



**Instituto Politécnico Nacional
Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN**



“RECURSOS NEMOTÉCNICOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS”

**Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa**

PRESENTA:

Hugo Alfredo Carrillo Serrano

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Javier Lezama Andalón.

México, D. F., Mayo de 2006.



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

SEP-14

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 31 del mes de mayo del 2006 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de **CICATA LEGARIA** para examinar la tesis de grado titulada:

Recursos nemotécnicos de las funciones trigonométricas básicas

Presentado por el alumno:

Carrillo
Apellido paterno

Serrano
materno

Hugo Alfredo
nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	1	9	9
---	---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalon

Dr. Apolo Castañeda Alonso



CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada
del Instituto Politécnico Nacional

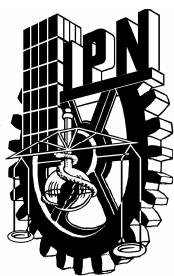
Dra. Gisela Montiel Espinosa

M. en C. Silvia Guadalupe Maffey García

Dra. Rocío Alejandra Muñoz Hernández

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México, D.F. el día 31 del mes Mayo del año 2006,
el (la) que suscribe Hugo Alfredo Carrillo Serrano alumno (a) del
Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número
de registro A030199 adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y
Tecnología Avanzada, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo
de Tesis bajo la dirección de Dr. Javier Lezama Andalón y cede los derechos
del trabajo titulado RECURSOS NEMOTÉCNICOS DE
LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BASICAS al Instituto
Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o
datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede
ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección hcarrillo@ipn.mx. Si el permiso
se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente
del mismo.

Hugo Alfredo Carrillo Serrano
Nombre y firma

Índice

Resumen	1
Abstract	2
Glosario	3
Introducción	4
Capítulo I La Matemática en la escuela	
Marco contextual:	
Del modelo educativo de la institución	9
Fundamentos teóricos del modelo educativo	25
Las prácticas matemáticas explícitas	35
Las prácticas matemáticas no explícitas	38
Capítulo II Una visión antropológica	42
La antropología didáctica	44
La antropología de los saberes	46
¿De dónde provienen los saberes enseñados?	48
¿Qué es una actividad Matemática?	50
¿Cuándo se hacen matemáticas?	52
¿Cómo se definen y estructuran las matemáticas?	55
Comentarios finales del capítulo	59
Capítulo III Una visión Social de la Nemotecnia	62
Nemotecnia en la sociedad	62
Clasificación de la nemotecnia	65
Nemotecnia como estrategia de aprendizaje	70
Nemotecnia en la matemática	74
Capítulo IV Recurso nemotécnico para las derivadas	84
Tratamiento escolar de las derivadas de las funciones trigonométricas	87
Derivadas de las funciones trigonométricas seno y coseno	89
Recurso nemotécnico de las derivadas de las funciones básicas seno y coseno	93

Aplicación del recurso	97
Análisis de las entrevistas	101
Conclusiones del capítulo	110
Capítulo V Conclusiones Finales	113
El escenario escolar	113
En cuanto a la nemotecnia	116
Bibliografía	121

RESUMEN

Abordamos el tema de la nemotecnia, que en su versión escolar es conocida como recursos nemotécnicos, y que pocas veces son documentados sus efectos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para efectos de investigación, tomamos como caso de estudio un recurso en particular que se detectó en el *Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de la Región Carbonífera* y que se denomina recurso nemotécnico de las derivadas trigonométricas seno y coseno.

La investigación se describe en cinco capítulos, en el primero se presenta una visión de las características del entorno actual de la institución, es decir el marco contextual, iniciando por los lineamientos de trabajo marcados por la Dirección General de Institutos Tecnológicos (DGIT). Se incluye un estudio de las características de las teorías de aprendizaje involucradas en el modelo educativo operante, del cual se desprende la noción de aprendizaje (*paradigma educativo*) que determina las etapas del proceso educativo. Se definen las prácticas matemáticas explícitas y las no explícitas.

En el capítulo dos, se muestra la visión antropológica de Yves Chevallard, pues fundamenta, partiendo de la realidad, los procesos educativos y sus implicaciones en el aprendizaje.

Las definiciones que adoptamos de nemotecnia y sus aplicaciones, son estudiadas en el capítulo tres. En este capítulo se definen algunas de sus aplicaciones más comunes, beneficios y limitantes así como las adaptaciones que sufre en casos particulares. Se incluyen también textos de matemáticas que evidencian el uso de la nemotecnia como una práctica aceptada.

El recurso nemotécnico específico que presentamos es conocido desde hace cuatro años en la institución y se sabe de su uso. No se realiza un estudio estadístico, se trata de un estudio de casos que permite documentar las experiencias de los sujetos al utilizar este recurso. Todo esto en el cuarto capítulo.

El último capítulo contiene las conclusiones y observaciones finales de la investigación.

ABSTRACT

We approached the subject of mnemonics, that in its scholastic version is well-known as mnemonic resources, and that not very often the effects are documented in the education-learning process. For investigation effects, we took a case study from a particular resource that was detected in the *Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de la Región Carbonífera* and that is denominated trigonometrical mnemonic resource from the derived of the sine and cosine.

The investigation is described in five chapters. In the first one appears a vision of the characteristics of the present surroundings of the institution. It is to say in context, initiating by the forms of working, marked by the Dirección General de Institutos Tecnológicos (DGIT). A study of the characteristics of the involved theories of learning in the operating educational model is included, from which the learning notion is taken (educational paradigm) that determines the stages of the educational process.

Chapter two is about the anthropological vision of Yves Chevallard, because it is based on the educational reality, its process and its implications in the learning.

The definitions that we adopted of mnemonics and its applications are studied in chapter three. In this chapter some of mnemonics resources more common are defined, its effects and limits as well as the adaptations that suffer in particular cases. Texts of mathematics are also included that demonstrate the use of mnemonics like an accepted practice.

The specific mnemonic resource that we presented has been known for four years in the institution and we known it is in use. A statistical study is not made. It is a study of cases that allows us to document the experiences of each of the subjects when using this resource. All this is found in the fourth chapter.

The last chapter contains the conclusions and final observations of the investigation

GLOSARIO

COSNET Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica

DGIT Dirección General de Institutos Tecnológicos

ITESRC Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de la Región Carbonífera

Nemotécnia. Arte de la memorización

PME Prácticas matemáticas explícitas

PMNE Prácticas matemáticas no-explicitas

SNIT Sistema Nacional de Tecnológicos Descentralizados

ZDP Zona de Desarrollo Próximo



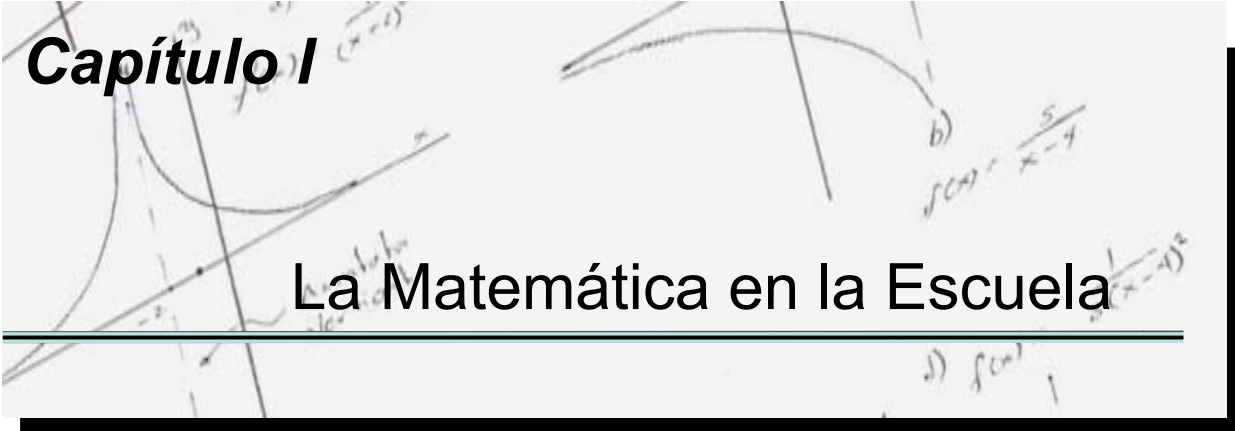
Introducción

Los fenómenos didácticos ligados con el aprendizaje de las matemáticas en la escuela y donde se pretenda aprender o enseñar matemáticas, constituyen el área de estudio de la Matemática Educativa. Existen numerosas formas o técnicas de estudio para la aprehensión de saberes; una de las más populares son los recursos nemotécnicos.

En el estudio de objetos matemáticos se han incluido estas técnicas, sin embargo no están del todo documentadas y en ocasiones no se reconocen o se confunden creando en el alumno una idea errónea del objeto matemático. No se puede negar la existencia de la nemotecnia en la escuela, pero sus efectos no están documentados, por ello que es difícil determinar su efectividad en el proceso de aprendizaje-enseñanza.

Se realizó una investigación que trata del estudio de los efectos de la aplicación de la nemotecnia en un tema específico de las matemáticas: *las derivadas de las funciones trigonométricas básicas seno y coseno* y aportar elementos que ayuden a responder la interrogante: ¿Puede un recurso nemotécnico ser parte de una estrategia para fomentar el aprendizaje de un contenido matemático?

Es posible iniciar una nueva línea de investigación, para regular las formas de aplicación y de operación de los recursos nemotécnicos, por lo cual es necesario documentar sus apariciones y efectos en los escenarios escolares.



Capítulo I

La Matemática en la Escuela

El estado de Coahuila se encuentra en el centro de la parte septentrional de la República Mexicana. Limita con los Estados Unidos de América: al oriente con el estado de Nuevo León; al sur con los estados de San Luís Potosí, Zacatecas y Durango. Se localiza a 872 kilómetros de la capital del país y representa un 7.74 % del total de la superficie de México. Dividido en cinco zonas, una de ellas: la región carbonífera ubicada en el centro del estado, tiene albergado entre otras instituciones de nivel superior al Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de la Región Carbonífera (ITESRC), que a la fecha cuenta con 13 años de operación y actualmente tiene una matrícula de 1253 estudiantes. Con presencia a nivel nacional en diversos aspectos, académicos, culturales, deportivos, etc., busca, como todas las instituciones de enseñanza, una mejora continua en el proceso educativo.

Las características de las clases en el aula son producto de la interpretación del docente de los lineamientos y acuerdos de las academias respectivas, que a su vez son derivados de los planes estratégicos y del modelo educativo de la institución, que se ve regida por un objetivo educacional y normativas establecidas por la Dirección General de Tecnológicos. Las diversas interpretaciones pueden ocasionar que se produzca un distanciamiento del objetivo específico establecido en cada asignatura de su contribución real o papel en el objetivo educacional de la carrera. Siendo así que la visión y misión de las instituciones deben estar acordes a las que

rigen este modelo. Para poder justificar la integración de nuevas estrategias o la incorporación de situaciones didácticas al aula, debe verificarse que no se modifiquen tales objetivos y que se fomente el fortalecimiento y cumplimiento del proceso educativo. Las investigaciones que se realizan en esta institución están perfiladas a ayudar estos puntos, pero también a presentar nuevas estrategias en este contexto.

El modelo de la institución, se basa en las teorías de aprendizaje, de enfoque constructivista: Ausubel, Piaget y Vigotsky, entre otros, que proporcionan las bases y principios teóricos del modelo educativo.

Cada enfoque tiene como denominador común el constructivismo (que el alumno construya su propio conocimiento), pero con algunas discrepancias y que son significativas en la aplicación del modelo,- en el modelo actual se espera que tales enfoques sean complementarios-.

Un intento nacional por dejar establecido un modelo propio con bases más sólidas se está forjando en los grupos de academias a nivel nacional, pero aún no está terminado. El modelo de la institución (*en parte empírico*), es flexible y permite, plantear propuestas que ayuden a mejorar y lograr el objetivo educacional. Los recursos nemotécnicos viven en el seno de los temarios oficiales en diversas carreras, en temarios de materias de matemáticas (como se explica en el capítulo III), en la regla nemotécnica en particular que expone.

La investigación, no tiene el propósito de justificar su existencia en el temario oficial, su intención es el de documentar cómo se hace presente, cómo surge en este contexto y cuál es el impacto que tiene en el aprendizaje de las matemáticas.

Si la nemotecnia, arte de la memorización (en su definición simplista o popular), intenta agilizar la retención de contenidos en memoria de forma asociativa, para que adquieran solidez y sean usados como referentes en la construcción de nuevas

estructuras cognitivas, entonces se deben establecer los criterios para la selección de las reglas nemotécnicas que puedan ser útiles en la educación.

Marco contextual

Del Modelo Educativo en la Institución

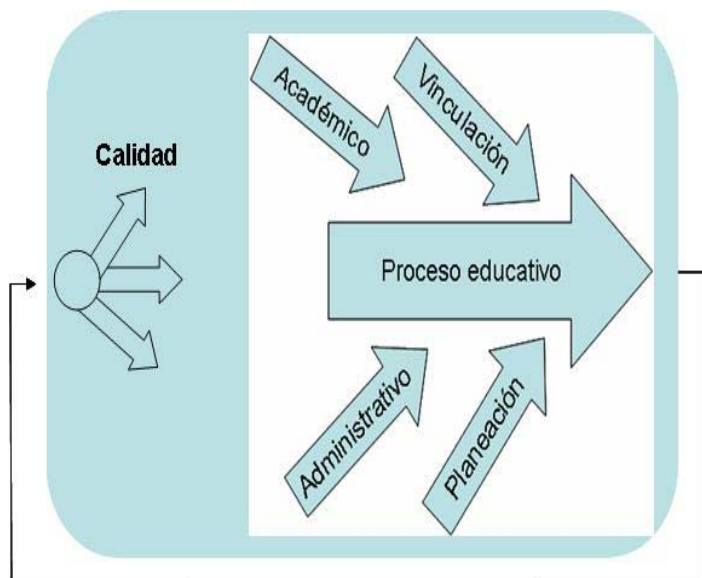
Las características de cada carrera y su distribución en los tecnológicos están determinadas en principio por la Dirección General de Tecnológicos.

En el país existen dos tipos de tecnológicos, a saber: los tecnológicos federales o centralizados y los tecnológicos descentralizados, como es el caso de el ITESRC. En ambos casos se tiene registro de un modelo educativo general que se trasmite de manera informal, sin lineamientos rigurosos o bien especificados en sus acciones, que ha evolucionado desde 1948 con el nacimiento de los dos primeros tecnológicos del país (Chihuahua y Durango). Actualmente la institución (ITESRC) adopta el modelo propuesto por el Sistema Nacional de Tecnológicos Descentralizados (SNIT), órgano perteneciente a la Dirección General de Institutos Tecnológicos, con su última versión del 2003, el denominado *Modelo Educativo para el tercer milenio*, que intenta definir de manera clara los programas de trabajo que aseguren el éxito del proceso educativo.

El modelo educativo propuesto especifica textualmente:

El modelo educativo para el tercer milenio recontextualiza y redimensiona el proceso educativo, con el propósito de cultivar la educación científica y tecnológica, para el desarrollo del ser humano capaz de afrontar con inteligencia instrumental, racional y ética los retos del desarrollo sustentable.

Para cumplir con ese objetivo el modelo está representado con cinco procesos¹: el académico, el de planeación, el administrativo, el de calidad y el de vinculación.



Cada uno de estos sectores o procesos tiene su estructura definida.

La situación actual de esta investigación nos obliga a revisar el modelo educativo en relación con su enfoque académico, pues es el que rige los lineamientos para los objetivos educacionales de cada materia.

Fig. 1 Esquema del Modelo Educativo Siglo XXI, para el proceso educativo

Uno de los puntos importantes de destacar es la definición de aprendizaje, las prácticas docentes, educativas y escolares, que deberán estar encauzadas a cumplir con esta concepción. Según el modelo se establece que el proceso educativo se fundamenta y actualiza en función del arte de las teorías de la construcción del conocimiento, de la evolución y desarrollo de las formas de inteligencia y del aprendizaje significativo. Desde esta perspectiva el modelo privilegia las experiencias de aprendizaje que nacen de la propia necesidad de conocimientos, que a su vez es generada por conocimientos previos. Define el papel del docente como facilitador, para que se genere la construcción de conocimientos científicos para ambos. El modelo entonces busca también la construcción de ambientes de aprendizaje, dentro y fuera de las instituciones, en los cuales se dispone de los recursos del sistema y de su entorno.

¹ Modelo estructurado de los contenidos declarados en el manual Modelo educativo para el tercer milenio Presentado en el 2003 por la SNIT

En la práctica educativa, considera que, en todo proceso de aprendizaje, son esenciales las acciones del facilitador y de la persona que construye su conocimiento.

Los procesos formativos se centran en el estudiante y aprendizaje. El diseño, puesta en marcha y evolución de las estrategias para lograr el aprendizaje es una tarea fundamental. Estas estrategias son las grandes decisiones didácticas que se concretan en actividades para el aprendizaje, de tal forma que:

- Responden a los perfiles del estudiante, del egresado y del profesor, y posibilitan su logro y realización.
- Tienen como eje la investigación, la vinculación, el ejercicio profesional y el trabajo disciplinario.
- Consideran el proceso de aprendizaje como una espiral de complejidad ascendente que va de la práctica a la teoría, para volver a la práctica; de lo concreto a lo abstracto y de nuevo a lo concreto.
- Vinculan el tratamiento de contenidos con la cultura y con el desarrollo histórico de la ciencia, la tecnología y la práctica de las profesiones.
- Consideran en su diseño las características de la institución y de los estudiantes; los objetivos y los contenidos de aprendizaje, tienen la flexibilidad suficiente para adecuarse a las situaciones concretas.
- Recurren a diversos métodos, técnicas, medios y materiales, e incluyen la solución de problemas, estudio de caso, dilemas, simulación, desarrollo de proyectos, prácticas y experimentación.
- Demandan del estudiante: acción, participación, reflexión, y la exposición y argumentación de ideas.
- Diversifican los espacios de aprendizaje, incluyen fuentes alternas de información y suponen el uso de las nuevas tecnologías de la información.

Este modelo está impregnado de matices constructivistas, apoyado principalmente en las teorías de Piaget, Ausubel y Vigotsky. El aprendizaje significativo de Ausubel está completamente integrado en el modelo. Aprender a

aprender es otro de los puntos importantes que maneja el modelo y para cumplir con ello sigue los lineamientos que presenta la UNESCO, entre otros puntos.

El Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica (COSNET) reporta que el 100% de los estudiantes que ingresan a la institución reprueban el examen de ingreso, el 80% presentan deficiencias de nivel de secundaria y el 62% presentan deficiencias en aspectos aritméticos.

En un reporte de investigación señala como problemática en el instituto (ITESRC), *Cribeiro (1999)* que los estudiantes:

- Tienen deficiencias para reproducir los conceptos y propiedades básicas de nivel de secundaria y preparatoria a partir de un libro.
- No tienen desarrollada la habilidad de interpretar un enunciado matemático.
- No tienen habilidad de cálculo aritmético, hacen uso de la calculadora para realizar cualquier operación y aceptan los resultados sin analizar, aunque estos sean absurdos.
- No vinculan los conocimientos, los recuerdan separados sin relación.
- No utilizan el tiempo de clases para adquirir conocimientos, se resisten a actuar por sí mismos.
- *No tienen idea de lo que es el proceso de aprendizaje.*

Además, agrega: el 75% no tiene interés en aprender, sólo les interesa aprobar con el menor esfuerzo posible. Tienen bloqueos mentales que los inhiben de pensar y expresar ideas sobre el tema de estudio en el aula. Consideran que no pueden hacer algo si no tienen un modelo igual para guiarse. Los confunde el tener que seleccionar un método para resolver un problema y se molestan cuando se les ponen variantes de un problema. No son conscientes de no haber logrado el aprendizaje mínimo necesario en las instituciones de nivel secundario y medio (p. 4)

En cuanto a las evaluaciones que se presentan en ese tiempo indica:

La preparación para el examen consiste en mirar como se resolvieron los ejemplos resueltos en clase. Son jóvenes disciplinados, respetuosos, atentos, nobles, de buenos sentimientos, cariñosos, es fácil lograr buenas relaciones interpersonales con ellos, aceptan las críticas y muestran disposición a trabajar en el aula para tener participación como parte de la evaluación. Sólo el 15 o 20% cumple con las tareas asignadas. La mayoría posee potencialidades que desconocen y no le han sido desarrolladas (p.6)

El sistema de evaluación por unidades muy útil para lograr la retención e integración de conocimientos. La evaluación se caracteriza por medir la capacidad de “reproducir conocimientos” de baja complejidad, acabados y mecanizados. Se utiliza la evaluación tradicional cuantitativa. Las evaluaciones son hechas para determinar aprobados, no para conocer las características y dificultades del aprendizaje. Hay más interés en la acreditación que en la evaluación del proceso educativo.

Las múltiples facilidades para examinar cuando reprueban dañan la personalidad del alumno, la historia y el desarrollo de la institución. No se utiliza la auto-evaluación, la co-evaluación, ni la evaluación grupal. Se desconoce la función de la evaluación como motivación y autorreguladora del aprendizaje.

La presencia de las matemáticas tiene un fin en la educación superior y parte de nuestra investigación requiere saber qué objetivo debe ser cubierto por las matemáticas dentro de la formación de ingenieros de acuerdo al perfil que marca la institución. Esto determinará qué objetos matemáticos deberá dominar el estudiante y en qué profundidad: también se desea saber cómo se requiere que sean reconocidos y utilizados los conocimientos en un ámbito de ingeniería aplicada.

Se ha estimado que entre el 15 % y el 20 % del tiempo escolar se dedica a las matemáticas Travers (1991, en Cribeiro 1999), la cual ocupa un lugar de gran importancia en los programas de todos los países Su imperecedera presencia en el currículo escolar, los textos de enseñanza, las aplicaciones que vincula y las investigaciones dirigidas a estudiar el proceso de enseñanza aprendizaje, le dan a esta materia su reputación escolar y social, tornándola en una necesidad social y elemental para un óptimo desempeño de los individuos.

La estructura escolar de una institución responde a una serie de componentes condicionadas por situaciones de carácter financiero, administrativo, político, social e incluso pragmático, que determinan qué tipo de contenidos provenientes de investigaciones serán incluidos o aplicados al sistema educativo. No quiere esto decir que no deban existir normativas que evalúen la pertinencia de los contenidos, la sociedad crece y exige evolución, para ello se requiere ser flexible en el currículo. Se trata no sólo de transmitir contenidos, sino que se piensa en cómo aprovecharlos y cómo aprender mejor y más rápido. Las asignaturas son cada vez más aisladas y las calificaciones son puramente cuantitativas, la evaluación se caracteriza por tener criterios sólo en el ámbito conceptual. La mayoría de las clases se realizan en el marco de la enseñanza tradicional, pues se plantea que los tiempos y contenidos no permiten otras actividades donde el alumno descubra y construya por sí mismo los conceptos y promueva desarrollos cognitivos.

Cribeiro (2004) menciona que el concepto de “grupo curso” y el de asignaturas aisladas las unas de las otras, son aspectos de la práctica escolar que no tienen referentes teóricos, ni están basados en los resultados de una investigación. Más bien son conceptos – prácticas que desafían las teorías pedagógicas y los resultados de la investigación.

Agrega también que:

La experiencia muestra también que los intentos por afectar a uno o varios de esos conceptos – prácticas, amenazan los fundamentos de la organización escolar y son, por lo tanto, resistidos. Estas prácticas difícilmente se pueden modificar, limitando el cambio de la enseñanza en el aula.

Desde la perspectiva del desarrollo personal del alumno, la matemática tiene un rol formativo e informativo (Montero, 1992; Travers, 1991). El rol formativo se expresa en la facilitación del pensamiento lógico, la adquisición de estrategias cognitivas de orden superior y otras destrezas intelectuales y el rol informativo en la capacidad de manejar información cuantitativa y cualitativa que permite la matemática, considerada imprescindible para desenvolverse de manera adecuada en la vida moderna, lo que Travers (1991) resume diciendo: “Las competencias matemáticas son un requisito esencial en la preparación, tanto de un ciudadano

informado como en la de personal calificado requerido por la industria, la ciencia y la tecnología" (p. 825).

Estudios cualitativos recientes muestran que la clase expositiva tradicional, con escaso apoyo de medios y sin contemplar el conocimiento previo del alumno, parece ser la realidad preponderante. En este mismo sentido Meneses y Parra (1990, en Cribeiro 1999) concluyen que:

Los modos que asumen las lecciones de matemática, se alejan en gran medida de lo que se pretende lograr (...) ya que el aprendizaje en el aula se fomenta mediante la repetición de ejercicios en cuyos desarrollos el rigor lógico y el empleo de simbología especial constituyen sólo pasos carentes de significado y que apuntan más a la memorización mecánica que a generar la toma de conciencia por parte del alumno acerca de los modos cómo se piensa matemáticamente (p.100).

Las matemáticas tienen sentido en el currículo escolar y deben ser parte fundamental de la preparación para educación superior, de hecho, por eso se consideran dentro de las ciencias básicas. La estructura de cada carrera tiene materias de matemáticas, las áreas de matemáticas son muy diversas y cada una de ellas será utilizada en diferentes aplicaciones que obedecen a los perfiles de las especialidades englobadas en materias específicas tales como cálculo, álgebra, trigonometría, matemáticas discretas, etc.

Interesa saber cómo la estructura de una especialidad determina las materias matemáticas a impartir, el contenido en cada una de ellas y como operan en un determinado **contrato didáctico**. Los sistemas de operación que se crean por los alumnos para poder aprobar estas materias son fruto de las necesidades y expectativas que el joven detecta y traza. Por ello, es importante que el objetivo específico que el estudiante se plantee en relación con la materia esté acorde el objetivo general de su educación.

En nuestro caso, las clases de matemáticas no son consideradas como parte importante del objetivo general de proyecto de vida profesional por los alumnos, quienes las ven sólo como un requisito para poder ascender en su acumulación de créditos. Las matemáticas en sí no son consideradas como requisito para las materias de especialidad, aunque el docente insista en lo contrario. Uno de los

puntos que hacen difícil salir de esta estructura es que los tiempos y contenidos no son compatibles, pues se evalúa en base a contenidos y el suprimirlos representaría un caos en la estructura educativa. Si bien se establecen nuevos itinerarios y horas de apoyo, estos no siempre son efectivos, pues no se soluciona el problema: el contenido debe ser dominado para poder evolucionar en los desarrollos de nuevos conocimientos, garantizando así el nivel de partida, pero para nivel superior esto implicaría reconstruir la educación anterior en cada estudiante.

Ahora bien, para poder romper con este paradigma, es necesario establecer formas en las que el alumno se apropie de forma rápida de conocimientos y habilidades básicos para a partir de ellos construir el nuevo conocimiento.

Si escudriñamos los lineamientos que se marcan en cada especialidad, podremos distinguir que se tienen contempladas a las matemáticas como temas necesarios y esenciales para las restantes materias de especialidad. Tomemos como ejemplo la especialidad de Ingeniería Electromecánica:

La institución tiene registrado (DGIT, 2003) el siguiente objetivo general en esta carrera:

Formar profesionistas de excelencia en ingeniería electromecánica, con actitud emprendedora, con liderazgo y capacidad de: analizar, diagnosticar, diseñar, seleccionar, instalar, administrar, mantener e innovar sistemas electromecánicos, en forma eficiente, segura y económica. Considerando las normas y estándares nacionales e internacionales para fomentar el desarrollo sustentable con plena conciencia ética, humanística y social. (p.42)

También incluye el *Perfil del egresado*

El egresado de ingeniería electromecánica poseerá habilidades de liderazgo y visión emprendedora para la solución y prevención de problemas, realizando innovaciones en los sectores productivos y de servicios. Desarrollando proyectos, administrando recursos humanos, materiales y financieros de manera óptima.

*Con una formación integral, sensible a su realidad, responsable, participativa, con capacidad de comunicación y habilidad para la interacción con equipos interdisciplinarios; así como aplicar los conocimientos adquiridos para el **análisis, diagnóstico, evaluación y solución de problemas** en las organizaciones. Utilizando las tecnologías de vanguardia con visión de competitividad y calidad.*
(p.45)

Así vemos que el objetivo general no indica nada concerniente directamente a temas específicos de matemáticas, sin embargo, en el perfil del egresado se aclara que este será capaz de interpretar, dominar y aplicar conocimientos y ello involucra directamente a las ciencias básicas.

Esto lo confirman además los siguientes párrafos.

Para ello, el egresado será capaz de:

- 1. Aplicar las normas y reglamentos de seguridad e higiene en su desempeño profesional.*
- 2. **Interpretar**² y aplicar las normas, especificaciones, códigos, manuales, planos y diagramas de equipos y sistemas electromecánicos*
- 3. Tener el dominio de un segundo idioma.*
- 4. Seleccionar, administrar, mantener, implementar e innovar los diferentes procesos de fabricación.*
- 5. **Analizar, diagnosticar, diseñar, seleccionar, instalar, administrar, mantener e innovar** sistemas electromecánicos.*
- 6. Establecer, administrar, **optimizar** y supervisar programas y técnicas de mantenimiento*
- 7. Seleccionar instalar y operar **sistemas de control, protección y medición.***

² Nota 1: se destacan en negrita algunas habilidades y capacidades que se adquieren y desarrollan en el estudio de la matemática, en el manual original no tiene esta notación.

Nota 2. las partes destacadas en negrita son a realizadas en base a los análisis de las habilidades y características que se mencionan en las diferentes materias de la matemática en esta carrera en particular.

8. **Administrar** los recursos humanos, financieros y materiales del área que le corresponda.

9. **Aplicar paquetes computacionales para el diseño, simulación y operación de sistemas electromecánicos**

10. Aplicar tecnología de vanguardia a la **solución de problemas** de su entorno.

11. Participar en la generación y desarrollo de proyectos de investigación, así como la aplicación de nuevas tecnologías en beneficio de la sociedad que contribuyan al desarrollo sustentable.

12. Fomentar la calidad y la productividad en los sectores industriales y de servicios.

13. Poseer una visión emprendedora realizando actividades de consultoría estableciendo su propia empresa para coadyuvar en el desarrollo de su entorno.

14. **Participar en equipos interdisciplinarios y multidisciplinarios.**

15. Fomentar el uso racional de la energía.

16. Aplicar la ética para cada uno de sus actos en su desempeño.

(p. 45,46)

Bajo estas expectativas se establece entonces un plan de estudios y un currículo que sea adecuado a los requerimientos. En esta carrera las materias que la conforman se encuentran en siete grupos, distribuidos a lo largo de nueve semestres.

			Horas- semestre			Créditos
CB = Ciencias básicas			58	=	928	89
OC = Otros Cursos			0	=	0	0
IA = Ingeniería aplicada			73	=	1168	108
CI = Ciencias de la ingeniería			65	=	1040	100
SH = Sociales y Humanidades			26	=	416	35
ES= Especialidad Optativa (IA)			0	=	0	0
ES= Residencia					640	20
Semanas al semestre=	16			4192	352	

Fig. 2 Distribución de las horas semestre por carrera.

Las ciencias básicas ocupan 89 créditos de un total de 400 para la carrera, que representan 928 horas –semestre, es decir, un 22.25% a ciencias básicas de manera directa. Las materias de matemáticas tienen en total 40 créditos, es decir, un 10% del plan de estudios se dedica a las matemáticas³.

Horas a la semana	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°		
CB = Ciencias básicas	23	10	20	5	0	0	0	0	0		58
OC = Otros Cursos	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
IA = Ingeniería aplicada	0	0	0	0	11	16	21	20	5		73
ES= Especialidad Optativa (I A)	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
CI = Ciencias de la ingeniería	0	4	10	20	20	11	0	0	0		65
SH = Sociales y Humanidades	4	13	0	2	0	2	5	0	0		26
Total	27	27	30	27	31	29	26	20	0		222

Fig.3 Esquema de la distribución de las horas semana semestre en ciencias básicas.

³ Datos obtenidos en Dirección académica ITESRC (2003)

La tabla anterior muestra las horas semanas que se dedican a las ciencias básicas. Se observa que ellas terminan en el cuarto semestre, de hecho, en ese semestre la única materia de ciencias básicas es Matemáticas V (*Ecuaciones diferenciales*). La ingeniería aplicada comienza a tomar fuerza en el siguiente semestre, mostrándose así una separación entre las *ciencias básicas* y las *ciencias aplicadas*. Esa estructura se refleja en las aulas, creando la falsa ilusión en el alumno e incluso en el docente de que no existe vinculación real entre ciencias básicas y aplicadas.

La punta de lanza se puede ver en los primeros semestres, con Matemáticas I (*Cálculo Diferencial*) como bienvenida. En nuestra tesis sostenemos que la nemotecnia es generada y aplicada por los estudiantes como una estrategia para enfrentar una abrumadora cantidad de conceptos y habilidades a adquirir; estudiamos el caso particular del tema de las funciones trigonométricas.

A continuación describimos el programa de esta materia con el fin de contrastar los objetivos generales del modelo educativo con los que ella misma plantea.

En Matemáticas I (*Calculo diferencial*)⁴, materia común para todas las ingenierías, con clave de asignatura **ACM – 0403** y está planeada para horas teoría - horas práctica – créditos, **3-2-8** respectivamente. La última versión de esta asignatura fue elaborada por Dirección General de Institutos Tecnológicos en el 2003 y su última revisión fue en la Ciudad de México del 21 al 23 de Enero de 2004, por los representantes de los Institutos Tecnológicos de Ciudad Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Mexicali.

En el temario de la asignatura se plantea explícitamente que no existe ningún requisito previo con alguna de las materias del mismo plan de estudios, pero se menciona que el dominio de los temas del álgebra, trigonometría y geometría analítica, son necesarios para su estudio y desarrollo. Matemáticas II (*Cálculo integral*), Matemáticas III (*Cálculo vectorial*), Matemáticas IV (*Algebra lineal*) y Matemáticas V (*Ecuaciones diferenciales*) son materias posteriores que abordan sus

⁴ *Retícula ITESRC plan de estudios*

temas utilizando las habilidades y conceptos matemáticos que se adquieren en este curso.

El temario indica que esta materia deberá aportar al egresado elementos para:

Desarrollar un pensamiento lógico matemático formativo que le permite analizar fenómenos reales (razón de cambio) y modelarlos.

Desarrollar su creatividad para la solución de problemas de optimización asociados a funciones reales de una sola variable.

El objetivo planteado es el siguiente:

*El estudiante dominará el concepto de función y desarrollará la habilidad numérica y geométrica para representar las funciones, **aplicará la derivada como una herramienta** para la solución de problemas prácticos del área de ingeniería en que se imparte esta materia.*

Aquí se especifica claramente que se desea desarrollar la habilidad de aplicar la derivada como herramienta. En general, se observa que el perfil del ingeniero está proyectado al saber cómo se usan las matemáticas y en qué situaciones, sin dejar de lado las bases teóricas. Este objetivo refleja la idea de que la matemática por sí misma no es el objetivo central de formación, sino que es parte esencial en el modelo del profesional.

La materia está compuesta por cinco unidades de aprendizaje orientadas al estudio de los principios básicos del cálculo diferencial.

TEMARIO

Unidad 1 Números reales.

Unidad 2 Funciones

Unidad 3 Límites y continuidad

Unidad 4 Derivadas

Unidad 5 Aplicación de las Derivadas

Unidad 6 Series y sucesiones

En la unidad cuatro se trata el concepto y el cálculo de las derivadas y en la unidad cinco sus aplicaciones. Los sub-temas en la unidad de derivadas son:

4.1 Definición de la derivada.

4.2 Interpretación geométrica y física de la derivada.

4.3 Derivada de la función constante, derivada del producto de una constante por una función, derivada de la función x^n cuando n es un entero positivo, y cuando n es un número real, derivada de una suma de funciones, derivada de un producto de funciones y derivada de un cociente de funciones.

4.4 Derivada de las funciones exponenciales.

4.5 Derivada de las funciones trigonométricas.

4.6 Derivada de las funciones compuestas (regla de la cadena).

4.7 Derivada de la función inversa.

4.8 Derivada de las funciones logarítmicas.

4.9 Derivada de las funciones trigonométricas inversas.

4.10 Derivada de las funciones implícitas.

4.11 Derivadas sucesivas.

4.12 Funciones hiperbólicas y sus derivadas.

4.13 Teorema del valor medio, teorema de Rolle.

Establece claramente que el estudiante deberá tener dominio de trigonometría. Sin embargo, en este nivel escolar ingresan estudiantes de características heterogéneas⁵ y no se puede partir de este supuesto.

En las aplicaciones de examen diagnóstico únicamente un 18% de los estudiantes muestran tener nociones de trigonometría⁶ (al menos en aplicaciones).

⁵ Las características académicas de cada estudiante son distintas, no solo por su aporte personal, sino también por el sistema de educación de nivel medio que provienen – Bachillerato, preparatorias modalidad abierta, escolarizada etc. -

⁶ Manejo de tablas, uso de las identidades, solución de problemas con triángulos, entre otras. Que se definen en el examen diagnóstico.

Cada unidad está organizada a partir de su propio objetivo educacional, que en el caso de la unidad en cuestión menciona:

Comprenderá el concepto de la derivada; su interpretación geométrica y física. Desarrollará la capacidad de derivar funciones algebraicas y trascendentes mediante reglas de derivación y la técnica de derivación implícita.

La pregunta es: ¿deberá el estudiante ser capaz de deducir las fórmulas o exclusivamente aplicarlas? Parte de la formación e información en este tema es estructurar la explicación racional de la procedencia de las reglas de derivación, no obstante, después sólo se usan como “fórmula” para solucionar problemas. Tanto en el tratado de Matemáticas I, como en las asignaturas posteriores se utilizan las reglas de derivación como herramienta de cálculo.

Los lineamientos de los temarios rigen los contenidos, más no la metodología, pues no incluyen referencias en los aspectos de tiempo y profundidad en la que se deberá abordar el tema. Sin embargo, el docente necesita también de esta referencia (ya sea documentada o experiencias personales) para determinar personalmente cómo estructurar su planeación de clase, la cual incluye el qué y cómo evaluar cada unidad de aprendizaje.

Denominaremos *prácticas matemáticas explícitas (PME)*⁷, a aquellas prácticas que de alguna manera están documentadas y/o son parte de un modelo educativo establecido de forma teórica o empírica, tales como los registros de academias de la institución, los libros de texto y los planes anteriores registrados por docentes en diversas formas y *prácticas matemáticas no-explicitas (PMNE)* a aquellas que el mismo docente aplica en sus clases o el alumno agrega de forma consciente o no a las del docente y que no han sido documentadas previamente y que por supuesto, no se tiene registro de su efectividad.

⁷ La definición de *prácticas matemáticas explícitas*, la usamos para describir las actividades y/o situaciones didácticas simples de acción en el aula, que los docentes aplican como estrategias de aprendizaje. Puesto que en un sentido más estricto *prácticas matemáticas* involucra otras dimensiones que en esta tesis no están contempladas.

Las experiencias adquiridas por el docente a lo largo de su trayectoria o en sus vivencias de estudiante forman parte de las PMNE. Ruiz (2000) aporta al respecto: *el modelo visto es en ocasiones muy frecuentes, más fuerte que el modelo por ver* y aclara también: *todos en parte enseñamos como nos enseñan*. El alumno condiciona este rubro, pues es el principal protagonista del escenario; en este nivel el estudiante tiene conciencia de algunas de sus deficiencias académicas y establece estrategias para aprender o para poder sobrellevar estos contenidos. No todas las estrategias son efectivas, pero aquellas que logran cierto éxito son susceptibles de ser transmitidas en forma oral y sustituidas por otras más efectivas en determinado momento. Ambas estrategias, las del docente y las del alumno, no son documentadas generalmente.

En los últimos tiempos las instituciones se han preocupado por tratar de difundir entre los docentes las PMNE; los cursos y las academias se encargan de evaluar qué situaciones o prácticas son válidas en cada instituto para poder difundirlas a manera de investigaciones en educación matemática, ya sea en su propia organización o fuera de ellas. Pero se deben tomar en cuenta también las experiencias de los estudiantes, pues si estas estrategias son utilizadas es porque han demostrado tener cierta efectividad y facilidad de uso, hasta el punto de ser transmitidas de estudiante a estudiante aún sin la guía del docente. Esto es en parte lo que persigue la corriente constructivista.

Sin embargo, las PMNE no son siempre efectivas o ayudan realmente a cumplir el objetivo educacional de manera adecuada. Este fenómeno debe ser escudriñado para poder seleccionar y establecer condiciones en las cuales dichas prácticas sean efectivas y se integren a las PME.



Fundamentos Teóricos

Del modelo educativo

Dentro de las aulas se imparten clases, con el propósito de formar e informar, pero ante todo de que el estudiante aprenda, ¿pero cómo se aprende? Y ¿qué es aprendizaje?, la SNIT, expresa en sus normas de calidad, que el Aprendizaje es el proceso por medio del cual la persona se apropia del conocimiento, en sus distintas dimensiones: conceptos, procedimientos, actitudes y valores, también se dice que es el proceso a través del cual se adquieren habilidades, destrezas, conocimientos... como resultado de la experiencia, la instrucción o la observación. Ahora bien ¿las técnicas nemotécnicas pueden ser intermediarias para alcanzar un aprendizaje de este tipo?, esto es lo que evidenciará esta investigación.

El *modelo educativo del tercer milenio* busca privilegiar el aprendizaje sobre la enseñanza, busca el aprendizaje significativo de los actores en el proceso educativo, que opera bajo el marco de la corriente constructivista. Para poder establecer de qué manera puede influir la nemotecnia en el aprendizaje significativo, es necesario definir qué es el aprendizaje, de acuerdo a las teorías expresas, que no son propias ni exclusivas de este marco y contrastarlas con las teorías afines o de la didáctica de la matemática.

El constructivismo tiene diversos enfoques, con algunas ideas contrapuestas, pero todas abogan a favor de aprendizaje en construcción del conocimiento por parte de los alumnos más que por la transmisión de conocimientos. La noción de *cómo se aprende* tiene tres dimensiones a saber en esta corriente:

- Una dimensión conceptualista del aprendizaje a partir de los conceptos que el alumno ya posee (Ausubel, Novak y Regeluth)

- Una dimensión socializada del aprendizaje a partir de estructurar las experiencias y facilitar el aprendizaje significativo (Vigotsky).
- Una dimensión constructivista del aprendizaje a partir de las experiencias que el alumno posee (Piaget y Bruner).

Según Ruiz (2000) el aprendizaje acorde al constructivismo se dará *cuando el alumno sea el responsable último de su propio proceso de aprendizaje, sea el que construye o reconstruye los saberes de su grupo cultural y este es un sujeto activo cuando manipula, explora, descubre o inventa, incluso cuando lee o escucha la exposición de otros.*

Tradicionalmente a los alumnos se les da un contenido y luego se les pide que reflexionen en él, es decir primero conocer y luego pensar. En el constructivismo la reflexión consciente es un elemento base, pues está asociada al pensamiento, el encontrar las relaciones entre lo que se aprende y lo aprendido conduce a un análisis más profundo que desencadena en la asimilación consciente. El aprendizaje es consecuencia del pensamiento (Perkins 2000, citado en Ruiz 2000). Entonces debemos propiciar el pensamiento primero y luego se tendrá el conocimiento, eso podría entenderse como una visión constructivista, pero habría que escudriñar un poco más las relaciones existentes entre pensamiento y aprendizaje para poder afirmar estar dentro de esta corriente o no.

Retornando a la implementación de este enfoque el ITESRC, que de acuerdo al modelo educativo presentan en los temarios de las materias divididos en contenidos:

Conceptuales que nos indican los nombres de los temas y contenidos específicos, establecidos como parte cultural necesaria en el ámbito que se perfila el alumno, en su desarrollo laboral y social.

Procedimentales que son aquellos que nos establecen o indican la manera en que se usarán esos contenidos para llevarlos a la práctica.

Actitudinales consideraciones generales de la materia que orientan al pensamiento racional.

Y ya que el aprendizaje no se centra en una actividad externa, tal como el conductismo, no se puede centrar en sólo aprender los contenidos, sino explotar de manera equitativa los tres puntos.

Secadas (2004) expresa que el aprendizaje en la psicología experimental, se define como una actividad humana compleja, multi-dimensional, siendo común encontrar concepciones simplistas aplicadas donde se necesitan otras más amplias.

Las características esenciales del aprendizaje son la formación de conexiones en todas las interacciones entre el organismo viviente y el ambiente, resultando en un cambio en los patrones de la conducta personal. Así entonces, el alumno es libre de asimilar los significados de las diferenciaciones, si se dan las condiciones adecuadas en las que la diferenciación del campo de experiencia puede ser acometida sin amenazas personales, es decir, absorbe lo que su organismo necesita, en lugar de asumir la totalidad de lo que el maestro explica.

Indica que (*Rogers, 1998*), el aprendizaje se facilita cuando los alumnos se convierten en participantes responsables para elegir el contenido y dirección de sus propios esfuerzos, ese aprendizaje auto-iniciado, que implica el intelecto y emociones, tiende a ser más activo y duradero, que el que pretende ser controlado por el docente.

Un aspecto importante en la crisis de la educación, es que los estudiantes se enfrentan a un limitado segmento del aprendizaje por parte de las instituciones, que en consecuencia, inutiliza su talento latente, energía y potencial de crecimiento, cuando se pide una mayor relevancia de materias y experiencias académicas.

Para *Ausubel (1983)* el aprendizaje para ser efectivo tiene que ser significativo e implica la adquisición de nuevos significados y a la inversa. Aclara que en esencia el aprendizaje significativo tiene su centro en que las ideas expresadas simbólicamente sean relacionadas con lo que el estudiante ya sabe. Con esto quiere decir que si se relaciona de forma sustancial y no arbitraria con *algún aspecto existente específicamente relevante* de la estructura cognitiva del alumno, será significativo

para él. Si el estudiante intenta memorizar arbitraria y literalmente, será mecánico y carente de significado.

Ahora bien, y si los contenidos son aprendidos ligándolos o relacionándolos a objetos, métodos o procedimientos no enmarcados formalmente en ese tema, ¿se podría considerar como aprendizaje significativo?

Para dar respuesta conviene analizar lo siguiente:

La adquisición de nuevos conceptos para un buen aprendizaje implica que sean significativos, dependerá entonces del conocimiento del significado, de los elementos preexistentes que tiene el estudiante para construirlo. El propio Ausubel indica que *para que el aprendizaje sea significativo las componentes del nuevo concepto o preposición tienen que tener significado y estar presentes para el estudiante o al menos intentar relacionar los significados.*

Un segundo criterio que ayuda a la respuesta, es el siguiente punto de Ausubel:

Si el material de aprendizaje es suficientemente no arbitrario, un símbolo ideativo, podría relacionarse con la estructura cognoscitiva sin que hubiese ningún cambio resultante en el significado.

Es decir que no dependerá ni del uso de los signos particulares, ni del aprendizaje, ni del significado que surge, *ya que el mismo concepto o preposición podría expresarse de manera sinónima y debería seguir comunicando lo mismo.*

Ausubel considera que existen diversos tipos de aprendizaje.

Los aprendizajes significativos pueden ser receptivos o por descubrimiento, el primero centrado en contenidos como formas de hacer y el segundo en los métodos como formas de hacer.

El aprendizaje puede ser significativo o no significativo, cuando se aprende por repetición y la nueva información se integra a la memoria, pero no a la estructura cognitiva del estudiante. Se conoce como aprendizaje memorístico.

El aprendizaje memorístico **es importante en algunos casos, pues no se puede trabajar en el vacío**, cuando no existen conceptos relevantes con los cuales se pueda interactuar. El significado amplio de estos conceptos o el desarrollo de los mismos pueden no estar de momento presente, pero es necesario en memoria, para su tratado propio o de otros conceptos.

El aprendizaje significativo pretende que se tenga en memoria, de manera que se pueda manejar los contenidos como objeto – herramienta. El aprendizaje memorístico, carece de valor, si no se puede aplicar o usarse. Sin embargo, el aprendizaje significativo está también condicionado por la retención de los elementos que lo enlaza en la estructura cognitiva, bajo esta visión, la nemotecnia opera como una referencia rápida, que permite traer un dato a memoria inmediata, donde si es un aprendizaje significativo.

En el capítulo siguiente se extiende la noción de la nemotecnia, de tal manera que, podremos discutir adecuadamente en el capítulo cuatro.

En contraste con Secadas (2004), Olensky (2002) indica, basado en las teorías de Ausubel, que el aprendizaje no sólo es un simple cambio en la conducta, sino que conduce a un cambio en el significado de la experiencia.

Para Vigotsky y sus colaboradores, su centro fue más el descubrir cómo el aprendiz llega a ser lo que no es. Propuso una aproximación completamente diferente frente a la relación existente entre aprendizaje, según la cual el aprendizaje debería equipararse al nivel evolutivo para ser efectivo. Quienes sostienen esta posición consideran, por ejemplo, que la enseñanza de la lectura, escritura y aritmética debe iniciarse en una etapa determinada.

Para Vigotsky, *todas las concepciones corrientes de la relación entre desarrollo y aprendizaje en los niños pueden reducirse esencialmente a tres posiciones teóricas*

importantes. La primera de ellas se centra en la suposición de que los procesos del desarrollo son independientes del aprendizaje. Este último se considera como un proceso puramente externo que no está complicado de modo activo en el desarrollo.

Simplemente utiliza los logros del desarrollo en lugar de proporcionar un incentivo para modificar el curso del mismo... esta aproximación se basa en la premisa de que el aprendizaje va siempre ligado a el desarrollo, y que el desarrollo, avanza más rápido que el aprendizaje, se excluye la noción de que el aprendizaje pueda desempeñar un papel en el curso del desarrollo o maduración de aquellas funciones activadas a lo largo del aprendizaje.

El desarrollo o maduración se considera como una condición previa del aprendizaje, pero nunca como un resultado del mismo.

La segunda posición teórica más importante es que el aprendizaje es desarrollo... *el desarrollo se considera como el dominio de los reflejos condicionados; esto es, el proceso de aprendizaje está completa e inseparablemente unido al proceso desarrollo...el desarrollo como la elaboración y sustitución de las respuestas innatas... el desarrollo se reduce básicamente a la acumulación de todas las respuestas posibles. Cualquier respuesta adquirida se considera o bien un sustituto o una forma más compleja de la respuesta innata... aprendizaje y desarrollo coinciden en todos los puntos, del mismo modo que dos figuras geométricas idénticas coinciden cuando se superponen.* Osorio (2002, p.4)

La tercera posición teórica...*según la cual el desarrollo se basa en dos procesos inherentemente distintos pero relacionados entre sí, que se influyen mutuamente. Por un lado está la maduración, que depende directamente del desarrollo del sistema nervioso; por el otro, el aprendizaje, que, a su vez, es también un proceso evolutivo... el proceso de maduración prepara y posibilita un proceso específico de aprendizaje... el proceso de aprendizaje estimula y hace avanzar el proceso de maduración."* Osorio (2002, p.5)

Sin embargo, observa Vigotsky, no podemos limitarnos simplemente a determinar los niveles evolutivos si queremos descubrir las relaciones reales del desarrollo con el aprendizaje.

El autor plantea una relación donde ambos se influyen mutuamente. Esta concepción se basa en el constructo teórico de *Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)* propuesto por Vigotsky.

Lo que se encuentra hoy en la zona de desarrollo próximo, será mañana el nivel real de desarrollo, es decir lo que el aprendiz es capaz de hacer hoy con ayuda de alguien, mañana lo podrá hacer por si solo.

Por lo anterior, el buen aprendizaje es el que se coloca delante del desarrollo. La relación entre aprendizaje y desarrollo se puede plantear en los siguientes términos: ¿Cómo hacer que los aprendizajes se transformen en procesos de desarrollo? La educación no es un proceso que culmina con el aprendizaje; va más allá, considera los desarrollos. Los aprendizajes conducen a los procesos de desarrollo, el desarrollo va a remolque del aprendizaje. En otras palabras, el aprendizaje va delante del desarrollo.

El buen aprendizaje es el que encaja con los procesos de desarrollo, para ello se requiere un buen diagnóstico de la ZDP del sujeto, para que recorra y transforme el Nivel de Desarrollo Potencial en Nivel de Desarrollo Real.

El buen aprendizaje es el que se coloca delante del desarrollo.

Como se puede ver, la ZDP caracteriza de una nueva forma la relación entre aprendizaje y desarrollo. El aprendizaje ya no queda limitado por los logros del desarrollo entendido como maduración, pero tampoco ambos se identifican, planteando que aprendizaje y desarrollo son una y la misma cosa. Por el contrario, lo que hay entre ambos es una interacción, donde el aprendizaje *potencia* el desarrollo de ciertas funciones psicológicas. Así, la planificación de la instrucción no debe hacerse sólo para respetar las restricciones del desarrollo real, sino también para sacar provecho de su desarrollo potencial, es decir, enfatizando aquello que se encuentre en su *ZDP*.

...el aprendizaje humano presupone una naturaleza social específica y un proceso, mediante el cual los niños acceden a la vida intelectual de aquellos que les rodean".

De esta forma, toda función psicológica superior es en primer lugar externa y sólo posteriormente, interna. . **El aprendizaje constituye la base para el desarrollo y «arrastra» a éste, en lugar de ir a la zaga.**

Piaget por su parte, define que el alumno reconstruye el conocimiento desde una perspectiva deductiva, el alumno parte de los conocimientos que ya posee o los nuevos que puede adquirir para validar sus hipótesis o verificar si sus teorías son aceptadas o no. Fórmula que el objetivo de los conflictos cognitivos no son la apropiación del concepto en sí, sino propiciar el desarrollo cognitivo, a partir de la modificación de sus estructuras previas.

El aprendizaje se da a partir de las experiencias que el mismo ya tiene, mientras que Bruner (1966), se centra en el proceso del aprendizaje por descubrimiento, asegura que el alumno ha de descubrir la estructura de todo aquello que va a aprender, dado que el aprendizaje no es algo pasivo, que se adquiere por recepción.

Bruner propone para esto los siguientes pasos:

- **Adquisición de información** (preferentemente por la vía inductiva)
- **La transformación de la información** a partir de visiones no críticas.
- **Evaluación de la información** (verificar si los datos obtenidos son ciertos o no)

Estos pasos asociados a lo que el autor denomina sistema de pensamiento

- Sistema enactivo: pensamiento que opera a través de la acción que corresponde a la fase de percepción
- Sistema icónico: se apoya en la imaginación y se presentan situaciones y conceptos sin definirlos
- Sistema simbólico: supone el manejo de símbolos, conceptos, ideas etc.

Ruiz (2000) indica que: comparten la misma *visión cíclica del aprendizaje*, Piaget de forma emblemática y Bruner por descubrimiento, que tiene sus implicaciones en las edades en las que se ha de aplicar.

En síntesis:

En cuanto al modelo:

- El proceso educativo en el modelo educativo, se orienta, hacia la búsqueda de su plenitud en el ser humano, en el aprender hacer, en el aprender a ser, en el aprender a aprender, aprender a emprender y aprender a convivir.
- El modelo privilegia las experiencias de aprendizaje sobre las formas de enseñanza personal. Las experiencias nacen de la propia necesidad de conocimiento, que a su vez es generada por los conocimientos previos.
- Busca el aprendizaje significado de los autores involucrados en el proceso del aprendizaje.
- Se concibe la evaluación como a una estrategia para asegurar e impulsar la construcción del conocimiento.

En cuanto a los paradigmas educativos:

- El aprendizaje no sólo es un simple cambio en la conducta, sino que conduce a un cambio en significado de la experiencia.
- Las teorías de Ausubel, Novak y Reigeluth están basadas en la teoría del aprendizaje significativo, que indica; es necesario para la asimilación y aprendizaje de un contenido, tenerse conciencia de lo que el alumno ya sabe (Subsunsores⁸).
- Para Piaget y Bruner el aprendizaje, es resultado de la interacción de las experiencias personales y los conflictos cognitivos. Donde el principal propósito es modificar las estructuras cognitivas más que el propio concepto a aprender.

⁸ Ausubel indica que uno de los factores más importantes que intervienen para aprender es lo que ya sabe el sujeto, es decir, existe un proceso primario en el cual el nuevo material se relaciona con las ideas relevantes ya existentes (subsunsos), los conocimientos existentes se organizan y sirven de “ancla” a los conocimientos que el sujeto está recibiendo como nuevos.

- Las teorías de Piaget, Bruner, Ausubel y Novak, se insertan dentro de las teorías cognitivas y se encuentra dentro del paradigma cognitivo.
- El paradigma cognitivo es individualista, toda vez que se centra en los procesos del individuo (Cómo enseña el profesor y cómo aprende el alumno).
- La teoría de Vigotsky, se enfila en las teorías sociales (Paradigma socio-cultural), se encuentra en el modelo social-cognitivo.
- El modelo social-cognitivo comprende el para qué se aprende, desde una perspectiva no solamente individual sino también social.

Para la investigación:

- El aprendizaje puede ser significativo cuando se “engancha” en las estructuras cognitivas.
- El aprendizaje significativo se basa en lo que el alumno ya sabe o conoce, que pueden ser palabras, ideas, conceptos, o símbolos (o grupo de símbolos).
- El aprendizaje mecánico se lleva a cabo cuando se asimila textualmente los contenidos y carece de significado para el sujeto.
- El aprendizaje mecánico no es deseable, pero en algunos casos es necesario para construir aprendizaje significativo.
- Si el material a aprender se asocia con conocimientos preexistentes o situaciones, es significativo, aunque estas estructuras no tengan relación directa con la explicación real del concepto.
- La adquisición de la información de manera inductiva, es indispensable, para un aprendizaje por descubrimiento.
- El alumno actuará dentro del marco constructivista, cuando se torne responsable de su propio aprendizaje, cuando crea, inventa, modela e incluso cuando asocia o descubre.



Las Prácticas Matemáticas Explícitas

La aplicación de un modelo educativo difiere en los resultados de cada instituto que lo adopta, tiene sus variantes de acuerdo a las características locales de esa comunidad o sea del escenario en el que se aplica. En la práctica docente se cuenta con material de apoyo (herramientas didácticas, herramientas intelectuales, documentos, textos, materiales audiovisuales de apoyo, etc.) Que determinan el grado de aproximación al modelo educativo, a nuestro criterio, esas prácticas realizadas (estructuradas previamente) por el docente son producto de la asimilación y metodología expresa en los lineamientos existentes en la institución (área académica, departamento, academias etc.) o en fuentes externas oficialmente aceptadas.

Las prácticas matemáticas explícitas, tienen su origen en la puesta en acción de los elementos didácticos documentados. En ITESRC, existen formas para documentar los procesos de educación que fueron o son aceptables, es decir pueden explicarse en el fundamento teórico del modelo antes mencionado. Algunas de ellas se encuentran regidas directamente por la institución basada en el modelo educativo actual siendo revisados y documentados por el Departamento de Calidad de acuerdo a la norma de calidad ISO-9000.

Algunos ejemplos de los formatos que se tienen en la institución para documentar las metodologías y PME a utilizar en cada semestre por los docentes son:

Formato Calendarización RC-03-03

Tiene la finalidad de registrar al inicio de cada semestre la calendarización de cada uno de los temas por clase, organizado por fechas y tema. Permite al docente distribuir los contenidos, y su divulgación se constituye en punto de partida para otros docentes de la misma asignatura. No existe un formato con distribución oficial, se

estructura por los docentes y se modifica cada semestre según los comportamientos que se observan en el desarrollo de las clases.

Registro de trabajo por unidad RC-03-04

Se define también a inicios del semestre y permite tener referencia de las formas de evaluación en cada unidad y las referencias bibliográficas, además indica los objetivos a cumplir en cada unidad, que desde luego no deben diferir de los objetivos educacionales marcados en el temario.

Planeaciones de clase RC-03-05

Son programaciones semanales, una por día por clase, que permiten establecer un plan de trabajo en cada semana. Tienen estructura definida en puntos que deben contenerse en la clase. Su divulgación permite verificar los cambios, dificultades, atrasos en cada tema, técnicas didácticas aplicadas y los ejemplos que se realizan en el aula.

La entrega de estas planeaciones se va registrando en un formato de control por cada catedrático donde se especifica, mes, semana, materia, grupo, fecha de la revisión y firma del Jefe Académico y del Docente, anotando las observaciones en caso de ser necesario. Con esto se puede visualizar el cumplimiento de esta actividad.

Asimismo, en el proceso educativo se da seguimiento a los índices de reprobación al término de cada unidad evaluada, anexando el examen, avance en su dosificación y las listas de calificaciones. Estos documentos se van registrando en un formato que permite visualizar el desarrollo tanto del cumplimiento de fechas por parte del docente, como del aprovechamiento del estudiante a lo largo del semestre.

Este sistema de verificación constante se ve apoyado y reforzado con la realización de visitas a las aulas para supervisar la impartición de la clase y evaluar los parámetros importantes, como son:

- Las estrategias de disciplina en el salón de clases
- Fortalecimiento en la realización del trabajo

- Estrategias de enseñanza
- Ambiente de trabajo adecuado en el aula
- Observaciones y comentarios en cada caso

Las PME se ven reforzadas, cuando se modifica o añade información con estas actividades, e incluso, con los cursos de actualización y de capacitación a docentes, en la elaboración de apuntes y manuales.

Otro registro que consideramos que aporta material para las prácticas matemáticas son las Investigaciones del instituto, pues sus resultados han logrado modificar algunos aspectos de las clases de matemáticas, no únicamente didácticos, sino también en tiempos y contenidos.

Todas estas acciones son registradas y aceptadas por la institución de manera directa, pero no están incluidas en el modelo educativo del sistema nacional de tecnológicos. En este sentido a nuestros efectos ellas son PME.



Las prácticas matemáticas no explícitas

Es evidente que las aportaciones individuales de cada docente y estudiante están presentes en el desarrollo de clases condicionando de manera significativa el aprendizaje. Además de conocer los hechos, conceptos y procedimientos importantes en su disciplina académica los profesores deben saber cómo transformar su conocimiento en ejemplos, explicaciones, ilustraciones o gráficos y actividades efectivas, basándose en experiencias personales.

El aprendizaje es un proceso complejo y mediatizado. El propio alumno constituye el principal agente mediador debido a que es él quien filtra los estímulos, los organiza, los procesa y construye con ellos los contenidos y desarrolla habilidades, etc., para finalmente asimilarlos en un aprendizaje significativo o superior y transformarlos.

El rechazo al cambio existirá en cada aplicación de un nuevo modelo de trabajo que exija soluciones y presente retos. Así el docente modifica y distribuye herramientas que considera adecuadas para cumplir con el objetivo educacional en cada caso. Desea que sus estudiantes tengan ventajas para solucionar planteamientos matemáticos, pero corre el riesgo de que se esté encauzando mal el concepto y se desvíe la atención de los objetivos.

Características o elementos que apoyan a las PMNE

Por parte del docente

- Uso de material didáctico no establecido en temario como sugerencia didáctica.
- Estímulos
- Establecimiento de reglas para operar objetos matemáticos
- Elaboración de Formularios

La forma en que se estimula al estudio de las matemáticas pocas veces es registrada y se encuentra dentro del contrato didáctico. El docente se apoya a menudo en materiales didácticos no convencionales que son parte clave del aprendizaje, tales como: canciones, rimas, objetos cotidianos, etc.

Por parte del alumno

- Memorización de contenidos
- Nemotecnia
- Formularios
- Técnicas de estudio grupales (sin guía del docente)
- Realización de apuntes

Los formularios propios de los estudiantes se estructuran con o sin el consentimiento del docente, su uso es el que estará restringido en ciertos momentos.

La mala estructuración de la evaluación da cabida a que el estudiante que memoriza produzca la impresión de haber asimilado los contenidos y obtenga buenas calificaciones, con lo cual continúa realizando esta práctica. La memorización no estructura el conocimiento, pero es necesaria para llegar a él⁹.

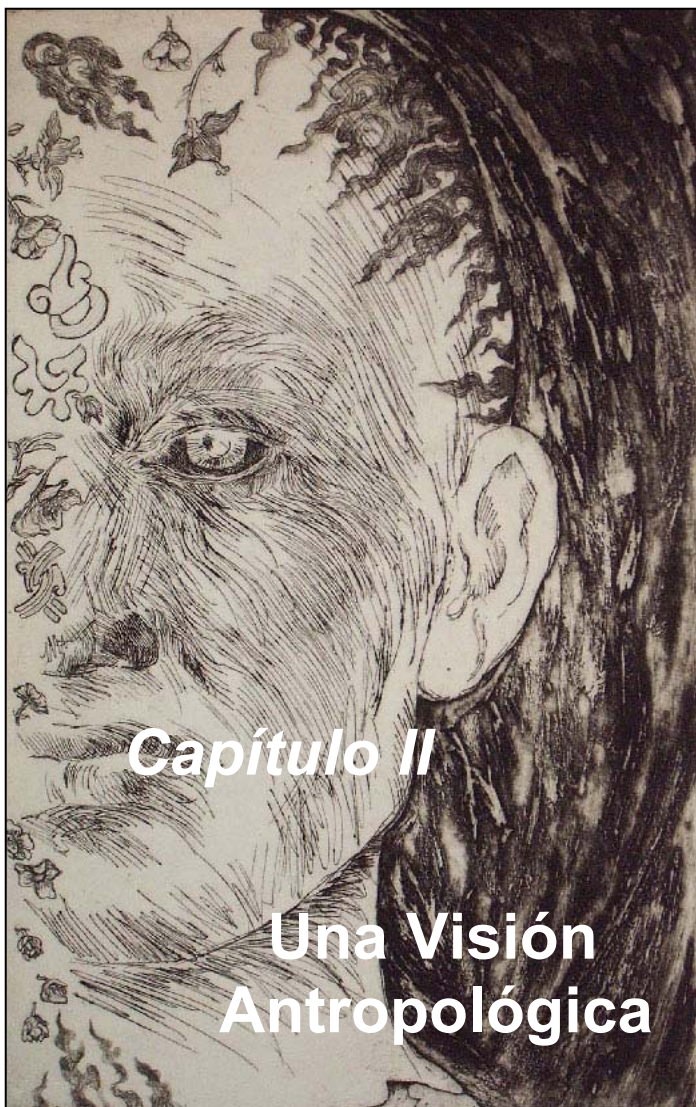
La nemotecnia es uno de los recursos más utilizados. Aunque se evite esta práctica existirá en cada momento algo de ella. Su objetivo es el de memorizar mecánicamente, sin embargo tiene otros resultados como es el de relacionar conceptos a situaciones e imágenes o a otros conceptos, lo que sí incide en el aprendizaje.

Los efectos de la nemotecnia representan un área de estudio, cuyo objetivo es regular su uso y verificar si puede fomentar un aprendizaje. La versatilidad que tiene le da características únicas, es la razón por la cual los estudiantes crean recursos

⁹ *El aprendizaje se define en términos de los cambios relativamente permanentes a la experiencia pasada y la memoria (memorización entendida como la retención en memoria) es una parte crucial del proceso de aprendizaje, sin ella, las experiencias se perderían y el individuo no podría beneficiarse de las experiencias pasadas. La memoria no tendría "contenido" si no tuviera lugar el aprendizaje y de manera inversa un aprendizaje depende de la memoria para su permanencia.*

nemotécnicos y los heredan a otros estudiantes. En este instituto se pudo presenciar dicho fenómeno (que no es exclusivo de este contexto) en las clases de matemáticas. En esta investigación se presentan resultados obtenidos a partir de las observaciones de un comportamiento real en el aula, que deberá ser base para decidir si la nemotecnia puede influir de manera significativa en el aprendizaje de las fórmulas de las derivadas y si es viable incluirse como una PME.

Estas prácticas existen en un currículo oculto, surgen en el aula, no pueden ser analizados con los fundamentos teóricos antes explicados, ya que el modelo en acción, fue estructurado en base a un comportamiento teórico, no estructurado a partir de las acciones o reacciones en el aula y/o sujetos que interactúan en el proceso de enseñanza aprendizaje (evidentemente si tiene cambios constantes en base a lo anterior, cuando las investigaciones demuestran con suficiente argumento los beneficios de cambio). La visión antropológica de Yves Chevallard, provee de un sustento teórico adecuado, desde la perspectiva del aula, directamente hablando: las clases de matemáticas, de tal manera que, el fenómeno didáctico (recursos nemotécnicos) en cuestión, tenga elementos convincentes para elaborar un análisis admisible, que auxilien a responder las preguntas de esta investigación.



Una visión Antropológica

La investigación se orienta hacia el estudio de las prácticas matemáticas no explícitas y su posible impacto en el aprendizaje, en particular mirando el uso los recursos nemotécnicos.

La teoría de Yves Chevallard¹⁰, orientada hacia el aprendizaje de las matemáticas en el aula, nos proporciona un marco teórico con el cual poder contrastar el modelo Institucional en acción, en su interpretación de los fundamentos teóricos que lo rigen.

Un saber matemático no puede trasmitirse o implantarse. Las teorías pedagógicas (como la del modelo Institucional en acción), intentan articularse en actividades y practicas en las que se pueda lograr el aprendizaje (constructivistas actualmente). Sin embargo, la naturaleza de los objetos que se tratan y las relaciones implícitas en el juego de lo didáctico particular de las matemáticas, exigen de una a disciplina propia que los estudie. Este es el caso de la didáctica de las matemáticas, que en relación a los sujetos o instituciones que la moldean, enseñan,

¹⁰ *El tratado de este capítulo es en base a las obras y escritos de Yves Chevallard que se mencionan en la bibliografía, se anexaron enlaces e interpretaciones para adaptarlo a la perspectiva de interés para esta tesis, los párrafos en cursiva son directamente tomados del autor.*

utilizan o producen, se toma en cuenta el efecto social cognitivo del usuario de la matemática, denominado y detallado mas adelante como antropología didáctica.

La Antropología Didáctica

La didáctica de las matemáticas estudia los fenómenos didácticos y las relaciones existentes en el estudio de la matemática, ¿pero a qué campo pertenece?, no podemos situarla en el estudio de las matemáticas, pues no pertenece a un conjunto de objetos matemáticos particulares a estudiar, más bien, surge de la necesidad de regular y establecer estrategias para su aprendizaje, así como identificar irregularidades del proceso. La pedagogía y la psicología son áreas que aportan algunos fundamentos, pero por sí solas no pueden explicar todos los fenómenos ligados a la enseñanza – aprendizaje, específicos de las matemáticas que surgen en el aula.

Yves Chevallard hace hincapié en este punto, denota que no existe un área específica establecida, en donde se pueda insertar a la didáctica de las matemáticas acorde a su propósito, propone que ser considerada en el campo de la antropología, los fenómenos didácticos no son producto de los objetos matemáticos, sino de las personas cuando mantienen o crean alguna relación cognitiva con dicho objeto.

Los sujetos, las instrucciones, objetos y relaciones, son los protagonistas principales de este estudio antropológico.

El objeto O existe para el sujeto X , si tiene una relación con el objeto O (designado por el autor como $R(X,O)$), un objeto llega a existir si el sujeto tiene conocimiento de dicho objeto, cuando mantiene una relación, se establece, modifica o altera).

De la misma forma existe una relación de las instituciones I con los objetos O (entendiéndose éstos como objetos de conocimiento) $Ri(O)$, si para varias personas X de esta institución I , O existe, entonces $Ri(O)$ es aceptada como objeto institucional para I .

Un sujeto Z externo a I , con una $R(Z,O)$, supone conformidad de $Ri(O)$, si es aceptada en $Ri_z(O)$.

(A consideración personal esta parte es importante pues presupone el papel de la evaluación, tanto docente como de los estudiantes, y confronta la realidad de las percepciones sobre los objetos matemáticos en los sujetos X de las instituciones I , que desencadena en una transposición didáctica como veremos más adelante)

Lo didáctico existe cuando un sujeto Y tiene la intención de hacer que nazca o cambie la relación de un sujeto X con O

La relación es explícita en el siguiente párrafo:

*Puesto que **lo didáctico** habita en todas partes en la materia antropológica, está enteramente presente – metáfora que toma prestada a los matemáticos- en lo cognitivo y también en lo antropológico. Es preciso aprender a verlo, puesto que la cultura no nos ayudará para nada, en ese sentido: “la sensibilidad didáctica” es aquí la esencia de un oficio nuevo, el de **antropólogo de lo didáctico**. Chevallard (1991 p. 150)*

La Antropología de los Saberes

Los objetos de conocimiento en sus relaciones estudiadas en la antropología didáctica, orillan a escudriñar los sistemas que lo componen. El objeto matemático O , puede ser conocimiento pero las matemáticas van más allá pues son un saber.

No todo conocimiento es un saber, los saberes designan una cierta forma de organización de los contenidos. La existencia de los saberes no está enteramente asegurada, es siempre discutible y también es un espacio de conflicto, que introducen dinámica en la sociedad y la cultura.

Un saber S existe para varias instituciones I , es decir es albergado en distintas I , se notará que tiene apreciaciones distintas en relación de $R(X,O)$ y $R_i(O)$, crea una relación institucional $R_i(S)$ que es denominada problemática institucional, debido a las interpretaciones de S en cada I , $R_i(S)$ difiere (Referida de esta forma ya que establece una situación actual, el saber, en cada *institución está impregnado* por modelos personales o locales que le permiten tener discrepancias significativas, ver más adelante transposición didáctica).

En este sentido Chevallard percibe cuatro tipos de manipulación del saber como problemáticas institucionales:

- La institución I puede tener, en relación con S , una problemática de **utilización** cuando se utilizan las matemáticas para distintos fines específicos de aplicación, bruscamente definido; todo aquel que utiliza las matemáticas, las manipula.
- Una problemática de **enseñanza**, es el caso de los agentes de I que manipulan a S para enseñarlo
- Puede existir una problemática de I con respecto a S al producirlo, es decir sería una problemática de **producción**. Es decir se manipula a S para producir el saber de S .

- La última manipulación que existe es la **transpositiva** de los saberes en las instituciones – las noosferas

Así entonces un saber puede ser utilizado, enseñado y producido. Si el conocimiento es adjetivo de cognitivo y el de los saberes de lo epistemológico, es necesaria entonces una antropología epistemológica en lugar de una antropología de los saberes (epistemología).

Chevallard menciona que la antropología de los saberes es sinónimo de epistemología y que sin embargo esta última se ocupa casi exclusivamente a la producción de los saberes y al estudio de sus productores, dejando a un lado la utilización y la enseñanza.

*...la enseñanza de un saber más ampliamente, su manipulación didáctica en general, no puede comprenderse en muchos aspectos si se ignoran sus **utilizaciones y su producción**. Chevallard (1991, p. 155).*

La manipulación de los saberes aleja los objetivos educativos de los objetivos de la materia o el del objeto matemático en sí, en otras palabras existen discrepancias entre los saberes enseñados y los saberes “sabios”. En esta brecha se puede perder el sentido original de aplicación y uso.

¿De dónde provienen los saberes enseñados?

Los saberes enseñados se encuentran en el cuarto tipo de manipulación, la manipulación **transpositiva**, es decir el proceso que sufre un saber desde la institución productora a la institución didáctica, a este proceso se le ha llamado Transposición Didáctica.

La *transposición institucional*: es propiamente una transposición a una institución I, mientras que una *transposición didáctica* incide en una institución didáctica. La primera de ellas excede por mucho a la segunda, pero ambas *son el resorte esencial de vida de los saberes*

...Y nunca subrayaría lo suficiente en ese sentido hasta que punto la manipulación transpositiva de los saberes es una condición sine qua non del funcionamiento de nuestras sociedades, cuyo descuido, puede ser criminal... Chevallard (1991, p. 159).

Para Chevallard, no es posible acceder directamente a un saber, sin otra formación, ningún sistema lo permite, es decir se necesita una formación previa que formule cierta homogeneidad relativa, que es el *objetivo de toda enseñanza general*.

Sin embargo la problemática en este punto es que se crea una gran polémica entre los saberes (que es un punto que analiza la presente investigación), las necesidades de **saberes de los profesionales, de las prácticas sociales** y de los **saberes efectivamente enseñados** (hablando de escolarizados), no están reconciliados. La problemática es latente, en la poca o nula relación actual de los dos primeros saberes con el tercero.

El sistema de saberes deriva de la estructura de la producción, de la utilización, de la enseñanza de los diferentes saberes y también, por supuesto, de toda red traspositiva de las noosferas sin las cuales los saberes no podrían sobrevivir.

Este frágil sistema debe mutar constantemente para poder sobrevivir, particularmente en la enseñanza profesional. En consecuencia los modelos institucionales no tienen periodos largos de estabilidad.

La transposición didáctica en los institutos ha permitido que se deslinden los saberes en áreas “*de distinta índole*”*. Concretamente en matemáticas los saberes enseñados se alejan de los saberes profesionales o de los saberes sociales, (Cantoral, 2003) cada vez el saber enseñado tiende a justificar su existencia dentro del marco profesional presentando situaciones que creen necesidades matemáticas, con los objetos que ya se presentaron. Sin embargo, las matemáticas siguen siendo parte de un proyecto que responde a necesidades sociales, tanto los saberes profesionales como los enseñados deben ser integrados en mayor medida a los saberes sociales.

Pero continuando con nuestra búsqueda de elementos para aclarar favorablemente la pregunta principal de investigación conviene analizar lo siguiente:

* *De distinta índole---* Se refiere al punto en que los estudiantes o docentes, tienen la visión errónea, de una separación existente entre las ciencias básicas y las de aplicación, en los programas de estudio de las ingenierías.

¿Qué es una actividad Matemática?

Chevallard (2000) menciona tres aspectos que han de caracterizar lo que será llamado *actividad matemática*.

1.- Cuando utilizamos las matemáticas conocidas. Esto es, cuando resolvemos problemas utilizando los conocimientos existentes ya sea de forma personal o externa. Este es el caso de los Ingenieros que utilizan sus conocimientos para modelar situaciones de su especialidad o área de trabajo. Se basan en lo que ya saben aunque no tengan dominio de la explicación de la procedencia de tal conocimiento matemático, pues lo importante es dónde y cómo se usa, antes del propio estudio matemático del objeto. Por ejemplo cuando un arquitecto desea estimar el área de un triángulo, en su solución quizás recurra a la fórmula: base por altura sobre dos, que aprendió en la escuela, y le dará la respuesta a su interrogante de manera exitosa, aunque no tenga referente del porqué de la estructura de esa fórmula.

2.- Aprender y enseñar matemáticas. En algún punto de la resolución de un problema podemos toparnos con que no tenemos dominio de instrumentos apropiados y se recurre a la investigación (para el aprendizaje) de tales objetos matemáticos o consultamos para instruirnos con algún individuo que domine el tema, la complejidad del tema que queremos asimilar determinaría nuestra fuente de enseñanza o de aprendizaje.

En este segundo punto debiera estar centrada la actividad escolar. Según Ausubel (1988) para que se aprenda significativamente uno de los puntos es que el alumno tenga necesidad de trabajar con el objeto matemático en cuestión, de tal manera que no se limite a los conocimientos que imparte el docente.

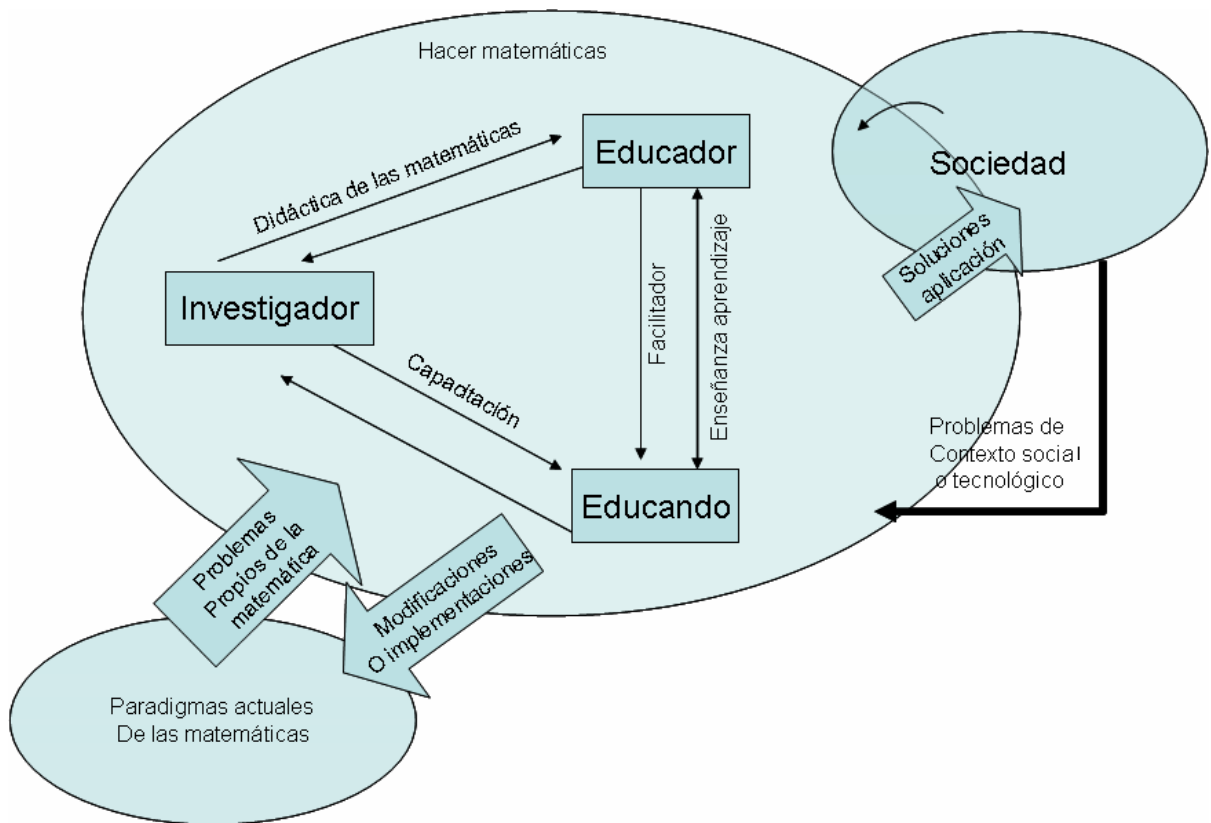
3.- Cuando se crean matemáticas nuevas. Si se modifica de alguna manera el modelo existente y se adapta a nuevas situaciones.

Un punto importante que menciona Chevallard es que se crean matemáticas nuevas cuando se aprenden matemáticas nuevas, en el sentido de los alumnos, pues aunque ya existan y sean dominadas en varias ramas, serán un suceso novedoso e importante para el alumno en su proceso de aprendizaje.

¿Cuándo se hacen matemáticas?

Todos alguna vez de cierta manera hacemos matemáticas, pero en la sociedad parece no estar definido esto de manera clara, de tal forma que dicha actividad pareciera ser exclusiva de un grupo selecto.

El enseñar y aprender matemáticas responde a necesidades personales, pero el hacer matemáticas responde a una necesidad individual y social, que implica que en algún momento se hacen un poco de matemáticas, que en su medida se domina, acorde a las necesidades que nos permite sobrellevar nuestras actividades dentro de un entorno definido. De hecho Chevallard indica que hay gente que hace matemáticas para otros, sin conocer o reconocer sus propias necesidades matemáticas.



Se hacen matemáticas cuando:

- Se enseñan matemáticas en la escuela, propiamente hablando de la enseñanza-aprendizaje en el aula (Docente-alumno).
- El educando (estudiante) resuelve problemas y piensa en soluciones alternas.
- El docente (educador) actúa como guía o facilitador, incluso cuando investiga los temas a presentar.
- Cuando el estudiante investiga temas de matemáticas para la clase, o cuando realiza el papel de facilitador para sus compañeros.
- El investigador matemático al realizar aproximaciones o estudios a un paradigma para su análisis, ya sea que aporte nuevos elementos o aclare los ya existentes. Fuera del contexto del aula.

Estas actividades, no están dirigidas en su uso fuera de las matemáticas, es decir, no tienden a solucionar problemas planteados por la sociedad (no solicitado de forma externa a la clase o investigador). Están orientadas al estudio de los paradigmas propios de la matemática y desencadenan en nuevos paradigmas que a su vez forman parte de las matemáticas actuales de un sujeto o comunidades de estudio.

La otra parte es hacer matemáticas, para el propósito que fueron creadas, es decir, la aplicación a problemas que exige la sociedad.

- Cuando se resuelve un problema por parte de cualquiera de los actores antes mencionados (Investigador, docente y estudiante) para personas que no dominan esa matemática, pero si reconocen la utilidad del resultado.
- Dentro de la sociedad existen conocimientos básicos que cada individuo domina de forma distinta, si se utilizan estas bases para responder a una necesidad matemática propia o ajena, también se dice que se están haciendo matemáticas.

- Cuando se reconoce la necesidad y se adquiere un nuevo conocimiento, sin profundizar en su origen sólo en su aplicación, en un grupo o sujeto de la sociedad no involucrada directamente en grupos de estudio de matemáticas.
- En su sentido más amplio el autor aclara que las matemáticas no sólo se aprenden y se enseñan, sino también se aplican. Esta consideración, refuta lo que popularmente expresan los estudiantes, que las matemáticas únicamente pertenecen a la escuela, y así reducen su valor social. Donde la matemática se observa como una meta aislada de los objetivos educativos y no como necesaria (aún más allá como elemental en su formación).

¿Cómo se definen y estructuran las matemáticas?

En la escuela se definen con base en:

➤ Los contenidos curriculares

Responden a un cúmulo de información que el estudiante debe tener, que desde un proyecto educativo, los representantes de la sociedad presentan un paquete de lo que debemos estudiar. Que Chevallard lo denomina **el problema de la elaboración del currículo escolar** de las matemáticas, que es importante analizar, puesto que discierne entre las actividades y saberes planteados que serán llevados al aula, con el fin de cumplir el propósito expuesto, a manera de objetivo educacional y los que realmente se llevan a cabo, aún más el problema existe en los que no se llevaron a cabo o que no fueron contemplados por no distinguirse su aportación en este plan educativo (*modelo educativo*).

Los contenidos del currículo pueden ser conceptuales; que responde a los contenidos matemáticos que se deben conocer, los contenidos procedimentales, intentan distinguir la profundidad y la aplicación en que sean usados, y los contenidos actitudinales, los que se consideran como dentro de las obras de la sociedad que no pueden describirse en términos de tareas o procedimientos.

Estos contenidos no pueden ser solamente transmitidos al alumno, pues esto no asegura que se tenga aprendizaje.

➤ **Técnicas y fundamentos didácticos**

La *didáctica de las matemáticas* se identifica o tiene relación con el estudio y con la ayuda al estudio de las matemáticas, para identificar los *fenómenos didácticos* que surgen del proceso de estudio de las matemáticas. Entre otras muchas cosas, analiza las reacciones y la resistencia al estudio de las matemáticas integrando técnicas didácticas que estimulen el desarrollo del pensamiento matemático.

Una técnica didáctica antes de ser aceptada y significativa tiene su rendimiento en dependencia con el contrato didáctico, en el que actúan profesor y alumno, que estructura lo que se puede realizar o no en una clase, o lo que tiene sentido para el alumno y el profesor en dependencia del aprendizaje.

Si queremos comprender el funcionamiento de una clase de matemáticas, no basta con observar lo que hacen el profesor y los alumnos; tampoco es suficiente describir las técnicas didácticas que utilizan, ni el dominio que muestran por las mismas. Para entender los hechos didácticos que pueden observarse en una clase de matemáticas, es preciso interrogarse sobre la estudiabilidad de la cuestión matemática planteada y sobre las restricciones que emanan del contrato didáctico Chevallard (2000, p.195)

➤ **Teoría de las situaciones didácticas**

Chevallard con base en las Teorías de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, establece que una *situación didáctica* es aquella determinada por ciertos valores concretos de las variables del sistema didáctico. Una situación adidáctica, es una situación matemática de dicho conocimiento tal que por sí mismo, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional provoca un cambio de estrategia de un jugador (en nuestro caso un alumno) en el planteamiento de la solución a un problema.

Se define como obstáculo a aquél que se tiene cuando son necesarios cambios bruscos de estrategia óptima.

Se desprende de dos consecuencias principales:

Aprender un conocimiento matemático, se corresponde siempre con un cambio de estrategia: todo conocimiento surge asociado a una nueva estrategia capaz de resolver un problema que la estrategia base se había mostrado incapaz de resolver.

La estabilidad de la estrategia ganadora es siempre relativa respecto al cambio de los valores que pueden tomar las variables didácticas. Es necesario cambiar sucesivamente las respectivas estrategias óptimas que van apareciendo.

Si una situación adidáctica implica llevar a cabo el desarrollo de un aprendizaje por parte del alumno, se tiene entonces un obstáculo, pero se debe tomar en cuenta que la estrategia que determine el alumno como ganadora dependerá del objetivo real que persigue el mismo, es decir, si el fin es solventar una evaluación donde se requiere el dominio de una operación matemática de forma efectiva el alumno trazará formas o estrategias con las cuales pueda sobrellevar de manera exitosa el planteamiento. Esto no significa que los medios que utilice para plantear una solución no formen parte de la estrategia sino por el contrario son esas mismas las que serán creación personal del alumno o grupo de alumnos, que serán modificadas por nuevas para que se tengan mayor conocimiento del objeto a estudiar.

¿En qué dispositivos se apoya la escuela para que se aprenda matemática?

Se define como dispositivo escolar a cualquier mecanismo dispuesto para obtener determinados objetivos educativos. La clase de matemáticas, el libro de texto, los exámenes, las preguntas que el profesor hace, las tutorías y los descansos son dispositivos escolares, en la medida en que cada uno de estos dispositivos incide sobre la estructuración y el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas, funcionando como un dispositivo de ayuda al estudio de las matemáticas, diremos que se trata además, de un dispositivo didáctico.

Los dispositivos escolares son todos aquellos que ayudan al estudio de las matemáticas, los diversos obstáculos (epistemológicos) se solventan a partir de esos dispositivos, comunes en el proceso de estudio que en su mayoría es heterogéneo.



Comentarios finales del Capítulo

Cribeiro (1999) en su reporte del análisis al ITESRC, plantea una problemática que hace ver las condiciones en que operan los estudiantes¹¹, Chevallard (2000), indica que este tipo de factores, en la didáctica de las matemáticas, ya no son considerados como las causas de una *irresponsabilidad matemática*, sino consecuencias de determinados fenómenos, y que pueden ser explicadas por las leyes que rigen el proceso didáctico (algunos elementos de ese proceso se mencionan en los puntos anteriores en este capítulo) .

Agrega:

.....las normas que tácticamente, sin acuerdo expreso, rigen en cada momento las obligaciones reciprocas de los alumnos y el profesor respecto al proyecto de estudio que tiene en común (p.62).....

Estas cláusulas evolucionan a medida que el proceso didáctico avanza y constituye un contrato didáctico.

Así, entonces las explicaciones didácticas, a los fenómenos didácticos en el aula, deben partir de las actividades matemáticas que tanto el profesor como el alumno realizan dentro y fuera del aula, y de las cláusulas del contrato didáctico¹².

No podemos entonces ignorar las producciones de los alumnos, pues se encuentran dentro de lo antes mencionado.

Tradicionalmente no se ha tomado muy en serio el trabajo matemático concreto de los alumnos, de hecho nunca se le consideró como un “verdadero” trabajo matemático. Chevallard (2000, p.78)

¹¹ Ver el capítulo 1, p. 7 y 8

¹² Chevallard, describe el contrato didáctico como un conjunto de cláusulas que, de una manera implícita, rigen, en cada momento, las obligaciones reciprocas de los alumnos y el profesor, respecto a un conocimiento matemático.

Los recursos nemotécnicos son parte de esos trabajos matemáticos “no serios”, que de alguna manera (explícita o implícitamente) pueden ser aplicados en el aula, como respuesta a un *obstáculo* que se le presenta en el proceso de aprendizaje. Definir entonces qué es la nemotecnia es nuestra siguiente prioridad, y posteriormente en salón de clases estudiar sus efectos en un determinado ambiente y una aplicación particular.



Capítulo III

Una visión Social de la Nemotecnia

Nemotecnia en la sociedad

Mnemotécnica:

Del griego «mnéemee» (memoria) y «téchnee» (arte). Se define como el arte que procura aumentar la capacidad de retención de la memoria por medio de ciertas combinaciones o artificios. El término mnemotécnica o nemotécnica proviene de «Mnemósine», la diosa de la memoria, esposa de Zeus y madre de las nueve musas.

Conviene distinguir los términos nemotecnia y nemotécnica, la primera es la técnica antes mencionada, mientras que la segunda (que deriva de la primera) es el uso de elementos, o símbolos asociados, con características especiales o específicas (que pueden caer en lo exagerado), de tal manera que llame la atención y se pueda retener en memoria fácilmente un dato, tal es el caso de los colores en anuncios de alerta, simbologías propias de una profesión, gestos, etc.

Se dice que en general, la nemotécnica consiste en estructurar de forma inteligible elementos complejos no estructurados, y que no conviene abusar de estos recursos en la enseñanza, ya que su utilización puede provocar la simplificación de los conocimientos, el abandono de la lógica y el razonamiento intelectual, y, lo que es más importante, la comprensión y el porqué de los datos.

En la enseñanza, su estudio es limitado y generalmente enfocado hacia el aprendizaje memorístico.

La Mnemotécnica o nemotécnica¹³ se define de forma literal como *ayuda a la memoria* (Higbee, 1998), por lo que, todo aquello relacionado con la nemotécnica hará mención a la capacidad memorística, y más expresamente, a las posibles formas de mejorar la capacidad de ésta.

Entre las múltiples definiciones existentes del concepto de nemotécnica señalamos la de Mastropieri y Scruggs (1991), quienes definieron la mnemotécnica como el conjunto de métodos destinados a incrementar el aprendizaje inicial de los sujetos, así como la retención de la información en la memoria, lo que implica, además, una mayor efectividad a la hora de recuperar la información.

De tal modo, que la mnemotécnica, puede definirse como el conjunto de estrategias artificiales que ayudan a la memoria, facilitando los procesos de aprendizaje, o bien la posterior recuperación de la información. Hace referencia a los procesos de memoria y aprendizaje, y como tal, refiere a algo abstracto, algo que carece de la posibilidad de ser medido de forma directa.

Desde los albores de la antigua Grecia hasta la época barroca, la gente se preocupó de desarrollar la mnemotécnica, el arte de la memoria. Era un esfuerzo descabellado y sublime, a la vez destinado a ayudar al hombre a recordarlo todo, la totalidad del saber conocido

Los métodos nemotécnicos o "memorándums" deben su existencia a Simónides de Ceos¹⁴, quien en el año 477 a. C. hizo uso, por primera vez, del

¹³ A partir de 2004 la Real Academia de la lengua Española aceptó el cambio de la palabra *mnemotécnica* por *nemotécnica*, siendo válida cualquiera de las dos formas.

¹⁴ Yulis, c. 556-Siracusa o Agrigento, 467 a.J.C.) Poeta griego. Se instaló en Atenas (c. 526 a.J.C.) llamado por Hiparco. Residió en Tesalia, Cranón y Farsalia. Es autor de numerosas poesías, entre las cuales cabe citar los epigramas (en especial los epitafios y las inscripciones votivas) y los fragmentos conservados de los poemas líricos, que recogen elegías patrióticas y morales, ditirambos, peanes, hiporquemas, himnos, epinicios y trenos).

sistema *loci*¹⁵ empleando de esta forma la imagen para realizar de forma satisfactoria una tarea de recuerdo.

La nemotecnia ha estado presente, en la historia, por ejemplo en Tula, México, los pueblos antiguos emplearon el arte de la nemotecnia, donde dependiendo del color o número de conchas en un rito ceremonial, significaba ir a la guerra o la paz para los pueblos vecinos¹⁶.

A pesar de que la nemotécnica se conoce desde hace aproximadamente 20 siglos, fue en los últimos 40 años cuando ésta, impulsada por el auge de la psicología cognitiva, ha experimentado su mayor desarrollo.

Nemotecnia: Utilización de técnicas artificiales para facilitar el aprendizaje, la memoria, recuerdo y reconocimiento del material aprendido (diccionario de la Real Academia de la Lengua Española).

En esta definición, se involucran los conceptos de aprendizaje, memoria, recuerdos y reconocimientos, que precisamente es necesario tener en cuenta, ya que si bien la nemotecnia no es sinónimo de aprendizaje significativo, sí provee una vía que lo facilita, ya que como se mencionó en el capítulo anterior es necesario que el individuo involucrado en un proceso de aprendizaje, tenga conciencia y recuerde elementos que faciliten la asimilación de un nuevo concepto. La nemotecnia no persigue sustituir el significado de los conceptos a aprender de una manera simplista memorística, más bien intenta proveer de técnicas que auxilien el tránsito entre la memoria a corto y mediano y largo plazo, es decir, trabaja en el fortalecimiento de la recepción y solidez de los contenidos a través de la utilización de asociaciones de ideas, esquemas, ejercicios sistemáticos, repeticiones, etc., tal como una referencia rápida.

¹⁵ Se utiliza para entrenar la habilidad de recordar, especialmente en personas mayores en talleres de memoria. Consiste en crear un itinerario compuesto de lugares en un entorno que les resulte muy familiar, exagerando características de los objetos.

¹⁶ Datos del escrito de: María de Lourdes Suárez Diez, de la Dirección de Etnohistoria del Instituto Nacional de Antropología e Historia, inició sus estudios sobre la concha y su impacto en las civilización hispana en 1964.

Clasificación de la Nemotecnia

Existen varias formas posibles de presentación de la nemotécnica, las cuales se corresponden con las diferentes variedades sensitivas. Entre todas ellas, las más importantes, por ser las más estudiadas, y en consecuencia utilizadas, son la **nemotécnica visual** y la **nemotécnica verbal**.

La nemotecnia visual, se basa en el uso de imágenes o símbolos, para establecer relaciones entre el material que se quiere recordar o aprender. Sin embargo en la verbal, las asociaciones están fundamentadas en las palabras, (Higbee, ,1998) en ocasiones se presentan combinadas.

De todas las modalidades posibles de nemotecnia, cada sujeto se siente preferentemente atraído por el uso de una modalidad específica, lo que le concede a la nemotecnia la posibilidad de resultar efectiva para casi todos los sujetos, ya que cada persona tiene la posibilidad de elegir el tipo de método nemotécnico que más se acomode a su tipo de aprendizaje (Mastropieri y Scruggs, 1991) y/o a las características de la tarea a la que se enfrenta (Higbee, 1998).

La nemotécnica presenta la posibilidad de ser utilizados sobre distintos tipos de material, lo que implica que un mismo sistema puede ser aplicado repetidas veces para el aprendizaje de diferente información.

Las reglas nemotécnicas (nemotecnia), a diferencia de los sistemas nemotécnicos (nemotécnica como técnica de aprendizaje), presentan un uso limitado, lo que implica que se necesita establecer una regla diferente para el aprendizaje de cada conjunto de información.

Los siguientes son ejemplos de nemotecnia verbal:

a) Para recordar el Número Pi

(3,14159265358979323846264338327950288419...):

Sol y luna y cielo proclaman al Divino Autor del Cosmo.

(3, 1415926535)

(Autor: Manuel Golmayo)

(El número de letras de cada palabra representa la secuencia ordenada de las primeras once cifras)

Soy y seré a todos definible; mi nombre tengo que daros: cociente diametral siempre inmedible soy, de los redondos aros.

(3.1415926535897932384)

(Autor: Álvaro Vivar)

Soy π , lema y razón ingeniosa, de hombre sabio, que serie preciosa valorando enunció magistral. Por su ley singular bien medido el grande orbe, por fin reducido fue al sistema ordinario usual.

(3.1415926535897932384626433832795)

(Autor: I. R. Nieto París)

(El número de letras de cada palabra representa la secuencia ordenada de las primeras treinta y dos cifras)

b) Para saber las fases de la luna:

La luna es una mentirosa. Cuando está en Cuarto Menguante o Decreciente (D), tiene forma de «C». Al contrario cuando está en Cuarto Creciente (C) tiene forma de «D».

c) Para recordar los tipos de palabras según el acento (agudo, llano y esdrújulo) podemos utilizar la siguiente regla nemotécnica:

«*ELLA*»

<u>ANTEPENÚLTIMA</u>	<u>PENÚLTIMA</u>	<u>ÚLTIMA</u>
E	LL	A
ESDRÚJULA	LLANA	AGUDA

d) Para recordar el valor de algunos números romanos:

Loca de mamá

L, C, D, M

Número romano	L	C	D	M
Valor	50	100	500	1000

Regla nemotécnica donde se combina la visual y verbal

Para recordar que la palabra «vaca» (animal) se escribe con «uve»:
(Autor: Francisco Briz Amate)

La vaca tiene dos cuernos («uve»)



Aquí se alude al hecho de que la vaca tiene dos cuernos en forma de “v”, de manera que relacionara la imagen con la regla ortográfica.

Otras reglas de nemotecnia social¹⁷.

Regla nemotécnica: se cierra el puño de la mano derecha y se cuenta con un dedo de la mano izquierda. Los nudillos sobresalientes representarán a los meses de 31 días, y los huecos entre nudillos los meses de menos de 31 días. El primer nudillo (el del dedo índice) representa a enero (y por ser sobresaliente equivale a 31 días). El hueco próximo (entre los nudillos del índice y del dedo medio) representa a febrero (y por ser hueco tiene menos de 31 días, en este caso 29 o 28 días). El segundo nudillo (del dedo medio) representa a marzo (y por ser sobresaliente equivale a 31 días) y así sucesivamente hasta llegar a julio, representado por el nudillo del dedo meñique (que por ser sobresaliente equivale a 31 días). Luego se comienza de nuevo la cuenta desde el nudillo del dedo índice, que esta vez representará a agosto (y por ser sobresaliente equivaldrá a 31 días). Se continúa la cuenta hasta llegar a diciembre, representado por el nudillo del dedo anular (que por ser sobresaliente dice que diciembre tiene 31 días).

Existe una copla que se utiliza como regla nemotécnica para recordar el número de días de cada mes: "Treinta días trae noviembre, con abril, junio y septiembre. Veintiocho sólo trae uno y los demás treinta y uno".

Los usos de la nemotecnia en los casos anteriores no son muy estudiados, son de uso popular y fácilmente transmisibles, que más que técnicas son situaciones que ayudan, a recordar cierto dato. Sin embargo, la nemotecnia se explota en otras situaciones, de forma mas estructurada, con fines educativos o de aprendizaje.

Escasos son los estudios de la nemotecnia empleada como técnica de aprendizaje, mas bien, existen técnicas de aprendizaje, que utilizan elementos nemotécnicos.

El sistema de educación pública nacional, en su etapa de preescolar y primaria, está impregnado de estos recursos y técnicas nemotécnicas, los cantos, rimas, juegos, imágenes e incluso gestos, son utilizados con una doble finalidad, que

¹⁷ Me refiero a nemotecnia social, como aquellas coplas o artificios que se utilizan para recordar datos utilizados comúnmente en una sociedad definida, y que es de la mayoría útil el valor obtenido.

sea significativo y de interés para el niño, además que cree una referencia para el contenido que se trató en esa sesión de clase.

Nemotecnia como estrategia de aprendizaje

La nemotecnia estructurada como técnica de estudio es conocida como nemotécnica. Las técnicas de memorización tienen su base principalmente en la nemotécnica, una de estas técnicas, conocida por muchos como la palabra clave en algunos estudios, recibe este nombre, por basarse en otorgarle *banderillas*¹⁸, a ideas, conceptos o palabras, de tal manera que puedan ser recordados fácilmente.

La nemotecnia como palabra clave, la existencia de la nemotecnia de la palabra clave se debe a Richard Atkinson, quien, en 1975, elaboró dicha regla nemotécnica como una estrategia de utilidad para la adquisición de vocabulario perteneciente a lenguas diferentes a la propia.

La técnica de la palabra clave, al igual que otros muchos métodos nemotécnicos, hace un uso conjunto de la nemotecnia verbal y de la nemotecnia visual (Levin y Pressley, 1983). La aplicación de la nemotécnica de la palabra clave consta de dos fases o etapas. La primera de ellas supone la elaboración de una asociación acústica, mientras que la segunda implica una asociación visual. En la primera de las fases, la acústica, los sujetos adquieren la palabra clave. Esta palabra clave es una palabra lo más concreta posible, familiar para el sujeto que se enfrenta al aprendizaje, y que debe sonar de la manera más parecida posible a la palabra extranjera que se desea aprender. Posteriormente, en el segundo de los pasos, se debe relacionar, a través de la imaginación visual, la palabra clave seleccionada con el significado de la palabra no familiar, de tal forma que a través de esa interacción y la evocación de la palabra clave, el sujeto sea capaz de recordar la palabra objeto de aprendizaje, cuyo dibujo y sonido forman la imagen que le sirve como señal de recuerdo (Desrochers y Begg, 1987; Higbee, 1998).

¹⁸*Banderillas, término que se le da por colocar referentes visuales*

Teniendo en cuenta los dos pasos que componen la técnica de la palabra clave, Mastropieri y Scruggs (1991) afirman que *la premisa básica de este tipo de nemotecnia es la de convertir una información **no familiar en familiar**, a la vez que la de integrar las definiciones de las nuevas palabras con las de las palabras claves, fortaleciendo tanto la codificación como la recuperación de la información.*

Levin (1983), intentando explicar la efectividad que presenta la técnica, ha argumentado que la eficacia de la nemotecnia de la palabra clave está fundamentada en su adherencia a tres importantes asunciones de las estrategias de imagen para el aprendizaje. Estas asunciones señaladas por Levin están relacionadas con:

- a) *El uso de imágenes mejora sustancialmente el aprendizaje.*
- b) *La naturaleza de las imágenes en relación con el nuevo contenido.*
- c) *La existencia de características relevantes de los estudiantes (o de estudio).*

Si bien las asunciones de Levin explican, en parte, el éxito obtenido mediante la aplicación de la técnica de la palabra clave, no constituyen la única explicación posible al alto grado de efectividad derivado de la aplicación de la nemotecnia de la palabra clave. Existen varias teorías con capacidad para explicar su efecto, entre todas ellas cabe destacar la Teoría de la Codificación Dual de Paivio (1971 y 1975), según la cual la presencia de una imagen proporciona la existencia de un segundo código de memoria, el visual, que es independiente del código verbal, y que supone un incremento considerable de las posibilidades de recuperación. En consonancia con la Teoría de la Codificación Dual, la nemotecnia de la palabra clave trabaja mejor con palabras concretas que con palabras abstractas (Paivio, 1971).

En los primeros momentos después de las sesiones de aprendizaje, los sujetos tendrán que efectuar paso a paso todos los escalones de la técnica para llegar a recordar la información. Posteriormente, el recuerdo se va haciendo automático, ***hasta llegar un momento en el que la palabra clave se vuelve innecesaria para recordar el material*** (Mastropieri y Scruggs, 1991).

Los diversos métodos nemotécnicos han sido utilizados por los diferentes autores, con el fin de enseñar a los estudiantes nuevos. Entre todos ellos, la técnica

de la palabra clave es la estrategia más adecuada para el aprendizaje de este tipo de tareas, puesto que el principal propósito de esta técnica es incrementar el nivel de **aprendizaje inicial** y la retención de palabras de vocabulario no conocido (Mastropieri y Scruggs, 1991).

La palabra clave ha demostrado ser una técnica efectiva para el aprendizaje de vocabulario perteneciente a diferentes lenguas. Entre las lenguas aprendidas de forma exitosa mediante la aplicación de esta técnica, se podría mencionar el español, el francés, el latín, el alemán, el ruso, etc.

Aunque la razón principal de la aparición de la nemotecnia de la palabra clave fue su utilización para el aprendizaje de vocabulario extranjero, el uso de esta técnica se extrapoló al aprendizaje de muchas otras tareas, tanto de carácter social como científico. Una de estas tareas para las cuales se ha encontrado un amplio beneficio de la utilización de la estrategia de la palabra clave ha sido el aprendizaje de los países y sus respectivas capitales.

Diferentes trabajos de investigación han demostrado que la nemotecnia es susceptible de ser aplicada para el aprendizaje de toda aquella información que se pretenda recordar, independientemente de que sea de contenido social, científico, médico, geográfico, etc. (Mastropieri y Scruggs, 1991).

Entre las muchas otras aplicaciones que se han señalado de la nemotecnia, podríamos citar la de su uso para el aprendizaje de los presidentes de los Estados Unidos siguiendo un orden cronológico (Levin, McCormick y Dretzke, 1981). Para tal fin, la técnica de la palabra clave fue combinada con la de las palabras perchas y el sistema loci, de tal forma que con la primera se adquirirían los nombres de los presidentes, y con la segunda y tercera, el número que correspondía a su período de mandato. El uso de la combinación de estos tres métodos mnemotécnicos ofreció niveles de recuerdo significativamente superiores a los obtenidos por los sujetos controles.

La nemotecnia se ha mostrado también efectiva para el aprendizaje de términos científicos, tanto cuando estos estaban formados por palabras sencillas

como por palabras complejas (Viet, Scruggs y Mastropieri, 1986); para el aprendizaje de taxonomías y clasificaciones científicas; las características que definen una determinada categoría de elementos; la historia de la tierra; el significado de determinados prefijos y sufijos; nombres y características de los minerales; terminología médica; asociación de ciudades y los productos característicos de estas; gente famosa y sus obras; secuencias de operaciones matemáticas; etc.

La aplicación de la nemotecnia no sólo favorece el recuerdo de la información, sino también la comprensión de dicha información, viéndose favorecida de esta forma su posterior aplicación en una amplia variedad de contextos (Mastropieri y Scruggs, 1991).

La motivación y el entusiasmo que los sujetos presentan por el aprendizaje, se ve incrementado de forma notable cuando éste se realiza a través de la nemotecnia. La gran mayoría de los sujetos disfrutaban más del aprendizaje cuando emplean las técnicas, que cuando se enfrentan a dicha tarea aplicando las estrategias convencionales. El hecho de experimentar algo nuevo, diferente y ameno, sobre lo que se siente dominio, hace que el sujeto le dedique más tiempo al aprendizaje (Levin, 1981), y consecuentemente aprenda mejor el material. Este aumento de motivación ocasiona también un mayor interés y atención en la tarea por parte del sujeto, lo que sin duda favorece el proceso de aprendizaje, así como la actitud hacia la escuela.

Nemotecnia en la matemática

La matemática no es una excepción, tiene múltiples situaciones nemotécnicas en todas sus formas y tipos, algunas de ellas inclusive se han integrado tan bien al algoritmo u operación matemática, que pasan desapercibidas. Pero son aplicadas y se usan porque demuestran efectividad¹⁹ en el cumplimiento del objetivo planteado en el tema (la operación, aplicación, etc.)

Los siguientes son casos en publicaciones orientadas a matemáticas donde explícitamente se menciona que lo que se hace es nemotecnia.



UNIVERSITAS SCIENTIARUM
Revista de la Facultad de Ciencias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Vol. 8, 13-15

LA REGLA DE CRAMER A PARTIR DEL PRODUCTO GENERALIZADO EN $\mathbb{R}^n$

Moisés Aranda Silva¹, Reinaldo Núñez²

¹Profesor Pontificia Universidad Javeriana y Universidad Sergio Arboleda,
e-mail: maranda@javeriana.edu.co

²Director de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda,
e-mail: reinaldo.nunez@usa.edu.co

¹⁹ la efectividad de las reglas nemotécnicas, es poco estudiada, en su impacto en el aprendizaje. Esta investigación se restringe a evidenciar su presencia y uso de una regla en específico.

$$A \cdot X = 0$$

$$\|X\|^2 = \|A\|^2$$

Si $A = (a, b)$ el sistema tiene dos soluciones: $X = (b, -a)$ o $X = (-b, a)$. Imitando la definición nemotécnica del producto vectorial en $\mathbb{R}^2$:

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) \times (b_1 \ b_2 \ b_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

en $\mathbb{R}^2$ tenemos:

$$X = xA = \begin{vmatrix} i & j \\ a & b \end{vmatrix} = bi - aj = (b, -a)$$

Definición 1. La operación unaria de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida como

$$x(a, b) = \begin{vmatrix} i & j \\ a & b \end{vmatrix} = (b, -a)$$

resolviendo el sistema tenemos dos soluciones, una de ellas, expresadas nemotécnicamente es:

$$X = \begin{vmatrix} i & j & k & w \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

la otra solución es

$$X = - \begin{vmatrix} i & j & k & w \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

Definición 2. A la operación ternaria de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida como

$$BxCxD = \begin{vmatrix} i & j & k & w \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

Obsérvese cómo se obtiene el resultado basándose en una regla nemotécnica, el mismo autor menciona que se trata explícitamente de nemotecnia, un caso similar puede encontrarse en el libro de Algebra lineal de Stanley I. Grossman (1983, p. 74), a esta nemotecnia le llama “método”, no indica que es una nemotecnia (que solo funciona en matrices de 3x3 pero no explica por qué) de hecho, muchas reglas nemotécnicas son confundidas con operaciones aritméticas validas.

Tal método consiste en el cálculo de los determinantes en las matrices cuadradas de 3x3, se colocan flechas en direcciones determinadas, de tal manera que orientan al sujeto en dos datos, los elementos que se han de multiplicar y el signo que tendrán.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Las dos columnas iniciales se colocan nuevamente para formar una matriz no cuadrada

$$\begin{array}{ccc}
 2 & 2 & 4 \\
 3 & 3 & 3 \\
 4 & 0 & 2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \nearrow \nearrow \\
 \nwarrow \nwarrow \nwarrow \\
 \nwarrow \nwarrow \nwarrow
 \end{array}
 = - \det A$$

$$[(4)(3)(4) + (0)(5)(2) + (2)(3)(2)] - [(2)(3)(2) + (5)(2)(4) + (4)(3)(0)] = (48 + 0 + 12) - (12 + 40 + 0) = 60 - 52 = (8)$$

Se invierte signo²⁰ $\det A = -8$

Nombrado en algunas materias de especialidad como el **método de las flechas**, en los cursos actuales de algebra, es conocida como la **Regla de Sarrus** para estas encontrar el determinante de una matriz de cuadrada de 3x3, incluso forma parte de los temarios oficiales en algunas escuelas.

Para esta regla los elementos que se involucran (*flecha, orientación y arreglo*) son artificios que obedecen a la lógica de las matrices y lo refuerzan en su estructura, además determina un avance enorme, en recordar la manera de obtener el determinante de forma simple y fácil.

En el álgebra existen numerosos casos dado que sus fórmulas no pueden ser rápidamente memorizadas o asimiladas por el alumno, entonces se sustituyen por estas formas nemotécnicas que, muy frecuentemente, son tomadas como métodos, algoritmo u operación algebraicas.

La nemotecnia en su expresión visual, no es percibida muchas veces por los docentes o alumnos que sin querer o saber las usan. Un caso simple lo constituye la suma de vectores o momentos de giro, para un cuerpo anclado en uno de sus extremos.

$$\sum \overset{+}{M}x = 0$$

La flecha curva y el signo positivo (+), quieren decir *los momentos que ocurran con una orientación antihorario*

²⁰ Al final se invierte el signo, multiplicándolo por -1, algunos autores presentan el recurso nemotécnico donde las flechas tienen un significado inverso, es decir las que "suben" son negativas y viceversa, de tal manera que no existe necesidad de invertir el signo al final.

serán positivos, por lógica los sentido horario serán negativos.

Todo eso en dos símbolos que no son parte de la operación, pero agilizan su desarrollo, al recordarnos esa frase, que quizás ni siquiera será recordada, pero la idea intuitiva del proceso sí.

No toda simbología es nemotecnia, pero si el fin, es destacar una idea, frase o proceso sí lo es. *Si cuando se lee literalmente expresa lo que se pretende, no es nemotecnia.*

El caso de: **dy/dx** , sí es nemotecnia, puesto que utiliza simbología, para denotar una idea matemática, y dado que literalmente no expresa lo escrito (si ese fuese el caso no existiría la confusión de querer *cancelar* **d/d** y dejar **y/x** , o el separar **dy** de **dx** , como un cociente²¹), no podríamos decir que es un símbolo, sino un conjunto de símbolos, estructurados de manera tal que faciliten su interpretación, y que tienen relación con el concepto, así esto se convierte en una de las aplicaciones de la nemotecnia.

Otro caso muy desarrollado de nemotecnia en matemáticas, es la integración de funciones, en este caso esta institución (Departamento de Matemática aplicada, Universidad de Málaga, España) en uno de sus temarios

Tema 4: Integral definida y Cálculo de primitivas

²¹ dy/dx , es lógico para los estudiantes leer “d por y entre d por x” por lo cual no tiene inconveniente que se cancelen las “d”, o que se pueda separar en dos términos de un cociente, matemáticamente significa “la derivada de la función y, respecto a x”, el símbolo d/dx no puede o tiene propiedades para separarlo pues por el mismo es una noción.

Abordan la problemática de la técnica de integración por partes

I.T.Telecomunicaciones

Curso 2000/2001

DPTO. MATEMÁTICA APLICADA

en la derivada de un producto de funciones. A partir de él, trataremos de buscar una regla que nos permita calcular la integral de un producto de funciones.

Teorema: Si f y g son funciones derivables, y f' y g' son continuas, entonces:

$$\begin{aligned} \int f(x) \cdot g'(x) dx &= f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx \\ \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx &= f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx \end{aligned} \quad \blacksquare$$

La siguiente parte es interesante, pues expresan:

Observaciones:

a) Si hacemos $u = f(x)$ y $v = g(x)$, el teorema se puede expresar como:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Cuya **regla nemotécnica** es: “*solo un día vi un valiente soldadito vestido de uniforme*”.

b) Debe elegirse como u una función cuya derivada sea simple.

c) La parte que se iguala a dv , debe ser fácilmente integrable.

d) $\int v \cdot du$ no debe ser más complicada que $\int u \cdot dv$.

e) Algunas veces hay que repetir la integración por partes en la integral $\int v \cdot du$. $\emptyset$

También puede ocurrir que al cabo de una o dos integraciones sucesivas se obtenga en el segundo miembro una integral que coincida con la de partida, es decir, con la del primer miembro. En esta situación, basta despejar la integral para obtener una primitiva.

La regla nemotécnica ya está integrada como parte del desarrollo del tema, no pretendemos declarar, que dicha inclusión sea efectiva, sólo destacamos las prácticas de nemotecnia, incluidas en textos de esta índole.

El siguiente, es un caso publicado de un estudio, del cálculo de integrales en forma tabular, basado en la nemotecnia. El autor es José A. Rangel M.²²

Pretende dar una aplicación en la que se pueda llevar a cabo la integración por partes, utilizando un artificio tabular (nemotecnia), y una palabra, que asocia cada letra, con un tipo de función, de tal manera que el orden declarado ayudará a elegir las variables u y v , para la fórmula.

Usa la palabra nemotécnica **ILATE**, con el siguiente significado:

I: funciones Inversas Trigonómicas;

L: funciones Logaritmo Neperiano;

A: funciones Algebraicas;

T: funciones Trigonómicas;

E: funciones Exponenciales.

Integración por partes en forma tabular

*Para elegir “u”, se toma la primera función que ocurra de izquierda a derecha en correspondencia con la palabra **ILATE**.*

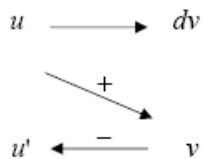
Por ejemplo, en

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx,$$

$u = x$, pues es la función algebraica. Con esa elección, dv es el resto, o sea: $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Tal como se observa, esta elección apoya la experiencia de lograr que la segunda integral sea fácil de calcular.

²² José A. Rangel M. es Licenciado en Matemática de la Facultad de Ciencias de la universidad Central de Venezuela (Caracas - Venezuela). Magister Scientae en Matemática de la Facultad de Ciencias Universidad de los Andes (Mérida-Venezuela). Profesor Asociado adscrito al Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira. **e-mail:** rangelmorano@cantv.net

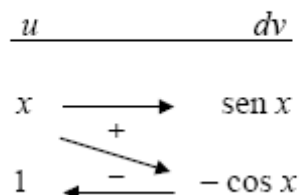
A fin de esquematizar la fórmula de integración por partes, se usará el siguiente diagrama:



Las flechas horizontales indicarán las integrales de dichos productos y la flecha oblicua indicará el producto con signo, comenzando por el signo más (+). Nótese la alternabilidad de los signos comenzando en la flecha oblicua con más (+). Obsérvese que siguiendo el diagrama anterior, se obtiene la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplo 1. En la integral $\int x \operatorname{sen} x dx$, el diagrama es:



$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

El autor indica tener aplicaciones claras para las integrales de la forma:

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx; \quad \int e^{ax} \cos(bx) dx.$$

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx dx; \quad \int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx dx; \quad \int \operatorname{sen} ax \cos bx dx; \quad a \neq b.$$

$$\int \frac{P(x)}{(ax+b)^r} dx$$

Ejemplo 3. Hallar $\int e^{2x} \cos x dx$.

Solución:

u	dv
$\cos x$	e^{2x}
$- \operatorname{sen} x$	$\frac{1}{2} e^{2x}$
$- \cos x$	$\frac{1}{4} e^{2x}$

$\xrightarrow{+}$ $\xrightarrow{-}$ $\xrightarrow{+}$

No se necesitan más filas pues se obtuvo el integrando salvo un factor. Así resulta:

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \operatorname{sen} x - \frac{1}{4} \int e^{2x} \cos x dx.$$

Transponiendo y resolviendo la integral buscada, se obtiene:

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + \frac{1}{5} e^{2x} \operatorname{sen} x + C. \quad \blacksquare$$

En este tipo de problemas, que se presentan al estudiante, una de las dificultades para la solución, es la designación de las funciones a su correspondientes u y dv . De allí que es el problema que pretende solucionar con esta regla nemotécnica. Bibliografía del autor (se pretende se vea, que se basa en textos oficiales para establecer sus conjeturas).

Referencias Bibliográficas

- [1] Cortés, I y Sánchez, C. (2000): *801 Ejercicios Resueltos de Integral Indefinida*. Fondo Editorial de la UNET. Serie Problemario N° 2.
- [2] Folley, K. W. (1947): *Integration by Parts*. American Mathematical Monthly. Vol. 54 N° 9, 542-543.
- [3] Horowitz D. (1990): *Tabular Integration by Parts*. The College Mathematics Journal. Vol. 21 N° 4, 307-311.
- [4] Murty V. N. (1980): *Integration by Parts*. The Two-Year College Mathematics Journal. Vol. 11 N° 2, 90-94.
- [5] Nicol S. J. (1993): *Integrals of Products of Sine y Cosine with Different Arguments*. The College Mathematics Journal. Vol. 24 N° 2, 158-160.

La existencia de la nemotecnia como una práctica educativa es más común de lo que se pudiera imaginar. En las instituciones de educación, específicamente en las clases de matemáticas son visibles sus usos, como es el caso que presentamos para su análisis, en el caso del uso de los recursos nemotécnicos en las derivadas de las funciones trigonométricas básicas seno y coseno.

Recurso Nemotécnico de las Funciones Trigonométricas

“El pensamiento implica moverse de un elemento o idea por medio de una cadena de asociaciones y que tal pensamiento es imposible sin imágenes: no podemos pensar sin imágenes” (Aristóteles)

Múltiples son los trucos y recursos utilizados o creados por los estudiantes (incluso por los docentes) en las aulas, como técnicas auxiliares en el aprendizaje de datos o procesos de algún temario, donde la matemática no es una excepción. La mezcla de algoritmos, mapas conceptuales, rimas, simbologías, etc. permiten trazar estrategias y artificios que solventan deficiencias de aprendizaje (al menos memorístico), que con el tiempo se convierten en hábitos de estudio, buenos o malos, tomando como parámetros de evaluación el cumplimiento objetivo educacional.

En matemáticas los objetos de estudio, requieren tratarse de un modo donde el aprendizaje sea significativo (Ausubel 1983), según las teorías constructivistas, por otro lado en el contexto de la didáctica de las matemáticas Cantoral (2003) indica que deben ser tratados de tal forma que permitan desarrollar un pensamiento matemático, *en todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana*. Los recursos nemotécnicos tienen esa característica social cotidiana, así que son candidatos para ser auxiliares en técnicas didácticas, siempre y cuando fomenten los aspectos planteados anteriormente.

Un estudio de los recursos nemotécnicos existentes que se presentan en el aula, sería muy extenso, es por eso que nos concentramos en uno sólo como ejemplo; el recurso nemotécnico para las derivadas trigonométricas básicas seno y coseno.

La nemotecnia en matemáticas se basa en tratar de “enganchar”²³ nuevos objetos matemáticos en la estructura cognitiva del alumno asociándolos significativamente a otros objetos matemáticos o no matemáticos, para que pueda ser *fijado en memoria y agilizar el aprendizaje de otros conceptos*.²⁴

Si el objetivo educacional, dentro de esa clase, es el uso y dominio operatorio de las derivadas de las funciones trigonométricas básicas, y se alcanza, entonces sí se lleva a cabo ese aprendizaje.

Ahora, no sólo se trata de justificar la efectividad del recurso en un plazo corto, que cumple con su tarea de lograr la retención en memoria de las fórmulas de las derivadas e integrales de las funciones trigonométricas (como se muestra más adelante), sino de averiguar las implicaciones posteriores en el aprendizaje significativo y el desarrollo del pensamiento matemático. Contestar de manera adecuada y completa, a dicha interrogante está fuera del alcance de esta investigación, por lo tanto retomaremos de este planteamiento un solo aspecto:

¿Puede un recurso nemotécnico ser parte de una estrategia para propiciar el aprendizaje de un objeto matemático?

Por una parte; las teorías de aprendizaje pedagógicas constructivistas, aplicadas al modelo educativo Institucional de acción, alegan que un aprendizaje es efectivo si y sólo si es construido (reconstruido o co-construido) por el alumno y entre otras cosas, el docente actúe como “docente facilitador del aprendizaje”.

²³ “enganchar” colgar, agarrar o prender, en este caso lo utilizamos para referirnos al proceso de asir un objeto estudio en la estructura cognitiva.

²⁴ Lo marcado anteriormente es lo que está a discusión.

En la práctica "real" , las matemáticas presentan una visión muy distante de la planteada de manera generalizada en estas presunciones teóricas, hacer que el alumno construya en matemáticas presenta un reto enorme y sin precedentes, que mantiene ocupado a un sinnúmero de personas y especialistas, el fungir como facilitador exige una preparación especial, de hecho muchas conductas en el aprendizaje de las matemáticas no han podido ser comprendidos en su totalidad, la didáctica de las matemáticas. Cuando la didáctica de las matemáticas los identifica dichas conductas las califica como *fenómenos didácticos*, y dirige esfuerzos para aclararlos.

Las teorías en las que se sustenta el modelo educativo analizado argumentan que el aprendizaje es significativo, si el estudiante lo puede aplicar, le encuentra una aplicación real de su entorno o significa algo del contexto educativo. Así el docente es un facilitador cuando genera condiciones y situaciones donde el alumno puede construir su propio conocimiento, mediante la motivación (referido a la motivación positiva extrínseca, tomando en cuenta el valor utilitario). Todo esto planteado desde un enfoque teórico.

Por su parte Chevallard (2000), define la didáctica de las matemáticas, *como la ciencia de estudio de las matemáticas*. Su visión está proyectada desde el aula, en los fenómenos que surgen en el acto de estudio de la matemática, dada esta razón, nuestro caso se inserta en este enfoque, los recursos nemotécnicos provienen del aula y son no explícitos, entran tanto por el polo del profesor como del alumno sus teorías ayudan a explicar el fenómeno detectado, para luego responder dentro de el marco constructivista expreso en el modelo educativo en cuestión.

Tratamiento escolar de las derivadas de las funciones trigonométricas

La matemática escolar tiene objetivos educativos específicos y exige que se cumpla con ellos de manera adecuada y en los tiempos descritos, cambios constantes obligan a permitir estrategias flexibles. Desde luego existen múltiples formas de lograrlo sin que el alumno realmente experimente un aprendizaje, el docente cuenta con temario, las PME y las PMNE, que las segundas enmarcan los textos de matemáticas usados actualmente para impartir este tema (razón por la cual presentamos un breve tratado), ¿qué pasa cuando se mezclan las PME y las PMNE?, como es el caso de esta investigación.

Estudios realizados, como el de Maldonado (2005), nos muestran algunas dificultades que se presentan los alumnos de nivel medio superior en cuanto a la noción de las función trigonométrica, no distinguen las relaciones que guarda con el triángulo rectángulo y con el círculo unitario, pero sí conocen estos elementos.

Evolución escolar de la función trigonométrica

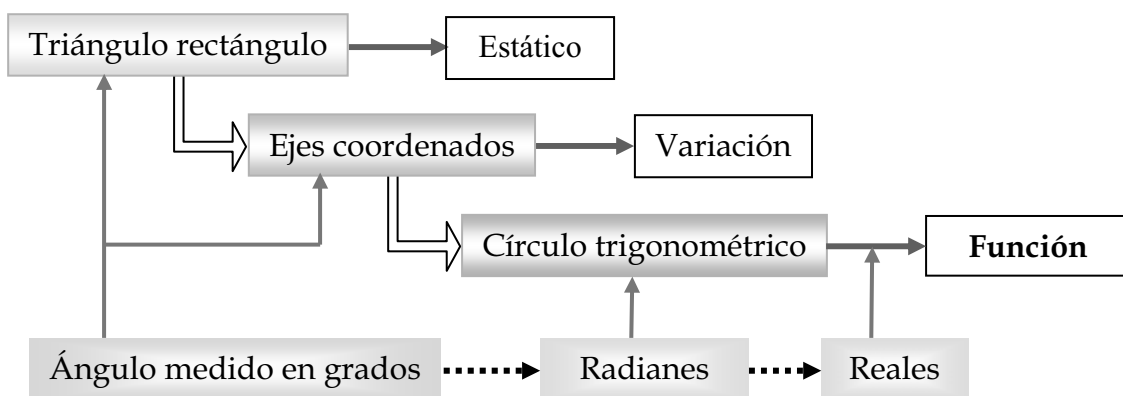


Fig.7 Esquema de la evolución escolar del concepto de función trigonométrica.

Tomado de Maldonado (2005)

Este esquema (Fig. 7) es sumamente interesante, presenta los elementos de la evolución escolar de la función trigonométrica; triángulo rectángulo, ejes coordenados y círculo unitario, que se utilizan como base, para dirigir a los estudiantes al concepto de función trigonométrica.

Se sabe que el alumno está familiarizado con los antecedentes mencionados (al menos de forma visual), no obstante, a menudo esto no es tomado en cuenta²⁵.para la elaborar estrategias de enseñanza-aprendizaje.

El concepto de función es una pieza clave para el desarrollo de las matemáticas (Cantoral y Montiel 2004) sin embargo las propuestas escolares tradicionales son reducidas en su mayoría a procesos puramente algorítmicos. Tal noción no es simple de asimilar, en el tránsito de las diferentes representaciones (*tabular, gráfica, algebraica, numérica etc.*) es necesario para un tratado adecuado de tal concepto.

²⁵ Más adelante se explicara el recurso nemotécnico, nótese que los elementos mencionados en este esquemas, son muy similares a los que se plantean en el recurso

Derivadas de las funciones trigonométricas seno y coseno

De las funciones

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$g(x) = \cos(x)$$

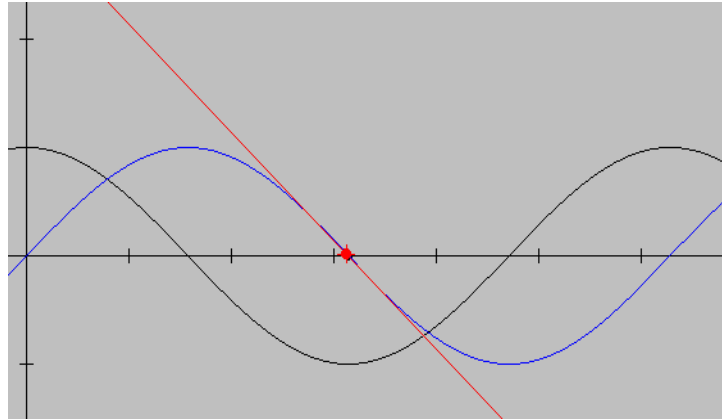
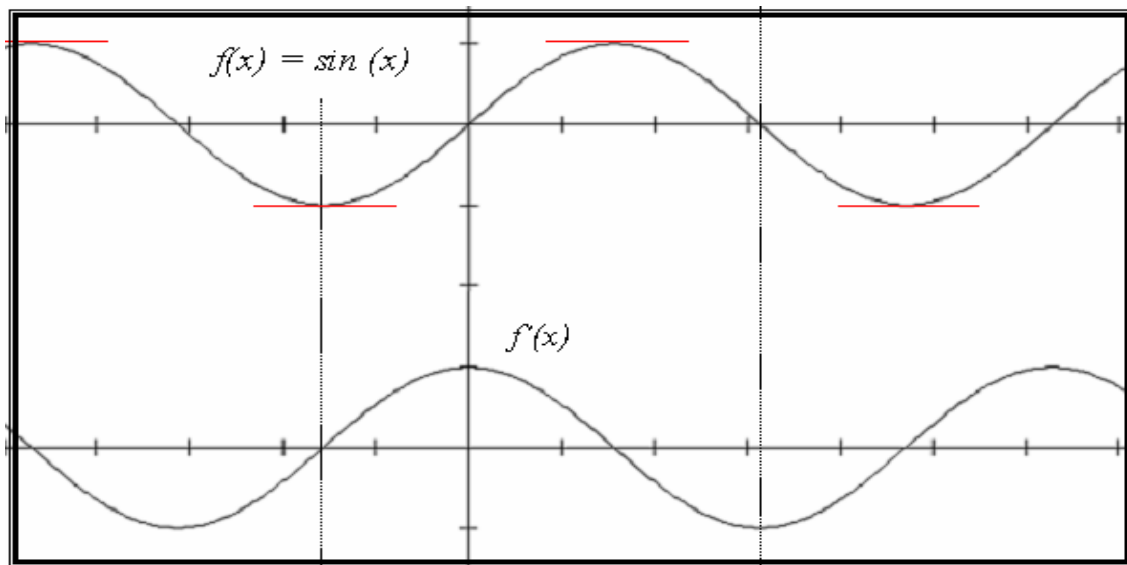


Fig. 8

En la gráfica anterior, si la recta de tangente (en rojo), se desplaza sobre la curva senosoidal de positivo a negativo, la pendiente cambiaría de negativo a positivo con máximos de 1 a -1. En una segunda aproximación, se observa que los valores de la pendiente de la recta tangente en un valor a son similares a el valor de $\cos a$, esto se intuye en las raíces y en los extremos relativos de la función, (esto con la mirada del docente que tiene estas experiencias previas, pero para el alumno no tienen relevancia de principio, si los primeros temas de matemáticas I son asimilados, se puede intuir que si tenemos $-f(x)$, el comportamiento anterior obedece a $-g(x)$).

Las derivadas para estas funciones no son aproximadas con este método, pues en él se intuye un probable resultado, o bien son utilizadas para establecer la noción del concepto, sin embargo la derivada mayoritariamente es tratada como simple operación aritmética, rara vez se tiene la oportunidad de analizar gráficas, pues según el temario que especificamos, es un tema de la siguiente unidad (Unidad 5 *Aplicaciones de la derivada*), que compete a extremos de una función y análisis de curvas.

El libro de Cálculo de James Stewart (2001) es uno de los pocos de esta línea que presenta una pequeña introducción, que pretende dar noción de las derivadas de estas funciones de manera gráfica.



Tomado del libro *El Cálculo* de J. Stewart Pág. 208

Pero el texto²⁶ *El Cálculo* de Louis Leithold (1992), emprende los temas de las derivadas utilizando como entrada el problema del cálculo de la pendiente de una recta tangente, analiza en curvas generales especificando que una función tiene derivada si es diferenciable y continua (Capítulo 2, p.101). Sin embargo en el tratado de las derivadas trigonométricas su estudio se limita a la obtención de la derivada usando los teoremas de los límites, hace referencia a la relación existente entre las graficas pero no especifica cuál ni cómo llegar a ellas. Esta misma visión la comparten algunos otros autores de libros de cálculo.

Se llama derivada de la función f en el punto x_0 al siguiente limite si existe y es finito

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

²⁶ *El Cálculo* (7 edición 1998) libro de texto muy utilizado en las instituciones de educación superior de la región para cursos de cálculo diferencial e integral

Observaciones:

- Cuando dicho límite sea infinito se dice que la función no es derivable, aunque tiene derivada infinita. (gráficamente significa que la recta tangente en ese punto es vertical).
- Para que la derivada exista, la función tiene que estar definida en un entorno del punto.
- Se le llama cociente incremental a :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- la derivada no es más que el límite del cociente incremental cuando el incremento de x tiende a cero.

La derivada de una función, se emprende a través del uso del límite. (Misma que comparte Dennis Zill (1985), en su libro *Cálculo con Geometría Analítica*, otro autor muy utilizado en el tratado de las matemáticas)

El tratado algebraico, es el siguiente;

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = \text{sen}(x+h)$$

$$\text{sen}(a+b) = \cos a \text{sen} b + \cos b \text{sen} a$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \text{sen} h + \cos h \text{sen} x - \text{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \text{sen} h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1) \text{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen} h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen} x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen} h}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

$$= (\cos x) \cdot 1 + 0 \cdot \text{sen} x$$

$$\therefore f'(x) = \cos x$$

En el caso de la función $\cos(x)$ es un desarrollo similar, así se calculan las derivadas de $\sin(x)$, $\cos(x)$, Este proceso tradicionalmente se lleva a cabo de manera guiada, se tiene un procedimiento definido y se necesitaría mucho tiempo y trabajo que el alumno mismo llegue a estas conclusiones, es decir; no recurre a la obtención de las derivadas con el uso de límites eso sólo se hace para demostrar de donde provienen las fórmulas, pero para su uso rápido se recurre a la memorización, que por lo general no es perdurable pues al poco tiempo las olvidan o confunden.

De ahí que se crea o proporciona por “el docente” el formulario

Recurso nemotécnico de las derivadas de las funciones básicas seno y coseno

Las conceptos trigonométricos y de la derivación no son simples de asimilar por el estudiante, de hecho puede llegar a ser hábil al derivar algebraicamente sin saber qué está haciendo, qué significado tiene o para qué sirve, no reconoce la utilidad de su resultado. No obstante, esto es comprensible pues en el afán de enseñar un saber escolar, se entrega primero la herramienta, sin que el alumno tenga conciencia de que será necesaria, lo cual naturalmente genera rechazo (D'Amore, 2000).

Si en su futuro como profesional el alumno necesitar usar un cierto objeto matemático aprendido en la escuela será importante que recuerde al menos las bases o la referencia. Este es el campo de aplicación de los recursos nemotécnicos. No se pueden sustituir las nociones, ni las bases, pero sí podemos direccionarlas de manera adecuada, organizar la información y hacerla sólida en memoria.

La asociación de imágenes o situaciones, refuerzan los datos a recordar. Por ejemplo en el caso de las funciones trigonométricas, si se abordan como relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo en consecuencia el alumno asocia y recuerda con mayor facilidad la relación cateto opuesto/hipotenusa = seno de x , al identificar cada elemento en el triángulo rectángulo. Esto sucede porque lo relaciona con un objeto visual, en este caso (la parte visual) apoya a la asimilación el concepto y las implicaciones teóricas son explicadas con base al mismo.

Es decir, el objeto inicial -que puede ser visual, sonoro etc.- tiene doble propósito de objeto de estudio y referencia -para otro objeto de estudio-, pero, ¿qué si este objeto inicial no es usualmente matemático? o si se asocia a otro objeto matemático que no es usado normalmente para explicar ese principio.

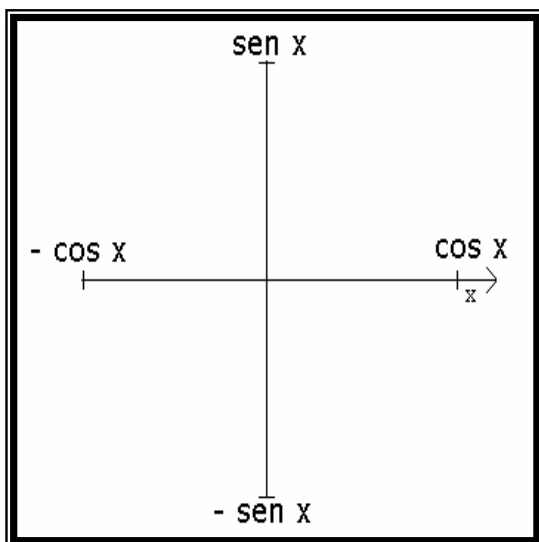
El primero es más conocido como nemotecnia, la segunda preposición es el problema, - que también cabe en la nemotecnia, pero no es reconocida comúnmente como tal- ya que se encuentra sobre la delgada línea, que si no se tiene cuidado, el alumno fácilmente puede caer en el juego de la memorización de contenidos en lugar del aprendizaje, que era el objetivo marcado en la clase.

El recurso nemotécnico en cuestión tiene esas propiedades, no establece noción de derivada, función o mucho menos de función trigonométrica de la manera explícita en los textos (ni siquiera aseveramos que sea aceptable).

Su función como objeto (al menos visual) consiste en ayudar a recordar las reglas de derivación de las funciones trigonométricas básicas seno y coseno, a través de un proceso asociativo a los elementos u objetos matemáticos ya existentes y elementales en la geometría. Y su objetivo como “referencia” es proporcionar la habilidad de relacionar rápidamente el tránsito entre las derivadas e integrales de las mismas funciones.

Maldonado (2005), enuncio que a los alumnos les es indistinto el tratamiento de la función trigonométrica, pero detecta elementos geométricos que se perciben necesarios para la construcción del concepto de función, esta asociación podría ser una razón de la aceptación y rápida adaptación al del recurso nemotécnico que se presenta.

Este recurso nemotécnico tiene las siguientes características:

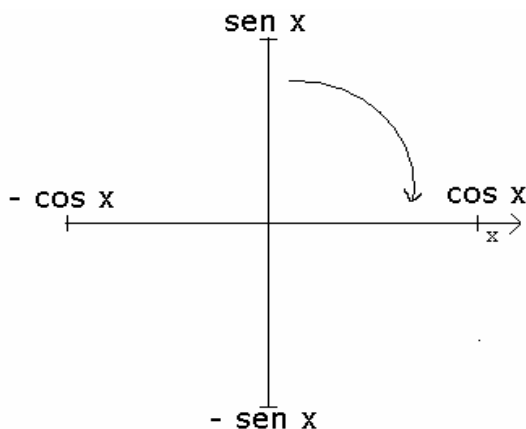


- Se basa en el eje cartesiano.
- El eje y es relacionado con la función seno.
- El eje x con la función coseno.
- Arriba y derecha positivo, abajo e izquierda negativos para seno y coseno respectivamente.
- Se introduce una secuencia conocida fácil de recordar y una lógica de operación simple.

Los signos de las funciones obedecen a las direcciones de los signos de los ejes y refiere a cada función un eje específico²⁷.

¿Cómo se usa?

Si nos colocamos en la función $\text{sen}(x)$, giramos 90 grados en sentido dextrógiro nos ubicaremos en la función $\cos(x)$, que correspondería a la respuesta $\frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x)$.

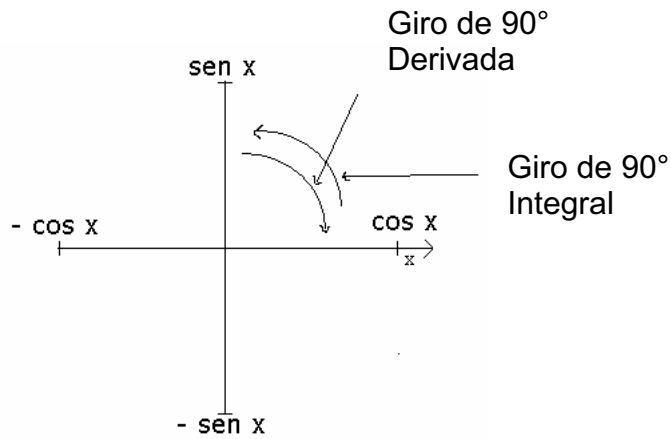


Para obtener la derivada de otra función de las tres restantes será necesario, ubicarse en ella y virar nuevamente en el mismo sentido, para responder a la derivada de la función requerida.

Incluso, la noción de las derivadas de orden superior, se aplica, en el supuesto que el orden sólo significara el número de veces a realizar este desfasaje, esta adecuación no satisface la regla de la cadena, para valores de $V(u)$ donde V es la función trigonométrica y u es distinto de x , provoca que se tiene que suplementar el resultado.

Ahora, como la noción de la antiderivada se hace presente cuando se dice que es el proceso inverso a la derivada, se puede utilizar este mismo recurso nemotécnico para obtener las antiderivadas en estas funciones trigonométricas, su principio es simple, únicamente se girará 90 grados en sentido levógiro.

²⁷ Cabe aclarar que no es una explicación matemática del recurso sólo se plantea su estructura



Las asociaciones visuales y operatorias, en este recurso, son enteramente lógicas para el alumno, pues en diversas aplicaciones el eje x , es relacionado con la función coseno y el seno con el eje y (como es el caso del tratamiento de vectores), una repercusión de este recurso, evidentemente, es que el sujeto intentará sustituir de manera inmediata las listas de formularios por este tipo de medios.



Aplicación del recurso

Este recurso nemotécnico, a la fecha tiene aproximadamente diez ²⁸ operando en la institución, que tenía una visión enteramente conductistas y el utilizar formularios no era permitido, de tal forma que las ventajas que ofrecía el recurso fueron muy apreciadas por los alumnos.

A la fecha no se tiene noción de otra institución o sujeto que se adjudique o diga usar ese “método” con anterioridad.

No se ha empleado en clases de forma directa, pero se ha detectado que otras reglas nemotécnicas son utilizadas en repetidas ocasiones (no todas efectivas, desde los criterios de utilidad del alumno). Cuando no se usan, se practica la memorización de forma directa, que se traduce en tiempos dedicados a ejercitar su memoria y operación, reduciendo tiempos en la posibilidad de extender el concepto y algunas otras habilidades además de la operatoria, sin embargo ésta es o “era” primordial pues los exámenes de academia estaban impregnados de problemas que exigían del alumno un dominio de tales derivadas.

Actualmente este tipo de evaluaciones tiende a desaparecer, siendo sustituidas por medidas que han demostrado ser efectivas para medir un aprendizaje. No se puede negar que sigue siendo parte importante el estado operatorio (en particular en las carreras de ingeniería, para los temas de aplicación).

En agosto del 2002 se seleccionan dos grupos de primer semestre, de la carrera en Ingeniería industrial. Ambos grupos cursaron la materia de Matemáticas I (Cálculo diferencial e integral) con el mismo docente, pero se eligió uno para trabajar con el recurso nemotécnico.

²⁸ El recurso nemotécnico que se presenta es idea personal, que a manera de juego se elabora, pero se usó por mucho tiempo para auxiliar a compañeros de estudio de ese entonces.

Actualmente, esos grupos están en noveno semestre. No fueron objeto de observación minuciosa en el momento que cursaron la asignatura mencionada, pero posteriormente se identificó cierto uso del recurso nemotécnico como elemento significativo de un *fenómeno didáctico*, por lo cual se sigue aplicando a algunos grupos y se recaba información de las secuelas que deja el recurso al paso de las materias posteriores a Matemáticas I.

Las comparaciones entre los grupos actuales que conocen el recurso y los primeros grupos experimentales, es carente de validación (desde el punto de vista de reproducibilidad) puesto que muchas variables entraron al juego, tales como: el cambio de retícula²⁹ el cambio como docente, el tratado de los temas, el tipo de evaluación etc.

Para evidenciar las repercusiones en el aprendizaje de estas derivadas en particular, se lleva en dos formas por seguimiento a un grupo experimental inicial y acumulando las reacciones en grupos de la nueva retícula. En el 2003 se identifica la retención tanto del recurso como de datos (derivadas de seno y coseno), en las materias de cálculo vectorial.



Foto: grupo 2.2 D Ingeniería Industrial ITESC, mayo del 2003, clase Matemáticas II cálculo vectorial.

Examen unidad 2, se detecta en varios alumnos el uso de la nemotecnia, las fotos fueron tomadas por que llama la atención que los estudiantes apliquen el recurso con un docente distinto.

El semestre Agosto-Diciembre de 2003 y Enero-Julio de 2004, recopilamos datos en grupos de tercer y cuarto semestre que cursan materias de matemáticas cuatro y cinco; Ecuaciones diferenciales y Transformadas de Fourier respectivamente.

²⁹ *Retícula, se entiende en los sistemas de educación superior tecnológica, como la estructura de las materias que cursaran los alumnos de una determinada especialidad en toda su carrera, que en conjunto con otros factores conforman la curricula*

Foto: Grupo 3.2 D Matemáticas IV
 Profesor: Ing. Javier Hernández Medina
 Examen de regularización unidad II

Handwritten student work for a differential equation problem. The student is solving the homogeneous equation $Y'' + 4Y = 0$ using the method of undetermined coefficients. The work shows the characteristic equation $m^2 + 4 = 0$ leading to $m = \pm 2i$. The general solution is given as $Y_c = A(x)\sin 2x + B(x)\cos 2x$. The student then differentiates this to find Y'_c and substitutes it into the original equation to derive a system of equations for $A'(x)$ and $B'(x)$. A small table on the right side of the page shows the derivatives of $\sin$ and $\cos$ functions.

$$Y'' + 4Y = 4\sec^2 2x$$

$$m^2 + 4 = 0$$

$$m^2 = -4$$

$$m = \pm 2i$$

$$Y_c = A(x)\sin 2x + B(x)\cos 2x$$

$$Y'_c = A'(x)\sin 2x + B'(x)\cos 2x$$

$$2A'(x)\cos 2x - 2B'(x)\sin 2x = 4\sec^2 2x$$

$$2A'(x)\sin 2x + B'(x)\cos 2x = 0$$

$$2A'(x)\cos 2x + 2B'(x)\cos 2x \sin 2x = 4\sec^2 2x \cos 2x$$

$$4A'(x) = 4\sec^2 2x \cos 2x$$

$$A'(x) = \sec 2x$$

$\sin$	$\cos$
$\cos$	$-\sin$

Ecuaciones diferenciales homogéneas La una foto muestra el recurso nemotécnico en materias posteriores a Cálculo diferencial e integral (exámenes de unidad parciales y regularización)

Handwritten student work for a differential equation problem. The student is solving the homogeneous equation $Y'' + 4Y = 0$ using the method of undetermined coefficients. The work shows the characteristic equation $m^2 + 4 = 0$ leading to $m = \pm 2i$. The general solution is given as $Y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. The student then differentiates this to find Y'_c and substitutes it into the original equation to derive a system of equations for $A'(x)$ and $B'(x)$. A small table on the right side of the page shows the derivatives of $\sin$ and $\cos$ functions.

$$Y'' + 4Y = 4\sec^2 2x$$

$$m^2 + 4 = 0$$

$$m^2 = -4$$

$$m = \pm 2i$$

$$Y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$Y'_c = A'(x)\cos 2x + B'(x)\sin 2x$$

$$2A'(x)\sin 2x + B'(x)\cos 2x = 0$$

$$2A'(x)\cos 2x + B'(x)\sin 2x = 4\sec^2 2x$$

$$4A'(x) = 4\sec^2 2x \cos 2x$$

$$A'(x) = \sec 2x$$

$\sin$	$\cos$
$\cos$	$-\sin$

En ambas imágenes se aprecia que las derivadas de las funciones trigonométricas (directamente) o el recurso no es el objeto de evaluación, son utilizados como herramientas para solución de temas de ecuaciones diferenciales. Tenían acceso al formulario y no se usaba en estos casos.

Una segunda aproximación a este fenómeno didáctico es necesaria, pues comienza como "curiosidad", y resulta que es común la existencia en las instituciones de educación (según opiniones de otros docentes de esta institución y otras instituciones) de los recursos nemotécnicos. La retención de dicho recurso al paso de los semestres no era esperado en principio, estaba contemplado como un aplicación temporal.

Análisis de las entrevistas

Se efectuaron en una sala con la presencia del entrevistador y el entrevistado, exclusivamente; los sujetos fueron seleccionados al azar, ya es una investigación de carácter educativo, no se establecen estadísticas sino observaciones y análisis de casos, para poder realzar puntos de importancia en la aplicación del recurso nemotécnico.

El objeto de la entrevista es detectar el uso de la regla nemotécnica, en alumnos de la institución.

La entrevista se compone de dos partes: una operatoria y una sesión de preguntas, encausadas a delatar sus métodos en caso de no ser evidentes en pizarra.

Los reactivos contienen características que permiten detectar si existen deficiencias en derivación algebraica (se colocan algunos ejemplos que no son de carácter trigonométrico).

En cada entrevista se les pide realizar las siguientes operaciones;

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2) =$$

$$\frac{d}{dx}(3 \operatorname{sen}(x)) =$$

$$\frac{d}{dx} \cos(2x) =$$

$$\frac{d}{dx}(\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x))$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2)^2 =$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{sen}(x) =$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg}(x)$$

Se cuida que hubieran cursado la materia de Matemáticas I, con el mismo docente, sin importar la retícula que cursaron.

Las entrevistas siguientes son las que se consideran relevantes y que aportan material de discusión del fenómeno didáctico que se presenta.

Entrevista 1

Entrevistador.-Cuál es tu nombre completo Guillermo?

G.- Guillermo Guajardo Soto

E.- ¿Qué carrera cursas y en que semestre?

G.- En electromecánica en 5º semestre.

E.- ¿En qué fechas cursaste matemáticas?

G.-En septiembre de 2003, digo agosto

E.- Este tipo de operaciones matemáticas, ¿dónde las utilizaste, aparte de matemáticas uno, en qué otras materias?

G.-pues en Matemáticas IV, Matemáticas V, Análisis de circuitos eléctricos I y II, Resistencia de materiales, Dinámica, Matemáticas II y Mediciones eléctricas.

E.- Noté que utilizabas el truco de las derivadas (se refiere al recurso nemotécnico), o ¿cómo solucionaste los problemas?

G.- Bueno usé eso de que las derivadas se pueden poner en el arreglito y así es bien fácil derivar solo le giras noventa grados

E.- ¿Alguna vez utilizaste el recurso nemotécnico el arreglito que dices, en una materia distinta a matemáticas 1?

G.- En Matemáticas 2, 5 y 4 cuando presentaba examen, o en algunos problemas.

E.- ¿Y el formulario no lo usabas?

El formulario para esas específicamente no, pero para las otras sí, Para las derivadas de seno y coseno son automáticas, si hacía mucho tiempo que no utilizaba derivada recordaba del recurso, y cuando ya me acostumbraba lo hacía de memoria, o relacionaba el recurso más rápidamente no tenía que dibujarlo.

E.- ¿Lo has platicado o enseñado a alguien más?

G.- Se los recordaba a mis compañeros cuando ellos no se acordaban, fuera de esto a nadie más.

E.- ¿Tienes algún otro truco?

G.- La ley de Ohm, el triangulito, haces un triangulo luego lo partes en tres haciendo haciéndole una t, el voltaje va arriba, a la izquierda queda la corriente y a la derecha la resistencia

Ese lo aprendí desde secundaria y todavía lo recuerdo

Respuestas de Guillermo:

$$d/dx (x^2 + 2) = 2x$$

$$d/dx (3 \operatorname{sen} x) = 3 \cos x$$

$$d/dx (\cos 2x) = -2 \operatorname{sen} 2x$$

$$d/dx (x^2 + 2)^3 = 3(x^2 + 2)(2x)$$

$$d/dx (\cos 2x - \operatorname{sen} x) = -2 \operatorname{sen} 2x - \cos x$$

$$d^2/dx^2 (\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x$$

$$d/dx (\operatorname{tg} x) =$$

(Dijo no acordarse y ni siquiera buscó el formulario para realizarlo)

Guillermo, afirma que conoce el recurso y que le fue enseñado en el primer semestre por el docente, lo aplica de manera correcta, en los casos necesarios. En sus soluciones se puede observar que tiene errores, que no nota en el cuarto reactivo. Se le aclaró que no tenía ningún propósito de evaluación, este puede ser un factor por el cual no le dedicó tiempo suficiente para verificar resultados o procedimientos con el formulario.

La ingeniería electromecánica basa muchos de sus temas en las aplicaciones y en sus ejercicios, utilizan las derivadas de las funciones trigonométricas en diversas materias.

Algo curioso, indica que uno de sus amigos (recién ingresado, proveniente de un tecnológico vecino *ITES Monclova*), decía conocer el recurso (esto nos hizo pensar que ya existía, fuera de la institución) cuando se entrevista a esta persona, manifiesta que quien le enseñó, fue un compañero estudiante en un congreso, tal estudiante pertenecía a esta institución. El recurso nemotécnico traspasó las fronteras de la institución, actualmente compañeros docentes del Tecnológico De los Cabos en Baja California Sur y el Tecnológico de Loreto

Zacatecas, reportan que sus alumnos usan el recurso, (en agosto de 2005, en el ITERSC, se les muestra este recurso)³⁰.

Entrevista 2

E.- ¿Cuál es tu nombre completo?

D.- Edgar Daniel Mejía Lara.

E.- ¿Qué carrera cursas y qué semestre?

D.- Estoy en Ingeniería Industrial en noveno semestre.

E.- ¿En qué fecha trataste lo temas de derivadas y en que materia?

D.- En Matemáticas I y fue en octubre de 2001, junto con funciones y límites.

E.-Aparte de esa materia ¿en dónde seguiste utilizando derivadas?

D.- En Matemáticas II, Ecuaciones diferenciales, Matemáticas IV y en Electricidad, ah! No miento también en Física I y II.

E.- Noté que las derivadas trigonométricas no te causaron mucha dificultad excepto la de tangente, ¿por qué? (El no utiliza ni se refiere al recurso nemotécnico no al menos visualmente, tampoco expresa signos de utilizarlo)

D.- Es que no son muy utilizadas las de tangente, como las de seno y coseno.

E.- ¿Eso significa que las derivadas de las funciones seno y coseno te las sabes de memoria o consultas el formulario?

D.- Es que es bien común el de las derivadas y te las aprendes, es como el teorema de Pitágoras te recuerdan eso, y algunos otros temas también las usan (refiriéndose al seno y coseno)

E.- ¿Conoces el recurso nemotécnico para las derivadas seno y coseno?

(Se le muestra un esquema)

Sí lo conozco pero no lo utilizo, es que lo aprendí cuando ya había cursado la materia, y yo me ocupé desde entonces de memorizarlas, aparte te

³⁰ Estos docentes participaron en el diplomado de superación en matemáticas, que se llevaron a cabo en esa ocasión en el ITERSC, en pláticas se les comenta el experimento y acceden a colaborar para ver reacciones en otras instituciones.

digo una cosa, creo que ese es para los que inician pues ese razonamiento a mí no me es necesario, pero creo que le serviría a los que inician para que asocien esos temas.

De hecho cuando le explico a alguien más, si lo utilizo, para la cuestión de derivadas, ya que adquieren rapidez para derivar y no saben o no se aprenden un formulario.

Además yo uso el círculo unitario para asociar concepto de derivada y los conceptos de seno y coseno, además de la tangente, no sé si a eso te refieras.

E.- ¿Algún otro truco que utilices?

D.- Pues la verdad no recuerdo de momento alguno otro.

Respuestas de Daniel

$$d/dx (x^2 + 2) = 2x$$

$$d/dx (3 \text{ sen } x) =$$

Tarda un rato en contestar, pero dice: 9 cos de 3x , a ok no, es 3 coseno de x, si ese es

$$d/dx (\cos 2x) = \text{sería } -2 \text{ seno de } 2x$$

$$d/dx (x^2 + 2)^3 = 6 x^3 + 12 x$$

$$d/dx (\cos 2x - \text{sen } x) = -2 \text{ sen } x - \cos x$$

$$d^2/dx^2 (\text{sen } x) = -\text{sen } x$$

$$d/dx (\text{tg } x) = \text{no pues de esa me acuerdo, pero creo que es } \sec^2 x$$

Daniel tiene calificaciones altas, quizás es el mejor en su clase. Incluimos sus resultados y la entrevista ya que a él no le fue enseñado el recurso en su clase de Matemáticas I, pero lo percibe en clases posteriores de sus compañeros. Daniel asegura que cuando lo aprende el recurso ya no le es útil pues se dio la tarea de aprenderse las formulas de memoria desde que cursó Matemática I. Sin embargo, utiliza el recurso cuando explica las derivadas a sus compañeros, señalando que es sencillo lograr la retención de las fórmulas con el recurso.

Bandura (1977) indica que las probabilidades de éxito son más altas, cuando el individuo siente que sus habilidades son adecuadas para lograr sus

metas, así entonces, cuando adquiere herramientas que aseguran cumplir tal labor, adquiere valor personal y motiva al alumno a seguir trabajando, centrando su atención en aprendizajes significativos.

Entrevista 3

E.- ¿Nombre completo?

M.- Miguel García Picazo,

E.- Carrera y semestre

M.- Ingeniería Industrial 6 semestre.

E.- ¿En qué fecha cursaste Matemáticas I?

M.- pues hace tres años en el primer semestre.

E.- ¿En qué materias utilizaste ese tipo de problemas?

M.- “nomas” en Matemáticas II, Matemáticas III, y la V.

E.- ¿Por qué no pudiste resolver los problemas?

M.- Hace mucho que no hago esos problemas, en industrial casi no vemos eso, ya tengo como dos semestres que no los veo.

E.- ¿Y el primero?

M.- ese esta fácil así es ¿no?

E.- ¿Los de seno y coseno los hiciste mal, cómo los resolvías?

M.- Me acuerdo que era algo así,(realiza movimientos con la mano refiriéndose al recurso), “nomas” que no me acuerdo si era para arriba o para abajo cuando derivabas, pero si me los explican otra vez, se me hace que sí me acuerdo cómo hacerlos.

E.- Eso que tú dices se llama nemotecnia, ¿cuándo lo aprendiste?

M.- Con el profe de Mate I, pero hace un “chorro”

Respuestas de Miguel

$$d/dx (x^2 + 2) = 2x$$

$$d/dx (3 \text{ sen } x) = \cos 3x$$

$$d/dx (\cos 2x) = \text{sen } 2$$

$$d/dx (x^2 + 2)^3 = (\text{no lo efectúa})$$

$$d/dx (\cos 2x - \sin x) = \sin^{-1} 2 + \cos 1$$

$$d^2/dx^2 (\sin x) = \sin^{-1} x$$

$$d/dx (\tan x) = \sec x$$

Miguel fue parte de los grupos que reciben el recurso nemotécnico en la clase de Matemáticas I directamente del docente. En la entrevista externa que lo aplicó bien en la materia, pero que en la actualidad no recuerda como se ópera. Únicamente el primer ejercicio lo realiza de manera correcta, los restantes ejemplos carecen de sentido en su respuesta, aún con el recurso nemotécnico no puede acordarse de cómo llevar a cabo las derivadas. Cabe señalar que no domina muchas de las reglas necesarias en estas operaciones.

Entrevista 4

E.- ¿Nombre completo?

M.- Elsa Maria Mireles Boone.

E.- Carrera y semestre

M.- Ing. Industrial 7 semestre.

E.- ¿En qué Fecha en qué cursaste matemáticas 1?

M.- En el 2002 en agosto.

E.- ¿En qué materias utilizaste ese tipo de problemas?

M.- en Matemáticas II, Matemáticas III, Matemáticas IV, Física I y II. Estadística I y II, ha y Métodos numéricos

E.- En algunos problemas no existió problema, y en otros sí, ¿qué pasó?

M.- Las que fueron seno y coseno se me hicieron fáciles, porque me imaginé la cruz con las funciones, y solamente fui utilizando la regla para derivar una función trigonométrica y la derivada la determiné con la cruz.

E.- ¿Y las que no contestaste por qué?

M.- Porque no recordaba la derivada de esa función.

E.- ¿Cuál función?

M.- La de la tangente.

E.- ¿Y las otras que no eran trigonométricas?

M.- Tengo idea de cómo se hace pero ciertamente no, no estoy segura, me acordaba que se tenía que reducir el exponente menos uno, que se

tenia que “sacar” la derivada dentro del paréntesis y luego por lo del paréntesis original, y se multiplica eso por el exponente original

E.- Eso de la cruz es un recurso nemotécnico, ¿has utilizado específicamente el recurso nemotécnico en cuestión, para alguna otra materia distinta a matemáticas I

M.- Yo no lo vi en Matemáticas I, me lo enseñaron en Matemáticas II, lo utilicé en Matemáticas IV, Física I y II, se lo enseñé a mi mama por que ella es profesora y le gustó.

E.- ¿Aún con el recurso con qué frecuencia utilizas el formulario para reacordar las derivadas de seno y coseno?

M.- Pues las derivadas que no están en el recurso, si es necesario, pero para esas por ejemplo en Mate IV en un principio uso la cruz (se refiere al recurso nemotécnico), y después en automático, pero para las otras pues como me acuerde y las confirmo con el formulario aunque me tardo más, es más me ha tocado amigos que en sus exámenes ponen la “crucita” esa si la van a necesitar.

E.- ¿Tienes algún otro truco?

M.- En química la palabra “chon” forma los elementos que están en el ambiente (carbono, hidrogeno, oxígeno y nitrógeno)

Respuestas de Elsa Maria

$$d/dx (x^2 + 2) = 2x$$

$$d/dx (3 \text{ sen } x) = 3 \cos x$$

$$d/dx (\cos 2x) = -2 \text{ sen } 2x$$

$$d/dx (x^2 + 2)^3 = \text{no me acuerdo muy bien}$$

$$d/dx (\cos 2x - \text{sen } x) = -2 \text{ sen } 2x - \cos x$$

$$d^2/dx^2 (\text{sen } x) =$$

cos x es la primera derivada y la segunda es -sen x

$$d/dx (\text{tg } x) = \text{no me acuerdo, creo que es cosecante de } x$$

El caso de esta alumna es interesante puesto que no se le enseñó el recurso en clase por el docente, no era parte del grupo experimental, pero para el semestre dos, cambia y aprende el recurso de uno de sus compañeros. Actualmente ella le llama el “truco o crucita”. En su entrevista tenía al alcance

un formulario, que curiosamente ella tampoco consulta el formulario (probablemente porque también se les aclara que la entrevista no tenía carácter evaluativo).



El recurso es utilizado y retransmitido en su entorno, se multiplica, no se tiene la certeza si realmente comprende la noción de la derivada, pues los ejercicios no tienen los suficientes elementos para indagar esto, pero si observamos que los reactivos que fueron más sencillos de realizar son aquellos que de manera directa o indirecta implican la nemotecnia.

Otro punto también interesante en la última entrevista es que la alumna no resolvió el ejercicio del binomio al cubo alegando no acordarse, pero sí resuelve los casos trigonométricos y respeta la regla de la cadena. El caso uno lo resuelve bien, pero no puede combinar esto en el ejercicio en cuestión. De forma natural surgen algunas preguntas: ¿ocurre que simplemente lo olvido?, ¿o es que no tenía un anclaje cognitivo?, ¿no lo aprendió bien? Pasaron tres semestres desde que Elsa dejó de utilizar estos procesos de derivación, ¿cuántos jóvenes realmente recuerdan todos los procesos o fórmulas que aprendieron tres semestres atrás, en una clase de matemáticas?, que sucede entonces con el aprendizaje de la nociones o el conceptos, después de aprobar las materias. Pongámoslo así; (refiriendo los ejemplos de Chevallard y D'Amore); un cocinero con especialidad en postres, le piden realizar una paella española, que le enseñaron, esos platillos los realizó en su época de estudiante, aprobó esa materia (pues demostró realizar satisfactoriamente esa tarea, incluso realiza algunas combinaciones y aportaciones personales en sus recetas). Recurre a sus viejas recetas para llevar a cabo este encargo, la pregunta es ¿tiene el concepto de paella?, no recuerda a ciencia cierta detalles del proceso, para eso recurre a su recetario.

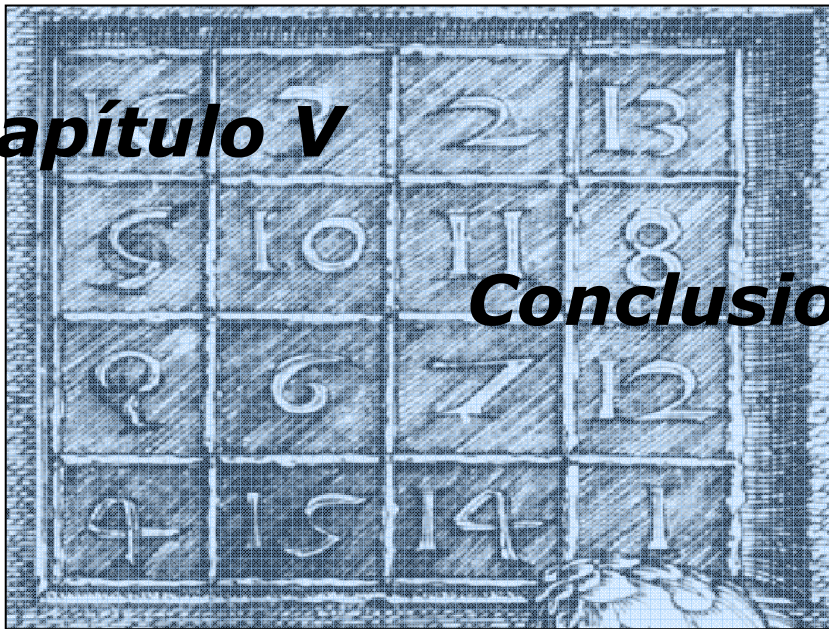
Si lleva a cabo el proceso satisfactoriamente, si lo aprendió, pues el objetivo esta cumplido, evidentemente sería muy difícil si esta misma situación se le presentara a una persona que no tenga nociones de cocina, la asimilación del concepto no puede llevarse acabó únicamente, con recetas o formulas. Pero tales referencias son útiles, y hay que tomarse en cuenta.

Los alumnos que fueron entrevistados, tienen características muy distintas, entre ellos Daniel por ejemplo es una persona que si bien tiene habilidad de aprender de memoria rápidamente no necesito el recurso nemotécnico (de hecho menciona que no las necesita que eso es para aquellos que no tienen su habilidad de aprender), sus calificaciones son excelentes al igual que las de Guillermo, que sí usa el recurso, pero no manifiesta verbalmente dominar las derivadas de tales funciones.

Miguel fue un caso interesante pues muestra qué no siempre es posible recordar, a sólo tres semestres (Daniel 7, Guillermo 4, y Elsa 5) no pudo recordar las operaciones y aunque menciona el recurso pero tiene una interpretación errónea de su uso, de hecho no recordaba nada de la parte operatoria de las derivadas sólo tenía una vaga idea del recurso.

Capítulo V

Conclusiones



El escenario escolar

El cambio que se realiza en el modelo educativo de mi institución es producto de las revisiones y actualizaciones del sistema educativo del país, en muchas ocasiones se ha cuestionado la pertinencia de ciertos contenidos matemáticos dentro del currículo en los diversos niveles educativos y especialmente en los de ingeniería, se ha señalado la dificultad que experimentan los estudiantes para transferir los conocimientos adquiridos en su clase de matemáticas a los diversos campos de especialización en la ingeniería, como es el caso de la creación y uso de modelos matemáticos. Pareciera que la matemática sólo tuviera uso dentro de la escuela.

El modelo educativo adoptado por los Institutos Tecnológicos descentralizados, se articula a través de la retícula y currícula de cada carrera señalando la metodología de planeación y trabajo para alcanzar los propósitos educativos.

Se pretende que cada asignatura esté lo suficientemente estructurada de tal manera que estén cubiertos todos los aspectos para impartirla en el aula. Existen planteamientos teóricos que sustentan las propuestas y podría afirmarse que son

coherentes con el modelo teórico adoptado. Sin embargo las clases de matemáticas tal como se desarrollan en la práctica en este momento tienen características propias y son generadoras de múltiples fenómenos didácticos, éstos son muy variados y en ocasiones contradicen los supuestos teóricos adoptados por el modelo académico. Se indican; contenidos y dosificación, pero se deja al docente la consideración de la planeación y la metodología, es decir hay una práctica docente real que provoca fenómenos didácticos específicos, tales como la necesidad de usar formularios y empleo de nemotecnias.

La planeación y ejecución de una práctica educativa inspirada en el modelo educativo configura el discurso matemático escolar. Los contenidos, su relevancia, ordenación, profundidad y uso, las prácticas docentes asociadas, así como los criterios (evaluación) que aseguran que los saberes fueron adquiridos por los estudiantes es lo que confronta a las prácticas educativas reales (aquellas que no están declaradas de manera formal). En consecuencia el docente establece estrategias para alcanzar los objetivos señalados aunque en muchas ocasiones se reduce al cumplimiento del temario señalado.

La institución actualmente, en base a los estudios y análisis de Cribeiro (1999) y los constantes esfuerzos institucionales por mejorar la calidad de la educación, han implantado cursos de capacitación a los docentes para la asimilación del modelo educativo y posterior articulación en nuevas estrategias educativas.

En las ciencias básicas, especialmente en matemáticas, se realizan importantes cambios: centros de cómputo, empleo de hojas de cálculo, evaluación con características no solo cuantitativas sino también cualitativas, planeación de cursos en academia, etc.

No todas las acciones que se llevan a cabo, están explícitamente declaradas en el modelo educativo, algunas de ellas son producto de la experiencia docente y las propias características de la región e institución donde se intenta implantar tal metodología de trabajo.

A esto, podríamos decir que existe la tendencia de que muchas de las prácticas matemáticas no escritas sean dejadas de lado y se promuevan aquellas que puedan ser declaradas formalmente como aceptables en el modelo educativo institucional.

Pese a todo lo anterior, la nemotecnia (a la que dimos seguimiento, como recurso nemotécnico en el caso del uso de las derivadas de las funciones trigonométricas básicas) perdura y en algunos casos se fortalece³¹. Pudimos registrar que sigue presente, se utiliza en el aula por los estudiantes y en ocasiones por profesores en clases de matemáticas, e incluso en materias posteriores de especialidad.

³¹ *Esta tesis no tiene el alcance para poder definir los cambios que se suscitaron en la nemotecnia presentada, a consecuencia de las acciones aplicadas para mejorar el proceso de aprendizaje en matemáticas en el ITERSC.*

En cuanto a la nemotecnia

Muy comúnmente el centrar el aprendizaje en los procesos algorítmicos, fomenta el uso de formulario y la costumbre de memorizar datos y procedimientos, estos se constituyen en agentes que orillan a los estudiantes a la creación y uso de los recursos nemotécnicos que en muchas ocasiones se considera como una actividad normal en el aprendizaje de las matemáticas. Aún, realizados cambios en diversos aspectos en las clases de matemáticas, la nemotecnia perduró en la mayoría de los casos que presentamos en este estudio y algunos más que se obtuvieron en el proceso de investigación. La primera impresión que se percibe del uso del recurso, es creer que su existencia en el aula es producto del tipo de evaluación al que se ven sujetos los estudiantes, es decir, si el estudiante necesita aprender de memoria ese contenido lo usa. Pero si las condiciones de la evaluación han cambiado de la costumbre de plantear evaluaciones centradas en la capacidad de retención de datos por uno que mide las habilidades y capacidades, ha evolucionado el contrato didáctico en algunas dimensiones, entonces, ¿por qué sigue aquí el recurso nemotécnico?

Una nemotecnia en el aula, se asocia a un contenido, procedimiento o concepto que se considera necesario aprender, o al menos retener memorísticamente, y que el alumno cree ineludible. Si a dicho objeto al que se le asocia la nemotecnia lo designamos como O , el alumno A conocerá a O siempre y cuando exista una relación (interacción) entre el alumno y el objeto $R(A,O)$, esa relación implica que tal objeto sea considerado o se le señale como necesario a el alumno.

El alumno intenta entender los mecanismos y metodologías del docente, de tal manera que pretende cubrir los requisitos que se presentan en relación al objeto de estudio, que esta implícito en un contrato didáctico que se lleva a cabo el aula. Si el alumno considera, que la $R(A,O)$, es importante en su clase, adopta o desarrolla alguna técnica para lograr tal relación con O y una de estas vías suele ser la

nemotecnia. Es decir crea una relación con el objeto poniendo una nemotecnia de por medio: una *relación del alumno con la Nemotecnia- Objeto* $R_A(NO)$.

El alumno asocia a O , mediado por una nemotecnia N , pero lo mismo puede suceder con el docente X en su $R(X,O)$, puede tener también una $R_X(N,O)$ que favorece o fortalece a la $R_A(N,O)$.

En caso donde el docente no presente o no permita la relación con la nemotecnia y el objeto, el alumno juzgará su pertinencia en función de la utilidad y del tipo de evaluación a que sea sujeto. En la escuela interesa que la relación $R(A,O)$ se lleve a cabo, pero se aspira a una vinculación de temas con contenidos propios de una especialidad, se espera que generalice, aplique, analice etc., a una *relación del alumno con el saber matemático* $R(A,S)$ en otras palabras un conocimiento de uso.

En el caso del recurso de las derivadas, en el contexto descrito y en la mayoría de los casos estudiados, sucedió que se llevó a cabo una relación del alumno con el objeto (en este caso, un procedimiento) a través de una nemotecnia. Encontramos una $R_A(N,O)$, pero no se puede asegurar que esto implique que se presentó una $R_A(O,S)$ la relación del los alumnos con el objeto vinculado o encaminado a un saber matemático.

La interpretación del docente de la relación del objeto matemático con el saber matemático en juego $R(O,S)$ que fomenta en sus alumnos y que refuerza con sus métodos de evaluación (contenidos en el contrato didáctico), condiciona de manera importante el uso de la nemotecnia, aún cuando el docente perciba o no, que es utilizada por los alumnos. La utilidad de la nemotecnia dependerá del uso que se le demande al alumno por los objetos matemáticos. Así como la utilidad de un recurso nemotécnico en ingeniería reside en que apoya al sujeto en el manejo del O , apoya a la permanencia de una relación del sujeto con el objeto $R(X,O)$ y no necesariamente en todos los casos una relación del sujeto con el saber $R(X,S)$.

Observamos que la $R_A(N,O)$ pudo ayudar a A para lograr dar respuesta a una situación específica (en un escenario típico operatorio) que incluye al objeto. En la nemotecnia del capítulo IV, O es la función $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$, la relación incluye o

exige dar respuesta de la derivada de las funciones mencionadas y N el recurso nemotécnico que presentamos.

La función de N favorece recordar toda o parte de esa relación alumno-objeto en un escenario operatorio a través de elementos que el alumno considera conocidos o de su dominio, pero si la asociación no es asimilada por el individuo como un auxiliar o técnica puede resultar peligrosa para el aprendizaje: **el estudiante podría sustituir O por N y limitar la comprensión de O , es decir en su vinculación con el saber S** y no permitirá una adecuada *relación del alumno con el saber* $R(A,S)$, que se espera desencadene en el desarrollo del pensamiento matemático en el alumno.

Con base a nuestro estudio, nos arriesgamos a establecer que una nemotecnia N en una $R_A(N,O)$ puede ser útil, si se considera necesario que el alumno establezca una $R(A,O)$ de inicio pero se requieren de estrategias que permitan posteriormente a el alumno un aprendizaje de un cierto saber matemático $R_A(O,S)$.

Si se rompe o modifica el contrato didáctico, las relaciones antes mencionadas mutaran (*Chevallard, 2000*), el alumno seleccionará esas estrategias que considera adecuadas para solventar cada situación didáctica que se le presente. Cada individuo es diferente, pero en un salón de clase tienen en común los mismos temas de estudio y compartirán herramientas o técnicas, de tal forma que la nemotecnia estará lista para surgir si es considerada como necesaria su actuación en ese escenario.

Tal rompimiento del contrato puede provocar un aprendizaje significativo al tratar de hacer que el alumno no automatice o mecanice un saber matemático y evitar que sea tratado sólo como objeto que pertenece y es exclusivo del uso de los contextos escolares. Esto podría disminuir la necesidad de una nemotecnia.

El recurso nemotécnico que se estudia fue implementado en la unidad número cuatro de la asignatura de Matemáticas I, donde uno de los objetivos expresos y

explícitos es el de un dominio de las operaciones de la derivada de las funciones trigonométricas. En la mayoría de estos casos que analizamos se cumplió ese objetivo para ambas versiones del modelo educativo Institucional. El modelo tiene cambios pero los objetivos de estudio contemplan a la algoritmia como un punto de partida necesario para el abordaje de otros temas de la materia³².

La nemotecnia se aplicó para un caso específico que estableció una relación del estudiante con el objeto (al menos operacional) y que se plantea en el objetivo educacional de la materia: que se conozca primero al O, para posteriormente el alumno lo relacione y lo incluya como parte de un saber, pero la nemotecnia sólo actúa en la primera parte del proceso.

Muchas preguntas e interrogantes, surgen de esta investigación, pero una en especial que se fue formando e inquietó durante todo el proceso es:

¿Podría la nemotecnia no sólo utilizarse para que el alumno relacione y conozca el objeto, sino que además apoye un acercamiento o comprensión de un saber matemático?

No nos alcanzan las evidencias y conocimientos para poder responder adecuadamente tal cuestionamiento. Este sería el planteamiento para otro estudio que seguramente propondrá nuevas líneas de investigación acerca de un fenómeno que nace y está en el aula, que ya no se puede ignorar en el estudio del proceso de aprendizaje: *la nemotecnia*.

³²No sabemos con certeza si la nemotecnia mencionada se aplicó en ellos, sólo en los casos registrados en el capítulo anterior y que algunos ejemplos se documentaron con fotografías con su aplicación en unidades y materias posteriores

Bibliografía

- ❖ **Ausubel D.P.**; Novack, J.D. Henesian, H. (1983): *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.,
- ❖ **Bruner, J.** (1972), *Hacia una teoría de la instrucción*. Cuba: Ediciones Revolucionarias.
- ❖ **Bruner, J.S.** (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge, MA:
- ❖ **Buzan, T.** (1994). *The mind map book*. Dutton Press.
- ❖ **Cantoral, R.** y Montiel G. (2001) *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.
- ❖ **Cantoral, R.** et al. (2003) *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas.
- ❖ **Chevallard, Y.** (1992). Fundamental concepts in didactics: perspectives provides by an anthropological approach. *Recherches en didactique des Mathématiques*. p 131-168.
- ❖ **Chevallard, Y.** (1991). *la transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado*. traductora Claudia Gilmain , AIQUE Grupo Editor S.A.
- ❖ **Chevallard, Y.**, Marianna Bosh y Josep Gascón (2000). *CUADERNOS DE EDUCACION*, I.C.E Universtat Barcelona, Editorial Horsori
- ❖ **Higbee, K. L.** (1998). *Su memoria. Cómo funciona y cómo mejorarla*. Barcelona: Paidós: Saberes cotidianos
- ❖ **Leithold, L.** (2004), *EL CALCULO E.C. 7* , Oxford University Press.
- ❖ **Levin, J. R.** y Pressley, M. (1983). Understanding mnemonic imagery effects: A dozen "obvious" outcomes. En M. L. Fleming y D. W. Hutton (Eds.), *Mental Imagery and Learning*. Englewood Cliffs, N. J.: Educational Technology Publications
- ❖ **Levin, J. R.** (1981). The mnemonics' 80s: Keyword in the classroom. *Educational Psychologist*, 16, 65-82.
- ❖ **Maldonado, E.** (2005), *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*, Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav—IPN, México.

- ❖ **Maldonado, Montiel & Cantoral**, (2004), Construyendo la noción de función trigonométrica: estrategias de aprendizaje. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 17. México: CLAME.
- ❖ **Mastropieri, M. A.** y Scruggs, T. E. (1991). *Teaching students ways to remember. Strategies for learning mnemonically*. Cambridge: Brookline Books.
- ❖ **Montiel, G.** (2005), *Estudio Socioepistemológico de la Función trigonométrica*, Tesis Doctoral no publicada. CICATA del IPN, México.
- ❖ **Paivio, A.** (1971). *Imagery and verbal processes*. Nueva York: Holt, Rinehart & Winston.
- ❖ **Piaget, J.** (1977). *La Epistemología Genética*. Presses Universitaires de France. Edición Castellana.
- ❖ **Secadas, C.** (2004) *aplicación de los principios de psicología humanística en la educación. La corriente humanística en Psicología México. En imprenta.*
- ❖ **Roldán, R. & Cribeiro, J.** (1999), *LA EVALUACIÓN DINÁMICA Y CONTINUA COMO ELEMENTO RECTOR EN LA ACTIVACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA*, Facultad de Matemática y Computación Universidad de La Habana
- ❖ **Ruiz, M.** (2000, 2004). *El maestro Facilitador del aprendizaje, desde planteamientos constructivistas*. Imprenta Valenciana Mexico.
- ❖ **Vygotsky, L.** (1988). *El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. Cap. 6.: Interacción entre Aprendizaje y Desarrollo. Ed. Grijalbo. México.
- ❖ **Vigotsky, L.S.** (1985). *Pensamiento y lenguaje*, Pleyade, Buenos Aires.
- ❖ Stanley I. Grossman (1983). *Algebra lineal*. Traductor Carlos Munoz, Grupo Editorial Iberoamericana.
- ❖ **Vigotsky, L.** *Mind in Society, the development of higher physiological process*. Harvard University Press. Harvard University Press.

Manuales educativos.

- ❖ **Manual del modelo educativo para el siglo XX**, Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica. Programa y guía didáctica. Curso de capacitación de instructores para sensibilización del modelo educativo para el siglo XX, Agosto 2004.
- ❖ **Manual del programa de desarrollo de la educación tecnológica 2001 – 2006**, programa nacional de desarrollo.
- ❖ **Manual del programa Institucional de Innovación y Desarrollo** del SNIT – 2004.
- ❖ **Manual del Modelo educativo del sistema nacional de instituto tecnológico 2002**, coordinación sectorial de normatividad académica.

Artículos

- ❖ **Cribeiro J.** (2004) et al. *Enseñanza aprendizaje de las matemáticas*, CIMA – UAC.
- ❖ **Cribeiro, J. D.** 1999, Informe de investigación, Departamento de ciencias básicas ITERSC.
- ❖ **Fernández, H.** (2001), *MEMORIA HUMANA (1ra. Parte) ESTRUCTURAS Y PROCESOS: EL MODELO MULTI-ALMACÉN*. Profesor Asociado, Cátedra de Psicología de la Memoria y del Lenguaje, Universidad de Belgrano. Profesor Adjunto, Cátedra de Psicología General, Universidad de Buenos Aires.
- ❖ **Aranda M.** (2003), *LA REGLA DE CRAMER A PARTIR DEL PRODUCTO GENERALIZADO EN R_n* , Revista de la Facultad de Ciencias PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA Vol. 8, 13-15
- ❖ **OCDE** (2003), *NATIONAL REVIEW ON EDUCATIONAL R&D EXAMINERS' REPORT ON MEXICO*. Publicado en *New Challenges for Educational Research*
- ❖ **Riojas, Ricardo.** (2002) *APRENDIZAJE Y DESARROLLO EN VYGOTSKY*, PROFESOR MAGISTER © EDUCACIÓN

- ❖ **Lezama y Farfan.** (2001) *Introducción al estudio de la reproducibilidad.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Relime Vol. 4 Num. 2, 2001, p.161-187.
- ❖ **D'Amore B.** (2000) *La escolarización del saber y de las relaciones: los efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Relime Vol. 3 Num. 3, 2000, p.1321-335

Páginas de Internet .

DGEST: Dirección General de Educación Superior Tecnológica
www.dgit.gob.mx/

ITERSC: Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de la región carbonífera
www.itesrc.edu.mx

SEP: Secretaria de Educación Publica
 Programas de educación superior
http://www.sep.gob.mx/wb2/sep/sep_Educacion_Superior

Modelo Educativo para el Siglo XXI
 Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica
<http://www.tese.edu.mx/tese2004/documentos2004/DBV9QHSKZF416.pdf>
<http://www.itq.edu.mx/noticias/2006/marzo/modeloSEIT%20final.pdf>

Qué Es Un Modelo Educativo?
 ¿Programa de estudios? ¿planeación de clases? Y sólo 45 minutos para hacer eficiente la educación.
<http://es.catholic.net/educadorescatolicos/694/2418/articulo.php?id=22081>

Universidad Peruana Unión. Métodos y Técnicas de Estudio.
<http://sardis.upeu.edu.pe/~alfpa/metodosoestudio.htm>

Definicion.org. Nemotecnia

<http://www.definicion.org/nemotecnia>

Autores.org. Nemotecnia Social

http://www.autores.org.ar/amegna/nemotecnia_social.htm

Bombero. Nemotecnia Sencilla

<http://bombero.bloxus.com/historias/2562>

Todo Espías. Técnicas Nemotécnicas

<http://www.todoespias.com/tecnicas-estu.htm>

UPCN. Nemotecnia Social

<http://www.upcndigital.org/articulo.php?accID=4080>

Psicopedagogía. Definición de Nemotecnia

<http://www.psicopedagogia.com/definicion/mnemotecnia>

Juegos de Palabras. Nemotecnia

<http://www.juegosdepalabras.com/mnemos.htm>

Analítica. Nuevas Normas Ortográficas y Prosódicas de la Real Academia Española

http://www.analitica.com/bitbliblioteca/rosenblat/nuevas_normas.asp

Wikipedia. Calendario Gregoriano

http://es.wikipedia.org/wiki/Calendario_Gregoriano

Universidad Carlos III de Madrid. Sistemas de Clasificación en la Bibliotecas del Estado Español

<http://www.cobdc.org/jornades/7JCD/36.pdf>

Guapacho. Guss, Tecnología y Sociedad
<http://guapacho.blogspot.com/2005/08/ayuda.html>

The spirit of now, Peter Russell. Mind maps
<http://www.peterussell.com/mindmaps/mindmap.html>

Memoria, olvido, decisión
José Luís Catalán Bitrián
http://www.cop.es/colegiados/A-00512/imgaginacion_y_memoria.html

<http://www.monografias.com/trabajos5/construc/construc.shtml>
Wanadoo, Inteligencia Psicología experimental. Capacidades mentales.
Memoria. Aprendizaje. Cociente intelectual
http://html.rincondelvago.com/inteligencia_9.html

Wikipedia, la enciclopedia libre, Método de Loci.
http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Loci

AulaFacil.com, **Lección 17 ª: Técnicas Nemotécnicas**
<http://www.aulafacil.com/Tecestud/Lecciones/Lecc17.htm>

Las técnicas , los procedimientos metodológicos y las condiciones
psicopedagógicas como base de los métodos problemáticos de enseñanza
<http://www.monografias.com/trabajos13/copsi/copsi.shtml>

Ciencia: conocimiento para todos en línea, aprendizaje y enseñanza efectivo
<http://www.project2061.org/esp/tools/sfaaol/chap13.htm>