"R – 5 4 3 = 5·4·3 → Esto es porque no hay repetic/. $O_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!}$ $\frac{5!}{2!}$ 2! → quitamos las letras que no tomamos."
YESSICA	"¿De cuántas diferentes formas se puede obtener palabras de 5 letras de un alfabeto de 26 letras, sin repetir letras?"	"26 25 24 23 22. $O_{26}^5 = \frac{26!}{(26-5)!}$ $= \frac{26!}{21!} =$ 26·25·24·23·22. En el problema se usa una ordenación puesto que hay orden, no es lo mismo la palabra "abcde" que "dabec" y no hay repeticiones puesto que el problema no lo pide."
MONTSERRAT	"El conjunto A tiene 6 letras distintas → A = {a, b, c, d, e, f} ¿Cuántas palabras distintas de 4 letras puedo formar?"	"Si hay orden porque abcde ≠ cbde y no hay repetición. $\therefore \rightarrow O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ $= \frac{6!}{(6-4)!}$"
SERGIO	"Las placas tienen 3 dígitos de 9 posibles (1, 2, 3, …, 9). ¿Cuántas placas puede haber si no se pueden repetir los dígitos?"	"9 8 7. En el 1° tengo 9 posibilidades, en el 2° solo 8 porque ya utilice 1, y en el 3° solo 7 porque ya utilice 2. Por eso $\frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = \frac{9!}{(9-3)!}$"

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
PAULINA	"Ordenación sin repetición. Hay 7 lugares y 7 personas como se pueden formar si no importa el orden y mas de 2 no pueden estar en un mismo lugar." Resuelve bien pero dice que no importa el orden.	"7!"
JUAN PABLO	"Tengo cuatro letras a, b, c, d. Con dichas letras: ¿cuántas palabras de 2 letras puedo formar?"	"Sol = $\frac{4!}{2!}$ ya que hay orden en las palabras, los elementos no se repiten y tengo 4 elementos para acomodar en 2 lugares."
ANDREA	"Tengo 15 libros de diferente color. ¿De cuántas maneras los puedo ordenar si solo tomo 7 de ellos?"	"n = 15 libros, m = 7. $O_7^{15} = \frac{15!}{(15-7)!}$ como son de dif. color si hay orden, como no se puede tomar el mismo libro 2 veces no hay repetición."
BERNARDO	No resuelve.	
ESTEFANY	"¿De cuántas formas se pueden ordenar 3 libros de cálculo y 2 libros de álgebra, si cada libro es distinto y los libros de cálculo deben ir primero que los de algebra?"	"Cálculo. n = 3, m = 3. $O_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!}$ =3!. Álgebra. n = 2, m = 2. $O_2^2 = \frac{2!}{(2-2)!}$ = 2! Respuesta: 3!2! * Orden. * No repetición x que cada libro es distinto."
ANA	"Sea A = {1, 2, 3, 4, 5} ¿Cuántos números de 3 dígitos pueden formarse (si no se pueden repetir dígitos)?"	"Orden si, 212 ≠ 221, rep x. 5 4 3, el primer dígito de 5 formas, el segundo de 4, el tercero de 3. $O_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!}$ $= \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, 5 = total de digitos = n, 3 = números de 3 dígitos = m, $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$."
LUIS FERNANDO	"Se tienen los números 1, 2, 3. ¿Cuántos números distintos se pueden formar usando esos objetos?"	No resuelve.

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
LUIS MIGUEL	“Una placa para motocicleta consta de tres letras, no se puede repetir la misma letra en una placa. ¿Cuántas placas de moto puede haber?”	“No hay repetición, si hay orden. 26 se fija una letra, 25 ya no se puede usar la 1° letra, 24 así sucesivamente. $\therefore$ Respuesta = $O_{26}^{3} = \frac{26!}{(26-3)!}\ \frac{26!}{23!}$ ”
SONIA	“Si tengo 6 pulseras pero me voy a llevar solo dos y las escojo al azar, ¿cuántos pares distintos puedo llevarme?” Incorrecto, es un problema sin orden.	“$O_{6}^{2} = \frac{6!}{4!}$, 6 > 2.” Incorrecto, es una combinación.
FABIÁN	“Se tienen 8 pasteles y 3 niños de 10, 9, 8 años. ¿De cuántas formas se pueden dar los pasteles si el más pequeño debe de recibir al menos 1 mas que los demás?” Incorrecto, no hay orden.	No resuelve.
GINETTE	“¿De cuantas formas puede un médico pasar al consultorio a 10 personas si no se toma en cuenta quién llego primero?”	No resuelve.
FERNANDA	“Tengo 8 caramelos cada uno de distinto sabor 4 niños. ¿De cuántas formas posibles puedo dárselos?”	“$\frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!}$ 8 dulces 4 niños para repartirles.”
KAREN	“En una ciudad las placas constan de 3 letras. ¿Cuántas placas hay si las letras no se pueden repetir?”	“Orden si, repetición x. 26 25 24 → $O_{3}^{26} = \frac{26!}{(26-3)!}\ \frac{26!}{23!} = 26 \cdot 25 \cdot 24$. n = 26 letras del alfabeto. m = 3 para las placas.”

Inciso c)

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
ALMA	“De una baraja con 52 cartas quiero sacar 3 cartas. ¿Cuántas formas hay de hacerlo?”	“$\binom{52}{3}$ Tenemos 52 cartas, estas se dividen en 4 palos y cada palo tiene 13 números, por lo tanto no se puede repetir ninguna carta.”

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
CRISTINA	"¿De cuántas formas puedo elegir 5 plumas de los 15 tipos que hay?"	"Tengo 15 tipos. Elijo 5 plumas. $\therefore$ puedo elegir de $\binom{15}{5}$ formas."
SALVADOR	"Se tienen 4 canicas diferentes, si se toman 2 canicas. ¿De cuántas formas se puede hacer?"	"Sol. n = 4 canicas $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, m = 2. # formas = $\binom{n}{m} = \frac{4!}{(4-2)!2!} =$ 6 formas. $c_1c_2=c_2c_1 \rightarrow$ No hay orden. No hay repetición. $c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_4$ "
DIEGO	"Voy a elegir a 4 niños para un equipo de matemáticas de 10 niños en total."	"Entonces primero puedo elegir a cualquiera de los 10, después solo a 9, luego 8, luego 7. entonces tengo $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$, Pero si elegi a los niños a, b, c, d; es lo mismo que si hubiera elegido a los niños c, d, a, b. Entonces debo quitar las formas en las que 4 niños pueden ordenarse, que es 4! Ent el número de diferentes equipos $= \frac{10!}{4!6!}$"
JESSICA	"Con las letras a, b, c, d, e. ¿Cuántos conjuntos de 3 elementos se pueden formar?"	"orden no, repetición no"
RODRIGO	"¿De cuántas formas puedo hacer conjuntos de 2 números si tengo 8 números?"	"$\frac{8!}{(8-2)!2!}$"
GERARDO	"$\rightarrow$ ordenar 7 botes en 5 salones."	"No existe orden ni existe repetición."
MARCO AHEDO	"Conjuntos de tres elementos que se forman con letras A, B, C, D, E."	"$\frac{5!}{(5-3)!3!}$. Como no importa el orden en un conjunto, se toman 3 elementos de cinco elementos pero sólo los que tengan diferentes elementos, es decir, los que tienen diferente orden pero mismos elementos se toman como 1."

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
JORGE	"Un pastelero tiene 8 pasteles de fresa idénticos, y los quiere repartir entre 3 niños. ¿De cuántas formas los puede repartir si no hay restricciones?" Incorrecto, objetos idénticos, combinación con repetición.	"Se utiliza la fórmula de combinación sin repetición, ya que no hay orden porque da igual que te den el pastel 1 primero que el 3. Y no hay repetición porque no le puedes dar el mismo pastel a 2 niños. n = 8 ya que hay 8 pasteles. m = 3 ya que los vas a dar a 3 niños. $\binom{n}{m} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!3!}$."
ANDREA R.	"De 20 personas se van a elegir 12. → 10 hombres. → 10 mujeres, haya más mujeres que hombres."	"Elegimos mujeres hombres, 7 > 5 = 12, 8 > 4 = 12, 9 > 3 = 12, 10 > 2 = 12 → hasta 10 porque no hay más de 10 mujeres. $\binom{10}{7}\binom{10}{5} + \binom{10}{8}\binom{10}{4} + \binom{10}{9}\binom{10}{3} + \binom{10}{10}\binom{10}{2}$."
CARLOS G.	"¿Cuántas combinaciones distintas de pares de calcetines pueden sacarse de un cajón con 4 calcetines?"	"$C(4,2) = \frac{4!}{2!(4-2)!}$"
IDA	"Tengo 7 personas y quiero formar equipos de 4 personas, ¿de cuántas formas lo puedo hacer?"	"m = 7, n = 4, $\frac{7!}{(7-4)!4!}$. Explicación → lo mismo que la anterior pero en este caso es lo mismo que tome a p_1 primero para un equipo a que lo tome después por eso tengo que multiplicar por el 4!"
MARÍA FERNANDA	"Hay 9 niñas y 7 niños. ¿Cuántos equipos de basketball se pueden formar de tal manera que en el equipo sea siempre el # de mujeres al menos uno más que el # de hombres?"	"Estoy mezclando hombres y mujeres, además de que no puede haber repetición porque son personas y éstas no se pueden repetir. $\binom{9}{4}\binom{7}{1} + \binom{9}{3}\binom{7}{2} + \binom{9}{5}\binom{7}{0}$." Resuelve correctamente por separado no mezclando.

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
LUIS ANDRÉS	"¿Cuántos equipos de 3 personas se pueden hacer con 5 personas?"	"$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!}$, 5! ← total, (5-3)!3! ← divide entre número de personas que escojo para ten mis lugares y tambien quito orden. $\frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}$, 5·4·3 ← mis lugares, 3! ← quito el orden porque no importa."
CARLOS	"Se tiene A = {a, b, c, d, e} y se quiere un conjunto S de 3 elementos. ¿Cuántos conjuntos diferentes hay?"	"No orden pues $\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$. No repetición. $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!}$."
PEDRO	"¿Cuántos salones diferentes de 10 personas se pueden formar si en una escuela hay 27 alumnos?"	"Hay 27 alumnos y no hay orden porque el salón es el mismo si el que se escojió primero se escogiera al último. ∴ número de salones diferentes: $\binom{27}{10} = \frac{27!}{(27-10)!10!}$."
MANUEL	"De cuantas maneras se puede formar un conjunto de 3 elementos con las siguientes letras: A, B, C, D, E."	"No hay orden porque en un conjunto no se toma en cuenta el orden. No hay rep. xq' en un conjunto no se repiten los elementos. $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!}$"
SEBASTIÁN	"Si tengo un estuche de lápices al cual le caben 5 lápices. ¿De cuantas maneras puedo meter los lápices si tengo 30 de diferentes colores?"	"$\frac{30!}{(30-5)!5!}$."
ANTONIO	"Se tiene 10 canicas idénticas. ¿De cuántas maneras se pueden repartir entre 3 niños?" Incorrecto, combinación con repetición.	"Total de objetos = 10, total de "espacios" = 3 → $\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10}$." Resuelve correctamente.

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
FRANCISCO	“Un respetuoso alumno estima mucho a sus maestras de Álgebra y Geometría. Como se acerca el día del maestro y el tiene 4 perfumes que su mamá nunca ha abierto, decide regalárselos. ¿De cuántas formas puede regalar los 4 perfumes a las 2 maestras?”	“$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!}$ pues debe repartir 4 perfumes a 2 maestras y no puede darle mas de una vez el mismo perfume a cada una.”
MARCO ANTONIO	“Se tienen 10 canicas (iguales) que se colocarán en 4 vasos. ¿Cuántas formas hay de hacerlo?” Incorrecto es combinación con repetición.	“$\binom{n+r-1}{r} = \binom{4+10-1}{10}$ Este problema es de combinaciones sin repetición, porque los objetos son iguales y se distribuyen en otros, de igual manera al ser iguales da igual que canica se pone primero es lo mismo: 1 2 3 = 3 1 2.” Incorrecto, resuelve con la fórmula correcta pero dice que es combinación sin repetición.
LIZBETH	“Un niño escoge 5 chocolates de los 15 chocolates diferentes que compró su mamá.”	“R – No hay orden → porque al final va a tener los mismos chocolates sin importar como los escogió. $\binom{15}{5} = \frac{15!}{(15-5)!5!}$. Tipos 15, escoge 5. 15! → no hay repeticiones porque solo hay 1 chocolate de cada tipo, 5! → Esto es para quitar el orden. (15-5)! → Quitamos los q’ no escogió.”
YESSICA	“¿De cuantas formas se puede escoger un equipo de siete integrantes tomados de un grupo de 20 alumnos?”	“20 – alumnos, 7 – integrantes. $\binom{20}{7} = \frac{20!}{13!7!}$. En este problema se usa una combinación, puesto que es lo mismo elegir un alumno en el lugar 3 que en el lugar 5. Ejem. 1 2 3 4 5 6 7 = 7 6 5 4 3 2 1. Por otro lado no hay repeticiones, puesto que no se puede repetir un alumno mas de una vez.”

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
MONTSERRAT	"Tengo 5 juguetes que debo repartir entre 3 niños, formas posibles."	"No hay orden, no hay rep → comb. sin repetición $\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!m!}$ $=\frac{5!}{(5-3)!3!}$."
SERGIO	"Tengo 5 pelotas en una bolsa y debo tomar 3. ¿Cuántas posibilidades hay?"	"A diferencia del problema de arriba, aquí da igual si tomo la pelota roja y luego la verde, que la verde y luego la roja. Por eso es la misma fórmula que arriba pero quitándole además las distintas formas de tomar las pelotas que todas ellas serían 1 manera. Que en este caso serían 3! $\frac{5!}{(5-3)!3!}$."
PAULINA	"En una encuesta de 15 preguntas debe contestar 10, cuántas maneras hay de contestar si no hay orden"	"$\binom{15}{10}=\frac{15!}{10!5!}$"
JUAN PABLO	"Tengo 7 mujeres y necesito escoger 2."	"$\binom{7}{2}=$ ya que es igual hay m = 2 lugares y n elementos pero como no importa el orden en que escoja tengo que dividir entre m!"
ANDREA	"Conjuntos de números de dos dígitos que van del {1,0} al {9,9}. ¿De cuántas formas se pueden formar si el orden no importa?"	"{2,1} = {1,2} $\binom{n}{m}=\binom{9}{2}$ $=\frac{9!}{(9-2)!2!}$."
BERNARDO	"¿De cuántas formas se pueden escoger o cuántas combinaciones se pueden obtener al escoger 5 canicas de un bote que contiene 15 canicas diferentes?"	"$\binom{15}{5}=\frac{15!}{(15-5)!5!}$, 15! ← todas las combinaciones de canicas. 5! ← para eliminar la repetición porque no hay canicas iguales. (15–5)! ← menos todas aquellas combinaciones en que se esogan más de 5 canicas."

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
ESTEFANY	"Tengo 10 canicas de diferente color y quiero formar 5 grupos de canicas. ¿Cuántos grupos de canicas se pueden formar?"	"n = 10 canicas diferentes. m = 5 grupos. $\binom{10}{5}$. Es una combinación sin repetición porque no hay orden, es decir, me da lo mismo elegir primero a la canica azul ó a la roja, y no hay repetición porque son canicas de diferente color cada una." La redacción no es correcta, 5 grupos con 10 canicas entonces toma 2 para cada grupo.
ANA	"Si tengo 20 chicles y quiero escoger 15. ¿Cuántos formas hay de escogerlos sin importar el orden y no hay rep?"	"orden x, rep x. $\binom{n}{m}$ n = total de chicles = 20, m = chicles a escoger = 15. $\binom{20}{15} = \frac{20!}{5!15!}$."
LUIS FERNANDO	"Se quiere repartir 3 naranjas y 5 manzanas en 4 niños. ¿Cuántos formas hay de repartirlas haciendo que al menos a cada niño le toquen 2 frutas?"	No resuelve.
LUIS MIGUEL	"Se tiene 8 postres diferentes en un restaurant. Se pueden comer 5 postres diferentes a la semana sin importar en que orden se coman. ¿Cuántas combinaciones de postres se pueden comer en la semana?"	"no orden, no repetición. ∴ Respuesta $= \binom{8}{5} = \frac{8!}{(8-5)!5!}$, 8! ← Total de postres. (8–5)! ← eliminar los q' no se toman. 5! ← Eliminar el orden puesto q' no se necesita."
SONIA	"Tengo que sacar 5 cartas de distintos números."	"Las posibles combinaciones de sacar estas 5 cartas si tengo 13 números del mismo palo es. $\binom{13}{5} = \frac{13!}{8!5!}$."
FABIÁN	"Se tienen 20 lapizes de diferentes colores, ¿de cuántas formas distintas se les pueden dar a los 10 estudiantes?"	No resuelve.

NOMBRE	PROBLEMA	SOLUCIÓN
GINETTE	"Si están las fichas de dominó en la mesa, ¿de cuántas formas una persona puede tomar sus 7 fichas correspondientes?"	No resuelve.
FERNANDA	"Tengo 20 lápices distintos, quiero comprar solo 5, ¿de cuántas formas los puedo elegir?"	"$\binom{20}{5}$ de 20 lápices voy a elegir 5."
KAREN	"¿Cuántos equipos de 4 niñas se puede formar si tenemos 15 candidatas?"	"orden x, repetición x. $\therefore$ Combinación con n = 15 y m = 4 → $\binom{15}{4} = \frac{15!}{11!4!}$ "

Inciso d)

NOMBRE	RELACIÓN ENTRE FÓRMULAS
ALMA	No resuelve.
CRISTINA	"Podemos ver que son parecidas, la diferencia radica en que en la combinación el término m! multiplica al denominador, que es igual en ambas fórmulas. Una explicación es que multiplicando por m! en la combinación estamos dejando que haya repetición del elemento m, en cambio en la <u>ordenación no</u> ponemos m! para que ese elemento no se repita." Incorrecto. "$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ "
SALVADOR	"En las combinaciones no existe un orden entre los elementos, es decir, a,b = b,a, en la ordenación si lo hay, así a,b = b,a, así las fórmulas en a) se relacionan $\binom{n}{m} = \frac{O_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ con (P_m = permutación de m)"
DIEGO	"Si H es ordenación sin repetición y S combinación sin repetición $\frac{H}{k!} = S$ n = número de elementos que puedo elegir, k = número de elementos que puedo elegir." Esto último lo escribe mal pero si lo hizo bien.
JESSICA	"Donde existe orden abc ≠ cba y sin orden abc = bca, por eso de la fórmula con orden debes quitar las combinaciones que sean iguales y esas son m!"
RODRIGO	"La diferencia es que en el orden importa el orden y en la combinación no, para llegar de a) → b) solo se necesita quitar las permutaciones dividiendo entre m!"

NOMBRE	RELACIÓN ENTRE FÓRMULAS
GERARDO	“$\frac{O_n^m}{m!} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$”
MARCO AHEDO	“La diferencia es que cuando no hay orden se divide entre las posibles ordenaciones de la original, es decir, los elementos tomados de cuantas maneras pueden ordenarse, esto es m! por ello cuando no hay orden se divide entre m! Orden: $\frac{n!}{(n-m)!}$. No orden $\frac{n!}{(n-m)!m!}$”
JORGE	“La diferencia es que en ordenación sin repetición, si se distingue el orden en el que se tomen los elemento. P. ej. en el caso de números donde $12 \neq 21$. Y en la combinación sin repetición no se distingue el orden de los elementos. P. ej. en el caso de conjuntos donde $\{1,2\} = \{2,1\}$. Y para pasar de O_n^m a $\binom{n}{m}$ a la fórmula $\frac{n!}{(n-m)!}$ se le tiene que dividir entre m! y con esto se eliminan las repeticiones que pueden surgir del orden.”
ANDREA R.	“La diferencia es que en orden sin repetición si hay orden y en combinaciones no hay orden. Pasamos de ordenación a combinación dividiendo entre permutaciones.”
CARLOS G.	“La permutación considera que teniendo (a, b) y (b, a) se tienen 2 elementos mientras que la combinación no distingue entre ambos, y la combinación = $\frac{permutación}{(elementos\ a\ escoger)!}$”
IDA	“La diferencia es que en la combinación tienes una restricción más, que además debes quitar las opciones que queden iguales. Esto es cuando existe repetición de algunos elementos. Para pasar de una fórmula a otra. $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \frac{m!}{(m-n)!} \cdot \frac{1}{n!} = O_n^m \cdot \frac{1}{n!} = \frac{O_n^m}{n!}$”
MARÍA FERNANDA	“$O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, comb sin rep = $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Son diferentes pues en O_n^m no se divide entre m! pero se relacionan en que la fórmula de combinación sin repetición es igual a la de ordenación sin rep. sobre m!. $\binom{n}{m} = \frac{O_n^m}{m!} \leftarrow$ relación”
LUIS ANDRÉS	“La diferencia entre ambas fórmulas es que en una importa el orden y en la otra no para pasar de $\frac{n!}{(n-m)!}$ a $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ solo hay que dividir por m! o sea los objetos que tomo para quitar el orden.”

NOMBRE	RELACIÓN ENTRE FÓRMULAS
CARLOS	"La diferencia es el orden. En O_n^m hay orden y en combinaciones no. Entonces, para quitarle el orden a una ordenación se divide entre el número de conjuntos iguales, que se obtienen con la permutación del número de objetos tomados. No. de objetos tomados m. $\frac{O_n^m}{m!}=\binom{n}{m}$."
PEDRO	"La diferencia entre las dos es que en la ordenación sí importa el orden de los elementos y en la combinación no. En una ordenación de m elementos, existen m! elementos que tienen los mismos objetos pero en diferente orden (las permutaciones del conjunto) por eso en la combinación se divide la ordenación entre m!, para eliminar todas las permutaciones y tomarlas como un solo elemento."
MANUEL	"En una se toma en cuenta el orden, en la otra no. Una vez que tenemos $\frac{n!}{(n-m)!}$, hay 'n' objetos y 'm' lugares con n ≥ m pero dentro de esos lugares no importa el orden cuando hablamos de combinación, entonces dividimos entre el número de lugares para que ab = ba y no se tome como 2 opciones diferentes. "
SEBASTIÁN	"La diferencia es que en la combinación no te importa el orden en que estén las cosas. Para quitar ese orden solo debes dividir la combinación entre m! (m siendo el número de lugares)."
ANTONIO	"En la fórmula de combinación no hay orden, es decir, no importa a que "espacio" se le ponga el primer objeto. En ordenación si importa. Por lo tanto para pasar de ordenación a combinación dividimos entre el número de espacios factorial (ó m!) para así evitar las combinaciones del orden en que no hallan puesto los objetos en los espacios." Confuso el final.
FRANCISCO	"O_n^m y $\binom{n}{m}$ se parecen porque en ambas no se permite la repetición; así, la única diferencia (a pesar de ser una es muy importante) es que en la primera existe el orden y en la segunda NO. De manera que podemos esperar un resultado mayor en las ordenaciones, porque muchas combinaciones contienen los mismos elementos. * la transición de una fórmula a otra es sencillo, pues solo hay que quitarle el orden a las O_n^m … $\frac{O_n^m}{m!}=\frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{\frac{m!}{1!}}=\frac{n!}{(n-m)!m!}=\binom{n}{m}$"

NOMBRE	RELACIÓN ENTRE FÓRMULAS
MARCO ANTONIO	"La diferencia radica en que los objetos m pueden ser diferentes mientras que los de r son iguales, si los m fueran iguales $\frac{n!}{(n-m)=0!m!}$ $\binom{n}{m}$ $\frac{n!}{m!}$ pero este sería 1 por m = n $\therefore$ $\frac{n+m}{m}$ da las ordenaciones totales pero como cada m cubre 2 m debe ser $\binom{n+m-1}{m}$ °°°|°° una m divide 2 n's para lados queda de los m objetos por esto es el –1" Confunde fórmulas.
LIZBETH	"La diferencia es que en la ordenación si hay orden y en la combinación no. Con orden → $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. Sin orden $\binom{n}{m} = \frac{O_n^m}{m!}$ $= \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Dividiendo entre m! quitamos las combinaciones que son iguales porque no hay orden."
YESSICA	"A diferencia de la combinación, en la ordenación hay orden y en la combinación no hay orden, para pasar de una fórmula a otra en la combinación se divide la ordenación entre el factorial de los objetos tomados (m!) para así poder quitar la ordenación. Ordenación → $\frac{n!}{(n-m)!} \rightarrow \frac{n!}{(n-m)!m!}$ → combinación, m! → componente agregada. En las dos no hay repeticiones."
MONTSERRAT	"La diferencia entre ambas fórmulas es que en la combinación multiplico por (n–m)! por un m! $\frac{n!}{(n-m)!} \neq \frac{n!}{(n-m)!m!}$; $O_n^m \neq \binom{n}{m}$; $\frac{O_n^m}{m!} = \binom{n}{m}$ y de la ordenación paso a la combinación cuando sigue habiendo no repetición pero se pierde el orden. $\therefore$ la ordenación s/rep. la divido entre m! $\frac{O_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$."
SERGIO	"$\frac{b!}{(b-a)!}$ se utiliza cuando por ejemplo: a b c ≠ a c b pero cuando esos dos significan lo mismo, es decir, a b c = a c b entonces tengo que dividir $\frac{b!}{(b-a)!}$ entre a! $\Rightarrow \frac{\frac{b!}{(b-a)!}}{a!}$ y por la ley del sándwich queda $\frac{b!}{(b-a)!a!}$."
PAULINA	No resuelve.

NOMBRE	RELACIÓN ENTRE FÓRMULAS
JUAN PABLO	"En la combinación sin rep. divido entre m! la fórmula de la ordenación, ya que como no hay orden necesito eliminar los resultados repetidos."
ANDREA	"La diferencia es que en la combinación "quitas" el orden al dividir entre m!, es decir, para pasar de la fórmula de ordenación: $\frac{n!}{(n-m)!}$ divido entre m!. $\frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{\frac{m!}{1}}$ y simplifico: $\frac{n!}{(n-m)!m!}$."
BERNARDO	"La diferencia entre combinaciones y ordenaciones sin repetición es que en las combinaciones de un determinado número de elementos, se cuentan cuántos grupos de elementos diferentes (de cierta longitud) se pueden tomar (o a veces distribuir) del número determinado de elementos y en las ordenaciones se ordenan en cierto número de casillas todos los elementos que se tienen." Confuso.
ESTEFANY	"Ordenación sin repetición: orden si, repetición no, objetos distintos, fórmula $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. Combinación sin repetición: orden no, repetición no, objetos distintos, fórmula $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Cuando tengo n objetos y los voy a colocar en m lugares los pongo en un orden $\frac{n_1}{m_1}\frac{n_2}{m_2}.... = \frac{n!}{(n-m)!}$. Cuando no me importa el orden puedo poner $\frac{n_1}{m_1}\cdot\frac{n_2}{m_2}$ ó $\frac{n_2}{m_1}\cdot\frac{n_1}{m_2}$ y por eso le quito el orden. $\binom{n}{m} = \frac{O_n^m}{m!}$ $= \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{\frac{m!}{1}} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. $O_n^m = \binom{n}{m}\cdot m! = \left[\frac{n!}{(n-m)!m!}\right]\cdot m!$ $= \frac{n!}{(n-m)!}$."
ANA	En el inciso a) resuelve correctamente. "m! factorial de los obj a escoger y se eliminan los q' son iguales". En el inciso d) encuentra la diferencia entre ordenación con repetición y combinación con repetición, incorrecto.

NOMBRE	RELACIÓN ENTRE FÓRMULAS
LUIS FERNANDO	"La diferencia es que en la ordenación sin repetición importa el orden de los elementos; mientras que en la combinación, el orden no importa. $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ → para anular orden hay que dividir entre las formas en que se pueden revolver los elementos tomados $\frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} \Rightarrow$ $\frac{n!}{(n-m)!m!} \Rightarrow \binom{n}{m}$."
LUIS MIGUEL	"La diferencia importante entre estas dos fórmulas es el orden, en la primera existe y su fórmula O_n^m sirve para la segunda. Sin embargo al dividirla entre m! eliminas la posibilidad de orden, haciendo un número menor la combinación que la ordenación. $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ n > m. $\binom{n}{m} = \frac{O_n^m}{m!} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$."
SONIA	"La relación ÷ ambas es que las ordenaciones posibles en O_n^m se usa cuando el orden importa es decir por ejemplo $21 \neq 12$ pero por ejemplo en conjuntos donde busco las posibles soluciones ó ordenaciones pero el orden no me importa porque $\{2,1\} = \{1,2\}$, entonces a esa ordenación la divido entre los m objetos que tomo para que los elementos aparezcan una solo vez, y sea una combinación de los elementos."
FABIÁN	"que una es de orden sin repetición o sease teniendo un cierto orden pero sin repetirse y la otra es de las combinaciones que no se repitan si se llega a perder el orden en la primera se puede llegar a la segunda."
GINETTE	"La ordenación sin repetición tiene que seguir un orden, no es lo mismo {1,2} que {2,1} no se pueden repetir los objetos, el n! son todas las formas en que puedo acomodar mis objetos, lo divido entre (n–m)! para quitar las repeticiones. En la ordenación, al dividir entre m!, estoy quitando el orden. La diferencia entre una y otra es el orden. Puedo pasar de una a otra quitando los casos iguales o poniendolos $\{1,2\} = \{2,1\}$ ó $\{2,1\} \neq \{1,2\}$ con el m!" Se equivoca al final y pone ordenación en lugar de combinación.
FERNANDA	"$OR_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ $\frac{OR_m^n}{n!} = \binom{m}{n}$ es decir $\frac{m!}{(m-n)!} / n! = \binom{m}{n} \rightarrow \frac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m}{n}$"

NOMBRE	RELACIÓN ENTRE FÓRMULAS
KAREN	"En la primera hay orden, por lo que no es lo mismo tener 12 que 21, por ejemplo, y en la segunda no hay orden por lo cual 12 = 21, con esto vemos que mientras en la primera se obtienen 2 formas en la segunda 1, entonces es necesario que dividamos entre los objetos que queremos para eliminar uno de 12 ó 21, por ejemplo. c/orden $\frac{n!}{(n-m)!}$ si queremos s/ orden → $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ m! → Para eliminar el orden."

Pregunta del examen de final.

Considerando que el alfabeto tiene 27 letras, ¿cuántas palabras de 8 letra hay

a) *que comiencen con una vocal, si las letras no se pueden repetir?*
b) *que contengan al menos una vocal, si las letras se pueden repetir?*
c) *que contengan exactamente una vocal, si las letras se pueden repetir?*
d) *que tengan exactamente tres letras U y dos letras O, si las demás letras no se pueden repetir?*

Inciso a)

NOMBRE	COMIENZA CON VOCAL	DEMÁS LETRAS	SOLUCIÓN
Alma	Si, pero pone factorial. "5! Son las ordenaciones de las vocales."	"27 – 1 = 26, 8 – 1 = 7. 26! Es la resta de la vocal de las 27 letras restantes del alfabeto, como no se pueden repetir se le va restando la letra anterior."	Incorrecta. "$O_n^m = \frac{26!}{19!}\cdot 5!$"
Cristina	"Tenemos cinco vocales y tomamos una de ellas entonces $\binom{5}{1}$."	"Como ya elegimos una letra de las 27 letras sólo nos quedan 26 letras. 27 – 1 vocal = 26 letras y como no se puede repetir entonces se nos va reduciendo una letra por lugar."	"por el principio del Producto del conteo primer suceso que se puede hacer de m formas seguido de un segundo que se puede hacer de n formas, se puede hacer de m·n formas. $\binom{5}{1}\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20$ palabras de 8 letras."
Salvador	"Pero como hay 5 vocales."	"HAY ORDEN NO HAY REPETICIÓN. 27 – 1 = 26 letras."	"$\binom{5}{1}\left(\frac{26!}{(26-7)!}\right)$"

NOMBRE	COMIENZA CON VOCAL	DEMÁS LETRAS	SOLUCIÓN
Diego	"Puedo elegir cualquier vocal → 5."	"Puedo elegir cualquier letra menos la vocal que ya elegí 26, puedo elegir cualquier letra menos las 2 que ya elegí 25, similar."	"$(5)\frac{26!}{19!}$"
Jessica	"5 las vocales."	"26 → ya ocupe 1 letra, 25 → ya ocupe otra y así"	"$5\cdot\left(\frac{26!}{19!}\right)$"
Rodrigo	"5 opciones de vocales."	"27 letras – 1 vocal = 26."	"$5\left(\frac{26!}{19!}\right)$"
Gerardo	"Son 8 espacios para las letras, pero la 1° letra es vocal y solo son 5 vocales disponibles. Por ello el primer espacio solo puede tener 5 opciones."	"Para los siguientes espacios quedan todas las letras menos la vocal del primer espacio (27 – 1 = 26). El total de letras restantes es de 26. Para los siguientes espacios irá reduciéndose en 1 porque no hay repetición."	"$\frac{26!(5)}{19!}$"
Marco Ahedo	"Si comienza con una vocal tengo varios casos."	"En cada caso ya eliminé la letra con la que comienza la palabra, por lo tanto las otras 7 letras son libres y no pueden repetirse, pero si pueden ser vocales distintas a la letra con la que se comienza."	"La fórmula será: $5\left(\frac{26!}{(26-7)!}\right)$"
Jorge	"5 porque son las 5 vocales de la primera letra."	"O_{26}^{7} porque tenemos 26 letras restantes, 7 lugares para colocarlas y no hay repetición pero si hay orden."	"$\therefore 5\cdot O_{27}^{6}$"
Andrea R.	"Hay 5 vocales."	"Es una ordenación sin repetición que toma m en n objetos."	Incorrecta. "$O_{26}^{7} = \left[\frac{26!}{7!}\right]5$" Se equivoca en el denominador.
Carlos G.	"Se comienzan con una vocal, y son 5 vocales."	"alfabeto = 26."	"$5\cdot\frac{26!}{19!}$"

NOMBRE	COMIENZA CON VOCAL	DEMÁS LETRAS	SOLUCIÓN
Ida	“Son las 5 vocales que pueden ir al principio.”	“Quité la letra que ya use al principio porque no hay repetición y además, se puedo usar las vocales. Voy quitando las letras que ya use.”	“$5\cdot\frac{26!}{19!}$”
María Fernanda	“5 posibles vocales.”	“26 quito la vocal, 25 quito vocal y letra xq no se pueden repetir.”	“5·26·25 ·24·23· 22·21·20”
Luis Andrés	“solo hay 5 vocales para poner en primer lugar.”	“me quedan 26 porque ya quite una.”	“$\frac{26!}{(26-7)!}\cdot 5$”
Carlos	“5 a, e, i, o, u”	Si.	“5(26)(25) (24)(23)(22) (21)(20)”
Pedro	“1 vocal 5 opciones.”	“de 27 letras, ya tomé una, quedan 26, y además no se pueden repetir.”	“Se multiplican porque se tienen que cumplir las dos condiciones simultáneamente. $\binom{5}{1}\cdot O_{26}^{7}$”
Manuel	“Sólo hay 5 opciones.”	“Es factorial porque no se puede repetir.”	“$5\frac{26!}{(26-7)!}$”
Sebastián	“Tenemos 8 lugares y para el primero solo 5 opciones.”	Si.	“$5\frac{26!}{19!}$”
Antonio	“En el primero debe de ir una vocal forzosamente, hay 5 en total, por lo tanto hay 5 opciones de letra para ese lugar.”	“En los siete restantes lugares (8 menos el lugar en el que ya puse una letra) me quedan solo 26 opciones en el caso del segundo lugar, 25 en el tercero y así sucesivamente pues como no hay repetición, cada letra que voy escogiendo va disminuyendo mis opciones de letra.”	“$5\cdot\frac{26!}{19!}$”
Francisco	Si.	No resta la vocal, por lo que usa 27 letras.	Incorrecta. “$O_5^1\cdot O_{27}^7$”

NOMBRE	COMIENZA CON VOCAL	DEMÁS LETRAS	SOLUCIÓN
Marco Antonio	"Porque comienzan con vocal la primera letra se elegirá entre 5 opciones."	"ya que se eligió una vocal las letras restantes se eligen de 26 letras, ya que se quitó una vocal al no poder repetir, sucesivamente van disminuyendo las opciones que se tienen."	"$(5)\cdot\left(\frac{26!}{19!}\right)$"
Lizbeth	"5 a, e, i, o, u."	"Hay orden no hay repeticiones."	"$5\cdot\frac{26!}{19!}$"
Yessica	"5 vocales (a, e, i, o, u)."	Si.	"$5\cdot\frac{26!}{19!}$"
Montserrat	"5 → La letra inicial debe ser una vocal. ∴ tiene 5 posibilidades."	"A las 27 letras iniciales le restamos la vocal elegida 27 – 1 = 26 y los demás números van en forma descendente ya que no se pueden repetir."	"(5)(26)(25)(24)(23)(22)(21)(20)"
Sergio	Si.	Si.	"$5\cdot\frac{26!}{19!}$"
Paulina	"5 opciones xq son 5 vocales."	"27 – 1 → usaste una vocal = 26 letras."	"5 · 26 ·25 · 24 · 23 · 22 · 21 · 20"
Juan Pablo	"5 vocales."	Si.	"$5\cdot O_{26}^{7}$"
Andrea	Si.	"26 ya escogí una, 25 ya escogí 2, …"	"$5\cdot\frac{26!}{19!}$"
Bernardo	"Porque hay cinco vocales que se pueden poner en la primera casilla."	"en las demás se van acomodando las letras sobrantes."	"$5\cdot\frac{26!}{19!}$"
Estefany	"Vocales = 5 a, e, i, o, u."	"Tengo 27 letras – 1 (que ya puse) = 26."	"$5\cdot O_{26}^{5}$"
Ana	"Hay 5 vocales."	"comenzamos en 26 xq quitamos la vocal del principio."	"$5\cdot\frac{26!}{19!}$"
Luis Fernando	"Si se pide que comience con una vocal y hay 8 lugares."	"27 – 1 vocal ya tomada = 26 restantes", pero resuelve sin orden.	Incorrecta. "$\binom{5}{1}\binom{26}{7}$"

NOMBRE	COMIENZA CON VOCAL	DEMÁS LETRAS	SOLUCIÓN
Luis Miguel	"Se fijan las vocales. a, e, i, o, u."	Si.	Incorrecta, se equivoca al poner los lugares. "$5 \cdot \frac{26!}{18!}$"
Sonia	"$\binom{5}{1}$ n = 5 vocales, m = 1 lugar."	"27 – 5 = 22 consonantes. 8 lugares – 1 = 7 lugares. 22 consonantes + 4 vocales que no he usado."	"$5 \cdot \frac{26!}{19!}$"
Fabián	"5 comienza con una vocal."	"va disminuyendo porque no se pueden repetir."	"$5 \cdot \frac{26!}{19!}$"
Ginette	"5 a, e, i, o, u puede ir cualquier vocal."	"la segunda letra no puede ser la vocal que pusimos al principio, pero si puede ser una vocal (de las 4 restantes). $\therefore 27 - 1 = 26$, podemos poner cualquiera de las 26 letras restantes. La tercera letra no puede ser ni la primer vocal ni la segunda letra, pues no hay repetición. $\therefore 27 - 2 = 25$, … La octava letra no puede ser igual a las 7 primeras letras. $\therefore 27 - 7 = 20$."	"$\therefore 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 5$"
Fernanda	"$\binom{5}{1}$ voy a escoger 1 de 5 vocales."	"27 letras – 1 vocal q' tomé como primera = 26."	"$\therefore\ 5 \cdot (26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20)$"
Karen	"vocales = 5."	"n = hay = 26 quitando la primer vocal. m = las que quiero = 7, quitando la primera que ya está fija."	"$5 \cdot \frac{26!}{19!}$"

Inciso b)

NOMBRE	TOTAL MENOS NO VOCALES	ORDEN	SOLUCIÓN
Alma	No. "5! las ordenaciones de las vocales, 27^7 es la multiplicación de todas las posibilidades que hay en cada espacio para una letra y es 27 porque aquí sí hay repetición."	Si. "$OR_n^m = n^m$"	Incorrecta. "$27^7 \cdot 5!$"
Cristina	"Las que tienen vocales <u>menos</u> las que no tienen ninguna dan como resultado las que tienen al MENOS UNA."	Si.	"Total de palabras de 8 letras con repetición es $OR_{27}^8 = 27^8$ porque 27 letras pueden tomar 8 lugares. Palabras que no tienen vocales: Quitamos las 5 vocales a las 27 letras entonces $27 - 5 = 22$ letras. Como las letras se pueden repetir, entonces $OR_{22}^8 = 22^8 \therefore$ Las palabras de 8 letras que contienen al menos una vocal son: $27^8 - 22^8$."
Salvador	Si.	Si.	"$27^8 \Rightarrow$ No. total de palabras. Si se pueden repetir. $27 - 5 =$ 22 consonantes $22^8 \Rightarrow$ No. total de palabras sin vocales y con repetición. $27^8 - 22^8 \rightarrow$ Contienen al menos una vocal y se pueden repetir."
Diego	"Si las resto me van a dar las que tienen por lo menos 1 vocal."	Si.	"$27^8 - 22^8$"
Jessica	"a el total de las palabras que se pueden formar con repeticiones se le resta las palabras que no tengan ninguna vocal."	"como hay repeticiones y orden"	"$27^8 - 22^8$"
Rodrigo	Si.	Si.	"Al menos 1 vocal = $27^8 - 22^8$"

NOMBRE	TOTAL MENOS NO VOCALES	ORDEN	SOLUCIÓN
Gerardo	"Al total de palabras le restamos aquellas que no tengan vocales."	Si.	"Son 8 espacios en los cuales pueden ir las 27 letras diferentes. $27^8 \rightarrow$ es el total de palabras con o sin vocal." "Existen 5 vocales por lo que el total de letras que podemos utilizar es 22 ($27 - 5 = 22$). 22^8." "El total de palabras con al menos 1 vocal es de: $27^8 - 22^8$."
Marco Ahedo	"Al total de palabras formadas les restaré aquellas que no tienen vocales."	Si.	"Total de palabras = 27^8. Palabras que no tienen vocales = 22^8. $27^8 - 22^8$."
Jorge	"Si le restamos al total el número de palabras sin vocales nos dará el número de palabras con al menos una vocal."	"hay orden."	"$OR_{27}^{8} = 27^8$ ya que hay 27 letras y 8 lugares para colocarlas, hay orden y se permite repetición. sin vocales, $27 - 5 = 22$ letras restantes $OR_{22}^{8} = 22^8$ ya que hay 22 letras restantes y 8 lugares para colocarlas, hay orden y no hay repetición." Escribe no hay repetición, pero si la permite. "$(27)^8 - (22)^8$"
Andrea R.	No.	Si, pero usa permutaciones, no permite repeticiones.	Incorrecta. Resuelve por inclusión y exclusión.
Carlos G.	No, solo resuelve con una vocal.	"5 vocales", pero pone 7 lugares en lugar de 8.	Incorrecto. "$(5 \text{ x } 7) \cdot 26^7$"
Ida	"Para sacar los casos donde las palabras tengan por lo menos una vocal resto del total de palabras que se pueden formar, las palabras que no van a contener vocales."	Si.	"1) Casos cuando no hay ninguna vocal $27 - 5 = 22$ a mis 27 letras le quito las cinco vocales. Aquí hay repetición por lo que no tengo que ir quitando letras $\therefore 22^8$. 2) Todos los casos de palabras que se pueden formar igual que la anterior no voy quitando letras porque estas se pueden repetir. $\therefore 27^8$. 3) Esto es: $27^8 - 22^8$"

NOMBRE	TOTAL MENOS NO VOCALES	ORDEN	SOLUCIÓN
María Fernanda	Si.	Si.	“27^8 → total de palabras. 27 – 5 → quito las vocales ∴ me quedan 22 letras. 22^8. ∴ $27^8 - 22^8$ → al menos una vocal.”
Luis Andrés	Si.	“si orden si repetición.”	“total = 27^8 porque hay repetición. Palabras que no tienen vocal. Total = 27 – 5 vocales = 22. Ahora palabras sin vocal = 22^8. Letras que contengan alguna vocal = $27^8 - 22^8$.”
Carlos	“total – las que no tienen vocales.”	Si.	“Total $OR_{27}^{8} = 27^8$. Sin vocales 27 – 5 = 22 $OR_{22}^{8} = 22^8$. ∴ $27^8 - 22^8$.”
Pedro	“El número de palabras que tienen al menos una vocal es igual al número total de palabras posibles menos el número de las palabras que no contienen ninguna vocal.”	Si.	Incorrecta, escribe repetición pero usa fórmula sin repetición. “Número total de palabras: O_{27}^{8} son 27 letras en 8 espacios, hay orden y las letras se pueden repetir. Número de palabras sin vocales. Total de letras – total vocales = 22. O_{22}^{8} quitando las vocales quedan 22 letras en los mismos 8 espacios. Hay orden y repetición. Palabras con al menos una vocal: O_{27}^{8} - O_{22}^{8}.”
Manuel	“las letras q’ no son vocales → 22.”	Si.	“$27^8 - 22^8$”
Sebastián	No. “Hay 5 casos: desde cuando hay una vocal hasta cuando hay 5.”	“Cuando hay una vocal quedan 7 espacios con 22 posibilidades, cuando hay 2 vocales queda 6 espacios.”	Incorrecta, le falta ver los lugares de las vocales. “$\sum_{i=1}^{8} 22^{8-i}5^{i}$ ”

NOMBRE	TOTAL MENOS NO VOCALES	ORDEN	SOLUCIÓN
Antonio	"Otra manera más fácil de hacerlo es tomar el total de combinaciones y restar el caso en el que no tiene ninguna vocal."	Si, pero "tengo que dividir entre 8! porque son objetos idénticos."	Incorrecta. " $\frac{27^8}{8!}$ en los 8 espacios puedo poner cualquiera de las 27 letras sin importar repeticiones. Caso en el que no tienen vocales, 27 – 5 = 22, tomo las 22 letras en los 8 lugares. Divido entre 8! porqué no es una palabra diferente por tener una a antes que otra a o al reves $\frac{22^8}{8!}$. Total de casos con al menos una vocal $\frac{27^8}{8!}$ - $\frac{22^8}{8!}$."
Francisco	Si.	Si.	"Si las letras pueden repetirse, el total de formas estaría dado por 27^8 las formas que no contienen vocales son 22^8. Así, las formas que tienen al menos una vocal están dadas por $27^8 - 22^8$."
Marco Antonio	"si a estas restas las que no tienen vocales, quedan las que al menos tienen una."	Si.	"Caso en que no hay ninguna vocal 27 – 5 vocales = 22. Primero encontré los casos en que no hay vocales, esto es quitando a las 27 letras disponibles las 5 vocales y suponiendo que una de esas se usa en cada espacio o sea 22^8, el total de palabras independientemente de las restricciones es 27^8. Casos en que hay al menos una vocal $27^8 - 22^8$."
Lizbeth	Si.	"si hay repeticiones, si hay orden."	"Total = 27^8. No contienen vocal 27 letras – 5 vocales = 22 letras $\Rightarrow$ 22^8. $\therefore$ contienen al menos 1 vocal = $27^8 - 22^8$."
Yessica	Resuelve con inclusión y exclusión.	Si.	Incorrecta. No toma en cuenta que son 8 lugares.

NOMBRE	TOTAL MENOS NO VOCALES	ORDEN	SOLUCIÓN
Montserrat	Si, pero quita con una vocal al principio.	Si.	Incorrecta. “$27^8 – (5 \times 27^7)$”
Sergio	No.	Si.	Incorrecta. “$5 \cdot 27^7$”
Paulina	“1 vocal, 2 vocales, 3 vocales, 4 vocales, 5 vocales”, pero resuelve mal. También pone “al total le quito cuando no tiene ninguna”, pero resuelve mal.	Si.	Incorrecta.
Juan Pablo	Si.	Si.	“$27^8 \rightarrow$ total de casos. $22^8 \rightarrow$ casos en que no hay vocal. R = $27^8 – 22^8$”
Andrea	“al menos una = total – sin vocal.”	Si.	“$(27)^8$ = total porque cada “lugar” puede tener 27 “opciones” de letras y hay 8 lugares. Sin vocal = 22^8 porque cada lugar tiene 22 opciones (quitando las 5 de las vocales) y son 8 lugares. $\therefore$ = $27^8 – 22^8$.”
Bernardo	“todas las palabras posibles menos aquellas que no contengan vocales = palabras que contengan al menos una vocal.”	Si.	“27 letras – 5 vocales = 22 letras. 27 en cada uno de los 8 espacios = $27^8 \rightarrow$ todas las palabras – 22 en cada uno de los 8 espacios (sin vocales) = $22^8 \rightarrow$ palabras sin vocales. $27^8 – 22^8$.”
Estefany	“total – ninguna = al menos.”	“OR porque hay orden y repetición.”	“Total = $OR_{27}^{8} = 27^8$. n = 27 $\rightarrow$ lo que tengo. m = 8 $\rightarrow$ lo que tomo. Ninguna vocal = 27 letras – 5 vocales = 22 letras sobran. Ninguna = OR_{22}^{8} = 22^8. n = 22 $\rightarrow$ lo que tengo. m = 8 $\rightarrow$ lo que tomo. Al menos = $27^8 – 22^8$.”
Ana	Si.	“hay orden, repetición si.”	“OR_{27}^{8} = 27^8 = TOTAL, 22^8 = sin vocales. Al menos una = $27^8 – 22^8$.”

NOMBRE	TOTAL MENOS NO VOCALES	ORDEN	SOLUCIÓN
Luis Fernando	"Caso 1: una vocal. Caso 2: 2 vocales", etc.	No, resuelve con combinaciones.	Incorrecta.
Luis Miguel	Si.	Si.	"$OR_{27}^{8} = 27^8$ total. 27 – 5 = 22. $OR_{27}^{8} = 22^8$. Total de al menos una vocal = $27^8 - 22^8$."
Sonia	Si.	Resuelve el total con orden, pero para resolver sin vocales utiliza combinación con repetición.	Incorrecta. "sin restricciones $OR_{27}^{8} = 27^8$. Sin vocales 27 – 5 = 22 consonantes. n = 8 lugares, no orden, repetición $\binom{22+8-1}{8}$. Al menos una vocal $27^8 - \binom{29}{8}$."
Fabián	No, solo resuelve una vocal al principio.	Si.	Incorrecta. "$(5)(27)^7$"
Ginette	"Para obtener los casos en los que haya al menos una vocal, al total le resto los casos en los que no haya vocales."	Si.	"Como si hay repetición en cada posición puedo poner las 27 letras. $\therefore$ Total = OR_{27}^{8} = 27^8. Al total del abecedario le restamos las 5 vocales, 27 – 5 = 22, como sí hay repetición en cada lugar puedo poner las 22 letras. $\therefore$ $OR_{22}^{8} = 22^8$. Total – no vocales = $27^8 - 22^8$ = OR_{27}^{8} - OR_{22}^{8}."
Fernanda	"casos totales – casos s/ vocales = casos con al menos 1 vocal."	Si.	"27 – 5 = 22 sacando las vocales para q' no contenga ninguna: sin vocales = 22^8. Casos totales con repetición de letras = 27^8. $27^8 - 22^8$."
Karen	"Para saber cuántas palabras tienen el menos una vocal restamos al total los casos que no tienen ni una."	"orden si, repetición si. n = 27, m = 8."	"Sacamos el total de palabras s/ restricciones. $OR_{n}^{m} = 27^8$. Sacamos el caso en el que no haya vocales. n = 27 – 5 vocales = 22, m = 8. OR_{n}^{m} = 22^8. $27^8 - 22^8$."

Inciso c)

NOMBRE	SEPARAR VOCALES DE CONSONANTES	VOCALES	CONSONANTES	SOLUCIÓN
Alma	No. "27. 8 – 1 = 7 $\Rightarrow$ Es el número de veces que aparecen las 27 letras. Es el número al q' se va a elevar el 27."	No.	No.	Incorrecta. "$\frac{27^8}{27} = 27^7 \cdot 1$"
Cristina	"27 – 5 vocales = 22 letras PORQUE SÓLO DEBE TENER UNA VOCAL."	"<u>Sólo</u> queremos <u>una</u> vocal, tenemos que elegir una de las 5, así $\binom{5}{1}$ pero ésta puede tomar 8 lugares distintos, así $\binom{5}{1} = 5 \therefore 5^8$." Mal, es producto.	"Así esas 22 letras pueden tomar siete lugares distintos pues en uno ya tenemos una vocal, de esta forma $OR_{22}^{7} = 22^7$."	Incorrecta. "$\therefore$ Palabras de 8 letras con <u>sólo</u> una vocal son $5^8 \cdot 22^7$."
Salvador	Si.	" vocal 5 pero hay 8! $\rightarrow$ formas de acomodar a la vocal." No es factorial.	"ya que hay repetición."	Incorrecto. "$5 \cdot 22^7 \cdot 8!$"
Diego	Si.	"Eligo una vocal de 5, la cual puede ir en 8 espacios diferentes."	"Eligo una palabra de 7 letras consonantes 22^7."	"$22^7 \cdot 40$"
Jessica	"total – vocales."	"5 vocales ya que puedes escoger a, e, i, o, ó u, existen 8 lugares donde puede ir la vocal."	"como se puede repetir no me importa si en el lugar 2 hay una misma al lugar 3."	"$22^7 \cdot 5 \cdot 8$"

NOMBRE	SEPARAR VOCALES DE CONSONANTES	VOCALES	CONSONANTES	SOLUCIÓN
Rodrigo	"27 letras – 5 vocales = 22 consonantes."	"5 → solo una vocal. La vocal en el 1er lugar, segundo lugar, …, 8vo lugar."	"22 21 20 19 18 17 16"	"$8\left[5\left(\frac{22!}{15!}\right)\right]$"
Gerardo	Si.	"De los 8 espacios uno debe ser vocal y los otros 7 no, por lo que ponemos en cualquiera de los 8 espacios las 5 opciones para las vocales." Bien, pero en el resultado final no pone el 8.	"en el resto ponemos las letras que no son vocales (22)."	Incorrecta. "$22^7(5)$"
Marco Ahedo	Si.	"Ahora acomodaré las vocales – x – x – x – x – x – x – x – Las x representan las consonantes ya acomodadas. Quiero acomodar <u>solo 1</u> letra en ocho espacios y tengo cinco letras posibles para hacerlo. $\binom{8}{1}5$."	"Acomodaré las consonantes primero. Tengo 7 lugares para 22 consonantes. 22^7, pues se pueden repetir."	"$40(22^7)$"

NOMBRE	SEPARAR VOCALES DE CONSONANTES	VOCALES	CONSONANTES	SOLUCIÓN
Jorge	Si.	"Letra vocal. Para escoger el lugar de la letra utilizamos O_8^1 = 8 ya que tenemos 8 lugares y una letra, hay orden pero no repetición. Para escoger la vocal usamos O_5^1 = 5 ya que tenemos 5 vocales y un lugar, hay orden no repetición." Sale bien pero no hay orden.	"No vocales. 27 – 5 = 22 letras no vocales. 8 – 1 = 7 lugares restantes. $OR_{22}^7 = (22)^7$ ya que tenemos 22 letras no vocales y 7 lugares restantes hay orden y repetición."	"$(22)^7 \cdot 8 \cdot 5$"
Andrea R.	"27 – 5 vocales = 22"	"5 → porque hay 5 vocales." Faltan 8 lugares.	No quita un lugar.	Incorrecta. "$OR_{22}^8 = \left[\frac{22!}{14!}\right]5$"
Carlos G.	"alfabeto 22 = 27 – 5 vocales."	"5 vocales", pero pone 7 lugares en lugar de 8.	Si.	Incorrecta. "$(5x7) \cdot 22^7$"
Ida	"27 – 5 = 22 → quito todas las vocales. 8 – 1 = 7 → quito el lugar donde pueden quedar las vocales."	"5 puede ir a e i o u, permuto las 5 vocales." Mal, no es permutación.	Si.	Incorrecta. "$22^7 \cdot 5!$"
María Fernanda	No.	"27 – 4 = 23 quito 4 vocales $\Rightarrow 23^8$." Mal.	"27^8 → total de palabras."	Incorrecta. "$27^8 - 23^8$ → exactamente una vocal."

NOMBRE	SEPARAR VOCALES DE CONSONANTES	VOCALES	CONSONANTES	SOLUCIÓN
Luis Andrés	No.	"puedo meter cualquiera de las 5 vocales o sea escoger 1 de 5 = $\binom{5}{1}$ = 5."	"Total letras = 27 – 4 vocales = 23 y me queda una vocal aseguro una vocal = 23^8." Mal, se pide exacto y además deja 8 lugares.	Incorrecta. "$23^8 \cdot 5$"
Carlos	"27 – 5 = 22"	"5 a, e, i, o, u. pueden tener 8 lugares."	"OR_{22}^{7}"	"$(40)(22^7)$"
Pedro	"# letras – # vocales = 22"	"$\binom{5}{1}$ 5 vocales escojo 1. P_8 pues la vocal puede estar en cualquiera de los 8 espacios y las consonantes también, cambiando la palabra en cada caso. Es permutación pues hay orden y no repetición (al permutar la palabra ya hecha)." Mal, son 8 lugares.	"OR_{22}^{7} quedan 22 letras quitando las vocales, existe orden y hay repetición."	"Se multiplica porque se tienen que cumplir las dos condiciones. $\binom{5}{1} \cdot 22^7 \cdot 8!$"
Manuel	Si.	"Hay 5 letras para un lugar."	"22 letras para 7 lugares."	Incorrecta. "$\binom{5}{1}(22)^7$"
Sebastián	Si.	Si.	Si.	"$\binom{5}{1}(22^7)$ (8)"

NOMBRE	SEPARAR VOCALES DE CONSONANTES	VOCALES	CONSONANTES	SOLUCIÓN
Antonio	Si.	“Escojo la vocal → 5.”	“27 – 5 = 22. Divido entre 8! Otra vez para no contar dos veces eso que es igual, por ejemplo: si tuviera 3 espacios y dos q: q_1 a q_2 = q_2 a q_1, se divide entre 8! Para evitar contarlas dos veces.”	Incorrecta. “$\frac{5 \cdot 22^7}{8!}$” En el inciso b) la contestó correctamente.
Francisco	“27 – 5 = 22 consonantes.”	“$\binom{5}{1}$ de las 5 vocales tomo 1.”	Si.	Incorrecta, le faltó el lugar de la vocal. “$22^7 \cdot 5$”
Marco Antonio	“Alfabeto ahora es de 22 letras.”	“Vocal = U, U = 5 (5 posibilidades)”	“Acomodé el alfabeto sin vocales (22) en 7 espacios con repetición.”	“22^7, esto lo multipliqué por las 5 posibilidades de vocales y por los 8 espacios donde esta puede entrar. (22^7) (5) (8)”
Lizbeth	“27 – 5 vocales = 22”	“Fijamos una vocal → 5. Pero la vocal puede ocupar 8 lugares.”	Si.	“$40 \cdot 22^7$”
Yessica	Si.	Si, pero pone 9 lugares en lugar de 8.	Si.	Incorrecta. “$(22^7)\binom{9}{1}$ (5)”
Montserrat	“27 letras – 1 vocal = 26 → todas las restantes. Son 22 ya que si se puede repetir.” Mal, pues resuelve con 26.	“5, 1 vocal → a, e, i, o, u.” Le faltan los 8 lugares.	Si.	Incorrecta. “5 x 26^7”

NOMBRE	SEPARAR VOCALES DE CONSONANTES	VOCALES	CONSONANTES	SOLUCIÓN
Sergio	Si.	Si, pero le faltan los 8 lugares.	Si.	Incorrecta. “$5 \cdot 22^7$”
Paulina	Si.	“5 → 1 vocal”, pero le faltan los 8 lugares.	“nada mas quieres una vocal entonces 27 – 5 = 22”	Incorrecta. “$22^7 \cdot 5$”
Juan Pablo	“22 → quito las vocales.”	“1”, solo permite una vocal y en el primer lugar.	Si.	Incorrecta. “$22^7 \cdot 8$”
Andrea	Si.	“como la vocal puede ir en cualquiera de los lugares se multiplica por 8”, pero solo permite una vocal.	“porque al fijar una vocal se tiene nada mas una opción en un lugar. Se quitan las demás vocales (22 letras) que son las opciones p/ los lugares restantes que son 8.”	Incorrecta. “$(22)^7 8$”
Bernardo	Si.	“cinco vocales que se pueden colocar por ocho espacios disponibles.”	“por 7 veces las demás consonantes disponibles.”	“$(5)\ (8)\ (22^7)$”
Estefany	“Tengo 27 letras – 5 vocales = 22 consonantes. 8 lugares – 1 (el de la vocal) = 7 sobran.”	“Para las 5 vocales tengo 5 posibilidades: a, e, i, o, u. La vocal puede estar en 8 lugares, para los lugares no hay orden ni repetición.”	“Para las consonantes tengo 7 lugares, hay repetición y me quedan 22 letras.”	“$8 \cdot 22^7 \cdot 5$”
Ana	“demás letras.”	“Hay 5 posibilidades o 5 vocales a elegir. 8 lugares para ubicar la vocal.”	“orden si, repetición si”, pero utiliza O en lugar de OR.	Incorrecta. “$5 \cdot 8 \cdot \frac{22!}{15!}$”

NOMBRE	SEPARAR VOCALES DE CONSONANTES	VOCALES	CONSONANTES	SOLUCIÓN
Luis Fernando	Si.	"se puede escoger dentro de 5 vocales", pero le faltan los 8 lugares.	"Las 22 consonantes se pueden repetir", pero resuelve con combinación con repetición.	Incorrecta. "$\binom{5}{1}\binom{27}{8}$"
Luis Miguel	"27 – 5 = 22 se quitan las vocales."	"$\binom{5}{1}$ una vocal de las cinco. $\binom{8}{1}$ se puede meter en alguno de los 8 espacios q' quedan."	"OR_{22}^{7}"	"Total $22^{7}\binom{5}{1}$ $\binom{8}{1}$"
Sonia	"27 – 5 = 22 consonantes."	Si.	"n = 22, m = 7", pero usa combinación con repetición.	Incorrecta. 8 "(5) $\binom{28}{7}$"
Fabián	Si.	"Contiene una vocal que se puede escoger entre a, e, i, o, u", faltó los 8 lugares.	"Nada más es una vocal entonces se le resta a 27 las 5 vocales."	Incorrecta. "$(5)(22)^{7}$"
Ginette	"27 – 5 = 22 letras restantes / consonantes."	"5 → a, e, i, o, u."	"Como sólo necesitamos una vocal, al ponerla restamos las 5 vocales al total de las letras para que no tengamos 2 vocales. Como sí se puede repetir, en la segunda posición podemos poner cualquiera de las 22 consonantes, como también en todas las demás posiciones."	"$\therefore\ 22^{7}$ (5) (8)"

NOMBRE	SEPARAR VOCALES DE CONSONANTES	VOCALES	CONSONANTES	SOLUCIÓN
Fernanda	"27 – 5 = 22"	"5 → puedo tomar cualquiera de 5 vocales. 8 → pues la vocal puede estar en cualquiera de los 8 lugares."	"22^7 → demás letras."	"$40 \cdot 22^7$"
Karen	"Fijamos una vocal, por lo cual de los 8 lugares solamente nos quedan 7 = m. Y como solo queremos una vocal, la que ya fijamos, restamos las vocales al alfabeto 27 – 5 = 22 = n."	"Pero esa vocal puede ocupar 8 lugares dif. ∴ se multiplica por 8. Y además ∃ 5 vocales."	"$OR_n^m = OR_{22}^7 = 22^7$"	"Finalmente $\Rightarrow 22^7 \cdot 8 \cdot 5$."

Inciso d)

NOMBRE	LETRAS "U" Y "O"	LETRAS RESTANTES	SOLUCIÓN
Alma	"U U U O O 25 24 23. Al 27 se le restan las 2 letras que aparecen "u" y "o" y a las 8 letras o espacios se le quitan los q' ocupan "u" y "o" = 3u y 2o, 8 – 5 = 3."	"27 – 2 = 25, 8 – 5 = 3" Hace la ordenación correcta.	Incorrecta, le faltan la U y la O. "$\frac{25!}{22!}$"
Cristina	"Tres letras U con 8 posibles lugares $OR_n^m = 3^8$. Dos letras O con 5 posibles lugares $OR_n^m = 2^5$." Bien los índices pero era sin orden.	"y sólo me quedan 3 lugares en los que puedan ir las demás letras sin repetición. 27 letras – la U – la O = 25 letras. Como no se pueden repetir, entonces U O U O U 25 24 23 $O_n^m = O_{25}^3$."	Incorrecta. "$3^8 \cdot 2^5 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 23$"
Salvador	"5! formas pueden ser acomodadas las letras."	"Restan 27 – 2 → letras."	Incorrecta. "$5! \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$"

NOMBRE	LETRAS "U" Y "O"	LETRAS RESTANTES	SOLUCIÓN
Diego	"Para los 5 espacios restantes, es una palabra de 5 letras con 3 repeticiones de una y 2 de otra, ent. $\frac{5!}{3!2!}$."	"Para las demás letras solo las puedo colocar en 3 espacios cualquiera, que serían $\binom{8}{3}$, y se podrían ordenar 25 24 23, porque no se pueden repetir y si tienen orden."	"la respuesta completa $\binom{8}{3}\cdot\frac{25!}{22!}\cdot\frac{5!}{3!2!}$."
Jessica	"u u u o o las ordeno como quiera son 10 maneras. Permutación distinguible $\frac{5!}{3!2!}=10$." Mal.	"25 x 24 x 23 pues no se pueden repetir."	Incorrecta. "10 · 25 · 24 · 23"
Rodrigo	Mal, las toma juntas.	"27 completo – 2 u y o = 25. Casillas 8 total – 5 lugares de u y o = 3." Resuelve bien los índices pero sin orden.	Incorrecta. "$\binom{25}{3}\binom{5}{2}$"
Gerardo	"8 espacios de los cuales 5 están ocupados, 3 por las "u" y 2 por las "o". Colocamos un 1 de una opción por cada letra en el espacio que sea." Mal, pueden ir en cualquier lado.	"En los espacios restantes colocamos las letras sobrantes (27 – 1 – 1 = 25). Para estos se reducen en uno por cada espacio para no repetir ninguna."	Incorrecta. "25(24)(23)"
Marco Ahedo	"Acomodaré las cinco letras (3u, 2o) en los ocho lugares. Las 3 u no importa el orden en que las meta en los ocho lugares → combinación sin orden. Las 2 ó no importa el orden en que las meta en los ocho lugares → combinación sin orden." Mal, para la o ya nada mas tiene 5 lugares.	"Se acomodan como 25 24 23 aun no tomando en cuenta el orden en la palabra." "Las otras 3 letras sí importa el orden en que las meta $\frac{8!}{5!}$ → ordenación con orden." Esto último está mal.	Incorrecta. "$\left(\frac{8!}{5!3!}\right)\left(\frac{8!}{6!2!}\right)\left(\frac{8!}{5!}\right)(25)\ (24)(23)$"

NOMBRE	LETRAS "U" Y "O"	LETRAS RESTANTES	SOLUCIÓN
Jorge	"y para las o's y u's utilizamos perm. distinguible ya que tenemos objetos idénticos. $\frac{5!}{2!3!}$" Mal.	"27 – 2 = 25 letras no u ni o. 8 – 5 = 3 lugares. Para los 3 lugares restantes usamos O_{25}^{3} ya que tenemos 25 letras y 3 lugares hay orden no repet."	Incorrecta. "$\frac{25!}{22!}\cdot\frac{5!}{2!3!}$"
Andrea R.	"Hay 9 lugares para u y o, son combinaciones. $\binom{9}{3}$ → por las 3 u's. $\binom{9}{2}$ → por las 2 u's." Mal, no son 9 lugares.	"27 – 2 porque ya las usamos. Total 25 y quedan 3 lugares. O_{25}^{3}"	Incorrecta. "$\left[\frac{25!}{22!}\right]\binom{9}{5}\binom{9}{2}$"
Carlos G.	"27 – 2 = 25"	Si.	Incorrecta. "4 · 3 · P(25,3) = 12 · $\frac{25!}{22!}$"
Ida	"las u's y las o's ya están fijas en la palabra."	"27 – 2 = 25 quito la u y la o para que ya no se repitan."	Incorrecta. "25·24·23"
María Fernanda	"lugares u → $\binom{8}{3}3!$, 3! orden de u. lugares o → $\binom{8}{3}2!$, 2! orden de o." Mal, no hay orden de u y o, y no resta lugares.	"8 letras – 3u – 2o ⇒ 5 letras a escoger y 27 – 2 = 25."	Incorrecta. "25· 24· 23· 3! ·2! $\binom{8}{3}\binom{8}{2}$"
Luis Andrés	"Falta escojer donde se ponen las 3 u's y las 2 o's. O sea x – x – x – x 4 espacios. Pero tambien como son 5 letras las que estoy poniendo puedo hacer ej. uuu – oo - -. Las letras pueden ir juntas entonces 4 espacios + 4 espacios que pueden ocupar las 5 letras es como escojer 5 de 8 espacios o sea $\binom{8}{5}$."	"me quedan 3 espacios. Los tres espacios los puedo poner como las 27 – 2 letras que tengo o sea o y u porque no hay repetición. 25 24 23." Confuso.	Incorrecta, no separa u de o. "$\binom{8}{5}\cdot$ 25 ·24 ·23"

NOMBRE	LETRAS “U” Y “O”	LETRAS RESTANTES	SOLUCIÓN
Carlos	“lugares de u $\Rightarrow \binom{8}{3}$, lugares de o $\Rightarrow \binom{8}{2}$.” Mal, no resta lugares.	“27 – 1 – 1 = 25”	Incorrecta. “$\binom{8}{3} \cdot \binom{8}{2} \cdot (25) \cdot (24) \cdot (23)$”
Pedro	“UUU OO --- Estos 5 espacios ya están ocupados, entonces sólo hay una opción para escogerlos.” Mal, las deja fijas.	“Quedan 25 letras quitando la U y la O, en tres lugares, hay orden y no hay repetición.”	Incorrecta. “$\left[1 \cdot O_{25}^{3}\right] P_8 \rightarrow$ pues las letras pueden estar en cualquiera de los 8 lugares, cambiando la palabra.”
Manuel	“3 u’s, 2 o’s”	“25·24·23”	Incorrecta. No pone solución.
Sebastián	No.	No.	Incorrecta. “8 letras, 3’s u’s y 2 o’s por lo que tenemos que descalificar las repeticiones. Son elementos iguales. Tenemos 24 letras diferentes. $\frac{24!}{3!2!(24-8)!}$.”
Antonio	“Tanto las 3U como las 2O y los otros 3 números pueden quedar en cualquiera de los 8 espacios.”	“27 – 2 = 25 resto U y O del total. Me quedo con las 25 letras restantes. 8 – 5 = 3 los espacios que me quedan.”	Incorrecta. “$x_1 + x_2 + x_3 = 8$ $x_1 \leq 3$, son las U, $x_2 \leq 2$, son las O, $x_3 \leq 3$ son las otras. Total $\frac{3!2!\left(\frac{25!}{22!}\right)}{8!}$.”
Francisco	Toma las 8 letras y hace permutación distinguible.	“Para las letras x, y, z no se puede tomar la “u” y la “o”.”	Incorrecta. “$25 \cdot 24 \cdot 23 \left(\frac{8!}{3!2!}\right)$”

NOMBRE	LETRAS "U" Y "O"	LETRAS RESTANTES	SOLUCIÓN
Marco Antonio	"Se multiplican por (3!) 3 U a distribuir y (2!) dos O's a distribuir por 8 lugares donde puede ir cada una. Se divide por 3! y 2! para evitar la repetición de $u_1\ u_2\ u_3 = u_2\ u_1\ u_3$ e igual con O's."	"25 · 24 · 23 son las letras del alfabeto menos U y O que no se repiten por eso son 25 · 24 · 23."	Incorrecta. "((25 · 24 · 23) (8) (3!) (2!)) / 2! 3!"
Lizbeth	"Tenemos 5 lugares para O y U. No hay orden $\binom{5}{2}=10$." Mal, pues U es diferente de O.	"27 letras – 2 → o, u = 25."	Incorrecta. "25 · 24 · 23 · 10"
Yessica	Mal, toma 9 lugares para u y 9 para o.	"27 – 2 = 25"	Incorrecta. "$\binom{9}{3}$ $\binom{9}{2}$ (25) (24) (23)"
Montserrat	"u u u 3! o o 2!" Mal.	"27 letras – 2 (u o) = 25 y es en forma descendente (25, 24, 23) ya que no se pueden repetir."	Incorrecta. "(25) (24) (23) (3!) (2!)"
Sergio	"u u u o o ---." Mal, pues las deja fijas.	Si.	Incorrecta. "$\frac{25!}{22!}$"
Paulina	"u u u o o --- nada mas tienes una opción." Mal, pues las deja fijas.	"27 – 2 u y o = 25", pero permite repetición.	Incorrecta. "25 25 25"
Juan Pablo	"u u u o o - - -", pero resuelve como permutación distinguible de 8 objetos.	"25! 24! 23!" Mal, pues pone factorial.	Incorrecta. "25! 24! 23! · $\left(\frac{8!}{3!2!}\right)$, 8! → 8 lugares en los que puedo poner cada letra, 3! → repetición de U, 2! → repetición de O."
Andrea	"Fijo 3 u y 2 o (hago un paquete) $\Rightarrow$ Hay (8 – 5) = 3 lugares libres. Como las u's y o's pueden ir en cualquier lugar $\binom{8}{5}$."	Si.	Incorrecta. "$\binom{8}{5}$ $\frac{25!}{22!}$"

NOMBRE	LETRAS “U” Y “O”	LETRAS RESTANTES	SOLUCIÓN
Bernardo	No las usa.	Si.	Incorrecta. “25 24 23”
Estefany	“U=3, O=2.”	“27 – 2 (u y o) = 25.”	Incorrecta. “25 + 5 = 30. Permutación distinguible pues hay orden y objetos idénticos. $\frac{30!}{3!2!}$.”
Ana	“3 letras u, 2 letras o.”	“25 · 24 · 23 → demás letras sin repetición.”	Incorrecta. “8 · [3 · 2 (25 · 24 · 23)]”
Luis Fernando	“8 – 3 U’s – 2 O’s = 3 lugares sobran.”	“No se pueden repetir. 27 – 2 → u y o = 25 restantes.” Mal, resuelve con combinación.	Incorrecta. “$\binom{25}{3}$”
Luis Miguel	“8 lugares se escogen 3 para u $\binom{8}{3}$ sobran 5 y de esos se escogen 2 $\binom{5}{2}$.”	“27 – 2 = 25 no incluyo la u y la o. 8 – 5 = 3 se quitan las q’ ya están establecidas.”	“$\binom{8}{3}\binom{5}{2}$ $\frac{25!}{22!}$”
Sonia	“3u, 2º, no repetir, no orden.” Mal, tiene orden.	“27 – 2 = 25 letras. 8 – 5 = 3 lugares.”	Incorrecta. “(3) (8) (2) (5) $\binom{25}{3}$”
Fabián	“5 = 2u + 2o” Mal, pone 5!	Si.	Incorrecta. “(25) (24) (23) (5!)”
Ginette	“U = 3, cada u puede estar en 8 posiciones. $\therefore$ $\frac{3^8}{3!}$ pues entre las “u” no hay orden. O = 2, cada o puede estar en 8 posiciones. $\therefore$ $\frac{2^8}{2!}$ pues entre las “o” no hay orden.”	“Las demás letras: Al total les restamos la “u” y la “o” para que no haya más de 3 “u” ni más de 2 “o”. 27 – 2 = 25. Sólo podemos tomar 3 letras más pues cinco ya están tomadas por las “u” y las “o” para formar la palabra. $\therefore$ como no hay repetición O_{25}^{3} = 25 (24) (23) (8), 8 → posiciones que puede tomar cada letra, porque aunque sólo podamos tomar 3 letras más, esas letras las podemos poner en 5 lugares cada una.”	Incorrecta. “$\frac{3^8}{3!}$ $\frac{2^8}{2!}$ (25) (24) (23) (8)”

NOMBRE	LETRAS “U” Y “O”	LETRAS RESTANTES	SOLUCIÓN
Fernanda	“27 – 2 → u y o = 25.” Divide entre 3!2! evitar los casos en que U y O cambien entre si tomando palabras iguales.” Mal.	“25 · 24 · 23 pues demás no se pueden repetir.”	Incorrecta. “$\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!2!}$”
Karen	“Y para las 3 “U” y las 2 “O” tenemos 5 elementos que pueden ocupar 5 lugares. $\therefore$ $O_n^n = P_n = P_5 = 5!$” Mal.	“Ya tenemos 3 “U” y 2 “O” $\therefore$ nos quedan para escoger 3, pero como no se pueden repetir 27 – 2 (que escogimos) = 25 = n, m = 3 que queremos. Orden si, repetición no. $O_n^m = O_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23$.”	Incorrecta. “25 · 24 · 23 · 5!”

BIBLIOGRAFÍA

Asiala, M., Brown, A., Kleiman, J., and Mathews, D. (1998). The Development of Students' Understanding of Permutations and Symmetries. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 3 (1), 13 - 43.

Baker, B., Cooley, L., and Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31 (5), 557 – 578.

Biggs, N. L. (1979). The Roots of Combinatorics. *Historia Mathematica,* 6 (2), 109 - 136.

Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F. y Tomás, F. (1979) *Álgebra superior*. México. Ed. Trillas.

Dubinsky, E. (1996). Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria. *Educación matemática,* 8 (3), 24 - 45.

Dubinsky, E. (1997). On Learning Quantification. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* 16 (2/3), 335 - 362.

Dubinsky, E. (1987). Teaching Mathematical Induction I. *Journal of Mathematical Behavior,* 6 (1), 305 - 317.

Dubinsky, E., Elterman, F., and Gong, C. (1988). The Student's Construction of Quantification. *For the Learning of Mathematics*, 8 (2), 44 - 51.

Dubinsky, E. and Fenton, W. (1996). *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL.* Nueva York. Springer – Verlag.

Dubinsky, E. and Lewin P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness*. The Journal of Mathematical Behavior,* 5 (1), 55 - 92.

Dubinsky, E. and McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study,* Kluwer Academic Publishers, pp. 273 – 280.

English, L. (1993). Children's Strategies for Solving Two- and Three- Dimensional Combinatorial Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3), 255 – 273.

Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas discreta y combinatoria*. *Una introducción con aplicaciones.* E.U.A. Addison-Wesley Iberoamericana.

Kolman, B., Busby, R. y Ross, S. (1997). *Estructuras de matemáticas discretas para la computación.* México. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A.

Niven, I. (1995) *Matemática de las opciones o cómo contar sin contar*. Argentina. Talleres Gráficos EDIPUBLI S.

Piaget, J. y García R. (1996). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México. Siglo Veintiuno Editores.

Reyes, A. (2005) *Álgebra superior*. México. Ed. Thomson.

Smith, R. *A Collaborative Learning Constructivist Approach to Abstract Algebra using ISETL.* U. S. A. Miami University.

Todhunter, I. (1865). *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Inglaterra J. C. Clay at the University Press.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática* 17, (1), 5 - 31.

Trigueros, M. y Oktac, A. (2005). La Théorie APOS et l'enseignement de l'algebre linéaire. *Annales de didactique et de sciences cognitves. Revue internationale de didactique des mathematiques,* 10, 157 – 176.