INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGIA AVANZADA

RESIGNIFICANDO EN CONCEPTO DE FUNCIÓN LÍNEAL EN UNA EXPERIENCIA DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Tesis que para obtener el grado de
Maestra en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Mónica Garcia Zatti

Directora de Tesis:
Dra. Gisela Montiel Espinosa

México, D. F., Agosto de 2007.

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 8 del mes de agosto de 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA Legaria. para examinar la tesis de grado titulada:

Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia de educación a distancia

Presentada por el alumno:

García	Zatti	Mónica
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | 5 |

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Javier Lezama Andalón

CICATA- IPN
Posgrado en
Matemática Educativa

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 03 del mes AGOSTO del año 2007, el (la) que suscribe Mónica Inés García Zatti alumna del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A 030215, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autora intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dra. Gisela Montiel Espinosa y cede los derechos del trabajo intitulado "Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia de educación a distancia", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección gzatti@criba.edu.ar. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Nombre y firma

MÓNICA INÉS GARCÍA ZATTI

Glosario

Conceptos

Aprendizaje a distancia: es la adquisición de conocimiento y de habilidades a través de medios de información e instrucción, utilizando la tecnología apropiada.

Educación a distancia: es el proceso que involucra el aprendizaje a distancia y la instrucción que lo permite.

Ingeniería Didáctica: este término surge, en el seno de la escuela francesa, en analogía al quehacer en ingeniería, ya que se apoya en resultados científicos, involucra la toma de decisiones y el control sobre las diversas componentes inherentes al proceso. Así la ingeniería didáctica se constituye como una metodología de investigación que se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella y como una metodología de producción para guiar las experimentaciones en clase. Su sustento teórico proviene de la teoría de la transposición didáctica y de la teoría de las situaciones didácticas.

Interacciones: es el tipo de comunicación que se establece entre todos los miembros del sistema didáctico (profesor, alumno, saber) y que condiciona el aprendizaje.

Interactividad: es el tipo de comunicación que se da entre los contenidos en formato de objetos virtuales interactivos y el estudiante, ya que el objeto responde a la manipulación o intervención del usuario, proporcionando información para continuar o retroceder en la actividad.

Modelación: es todo aquello utilizado para entender, predecir o intervenir en el comportamiento de un fenómeno, que incluye contextos gráficos, numéricos, algebraicos u otros. Dentro de la aproximación socioepistemológica los modelos son usados como herramientas para argumentar y actualmente, dentro de esta aproximación, existe el debate entre considerar a la modelación como práctica social o como actividad.

Práctica social: Se entiende por práctica social a aquel conglomerado de supuestos socialmente compartidos, mayoritariamente implícitos, que norman la actividad, lo que nos hace hacer lo que hacemos, ya sea como individuo o como comunidad

Predicción: práctica social que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce.

Resignificación: esta noción busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de los significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intensión; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos.

Simulación: mediante un software se suple la ausencia física de equipo para realizar la modelación. El software se diseña para que el alumno tome los datos del fenómeno simulando las condiciones de un laboratorio físico, incluyendo el ruido de los datos.

Socioepistemología: aproximación sistémica que incorpora las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza

Siglas

CICATA: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada
IPN: Instituto Politécnico Nacional
BSCW: Basic Support for Cooperative Working

Diagramas, gráficos, imágenes y tablas

Resumen

Este trabajo reporta la investigación que realizamos en torno a la resignificación del concepto de función lineal en una experiencia de educación a distancia.

En la misma, debimos abordar diversas temáticas: función, función lineal, modelación, educación a distancia. Debido al número importante de investigaciones referidas a estos temas en el contexto de diferentes disciplinas y aproximaciones teóricas, acotamos nuestros antecedentes a aquellas investigaciones dentro de nuestra disciplina, Matemática Educativa, que aportaran mayores elementos a nuestro trabajo y que están fuertemente vinculados con nuestro marco teórico: la denominada *aproximación socioepistemológica*, que contempla cuatro dimensiones en la construcción social del conocimiento matemático: la social, la epistemológica, la cognitiva y la didáctica.

Esta experiencia se llevó a cabo en el curso Naturaleza del Pensamiento Matemático del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa que ofrece completamente en línea el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) desde la Ciudad de México.

A la luz de nuestros antecedentes y de nuestro marco teórico, se diseñaron cinco secuencias, utilizando materiales digitales de diferentes tipos, con la intencionalidad de hacer evidentes herramientas y argumentos; que permitieran, a su vez, reconstruir significados. La metodología utilizada para el diseño de estas secuencias experimentales fue la Ingeniería Didáctica y en esta tesis reseñamos el trabajo realizado durante las cuatro fases que esta metodología contempla y exponemos las conclusiones a las que arribamos.

Abstract

This work reports de investigation performed around the resignification of the concept of linear function in an experience of distance education.

In this investigation, we must deal with several topics: function, linear function, modelation, distance education. On account of the important number of investigations in reference to this topics in the context of different disciplines and theoretical approximations, we fenced ours backgrounds to those investigations in our discipline, Educational Mathematics, that contribute more elements to our work and that are strongly linked to our framework: *socioepistemological framework.* Specifically, this framework envisaged four components of the construction of mathematical knowledge; namely, the epistemological, cognitive, didactic and social dimensions.

This experience was carried out in the course Nature of Mathematics Thinking in the Program of Masters in Science in Educational Mathematic which is offered completely on line by Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) of Instituto Politécnico Nacional (IPN) from México City.

In the light of ours backgrounds and our framework, we designed five sequences, using different kinds of digital material, with the intention of showing tools and arguments that allow, in turn, to rebuild meaning. The methodology used for the design of this sequences was Didactic Engineering and in this thesis we review the work fulfilled during the four phases that this methodology contemplates and show the conclusion drawn.

Introducción

Las dificultades con la que nos encontramos a diario al desarrollar los contenidos de matemática en nuestras clases y al analizar los resultados poco satisfactorios que observamos en el primer año de universidad, nos llevan a reflexionar acerca de los fenómenos relacionados con la enseñanza de las matemáticas, sobre todo, los relacionados con la naturaleza, formas y condiciones de la construcción del conocimiento matemático.

Nuestro trabajo de investigación se ubica en *una didáctica en escenarios socioculturales* (Cantoral y Farfán, 2003) y en consecuencia contempla cuatro componentes en la construcción de conocimiento matemático, a saber, la social, la epistemológica, la cognitiva y la didáctica. El concepto alrededor del cual se desarrolla la actividad didáctica a diseñar y estudiar es el de función, particularmente la lineal. El interés por este concepto surge por ser uno de los temas de mayor importancia en la matemática a partir del nivel medio superior. Es considerado fundamental en el Cálculo y otras ramas de la matemática, con diferentes aplicaciones en otras áreas de la ciencia.

Al seno de nuestra disciplina se han desarrollado diversas investigaciones entorno a los fenómenos didácticos relacionados con la noción de función y se han realizado propuestas didácticas basadas en sus resultados. Nuestro objetivo es partir de estos resultados y propuestas para diseñar secuencias didácticas que permitan que el alumno confronte sus concepciones y resignifique la noción de función, en un *escenario en línea*.

La educación a distancia, en particular la educación en línea o virtual, es hoy un instrumento que permite: cambiar en forma rápida y eficiente la enseñanza impartida desde un modelo de escuela común y centralizada, a uno flexible y descentralizado, que mejora la dinámica social y facilita el acceso al conocimiento; la educación permanente, dentro y fuera del aula; la divulgación del conocimiento a través de los medios tecnológicos existentes, y la participación de las universidades y otros centros de educación superior en el entrenamiento, capacitación y formación de recursos humanos acordes a los requerimientos científicos y sociales. Pero es necesario acompañar el enorme y continuo crecimiento de esta modalidad de instrucción por investigaciones que aporten resultados teóricos y prácticos que permitan caracterizar los fenómenos y las problemáticas que en ésta se presentan.

En el Capítulo 1 presentamos los antecedentes de investigación, a los que hemos clasificado en históricos, epistemológicos, cognitivos y didácticos. Por el escenario en el que llevamos a cabo nuestra investigación, dichos antecedentes han sido complementados con la incorporación de elementos provenientes de distintas propuestas de innovación para el aula, y de investigaciones en matemática educativa a distancia cercanas a nuestro grupo de investigación.

La descripción del Marco Teórico, la Socioepistemología, es abordada en el Capítulo 2; en el que también se presenta el desarrollo en detalle del estudio sistémico de la resignificación de la Función Lineal que contempla las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva, y la incorporación de la componente social.

La metodología de investigación utilizada fue la Ingeniería Didáctica. Este término surge, en el seno de la escuela francesa, en analogía al quehacer en ingeniería, ya que se apoya en resultados científicos, involucra la toma de decisiones y el control sobre las diversas componentes inherentes al proceso. Así la ingeniería didáctica se constituye como una metodología de investigación que se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella y como una metodología de producción para guiar las experimentaciones en clase. Su sustento teórico proviene de la teoría de la transposición didáctica y de la teoría de las situaciones didácticas. La descripción de las cuatro fases que esta metodología contempla se presenta en el Capítulo 3.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos y las conclusiones a las que arribamos en la confrontación de los resultados empíricos con los elementos teóricos que enmarcan esta investigación.

Al final incluimos como anexo todo el material diseñado para la puesta en escena de nuestra propuesta.

Capítulo 1: Antecedentes

Las investigaciones que han aportado más elementos a nuestro trabajo pueden clasificarse en: históricos, epistemológicos, cognitivos y didácticos.

El análisis histórico realizado por (Youschkevitch, 1976) muestra que la matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua y en dicha evolución ha desempeñado un papel destacado su intervención en otras ciencias y la necesidad de resolver determinados problemas.

Sin embargo, y para efectos de un trabajo de investigación en matemática educativa, es necesaria la ampliación a un análisis epistemológico, con base a la revisión histórica de los conceptos. Así podemos observar las disparidades entre el saber científico y el enseñado, así como identificar los obstáculos epistemológicos[1] inherentes a los conceptos. En esta dirección, y vinculado a las concepciones en los estudiantes, Sierpinska (1989 y 1992) realiza las primeras investigaciones sobre el concepto que nos interesa, el de función.

Posteriormente, Ruiz (1998) incorpora a la componente epistemológica y a la cognitiva, la componente didáctica de un escenario particular. Entre sus resultados más significativos señala que las concepciones en el estudiante están determinadas por las concepciones históricas ligadas a la noción de función, por el estatus que se le da dentro de los programas oficiales y por como es presentado en los libros de texto y por el profesor en clase.

A nuestro entender, y acorde con nuestro marco teórico de referencia, consideramos que es necesario ampliar esta aproximación incorporando la componente social, en tanto distingue de inicio que cada tipo de función tiene una naturaleza epistemológica propia y en consecuencia, una construcción social propia. Nuestro trabajo aborda, dentro de las funciones algebraicas, a la función lineal como el objeto matemático vinculado a ciertos fenómenos didácticos en particular.

[1] Obstáculos identificados en la génesis histórica de un concepto; concepto introducido por Brosseau en 1983 a la Didáctica de las Matemáticas (citado en Ruiz, 1998)

1. 1.- Aportes de investigación:

1.1.1- Sobre la evolución del concepto de función a través de la historia

A pesar de los numerosos estudios sobre la historia de las matemáticas, existen pocos trabajos dedicados específicamente al origen del concepto de función. Además, las opiniones de los autores son distintas e incluso contradictorias ya que algunos admiten cierto carácter funcional en algunas operaciones matemáticas de la antigüedad, otros sitúan su nacimiento junto a la aparición de la geometría analítica y algunos otros lo sitúan en el siglo XIX, con las definiciones dadas por Dirichlet y Lobatchevsky.

En este sentido, uno de los trabajos más importantes, y que ha sido utilizado como fuente de información en varias investigaciones dedicadas al concepto de función, es el de (Youschkevitch, 1976). En este trabajo el autor ofrece consideraciones sobre las tres etapas, que a su modo de ver, son las principales en el desarrollo de la noción de función hasta mediados del siglo XIX.

- *El mundo antiguo*

Período en el que el estudio de casos particulares de dependencia entre dos cantidades aún no había aislado las nociones generales de cantidades variables y funciones. Es decir, en este período no existía la idea general de relación funcional. A pesar de esto, es posible encontrar ideas que pueden vincularse con la misma y que, sin duda, estuvieron ligadas con su aparición. Tal es el caso de las tablas babilónicas, utilizadas para realizar cálculos y para la astronomía, la trigonometría de las cuerdas de la época alejandrina y el estudio de las cónicas realizado por los griegos.

- *La edad media*

Es en este período en el que las nociones generales se expresaron por primera vez de un modo definido, mediante formas geométricas o mecánicas, pero sólo se hicieron por medio de una expresión verbal o una gráfica, y no por medio de una fórmula.

En el comienzo de esta etapa es necesario mencionar el trabajo realizado por los árabes ya que hubo un incremento en el número de funciones consideradas, una mejora en los métodos de estudio de las mismas y un perfeccionamiento en los métodos para su tabulación. Sin embargo, no hubo ningún desarrollo esencialmente nuevo del concepto de función.

Este concepto apareció por primera vez en una forma general, en el siglo XIV, en las escuelas de filosofía natural de Oxford y París, quienes declararon que las matemáticas eran el instrumento principal para el estudio de los fenómenos naturales. El mayor aporte de estas escuelas es el estudio cuantitativo del movimiento local no uniforme, abordado en Inglaterra en dirección aritmética – cinemática, y en Francia, además, en dirección geométrica. Se analizaron cualidades y formas, según la terminología aristotélica, de fenómenos diversos como calor, luz, densidad, que podían poseer varios grados de intensidad (o latitud) que cambiaban entre dos límites establecidos; esta intensidad se consideraba en relación a su extensión (o longitud) como el tiempo o cantidad de materia. El principal representante de la escuela francesa es Nicolás Oresme, quien propone una aproximación geométrica al estudio de los fenómenos que cambian.

- *El período moderno*

Etapa en la que empiezan a prevalecer las expresiones analíticas de las funciones. De acuerdo con Youschkevitch (1976), el desarrollo de la teoría de funciones se basó fundamentalmente en tres pilares: *el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos*, *la creación del álgebra simbólica-literal* y la *extensión del concepto de número*. Por otra parte, a principios del siglo XVII, comenzó a surgir una nueva concepción de las leyes cuantitativas de la naturaleza y esto incidió notablemente en la evolución del la noción de función. El poderoso instrumento algebraico permitió a Fermat y a Descartes el descubrimiento de las representaciones analíticas.

Para Youschkevitch (1976), es Descartes quien por primera vez, y de una forma totalmente clara, sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondientes a los valores dados de la otra. La introducción de funciones bajo forma de ecuaciones tuvo el efecto de una revolución en el desarrollo de las matemáticas. La utilización de expresiones analíticas junto con las reglas para operar con ellas conferiría al estudio de funciones un status de verdadero cálculo.

Al principio, las funciones que se expresaban analíticamente se limitaban a las algebraicas. Pocos años más tarde, el descubrimiento del desarrollo de funciones en series de potencias infinitas, debido entre otros a Newton, hizo posible representar analíticamente cualquier relación funcional de las que se estudiaban en esa época. El desarrollo en series de potencias tuvo una gran importancia, hasta el punto de convertirse en el método fundamental para el estudio de las funciones de la época.

Es en este período cuando surge el cálculo diferencial e integral como una parte independiente de las matemáticas, casi simultáneamente de dos modos diferentes: en la teoría de las fluxiones de Newton y en los cálculos de diferenciales de Leibniz. En su origen, el cálculo infinitesimal apeló a consideraciones geométricas o mecánicas. Los métodos del cálculo infinitesimal fueron creados principalmente para la resolución de problemas de mecánica y de problemas ligados a la geometría.

La palabra “función” aparece por primera vez en 1673 en un manuscrito de Leibniz, en el contexto de un problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de la tangente, pero es en 1718 cuando aparece la primera definición explícita de la función como una expresión analítica, en un artículo de Johann Bernoulli.

Es Euler, discípulo de Johann Bernoulli, quien desarrolla en el siglo XVIII, en *Introductio in analysis infinitorum*, un estudio detallado del concepto de función. Comienza por definir nociones iniciales, en la definición de función sigue a su maestro Bernoulli y posteriormente aborda el problema de establecer qué se entiende por expresión analítica. Al enumerar las operaciones de las cuales se componen las expresiones analíticas, comienza por las operaciones algebraicas y luego las trascendentes, llegando a las funciones exponenciales y logarítmicas, y a un número infinito de otras funciones que proporciona el cálculo integral, incluyendo la integración de ecuaciones diferenciales.

El principal impulso para el posterior desarrollo del concepto de función proviene de los trabajos de Euler sobre física – matemática. El más significativo de todos ellos fue el problema de las vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita, homogénea y fijada a sus dos extremidades. Fue a través de la resolución de este problema práctico como Euler tuvo necesidad de considerar funciones más generales que las funciones analíticas. Comienza entonces a construir una noción mucho más abstracta y universal de función que paulatinamente fue ganando reconocimiento y uso cada vez más generalizados. Esto se percibe en las definiciones dadas por Fourier, Lobatchevsky o Dirichlet.

1.1.2- Del análisis histórico al análisis epistemológico del concepto de función

Investigaciones fundamentadas sobre estudios de epistemología histórica de las matemáticas, ponen de relieve cómo el análisis de la evolución conceptual es una herramienta muy útil para las investigaciones didácticas. Tal es el caso de Sierpinska (1989) quien centrándose en el aprendizaje de los estudiantes realiza un análisis histórico-epistemológico de la noción de función, identificando cinco obstáculos epistemológicos inherentes a este concepto:

1. Los objetos variables son aceptados en ciencias naturales o en aplicaciones, pero no en la matemática pura.
2. Las magnitudes son entidades cualitativamente diferentes de los números; la proporcionalidad es diferente de la igualdad.
3. Fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con las expresiones algebraicas.
4. Lo más importante de la matemática es proveerse de un cálculo poderoso que permita a los científicos resolver sus problemas.
5. Los objetos geométricos son tomados implícitamente como un todo que contiene en él mismo sus longitudes, su área o su volumen.

Además de localizar estos obstáculos, Sierpinska caracteriza las concepciones de los estudiantes en:

- *Concepción primitiva*. Cuando una función es un desplazamiento de puntos sobre el plano o sobre una línea.
- *Concepción de razón o proporción*. Cuando en el desplazamiento de puntos sobre el plano, la nueva posición se puede describir en relación con la posición inicial por una razón de distancias desde un punto fijo

- *Visión sintética*. Cuando una función se identifica como su representación en el plano. Las funciones son pensadas como objetos geométricos y se clasifican de acuerdo con la forma de esos objetos.
- *Tabla numérica*. Cuando una función viene dada por su tabla de valores.
- *Expresiones algebraicas*. Cuando una función se identifica por su ecuación.
- *Visión analítica de la curva*. Cuando la función es un ente abstracto en unos ejes de coordenadas.
- *Relación funcional*. Cuando existe un tipo especial de relaciones que llamamos funciones.

En las conclusiones a las que llega valora en forma muy positiva del contexto social en el que se ha desarrollado la experiencia e identifica como un obstáculo epistemológico el concebir a la matemática como un conocimiento algorítmico, ya que esto puede entorpecer el desarrollo de las concepciones sobre función.

En un estudio posterior (Sierpinska, 1992) presenta cuatro categorías de los actos de entendimiento de un concepto matemático y diecinueve categorías que se pueden determinar en la comprensión del concepto de función.

Categorías de los actos de entendimiento de un concepto matemático:

I. Identificación (de un objeto entre varios objetos)
II. Discriminación (entre dos objetos, detectando diferencias y propiedades relevantes)
III. Generalización (extender el orden de las aplicaciones, abrir posibilidades de interpretación y descubrimiento)
IV. Síntesis (la percepción de hechos aislados se pueden organizar en un todo consistente)

Mientras que las categorías que se pueden determinar en la comprensión del concepto de función son:

1. La identificación de los cambios observados en el mundo que nos rodea es un problema práctico para resolver.
2. La identificación de regularidades en las relaciones entre cambios es un medio de tratar los cambios.
3. La identificación de los objetos que cambian en el estudio de los cambios.
4. Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático (en términos de cantidades conocidas y desconocidas y en términos de variables y constantes)
5. Discriminación entre variables dependiente e independiente.
6. Generalización y síntesis de la noción de número.
7. Discriminación entre número y cantidad.
8. Síntesis entre el concepto de ley y el concepto de función.
9. Discriminación entre una función y las herramientas analíticas que se usan para describir su ley.
10. Discriminación entre definiciones y descripciones de objetos.
11. Síntesis de la concepción general de la función como un objeto.
12. Discriminación entre los conceptos de función y relación.
13. Discriminación entre las nociones de función y sucesión.
14. Discriminación entre coordenadas de un punto de una curva y los segmentos "rellenos" de la curva de ciertas funciones.
15. Discriminación entre los diferentes significados de la representación de funciones y las funciones mismas.
16. Síntesis de las diferentes formas de expresar las funciones, representar las funciones y hablar sobre funciones.
17. Generalización de la noción de variable.
18. Síntesis de los "roles" de la noción de función y de causa.
19. Discriminación entre las nociones de relación causal y funcional.

Sierpinska concluye su investigación añadiendo que también son importante factores tales como:

- *Motivación*. Los estudiantes deben estar interesados en explicar los cambios, para así encontrar regularidades entre ellos.

- *Contextos introductorios*. Las funciones expresadas en forma analítica deben aparecer en primer lugar como herramientas para modelizar ciertas situaciones de la vida real o científicas.
- *Contextos de desarrollo*. Los métodos de interpolación se deben usar para desarrollar la noción de función.
- *Comprensión de la noción de función*. Los estudiantes deben ser capaces de identificar no sólo aquello que cambia sino también cómo cambia.
- *Prerrequisitos*. Es necesario un cierto grado de conocimiento algebraico para abordar la noción de funciones.
- *Representaciones*. Los estudiantes deben tener la oportunidad de adquirir cierta flexibilidad en el uso de diferentes modos de expresión y de representación.
- *Definiciones*. La introducción de la definición de función teórico-conjuntista como un grado especial de relación no está justificada ni desde un punto de vista didáctico ni epistemológico. La definición informal de Dirichlet es suficiente para el nivel secundario.
- *Metodología*. La discusión en clase de las similitudes y diferencias entre las relaciones causales y las relaciones funcionales pueden contribuir a la comprensión de ambas nociones.

1.1.3- Sobre las concepciones de lo alumnos desde una perspectiva cognitiva

En este apartado nos referiremos a investigaciones basadas en modelos teóricos construidos por los autores, en donde la explicación teórica alrededor del aprendizaje del concepto de función es realizada con base en los resultados de diversas experiencias de aula.

Vinner y Tall (1981) si bien no definen el término concepción, desarrollan una teoría en la cual relacionan los significados que para ellos tiene la definición de un concepto (concept definition) y las imágenes que de dicho concepto (concept image) desarrollan los alumnos. Los autores consideran que todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definición. Muchas de estas definiciones se introducen en los programas de matemática, pero no necesariamente el alumno utiliza esa definición cuando debe tratar con ejemplos o contraejemplos de un concepto. En la mayoría de los casos recurre a una *imagen del concepto*, que incluye representaciones visuales y propiedades, resultado de su experiencia, asociadas al mismo.

Se refieren a *definición del concepto* como el conjunto de palabras que se utilizan para especificar lo que es un concepto. Las definiciones que los alumnos dan de algunos conceptos difieren mucho de la definición formal de los mismos, y suelen ser una descripción verbal de la imagen conceptual que personalmente han construido.

Para estos autores, apropiarse del significado de la noción de función implica formar una imagen de la misma más que la definición formal.

Entre las aportaciones de estos trabajos de investigación rescatamos la exposición de las concepciones de los estudiantes respecto del concepto de función:

- Asumen como función sólo aquellas cuyas gráficas tengan forma regular, rechazando las compuestas por intervalos.
- Un función definida por *n* intervalos se asumen como *n* funciones.
- En la gráfica de una función discontinua se consideran las partes como funciones distintas.
- Dados los pares ordenados de una tabla, se asigna a cada par ordenado una función.

Dubinsky y Harel (1992) describen las concepciones de los alumnos sobre la noción de función en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas:

- La concepción de función como *acción* implica que el alumno requiere de instrucciones precisas, como por ejemplo el empleo de fórmulas algebraicas de la función para estar en condiciones de realizar transformaciones sobre ella.
- Una concepción como *proceso* significa el tener una idea más dinámica, poder pensar a la función como algo que recibe una o más entradas y que regresa salidas. Esta etapa requiere la coordinación de varias acciones.
- La concepción de *objeto* se logra cuando se manipulan las funciones mediante otras acciones y procesos, por ejemplo, cuando se derivan.
- Lograr la concepción de *esquema* involucra acciones, procesos y objetos del concepto de función, y distingue cuáles pertenecen a cada esquema.

Las conclusiones de este trabajo giran en torno a la cuestión de cómo los estudiantes están situados en cuanto a las concepciones de acción y de proceso, y la complejidad de pasar de una concepción a otra debido a ciertas restricciones, como por ejemplo la restricción debida a su concepción de lo que es una función.

1.1.4- Un estudio sistémico ligado al concepto de función

Ruiz (1998) realiza un estudio didáctico alrededor de la noción de función contemplando, en forma sistémica, su génesis epistemológica, el estatus que recibe en la enseñanza y el desarrollo de las concepciones de los estudiantes referidas a este objeto matemático.
En el análisis epistemológico del concepto de función Ruiz-Higueras identifica diferentes concepciones asociadas a la evolución histórica de esta noción (Ver tabla 1).

Concepciones colectivas o epistemológicas	Caracterización de la concepción			
	Situaciones	**Invariantes**	**Representaciones**	**Momento histórico**
1) Identificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitud variable	Todas las ligadas a los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables.	Establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa-efecto.	Medidas de cantidades. Tablas.	Desde la matemática prehelénica, perdurando largo tiempo.
2) Razón o proporción	Todas las ligadas a las magnitudes físicas y en especial en dominios tales como la geometría o la astronomía.	Relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.	Las proporciones en principio expresaban retóricamente las relaciones establecidas, pasando posteriormente a expresiones a:b::c:d	Desde la matemática helénica, perdurando con matemáticos como Oresme y Galileo.
3) Gráfica (visión sintética)	Todas las ligadas a las magnitudes físicas en las que se intentaba representar gráficamente tanto la variación como la dependencia de dichas magnitudes.	Proporcionalidad entre magnitudes. Relación de dependencia cualitativa representada por medio de una figura describe la cantidad de una determinada cualidad en relación con otra de la cual depende.	Se usaban términos específicos: formas, latitud, longitud. Se representaba la dependencia por medio de gráficos que adquirían su significado de forma global (sintética)	Comenzó en las escuelas de Oxford y París en el siglo XIV y tuvo su representante más significativo en Oresme.
4) Curva (analítico-geométrica)	Se trataba de buscar un método de expresión de las relaciones numéricas establecidas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de la coordenadas. Se establecen al tratar de conectar problemas de geometría y de álgebra.	Cuando una ecuación contiene cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de esas cantidades describe un a línea recta o una línea curva.	Ejes cartesianos, coordenadas, representación algebraica.	Surgió a través de los trabajos de Descartes y Fermat (siglos XVI, XVII) y permanece en la matemática
5) Expresión analítica	Intramatemáticas (problemas del cálculo infinitesimal) y	Se identifican las cantidades variables con las expresiones	Términos como fluentes y fluxiones. Leibniz introduce el	Comienza con los estudios de Descartes y Fermat, prosigue

	extramatemáticas (problemas de la astronomía y la física)	analíticas. Funciones clasificadas en continuas y mixtas.	término función representándolo con f x. Euler lo generaliza como una expresión analítica (desarrollo en serie)	con los trabajos de Newton y Leibniz (siglo XVII) y continúa con los de Bernoulli, Lagrange y Euler (siglo XVII, XVIII)
6) Correspondencia arbitraria: aplicación	Continúan surgiendo de las conexiones entre la física y la matemática. Se tratan también los problemas existentes respecto a la continuidad de las funciones.	Se llega a la noción de correspondencia arbitraria.	El término función se corresponde con la expresión f(x) o bien con y. A partir de la introducción de la teoría de conjuntos y el estructuralismo bourbakista se representa como $f: X \to Y$ o $x \to f(x)$. Las representaciones gráficas siguen utilizando los ejes cartesianos y aparecen nuevas representaciones con fines didácticos: los diagramas de Venn.	Desde los últimos trabajos de Euler sobre funciones arbitrarias (siglo XVIII), continua con los trabajos de Fourier sobre series trigonométricas (siglo XIX) y se consolida con los trabajos sobre números reales de Cauchy, Dedekind, Lobachevsky, Riemann, Dirichlet.
7) Función como terna $f=(F;X;Y)$	Todas las de variación que deben ser modelizadas funcionalmente dentro de cualquier dominio científico.	$f=(F;X;Y)$ es una función $\Leftrightarrow G \subset X \times Y$, $x \in X$ $y \in Y$, tal que, $(x,y) \in G$ R es una función $\Leftrightarrow x, y, z$ $(x,y) \in R$ y $(x,z) \in R$ $\Rightarrow$ y=z	En cuanto a la notación, la expresada anteriormente y en cuanto a las gráficas, se sigue utilizando los ejes cartesianos.	A partir de la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos, principalmente cuando se la tomó como base y fundamento de toda la matemática (fines del siglo XIX y primeras décadas del XX)

En cuánto a los diferentes obstáculos epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de función, Ruiz (1998) agrupa en:

Obstáculos a nivel de creencia y convicciones

1) Obstáculo de la concepción estática: La idea más primitiva de función estaba contenida en las nociones de cambio y de relación entre magnitudes variables. No obstante, durante mucho tiempo, los matemáticos consideraban a los entes matemáticos como estáticos y a las magnitudes físicas como variables. Las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas eran interpretadas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas.
2) Obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y números: Actualmente asociamos de manera muy natural a cualquier cantidad de una magnitud una cierta medida numérica, pero en el pensamiento griego, magnitudes y números eran objetos distintos. Los números eran discretos mientras que las magnitudes eran continuas. Esta disociación llevó a no observar las leyes físicas como funciones matemáticas.

Obstáculos a nivel de esquemas de pensamiento

3) Obstáculo de la razón o proporción: Desde los griegos y hasta el siglo XV, la proporción se escribía de forma discursiva y no como una igualdad en forma de fracciones. El aspecto funcional de la proporción quedó completamente oculto.
4) Obstáculo de la homogeneidad de las variables: La homogeneidad conducía siempre a comparar magnitudes de la misma naturaleza y esto impedía encontrar dependencias entre variables de diferentes magnitudes.
5) Obstáculo de la concepción geométrica de las variables: Los matemáticos griegos construyeron un álgebra geométrica cuyos elementos primarios eran los segmentos. Con ellos definieron todas las operaciones del cálculo. La suma se interpretaba como la adición de segmentos; la diferencia como la eliminación de una parte del segmento igual al segmento sustraendo; el producto de dos segmentos condujo a la representación bidimensional de un rectángulo; el producto de tres segmentos daba un paralelepípedo y el producto de un número

mayor de segmentos no podía considerarse; la división sólo era posible bajo la condición que la dimensión del dividendo fuera mayor que la dimensión del divisor.

Obstáculos a nivel de conocimiento teórico

6) Obstáculo de la concepción algebraica: La simbolización algebraica hizo que apareciese otro nuevo obstáculo en el desarrollo del concepto de función. Se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que podían ser descriptas por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones.
7) Obstáculo de la concepción mecánica de curva: Posteriormente, el desarrollo del concepto de función estaría acompañado de la noción de curva. Pero en un principio las curvas no fueron consideradas como gráficos de la relación funcional sino más bien como trayectorias de puntos en movimiento (curvas mecánicas)

La componente didáctica de la investigación de Ruiz contempla a la noción de función como *objeto a enseñar*, como *objeto de enseñanza* y como *objeto enseñado*, lo que le permite analizar cómo “vive” el objeto función en el sistema de enseñanza español y aportar elementos y fenómenos didácticos relacionados con el proceso de transposición didáctica de este concepto.

La noción de función como *objeto a enseñar* la lleva a analizar cómo se presenta en los programas oficiales del nivel secundario del sistema educativo español. En este sentido, concluye que éstos inducen a la concepción de función como una aplicación entre conjuntos numéricos, promoviendo las expresiones algebraicas y la representación gráfica cartesiana.

Al analizar los manuales escolares considera a la noción de función como *objeto de enseñanza.* Este análisis le permite afirmar que los textos promueven la concepción del concepto de función como una fórmula algebraica, como una curva representada en unos ejes cartesianos y como una aplicación entre dos conjuntos numéricos.

Por último, la noción de función como *objeto enseñado* conduce a analizar los apuntes tomados en clase por los alumnos. Los fenómenos efecto de los contratos didáctico, escolar, pedagógico y de enseñanza encontrados, que viven, explícita o implícitamente, en el salón de clase le permiten determinar que las concepciones inducidas por los profesores en su enseñanza son: una función de variable real es *una fórmula algebraica*, una función es *una gráfica representada en unos ejes cartesianos* y una función es *una aplicación entre dos subconjuntos de números reales*.

Un estudio experimental, con el propósito de evaluar las concepciones sobre la noción de función que manifiesta un grupo de alumnos de secundaria, le permite realizar y describir la siguiente tipología:

- Algoritmo de cálculo
- Expresión algebraica
- Gráfica construida a partir de una fórmula
- Ideograma (algebraico y gráfico)
- Correspondencia entre conjuntos numéricos
- Transformación

En sus conclusiones finales, Ruiz confirma sus hipótesis iniciales:

- Las concepciones locales y parciales de los alumnos tienen aspectos coincidentes con las concepciones determinadas en la evolución histórica.
- La enseñanza de la noción de función enfatiza su tratamiento como objeto de estudio en si mismo, minimizando su consideración como herramienta de la actividad matemática.
- El conjunto de restricciones didácticas por el sistema de enseñanza induce concepciones muy limitadas y parciales en los alumnos, que se constituyen como obstáculos para la formación de una concepción más general y completa de la noción de función.
- Los alumnos, dependiendo de la tarea a realizar, utilizan diferentes criterios de decisión para el reconocimiento de funciones, considerando en último lugar el de aplicación, siendo éste un constituyente fundamental en la definición formal del concepto de función.

1.2. - Propuestas de Innovación para el Aula

1.2.1- Acerca de las prácticas de modelación.

En la línea de investigación *"Las prácticas sociales en la emergencia del conocimiento matemático"* que desarrolla el grupo dirigido por el Dr Jaime Arrieta en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Acapulco, México, se intenta dar explicación de cómo en el ejercicio de las prácticas sociales los actores construyen sus conocimientos como herramientas para la intervención; construcción que no se concibe como un proceso aislado, sino como un proceso social de construcción conjunta. La práctica de entender y predecir fenómenos, que los actores ejercen, es lo que llaman *modelación*. En este sentido, se han presentado diferentes trabajos donde se proponen y se reportan las actividades de los actores en la puesta en escena de diseños de aprendizaje. Uno de estos trabajos recibe el nombre de "*laboratorio virtual*", donde se proponen diseños de aprendizaje basados en las prácticas de modelación de *fenómenos simulados por software.* Para el diseño de una de las secuencias reportadas en esta investigación, buscando la construcción del modelo lineal, se ha utilizado el Programa SIRES (Sistema de resortes).

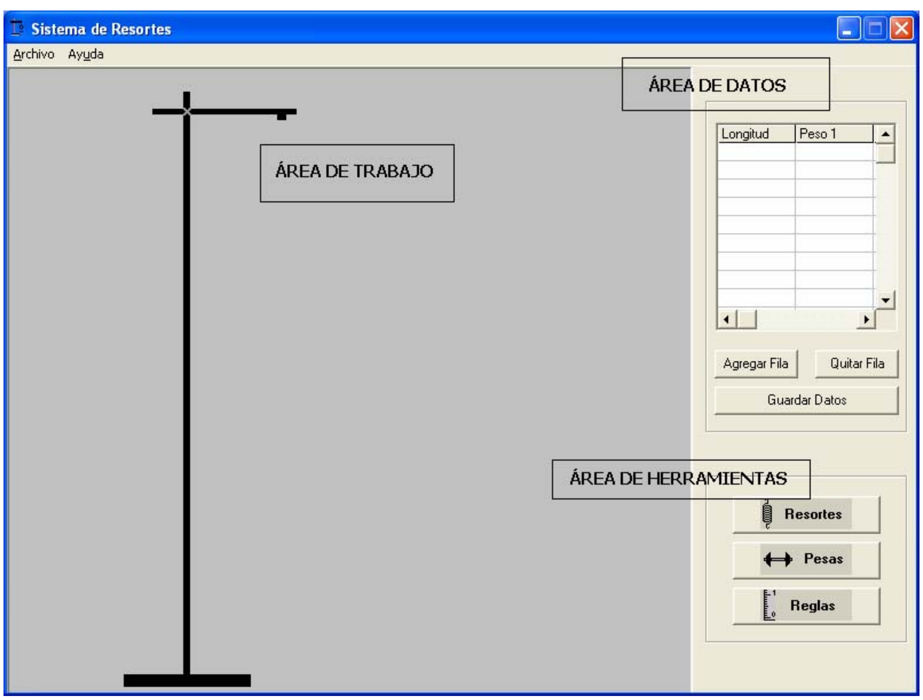
En la construcción de este software se siguieron las siguientes etapas:

- ***Simulación del fenómeno***. El software debe suplir tanto la ausencia física de equipo para realizar la modelación como facilitar la puesta en escena del diseño. La intención del software no intenta suplir al maestro ni al alumno, el software esta diseñado para que el alumno haga la captura de los datos del fenómeno simulando las condiciones de un laboratorio físico, incluyendo el ruido en los datos.
- ***Herramientas del software para la modelación.*** En la segunda etapa el software proporcionará a los actores herramientas adecuadas para la modelación. En esta etapa se incluyen herramientas como el software LDM que facilita el ajuste de los datos por medio de un método llamado gráfico. Este método parte de graficar una nube de datos, de un menú de curvas elige una con el ratón para pegársela a la nube de datos y posteriormente moviendo los parámetros algebraicos acomoda la curva a la nube de datos.

- ***Enlaces para la interacción en la modelación***. En la tercera etapa se pretende que el software facilite la interacción entre estudiantes y con la participación el profesor y/o del investigador. En esta etapa se pretende establecer los enlaces necesarios para que en tiempo real los estudiantes y profesor puedan interactuar con un mismo diseño desde puntos remotos.

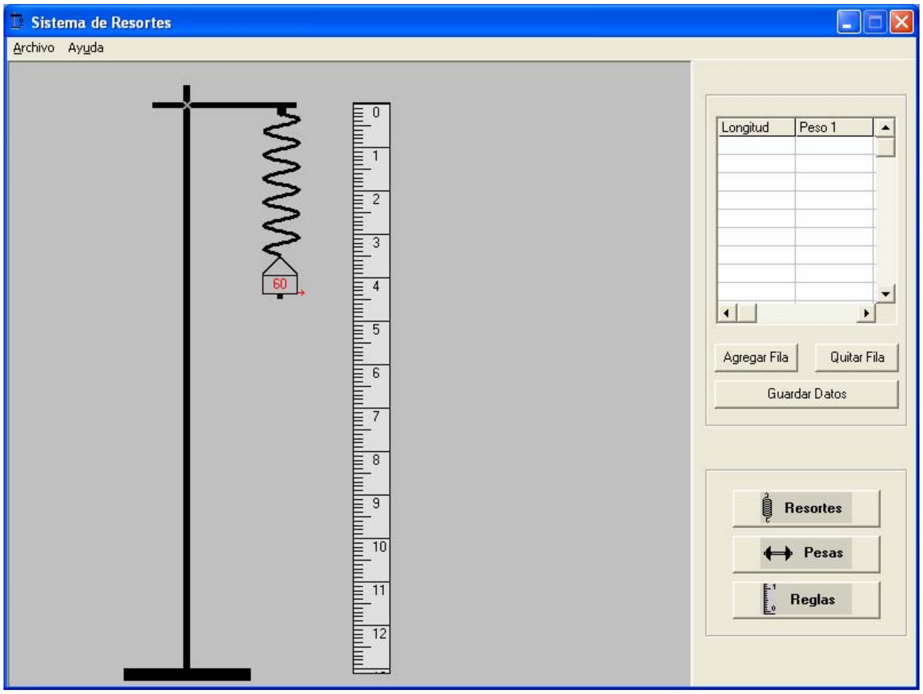
Al momento de diseñar e implementar la secuencia, el grupo de investigación encargado de desarrollar el software estaba probando la primera etapa.
El programa Sires cuenta con (Ver Pantalla 1):

- Un *área de herramientas* con tres cajones, uno donde se guardan tres tipos diferentes de resortes, otro donde se guardan pesas de 15, 20, 50 y 60 gramos y otro más donde se guardan dos reglas.
- Un *área de datos* con una hoja para hacer anotaciones con tres botones: uno que permite agregar una nueva fila al final de la lista, otro para borrar una línea seleccionada y un tercero que permite guardar la tabla.
- Por último, un *área de trabajo* donde se monta el arreglo.



Pantalla 1.1

Con la ayuda del programa es posible montar arreglos a partir de los cuales estudiar la elasticidad de los resortes y así construir modelos lineales y multilineales, según se utilicen uno o más resortes.



Pantalla 1.2

1.2.2- Acerca del concepto de proporcionalidad

En el diseño de las secuencias que esta investigación reporta se retomó y profundizó el trabajo de investigación sobre *proporcionalidad* realizado por miembros del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Facultad Regional Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina. Esta investigación surgió al notar las dificultades que presentan los alumnos, de los últimos años del nivel medio y primeros años del nivel superior, al trabajar con este concepto. En este trabajo se utiliza el término *proporcionalidad* como sinónimo de *proporcionalidad directa*. Si bien los alumnos en años anteriores han aplicado el concepto de razón en distintos contextos, no tienen interiorizado el concepto de factor de proporción. En general, identifican fenómenos de proporcionalidad sencillos, han desarrollado diferentes estrategias de cálculo relativas a porcentajes o escalas y resuelven problemas de enunciados sencillos. Sin embargo, con frecuencia tienden a interpretar como proporcionales magnitudes entre las que existe cualquier relación de crecimiento simultáneo y no asocian la proporcionalidad ni el factor de proporción a la expresión simbólica $y = a \cdot x$, a pesar de haber trabajado con ella en otros contextos.

En la propuesta didáctica que se retomó en esta investigación, el objetivo era trabajar algunas estrategias que permitieran ir construyendo, a partir de una serie de actividades, el modelo matemático que expresa la relación de proporcionalidad $y = a \cdot x$. Al mismo tiempo, se pretendía avanzar en la construcción de un concepto clave como es el de función, su expresión mediante una fórmula o mediante una gráfica y las relaciones entre fórmulas y gráficas.

La propuesta consta, básicamente, de dos partes:

- *Diagnóstico inicial y una puesta en situación*: se presentan situaciones en contextos familiares que ponen en juego la idea intuitiva de proporcionalidad ya que los alumnos deberán diferenciar entre situaciones de proporcionalidad y otras que no los son, resolviendo a su modo las que puedan.
- *Profundización y avance:* se retoman problemas del tipo de los planteados en la primera parte pero orientados a profundizar y avanzar en el reconocimiento de situaciones de proporcionalidad, uso de factores y estrategias multiplicativas, expresión de la relación $y = a \cdot x$ y representación cartesiana de la relación proporcional mediante una recta.

1.2.3- Acerca de la construcción visual de Funciones Algebraicas

La tesis que asume que *previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico* (Cantoral y Farfán, 1998) ha sido desarrollada tomando dos directrices: la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables y la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de tres funciones primitivas de referencia: la función identidad ($f(x) = x$), la función exponencial ($f(x) = e^x$) y la función sinusoidal ($f(x) = \text{sen } x$).

Siguiendo la primera directriz se diseñó una de las secuencias que esta investigación reporta. Incorporando herramientas tecnológicas, se buscaba favorecer la construcción de un universo gráfico en el terreno de las funciones algebraicas a partir de las operaciones básicas de suma y multiplicación, desde una aproximación visual que involucra simultáneamente herramientas analíticas y numéricas, y que implica una interpretación gráfica de las operaciones entre funciones.

En el capítulo referido al análisis de resultados, se describe en detalle este método.

1.3. - Investigación en contextos de Educación a Distancia

En lo que se refiere a investigaciones en matemática educativa a distancia, hemos contemplado como antecedentes principales las desarrolladas por Montiel (2002) y Sánchez-Aguilar (2003), por ser las más cercanas a nuestro grupo de investigación. Sin embargo, estamos concientes del creciente movimiento mundial en esta línea de investigación (Borba y Villareal, 2005; Albano, 2005a y 2005b)

Dentro de la matemática educativa, el trabajo de (Montiel, 2002) abrió una línea de investigación en Educación a Distancia logrando poner en funcionamiento elementos teóricos de la disciplina en otros escenarios, distintos a sus escenarios de origen, como son los virtuales; caracteriza con precisión lo que se entiende por contrato didáctico, distinguiéndolo de los contratos escolares o pedagógicos, lo que le permite estudiar con mayor detalle las formas de interacción entre alumnos y profesor con relación al saber. Este trabajo ha abierto espacios para la investigación en el campo de la matemática educativa como son el diseño de ingenierías didácticas propias del escenario, caracterización de las variables de control, la reproducibilidad en escenarios de educación a distancia, entre otros.

Esta investigación nace en la aproximación socioepistemológica, aproximación sistémica que incorpora las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003), lo que permite hacer una extensión de la teoría de las situaciones didácticas para explicar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje que se llevan a cabo en una situación específica.

La teoría de las situaciones didácticas fue desarrollada por Guy Brousseau en Francia desde los años 70. Esta teoría pone su foco de atención en los dispositivos didácticos que tienen como finalidad que el alumno se apropie de cierto conocimiento matemático. Las secuencias didácticas, con objetos de enseñanza específicos, deben provocar en el alumno una génesis artificial de los conceptos. Para eso es necesario conocer la génesis real, estudiar la naturaleza epistemológica de los saberes en juego. La idea básica de Brousseau es que el proceso para adquirir un conocimiento matemático consiste en diversas facetas y se basa en juego específicos, donde el actor interactúa con un ambiente a distintos niveles, evolucionando sus nociones y su lenguaje. En situación de aprendizaje de un conocimiento matemático específico, el alumno debe lograr estas interacciones con un medio organizado por el profesor. Las situaciones donde tienen cabida estas interacciones reciben el nombre de *situaciones adidácticas*, que forman parte de situaciones más amplias llamadas *situaciones didácticas*. Éstas comprenden las relaciones establecidas explícita o implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan el conocimiento matemático objetivo (Chevallard, citado en Montiel, 2002). Se distinguen cuatro tipos de situaciones cuya secuencia en los procesos didácticos que organizan es la siguiente (Cantoral et al, 2000):

1. Situaciones de acción (se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico; los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado)
2. Situaciones de formulación (el objetivo es la comunicación de informaciones entre los alumnos, para eso deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar)
3. Situaciones de validación (se trata de convencer a uno o a varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen; los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones)
4. Situaciones de institucionalización (destinadas a establecer convenciones sociales)

Es importante señalar que la presencia de un contexto escolar no es esencial en la definición de una situación didáctica, lo que sí es esencial es su carácter intencional, el haber sido construida con el propósito explícito de que alguien aprenda algo.

Parte central de la teoría de las situaciones didácticas es la noción de *contrato didáctico*. Se llama contrato didáctico a la relación del profesor con el alumno dentro de una situación didáctica. Este contrato no tiene cláusulas escritas ni sanciones que describan su funcionalidad, sólo se puede mirar en el momento que se presenta una “ruptura” del mismo. Bajo la perspectiva de la socioepistemología, el contrato didáctico gira entorno al profesor, el alumno y el conocimiento o noción matemática en juego, incluyendo las condiciones socioculturales que rodean a la construcción o negociación del conocimiento.

El trabajo de investigación de (Montiel, 2002) trata sobre las interacciones del sistema didáctico en un escenario virtual, en particular, cuando docentes de matemáticas en servicio confrontan sus nociones alrededor de la derivada en situación escolar. Estos docentes son alumnos del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa del CICATA del IPN (modalidad en línea).

En este trabajo, la autora explica que la noción de contrato didáctico le permitió analizar en forma sistémica la interacción del triángulo didáctico (profesor – alumno – saber) y caracterizarla en un nuevo escenario, el virtual. A partir del análisis de las producciones de los alumnos logra identificar y describir los momentos de negociación más característicos de las interacciones del triángulo didáctico. Los episodios de interacción los clasifica en:

- Episodio ruptura de la tradición escolar. Esta ruptura obedece a la concepción que se tiene de enseñar y aprender matemáticas, es decir, de la tradición de actuar, formular y validar en contextos analíticos y buscar caracterizaciones en otros contextos de representación como el numérico y el gráfico, y no en el sentido contrario (actuar, formular y validar en el contexto gráfico y numérico y caracterizar en el analítico). La ruptura se da cuando las respuestas evocan a argumentos de cambio en los contextos gráfico, analítico y numérico.
- Episodio adhesión al discurso. Este episodio obedece a los efectos de los contratos pedagógico y escolar. El alumno es consciente de pertenecer a un sistema escolarizado, donde obtener evaluaciones aprobatorias para continuar su formación y para lograrlo debe responsabilizarse por las actividades de cada uno de los

seminarios, por lo que en ocasiones sus acciones obedezcan a cumplir ciertos requisitos.

- Episodio ruptura del contrato didáctico. La postura de la teoría de las situaciones didácticas dice que en este tipo de rupturas, en la construcción de un contrato nuevo, es donde se producen los aprendizajes. Esta ruptura se hace clara cuando el alumno contesta con argumentos que no son los esperados por el profesor. El profesor hace una devolución de la situación abriendo un debate sobre los argumentos necesarios para demostrar o resolver el problema.

Otra investigación referida a educación matemática a distancia surgida en el seno de la matemática educativa es la de Sánchez (2003) en la que el autor trata de caracterizar la comunicación de ideas y objetos matemáticos durante un proceso de interacción y de adecuar las metodologías de análisis al campo de la educación a distancia y el tipo de información que es posible obtener de cada una de ellas.

Al igual que en (Montiel, 2002) los datos utilizados para realizar este estudio fueron tomados del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa del CICATA del IPN (modalidad en línea).

El medio por el cual se hace posible la interacción entre estudiantes y profesores en cualquier escenario educativo es la comunicación. En el caso particular de la educación a distancia esta comunicación puede realizarse por diversos medios: e- mail, foros sincrónicos (chat), foros asincrónicos, conversaciones de voz, medios impresos, videoconferencias, etc. Las comunicaciones escritas a distancia (e-mail, foros sincrónicos, foros asincrónicos) poseen características propias que las hacen diferir ampliamente de las comunicaciones verbales que tradicionalmente se utilizan en medios presenciales. Estas características únicas son las que hacen que el autor se planteé como problemática de investigación el estudio de las interacciones del tipo estudiante - estudiante y la comunicación de conceptos matemáticos durante esos procesos de interacción.

Para ello analiza dos interacciones entre estudiantes, la primera utilizando un foro sincrónico y la segunda, un foro asincrónico, con dos herramientas metodológicas diseñadas originalmente en el ámbito de la educación matemática presencial. Estas dos herramientas metodológicas son: *Metodología del Análisis Focal* y la *Teoría Antropológica de lo Didáctico*.

La herramienta metodológica denominada *Análisis Focal* forma parte de la aproximación comunicacional a la cognición (Sfard 2000, citado en Sánchez (2003)). La comunicación y sus exigencias son consideradas como la principal causa de la existencia del conocimiento de objetos matemáticos. Así, esta metodología pone su foco de atención en el análisis de la comunicación y su relación con el surgimiento de objetos matemáticos.

Al conjunto de expectativas e intenciones de cada unos de los participantes de una discusión se los denomina *meta-reglas*. El análisis de estas meta-reglas se centra en los flujos de interacción de los participantes de una discusión así como en las actitudes y expectativas de los mismos. Un factor importante para lograr la efectividad de comunicación es el *foco discursivo*, que es la expresión usada por un interlocutor para identificar el objeto de su atención. Para evaluar la efectividad de la comunicación y cómo a través de ésta emergen objetos matemáticos, esta metodología se centra en la comparación del foco discursivo de los interlocutores de una conversación.

La *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) considera el saber matemático como una forma particular de conocimiento, que es el fruto de la acción humana institucional, es decir, que se produce, se utiliza, se enseña en las instituciones. De esta manera se conciben a las matemáticas como construcciones y actividades institucionales.

Una noción básica dentro de esta teoría es la noción de organización praxeológica o praxeología matemática que se define por medio de cuatro componentes: el tipo de tareas en las que un objeto matemático determinado se ve involucrado; las técnicas utilizadas para afrontar y resolver este tipo de tareas; la tecnología, es decir, el discurso matemático que justifica y permite entender cierta técnica; y la teoría que es una justificación de la tecnología. El conjunto de técnicas, tecnologías y teorías organizadas alrededor de un tipo de tareas específico forman lo que se conoce como una *praxeología puntual*.

La TAD establece que la actividad matemática se encuentra condicionada por objetos materiales, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a los sentidos; esto quiere decir que cuando se está trabajando con objetos matemáticos, en realidad se están manejando representaciones de los mismos. En este punto, establece una diferencia entre dos tipos de objetos: los objetos ostensivos y los no ostensivos. Ambos son considerados objetos institucionales.

Luego del análisis de las interacciones según estas dos metodologías, Sánchez señala:

- La naturaleza de las interacciones dependen del medio de comunicación escrita en el cual se desarrollan. Los foros asincrónicos favorecen las intervenciones más detalladas y más profundas en cuanto contenido que las que se generan en un Chat. A pesar de esto, independientemente del medio escrito en el que se desarrolle la actividad, el proceso de interacción no permite ver con claridad la etapa de acción de los estudiantes sobre la actividad matemática en cuestión.
- Durante un proceso de interacción en un escenario virtual, los estudiantes involucrados se presentan a la escena de la interacción con formulaciones y preconcepciones sobre la actividad matemática a tratar. Una vez que inicia el proceso de interacción, los estudiantes entran en un proceso de validación o consenso en el cual se confrontan las diferentes formulaciones de los estudiantes, en las que se ponen en juego diferentes propuestas, técnicas y discursos tecnológicos. Sobreviven a este proceso aquellas que más se apeguen al discurso matemático escolar.
- La TAD se enfoca en los conocimientos institucionales, dejando la cognición individual y que en el caso del análisis focal la situación es inversa. Por lo tanto, sugiere que lo anterior y las posibles modificaciones que deben hacerse a estas aproximaciones teóricas para el estudio de los fenómenos de la educación matemática a distancia, deben ser tomadas en cuenta y estudiadas a profundidad antes de aplicarlas a cualquier estudio en esta área de investigación.
- La tecnología puede cambiar la forma en que los estudiantes acceden, perciben y comunican los conceptos matemáticos e influir en sus procesos de validación presentes en los procesos de interacción.
- Los procesos de interacción entre estudiantes privilegian los contextos analítico y algebraico como herramientas de argumentación, originando en algunos casos conclusiones matemáticamente erróneas por parte de los estudiantes.

En nuestra investigación debimos abordar diversas temáticas: función, función lineal, modelación, educación a distancia. Para cada uno de estos temas, es posible encontrar un número importante de investigaciones en el contexto de diferentes disciplinas y aproximaciones teóricas. Esto nos llevó a acotar nuestros antecedentes a aquellas investigaciones dentro de nuestra disciplina, Matemática Educativa, que aportan mayores elementos a nuestro trabajo y que están fuertemente vinculados con el Marco Teórico que desarrollamos a continuación.

Capítulo 2: Marco Teórico

La evolución de la didáctica de la matemática ha ido modificando la manera como se entienden los hechos didácticos. En (Cantoral y Farfán, 2003) se presenta una serie de momentos que muestran la evolución de esta problemática comenzando por lo que ellos llaman una *didáctica sin alumnos*, donde el objetivo era producir lo que la escuela debía de consumir, pero sin estudiar a profundidad la cultura escolar.

El segundo momento que plantean es aquel en donde los hechos didácticos son interpretados cognitivamente mediante la observación y la descripción sistemática de los logros de los estudiantes y de las diversas experiencias de aprendizaje. El objetivo es explicar cómo se aprende matemática y se denomina *didáctica sin escuela.*

Como tercer momento presentan *una didáctica en la escuela, pero sin escenarios.* En un medio determinado se analizan en forma sistémica los fenómenos didácticos teniendo en cuenta los distintos polos: el del saber, el de quien aprende y el de quien enseña.

Finalmente, se presenta *una didáctica en escenarios socioculturales.* Esta es una aproximación sistémica que recibe el nombre de aproximación socioepistemológica y que incorpora las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza

Es en esta última, la didáctica en escenarios socioculturales, que ubicamos nuestra investigación.

2.1- Aproximación Socioepistemológica

La matemática educativa es la ciencia que estudia, para un campo particular (la matemática), los fenómenos de su enseñanza, las condiciones de la transmisión de la "cultura" propia de una institución (la científica) y las condiciones de la adquisición de conocimientos del que aprende (Cantoral y Farfán, 1998). Entendiendo que los saberes matemáticos se constituyen socialmente en ámbitos no escolares, la problemática de esta disciplina consiste en estudiar la evolución de los fenómenos didácticos que suceden cuando estos saberes se introducen al sistema de enseñanza, modificados tanto en su estructura como en su funcionalidad. Este proceso de incorporación plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio acercamientos metodológicos y teóricos adecuados. El desarrollo de tales aproximaciones se lleva a cabo mediante estudios que nos permiten entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático y del saber científico a las prácticas tanto de los profesores como de sus estudiantes.

De acuerdo con Cantoral y Farfán (2003), la socioepistemología se plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión. El principal problema de esta aproximación es cómo llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre las cuatro dimensiones que la componen. La solución clásica a este problema es a través del establecimiento de unidades de análisis, cada una de las cuales retiene en forma simple las propiedades significativas de todo el sistema. Según el parecer de algunos investigadores que adhieren esta aproximación, algunas de las nociones acuñadas en la perspectiva socioepistemológica tienen la característica de ser unidades de análisis para explorar el origen social del conocimiento. De entre ellas, dos fundamentales son: la resignificación y las prácticas sociales.

La noción de resignificación busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de los significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intensión; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos.

Según las investigaciones más recientes, la noción de práctica social es la parte medular de la perspectiva socioepistemológica. Se entiende por práctica social a aquel conglomerado de supuestos socialmente compartidos, mayoritariamente implícitos, que norman la actividad. La tesis central es sostener que son las prácticas sociales las que generan conocimiento. Ejemplos de estas prácticas son la modelación (Arrieta, 2003) y la predicción (Cantoral & Farfán, 1998; Cantoral et al, 2000; Cantoral et al, 2005).

Investigaciones realizadas en el seno de la Matemática Educativa, a través de estudios de corte socioepistemológico y de lo que sucede en los sistemas didácticos, han dado evidencias cómo el discurso escolar suele favorecer sólo algunos aspectos relacionados con los conceptos matemáticos, dejando de lado elementos presentes en la construcción social del mismo, tales como los argumentos y las herramientas relacionadas, cuando en realidad son estos los elementos que permiten entender los aspectos y formas de la actividad humana que transforman o resignifican al conocimiento (Cordero, 2003)

Se plantea entonces la hipótesis básica de que una epistemología basada en prácticas sociales favorece un estudio de la construcción social de la matemática a través de la reconstrucción de significados asociados al saber matemático. De esta manera se favorece el carácter funcional del mismo. Un ejemplo de esto es la socioepistemología formulada para lo periódico en (Buendía, 2004) que explica que la predicción como práctica social resulta ser un argumento para construir lo periódico, ya que al predecir se reconstruyen los significados asociados a la repetición de un movimiento.

El análisis epistemológico del concepto de función, en esta aproximación, permite determinar que cada tipo de función tiene un origen en un contexto específico lo que implica que cada una posea su propia naturaleza, que la distingue de las demás, y problemáticas propias relativas a su apropiación. Ejemplo de esto son las investigaciones de Lezama (1999), Ferrari (2001) y Montiel (2005).

En el estudio de la reproducibilidad realizado en (Lezama, 1999), se señala que el análisis preliminar de la componente epistemológica de la función exponencial muestra las dificultades con las que puede encontrarse el alumno en su proceso de construcción de este tipo de funciones. Estas dificultades son análogas a las encontradas en el desarrollo histórico de este concepto: para elevar números a distintas potencias, cada tipo de número que se maneje impondrá nuevos retos y en ocasiones será difícil de interpretar el significado de la operación; naturaleza y estructura de la función exponencial e identificar su relación con la función logarítmica.

Ferrari realiza una investigación, de corte socioepistemológico, del desarrollo de la noción de logaritmo donde encuentra tres momentos: los logaritmos como transformaciones numéricas, como modelizadores y como objetos teóricos. El análisis de los elementos que caracterizan cada una de estas etapas le permite mostrar la relación existente entre las progresiones aritméticas y geométricas presentes en el origen de este concepto cómo una posibilidad para facilitar el pasaje desde las nociones aritméticas de los logaritmos hasta las funcionales permitiendo la exploración en distintos registros y su correspondiente vinculación.

La construcción social de la función trigonométrica planteada por Montiel (2005) se basa en un modelo compuesto por un conjunto de *actividades* (A) referidas a una *práctica de referencia* (PR), reguladas por la *práctica social* (PS). A diferencia de Arrieta (2003), Montiel asume a la modelación como una actividad restringida al propósito común de una comunidad (PR). El modelo se presenta en tres momentos, identificando para cada uno la relación PS-PR, el contexto natural en donde surgen los problemas y las herramientas matemáticas trigonométricas:

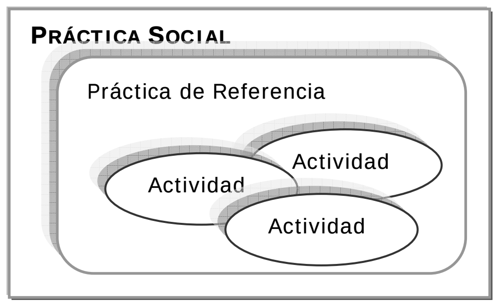


Diagrama 2.1

	Práctica Social		
	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física (movimiento oscilatorio)	Matematización de la Transferencia del Calor
Contexto Natural	Estático – Proporcional	Dinámico – Periódico	Estacionario – Analítico
Herramienta Matemático Asociado	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica	Serie Trigonométrica
Variables en juego	$sen\,\theta$ θ ángulo (grados) $sen\,\theta$ longitud	$sen\,x$ x tiempo (radian-real) $sen\,x$ distancia	$sen\,t$ t tiempo (real) $sen\ t$ temperatura

Principios Básicos para la Construcción Social de la Función Trigonométrica

Tabla 2.1

El estudio de corte socioepistemológico llevado a cabo en esta investigación reporta que en cada momento es necesario el diseño de situaciones problema que fomenten en el estudiante el desarrollo del pensamiento proporcional (momento de anticipación), el desarrollo del pensamiento funcional (momento de predicción) y el desarrollo de un pensamiento abstracto y formal (momento de formalización), todos vinculados a los contextos-problema trigonométricos señalados anteriormente.

Una vez que se reconocen a las prácticas sociales como generadoras de conocimiento y que se distingue la naturaleza propia de cada función, las situaciones que se diseñan fundamentadas en la socioepistemología permiten hacer evidentes herramientas y argumentos; que permiten, a su vez, reconstruir significados.
De esta manera, a diferencia de otras aproximaciones teóricas, en la socioepistemología el foco de atención está puesto en las prácticas sociales y no exclusivamente en lo conceptos como objetos preconstruidos; busca y atiende las situaciones que están presentes cuando se estudia al hombre en *actividad matemática* y no sólo en su producción última. Las investigaciones reportadas anteriormente dan cuenta de ello ya que las mismas se centran en el desarrollo del pensamiento matemático ligado a nociones como periodicidad, covariación, linealidad, funcionalidad, más que a conceptos u objetos matemáticos eruditos, incluso aquellos tradicionalmente escolares (propiedad periódica, función, derivada, etc.)

2.2.- Estudio sistémico de la resignificación de la Función Lineal

Buscar la resignificación de un concepto supone que los estudiantes han tenido ya un acercamiento escolar del mismo. En este trabajo, nuestro objetivo es romper con el discurso matemático escolar tradicional a través de secuencias orientadas por la construcción social de la linealidad.

2.2.1.- Análisis del contexto escolar

El análisis didáctico del concepto matemático *función* nos lleva ubicarlo como concepto escolar.

Las experiencias que esta investigación reporta fueron desarrolladas por alumnos del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), en la modalidad en línea. Este programa se compone de tres fases de formación:

- Fase I: Formación inicial.
- Fase II: Desarrollo de la investigación.
- Fase III: Producto de la investigación y obtención de grado.

Los cursos se estructuran en cuatro bloques:

Básicos

- Teoría y perspectivas de la Matemática Educativa.
- Perspectivas epistemológicas de las Matemáticas.
- Naturaleza del pensamiento matemático.
- Procesos de institucionalización de la matemática escolar.

Intermedios:

- Teoría de las situaciones didácticas.
- Innovaciones tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas.
- Análisis del discurso matemático escolar I

Avanzados:

- Análisis del discurso matemático escolar II
- Metodologías de investigación en clase de matemáticas.

Especializados

- Seminario de Investigación en Matemática Educativa I

- Seminario de Investigación en Matemática Educativa II
- Seminario de Investigación en Matemática Educativa III
- Trabajo de tesis

El programa se apoya en un modelo basado en redes de Internet, sistemas de telecomunicaciones, tecnologías de información y comunicación, así como modelos de enseñanza y aprendizaje a distancia (Montiel, 2002).

Esta experiencia se llevo a cabo en el curso Naturaleza del Pensamiento Matemático. En el trabajo a través de Internet se utilizó la plataforma de trabajo Blackboard y, debido a problemas técnicos de esta plataforma, el sistema de trabajo compartido BSCW.

En ambos espacios, los contenidos del curso estaban organizados en carpetas de trabajo. En Blackboard la disposición fue la siguiente:

- ✓ En *Documentación del Curso* se encontraban las secuencias a desarrollar acompañadas de documentos de ayuda con algunas indicaciones, observaciones y sugerencias para su resolución.
- ✓ *Herramientas* contenía el cronograma de trabajo con las fechas de entrega para la resolución de las secuencias y sus correspondientes foros de discusión.
- ✓ La entrega de tareas se realizaba en *Grupos*, *Intercambios de tareas*, que a su vez contenía una carpeta para cada grupo de trabajo. Los *Foros* de discusión también se realizaban en este espacio.
- ✓ En *Sitios web* se encontraban ligas para descargar las herramientas tecnológicas necesarias para la resolución de las secuencias
- ✓ En *Material del curso*, bibliografía complementaria y tutoriales de algunas aplicaciones.

En BSCW la distribución fue más simple ya que solamente se utilizó para los foros de discusión, habilitándose entonces una carpeta por cada foro por cada grupo de trabajo.

Si bien los foros de discusión no fueron los únicos medios de comunicación entre los docentes y los alumnos y entre los alumnos, ya que también fueron utilizados el correo electrónico y el Chat, en nuestra investigación analizaremos exclusivamente las interacciones en foro de discusión. Las consignas de trabajo en los mismos fueron:

participación significativa, que aportara al debate del curso, que atendiera a las preguntas y respuestas de los compañeros y en la medida de lo posible que las aportaciones teóricas se realizaran con la cita completa de referencia.

Los alumnos de este programa de postgrado poseen diferentes formaciones académicas pero todos son docentes de matemática del nivel medio, medio superior y/o superior. De distintas nacionalidades, desempeñan su labor docente en diferentes sistemas educativos.
La primera actividad del curso consistió en responder a un cuestionario disponible en Blackboard (Anexo A) que buscaba tener un primer acercamiento a la noción de función que los alumnos – docentes manejaban, así como también conocer la referencias bibliográficas que utilizaban para abordar el tema y el status que le otorgaban a cada una de las representaciones del concepto, tanto en el desarrollo de sus clases como al momento de evaluar a sus alumnos.

2.2.1.1. Sobre la noción de función en los libros de texto

Al trabajar con profesores de diferentes países y sistemas educativos el análisis del concepto de función como concepto escolar lo haremos a través del análisis de una de las fuentes de recursos didácticos del profesor: el libro de texto.
En las respuestas del cuestionario encontramos que algunos textos son mencionados por varios profesores, a pesar de sus distintas formaciones y de pertenecer a distintos sistemas educativos. Entre ellos podemos mencionar: Swokowski y Leithold.

- **Cálculo con geometría analítica de E. Swokowski**

El tema es tratado en el capítulo 1 “Requisitos para el cálculo”, luego de números reales, sistemas coordenados en dos dimensiones y la línea recta, concepto que es tratado como lugar geométrico.
El apartado referido a Funciones, comienza destacando la utilidad del concepto en la matemática, dando una definición “informal”:

> Se puede considerar que una función es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto X uno y sólo un elemento de un conjunto Y

Seguidamente da algunos ejemplos de correspondencias entre conjuntos (a cada libro de la biblioteca lo asocia con su número de páginas; a cada número real, con su cuadrado) y da una definición que trata de resumir las observaciones hechas en los ejemplos e introducir algunos términos nuevos:

> Una función f de un conjunto X a un conjunto Y es una regla que asocia a cada elemento x de X un único elemento y de Y. El elemento y se llama la imagen de x bajo f y se denota por $f(x)$. El conjunto X se llama dominio de la función. El rango de la función consta de todas las imágenes de los elementos de X.

Continúa haciendo observaciones acerca de las posibles confusiones de los estudiantes en relación con la notación y la interpretación de la misma.

Luego de dar la definición de función uno a uno y de mostrar como identificar este tipo de funciones a partir de la expresión algebraica, introduce la noción de gráfico de una función. Previamente hace la observación de que en adelante, y salvo que se especifique otra cosa, la frase *f es una función* querrá decir que *f* es una función cuyo dominio y rango son conjuntos de números reales, y da otra definición de función:

> Una función con dominio X es un conjunto W de parejas ordenadas tal que para cada x en X, existe exactamente una pareja ordenada (x,y) en W con x como primer número.

Así, se define la gráfica de una función f como el conjunto de todos los puntos $(x,f(x))$ en un plano coordenado con x en el dominio de la f. Los gráficos se construyen a partir de una tabla de valores. Por ejemplo:

> Dibuje la gráfica de f donde $f(x) = x^3$
>
> En la tabla siguiente aparecen las coordenadas $(x,f(x))$ de algunos puntos sobre la gráfica.

X	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2
f(*x*)	-8	-1	-1/8	0	1/8	1	8

Al trazar estos puntos, encontramos que la gráfica tiene la forma mostrada en la figura

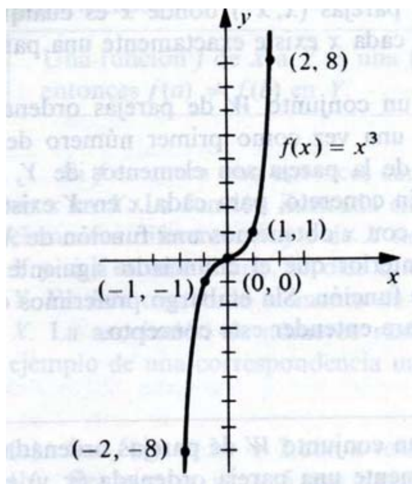


Gráfico 2.1

Después de otros ejemplos y ejercicios del mismo estilo, el capítulo termina con secciones referidas a combinación de funciones y funciones inversas. Los próximos capítulos se refieren a temas específicos de Cálculo y de Geometría Analítica.

- **El Cálculo de L. Leithold**

El capítulo 1, Funciones, límite y continuidad, introduce el tema en sus primeras secciones: Funciones y sus gráficas, Operaciones con funciones y tipos de funciones, y Funciones como modelos matemáticos.

Comienza con ejemplos de relaciones funcionales entre cantidades. Aclarando que en este texto las cantidades involucradas en estas relaciones son números reales, da una primera definición de función:

> Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales *x* a un conjunto Y de números reales *y*, donde el número *y* es único para cada valor específico de *x*.

En los ejemplos que siguen se utilizan diagramas de Venn y expresiones algebraicas. A continuación se establece la definición de función como un conjunto de pares ordenados. De esta manera busca ser más preciso en su significado:

> Una función es un conjunto de pares ordenados (*x*,*y*) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de *x* se denomina dominio de la función y el conjunto de todos los valores resultantes de *y* recibe el nombre de contradominio de la función.

Luego de esta definición hace notar la condición de existencia y unicidad e introduce el término variable:

> En esta definición, la restricción de que dos pares ordenados no pueden tener el mismo primer número asegura que *y* es único para cada valor de *x*. Los símbolos *x* e *y* denotan variables. Debido a que el valor de *y* depende de la elección de *x*, *x* denota la variable independiente mientras que *y* representa a la variable dependiente.

El concepto de función como un conjunto de pares ordenados permite enunciar la siguiente definición de gráfica de una función:

> Si *f* es una función, entonces la gráfica de *f* es el conjunto de todos los pares de puntos (*x*,*y*) del plano R^2 para los cuales (*x*,*y*) es una par ordenado de *f*.

Por los ejemplos que brinda y las expresiones que utiliza en los mismos se percibe que el autor supone que los lectores poseen conocimientos acerca de la gráfica de funciones, al menos de las básicas:

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x<3 \\ 5 & si \quad x=3 \\ 2x+1 & si \quad x>3 \end{cases}$

Determine el dominio y el contradominio de *f*, y dibuje su gráfica.

El dominio de *f* es $(-\infty,+\infty)$. La figura muestra la gráfica de *f*, consta de la porción de la recta $y = x- 1$ para la cual $x<3$, el punto (3,5) y la parte de la recta $y = 2x+1$ para la cual $3<x$. Los valores de la función son números menores que 2, el número 5 o números mayores que 7. Por lo tanto el contradominio de f es el número 5 y aquellos números en $(-\infty,2)\cup(7,+\infty)$

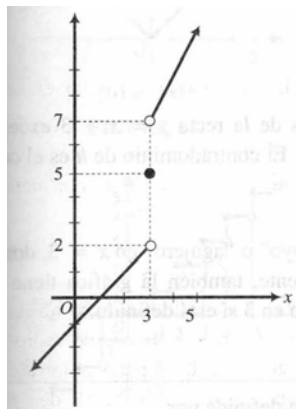


Gráfico 2.2

En las secciones que siguen se presentan las operaciones con funciones, las funciones pares e impares desde un punto de vista algebraico, y las funciones como modelos matemáticos, en donde se sugiere una secuencia de pasos para resolver problemas que implican una función como modelo matemático. Un ejemplo de los ejemplos resueltos y ejercicios que se presentan en esta sección es:

El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta y a la temperatura de 175º el gas ocupa 100 m^3

(a) Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen como una función de la temperatura.

(b) ¿Cuál es el volumen del gas a una temperatura de 140º?

En contraposición con los textos antes mencionados, podemos mencionar las siguientes referencias bibliográficas, basadas en investigaciones recientes en torno al concepto de función:

- **Funciones: visualización y pensamiento matemático de R. Cantoral y G. Montiel.**

El objetivo general de este libro es "profundizar y compartir el conocimiento sobre visualización de las funciones reales de variable real, con el fin de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y de ayudar a los profesores en la toma de decisiones relativas a la elaboración y análisis de actividades de aprendizaje en el campo de la matemática escolar para ser utilizado en clase" (Cantoral y Montiel, 2001).
No trata la graficación de funciones reales de variable real como una mera técnica sino que se centra en ella como una forma particular de visualización de procedimientos y conceptos matemáticos. Cada vez que se utiliza una estrategia de graficación, construyendo, interpretando o transformando una forma gráfica, la intención es que el lector desarrolle al mismo tiempo una manera particular de pensamiento matemático. Entonces, cada capítulo tiene una intención específica y el conjunto de ellos también.
En el capítulo 1 luego de presentar las formas clásicas de entender la enseñanza de la graficación de funciones de R en R, sitúa la investigación de la que es fruto este libro en la línea de investigación conocida como *Pensamiento y lenguaje variacional* que plantea la hipótesis central que consiste en asumir que previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico (Cantoral y Farfán, 1998). Esta hipótesis ha sido desarrollada en dos directrices: operar gráficas en analogía con los números o las variables y construir un universo de amplio de funciones a partir de tres funciones primitivas de referencia (la función identidad $f(x)=x$, la función exponencial $f(x)= a^x$, la función sinusoidal $f(x)=\text{sen } x$)
En el capítulo 2 se trata el concepto de función desde el punto de vista del aprendizaje y se presentan las siguientes definiciones:

Definición de función como relación entre variables

Una función es una relación entre variables tal que a cada valor de la primera variable (variable dependiente) le corresponde sólo un valor de la segunda variable (variable dependiente). Si *x* representa a la variable independiente, *y* describe a la variable dependiente; esto se suele escribir como $y = f(x)$ con el fin de representar el hecho de que la variable *y* está en función, depende, de la variable *x*.

Definición de función como correspondencia entre conjuntos

Una función $f : A \to B$ consiste en dos conjuntos, el dominio A y el rango B y una regla de correspondencia. Esta correspondencia es denotada por $y = f(x)$ o $x \to f(x)$. La expresión $f(x)$, representa entonces el valor de *f* en *x*, o también la imagen de *x* bajo *f.*

Si bien este tipo de definiciones en donde no se específica la naturaleza de los conjuntos dominio y rango son las que predominan en la literatura escolar, los autores aclaran que tratarán sólo con conjuntos de números reales ya que consideran que para una primera etapa, previa a una generalización mayor, es en este tipo de conjuntos en donde puede desarrollarse el sentido de función.

Inician este capítulo con la clasificación que Euler diera en 1748.

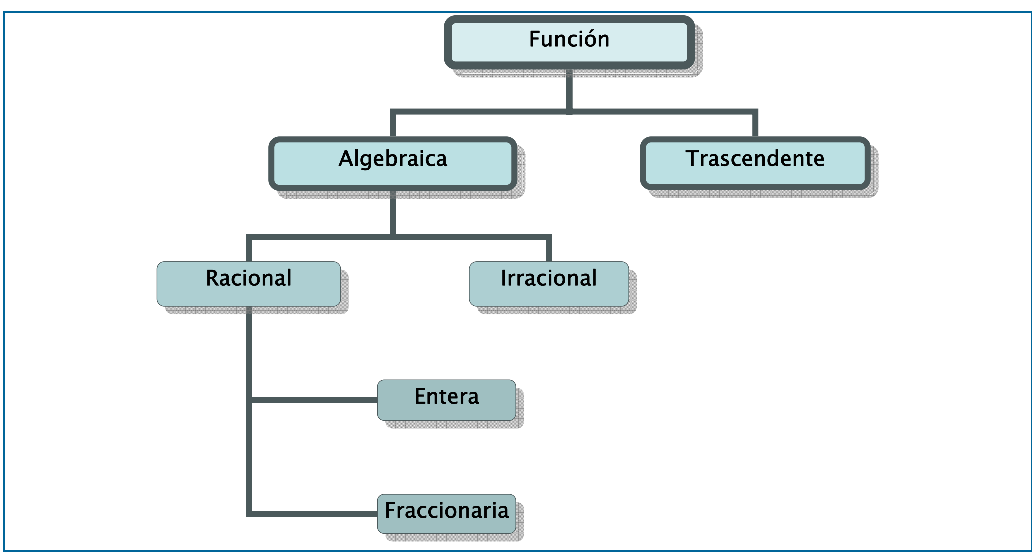


Diagrama 2.2

Siguiendo esta clasificación, en el libro se trabaja con funciones algebraicas y trascendentes.

El capítulo continúa con una sección donde se desarrolla cómo se interpreta a una función: mediante una fórmula explícita, con la ayuda instrucciones de una calculadora, con la ayuda de una secuencia de teclas, con el auxilio de una tabla de valores, mediante el trazado de una curva, por una relación de dependencia y mediante correspondencias arbitrarias.

La definición de representación gráfica de una función que se utiliza es:

> Sea *f* una función definida sobre A. Cuando la variable *x* recorre el intervalo A, el conjunto de todos los puntos M de coordenadas (*x*, *f*(*x*)) constituye la representación gráfica de la función *f*, o también llamada la curva representativa C_f de *f*. Sintéticamente podemos llamarle la gráfica de *f*, y la simbolizamos como G_f. Ahora bien, si M(*x*,*y*) es un punto de C_f esto significa que *x* pertenece al conjunto A y que la *y* es la imagen de *x* bajo *f*, es decir, está dada por la expresión $y = f(x)$

Seguidamente se brinda el siguiente ejemplo:

> Coloque los puntos y visualice la curva
>
> Consideremos *f* definida sobre [-1,3] por $f(x) = x - x^2$. A partir de la tabla de valores podemos inferir el aspecto de su curva representativa:

x	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3
$f(x)$	-2	-0.75	0	0.25	0	-2	-6

> La tabla de valores permite colocar los siete puntos correspondientes de la curva representativa C_f como se muestra enseguida:

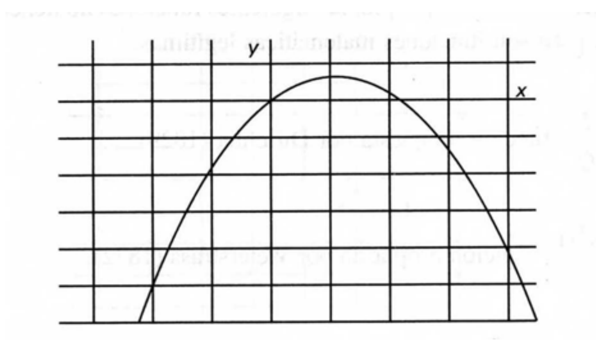


Gráfico 2.3

El trazo puede ser obtenido a mano completando los espacios entre puntos mediante una curva lisa o suave (se entiende como una curva sin picos).

¿Cómo saber si el punto M(2,-2) pertenece a la curva C_f?

Directamente, se calcula en la expresión $f(x) = x - x^2$ el valor que toma $f(2) = 2 - 2^2 = -2$. En consecuencia el punto M pertenece a la curva C_f

En el caso de que un punto, digamos el N(2,3), no satisfaga la expresión $f(x) = x - x^2$ indica que no está sobre la curva C_f. Efectivamente, en este caso $f(2) = 2 - 2^2 = -2 \neq 3$, así que la respuesta es que el punto N no pertenece a la curva.

El capítulo termina con enunciando algunas nociones que serán útiles para el lector a lo largo del libro: sentido de variación (crecimiento, decrecimiento), paridad, máximos y mínimos. En los ejemplos resueltos y en los ejercicios propuestos se utilizan las distintas formas de interpretar una función.

En cada uno de los siguientes capítulos se desarrolla un aspecto principal que es destacado en el título, proponiendo una forma de análisis de las funciones mediante el empleo de una técnica particular de graficación, que a su vez es apoyada por una estrategia para el desarrollo del pensamiento matemático: método de la tabulación, método de las transformaciones, método de las operaciones y método del análisis matemático.

A continuación se presentan algunos ejemplos de los ejercicios que se desarrollan o plantean:

Capítulo 3: Método de la tabulación

Sea F(x) = x^3 la función que produce la siguiente tabla de valores

x	$F(x)$
−3	−27
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8
3	27

Tabla 2.2

¿qué funciones F_n (x) producen las siguientes tablas?

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$
−3	−20	−1	−54
−2	−1	0	−16
−1	6	1	−2
0	7	8	0
1	8	27	0
2	15	64	16
3	34	125	27

Tabla 2.3

Capítulo 4: Método de las transformaciones

Qué valor deben tomar los parámetros $y = Ax + B$ para que la recta sólo pase, de ser posible, por:

a. El primer y tercer cuadrante.
b. El primer, segundo y tercer cuadrante.
c. El primer, segundo y cuarto cuadrante.
d. Todos los cuadrantes

Capítulo 5: Método de las operaciones

Analice las siguientes familias de funciones en su calculadora, proponiendo distintos valores a n. Explique el efecto local y global de dicho parámetro en cada función:

$$y = \frac{x^n.(x-1)}{(x-2)}$$

$$y = \frac{x.(x-1)^n}{(x-2)}$$

$$y = \frac{x.(x-1)}{(x-2)^n}$$

Capítulo 6: Método del análisis matemático

Grafique las siguientes funciones usando la opciones de graficación de su calculadora. Conviene que las grafique en la misma pantalla en forma secuencial. Discuta las razones por las que dichas gráficas están próximas entre sí.

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = 1 + x$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3}$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{x^4}{2 \times 3 \times 4}$$

En el último capítulo del libro se realiza un extenso recorrido por diversos tipos de funciones y de familias gráficas. Se presentan a un nivel inicial las funciones trascendentes y se presenta una síntesis de los métodos empelados para resolver el problema de proponer una expresión analítica a una forma gráfica dada. La intención es realizar una síntesis de los métodos trabajados a lo largo del libro y estructurar las diferentes formas de análisis mediante la visualización de un todo sistémico. Para ello se muestran dos ejemplos que describen su propuesta: discusión del sentido visual de la composición de funciones reales de variable real siguiendo una técnica de punteo, y construcción de los polinomios de Lagrange apoyado en el acercamiento desarrollado a lo largo del libro.

- **Las funciones en los gráficos cartesianos de E. Lacasta y J. Pascual**

Este libro está dirigido a profesores de nivel medio y medio superior y a especialistas en formación del profesorado y parte del hecho que en los primeros años de esos niveles la noción de función y su representación cartesiana se desarrolla sin hacer uso de las herramientas propias del cálculo infinitesimal. Su objetivo general es "ofrecer una visión de las posibilidades de tratamiento de las funciones y su gráfica cartesiana, de sus riesgos y de los efectos que pueden producirse" (Lacaste y Pascual, 1998)

Se articula en dos partes relativamente independientes. En la primera se refiere a las funciones y gráficas en la historia y en la enseñanza y su estructura es:

- Un estudio de la génesis histórica del concepto y de las transformaciones que ha sufrido hasta convertirse en el saber que se enseña actualmente.
- Una exposición del tratamiento que ha tenido la enseñanza de las funciones y la utilización de los gráficos en los programas oficiales de España.
- Una exposición de dos aportaciones curriculares especialmente relevantes y que han tenido una gran influencia en varios países: el módulo "El lenguaje de las funciones y gráficas" del Shell Centre for Mathematical Education y los estándares curriculares publicados por Comission on Standard for School Mathematics del National Council of Teachers of Mathematics.

La segunda parte es un análisis didáctico de los gráficos cartesianos de funciones. Su objetivo es determinar cuál es el papel que desempeñan los gráficos cartesianos de funciones en la enseñanza secundaria y consta de cuatro capítulos.

El primero trata el estudio de las representaciones desde diferentes campos teóricos y haciendo referencia a varias investigaciones. El capítulo concluye presentando un cuestionario que fue experimentado por tres grupos de alumnos del nivel medio y medio superior. La temática del cuestionario era funciones lineales y cuadráticas representadas por gráficos, tablas y fórmulas. El análisis de las respuestas de los alumnos les permite establecer las siguientes conclusiones:

- No hay índices para poder afirmar que exista una concepción gráfica y una concepción no gráfica.

- Ninguno de los tipos de presentación de la función empleados influye en el éxito global en el cuestionario.
- El tipo de presentación de las funciones no parece influir en el éxito en los distintos problemas planteados y, en especial, en los problemas relacionados con la extrapolación.

En el capítulo siguiente se tratan los diferentes usos del gráfico de funciones. Los autores basan la necesidad de hacer una distinción entre los diversos usos en investigaciones que indican que el gráfico por sí mismo no facilita que el alumno haga frente a una situación desprovista de intención didáctica explícita. Es decir, que no proporciona por si mismo las condiciones necesarias para la adquisición de nuevos conocimientos.

Clasifican los usos del gráfico en cinco tipos:

1) Funcionamiento como ábaco: aparece cuando el gráfico es utilizado como instrumento para obtener gráficamente *y* para *x* dadas y viceversa.
2) Funcionamiento como mensaje topológico: cuando el gráfico es considerado como una curva referida a unos ejes, que no presenta necesariamente valores numéricos y que representa una función cualquiera; lo que está dibujado, con frecuencia puede no tener ninguna relación con una ecuación en particular.
3) Funcionamiento como ideograma: el ideograma es un signo gráfico que representa una idea. La curva no está necesariamente referida a unos ejes, pero siempre contiene los puntos singulares y todos los elementos característicos de un tipo de función.
4) Funcionamiento como elemento interactivo: es el funcionamiento del gráfico como medio de control de la comunicación y de determinación de otro objeto. Tiene lugar cuando la respuesta a un problema se obtiene mediante una relación efectiva con el gráfico.
5) Funcionamiento como estructura matemática: se considera un marco algebraico conformado por las fórmulas y por objetos que permiten la traducción al álgebra de los rasgos gráficos globales y un marco gráfico conformado por las curvas y dichos rasgos gráficos globales. La transferencia del marco algebraico al gráfico está condicionada por el hecho de que el

> gráfico refleja propiedades de la función y no a la función misma. Para facilitar el aprendizaje, se deben enseñar marcos algebraicos y gráficos que sean más equilibrados en sus contenidos y funcionamiento.

El papel de los distintos funcionamientos del gráfico es tratado en el anteúltimo capítulo. Comienza planteando el hecho de que por lo general los profesores utilizan el ábaco como puesta en escena del gráfico cartesiano y al cabo de un cierto número de ejercicios lo comienzan a utilizar como ideograma o como mensaje topológico, sin que el alumno tenga medios para saber en qué momento debe emplear el gráfico y de qué manera.
Plantean que la noción de función en un sentido moderno permite estudiar relaciones entre variables en las que la idea de anticipación no aparece y que existe una gran distancia epistemológica entre las funciones algebraicas y, por ejemplo, las funciones empíricas, tales como la temperatura de un enfermo en función del tiempo, y que esa distancia se pone de manifiesto en el medio escolar. Proponen entonces el uso del gráfico cartesiano de una función no sólo para una interpretación global, sino también para prever, para anticipar, siguiendo su comportamiento, y plantear a los alumnos problemas relativos a la representación y la comunicación de algunas situaciones y propiedades, que involucren traducciones entre los distintos tipos de representación, en lo posible aquellas que son menos usuales, como por ejemplo, la descripción verbal de un gráfico.
Un ejemplo de los problemas propuestos es el siguiente:

> En una fábrica se están probando tres sistemas de regulación automática de la temperatura del agua de una ducha. En todas las duchas el agua sale inicialmente a 10 grados y se pretende que la temperatura del agua se estabilice en 40 grados. Las personas que prueban los tres sistemas, A, B y C, dan los siguientes informes:
>
> A) Funciona muy bien. En 10 segundos alcanza la temperatura adecuada (40 grados) sin altibajos y después se mantiene todo el rato igual.
> B) El agua sale a diez grados los 10 primeros segundos, para subir muy bruscamente hasta alcanzar los 80 grados a los 15 segundos exactos. Desde los 15 a los 20 segundos, la temperatura desciende sin altibajos hasta los 40 grados, que se mantienen constantes a partir de los 20 segundos.

C) No hay manera de ducharse. En los 5 primeros segundos la temperatura asciende sin altibajos hasta 40 grados, pero no se mantiene. A partir de los 5 segundos, siempre pasa lo mismo: se enfría hasta 20 grados en otros 5 segundos, vuelve a subir hasta 40 grados en los 5 segundos siguientes, baja hasta 20 grados en los 5 segundos siguientes, vuelve a subir hasta 40 grados en los 5 segundos siguientes y así todo el tiempo restante.

Expresa en este sistema de ejes coordenados el funcionamiento de las tres duchas:

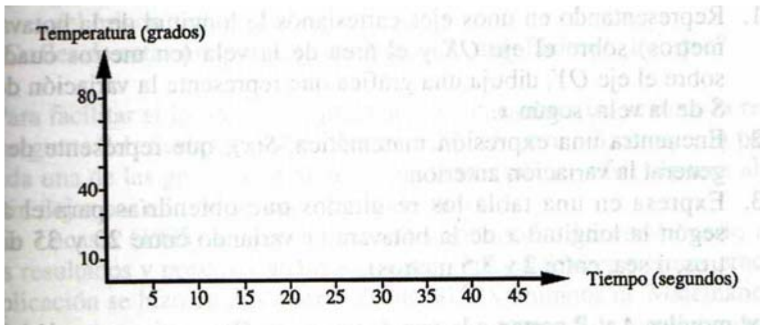


Gráfico 2.4

Si se ponen en marcha las tres duchas a la vez:

1) ¿En qué instante estará el agua de las tres duchas a la misma temperatura?
2) ¿Podría ocurrir que las temperaturas de B y C sean iguales, pero distintas de las de A? De ser así, ¿para qué valores del tiempo t?
3) ¿Podría ocurrir que las temperaturas de A y C sean iguales, pero distintas de las de de B? De ser así, ¿para qué valores del tiempo t?
4) ¿Hay algún período de tiempo en el que la temperatura de C sea superior a la de A y B: TC>TA y TC>TB?
5) ¿Hay algún período de tiempo en el que la temperatura de A sea superior a la de B y C: TA>TB y TA>TC? ¿Para qué valores del tiempo t?

El libro termina con un análisis del funcionamiento didáctico del gráfico cartesiano de la función., es decir, de cómo puede funcionar el gráfico en clase cuando la intención de enseñar algo es explícita. Para ello, examinan las propiedades didácticas locales del gráfico y las distintas formas de presentación escolar de los objetos matemáticos, terminando con los resultados de una investigación acerca de la opinión y la representación que tienen los profesores y los alumnos del gráfico de una función.

Resumen los diferentes métodos que se pueden emplear en ideas atribuibles a los gráficos:

- La idea *ostensiva* consiste en pensar que basta con mostrar, con enseñar en el sentido estricto.
- La idea *empirista* consiste en pensar que los alumnos aprenderán mediante ostensiones didácticas repetidas. La formulación no sería totalmente necesaria y la definición matemática adquiere un carácter peyorativo y puede llegar a considerarse un obstáculo al conocimiento correcto.
- La visión *formalista* consiste en considerar que la definición es la única manera de saber, el verdadero lugar de encuentro entre el profesor y el alumno. El gráfico pertenecería a la actividad heurística del alumno, mientras que la definición y el razonamiento pertenecerían a la actividad propiamente matemática.

En cuanto a las opiniones de profesores y alumnos relativas a los gráficos, plantean que en general los profesores tienen la impresión de que los gráficos borran de alguna manera las diferencias que existen entre la perspectiva de los alumnos y la de ellos, y que en los alumnos de distintos niveles existe una idea de que los gráficos facilitan la comprensión, sin que esa idea los lleve a utilizarlos en la resolución de problemas.

En las consideraciones finales acerca de la organización de la teoría de funciones resaltan el papel del gráfico en la introducción y el desarrollo de este tema, ya que precisamente es el gráfico el que da unidad al concepto de función, el que proporciona los elementos semánticos de la función, y permite penetrar en el universo de las funciones, porque posibilita sustituir los análisis basados en el funcionamiento por un análisis de las formas.

El libro concluye con las siguientes apreciaciones:

- La representación gráfica no parece desempeñar un papel significativamente distinto de los otros modos de representación de una función, siendo el concepto matemático lo fundamental en la resolución de problemas.
- El gráfico no basta para soportar por sí mismo los conocimientos relativos a las funciones que representan.
- El sitio atribuido por los profesores al gráfico está basado en una falsa transparencia del mismo, aunque su importancia y necesidad son innegables.
- Los estudiantes en los cursos en los que prima el tratamiento gráfico, aprecian especialmente el gráfico como instrumento de conocimiento intuitivo y de

aprendizaje. Pero estos mismos alumnos eligen erróneamente las preguntas que contienen gráficos como las más fáciles y practican cambios de modos de presentación aunque no sea necesario. Esto lleva a pensar en un posible efecto negativo de la profusión de ejercicios basados en la interpretación y la construcción de gráficos, que consistiría en que los alumnos supusieran que lo importante es, en vez de resolver el problema, la utilización abundante del lenguaje gráfico.

2.2.2. La dimensión epistemológica

En un sentido epistemológico, el estudio de la génesis de los conceptos permite estudiar los procesos que han seguido los conceptos matemáticos en su formación y en su desarrollo, los mecanismos de producción de estos saberes y conocer las características de la actividad matemática.

La epistemología interviene también de modo muy decisivo en la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación más o menos idónea a la resolución de distintos problemas.

Un análisis epistemológico de una determinada noción nos conducirá a la determinación de concepciones históricas ligadas a la misma.

Con base en el análisis de Sierpinska (1992) reportado en nuestros antecedentes, replanteamos (dado el contexto institucional y las características de nuestro sistema didáctico) las 19 categorías para el entendimiento del concepto en cinco momentos para la resignificación de la función lineal:

- Momento 1 relacionado con los *cambios*, que implica no solamente identificar los cambios observados en el mundo que nos rodea, sino que también incluye identificar qué es lo que cambia y cómo cambia.
- Momento 2, al que llamamos *variable*, en el que ubicamos la discriminación entre dos modos de pensamiento matemático (en términos de cantidades conocidas y desconocidas y en términos de variables y constantes) y la discriminación entre variables dependiente e independiente.

- Momento 3 donde encontramos la síntesis entre el concepto de ley y el *concepto de función*, la discriminación entre una función y las herramientas analíticas que se usan para describir su ley y la síntesis de la concepción general de la función como un objeto.
- En el momento 4 ubicamos las *diferentes formas de expresar una función*, lo que incluye la discriminación entre los diferentes significados de la representación de funciones y las funciones mismas y la síntesis de las diferentes formas de expresar las funciones, representar las funciones y hablar sobre funciones.
- Por último, en el momento 5 encontramos la *relación funcional y relación causal* que implica síntesis de los roles de la noción de función y de causa y la discriminación entre las nociones de relación causal y funcional.

Vemos en estos momentos que el estudio del cambio es crucial para significar la noción de función, lo cual guarda coherencia con lo reportado en (Youschkevitch, 1976) sobre el surgimiento del concepto como relación funcional. La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto. Al tratar de entender cómo y cuánto cambia el cuerpo, sistema u objeto dado, es cuando surge la noción de variación, ya que esta se entiende como una cuantificación del cambio. En este sentido, decimos que una persona utiliza argumentos y estrategias de tipo variacional, cuando hace uso de ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio de un cuerpo, sistema u objeto que se esté estudiando (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005)

2.2.2.1. Observaciones acerca de la proporcionalidad directa

El estudio del cambio para el caso de la función lineal nos lleva a estudiar una forma de cambio particular: la “proporcionalidad directa”. El estudio de esta noción lo hicimos siguiendo dos direcciones: la distinción entre proporcionalidad directa e inversa y la utilización del término proporcionalidad como sinónimo de proporcionalidad directa.

La revisión de investigaciones referidas a este tema (Azcárate y Deulofeu, 1996; Fiol y Fortuna, 1990; Grupo Beta, 1997; Suhit, 1995), así como también la revisión de textos escolares (Álvarez, Álvarez, Arribas, Martínez y Ruiz, 1999; Guzmán, Colera y Salvador, 1987) nos permite identificar, que en general, la idea que subyace en las definiciones y ejemplos dados es que dos magnitudes son proporcionales cuando al aumentar o disminuir una, la otra aumenta o disminuye de la misma manera. Para el caso de la proporcionalidad directa, si aumenta (disminuye) una, aumenta (disminuye) la otra, y en el caso de la inversa, si aumenta (disminuye) una, disminuye (aumenta) la otra.

Esa "misma manera" de aumentar o disminuir se relaciona con la noción de factor de proporción, coeficiente de proporcionalidad o reducción a la unidad:

> Intentamos comprobar si la distancia que recorre el sonido en el aire es proporcional al tiempo que invierte. Para ello, hacemos explotar dinamita desde distancias conocidas.
>
> Desde que vemos el fogonazo hasta que oímos la explosión pasa un tiempo, que es el que el invierte el sonido en llegar a nosotros.
>
> El resultado de cuatro pruebas ha sido:

Distancia (m)	2000	2900	5000	6500
Tiempo (seg)	5,9	8,5	14,7	19,1

$$\frac{\text{Distancia (m)}}{\text{Tiempo (seg)}} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2000}{5,9} = 338,98 \\[6pt] \dfrac{2900}{8,5} = 341,18 \\[6pt] \dfrac{5000}{14,7} = 340,14 \\[6pt] \dfrac{6500}{19,1} = 340,31 \end{array}\right\} \approx 340 \text{ m/seg}$$

cocientes constantes, magnitudes proporcionales

> Las pequeñas variaciones se imputan a errores de medición.
>
> Esa constante es el coeficiente de proporcionalidad. Su significado, en este caso, es:

$$\text{coeficiente} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = 340 \text{ m/seg} \longrightarrow \text{Velocidad del sonido en el aire}$$

> Observa que se verifica la relación de proporcionalidad. Al duplicarse, triplicarse, cuadriplicarse, etc., la distancia, también habrá de hacerlo el tiempo, ya que los cocientes son constantes.

En Suhit (1995) se señala que esta idea en ocasiones conduce al error de interpretar como proporcionales magnitudes entre las que existe cualquier relación de crecimiento (o decrecimiento) simultáneo.

En esta revisión encontramos que las definiciones formales, algebraicas o coloquiales, indican que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente entre dos valores correspondientes es una constante. Y en el caso de la proporcionalidad inversa, indicando que en ese caso el producto entre dos valores correspondientes es constante. Generalmente estas definiciones van acompañadas de ejemplos y ejercicios que involucran el completar tablas y representar en un sistema de coordenadas para identificar que curva forman los valores encontrados.

Entendemos que la idea intuitiva que antes mencionamos puede conducir a errores si no va acompañada de un análisis de cómo es encontrado el factor de proporcionalidad. Nos referimos a los casos de proporcionalidad directa donde el factor de proporcionalidad es negativo, ya que en ese caso, cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye y podría conducir al error de identificar como inversa a esa relación (ambas magnitudes aumentan pero en valor absoluto)

En el caso de la utilización del término proporcionalidad como sinónimo de proporcionalidad directa, encontramos que esto es utilizado en los textos antes mencionados sin encontrar en ninguno de ellos un argumento que lo justifique.

2.2.3. La dimensión cognitiva: análisis de las concepciones de los estudiantes

En el análisis de la componente cognitiva implica entender cuales son las concepciones de los alumnos en referencia al contenido matemático que va a ser tratado.

Para Artigue (1989) la noción de concepción responde en Didáctica de la Matemática a dos necesidades distintas:

- Poner en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las representaciones y modelos de los tratamientos que le son asociados, poner en evidencia su adaptación más o menos buena en la resolución de diferentes tipos de problemas.

- Ayudar al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación directa inducida por la epistemología escolar y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno

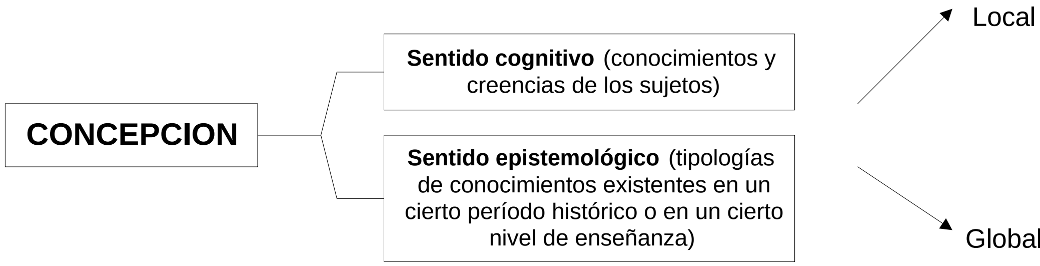


Diagrama 2.3

En un sentido cognitivo, las concepciones de los alumnos incluyen creencias, teorías, explicaciones y significados. Se identifican a través de las regularidades que se encuentran en sus diferentes producciones, distinguiendo aquellas que pueden constituir obstáculos para la producción de otros conocimientos y clarificando las condiciones en las que estas concepciones pueden ser modificadas.

El término *misconceptions* es utilizado cuando estas concepciones se hallan en conflicto con los significados aceptados en matemáticas o ciencias. Se describen como ciertas características incorrectas o inapropiadas del conocimiento de los estudiantes sobre un objeto matemático específico que puede o no haber sido enseñado y que son repetibles y explícitas. Una misconceptions debe ser un sistema de ideas razonablemente bien formulado, no simplemente una justificación para un error.

Artigue distingue la concepción global de la concepción local del sujeto. La concepción global es un constructo teórico inobservable. La concepción en su sentido local, está estrechamente ligada con el saber puesto en juego y con los diferentes problemas en la resolución de los cuales interviene. En consecuencia el alumno construirá progresivamente los conocimientos pasando por concepciones sucesivas que la forma tradicional de enseñanza no le permite, muchas veces, explicitar. Un mismo alumno puede utilizar numerosas concepciones ignorando sus relaciones, o bien al contrario, relacionándolas con una concepción más general.

Existen cuatro modos de representación del concepto función: descripción verbal, tabla numérica, gráfica y fórmula. En su génesis histórica, cada uno de estos modos ha jugado un papel importante. Sin embargo, como se señala en (Cantoral y Farfán, 1998), el concepto de función devino protagónico hasta que se lo concibe como una fórmula, es decir, hasta que logró la integración de dos dominios de representación: el álgebra y la geometría.

Investigaciones desarrolladas en el seno de la Matemática Educativa entorno a la noción de función muestran en la enseñanza tradicional una sobrevaloración de los aspectos formales y algorítmicos que, en general, carecen de significado para el estudiante y se dejan de lado las argumentaciones visuales y los enfoques numéricos, entre otras causas, por no considerarlos matemáticamente válidos. En (Cantoral y Farfán, 1998) se afirma que tener un dominio del contexto visual tanto en la algoritmia, la intuición y la argumentación permite el tránsito entre las diversas representaciones y se plantea que la hipótesis central consiste en asumir que: previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.

2.2.3.1. Sobre la concepción de función y sus diferentes representaciones

A través del cuestionario antes mencionado, comprobamos que la totalidad de alumnos – docentes del curso indicaban que habían estudiado el concepto de función en sus estudios superiores, no en el nivel medio, y que salvo una docente, todos trabajan con sus alumnos este concepto en sus clases. Quedó claro entonces que el grupo de estudiantes con los que íbamos a desarrollar esta experiencia no se enfrentaba por primera vez al concepto.

Una de las preguntas del cuestionario pedía definir con sus propias palabras el concepto de función. Es a través del análisis de las respuestas a este ítem en donde buscamos identificar las concepciones de los estudiantes con los que trabajaríamos, vinculándolas con las concepciones que caracterizan Sierpinska (1989) y Ruiz (1998)

El primer paso de este análisis consistió en determinar si en las definiciones dadas se incluían términos como:

I) Relación, correspondencia, asociación, aplicación.

II) Transformación, dependencia.

Los términos del grupo I indican, de algún modo, asignación entre objetos. Los del grupo II se pueden vincular con la identificación de los efectos de un cambio.

En nuestro análisis encontramos que los términos del grupo II no fueron utilizados. Si bien algunas definiciones incluían expresiones como "relación entre variables", "variable independiente", "variable dependiente", se utilizaron en el sentido de: fijamos valores para la variable independiente y mediante una relación o correspondencia asignamos valores para la variable dependiente.

Como se mostró en los antecedentes de investigación, históricamente es partir de las relaciones de dependencia entre cantidades variables como surge la noción de función. Esta dependencia se puede manifestar a través de los cambios que sufre la variable independiente al transformarse en la variable dependiente. La ausencia de expresiones que denoten la idea de cambio la podemos relacionar con los obstáculos epistemológicos identificados por Sierpinska (1989):

1. Los objetos variables son aceptados en ciencias naturales o en aplicaciones, pero no en la matemática pura.
2. Las magnitudes son entidades cualitativamente diferentes de los números; la proporcionalidad es diferente de la igualdad.
3. Fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con las expresiones algebraicas.

Vinculando esto con las concepciones que Sierpinska caracteriza en el mismo estudio, encontramos que mayoritariamente se identifica a la función como un tipo especial de relación, encontrando en la redacción distintos niveles de formalismo, expresando, implícita o explícitamente, la condición de existencia y unicidad:

> "Una función es una relación en donde a cada valor de x le corresponde un solo valor en y"

> "Una función es una relación que vincula a cada elemento "a" de un conjunto llamado conjunto de partida o dominio, un único elemento "b" de un segundo conjunto llamado conjunto de llegada o codominio"

> "Consideramos dos conjuntos A y B, se le llama función de A en B a cualquier relación de A en B, en la que cada elemento de A comparezca una y una sola vez como primer elemento de los pares de la relación (por relación de A en B se entiende cualquier subconjunto del producto cartesiano AxB)"

> "Una función es una correspondencia entre dos conjuntos numéricos, donde los elementos del primer conjunto (llamado dominio) se relaciona con uno y sólo uno elemento del segundo conjunto (llamado contradominio)"

> "Es una relación biunívoca (uno a uno) entre la variable dependiente y la variable independiente. En la que esta última toma valores arbitrarios. Y puede expresarse mediante una tabla y una gráfica"

> Una función es una relación entre dos conjuntos A y B donde:
>
> 1) para cada elemento x de A existe y elemento de B tal que (x,y) es elemento de f.
> 2) Si (x,y) y (x,y1) son elementos de f entonces y = y1

En el mismo cuestionario se mostraban 16 gráficas y la consigna era señalar cuáles correspondían a una función y por qué. Notamos que cuando más formales eran en sus definiciones, no identificaban como funciones a aquellas funciones discretas o con asíntotas verticales (no se cumplía la condición de existencia) o cuyos dominios eran partidos (justificaban diciendo que no se veía que cumplieran la condición de unicidad)

Otro dato importante que arroja el análisis de los resultados de este cuestionario es que si bien al contestar acerca los aspectos del tema (algebraico, geométrico / gráfico, numérico, verbal) a los que les otorgaban mayor importancia cuando desarrollaban el tema en clase ubicaban en los primeros lugares al geométrico / gráfico, este aspecto era el que obtenía menor porcentaje en un ejemplo de evaluación en el que se les planteaba un mismo problema resuelto de cuatro maneras diferentes, destacando en cada caso alguno de los aspectos antes mencionados.

2.2.4. La dimensión social

Los factores sociales en la investigación en Matemática Educativa no son de uso exclusivo en la Socioepistemología. Perspectivas como la Etnomatemática, la Semiótica o la Aproximación Antropológica involucran elementos sociales en sus análisis, incluso aproximaciones como la Ontosemiótica, desarrollada por el Dr. Juan Díaz Godino[2], o la Perspectiva de la Semiótica y la Actividad, desarrollada por el Dr. Wolff-Michael Roth[3], han usado el término *práctica social* en sus análisis de la actividad matemática del individuo.

Para efectos de nuestro trabajo solo describiremos en qué sentido la Aproximación Socioepistemológica establece la **práctica social** como generadora de conocimiento, definiéndola como *aquello que norma o regula la actividad*, que nos hace hacer lo que hacemos, ya sea como individuo o como comunidad (Montiel, 2005).

Diferentes investigaciones dentro de esta perspectiva han mostrado que una de estas prácticas es la *predicción* (Cantoral y Farfán, 1998), describiéndolo como la práctica que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce. Esta práctica está íntimamente relacionada con la variación ya que para predecir es necesario cuantificar y analizar los cambios. Es decir, la variación es una herramienta de análisis necesaria para la predicción.

En nuestra disciplina la concepción de *modelo* tiene diversos significados. Lo que distingue a la aproximación socioepistemológica de otras perspectivas es la intención: los modelos son usados como herramientas para argumentar (Arrieta, 2003). Pero incluso dentro de esta aproximación existe actualmente el debate entre considerar a la modelación como práctica social o como actividad (Arrieta, 2003; Montiel, 2005).

En este trabajo asumiremos a la modelación como una actividad dentro de los cinco momentos, mencionados en la dimensión epistemológica, a transitar en nuestro diseño

[2] http://www.ugr.es/~jgodino/

experimental. Sin embargo, y por adherirnos a la aproximación socioepistemológica, la intencionalidad del diseño no es una reconstrucción y resignificación del concepto de función lineal, sino de la **linealidad** como propiedad de la relación funcional de dos variables.

En síntesis, la dimensión *socio* de nuestro trabajo se verá caracterizada por la resignificación de una propiedad, en actividad matemática escolar, regulada por la predicción en diferentes contextos.

[3] http://www.educ.uvic.ca/faculty/mroth/

Capítulo 3: Diseño de las Secuencias

3.1.- Metodología: Ingeniería Didáctica

El término ingeniería didáctica surge, en el seno de la escuela francesa, en analogía al quehacer en ingeniería, ya que se apoya en resultados científicos, involucra la toma de decisiones y el control sobre las diversas componentes inherentes al proceso. Así la ingeniería didáctica se constituye como una metodología de investigación que se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella y como una metodología de producción para guiar las experimentaciones en clase. Su sustento teórico proviene de la teoría de la transposición didáctica y de la teoría de las situaciones didácticas.

En esencia esta metodología contempla cuatro fases (Artigue, 1995; Farfán, 1997):

1) Análisis preliminar
2) Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería
3) Experimentación
4) Análisis a posteriori y Evaluación,

a las que Lezama y Farfán (2001) denominan fase de planeación, fase de diseño, fase experimental y fase de validación, respectivamente.

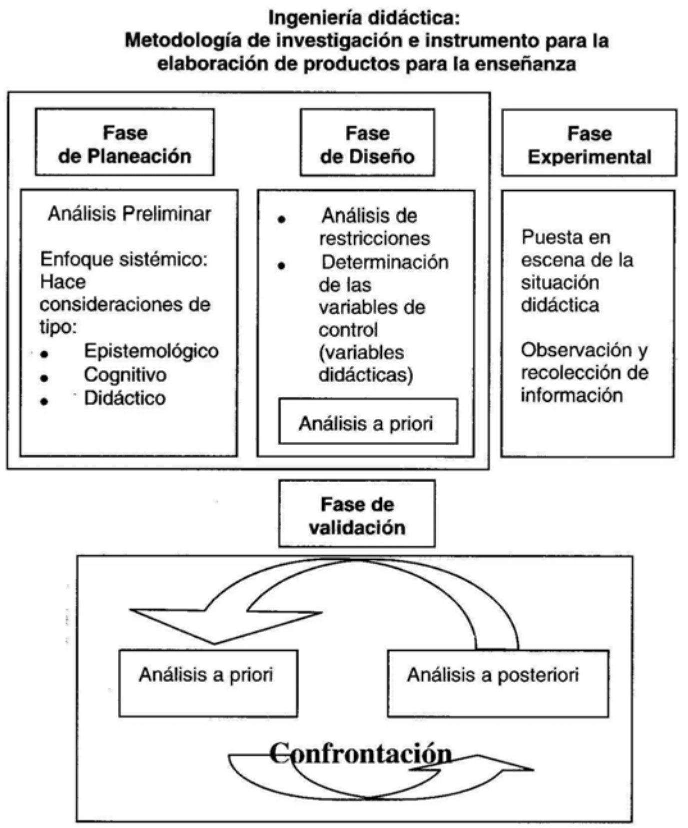


Diagrama 3.1

El análisis preliminar contempla sólo las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva a la investigación. Incorporar la componente social y modificar la interacción sistémica de las cuatro componentes para explicar el fenómeno didáctico es lo que se ha planteado en el marco teórico (Capítulo 3)

Ahora bien, en la fase de diseño distinguimos las restricciones y variables de control que imponía trabajar con profesores e interactuar en un escenario en línea. Incluyendo las reportadas por Montiel (2002) y Sánchez-Aguilar (2003), consideramos:

- La oportunidad de consultar bibliografía antes de intervenir en el espacio en línea que comparten con sus pares, así que podemos esperar respuestas formales o definiciones de libros,
- La facilidad de interactuar con otros colegas o profesores (de cursos anteriores) por vías externas al curso, como el correo electrónico y la mensajería instantánea (Chat)

- La modalidad en línea permite el uso de materiales digitales diversos disponibles en Internet, aunque no estén indicados en el curso. Estos materiales incluyen herramientas didácticas y tecnológicas, relacionadas o no con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como bibliografía especializada en matemática educativa.
- El alumno-docente, por su formación y experiencia profesional, tiene familiaridad con las nociones matemáticas involucradas en la actividad matemática,
- En el proceso de validación o consenso en el cual se confrontan las diferentes formulaciones de los alumnos-docentes, sobreviven a este proceso aquellas que más se apeguen al discurso matemático escolar.
- La tecnología puede cambiar la forma en que los alumnos-docentes acceden, perciben y comunican los conceptos matemáticos e influir en sus procesos de validación presentes en los procesos de interacción.
- Los procesos de interacción entre estudiantes privilegian los contextos analítico y algebraico como herramientas de argumentación, originando en algunos casos conclusiones matemáticamente erróneas por parte de los estudiantes.
- La tecnología como mediador en el proceso formativo (la computadora y la interfaz), la tecnología como recurso de trabajo y lectura (software de aplicación[1]) y la tecnología como herramienta en la resolución de secuencias didácticas (software didáctico[2]), modifican el intercambio de información entre el objeto de aprendizaje y el sujeto cognoscente,

Tomando en consideración estos elementos diseñamos cinco secuencias didácticas, que permitieran a los alumnos-docente transitar por los cinco momentos que construimos a partir de las categorías de entendimiento del concepto de función que presenta Sierpinska (1992).

[1] Tal es el caso de los Programas como Microsoft Word, Acrobat Reader y los Simuladores como SIRES

[2] En nuestro caso particular los programas Casio ClassPad Manager y Graphmatica,

3.2. Diseño de Secuencias

3.2.1 Condiciones de un ambiente de trabajo en línea

Como indicamos anteriormente, esta experiencia se llevó a cabo en el curso Naturaleza del Pensamiento Matemático, del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa que ofrece completamente en línea el CICATA-IPN desde la Ciudad de México. En el trabajo a través de Internet se utilizó la plataforma de trabajo Blackboard y, debido a problemas técnicos de esta plataforma, el sistema de trabajo compartido BSCW.[3]

En este Programa de Maestría, el diseño y la gestión de un curso consta de tres fases: diseño, implementación y evaluación, y cada una de ellas está caracterizada por el equipo responsable del curso y las particularidades del contenido a estudiar (Farfán, Lezama, Castañeda, Martínez, 2001) Para el diseño de este curso fue designado un profesor titular y cuatro profesores más, los cuales, junto con el titular, fueron los responsables de cada uno de los equipos de trabajo en los que fue divido el grupo de estudiantes.

Una vez definidos los objetivos del curso, se establecen las lecturas, actividades, formas de interacción, producciones de los alumnos, estrategias de seguimiento y formas de evaluación.

En el caso particular del curso en que desarrollamos esta experiencia, el objetivo fue: *Analizar el proceso de Desarrollo del Pensamiento Matemático como parte de un ambiente social en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas específicas.*

La estructura general del curso estuvo conformada por cuatro unidades que fueron desarrolladas a lo largo de cinco semanas. Las unidades fueron:

- **I.** Cambio y variación
- **II.** Modelos matemáticos
- **III.** Operaciones gráficas
- **IV.** Desarrollo del pensamiento funcional

[3] En el capítulo correspondiente al Marco Teórico se describió la distribución de las carpetas de trabajo y la utilización del foro en ambos espacios de trabajo.

En cuanto al desarrollo, en las primeras cuatro semanas, se trabajó en la resolución de secuencias didácticas y en las discusiones en foros, buscando de esta manera, reflexionar sobre el desarrollo y la naturaleza del pensamiento matemático en base a estas resoluciones, y para el caso particular del concepto de función, desde una perspectiva que buscaba favorecer contextos, diversas representaciones, debates y consensos en la construcción de su significado. A estas secuencias, su intencionalidad y formas de implementación haremos referencia más adelante.

La última semana del curso se trabajó en la lectura y discusión de notas de clase sobre la Didáctica de la Función, a través de distintas aproximaciones teóricas, y en la elaboración del ensayo final grupal. Para esta última parte, los alumnos - docentes también contaron con bibliografía complementaria, que se fue actualizando a medida que el curso se fue desarrollando.

En los criterios de evaluación se tuvo en cuenta: la resolución de secuencias didácticas (50%), foros de discusión (25%) y ensayo final (25%). En este punto es importante mencionar que las secuencias no fueron evaluadas como correctas o incorrectas. Sabíamos que por su formación y experiencia docente todos los estudiantes con los que íbamos a trabajar conocían y dominaban el concepto de función. Lo que buscábamos era la reflexión acerca de: el desarrollo del pensamiento matemático ligado a este concepto, los elementos que deja de lado el discurso matemático escolar como consecuencia del fenómeno de transposición didáctica, y la importancia del concepto en el discurso matemático escolar de los niveles medio superior y superior.

Un punto importante es la interacción. Si bien la comunicación entre los actores de la experiencia analizada estaba abierta a realizarse vía correo electrónico, vía telefónica o incluso presencial, para aquellos que tuvieran oportunidad, se consideró registrar, exclusivamente, la comunicación que se dio en los foros de discusión, ya que permite la lectura de varias intervenciones y puntos de vista, pero sobre todo porque este espacio es el más apropiado para indagar en el pensamiento e ideas de los profesores (Castañeda, Sánchez y Molina, 2006). En nuestra investigación, para la resignificación de la linealidad fue de fundamental importancia la participación en dichos foros, pues allí los estudiantes debían argumentar y sustentar las respuestas y resoluciones dadas a las distintas secuencias, confrontar ideas y opiniones y consensuar respuestas.

En el desarrollo del curso hubo dos tipos de foros, uno que se iniciaba con una pregunta por parte del profesor, y otro que surgía a partir de los comentarios y preguntas a partir de las secuencias resueltas en forma individual o en grupo, y en los que el profesor intervenía con observaciones y nuevas preguntas.

La modalidad en línea y el carácter asíncrono de las interacciones dio la oportunidad a la consulta bibliográfica sin restricción, a intervalos amplios de reflexión y al uso de herramientas didácticas para la resolución de las secuencias.

En los dos espacios de trabajo utilizados quedan registrados todos los movimientos que el usuario hace en la plataforma: visitar, crear o borrar carpetas; abrir, guardar, borrar o colocar documentos; participar en los foros y editar o borrar participaciones. En el marco del curso, y en el caso de los estudiantes, se restringieron algunos atributos para evitar la pérdida de documentos.

3.2.2 Organización e Intencionalidad de las secuencias didácticas

Las secuencias didácticas diseñadas fueron cinco que se desarrollaron durante las primeras cuatro semanas del curso, se utilizaron materiales digitales de diferentes tipos, que proporcionaran flexibilidad y dinamismo a la actividad didáctica, además de acompañarlas de algunas indicaciones, observaciones y sugerencias para su resolución; La forma de trabajo en la mayoría de los casos fue individual.

Previo a la resolución de las secuencias los estudiantes debieron responder a un cuestionario disponible en Blackboard (Anexo A) que buscaba tener un primer acercamiento a la noción de función que los alumnos – docentes manejaban, así como también conocer la referencias bibliográficas que utilizaban para abordar el tema y el status que le otorgaban a cada una de las representaciones del concepto, tanto en el desarrollo de sus clases como al momento de evaluar a sus alumnos.

Todos los archivos de las secuencias fueron en formato Microsoft Office Word (.doc) para que pudieran modificarse directamente y no se perdiera el orden de la resolución, y los archivos del material de apoyo fueron en Adobe Reader (.pdf) y PowePoint (.ppt)

A continuación detallaremos las características e intencionalidad de cada una de las secuencias, así como también el material de apoyo relacionado con las mismas[4].

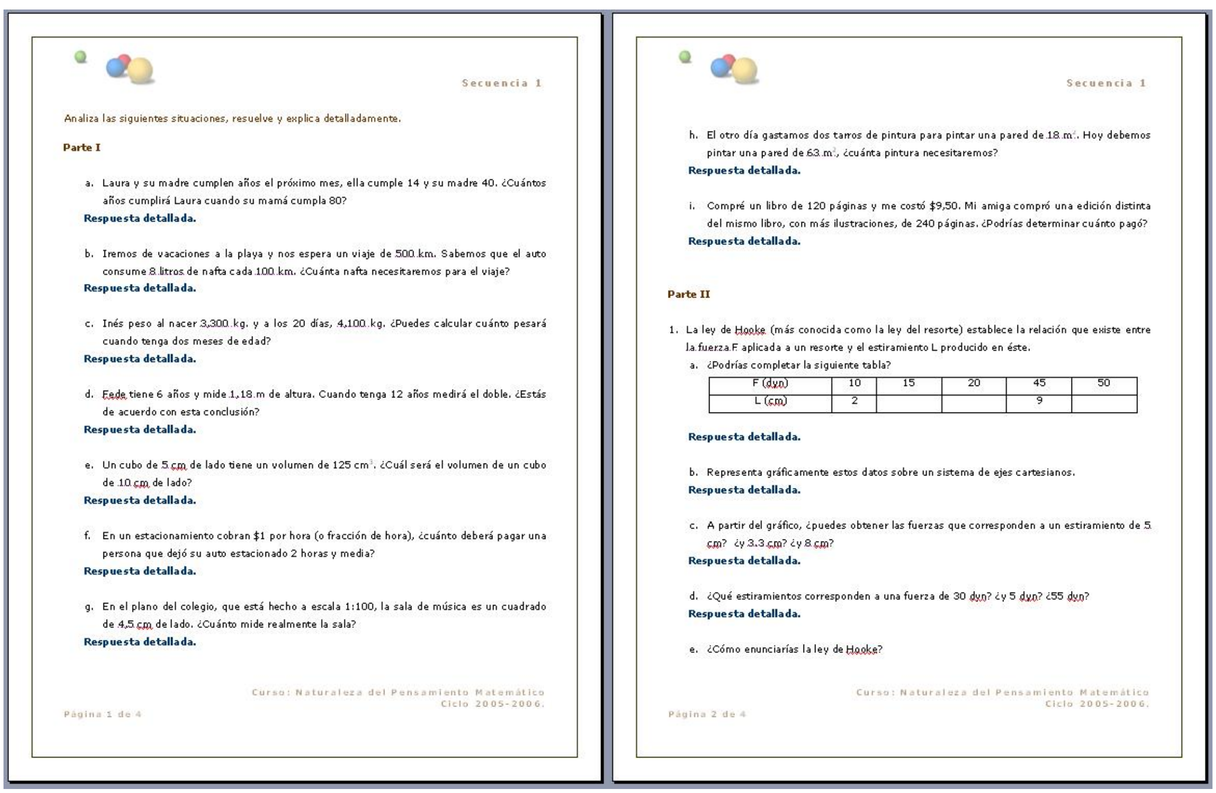
[4] Todo el material se encuentra disponible en el Anexo B de este trabajo

Secuencia 1

La resolución de la primera secuencia fue individual y el archivo de apoyo consistió en una guía para la construcción de un segmento de longitud $\sqrt{2}$

La intencionalidad de esta primera secuencia fue poner de manifiesto tres aspectos fundamentales: el reconocimiento de la proporcionalidad directa en diferentes contextos, las estrategias de cálculo utilizadas y la identificación del factor de proporción y el análisis de su significado. Con esto, se pretendía que los alumnos – docentes transitaran por los dos primeros momentos que identificamos en el análisis de las categorías de entendimiento del concepto de función que determinamos a partir de (Sierpinska, 1992): *cambios* y *variables*.

Los ejercicios incluían preguntas para resolver en un contexto numérico-aritmético e incluían la organización de información en tablas:


Secuencia 1

Analiza las siguientes situaciones, resuelve y explica detalladamente.

Parte I

a. Laura y su madre cumplen años el próximo mes, ella cumple 14 y su madre 40. ¿Cuántos años cumplirá Laura cuando su mamá cumpla 80?
Respuesta detallada.

b. Iremos de vacaciones a la playa y nos espera un viaje de 500 km. Sabemos que el auto consume 8 litros de nafta cada 100 km. ¿Cuánta nafta necesitaremos para el viaje?
Respuesta detallada.

c. Inés peso al nacer 3,300 kg. y a los 20 días, 4,100 kg. ¿Puedes calcular cuánto pesará cuando tenga dos meses de edad?
Respuesta detallada.

d. Fede tiene 6 años y mide 1,18 m de altura. Cuando tenga 12 años medirá el doble. ¿Estás de acuerdo con esta conclusión?
Respuesta detallada.

e. Un cubo de 5 cm de lado tiene un volumen de 125 cm^3. ¿Cuál será el volumen de un cubo de 10 cm de lado?
Respuesta detallada.

f. En un estacionamiento cobran $1 por hora (o fracción de hora), ¿cuánto deberá pagar una persona que dejó su auto estacionado 2 horas y media?
Respuesta detallada.

g. En el plano del colegio, que está hecho a escala 1:100, la sala de música es un cuadrado de 4,5 cm de lado. ¿Cuánto mide realmente la sala?
Respuesta detallada.

Curso: Naturaleza del Pensamiento Matemático
Ciclo 2005-2006.
Página 1 de 4

Secuencia 1

h. El otro día gastamos dos tarros de pintura para pintar una pared de 18 m^2. Hoy debemos pintar una pared de 63 m^2, ¿cuánta pintura necesitaremos?
Respuesta detallada.

i. Compré un libro de 120 páginas y me costó $9,50. Mi amiga compró una edición distinta del mismo libro, con más ilustraciones, de 240 páginas. ¿Podrías determinar cuánto pagó?
Respuesta detallada.

Parte II

1. La ley de Hooke (más conocida como la ley del resorte) establece la relación que existe entre la fuerza F aplicada a un resorte y el estiramiento L producido en éste.
   a. ¿Podrías completar la siguiente tabla?

F (dyn)	10	15	20	45	50
L (cm)	2			9	

Respuesta detallada.

b. Representa gráficamente estos datos sobre un sistema de ejes cartesianos.
Respuesta detallada.

c. A partir del gráfico, ¿puedes obtener las fuerzas que corresponden a un estiramiento de 5 cm? ¿y 3.3 cm? ¿y 8 cm?
Respuesta detallada.

d. ¿Qué estiramientos corresponden a una fuerza de 30 dyn? ¿y 5 dyn? ¿55 dyn?
Respuesta detallada.

e. ¿Cómo enunciarías la ley de Hooke?

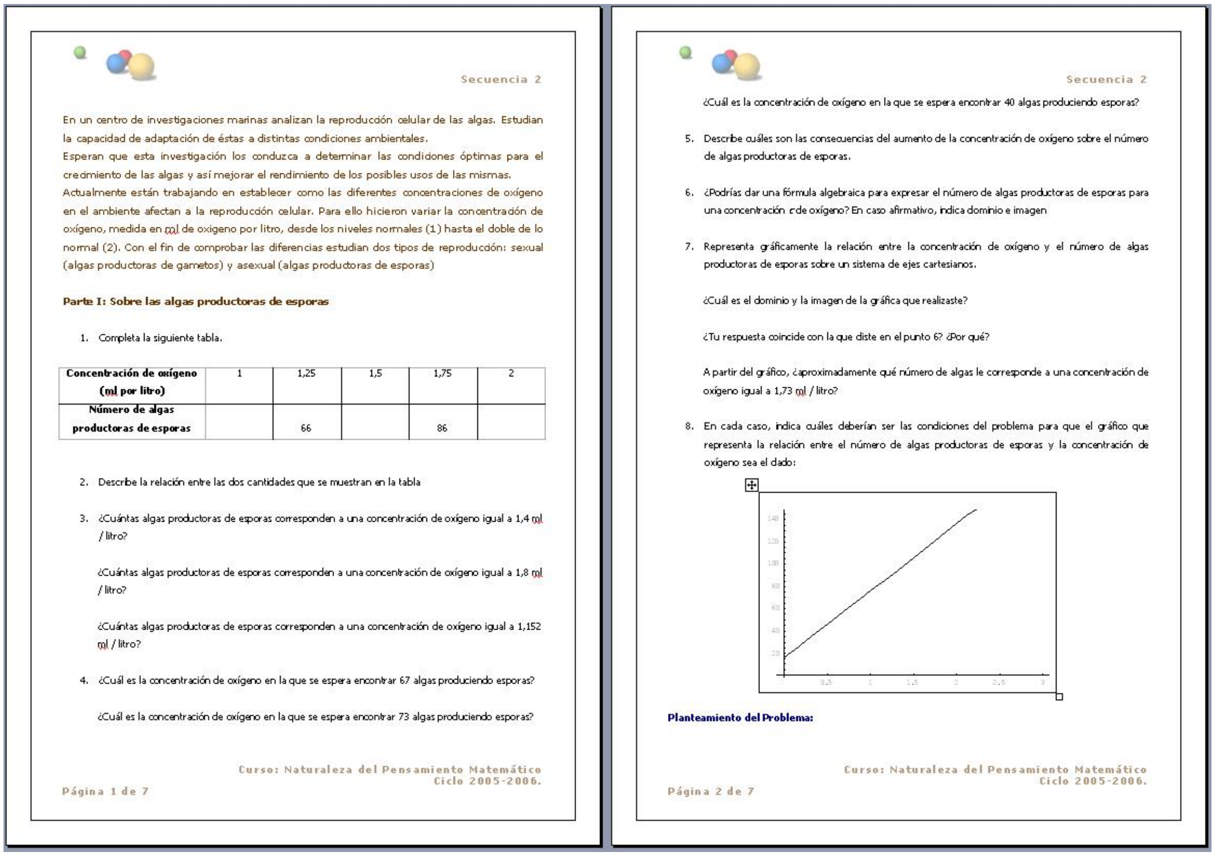
Curso: Naturaleza del Pensamiento Matemático
Ciclo 2005-2006.
Página 2 de 4

Imagen 3.1

El objetivo del foro de discusión de esta primera secuencia era discutir cuál era la idea de proporcionalidad que tenían, que estrategias de cálculo utilizaban, y como trabajaban este tema con sus alumnos.
Se esperaba que los docentes pudieran identificar proporcionalidad directa como forma de relación entre las magnitudes de las diferentes situaciones planteadas, diferenciándolas de otras que presentaban relaciones de crecimiento o decrecimiento simultáneo.

Secuencia 2

Al igual que la primera, esta secuencia fue resuelta en forma individual pero en este caso no contó con material de apoyo.
La intención de la segunda secuencia fue construir los modelos matemáticos $y = ax$ e $y = ax + b$ con el objetivo de poder utilizarlos como una herramienta de predicción. Se transitaría por los restantes momentos que identificamos.
Utilizando diferentes estrategias, se esperaba que los estudiantes identificaran en las dos situaciones planteadas los parámetros a y b, que los utilizaran para responder preguntas relacionadas con los posibles valores de las variables, que explicaran como la modificación de esos parámetros modifican las condiciones iniciales o de reproducción, y que explicaran las características del dominio y de la imagen que habían considerado según la representación elegida.
En esta secuencia se incluyó el contexto numérico-aritmético y el contexto gráfico relacionado a una situación de variación:



Secuencia 2

En un centro de investigaciones marinas analizan la reproducción celular de las algas. Estudian la capacidad de adaptación de éstas a distintas condiciones ambientales.
Esperan que esta investigación los conduzca a determinar las condiciones óptimas para el crecimiento de las algas y así mejorar el rendimiento de los posibles usos de las mismas.
Actualmente están trabajando en establecer como las diferentes concentraciones de oxígeno en el ambiente afectan a la reproducción celular. Para ello hicieron variar la concentración de oxígeno, medida en ml de oxigeno por litro, desde los niveles normales (1) hasta el doble de lo normal (2). Con el fin de comprobar las diferencias estudian dos tipos de reproducción: sexual (algas productoras de gametos) y asexual (algas productoras de esporas)

Parte I: Sobre las algas productoras de esporas

1. Completa la siguiente tabla.

Concentración de oxígeno (ml por litro)	1	1,25	1,5	1,75	2
Número de algas productoras de esporas		66		86	

2. Describe la relación entre las dos cantidades que se muestran en la tabla

3. ¿Cuántas algas productoras de esporas corresponden a una concentración de oxígeno igual a 1,4 ml / litro?

   ¿Cuántas algas productoras de esporas corresponden a una concentración de oxígeno igual a 1,8 ml / litro?

   ¿Cuántas algas productoras de esporas corresponden a una concentración de oxígeno igual a 1,152 ml / litro?

4. ¿Cuál es la concentración de oxígeno en la que se espera encontrar 67 algas produciendo esporas?

   ¿Cuál es la concentración de oxígeno en la que se espera encontrar 73 algas produciendo esporas?

Curso: Naturaleza del Pensamiento Matemático
Ciclo 2005-2006.

Página 1 de 7

Secuencia 2

¿Cuál es la concentración de oxígeno en la que se espera encontrar 40 algas produciendo esporas?

5. Describe cuáles son las consecuencias del aumento de la concentración de oxígeno sobre el número de algas productoras de esporas.

6. ¿Podrías dar una fórmula algebraica para expresar el número de algas productoras de esporas para una concentración c de oxígeno? En caso afirmativo, indica dominio e imagen

7. Representa gráficamente la relación entre la concentración de oxígeno y el número de algas productoras de esporas sobre un sistema de ejes cartesianos.

   ¿Cuál es el dominio y la imagen de la gráfica que realizaste?

   ¿Tu respuesta coincide con la que diste en el punto 6? ¿Por qué?

   A partir del gráfico, ¿aproximadamente qué número de algas le corresponde a una concentración de oxígeno igual a 1,73 ml / litro?

8. En cada caso, indica cuáles deberían ser las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre el número de algas productoras de esporas y la concentración de oxígeno sea el dado:

Planteamiento del Problema:

Curso: Naturaleza del Pensamiento Matemático
Ciclo 2005-2006.

Página 2 de 7

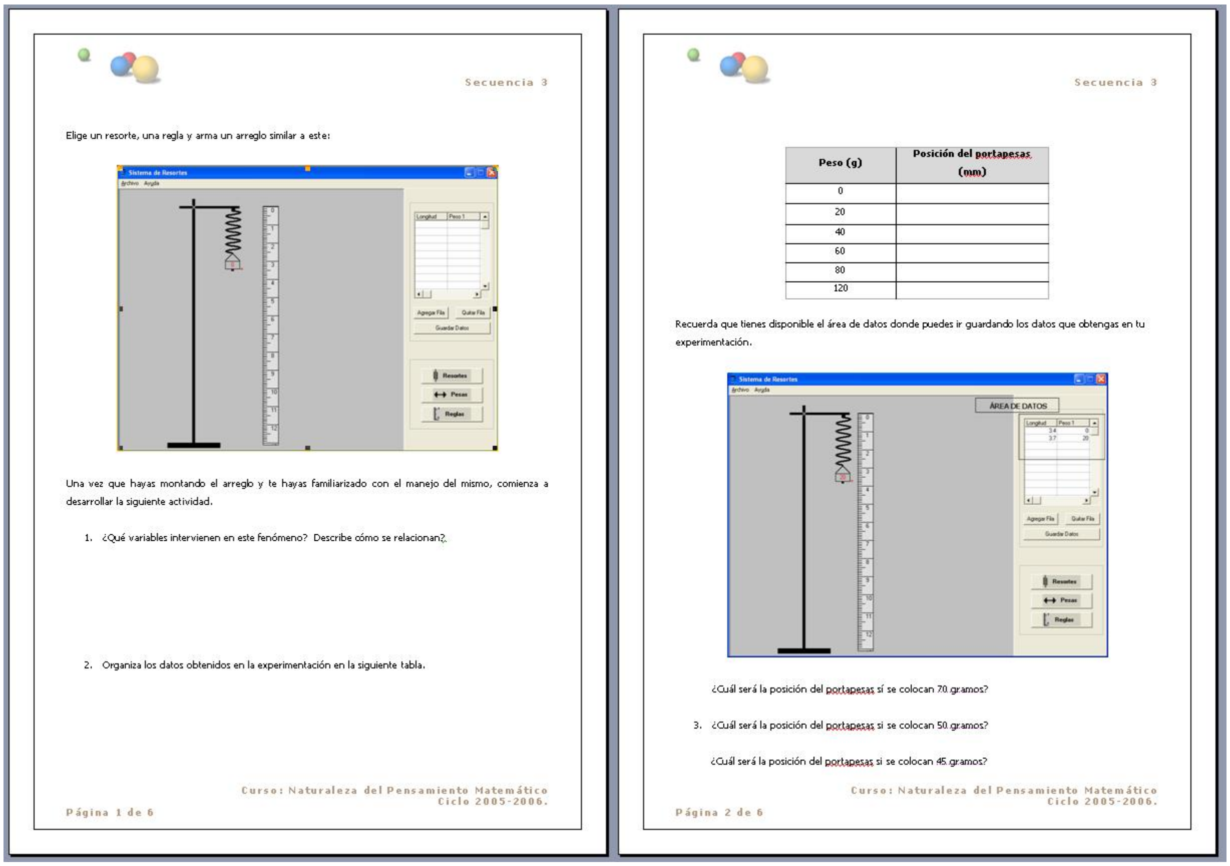
Imagen 3.2

En el foro correspondiente a la segunda secuencia el debate giró alrededor de la noción de modelo, en el sentido de cómo fue construido en la secuencia, qué elementos de la secuencia anterior fueron útiles, las diferentes formas de representación y el tránsito de una a otra, el dominio y la imagen del fenómeno y el dominio y la imagen de la expresión algebraica que lo modeliza, el uso del modelo como una herramienta de predicción.

Secuencia 3

Como ya reportamos en los Antecedentes de investigación, para el diseño de esta secuencia, buscando la construcción del modelo lineal, hemos utilizado el Programa SIRES (Sistema de resortes). De esta manera, si bien la intencionalidad era la misma que en la secuencia anterior, se planteaba a los alumnos un contexto diferente a los utilizados en las anteriores secuencias.

Previa a la resolución de esta tercera secuencia, los estudiantes trabajaron con un tutorial que les indicaba como instalar y como utilizar el Programa SIRES. Una vez familiarizados con este programa, resolvieron primero en formal individual y luego en forma grupal la Secuencia 3. La misma incluía pantallas del programa para guiar la actividad.
Se contemplaron los contextos físico, numérico (aritmético y tabular) y gráfico


Secuencia 3

Elige un resorte, una regla y arma un arreglo similar a este:

Una vez que hayas montando el arreglo y te hayas familiarizado con el manejo del mismo, comienza a desarrollar la siguiente actividad.

1. ¿Qué variables intervienen en este fenómeno? Describe cómo se relacionan?

2. Organiza los datos obtenidos en la experimentación en la siguiente tabla.

Curso: Naturaleza del Pensamiento Matemático
Ciclo 2005-2006.
Página 1 de 6

Secuencia 3

Peso (g)	Posición del portapesas (mm)
0	
20	
40	
60	
80	
120	

Recuerda que tienes disponible el área de datos donde puedes ir guardando los datos que obtengas en tu experimentación.

¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan 70 gramos?

3. ¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 50 gramos?

¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 45 gramos?

Curso: Naturaleza del Pensamiento Matemático
Ciclo 2005-2006.
Página 2 de 6

Imagen 3.3

En el caso de esta secuencia, el foro fue organizado por los mismos alumnos con las consignas de detallar y argumentar cada una de sus respuestas, y entregar un documento único por grupo que reportara la discusión que habían desarrollado.

Secuencia 4 y Secuencia 5

Incorporando herramientas tecnológicas, con estas secuencias se buscaba favorecer la construcción de un universo gráfico en el terreno de las funciones algebraicas a partir de las operaciones básicas de suma y multiplicación, desde una aproximación visual que involucra simultáneamente herramientas analíticas y numéricas, y que implica una interpretación gráfica de las operaciones entre funciones.

En este caso, el material de apoyo consistió en dos presentaciones en PowerPoint (.ppt) como presentación y guía del llamado *Método de las operaciones gráficas*.

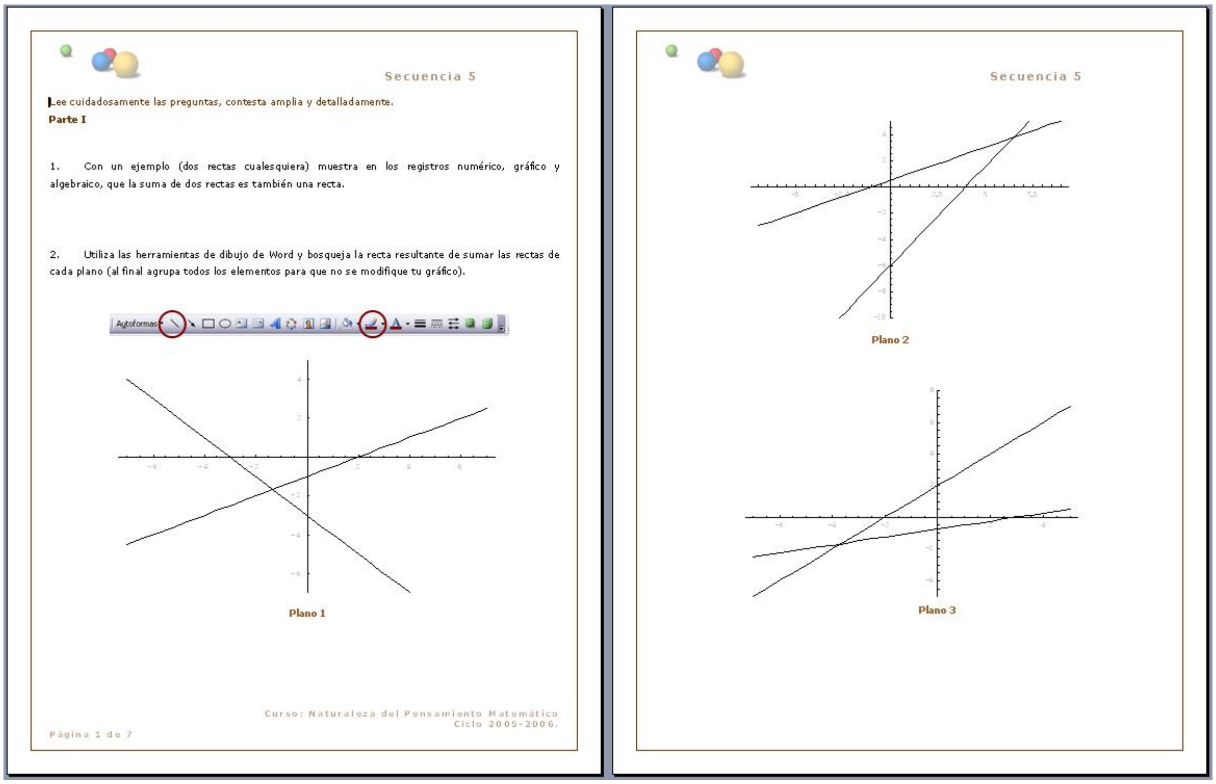


Imagen 3.4

La discusión en los foros correspondientes a estas secuencias giró alrededor del tipo de lenguaje, explicaciones y argumentos que se utilizaron en el desarrollo de las secuencias, las diferencias con el lenguaje, explicaciones y argumentos presentes en el Discurso Matemático Escolar tradicional, y como éste se vería afectado por la incorporación de esta propuesta.

La actividad final del curso consistió en un informe final grupal realizado a través la discusión, en un foro organizado por el mismo grupo, de las notas, la bibliografía complementaria y la experiencia con las secuencias 1 a la 5.

Como dijimos al inicio de este capítulo, en la resolución de estas secuencias buscábamos que los alumnos transitaran por los cinco momentos identificados en nuestro análisis epistemológico. Buscando la articulación de dichos momentos en la producción de los alumnos – docentes, encontramos que en aquellas situaciones donde debía encontrarse la forma que adoptaba la relación entre las variables o magnitudes presentes, la linealidad aparecía como primera opción, justificando la elección de este modelo o bien por la representación gráfica de los datos dados o bien por la identificación de una regularidad en una tabla numérica. A continuación, se encontraba la fórmula o expresión algebraica correspondiente y a partir de ahí, ésta jugaba un papel importante en las respuestas que se daban, por considerarla más "precisa" o "exactas" en comparación con otro tipo de representaciones.

En aquellas situaciones que no correspondían a un modelo lineal, se encontraron respuestas de tres tipos: se manipulaba la información dada de manera tal de poder adaptar la situación a una situación de linealidad, se manifestaba la imposibilidad de resolución de problema, y se buscaba otro tipo de estrategias o de reglas de cálculo que permitieran dar respuesta las preguntas planteadas.

Este análisis nos permite afirmar que la linealidad versus la no linealidad no está presente en todas las resoluciones porque de por sí no es una discusión que esté presente en los argumentos de los alumnos. Por ejemplo, cuando en el primer de foro de discusión se les pedía que caracterizaran o clasificaran los problemas propuestos, las respuestas estuvieron referidas al grado de dificultad de dichos problemas y no a los elementos que les permitían identificar proporcionalidad directa como forma de relación entre las magnitudes y que les permitía diferenciarlas de otras que presentaban relaciones de crecimiento o decrecimiento simultáneo.

En donde si encontramos esta confrontación es en las respuestas a aquellas secuencias en las que gráficamente debían argumentar que la suma de dos rectas es una recta pero que al multiplicar dos rectas la linealidad se perdía.

Capítulo 4: Resultados y conclusiones

A partir de las respuestas a la encuesta inicial del curso, tuvimos un primer acercamiento a la noción de función que los alumnos – docentes manejaban y tuvimos un buen referente de los apoyos bibliográficos que utilizaban para abordar el tema, así como el status que le otorgaban a cada una de las representaciones del concepto, tanto en el desarrollo de sus clases como al momento de evaluar a sus alumnos. Encontramos que mayoritariamente los profesores que desarrollarían esta experiencia utilizaban el concepto de función como una relación, correspondencia, asociación o aplicación entre elementos de conjuntos, y no encontramos expresiones que denotaran la idea de cambio o transformación.

Previamente reportamos que cuando más formales eran en sus definiciones, no identificaban como funciones a aquellas funciones discretas o con asíntotas verticales (no se cumplía la condición de existencia) o cuyos dominios eran partidos (justificaban diciendo que no se veía que cumplieran la condición de unicidad).

En el análisis de las resoluciones de las distintas secuencias encontramos que estas concepciones se convertirían en un obstáculo para dar respuesta a determinadas cuestiones referidas a la naturaleza de las variables presentes en la situación planteada, la forma en que estas variables se relacionan y los conjuntos dominio e imagen a los que esas variables pertenecen.

Como las secuencias fueron diseñadas con la intención de que los alumnos – docentes, a través de la resolución de las mismas, transitaran por los cinco momentos identificados en Sierpinska (1992), en este capítulo de resultados identificaremos la presencia de estos momentos mediante la referencia [CSE]

4.1. – La noción de cambio: ¿qué es lo que cambia y cómo cambia?

La práctica social de *predicción* (Cantoral y Farfán, 1998) está íntimamente relacionada con la variación, ya que para predecir es necesario cuantificar y analizar los cambios, es fundamental no sólo reconocer lo qué cambia, sino también cómo cambia.
En las actividades propuestas para reconocer la proporcionalidad en diferentes contextos encontramos que por lo general se aplican estrategias de cálculo relacionadas con la proporcionalidad directa sin justificar su uso, por ejemplo:

Pregunta:
Iremos de vacaciones a la playa y nos espera un viaje de 500 km. Sabemos que el auto consume 8 litros de nafta cada 100 km. ¿Cuánta nafta necesitaremos para el viaje?

Respuesta detallada:
Si cada 100 Km se consumen 8 litros de nafta, en una distancia 5 veces mayor se consumirán 5 * 8 = 40 litros de nafta.

o utilizándolas aún en situaciones en la que no era posible.

Pregunta:
Laura y su madre cumplen años el próximo mes, ella cumple 14 y su madre 40. ¿Cuántos años cumplirá Laura cuando su mamá cumpla 80?

Respuesta detallada:
$\frac{40}{80}=\frac{14}{x}$, despejando a x : $x=\frac{14\cdot 80}{40}=14\cdot 2=28$, R. $x=28$ años

En algunos casos, ya desde las primeras situaciones se utilizaba como sinónimo de proporcionalidad el término “lineal”

Pregunta:

Inés peso al nacer 3,300 kg. y a los 20 días, 4,100 kg. ¿Puedes calcular cuánto pesará cuando tenga dos meses de edad?

Respuesta detallada:

X_1 = peso inicial

X_2 = peso final

T_1 = tiempo inicial

T_2 = tiempo final

X_1 = 3,300 kg

X_2 = 4,100 kg

T_1 = 0 días

T_2 = 20 días

Suponiendo que la velocidad de crecimiento es <u>lineal</u>[1]

$$v_c = \frac{X_2 - x_1}{T_2 - T_1}$$

$$v_c = \frac{4{,}100kg - 3{,}300kg}{20dias - 0dias} = 0.04\frac{kg}{dia}$$

por lo que a los 2 meses de edad , T = 60 días, el aumento de peso será de:

$$\Delta X = v_c \times T = 0{,}04\frac{kg}{dia} \times 60dias = 2{,}400kg$$

por lo tanto, a los 60 días su peso será de:

$$X = X_1 + \Delta x = 3{,}300kg + 2{,}400kg = 5{,}700kg$$

Notamos no se hace explicita la identificación del factor de proporción o el análisis de su significado en el contexto de la situación planteada a pesar de ser utilizado en tareas que implican, por ejemplo, el completar una tabla o representar gráficamente una serie de datos.

Pregunta:

La ley de Hooke (más conocida como la ley del resorte) establece la relación que existe entre la fuerza F aplicada a un resorte y el estiramiento L producido en éste.

a. ¿Podrías completar la siguiente tabla?

F (dyn)	10	15	20	45	50
L (cm)	2	**3**	**4**	9	**10**

Respuesta detallada.

Para completar la tabla es necesario observar que en los datos conocidos, el valor de la fuerza se obtiene multiplicando el estiramiento por 5, luego de la observación es fácil completar la tabla.

Al no identificar explícitamente el factor de proporción, las propiedades relacionadas con el mismo no son utilizadas:

Pregunta:

Un cubo de 5 cm de lado tiene un volumen de 125 cm^3. ¿Cuál será el volumen de un cubo de 10 cm de lado?

Respuesta detallada.

X = lado inicial del cubo

V = volumen inicial del cubo

X = 5 cm

$V = 125\ cm^3 = X^3 = (5\ cm)^3$

[1] El subrayado es nuestro

X’ = lado final del cubo

V’ = volumen final del cubo

X’ = 10 cm = 2 X

$V' = X'^3 = (2X)^3 = 8X^3 = 8(125\ cm^3) = 1000\ cm^3$

Cuando el lado del cubo se duplica, el volumen del cubo aumenta ocho veces.

Situaciones donde el factor proporción es negativo son confundidas con situaciones que corresponden a proporcionalidad inversa:

Pregunta:

Parte II: Sobre las algas productoras de gametos

1. ¿Podrías completar la siguiente tabla?

Concentración de oxígeno (ml por litro)	1	1,25	1,5	1,75	2
Número de algas productoras de gametos	**80**	75	**70**	65	**60**

Respuesta detallada.

La relación que aparece en la tabla es, al igual que el primer ejercicio de la parte1, una relación lineal, pero difiere en que ésta es una relación inversamente proporcional, ya que a medida que aumenta de manera constante la concentración de oxígeno disminuye de forma constante el número de algas productoras de gametos

Esto nos permite reportar que si bien los alumnos – docentes conocen el concepto “proporcionalidad directa”, poseen estrategias de cálculo relacionadas con él y reconocen las características de su representación gráfica (lineal como sinónimo de proporcional), lo *sobreutilizan* al reconocer como proporcionales magnitudes entre las que existe cualquier relación de crecimiento (o decrecimiento) simultáneo y lo *sobrevaloran* al decir que determinadas situaciones no tienen solución porque este concepto no es aplicable.

Pregunta:

La torre Eiffel mide 300 metros de altura, está hecha toda de hierro y pesa 8000 toneladas. Se quiere hacer una maqueta de la torre, también de hierro, que pese en total 1 kilo. ¿Qué altura deberá tener la torre de la maqueta?

Respuesta detallada.

No se puede determinar la altura de la maqueta ya que no existe una relación lineal del peso de la torre con su altura, el mayor peso está concentrado en la parte inferior de la torre.

Esto nos permite concluir que la idea intuitiva "a más, más: a menos, menos" puede conducir a errores si no va acompañada de una identificación del factor de proporción, de un análisis de cómo es encontrado dicho factor y de una interpretación del mismo en el contexto de la situación planteada.

En el Marco Teórico, al referimos a las concepciones en el sentido cognitivo [CSC] mencionamos la utilización por parte de los alumnos – docentes del concepto de función como una relación, correspondencia, asociación o aplicación entre elementos de conjuntos y no como una forma de representar un cambio o transformación.

Al identificar en las situaciones planteadas la presencia de un cambio se observa el tránsito por el Momento 1 planteado en el análisis epistemológico, aunque no se justifique o explicite la forma que ese cambio tiene. Pero la concepción de función como una asignación entre variables, hace que las funciones sean definidas y utilizadas para asignar a determinados valores de la variable independiente, el correspondiente valor de la variable dependiente y no como una forma de representar los cambios identificados.

Es posible que el identificar e interpretar en contexto el factor de proporción, permita entender el concepto de función como una forma de representar el cambio sufre la variable independiente al transformarse en la variable dependiente, y viceversa.

4.2. – La propiedad de linealidad en diferentes contextos. Representación y argumentos.

Como ya indicamos en el capítulo referido al diseño, en las secuencia 2 y 3, la intención era construir los modelos matemáticos $y = ax$ e $y = ax + b$ con el objetivo de poder utilizarlos como una herramienta de predicción.

4.2.1. Análisis de la linealidad en una secuencia escolar tradicional

La situación planteada en la secuencia 2 puede ser considerada del tipo tradicional. Se indicaban determinadas condiciones de concentraciones de oxígeno para el crecimiento y decrecimiento de dos tipos diferentes de poblaciones de algas y a partir de ahí se pedía que se completaran tablas, se representaran gráficamente los datos dados y encontrados, y se contestaran preguntas referidas al modelo elegido para la resolución de esta secuencia. En el análisis de las resoluciones correspondientes, encontramos que el modelo $y = ax + b$ fue el adoptado pero en la mayoría de los casos su elección no fue justificada:

Pregunta:

Parte I: Sobre las algas productoras de esporas

1. Completa la siguiente tabla:

Concentración de oxígeno (ml por litro)	1	1,25	1,5	1,75	2
Número de algas productoras de esporas		66		86	

Respuesta detallada.

Para completar la tabla, tome los datos 1.25 y 66 como el primer punto y 1.75 y 86 como el segundo punto, es decir: **P_1(1.25, 66)** y **P_2(1.75, 86)**, por los cuales pasa una recta la cual representa la asociación de éstos valores (tabla)

O se justifica la elección del modelo utilizando la noción intuitiva de proporcionalidad directa que ya mencionamos en el apartado anterior:

Pregunta:

Parte I: Sobre las algas productoras de esporas

1. Completa la siguiente tabla:

Concentración de oxígeno (ml por litro)	1	1,25	1,5	1,75	2
Número de algas productoras de esporas		66		86	

Respuesta detallada.

La relación que aparece en la tabla es una relación lineal (directamente proporcional), ya que a medida que aumenta de manera constante la concentración de oxígeno aumenta también de forma constante el número de algas productoras de esporas.

Observemos que los datos dados tal vez no sean suficientes para la elección de este modelo, sin embargo, esto no fue manifestado por ninguno de los alumnos – docentes que resolvieron la actividad (el modelo lineal fue el elegido sin que se hiciera explicita la posibilidad de utilizar otro tipo de modelo)

En la resolución de esta secuencia encontramos el tránsito por los cinco momentos identificados en el análisis epistemológico. Los elementos que nos permiten afirmar esto son: la identificación de las variables involucradas; la elección del modelo, en la que si bien el debate de lo lineal vs lo no lineal no está presente, implica identificar una forma de cambio; las distintas representaciones y el tránsito de una a otra; la elección de una de las formas de representación como la mejor manera de representar a las variables; y la utilización del modelo como herramienta de predicción.

En todas las resoluciones analizadas, y en las dos partes en que está dividida esta secuencia, el primer paso fue la obtención de la expresión algebraica, la fórmula, que se correspondía con los datos dados por tabla y dicha fórmula fue utilizada para dar respuesta a todas las preguntas presentes en la secuencia. Inclusive, en aquellas en las que se pedía una interpretación gráfica de los parámetros a y b de la expresión: $y = ax + b$

Pregunta:

En cada caso, indica cuáles deberían ser las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre el número de algas productoras de esporas y la concentración de oxígeno sea el dado:

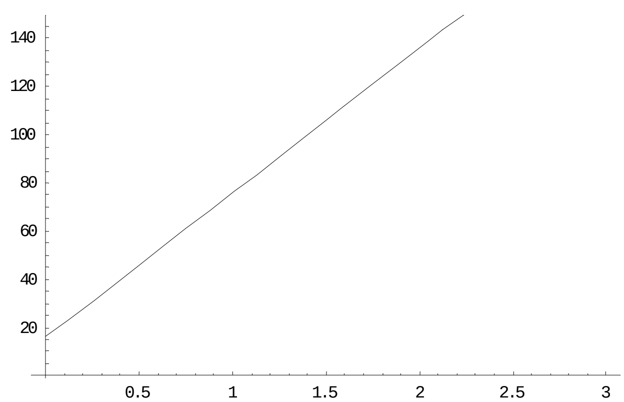


Gráfico 4.1

Respuesta detallada.

La pendiente de la recta

$$m = \frac{135 algas - 75 algas}{2ml/lt - 1ml/lt} = 60 \frac{algas}{ml/lt}$$

La ordenada al origen

$$b = 16 algas$$

por lo que la ecuación de la recta es

$$N = 60C + 16$$

Sobre este punto, en el foro de discusión, se argumentó la elección de este modelo a partir de la observación de una "característica" o de una cierta regularidad:

¿Cuál fue tu estrategia de resolución en esta secuencia? Y ¿por qué elegiste esa?

Hola a todos, mi opinión es: la estrategia de resolución que utilice giro alrededor de la expresión y = mx + b, ya que cada uno de los ejercicios mostraba esta característica[2], de hecho me tome la libertad de crear un pequeño programa (ya que me percate que las operaciones a realizar se repiten constantemente) precisamente para hallar la ecuación de una recta a partir de dos puntos contenidos en ella, asi como también, el hallar los valores de X o Y, segun sea el caso, a partir de la ecuación encontrada.
[Intervención de Carlos]

> Carlos, ¿qué característica mostraban los ejercicios que te hizo elegir esta expresión para la resolución de la secuencia? Saludos
> [Intervención de Mónica]
>
> > Hola, la característica fue la linealidad de cada caso, su representatividad siempre fue una recta, por ello la ecuacion y = mx +b se ajusta para poder realizar mis predicciones.
> > [Intervención de Carlos]

La estrategia de resolución que usé fue suponer una relación lineal entre las variables. Es así que calcule la pendiente y la ecuación de la recta que modelaba esta relación. Elegí esta estrategia debido a que observé en los datos cierta regularidad. Luego, comprobé que el modelo supuesto era consistente con los datos observados.
[Intervención de Diego]

[2] El subrayado es nuestro

Diego, ¿qué regularidad observaste que hizo que eligieras esta estrategia? Saludos

[Intervención de Mónica]

Hola. Observé que los valores de la concentración del oxígeno se incrementaban en 0.25. Los valores conocidos del número de algas también parecía que se incrementaban o (decrementaban) de manera constante. Esta es la regularidad que yo observé. Saludos

[Intervención de Diego]

En cuanto a las representaciones manejadas en la secuencia, en el foro de discusión el debate giró entorno a con cuál tipo de representación se obtuvieron los datos más fácilmente, cuál representa mejor la relación entre las variables y con cuál se puede hacer una predicción aproximada más rápidamente. Los estudiantes coincidieron que la tabla fue la más fácil para obtener los datos y la gráfica para predicciones aproximadas, pero que la fórmula es la que mejor representa la relación entre las variables. Justificaron estas respuestas por la exactitud que permite la fórmula:

Hola a tod@s, ¿Por qué si otro tipo de representaciones (tabla, gráfica) les resultaron más fáciles o rápidas o "visuales" les parece que la fórmula es la que mejor representa la relación entre las variables?

[Intervención de Mónica]

Hola Mónica, la razón de porque la ecuación es la mejor representación, pues para mi, la exactitud que involucra, nos brinda certidumbre en nuestro modelo matemático.

[Intervención de Jacome]

Porque la tabla y la gráfica permiten digamos un primer acercamiento, sin embargo la fórmula es el modelo matemático que permite trabajar con cualquier valor dentro del dominio y es más exacto.

[Intervención de Yolanda]

> *Hola* La tabla o la gráfica nos permiten encontrar valores adicionales fácilmente, pero, en ocasiones sólo de manera aproximada. Por el contrario, la fórmula nos permite encontrar cualquier valor adicional no tan fácilmente, pero, de manera exacta. Siempre y cuando en la fórmula se especifique claramente el dominio.
> [Intervención de Diego]
>
> Hola
> Las gráficas y las tablas, ayudan a tener un panorama general del problema, es decir, nos ayudan a "dar un vistazo", esa seria su ventaja. La desventaja de ambas es que pueden carecer de exactitud, como en algunas gráficas de la secuencia, por lo que el valor dado es aproximado. También puede resultar difícil extrapolar o interpolar datos. En cambio, la fórmula nos da la exactitud requerida, por lo que, aunque su obtención y aplicación pudiera ser compleja, ésta bien vale la pena.
> [Intervención de Jacome]

Al confrontar las resoluciones y participaciones en los foros de estos estudiantes con las respuestas que dieron en el cuestionario inicial, encontramos que si bien al momento de desarrollar este contenido en clase el aspecto algebraico aparece en los últimos lugares en cuanto al lenguaje al que se le da más importancia o al lugar ocupa a lo largo de la exposición, esto difiere al momento de analizar posibles respuestas en una evaluación ya que este aspecto es el que mayor porcentaje se le asigna. Entonces, esta confrontación parecería indicar que en el caso de las secuencias escolares del tipo tradicional no todos los tipos de representación tienen para el alumno - docente el mismo status y que el paso previo por el lenguaje verbal, gráfico o numérico antes de llegar a la fórmula es para poder darle diferentes interpretaciones a la misma e ir avanzando gradualmente en cuanto a exactitud o precisión. Es decir, caracterizar en contextos gráficos y/o numéricos pero formular y validar en contextos analíticos. A este aspecto volveremos a hacer referencia en el apartado 4.3 cuando nos refiramos a la naturaleza de las variables y al dominio y la imagen de las funciones.

4.2.2. Análisis de la linealidad en secuencias escolares no tradicionales

4.2.2.1 Utilizando el Programa SIRES

Antes de desarrollar la secuencia 3, los estudiantes trabajaron con un tutorial que les indicaba cómo instalar y utilizar el Programa SIRES. Una vez familiarizados con este programa, resolvieron la Secuencia 3.

En una primera instancia, el trabajo fue individual con la consigna de que no intercambiaran respuestas entre sus compañeros antes de enviar sus resoluciones.

Al igual que el análisis realizado para el caso de la secuencia 2, en la resolución de esta secuencia observamos el tránsito por los cinco momentos identificados en Sierpinska (1992) identificando el mismo tipo de elementos.

Si bien en las secuencias anteriores los alumnos-docentes habían utilizado software didáctico como son los graficadores, en el trabajo con el Programa SIRES es posible observar algunas características, podríamos decir propias de la interacción con este tipo de programas.

En principio, el contexto en el cual se realiza la experiencia. A diferencia de las secuencias anteriores, en la que los datos experimentales se daban como parte del enunciado, en el caso de SIRES, se presenta un “laboratorio virtual” en dónde se simula mediante el software una situación experimental a partir de la cual se obtienen los datos necesarios para dar respuesta a las preguntas planteadas en la secuencia. Entonces es posible observar que la interacción estudiante – interfase es diferente ya que permite una manipulación de los elementos que proporciona el programa, tanto para familiarizarse con el mismo como para obtener la información requerida en la secuencia.

En las secuencias anteriores los datos les eran proporcionados “sin ruido”, esto es, los datos aportados en las tablas eran proporcionales. Cuando los datos eran obtenidos por el estudiante, el ruido aparecía ya que los datos no eran estrictamente proporcionales y esto originaba que se manipularan los instrumentos de medición o los elementos del montaje para que los datos sí se ajustaran a un modelo lineal.

Pregunta:

¿Qué variables intervienen en este fenómeno? Describe cómo se relacionan

Respuesta detallada

En este ejercicio se relacionan dos variables: una variable es el peso, y otra es la deformación que sufre el resorte al colgarle dicho peso, donde se mide la posición de este portapesas. Al observar y explorar el programa Sires, se observa que la relación entre ellos es lineal, ya que a medida que se aumenta de manera constante el peso, también se aumenta la deformación del resorte. Esta deducción se hace a simple vista, pero como se aprecia en la tabla, no cumple con exactitud esta condición. Cabe mencionar que para este ejercicio utilicé el resorte más delgado, es decir el primer resorte presentado.

……

Debido a las observaciones preliminares, los datos obtenidos se vaciaron en la tabla. Aquí no se observa claramente alguna regularidad, ya que a aumentos constantes de pesos, aparentemente no hay aumentos constantes en la posición del portapesas. Esto se debe a las imperfecciones de los instrumentos usados y a las limitantes de los sentidos. Cabe mencionar que los puntos son obtenidos por observación, que aunque minuciosa, están sujetos a dichas imperfecciones y limitantes, y aunque estas se trataron de minimizar, representan al fin una aproximación al modelo.

Por otro lado, si bien en el análisis de estas resoluciones encontramos coincidencias con la resolución de la secuencia anterior: una vez obtenidos los datos, encontrar la expresión algebraica y utilizarla para dar respuesta a todas las preguntas de la secuencia, en el caso de la secuencia 3 también aparece como una posible estrategia de resolución la interpolación de datos:

Pregunta:

¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 70 gramos?

Respuesta detallada

La posición del portapesas se puede obtener interpolando y utilizando la ecuación.

Si interpolamos, y basándonos en una relación lineal, se observa que exactamente entre 60 y 80 se encuentra el 70, por lo que se puede deducir que entre el 49 y el 54 está el 51.5.

Por otro lado, con la ecuación obtenida, es fácil también obtener la posición del portapesas:

$$
\begin{aligned}
y &= 0.25x + 34 \\
y &= 0.25(70) + 34 \\
y &= 17.5 + 34 \\
y &= 51.5
\end{aligned}
$$

Por lo que se concluye que si se la colocan 70 gramos al portapesas, éste toma una posición de 51.5 mm.

El análisis de las participaciones en el foro, que fue organizado por los mismos alumnos con el objetivo de presentar un documento único que reportara la discusión que habían desarrollado, nos permite ver que el tema de la exactitud de las mediciones fue con el que comenzaron la discusión:

Hola compañeros

La secuencia 3 me pareció igual de interesante que las secuencias anteriores, pero, más fácil de realizar. El único problema que tuve fue con respecto a la precisión de mis mediciones usando la regla que proporcionan. Realicé varias mediciones hasta que tuve la certeza de que mis mediciones tenían cierta regularidad.

[Intervención de Diego]

Siguieron a este primer comentario participaciones en las que cada miembro del grupo explicó cuál fue su estrategia para encontrar las mediciones “exactas” que les permitieran asegurar que la forma de relación entre las variables presentes en el problema (peso y longitud del resorte) era lineal. En esta parte consideramos necesario observar que una de las actividades de la Secuencia 1 involucró la Ley de Hooke, o Ley del resorte, en la cual los estudiantes ya habían enunciado la relación de proporcionalidad directa que existe entre el peso que se agrega a una resorte y la longitud a la que llega el mismo. Resultado al que no recurren en ningún momento de la resolución.

Entendemos que esta manipulación de los instrumentos del Programa SIRES para lograr precisión en las mediciones se corresponde más con la necesidad de los estudiantes de encontrar una única fórmula que representara exactamente a todos datos observados, más que a una necesidad de justificar la elección del modelo lineal.

La discusión en el foro continuó refiriéndose a las herramientas tecnológicas que habían utilizado. A este punto nos referiremos más adelante en este mismo capítulo.

Para cerrar este foro se les pedía que entregaran en forma grupal la resolución de la secuencia que ya habían desarrollado individualmente. Las primeras discusiones en el foro giraron más alrededor de si las fórmulas que habían encontrado coincidían más que al tipo de argumentos que habían utilizado:

> Ya recibí tu secuencia 3, no coincidimos en los primeros ejercicios, pero, esto se debe a la inexactitud de nuestras mediciones, la escala de la regla nos impide mejores las mediciones
>
> [Intervención de Diego]

Finalmente, para la resolución grupal se consensúan algunas respuestas, pero esta secuencia presenta las mismas características que las individuales (se encuentra la fórmula y se la utiliza en el desarrollo de toda la secuencia). Esto es así en todas las actividades salvo en la última que implicaba una interpretación de las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre la longitud del resorte y el peso sea uno dado:

> Pregunta:
>
> En cada caso, indica cuáles deberían ser las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre la longitud del resorte y el peso sea el dado:

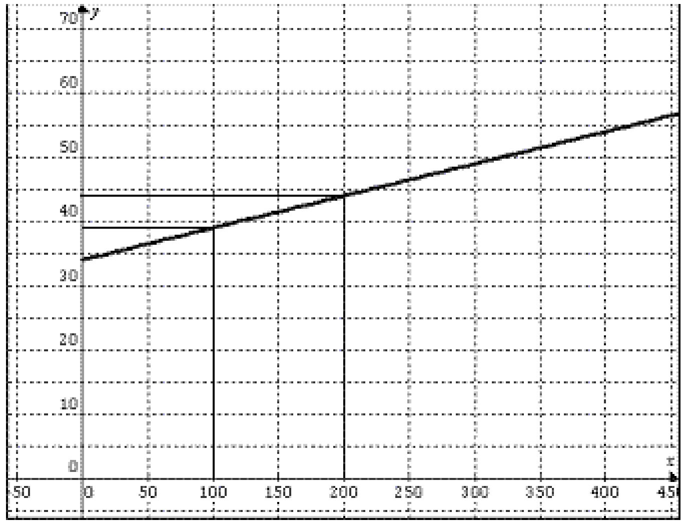


Gráfico 4.2

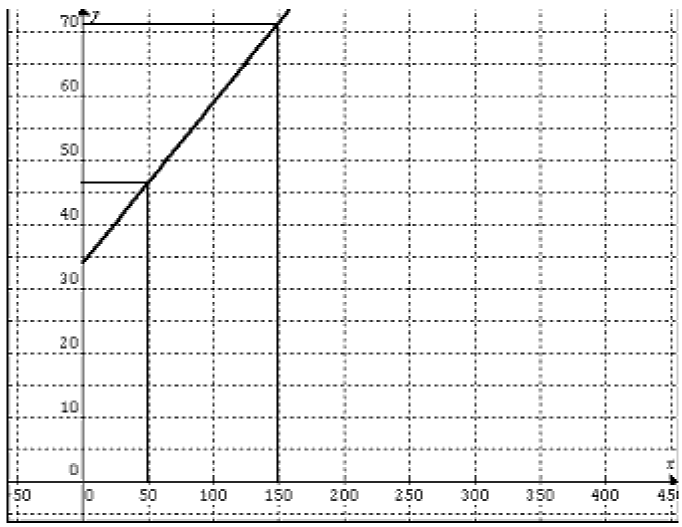


Gráfico 4.3

Respuesta detallada

Para P = 0 gr, L = 34 mm es la longitud inicial del resorte, sin peso.

Se toman dos puntos (100,39) y (200,44) para determinar

La pendiente $m = \frac{44mm - 39mm}{200gr - 100gr} = \frac{1}{20}\frac{mm}{gr}$, indica que el resorte se estira 1 mm por cada gr de peso.

La expresión algebraica para el modelo lineal $y = 0.05x + 34$

Para P = 0 gr, L = 46 mm es la longitud inicial del resorte, sin peso.

Se toman dos puntos (50,46) y (150,71) para determinar

La pendiente $m = \frac{71mm - 46mm}{150gr - 50gr} = \frac{1}{4}\frac{mm}{gr}$ indica que el resorte se estira 1 mm por cada gr de peso.

La expresión algebraica para el modelo lineal $y = 0.25x + 34$

Ambas gráficas representan resortes con la misma longitud inicial, sin peso, L=34 mm , pero con diferente elasticidad. El segundo resorte(0.25 mm/gr) es más elástico que el primero (0.05 mm/gr).

Entendemos que este tipo de software proporciona ambientes de simulación e interactividad para la actividad controlada de un alumno que aprende en la modalidad en línea. A pesar que su aplicación crea nuevas formas de interacción sin control por parte del profesor, consideramos que la posibilidad de llevar la modelación a este tipo de escenarios, la ventaja de poder manipular tanto el fenómeno como su reproducción, la continua disponibilidad de los experimentos, y la posibilidad de interactuar a distancia, (Martínez, Arrieta y Canul, 2005) son elementos suficientes para afirmar que este tipo de interfaces son herramientas útiles para la construcción de conocimiento y que las actividades que diseñen en base a uso y aplicación se constituyen en el centro del aprendizaje en línea.

4.2.2.2 Aplicando el método de las operaciones

Este método permite bosquejar gráficas a partir de un análisis visual que involucra simultáneamente herramientas analíticas y numéricas. La expresión “operar gráficamente” hace referencia a las operaciones entre funciones, pero desde una perspectiva gráfica. Cabe aclarar que este método no pretende ser un recetario o una lista de pasos a seguir para que el estudiante grafique correctamente. Uno de sus objetivos principales es propiciar la relación existente entre objetos matemáticos aparentemente disjuntos, esto es, vincular y transitar entre diversas representaciones de una función (Cantoral y Montiel, 2001)

En la Secuencia 4 los alumnos, con la guía de una presentación en PowerPoint, y a partir de la gráfica primitiva o inicial $f(x) = x$ conocida como función identidad, se familiarizaron con este método a partir de las operaciones suma y producto por una constante. Así, por ejemplo, la función $y = x + B$ se interpretó como la función identidad más la función constante. De este modo se analizaron las características de la gráfica $y = x + B$ e $y = A(x + B)$ según los posibles valores de las constantes A y B.

Es en este tipo de secuencias no tradicionales, y por las posibilidades que provee el escenario *en línea*, es donde observamos un cambio en el tipo de argumentos, estrategias y formas de explicar los procedimientos.

Pregunta:

¿Cómo defines el movimiento de la recta $y=x+B$ en relación al cambio en el parámetro B?

Respuesta detallada

El movimiento de la recta $y=x+B$ en relación con el parámetro B hace que las rectas generadas sean todas paralelas, ya que dicho parámetro desplaza a la recta hacia arriba o hacia abajo, cortando al eje y exactamente en B, pero nunca hace que la recta cambie de dirección (ya que la pendiente de la recta, y por ende, la inclinación de ésta será siempre la misma).

Gráficamente se observa lo dicho anteriormente:

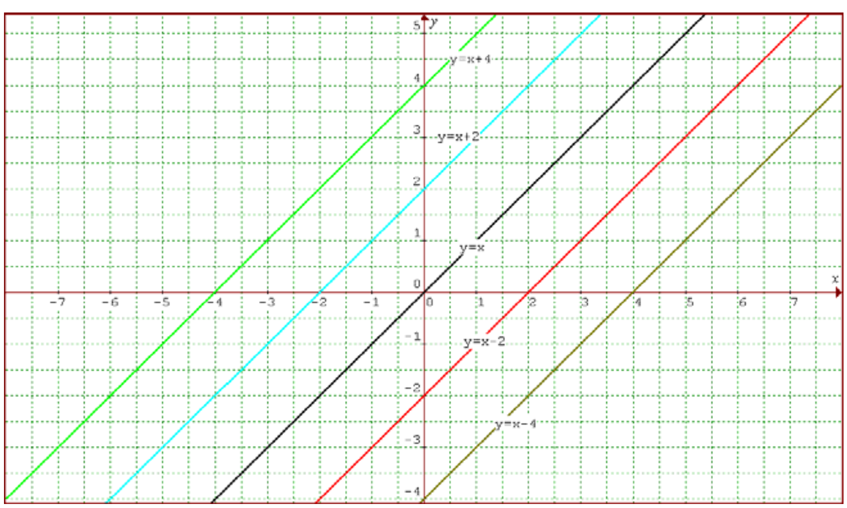


Gráfico 4.4

Pregunta:

¿Cómo se relaciona el cruce con el eje *x* con el valor del parámetro *B*?

Respuesta detallada

Vamos a basarnos en el gráfico anterior, es decir, en soluciones particulares, para llegar a conclusiones generales. Se observa en la recta $y=x-4$ que el corte con el eje *y* se da en el punto (0,-4), mientras que el corte con el eje *x* se da en el punto (4,0); el corte de la recta $y=x-2$ con el eje *y* se da en (0,-2) y el corte en el eje *x* se da en (2,0). Por otra parte, se ve que la recta $y=x+4$ corta al eje *x* en la coordenada (-4,0) y al eje *y* en (0,4), a la vez que la recta $y=x+2$ corta a los ejes *y* y *x* en (0,2) y en (-2,0), respectivamente. Por último, la recta $y=x$ corta al eje *x* en el origen, es decir en (0,0).

De aquí se aprecia una regularidad: cuando el corte en *x* (raíz) se da en un valor positivo sobre el eje, en el corte en *y* (intercepto) y en el término independiente de la ecuación de la recta aparece el mismo valor, pero con signo negativo, y cuando el corte en el eje *x* (raíz) está en un valor negativo, en el término independiente de la ecuación de la recta aparece con signo positivo. Se puede concluir que, cuando el corte de la recta se de en la coordenada B, en la ecuación de la recta aparecerá como –B.

En otras palabras, la ecuación de la recta $y=x+B$, donde *B* representa el valor donde la recta corta al eje *y*, tendrá siempre como raíz (o corte en el eje *x*) el valor $-B$.

Pero ¿por qué siempre? Porque, como lo explicaba anteriormente, el parámetro *B* sólo afecta en movimiento de la recta hacia arriba y hacia abajo, y de ninguna manera afectará la inclinación de ésta.

Pregunta:

Determina los signos (y combinación de ellos) de los parámetros A y B en la función y=A(x+B) para que la recta cumpla, de ser posible, las siguientes condiciones:

a. Que pase sólo por los cuadrantes I y III
b. Que pase sólo por los cuadrantes II y IV
c. Que pase por los cuadrantes I, II y III

d. Que pase por los cuadrantes II, III y IV

e. Que pase por los cuadrantes I y II

f. Que pase por los cuadrantes I, III y IV

g. Que pase por los cuadrantes I, II y IV

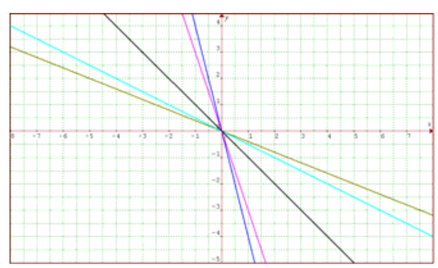
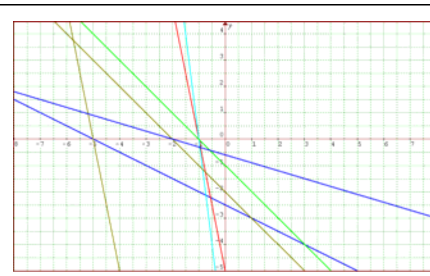
h. Que pase por los cuadrantes III y IV

i. Que pase por todos los cuadrantes

j. Que pase sólo por un cuadrante

Respuesta detallada

La mejor forma de determinar los signos es hacer una tabla donde tengan todas las posibles combinaciones que se pueden presentar del comportamiento gráfico de la función *y=A(x+B)*, donde los parámetros *A* y *B* varían.

Condición	PARÁMETRO *A*	PARÁMETRO *B*	LA RECTA *y=A(x+B)* PASA POR LOS CUADRANTES	EJEMPLOS
1	*A<0*	*B<0*	I, II y IV	
2	*A<0*	*B=0*	II y IV	
3	*A<0*	*B>0*	II, III y IV	

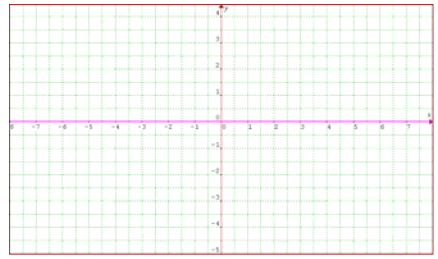
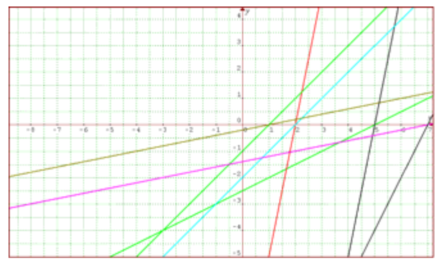
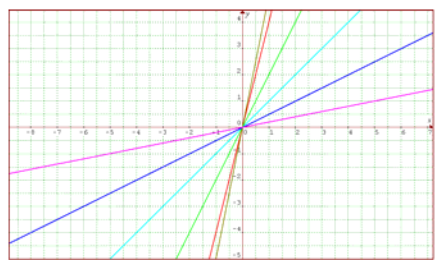
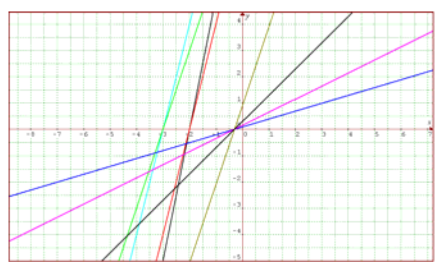
4	*A=0*	*B<0* *B=0* *B>0*	La función se transforma a una función constante *y=0*. Aquí se puede decir que la gráfica de función está en la frontera de los cuatro cuadrantes.	
5	*A>0*	*B<0*	I, III y IV	
6	*A>0*	*B=0*	I y III	
7	*A>0*	*B>0*	I, II y III	

Tabla 4.1

Con esta información, resulta fácil encontrar respuesta a los cuestionamientos presentados

a. Que pase sólo por los cuadrantes I y III

Tal como aparece en la condición 6, para que la gráfica pase por los cuadrantes I y III el parámetro A debe de ser mayor que cero y el parámetro B debe de ser igual a cero, es decir $A>0$ y $B=0$.

b. Que pase sólo por los cuadrantes II y IV

Tal como aparece en la condición 2, para que la gráfica pase por los cuadrantes II y IV el parámetro A debe de ser menor que cero y el parámetro B debe de ser igual a cero, es decir $A<0$ y $B=0$.

c. Que pase por los cuadrantes I, II y III

Tal como aparece en la condición 7, para que la gráfica pase por los cuadrantes I, II y III el parámetro A debe de ser mayor que cero y el parámetro B debe de ser mayor que cero, es decir $A>0$ y $B>0$.

d. Que pase por los cuadrantes II, III y IV

Tal como aparece en la condición 3, para que la gráfica pase por los cuadrantes II, III y IV el parámetro A debe de ser menor que cero y el parámetro B debe de ser mayor que cero, es decir $A<0$ y $B>0$.

e. Que pase por los cuadrantes I y II

Este inciso puede ser interpretado de dos formas:

La primera es cuando la función pasa solamente por los cuadrantes I y II. Como no aparece en la tabla una posible combinación para cuando la recta pase por los cuadrantes I y II, se concluye que no existe tal combinación por la que la función $y=A(x+B)$ pase solamente por estos cuadrantes.

La segunda es que la función pasa por lo menos por los cuadrantes I y II. En este caso, tal y como lo muestra la tabla, en las condiciones 1 y 7, existen dos posibilidades de que esto ocurra, cuando los parámetros A y B sean menores que cero, es decir $A<0$ y $B<0$, *o* cuando los parámetros A y B sean mayores que cero, es decir $A>0$ y $B>0$.

f. Que pase por los cuadrantes I, III y IV

Tal como aparece en la condición 5, para que la gráfica pase por los cuadrantes I, III y IV el parámetro A debe de ser mayor que cero y el parámetro B debe de ser menor que cero, es decir $A>0$ y $B<0$.

g. Que pase por los cuadrantes I, II y IV

Tal como aparece en la condición 1, para que la gráfica pase por los cuadrantes I, II y IV los parámetros A y B deben ser menores que cero, es decir $A<0$ y $B<0$.

h. Que pase por los cuadrantes III y IV

Este inciso puede ser interpretado de dos formas:

La primera es cuando la función pasa solamente por los cuadrantes III y IV. Como no aparece en la tabla una posible combinación para cuando la recta pase por los cuadrantes III y IV, se concluye que no existe tal combinación por la que la función $y=A(x+B)$ pase solamente por estos cuadrantes.

La segunda es que la función pasa por lo menos por los cuadrantes III y IV. En este caso, tal y como lo muestra la tabla, en las condiciones 3 y 5, existen dos posibilidades de que esto ocurra, cuando el parámetro A sea menor que cero y el parámetro B sea mayor que cero, es decir $A<0$ y $B>0$ o cuando el parámetro A sea mayor que cero y el parámetro B sea menor que cero, es decir $A>0$ y $B<0$.

i. Que pase por todos los cuadrantes

Tal como aparece en la condición 4, para que la función pase por todos los cuadrantes (o al menos por los límites de estos) es necesario que el parámetro A sea igual a cero, no importando que valor tome el parámetro B

j. Que pase sólo por un cuadrante

La función no puede pasar por un solo cuadrante, ya que es continua y no existen restricciones previas de la función.

Con la suma y multiplicación de constantes a la función primitiva es posible ubicar cualquier recta en el plano, es decir, es posible construir una familia de funciones *lineales*. Entonces es posible operar con ellas, en tanto ya fueron construidas. Por consiguiente, las actividades de la secuencia 5 continuaron con operaciones gráficas entre rectas.

Pregunta

Con un ejemplo (dos rectas cualesquiera) muestra en los registros numérico, gráfico y algebraico, que la suma de dos rectas es también una recta.

Respuesta detallada

Para mostrar, por medio de un ejemplo, que la suma de dos rectas da como resultado otra recta, manejaré la recta uno como $y_1 = 2x - 4$ y la recta dos como $y_2 = -0.5x + 2$ (ambas rectas serán llamadas rectas generadoras). Utilizaré los tres registros de manera simultánea (el numérico, el gráfico y el algebraico), a fin de visualizar mejor el resultado.

Vamos a graficar ambas rectas:

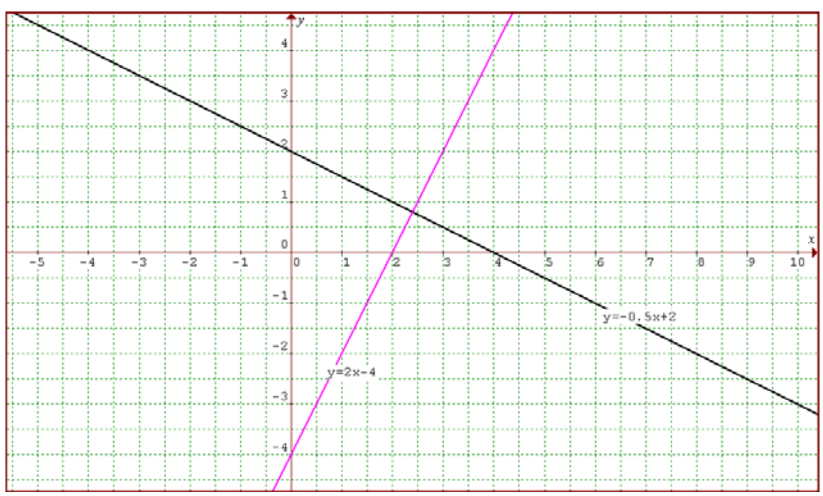


Gráfico 4.5

A partir de las rectas, podemos encontrar la gráfica de la ecuación de la recta que resulta de sumar ambas ecuaciones, la que llamaremos recta suma. La recta suma tiene como característica que cada punto sobre ella es resultado de la suma de las alturas con respecto al eje de las abscisas de las rectas generadoras, en esa misma coordenada *x*

Por ejemplo, cuando *x=0* la altura de la recta uno con respecto al eje *x* es igual a -4, mientras que la altura de la recta dos es igual a 2, por lo que la suma de las dos alturas de las rectas generadores es igual a $(-4)+(2)=-4+2=-2$, por tanto un punto de la recta suma se encuentra en (0,-2). Gráficamente:

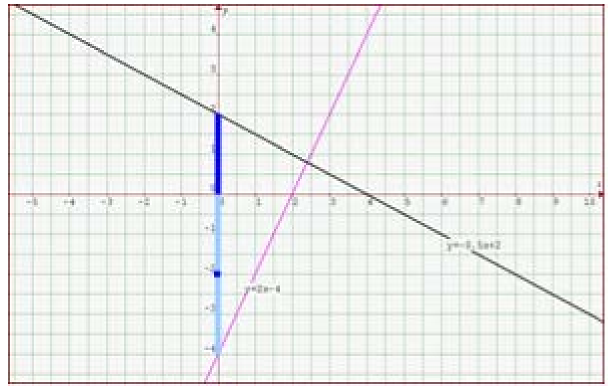


Gráfico 4.6

Ahora, cuando *x=2* es claro que la altura de la recta uno con respecto al eje de las abscisas es 0, mientras que la altura de la recta dos con respecto al eje *x* es igual a 1, que hace que la suma de las dos alturas de las rectas generadoras es igual a 1, por lo que
otro punto de la recta suma se encuentra en (2,1). Gráficamente:

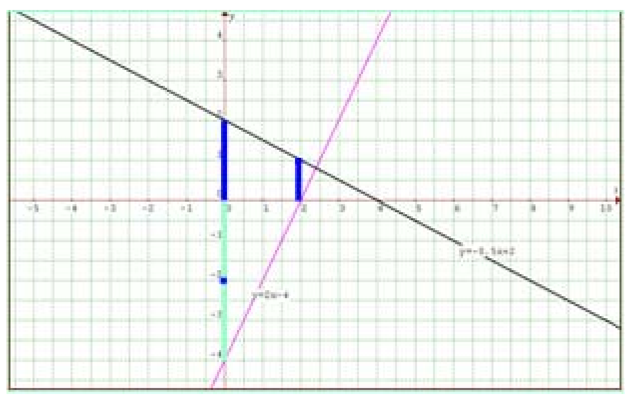


Gráfico 4.7

Por último, cuando *x=4* es claro que la altura de la recta uno con respecto al eje de las abscisas es 4, mientras que la altura de la recta dos con respecto al eje *x* es igual a 0, que hace que la suma de las dos alturas de las rectas generadoras es igual a 4, por lo que otro punto de la recta suma se encuentra en (4,4). Gráficamente:

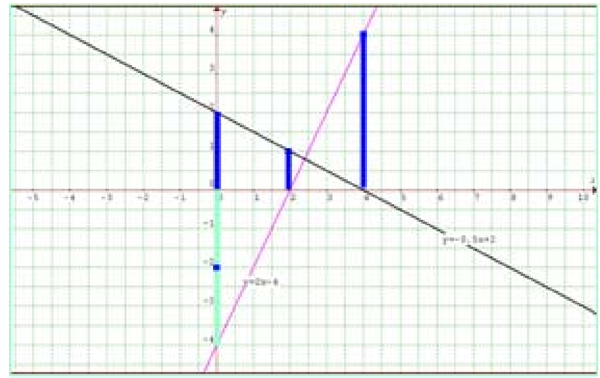


Gráfico 4.8

Uniendo los tres puntos encontrados, (0,2), (2,1) y (4,4), se encuentra la recta suma

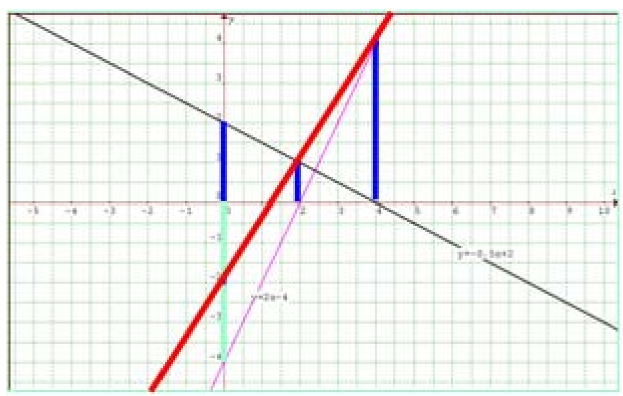


Gráfico 4.9

Para encontrar esta ecuación de la recta se utiliza la ecuación de la recta forma dos puntos. Si $x_1=0$, $y_1=-2$, $x_2=2$, $y_2=1$ entonces:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$$

$$y - (-2) = \frac{(1)-(-2)}{(2)-(0)}\left(x - (0)\right)$$

$$y + 2 = \frac{3}{2}\left(x - 0\right)$$

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

$$y = 1.5x - 2$$

Por lo que la ecuación de recta suma es igual a $y = 1.5x - 2$

Comprobando el resultado anterior, se tiene que la recta suma es igual a la recta uno más la recta dos, es decir:

$$recta\ suma = recta\ uno + recta\ dos$$
$$y_s = y_1 + y_2$$
$$y_s = (2x - 4) + (-0.5x + 2)$$
$$y_s = 2x - 4 - 0.5x + 2$$
$$y_s = 1.5x - 2$$

En el foro que siguió a la resolución y entrega de esta secuencia, la discusión giró entorno la tipo de lenguaje que se utiliza en este tipo de secuencias al tratar de expresar qué es lo que se ve, cómo este tipo de lenguaje puede ser utilizado para interpretar y construir significados, y cómo el Discurso Matemático Escolar se vería modificado si prioriza el lenguaje gráfico.

En la primera parte de este foro, los alumnos coincidieron que el tipo de expresiones que probablemente los alumnos utilizarían en las resoluciones de estas secuencias serían útiles para una introducción del tema pero que luego buscarían formalizar con términos adecuados las nociones allí tratadas.

Ante una actividad de esta naturaleza (presentación-secuencia4 y 5, operaciones gráficas) el estudiante probablemente usará un lenguaje ordinario (o más natural) para expresar lo que ve. Por ejemplo, podría decir inclinación en lugar de pendiente, acostada en lugar de horizontal, etc. ¿Cómo usarías este tipo de expresiones para interpretar y construir significados?

[Intervención de Mónica]

Hola a todos, esta pregunta me parece muy interesante, ya que se refiere al aspecto comunicación docente-alumno, y como lo has indicando, la mayoría de los estudiantes emplean un lenguaje más natural (informal) para referirse a los objetos o conceptos matemáticos, y creo que es válido que el docente emplee este lenguaje porque permitiría una mejor comunicación con el estudiantado, sin olvidar obviamente que tenemos la obligación de hacerles ver más adelante cuales son los términos adecuados que deben de emplear. Considero, quizás me equivoque pero la relación docente-alumno debe ser cordial, amena, de confianza, y mucho más

atributos (y sobre todo demostrar al alumno que uno tiene dominio sobre el tema) que van a permitir que se de una comunicación más efectiva, permitiendo así, que el proceso enseñanza-aprendizaje cumpla con su propósito. El uso de estas expresiones las utilizaría en la parte inicial de un tema, y conforme vaya avanzando les mencionaría los términos correctos, sin censurar la manera en que ellos hacen referencia a estos objetos, en otras palabras, de manera gradual irlos conduciendo a la terminología adecuada. Creo que si dejamos un poco la formalidad, tendremos mayor atención de los alumnos.
[Intervención de Carlos]

…..

Desde mi punto de vista, cuando un alumno logra describir mediante un lenguaje ordinario, lo que observa mediante una serie de ejercicios o secuencias, no tendrá problemas para comprender y construir significados de los conceptos matemáticos. Si un alumno es capaz de identificar la inclinación de una recta en ciertas actividades, será fácil para él, construir el significado de pendiente de una recta. Me parece que lo más importante es diseñar esas actividades o secuencias que le permitan observar y describir mediante un lenguaje natural las ideas matemáticas.
[Intervención de Diego]

…..

Al inicio de abordar el tema es importante usar estas expresiones que le son familiares al alumno y que representan algo para él, pero a la vez hay que ir traduciendo este lenguaje informal a un lenguaje matemático.
[Intervención de Yolanda]

> De acuerdo Yolanda, aunque para mí la parte más importante es la informal. Si un alumno comprende un concepto mediante el uso de lenguaje cotidiano, no será difícil formalizar este concepto.
> [Intervención de Diego]

En la segunda parte del foro, los alumnos coinciden que si el Discurso Matemático Escolar priorizara el lenguaje gráfico esto ayudaría a la comprensión de conceptos fundamentales, sobre todo del Cálculo, y sería necesaria la incorporación de TICS.

Un Discurso Matemático Escolar (DME) tradicional utiliza las tablas como introducción al tema de función, las gráficas como recurso ilustrativo y prioriza el trabajo con fórmulas y algoritmos. Si el DME priorizara el lenguaje gráfico, ¿cuáles serían las modificaciones más notorias de dicho discurso?
[Intervención de Mónica]

Si el discurso matemático escolar priorizara el lenguaje gráfico, pienso que los alumnos comprenderán mejor las ideas matemáticas. Creo que la introducción del tema de función se puede hacer usando primeramente el lenguaje gráfico. Estoy pensando que una secuencia adecuada para llevar a cabo lo anterior sería: Visualizar gráficas de rectas, de parábolas, de cúbicas. Identificar características y relaciones entre las variables involucradas en estas gráficas. Modificar estos gráficos para generalizar comportamientos y encontrar expresiones algebraicas asociadas a los gráficos. Trabajar con problemas que involucren el manejo de datos, identificando el tipo de gráfico que pudiera asociarse con el problema. Proponer un modelo que resuelva el problema.
[Intervención de Diego]

Estoy de acuerdo con Diego efectivamente la priorización del lenguaje gráfico traería muchos beneficios, añadiendo a este comentario, por ejemplo el empleo de applets (java) que permiten la interactividad con la graficación, esto permitiria que el alumno tuviese una mejor abstracción del concepto, ya que depende de las modificaciones que el mismo alumno sugiere, lo que le permitirá establecer expresiones algebraicas para la definición del modelo matemático. Entonces, se intuye la necesidad de la inclusión de las TICS en la enseñanza de la matemática, con esto quiero decir que el DME deberá contemplar el empleo de las computadoras.
[Intervención de Carlos]

….

> Estoy de acuerdo con Carlos, si se priorizara el lenguaje gráfico se tendrían que usar softwares como Cabri o Geometers'Scketchpad, los cuales no solamente los usan las computadoras, sino las calculadoras graficadoras. Para que el alumno pueda explorar gráficamente el comportamiento de rectas, parábolas, etc. cuando se varían las variables o parámetros que las generan. Para que el elumno pueda hacer conjeturas y predicciones.
> [Intervención de Yolanda]
>
> Otro punto importante donde se mejoraría el DME, es en la comprensión general del curso de cálculo, y en la motivación de los estudiantes sobre esta área. Cuando los alumnos ven los comportamientos gráficos de las funciones, y entienden las relaciones que guardan sus parámetros, ellos se motivan al resolver algo que entienden, y por ende, les resulta atractivo este tipo de aprendizaje, siendo mucho más significativa esta forma de aprender que la tradicional resolución de grandes volúmenes de algoritmos, que bien los enseña a mecanizar, ellos no entienden para qué están haciendo esto, y ni siquiera pueden llegar a generalizar.
> [Intervención de Jacome]
>
> El abordar un concepto matemático desde un enfoque gráfico, desde luego usando el apoyo de algún software, daría al alumno la oportunidad de ser el protagonista principal en este discurso y no un simple espectador como en la enseñanza tradicional.
> [Intervención de Yolanda]

Luego de estas discusiones, el foro cerró con la siguiente actividad:

> Explica con argumentos exclusivamente gráficos (puedes anexar archivos: Word, JPG, PPT, etc.), por qué se pierde la linealidad al multiplicar dos rectas.
> [Intervención de Mónica]

Es en la resolución de esta tarea en donde explícitamente aparece la confrontación de la linealidad versus la no linealidad y son expresadas claramente las características que permiten identificar la linealidad como forma de relación.

El producto de dos rectas no constantes no puede resultar otra línea recta, ya que, al multiplicar ambas rectas, se multiplican sus alturas en los diferentes puntos de *x.* Veamos un ejemplo comparativo, cuando se suman dos rectas y cuando se multiplican.

Supongamos que tenemos dos rectas generadoras, en este caso paralelas, por ejemplo $y_1 = -x$ y $y_2 = -x + 2$

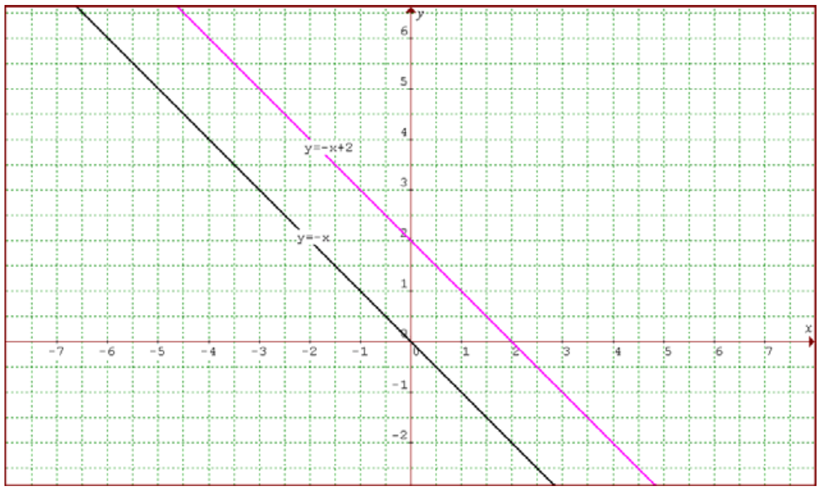


Gráfico 4.10

Si sumamos las alturas de las rectas cuando estas son positivas, la altura de la recta resultante es positiva.

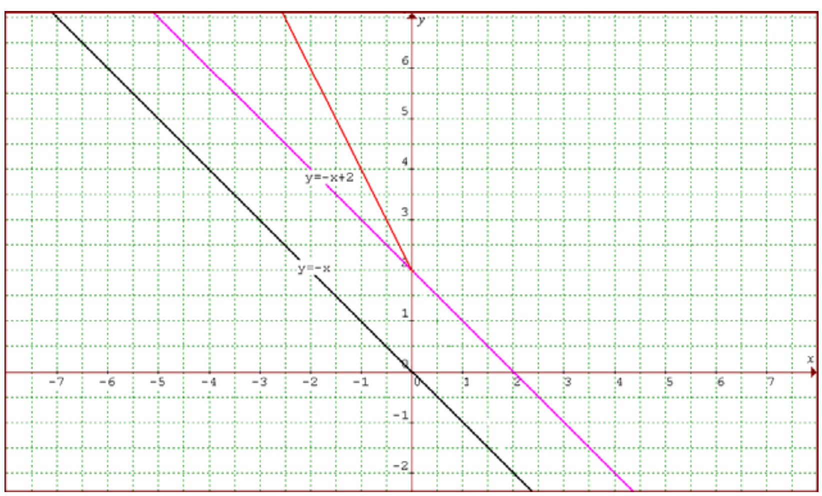


Gráfico 4.11

Cuando se suman las alturas de las rectas cuando una es positiva y la otra negativa, la altura de la recta resultante toma altura positiva cuando las alturas de la recta superior son mayores (en valor absoluto) que las de la inferior, y toma altura negativa cuando las alturas de la recta inferior son mayores (en valor absoluto) que las de la superior.

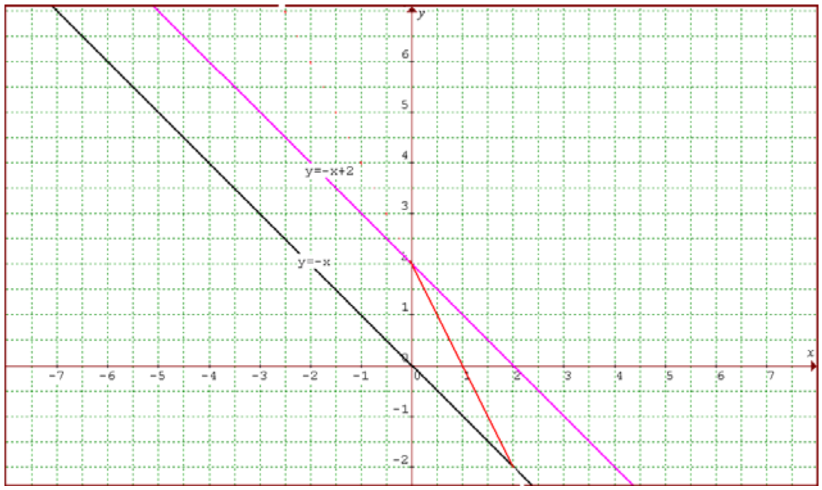


Gráfico 4.12

Si sumamos las alturas de las rectas cuando estas son negativas, la altura de la recta resultante es negativa

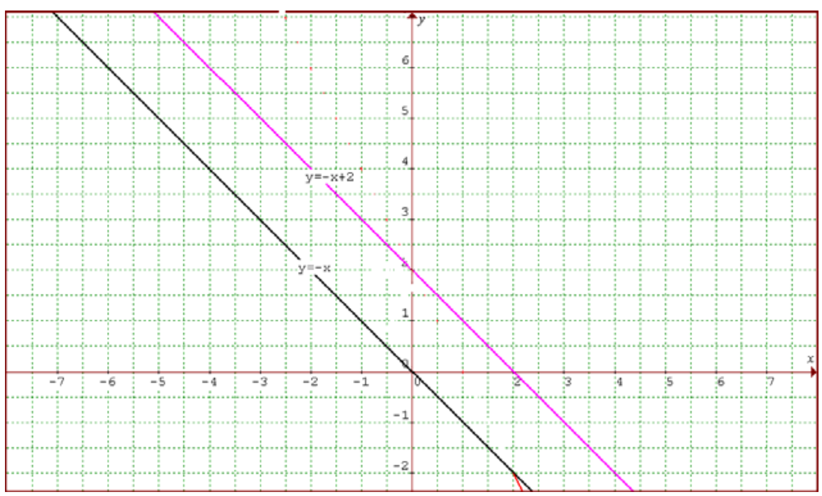


Gráfico 4.13

Esto no sucede cuando se multiplican las rectas. Observemos:

Cuando se multiplican las alturas positivas de estas rectas la altura de la “recta resultante” será positiva.

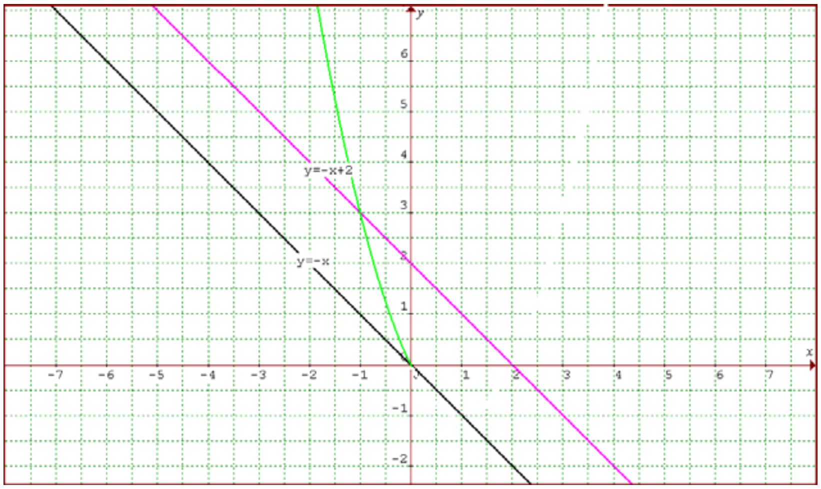


Gráfico 4.14

Cuando se multiplican las alturas negativas de estas rectas la altura de la “recta resultante” será positiva.

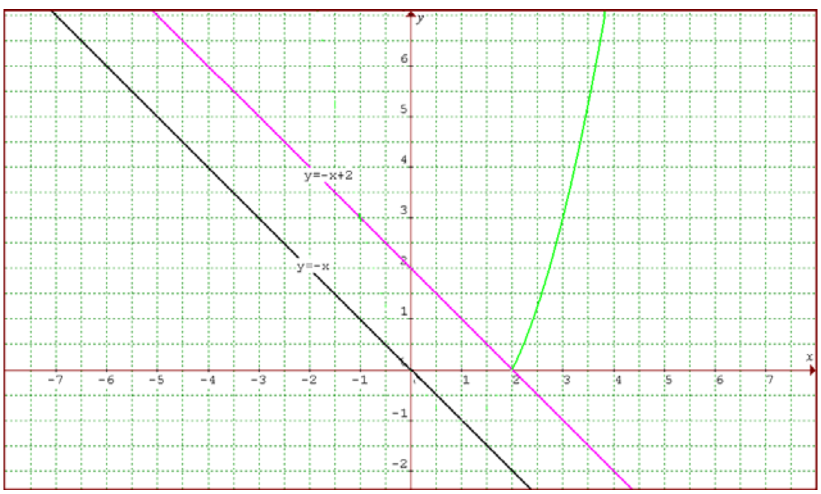


Gráfico 4.15

Y cuando se multiplican la altura positiva de una recta con la altura negativa de la otra se obtiene como resultado alturas negativas. ¿Cómo serían estas alturas?

Queda claro que la única forma en que coincidan los trazos obtenidos es por medio de una curva.

El escenario en línea y la modalidad asincrónica les dio a los alumnos - docentes la oportunidad de usar diferentes herramientas didácticas que les permitieron ilustrar sus explicaciones escritas, usando diferentes registros de representación. Sin embargo, observemos que no basta con obtener la gráfica de las funciones con un software, sino que hay *manipulación* de los objetos a través del trazo de ordenadas usando rectas verticales de colores y se los relaciona con sus representaciones numéricas y algebraicas.

El cambio de argumentos, estrategias y formas de explicitar los procedimientos que se pone de manifiesto en la resolución de estas secuencias escolares no tradicionales nos lleva concluir que este cambio es el que permite hacer explícitas las características de la linealidad como propiedad de la relación funcional de dos variables. Características que observamos que no son del todo explícitas al adoptar el modelo lineal en la resolución de secuencias escolares tradicionales.

Por otro lado, entendemos que el priorizar el lenguaje gráfico fue lo que hizo posible poner de manifiesto este cambio a la hora de justificar respuestas, desarrollos o procedimientos.

La confrontación de las participaciones en los últimos foros y las respuestas dadas al primer cuestionario del curso nos permite reportar que se obtuvo un cambio en la *actividad matemática escolar* de nuestros alumnos - docentes logrando que reflexionaran sobre su propio conocimiento y sobre su práctica docente, lo cual es uno de los propósitos de su formación como matemáticos educativos.

4.3. – Naturaleza de las variables. Sobre el dominio y la imagen de las funciones.

Para este apartado, el análisis lo hicimos a partir de las participaciones de los alumnos - docentes en los foros de discusión relacionados con cada secuencia, ya que es allí donde encontramos las reflexiones referidas al tipo de variable y a las características del dominio y la imagen que eligieron para cada actividad.

Con respecto a al naturaleza de las variables, encontramos unánimemente que en las participaciones de los estudiantes se considera por definición que los modelos matemáticos son continuos, pero fueron diferentes las respuestas acerca de la validez del modelo para el caso de que una o ambas variables sean discretas.

¿Cómo explicarían la elección y el uso de un modelo aún en problemas donde alguna (o ambas) variables a estudiar son discretas?
[Intervención de Mónica]

Para elegir y usar un modelo, por lo general supongo que las variables son continuas. Comparo e identifico los datos con los modelos polinomiales, exponenciales, trigonométricos, etc., que conozco. En caso de que una o ambas variables sean discretas, creo que sería muy difícil modelarla mediante una expresión algebraica (los polinomios son continuos), creo que no habría una representación en forma de fórmula. En estos casos, las representaciones gráficas o tabulares nos sugerirían el comportamiento de los datos. Trataré de buscar ejemplos, para comprender mejor la pregunta y argumentar.
[Intervención de Diego]

…..

Hola Mónica considero que todos los modelos matemáticos por definición son continuos, sin embargo, al estar manejando el programa "Sires" (secuencia 3), me percate que los valores de las pesas son discretos, entonces puedo asumir que mi modelo matemático donde voy a involucrar los pesos de las "pesas" será discreto, pero como lo dije antes, los modelos matemáticos por definición son continuos, entonces en la definición del dominio de mi modelo matemático tendre que ser explicito al mencionar el tipo de variable involucrada, por ejemplo mi dominio de solo valores del conjunto de numeros naturales, ahi es donde le doy presencia de modelo matemático discreto.
[Intervención de Carlos]

Muy buena pregunta. Creo que al igual que todos, partimos del supuesto de continuidad de variables, por lo que todo nuestro desarrollo está sustentado sobre

esta premisa. Esto puede explicar la elección de un modelo. También la regularidad observada en la tabla proporcionada ayuda a predecir el siguiente estado partiendo del estado actual, es decir, al utilizar un modelo continuo sobre datos discretos, y al observar que dicho modelo funciona para estos datos discretos, nos ayuda a encontrar estos valores. En otras palabras, el utilizar un modelo continuo es válido para cuando se trabaja con datos discretos, sólo para cuando los datos discretos son válidos. Para cuando el modelo arroje un valor que no sea discreto, este puede servir de aproximación. Por ejemplo, si basados en el modelo lineal continuo tenemos como resultado 3.978 algas, este valor representa una aproximación, pudiéndose concluir, basándose en el contexto de la situación problema que hay 3 algas, ¿y que paso con el 0.978? podríamos decir que está a punto de formarse otra.
[Intervención de Jacome]

Otro elemento que justifica la continuidad de los modelos lo encontramos en las respuestas dadas al cuestionario inicial, en donde las gráficas que correspondían a funciones discretas no eran identificadas como funciones porque la condición de existencia no se cumplía.

En tres de las cuatro resoluciones analizadas de la secuencia 2 encontramos que el dominio y la imagen dados en el caso de gráfica y en el de la fórmula eran diferentes, aunque se tratara de la misma función.

Pregunta
¿Podrías dar una fórmula algebraica para expresar el número de algas productoras de esporas para una concentración c de oxígeno? En caso afirmativo, indica dominio e imagen

Respuesta detallada
Si. Como ya se mencionó anteriormente, la expresión matemática que relaciona la concentración de oxígeno y el número de algas productoras de esporas está dada

por $y = 40x + 16$, donde x representa a la concentración de oxígeno y y a la cantidad de algas productoras de esporas.

Los valores que puede tomar x deben de ser siempre mayores o iguales a cero, ya que valores negativos de x no tienen sentido en el contexto, por que se puede observar a las algas sin aplicar oxigeno, lo que representaría el valor cero. En teoría se puede aumentar indefinidamente la concentración de oxígeno. Matemáticamente, dado que x representa a la concentración de oxígeno, los valores que puede tomar esta variable, y que representan del dominio de la función $y = 40x + 16$ son todas las x tales que $x \geq 0$, y visto como un intervalo $[0, \infty)$.

Por otra parte, dado que $x \geq 0$, los valores que puede tomar y serán de 16 en adelante, es decir, la imagen de la función $y = 40x + 16$ es $y \geq 16$, y visto como un intervalo $[16, \infty)$.

Pregunta

Representa gráficamente la relación entre la concentración de oxígeno y el número de algas productoras de esporas sobre un sistema de ejes cartesianos.

¿Cuál es el dominio y la imagen de la gráfica que realizaste?

¿Tu respuesta coincide con la que diste en el punto 6? ¿Por qué?

Respuesta detallada

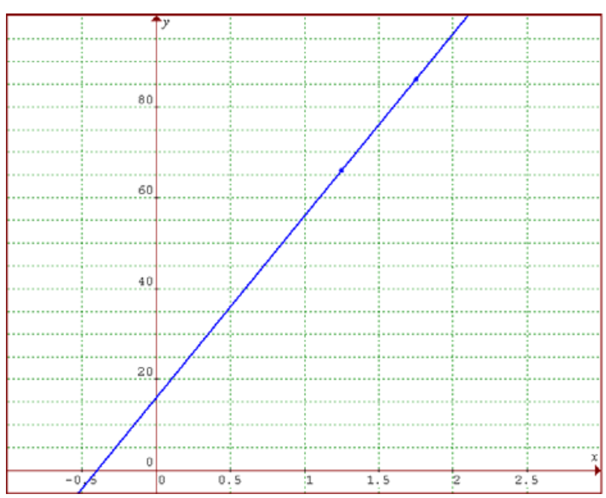


Gráfico 4.16

> Si sólo se estudia la gráfica, sin tomar en cuenta el contexto del problema, se observa que tanto el dominio como la imagen de la función $y = 40x + 16$ son los todos los números reales. En este caso, esta respuesta no coincide con mi respuesta anterior, El punto radica en la contextualización del problema. Al estar trabajando dentro de una situación problema, existen condicionantes que hacen que se limiten las fronteras de trabajo, donde el gráfico en una herramienta que facilita el entendimiento y resolución del problema, pero no la única.

Al plantear en el foro la discusión acerca de que elementos consideraron para la validez del dominio, en las respuestas se tenían en cuenta los datos dados en el enunciado de la situación problemática pero el modelo elegido parecería ser más importante:

¿Qué elementos del problema determinan en que dominio es válido tu modelo?

[Intervención de Mónica]

> En el enunciado del problema aparece la frase "desde los niveles normales hasta el doble de lo normal", creo que esta frase determina de alguna manera el dominio válido del modelo. Aunque se puede pensar que debido a los datos el dominio válido podría iniciar en 0 y terminar en algún valor de saturación para la concentración del oxígeno. En los gráficos que se nos presentan, el dominio está especificado.
>
> [Intervención de Diego]
>
> En el enunciado del problema se menciona que la concentración de oxígeno se varió de niveles normales (1) hasta el doble de lo normal, sin embargo de acuerdo con los modelos lineales se podría extrapolar desde un valor cero hasta un valor de saturación para la concentración de oxígeno.
>
> [Intervención de Yolanda]

Esto está en relación con lo ya manifestado por los mismos alumnos acerca de la creencia de que la fórmula es la mejor forma de representar la relación entre las variables debido a su exactitud. Esto nos permite concluir que estos tipos de representación no tienen para el estudiante el mismo status, y que el lenguaje gráfico está subordinado al lenguaje algebraico, que posee reglas más exactas y precisas. Entendemos que esto está vinculado con la formación recibida en los estudios de grado y por los textos escolares citados como material de referencia.

4.4. – Comportamiento o peculiaridades en un escenario en línea. La utilización de herramientas tecnológicas.

Como lo señalamos en los antecedentes de investigación, el trabajo de Montiel (2002) abrió una línea de investigación en educación a distancia orientada a poner en funcionamiento elementos teóricos de la matemática educativa, en este caso en el escenario en línea. La caracterización del contrato didáctico que allí realiza nos brindó elementos teóricos que nos permitieron explicar algunos de los fenómenos observados durante la puesta en escena de las secuencias diseñadas:

- Cuando las respuestas de estudiantes evocaron argumentos de linealidad en los contextos gráfico, analítico y numérico. Como, por ejemplo, los mostrados en el apartado 4.2.2 al analizar esta propiedad en secuencias escolares no tradicionales. El cambio en la actividad matemática escolar de nuestros alumnos - docentes al que hicimos referencia en ese apartado lo vinculamos con *episodios de ruptura de la tradición escolar*

- El *episodio de adhesión al discurso* obedece a los efectos de los contratos pedagógico y escolar. El alumno es conciente de pertenecer a un sistema escolarizado, donde debe obtener evaluaciones aprobatorias para continuar con su formación y para lograrlo debe responsabilizarse por las actividades de cada uno de sus seminarios, lo que explica que en ciertas ocasiones sus acciones obedezcan a cumplir ciertos requisitos. En nuestro análisis, la identificación de estos episodios nos permitió explicar, por ejemplo, algunas de las respuestas encontradas en resolución de la secuencia 1 donde observamos las estrategias de cálculo relacionadas con la proporcionalidad directa, su utilización o sobreutilización, y la sobrevaloración que ya mencionamos en el apartado 4.1.

- *Las rupturas del contrato didáctico* se hacen evidentes cuando el alumno puede hacer explícitas las características de la linealidad como propiedad de la relación funcional de dos variables, y *la devolución de la situación*, en las intervenciones del profesor en el foro, ayudando a hacer explícitos los argumentos implícitos sobre los que subyacían las resoluciones de los estudiantes.

Entre las variables de control distinguidas en la fase de diseño, mencionamos que la tecnología puede cambiar la forma en que los alumnos-docentes acceden, perciben y comunican los conceptos matemáticos e influir en sus procesos de validación presentes en los procesos de interacción, y que la tecnología, como herramienta en la resolución de secuencias didácticas, modifica el intercambio de información entre el objeto de aprendizaje y el sujeto cognoscente. En este sentido, encontramos en todas las resoluciones analizadas la utilización de software educativo (en su mayoría graficadores) aún cuando no era parte de la consigna la incorporación de esta herramienta o se brindaba algún tipo de apoyo escrito para graficar “a mano”, y que algunas de las participaciones en los foros fueron acompañadas de archivos adjuntos en Word o PowerPoint con la intención de argumentar gráficamente dicha participación. Entendemos que es el escenario particular en el que se llevó a cabo esta experiencia el que permitió el uso de este tipo de herramientas, pero recalcamos lo observado anteriormente cuando nos referimos a que no sólo se obtuvieron las gráficas de las funciones con un software, sino que hubo *manipulación* de los objetos, sobre todo en la resolución de secuencias escolares no tradicionales. Las nuevas tecnologías no cumplen un papel de suplementación sino de reorganización, constituyen junto a los estudiantes, docentes y otros medios de diversa naturaleza (lápiz, papel, libros, calculadoras, computadoras) un colectivo pensante, un sistema constituido por seres humanos y dispositivos tecnológicos que generan, en conjunto, conocimientos matemáticos (Villareal, 2004)

La incorporación de este tipo de tecnología permitió también la resolución de las secuencias 4 y 5 en las que, como ya mencionamos, se buscaba favorecer la construcción de un universo gráfico en el terreno de las funciones algebraicas. La discusión llevada a cabo en los foros posteriores giró entorno la tipo de lenguaje que se utiliza en este tipo de secuencias al tratar de expresar que es lo que se ve, y cómo este tipo de lenguaje puede ser utilizado para interpretar y construir significados

Ante una actividad de esta naturaleza (presentación-secuencia4 y 5, operaciones gráficas) el estudiante probablemente usará un lenguaje ordinario (o más natural) para expresar lo que ve. Por ejemplo, podría decir inclinación en lugar de pendiente, acostada en lugar de horizontal, etc. ¿Cómo usarías este tipo de expresiones para interpretar y construir significados?

[Intervención de Mónica]

….

Hola compañeros. Esta actividad da lugar a expresiones informales, y estoy de acuerdo con el comentario de Carlos, es necesario romper el hielo inicial con los alumnos, haciendo ver que la discusión grupal de estos temas enriquece a la actividad de la secuencia y el entorno grupal. Creo que la construcción de significados con este tipo de actividades resulta más significativo que la tradicional exposición directa. Es importante que los alumnos entiendan algunas nociones, como por ejemplo la de pendiente, y ellos, al ver como la recta se "inclina hacia un lado o hacia otro" resulta que entienden mejor el concepto, que el sólo explicar la fórmula y encontrar el ángulo de inclinación de forma algebraica, ¿no lo creen?

[Intervención de Jacome]

Desde mi punto de vista, cuando un alumno logra describir mediante un lenguaje ordinario, lo que observa mediante una serie de ejercicios o secuencias, no tendrá problemas para comprender y construir significados de los conceptos matemáticos. Si un alumno es capaz de identificar la inclinación de una recta en ciertas actividades, será fácil para él, construir el significado de pendiente de una recta. Me parece que lo más importante es diseñar esas actividades o secuencias que le permitan observar y describir mediante un lenguaje natural las ideas matemáticas.

[Intervención de Diego]

Si un Discurso Matemático Escolar (DME) tradicional utiliza las tablas como introducción al tema de función, las gráficas como recurso ilustrativo y prioriza el trabajo con fórmulas y algoritmos, la discusión en el foro continúo con la opinión de los alumnos acerca de cómo el Discurso Matemático Escolar se vería modificado si priorizara el lenguaje gráfico. Aquí los alumnos coinciden que si el Discurso Matemático Escolar priorizara el lenguaje gráfico esto ayudaría a la comprensión de conceptos fundamentales, sobre todo del Cálculo, pero que sería necesaria la incorporación de TIC's pero no desempeñando un papel meramente utilitario sino como herramientas para construir significados.

Si el discurso matemático escolar priorizara el lenguaje gráfico, pienso que los alumnos comprenderán mejor las ideas matemáticas. Creo que la introducción del tema de función se puede hacer usando primeramente el lenguaje gráfico. Estoy pensando que una secuencia adecuada para llevar a cabo lo anterior sería: Visualizar gráficas de rectas, de parábolas, de cúbicas. Identificar características y relaciones entre las variables involucradas en estas gráficas. Modificar estos gráficos para generalizar comportamientos y encontrar expresiones algebraicas asociadas a los gráficos. Trabajar con problemas que involucren el manejo de datos, identificando el tipo de gráfico que pudiera asociarse con el problema. Proponer un modelo que resuelva el problema.
[Intervención de Diego]

Estoy de acuerdo con Diego, efectivamente la priorización del lenguaje gráfico traería muchos beneficios, añadiendo a este comentario, por ejemplo el empleo de applets (java) que permiten la interactividad con la gráficación, esto permitiria que el alumno tuviese una mejor abstracción del concepto, ya que depende de las modificaciones que el mismo alumno sugiere, lo que le permitirá establecer expresiones algebraicas para la definición del modelo matemático. Entonces, se intuye la necesidad de la inclusión de las TICS en la enseñanza de la matemática, con esto quiero decir que el DME deberá contemplar el empleo de las computadoras.
[Intervención de Carlos]

> Los applets son una herramienta muy importante para explorar un concepto. Las computadoras serán importantes cuando se utilicen, no como una simple herramienta, sino, como una estrategia didáctica.
> [Intervención de Diego]

Es cierto que el discurso matemático escolar da prioridad (en la gran mayoría de los docentes) al trabajo algorítmico, y creo que estas secuencias, y en general esta Maestría en Matemática Educativa, nos ayuda a comprender que debemos darle mayor peso a otros aspectos de dicho discurso, como por ejemplo, en este caso, el lenguaje gráfico. Si el DME diera prioridad (que creo así debe de ser) al lenguaje gráfico, se mejoraría la comprensión de muchos conceptos, se entendería con mayor facilidad nociones como pendiente, suma y multiplicación de rectas, las derivadas y su relación con la función original, etc.
[Intervención de Jacome]

Otro punto importante donde se mejoraría el DME, es en la comprensión general del curso de cálculo, y en la motivación de los estudiantes sobre esta área. Cuando los alumnos ven los comportamientos gráficos de las funciones, y entienden las relaciones que guardan sus parámetros, ellos se motivan al resolver algo que entienden, y por ende, les resulta atractivo este tipo de aprendizaje, siendo mucho más significativa esta forma de aprender que la tradicional resolución de grandes volúmenes de algoritmos, que bien los enseña a mecanizar, ellos no entienden para qué están haciendo esto, y ni siquiera pueden llegar a generalizar.
[Intervención de Jacome]

Reflexiones finales

En el marco de la socioepistemología, y asumiendo la modelación como una actividad, la intencionalidad de las secuencias planteadas no fue la reconstrucción y resignificación del concepto de función lineal, sino de la **linealidad** como propiedad de la relación funcional de dos variables. Encontramos que esta resignificación se hace evidente en la resolución de las secuencias escolares no tradicionales, que con la incorporación de herramientas tecnológicas, junto con las características del escenario en línea, permitieron priorizar el lenguaje gráfico y realizar cambios en el tipo de argumentos, estrategias y formas de explicitar los procedimientos.

La confrontación de los resultados empíricos de toda la secuencia con los elementos teóricos que enmarcan esta investigación nos proveyó de valiosos elementos para un probable rediseño de las secuencias. El análisis realizado en esta fase de validación nos hace pensar en el replanteo de algunas de las situaciones para que la noción de función se utilizada como una forma de representar el cambio, para hacer más explícito el transito por los cinco momentos identificados en el análisis epistemológico con base en Sierpinska (1992), y con elementos que permitan justificar la elección, o no, el modelo lineal.

Sin embargo, podemos reportar que se obtuvo un cambio en la *actividad matemática escolar* de nuestros alumnos - docentes logrando que reflexionaran sobre su propio conocimiento y sobre su práctica docente, lo cual es uno de los propósitos de su formación como matemáticos educativos.

Por la modalidad educativa, entendemos que hay momentos del proceso educativo que no están al alcance de nuestro análisis, por ello nos centramos en los registros de interacción de nuestro sistema didáctico: el profesor, el alumno-docente y el contenido. Esto es, la comunicación abierta entre alumnos y la facilidad de consultar recursos didácticos de diferente naturaleza tienen, indudablemente, un efecto sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero desconocerlos y no poder controlarlos es una variable didáctica esencial de estos escenarios.

Movilizó esta investigación la preocupación planteada al inicio de nuestro trabajo sobre las dificultades observadas al desarrollar los contenidos de matemática en nuestras clases y al analizar los resultados poco satisfactorios que observamos en el primer año de universidad. Los elementos teóricos obtenidos en la fase de validación de esta investigación son importantes para pensar en un rediseño de estas secuencias esta vez orientadas a alumnos de nivel medio o medio superior. En este rediseño deberemos tener en cuenta la formación diferente de los actores a los que se orienta la propuesta, ya que no se trataría de profesionales cursando un estudio de postgrado, sino de alumnos en formación de grado, quienes posiblemente han trabajado este tema en niveles anteriores, por eso seguiríamos hablando de *resignificación* de la propiedad de linealidad. Es posible que esto permita trabajar de manera diferente otras nociones como, por ejemplo, razón de cambio y tasa de variación, aporte elementos que favorezcan la noción de función como una forma de identificar los efectos de un cambio y no solamente como una asignación entre objetos, y promueva el uso de la visualización matemática como una estrategia para la formación adecuada de los conceptos.

Entendemos que las restricciones y variables de control identificadas para esta investigación cambiarían: tantos los actores, como la familiaridad con el uso de la tecnología educativa, el escenario (en línea) y el contexto serían diferentes.

Si una fase importante de la modelación en la educación es la experimentación (Borba y Villareal, 2005), en un escenario en línea las simulaciones juegan un papel importante para que esta fase sea vivida por el alumno. Reafirmamos lo expresado anteriormente en referencia a la utilización de software como el Programa SIRES, que proporcionan ambientes de simulación e interactividad para la actividad controlada de un alumno que aprende en la modalidad en línea. A pesar que su aplicación crea nuevas formas de interacción sin control por parte del profesor, consideramos que la posibilidad de llevar la modelación a este tipo de escenarios, la ventaja de poder manipular tanto el fenómeno como su reproducción, la continua disponibilidad de los experimentos, y la posibilidad de interactuar a distancia, (Martínez, Arrieta y Canul, 2005) son elementos suficientes para afirmar que este tipo de interfaces son herramientas útiles para la construcción de conocimiento y que las actividades que diseñen en base a uso y aplicación se constituyen en el centro del aprendizaje en línea.

Una de las primeras preguntas que nos planteamos antes de iniciar este trabajo de investigación era si aún en escenarios virtuales, con características propias tan diferentes a los escenarios de origen, era posible la construcción de conocimiento matemático. El desarrollo de esta investigación y los resultados a los que arribamos nos han dado muestra de que sí es posible.

Así como en el marco de la Socioepistemología identificamos el origen, naturaleza y problemáticas propias de cada tipo de función, también diferenciamos dos escenarios educativos de naturaleza tan distinta como son los escenarios tradicionales y a distancia, en este caso, virtuales. El entender estas diferencias y características propias hizo que nuestra investigación no buscara comparar resultados de una modalidad con otra, sino por el contrario, utilizarlas como restricciones y variables de control en la fase de diseño de secuencias pensadas para implementar en este tipo de modalidad.

Consideramos que nuestra investigación aporta elementos a la línea de investigación que surge dentro de la matemática educativa con el trabajo (Montiel, 2002). El haber podido mostrar las posibilidades que los escenarios en línea permiten en cuanto a la incorporación de nuevas tecnologías y el priorizar el lenguaje gráfico con el consiguiente cambio en el tipo de argumentos, estrategias y formas de explicitar los procedimientos dan cuenta de ello.

REFERENCIAS

Albano, G. (2005a). Mathematics and e-learning: students' beliefs and waits. Proceed ings of the Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, 153 – 157. Versión digital disponible al 21 de mayo de 2007 en http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57_albano.pdf

Albano, G. (2005b). Mathematics and e-learning: a conceptual framework. Paper of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Versión digital disponible al 21 de mayo de 2007 en http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/9/albano.pdf

Álvarez, C., Álvarez, F., Arribas, A., Martínez, S., Ruiz, A. (1999) Matemática 1. Humanidades. Barcelona: España. Editorial Vincens Vives.

Arrieta, J. (2002) Narración de una interacción discursiva en el aula: "la linealidad y lo que no es la linealidad". En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 15, Tomo I, pp. 9-13). México

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G., Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 17, pp. 418-422). México

Arrieta, J. (2003) *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Artigue, M. (1989) *Epistemologie et Didactique*. Cahier de DIDIREM, 3. IREM. Université Paris VII.

Azcárate, C., Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas.* Madrid. España: Editorial Síntesis.

Borba, M. y Villareal, M. (2005). *Humans-with-Media and Reorganization of the Mathematical Thinking.* USA: Springer.

Buendía, G. (2005) Prácticas Sociales y Argumentos: El Caso de lo Periódico. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 18, pp. 451-456). México.

Cantoral, R., Farfán, R. (1998) Pensamiento y Lenguaje Variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* 42, 353-369

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas.

Cantoral, R., Farfán, R. (2003) Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 6, Num. 1, (pp. 27-40). Thompson.

Cantoral, R., Molina, J., Sánchez, M. (2005) Socioepistemología de la Predicción. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 18, pp. 463-468). México.

Cantoral, R., Montiel, G. (2001) *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Pearson Educación México.

Carnelli, G., Novembre, A., Vilariño, A., (1999) *Función de gala. Dramáticas actividades para dominar las funciones matemáticas*. Argentina. Editorial El Hacedor.

Castañeda, A., Sánchez, M. y Molina, G. (2006). Estudio del pensamiento del profesor en un curso de formación docente a distancia. En *Memorias del 22 Simposio Internacional de Computación en la Educación. SOMECE 2006*. México Versión digital disponible al 14 de mayo de 2007 en http://www.mateducicata.ipn.mx/publicaciones/(Castaneda,2006a).pdf

Cordero, F. (2001) La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 4, Num. 2, (pp. 103-128). Thompson.

Cordero, F. (2003) Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 16, Tomo I, pp. 73-78). México

Cordero, F. (2005) La Socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 18, pp. 477-482). México.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992) The nature of the process conception of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp 85 - 106) USA: Mathematical Association of America.

Farfán, R. (1997) *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editoria Iberoamérica.

Farfán, R., Ferrari, M. (2001) Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo en *Antologías*, Programa editorial Red de CIMATES, Número 1, pp 249-291. México.

Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G., Castañeda, A. (2001) Educación a distancia: una experiencia en matemática educativa en *Antologías*, Programa editorial Red de CIMATES, Número 1, pp 293 - 317. México.

Fiol, L., Fortuna, J., (1990) *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid. España: Editorial Síntesis.

Gómez, E., Dolores, C., Martínez, M. (2005). La construcción social de la noción de variable. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 18, pp. 517-522). México.

Grupo Beta (1997) *Proporcionalidad geométrica y semejanza.* Madrid. España: Editorial Síntesis.

Guzmán, M., Colera, J., Salvador, A. (1987) *Matemáticas. Bachillerato 1 y 2.* Madrid, España: Editorial Anaya.

Lacasta, E., Pascual, J. ( ) *Las funciones en los gráficos cartesianos.* Editorial Síntesis. España

Leithold, L. (1998) *El Cálculo*, México: Oxford Universtiy Press – Harla México.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría, no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Lezama, J., Farfán, R. (2001) Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 4, Num. 2, (pp. 161 - 193). Thompson

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado, no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Martínez, G. (2005) Los proceso de convención matemática como constituyentes en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 18, pp. 463-468). México.

Martínez, E., Arrieta, J., Canul, A. (2005) Laboratorio Virtual de Matemáticas. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 18, pp. 785-790). México

Montiel, G. (2002) *Una caracterización del Contrato Didáctico en un Escenario Virtual.* Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México.

Montiel, G. (2005) *Estudio socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada – IPN, México.

Montiel, G. (2005) Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 8, Num. 2: 219 - 233.

Ruiz Higueras, L. (1998) *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Tesis de doctorado publicada. Universidad de Jaén, Colección Juan Pérez de Moya, Jaén, España.

Sánchez, M. (2003) *Un estudio sobre interacciones y comunicación en educación matemática a distancia* Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México.

Sierpinska, A. (1989). *On 15-17 years old students´ conceptions of functions, iteration of functions and attractive points*. Warsaw, Poland: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Preprint, 454.

Sierpinska, A. (1992). Understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp 25-58) USA: Mathematical Association of America.

Suhit, G.(1995) Proporcionalidad: un Contenido Matemático con amplia significatividad real. En *Capacitación docente 1995. Desarrollo de los temas de los contenidos básicos comunes. Módulo 6.* (pp 41-64). Buenos Aires, Argentina: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.

Swokowski, E., (1987) *Cálculo con geometría analítica*, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Villareal, M. (2004) Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral.* Num. 1: 41 - 55

Vinner, S. y Tall, D (1981) Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151 - 169

Vinner, S. y Dreyfus, T., (1989) Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 4, 356-366

Youschkevitch (1976), *The concept of function up to the middle of the 19th century*, (R. Farfán, trad) en *Traducciones 2* (1996) CINVESTAV – IPN, México.

Anexo A

Cuestionario inicial y material de apoyo

1. Nombre
2. Institución donde labora
3. Edad

   25 a 30 / 31 a 35 / 36 a 40 / más de 40

4. ¿Cuál es tu formación profesional?
   Profesorado / Licenciatura / Ingeniería / Otro

5. Durante tus estudios profesionales, ¿en qué cursos (materias) estudiaste el concepto de función?

6. ¿Cuántos años de experiencia docente posees?
   1 a 5 / 6 a 10 / 11 a 20 / más de 20

7. Indica los niveles en los cuales desempeñas tu labor docente.

Básico (alumnos de 6 a 12 años) Medio-Básico (alumnos de 13 a 15 años) Medio (alumnos 15 a 18 años) Superior (alumnos mayores de 19 años)

8. ¿Has trabajado con tus estudiantes el concepto de función? Si / No

9. En caso de ser afirmativa tu respuesta anterior, indica los cursos (materias) y el nivel.

10. Proporciona los 2 textos que más utilizas como apoyo para abordar el concepto de función.

11. ¿Has elaborado apuntes propios? Si / No

12. Define con tus propias palabras

13. En el archivo de apoyo se encuentran 8 gráficas. Señala cuáles representan una función y porqué.

14. Cuando desarrollas el tema de función en clase, ¿a qué aspecto/s le otorgas mayor importancia?
    Algebraico
    Geométrico/ Gráfico
    Numérico
    Verbal

15. ¿En qué orden aparecen estas representaciones a lo largo de tu exposición?

16. Según tu experiencia, ¿qué dificultades encuentran los estudiantes al estudiar este tema?

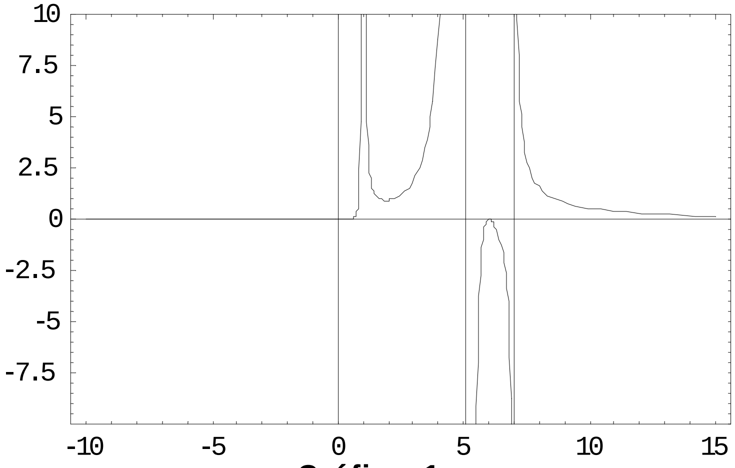
17. En el archivo de apoyo encontrarás una pregunta y las respuestas de cuatro estudiantes. ¿Qué porcentaje le asignarías a cada una en una evaluación?

18. ¿Utilizas recursos computacionales para trabajar con tus alumnos conceptos matemáticos?

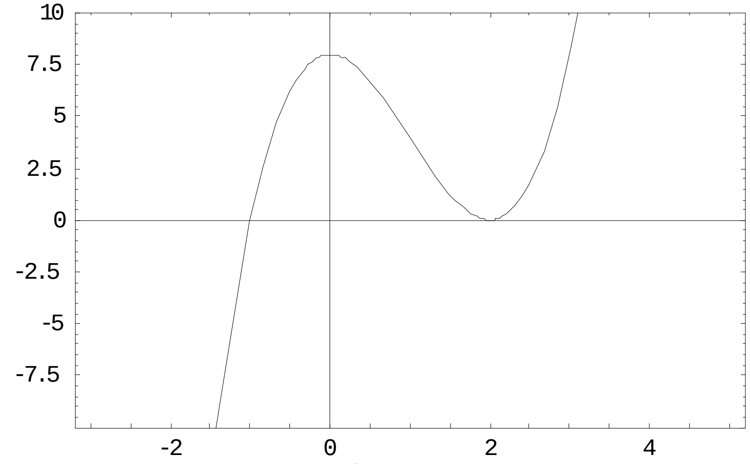
    Si, para algunos temas
    No, porque no conoce ningún software, pero sí le interesa
    No, porque no le interesa

19. En caso de usar recursos computacionales, mencione cuáles.

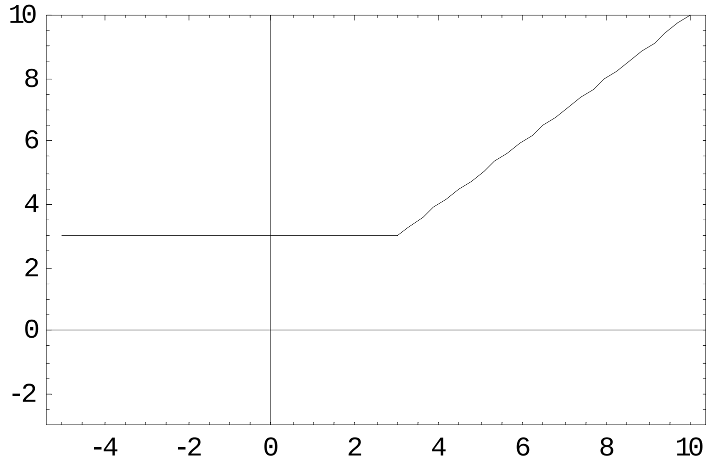
Pregunta 13.



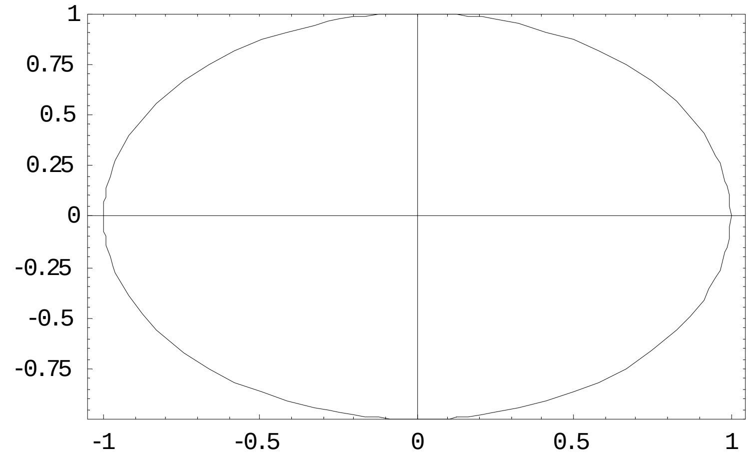
Gráfica 1



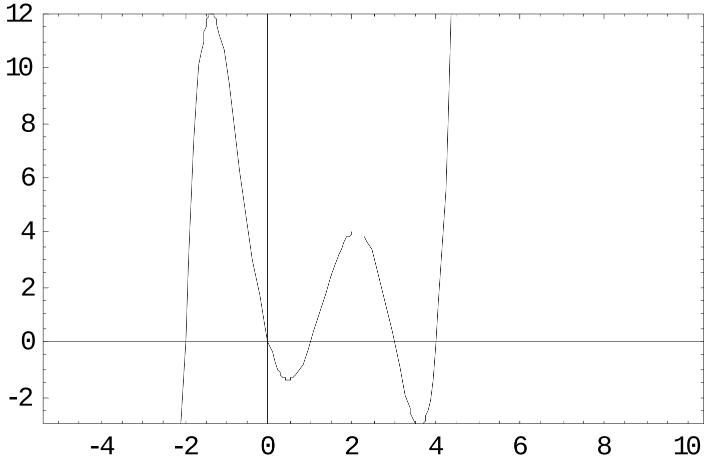
Gráfica 2



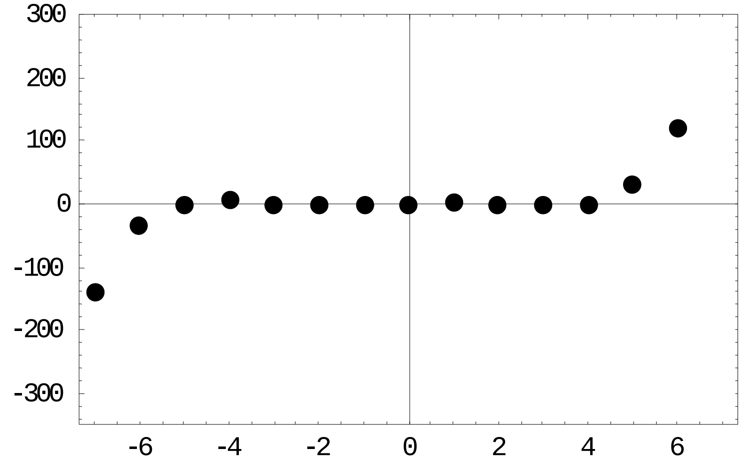
Gráfica 3



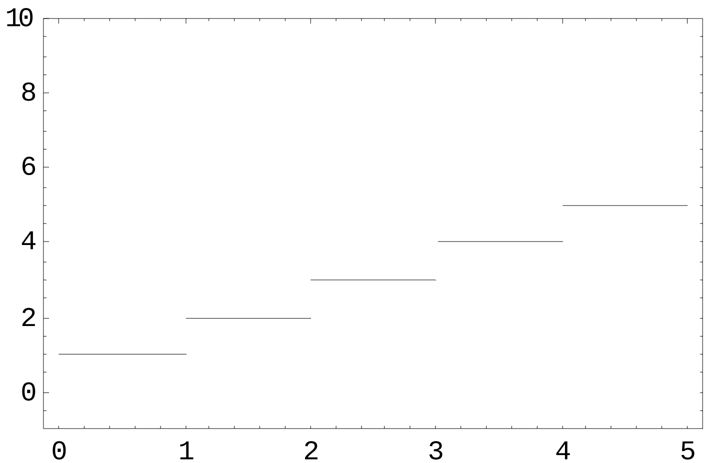
Gráfica 4



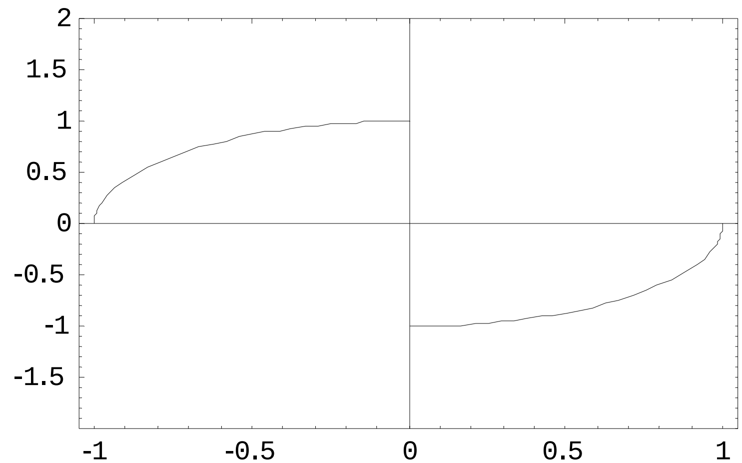
Gráfica 5



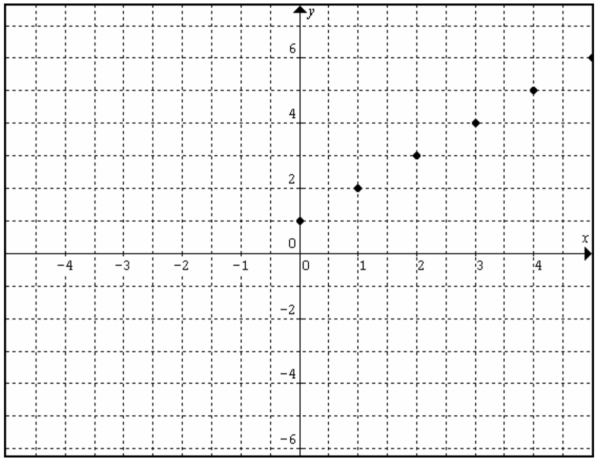
Gráfica 6



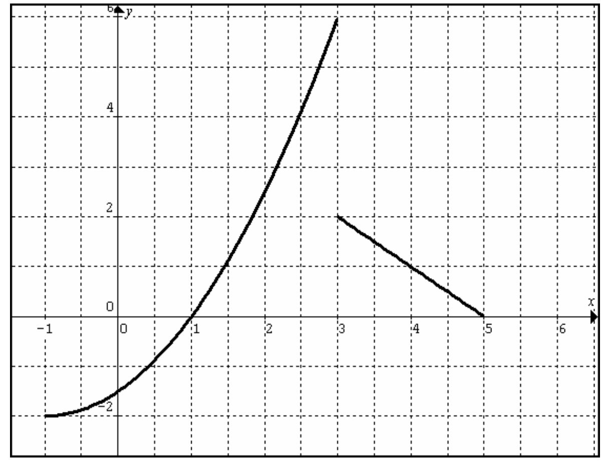
Gráfica 7



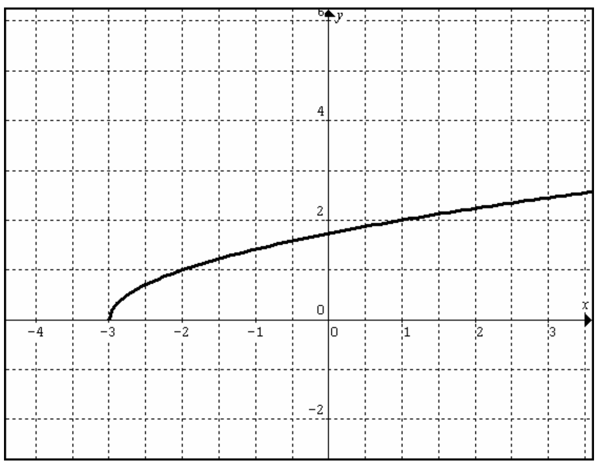
Gráfica 8



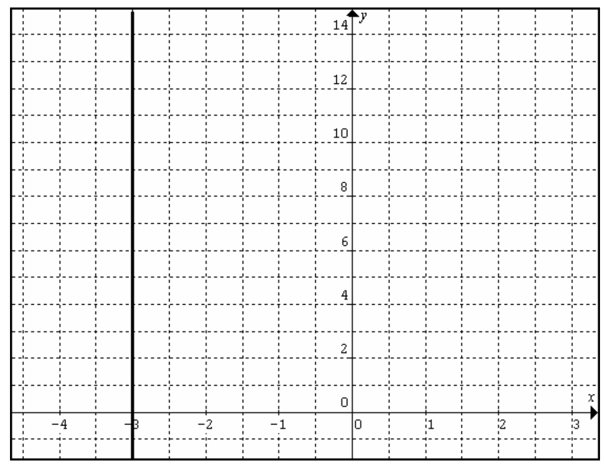
Gráfica 9



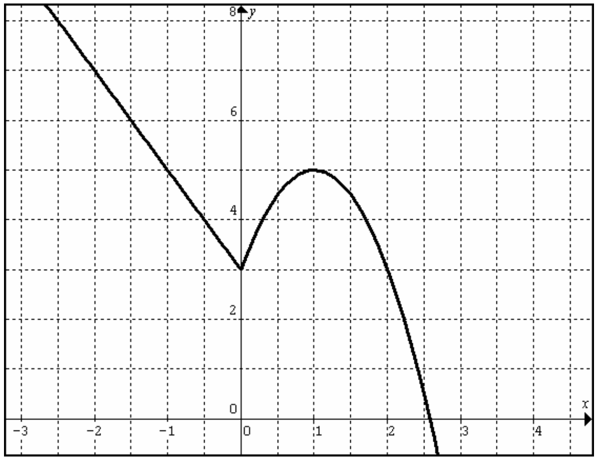
Gráfica 10



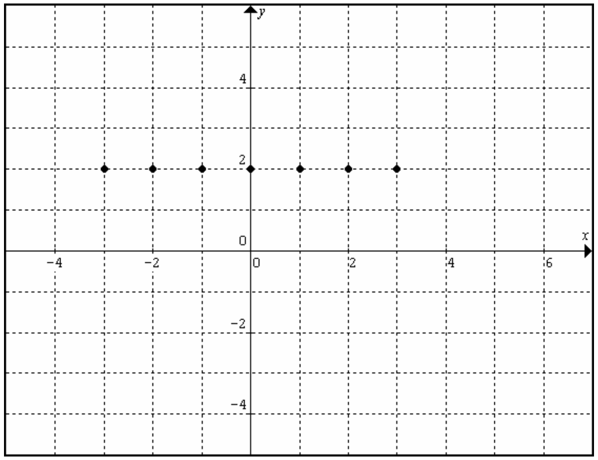
Gráfica 11



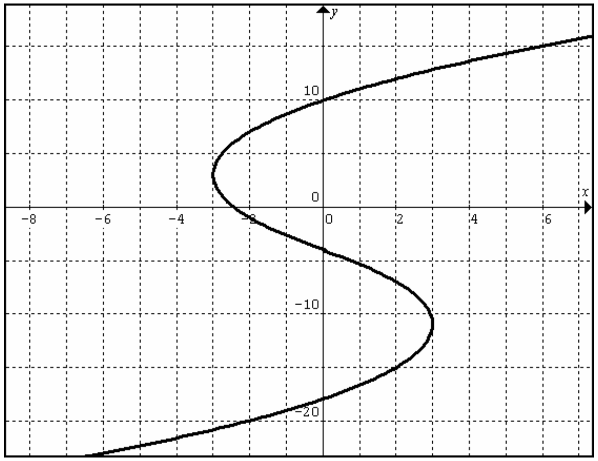
Gráfica 12



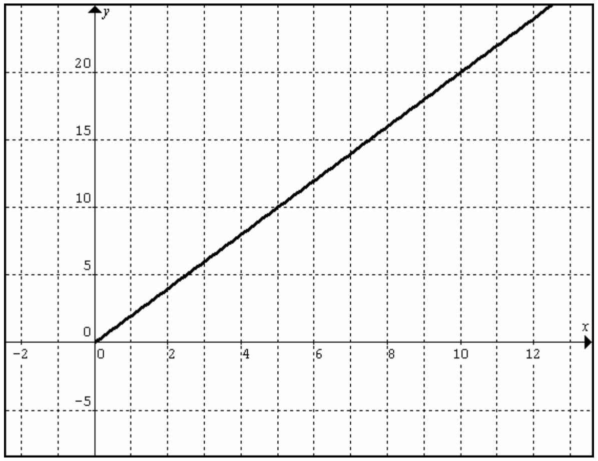
Gráfica 13



Gráfica 14



Gráfica 15



Gráfica 16

Pregunta 17.

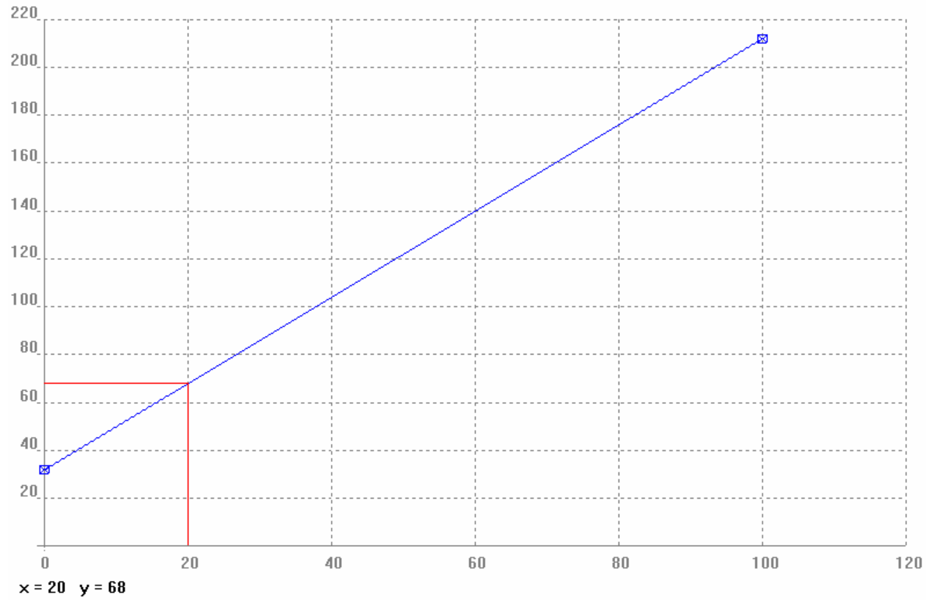
Pregunta.

Dos de las escalas de temperatura más utilizadas son la Centígrada y la Fahrenheit. La temperatura de congelación de agua destilada en la escala centígrada es 0º C y en la escala Fahrenheit es de 32º F. En cambio el agua hierve a 100º C en la escala Centígrada y a 212º F en la escala Fahrenheit.

¿A qué temperatura en grados de Fahrenheit equivale una temperatura de 20º C?

Respuesta 1

Grafico los datos dados. Sobre el eje x, la escala Centígrada, y sobre el eje y, la escala Fahrenheit.



A partir del gráfico puedo estimar que 20º C equivalen a 68º F, aproximadamente.

Respuesta 2

Trato de hallar una fórmula que relacione ambas escalas. Si hago el gráfico, veo que puedo unir los puntos por una línea recta.

Voy a considerar como variable independiente los grados Centígrados y como variable dependiente los grados Fahrenheit. Por lo tanto la recta que busco pasa por los puntos: $(0;32)\ y\ (100;212)$

$$m=\frac{212-32}{100-0}=\frac{180}{100}=\frac{9}{5}$$

$$y=\frac{9}{5}x+b$$

$$32=\frac{9}{5}.0+b$$

$$y=\frac{9}{5}x+32$$

Entonces ahora reemplazo en la expresión a la que llegue x por 20: $y=\frac{9}{5}.20+32=68$

Entonces, una temperatura de 20º C equivale a una temperatura de 68º F

Respuesta 3

Con los datos que me dieron trato de armar una tabla para ir calculando distintas temperaturas:

Centígrados	0	100	50	10	15	**20**
Fahrenheit	32	212	112	50	59	**68**

Para completar la tabla tengo en cuenta los 32º F que equivalen a 0º C: 212 – 32 =180

100º C ——— 180º F

50º C ——— $\frac{50.180}{100}$ = 90º F + 32º F = 112ºF

Y así con los otros valores de la tabla….

Respuesta 4

Si 0º C equivalen a 32º F, para poder encontrar la relación existente entre grados Centígrados y grados Fahrenheit puedo considerar que esos 32º F siempre se están sumando a la temperatura en Fahrenheit correspondiente a cada temperatura en grados Centígrados.

Entonces si a 100º C le equivalen 212º F – 32º F = 180º F, a 20º C le equivalen la quinta parte: 36º F, a los que se le deben sumar los 32º F: 68º F.

Anexo B

Secuencias didácticas y material de apoyo

Parte I

Analiza las siguientes situaciones, resuelve y explica detalladamente.

a. Laura y su madre cumplen años el próximo mes, ella cumple 14 y su madre 40. ¿Cuántos años cumplirá Laura cuando su mamá cumpla 80?

Respuesta detallada.

b. Iremos de vacaciones a la playa y nos espera un viaje de 500 km. Sabemos que el auto consume 8 litros de nafta cada 100 km. ¿Cuánta nafta necesitaremos para el viaje?

Respuesta detallada.

c. Inés peso al nacer 3,300 kg. y a los 20 días, 4,100 kg. ¿Puedes calcular cuánto pesará cuando tenga dos meses de edad?

Respuesta detallada.

d. Fede tiene 6 años y mide 1,18 m de altura. Cuando tenga 12 años medirá el doble. ¿Estás de acuerdo con esta conclusión?

Respuesta detallada.

e. Un cubo de 5 cm de lado tiene un volumen de 125 cm^3. ¿Cuál será el volumen de un cubo de 10 cm de lado?

Respuesta detallada.

f. En un estacionamiento cobran $1 por hora (o fracción de hora), ¿cuánto deberá pagar una persona que dejó su auto estacionado 2 horas y media?

Respuesta detallada.

g. En el plano del colegio, que está hecho a escala 1:100, la sala de música es un cuadrado de 4,5 cm de lado. ¿Cuánto mide realmente la sala?

Respuesta detallada.

h. El otro día gastamos dos tarros de pintura para pintar una pared de 18 m^2. Hoy debemos pintar una pared de 63 m^2, ¿cuánta pintura necesitaremos?

Respuesta detallada.

i. Compré un libro de 120 páginas y me costó $9,50. Mi amiga compró una edición distinta del mismo libro, con más ilustraciones, de 240 páginas. ¿Podrías determinar cuánto pagó?

Respuesta detallada.

Parte II

1. La ley de Hooke (más conocida como la ley del resorte) establece la relación que existe entre la fuerza F aplicada a un resorte y el estiramiento L producido en éste.

a. ¿Podrías completar la siguiente tabla?

F (dyn)	10	15	20	45	50
L (cm)	2			9	

Respuesta detallada.

b. Representa gráficamente estos datos sobre un sistema de ejes cartesianos.

Respuesta detallada.

c. A partir del gráfico, ¿puedes obtener las fuerzas que corresponden a un estiramiento de 5 cm? ¿y 3.3 cm? ¿y 8 cm?

Respuesta detallada.

d. ¿Qué estiramientos corresponden a una fuerza de 30 dyn? ¿y 5 dyn? ¿55 dyn?

Respuesta detallada.

e. ¿Cómo enunciarías la ley de Hooke?

Respuesta detallada.

2. Traza cuadrados de 1cm, 2 cm, hasta 10 cm y calcula en cada caso cuanto mide su diagonal[1].
   a. Construye una tabla con los resultados que dan las sucesivas mediciones del lado y la diagonal.

   b. Representa gráficamente estos datos sobre un sistema de ejes cartesianos.

   c. Los datos de la tabla y del gráfico anterior, ¿te permiten determinar qué diagonal corresponderá a una cuadrado de 50 cm de lado? ¿y qué lado tendrá un cuadrado de 80 cm de diagonal?

Parte III

1. La torre Eiffel mide 300 metros de altura, está hecha toda de hierro y pesa 8000 toneladas. Se quiere hacer una maqueta de la torre, también de hierro, que pese en total 1 kilo. ¿Qué altura deberá tener la torre de la maqueta?

   Respuesta detallada.

2. Las tres últimas lecturas del consumo de gas natural de una residencia fueron: 120,32 m^3, 130,22 m^3 y 145,51 m^3. El importe de las facturas pagadas en cada caso fueron \$31,43, \$33,12 y \$35,74, respectivamente. Sabiendo que se paga una cantidad por factura en concepto de impuestos y una cantidad por m^3 consumido,
   a. Completa la siguiente tabla:

Consumo (m^3)	120,32	130,22	145,51	37,01	154,42
Importe (\$)					

   b. Representa gráficamente estos datos sobre un sistema de ejes cartesianos.

[1] Consulta en el espacio Material del Curso el archivo de apoyo para la construcción de un segmento de longitud $\sqrt{2}$.

c. ¿Cuánto se paga por factura en concepto de impuestos y cuánto por m^3 consumido?

Respuesta detallada.

3. Cuenta la leyenda que al llegar el gran calculador Beremiz a la posada del viejo Salim, éste le planteó el siguiente problema:

   "Un joyero que vino a vender sus joyas me prometió que me pagaría por el hospedaje 20 dinares si vendía sus joyas por 100 dinares y 35 si lograba venderlas por 200 dinares. Al cabo de unos días acabó vendiéndolas por 140 dinares, y por tanto debe pagarme 28 dinares, pero el joyero sólo quiere pagarme 24,5 dinares"

   a. ¿Qué razonamiento hicieron Salim y el joyero para llegar cada uno a su solución?

   Respuesta detallada.

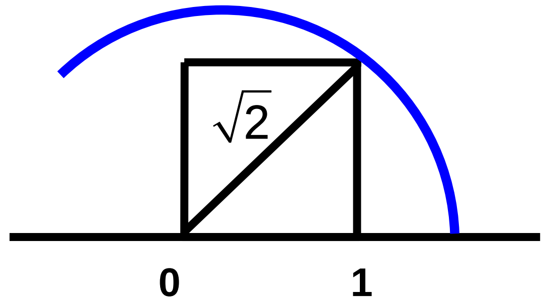
   b. ¿Cuánto debería pagar en realidad por el hospedaje, de acuerdo con el trato establecido?

   Respuesta detallada.

CÓMO CONSTRUIR UN SEGMENTO CUYA LONGITUD SEA $\sqrt{2}$

Método 1

Construimos sobre la recta numérica, a partir de 0, un cuadrado de 1 unidad de lado y marcamos su diagonal.



Por el teorema de Pitágoras, la diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$:

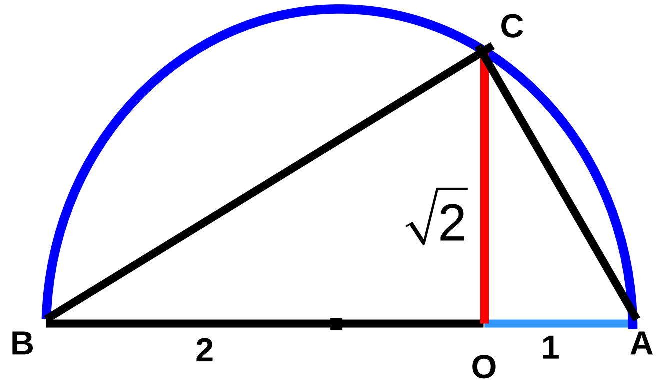
$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

Con un compás hacemos centro en 0, con un radio igual a la diagonal del cuadrado trazamos un arco de circunferencia hasta que corte a la recta numérica. El segmento con extremos en 0 y en el punto de contacto con la recta numérica mide $\sqrt{2}$.

Método 2

Trazamos una semcircunferencia de radio 3 unidades. Sobre el diámetro y sobre uno de los extremos trazamos un segmento unitario. Desde ahí trazamos la perpendicular que corta a la semicircunferencia.

Elaboró:
Mónica García Zatti mgarciaz@ipn.mx



Los triángulos rectángulos ABC, AOC y COB son semejantes por tener sus ángulos iguales. Por la proporcionalidad de sus lados:

$$\frac{\overline{OC}}{2} = \frac{1}{\overline{OC}}$$

$$\overline{OC}^2 = 2$$

$$\overline{OC} = \sqrt{2}$$

Elaboró:
Mónica García Zatti mgarciaz@ipn.mx

En un centro de investigaciones marinas analizan la reproducción celular de las algas. Estudian la capacidad de adaptación de éstas a distintas condiciones ambientales.
Esperan que esta investigación los conduzca a determinar las condiciones óptimas para el crecimiento de las algas y así mejorar el rendimiento de los posibles usos de las mismas.
Actualmente están trabajando en establecer como las diferentes concentraciones de oxígeno en el ambiente afectan a la reproducción celular. Para ello hicieron variar la concentración de oxígeno, medida en ml de oxigeno por litro, desde los niveles normales (1) hasta el doble de lo normal (2). Con el fin de comprobar las diferencias estudian dos tipos de reproducción: sexual (algas productoras de gametos) y asexual (algas productoras de esporas)

Parte I: Sobre las algas productoras de esporas

1. Completa la siguiente tabla.

Concentración de oxígeno (ml por litro)	1	1,25	1,5	1,75	2
Número de algas productoras de esporas		66		86	

2. Describe la relación entre las dos cantidades que se muestran en la tabla

3. ¿Cuántas algas productoras de esporas corresponden a una concentración de oxígeno igual a 1,4 ml / litro?

   ¿Cuántas algas productoras de gametos corresponden a una concentración de oxígeno igual a 1,8 ml / litro?

   ¿Cuántas algas productoras de gametos corresponden a una concentración de oxígeno igual a 1,152 ml / litro?

4. ¿Cuál es la concentración de oxígeno en la que se espera encontrar 67 algas produciendo gametos?

   ¿Cuál es la concentración de oxígeno en la que se espera encontrar 73 algas produciendo gametos?

   ¿Cuál es la concentración de oxígeno en la que se espera encontrar 40 algas produciendo gametos?

5. Describe cuáles son las consecuencias del aumento de la concentración de oxígeno sobre el número de algas productoras de esporas.

6. ¿Podrías dar una fórmula algebraica para expresar el número de algas productoras de esporas para una concentración *c* de oxígeno? En caso afirmativo, indica dominio e imagen

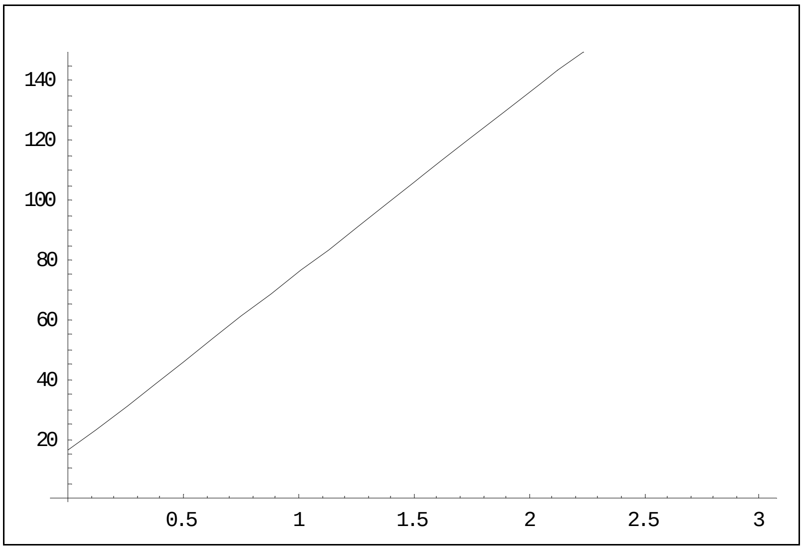
7. Representa gráficamente la relación entre la concentración de oxígeno y el número de algas productoras de esporas sobre un sistema de ejes cartesianos.

   ¿Cuál es el dominio y la imagen de la gráfica que realizaste?

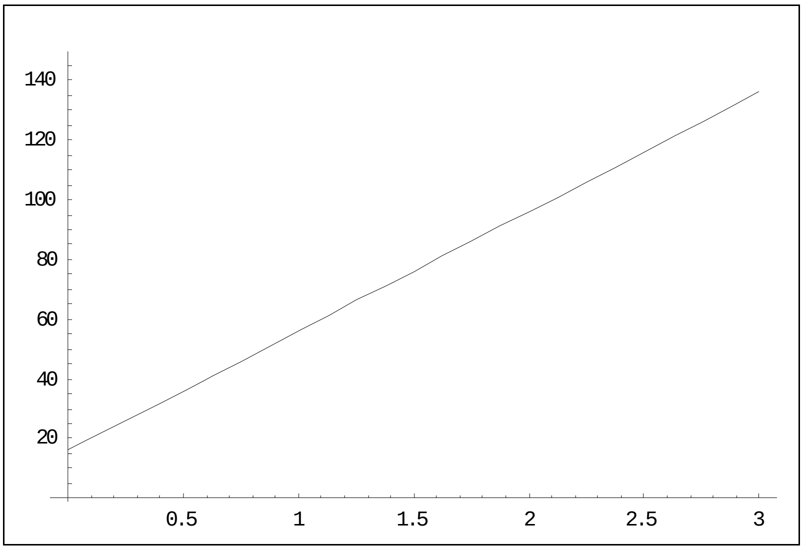
   ¿Tu respuesta coincide con la que diste en el punto 6? ¿Por qué?

   A partir del gráfico, ¿aproximadamente qué número de algas le corresponde a una concentración de oxígeno igual a 1,73 ml / litro?

8. En cada caso, indica cuáles deberían ser las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre el número de algas productoras de esporas y la concentración de oxígeno sea el dado:

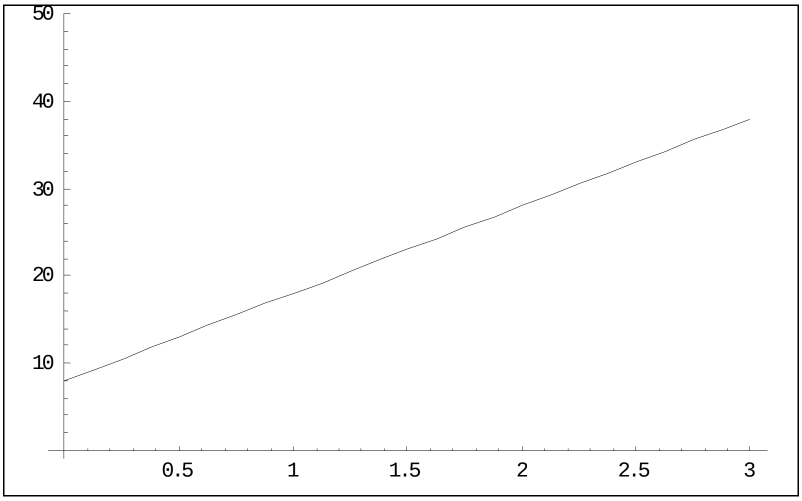


Planteamiento del Problema:

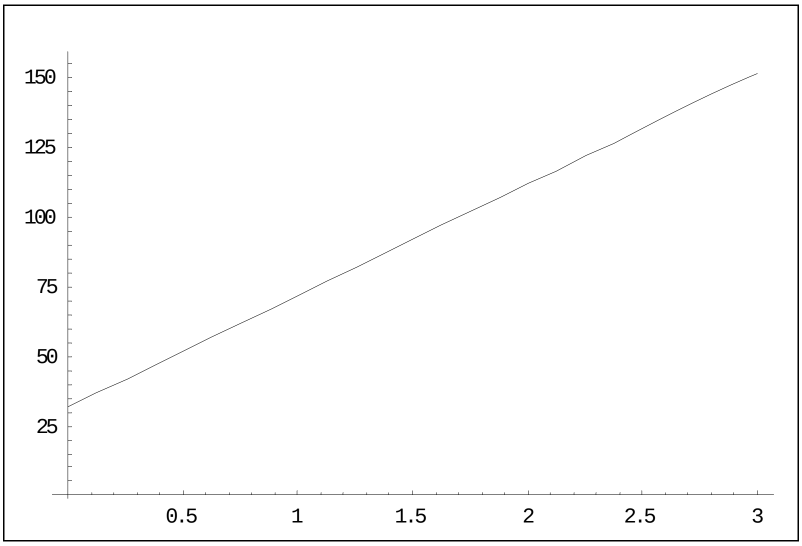


Planteamiento del Problema:

9. En cada caso, indica cuáles deberían ser las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre el número de algas productoras de esporas y la concentración de oxígeno sea el dado



Planteamiento del Problema:



Planteamiento del Problema:

Parte II: Sobre las algas productoras de gametos

1. ¿Podrías completar la siguiente tabla?

Concentración de oxígeno (ml por litro)	1	1,25	1,5	1,75	2
Número de algas productoras de gametos		75		65	

2. Describe la relación entre las dos cantidades que se muestran en la tabla

3. ¿Cuántas algas productoras de gametos corresponden a una concentración de oxígeno igual a 1,4 ml / litro?

   ¿Cuántas algas productoras de gametos corresponden a una concentración de oxígeno igual a 1,8 ml / litro?

¿Cuántas algas productoras de gametos corresponden a una concentración de oxígeno igual a 1,152 ml / litro?

4. ¿Cuál es la concentración de oxígeno en la que se espera encontrar 67 algas produciendo gametos?

   ¿Cuál es la concentración de oxígeno en la que se espera encontrar 73 algas produciendo gametos?

   ¿Cuál es la concentración de oxígeno en la que se espera encontrar 40 algas produciendo gametos?

5. Describe cuáles son las consecuencias del aumento de la concentración de oxígeno sobre el número de algas productoras de gametos.

6. ¿Podrías dar una fórmula algebraica para expresar el número de algas productoras de esporas para una concentración *c* de oxígeno? En caso afirmativo, indica dominio e imagen

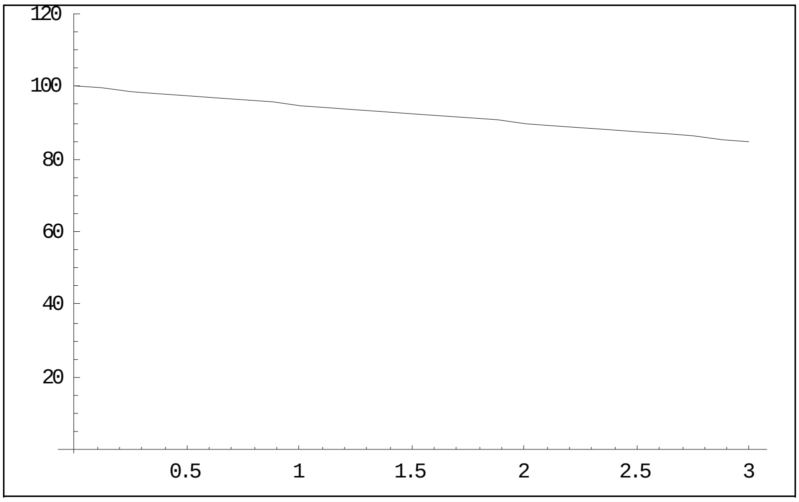
7. Representa gráficamente la relación entre la concentración de oxígeno y el número de algas productoras de gametos sobre un sistema de ejes cartesianos.

   ¿Cuál es el dominio y la imagen de la gráfica que realizaste?

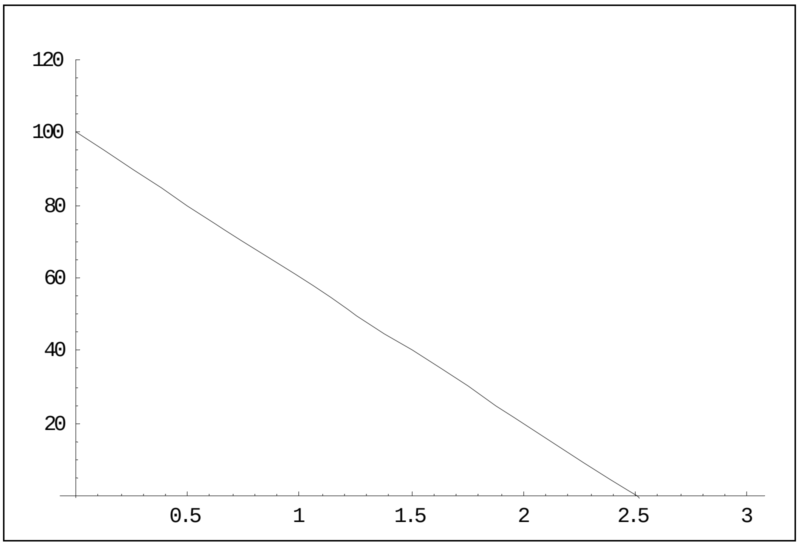
   ¿Tu respuesta coincide con la que diste en el punto 6? ¿Por qué?

   A partir del gráfico, ¿aproximadamente qué número de algas le corresponde a una concentración de oxígeno igual a 1,73 ml / litro?

8. En cada caso, indica cuáles deberían ser las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre el número de algas productoras de gametos y la concentración de oxígeno sea el dado:

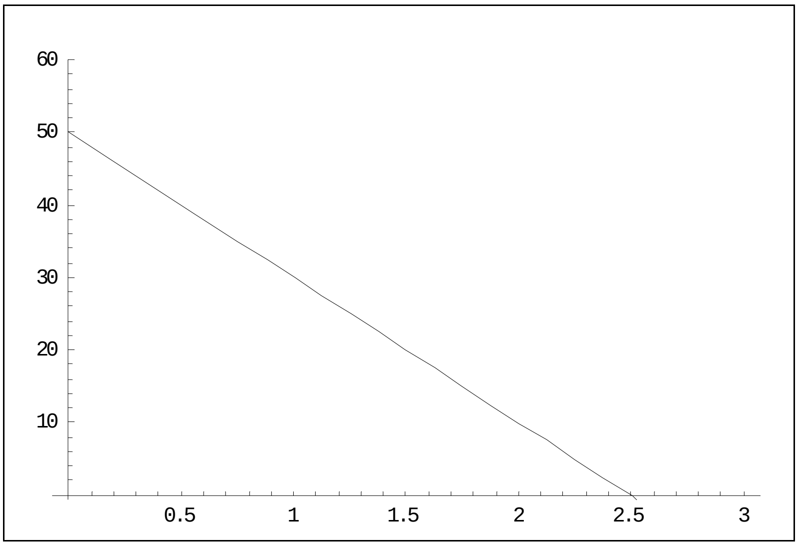


Planteamiento del Problema:

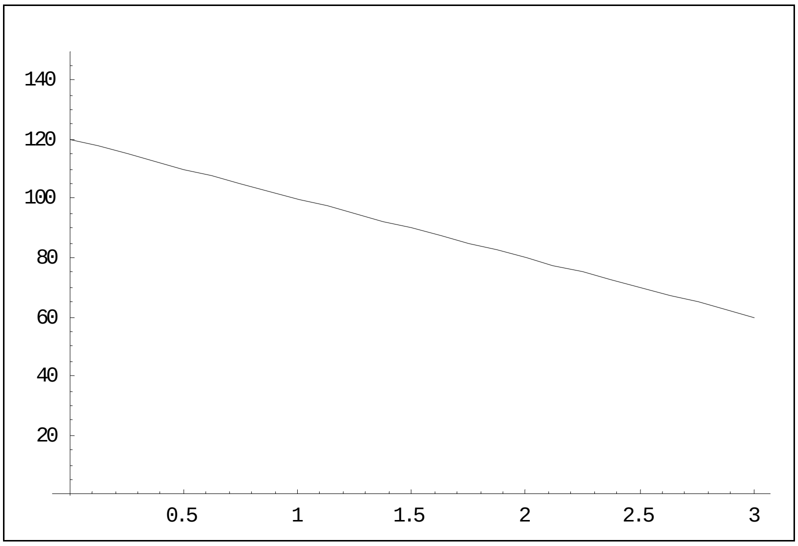


Planteamiento del Problema:

9. En cada caso, indica cuáles deberían ser las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre el número de algas productoras de gametos y la concentración de oxígeno sea el dado:



Planteamiento del Problema:



Planteamiento del Problema:

10. Determina si hay alguna concentración de oxígeno para la cual haya la misma cantidad de algas productoras de esporas que productoras de gametos.

INSTRUCCIONES PARA INSTALAR EL PROGRAMA SIRES (SISTEMA DE RESORTES)[1]

1) Baja el archivo **sires.zip** que se encuentra en el espacio *Documentación del Curso*, con el archivo de la Secuencia.
2) Descomprime el archivo con alguna utilidad de compresión/descompresión, por ejemplo, el Winzip, el WinRAR, etc.
3) Guarda la carpeta en disco duro y ejecuta el archivo: **Sires.exe**

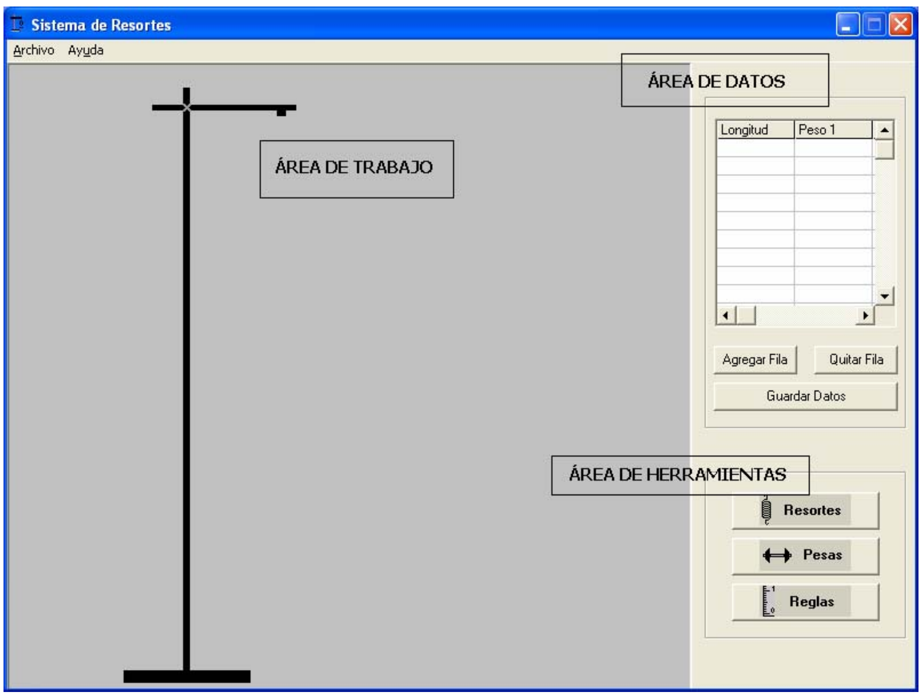
Nota: Este es el conjunto de archivos que se deben encontrar en el directorio donde se descomprimió el archivo Sires, si falta uno de ellos pueda que no funcione correctamente.

Sires.exe	Ejecutable
COMDLG32.OCX	Objeto ActiveX
MSFLXGRD.OCX	Objeto ActiveX
asycfilt.dll	Librería Dinámica
CMDLGES.DLL	Librería Dinámica
COMCAT.DLL	Librería Dinámica
FLXGDES.DLL	Librería Dinámica
msvbvm60.dll	Librería Dinámica
oleaut32.dll	Librería Dinámica
olepro32.dll	Librería Dinámica
VB6ES.DLL	Librería Dinámica
VB6STKIT.DLL	Librería Dinámica

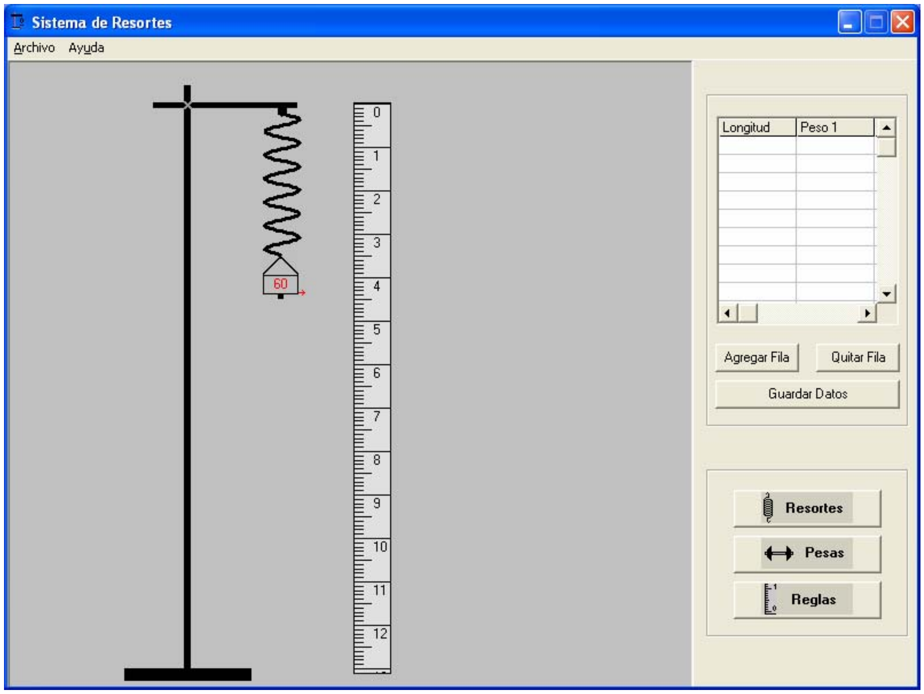
[1] El programa Sires ha sido desarrollado por Emir Martínez Abarca, en la línea de investigación del grupo dirigido por el Dr Jaime Arrieta, en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Acapulco, México.

Al ejecutar el programa sires.exe aparecerá una ventana donde podrás encontrar:

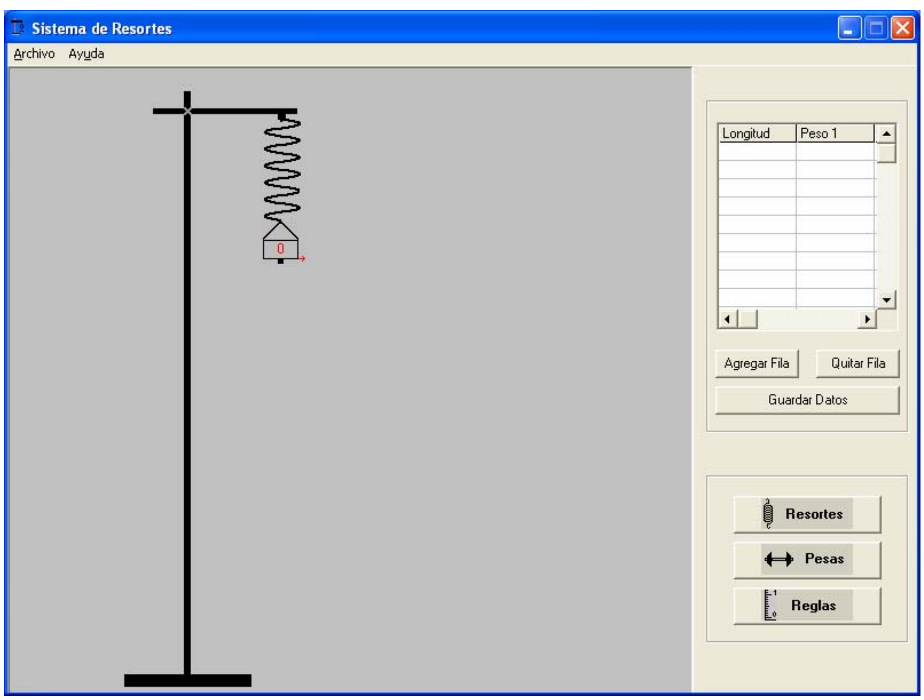
- Un *área de herramientas* con tres cajones, uno donde se guardan tres tipos diferentes de resortes, otro donde se guardan pesas de 15, 20, 50 y 60 gramos y otro más donde se guardan dos reglas.
- Un *área de datos* con una hoja para hacer anotaciones con tres botones: uno que permite agregar una nueva fila al final de la lista, otro para borrar una línea seleccionada y un tercero que permite guardar la tabla.
- Por último, un *área de trabajo* donde deberás montar el arreglo.



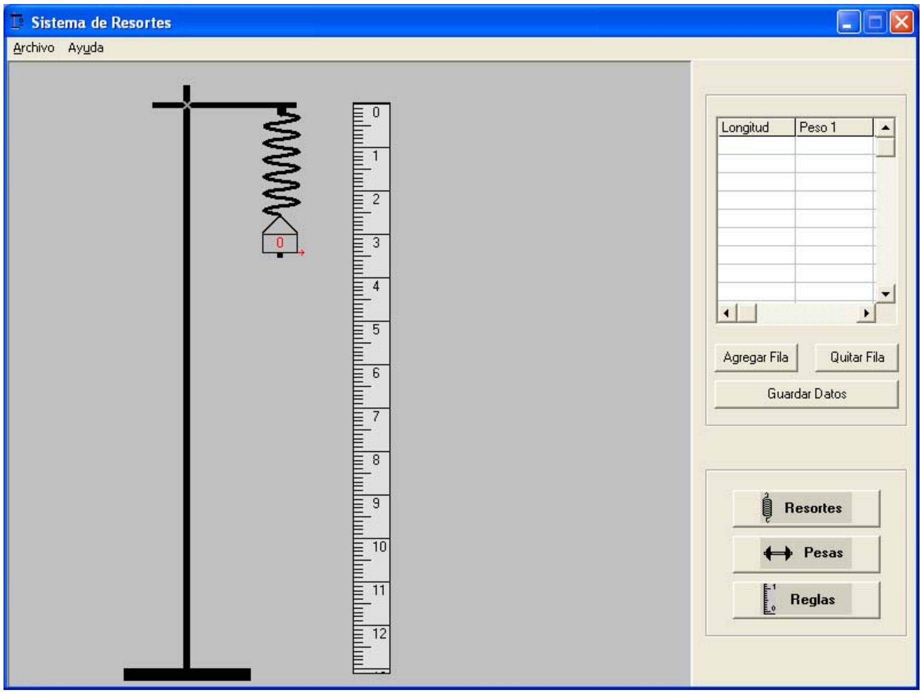
Esta actividad consiste en, con la ayuda del programa, montar el siguiente arreglo



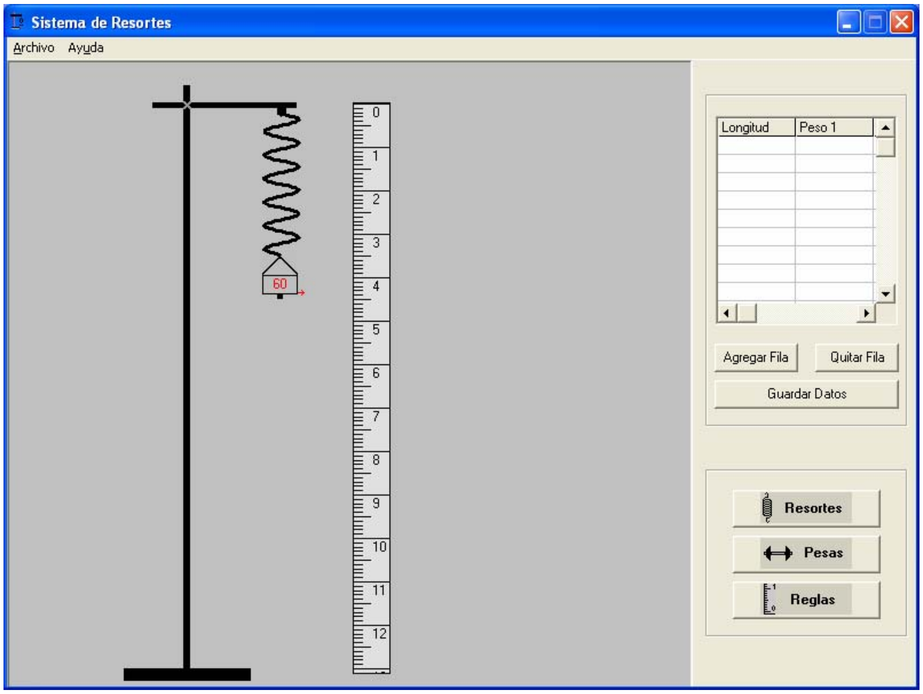
Para colocar un resorte has clic con el ratón en el resorte escogido, luego coloca el ratón donde quieras que sea colocado el resorte y has clic. Se puede trabajar con uno o dos resortes, según lo requiera la actividad. En nuestro caso, sólo trabajaremos con uno.



Para seleccionar una regla, sólo debes abrir la caja y hacer clic sobre la regla seleccionada. La misma aparecerá al lado del soporte. Se puede mover haciendo clic sobre ella y arrastrando el ratón hacia la posición querida.

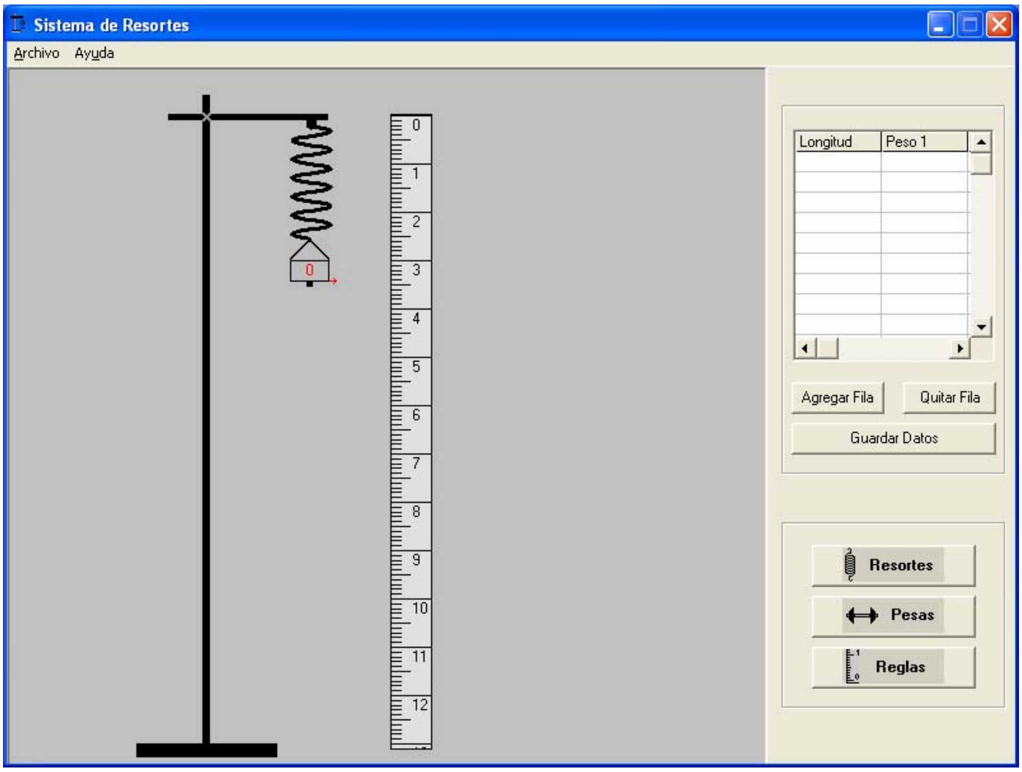


Para colocar una pesa en un portapesa selecciona la pesa con el ratón, luego has clic y posiciónate con el ratón en el portapesas deseado y has de nuevo clic. Es posible poner más de una pesa en el portapesas.



Para quitar una pesa, coloca el ratón en el portapesas de donde quieres quitar la pesa y has clic, pon el resorte fuera del sistema de resorte y has de nuevo clic (se quita la última pesa que fue agregada).

Elige un resorte, una regla y arma un arreglo similar a este:



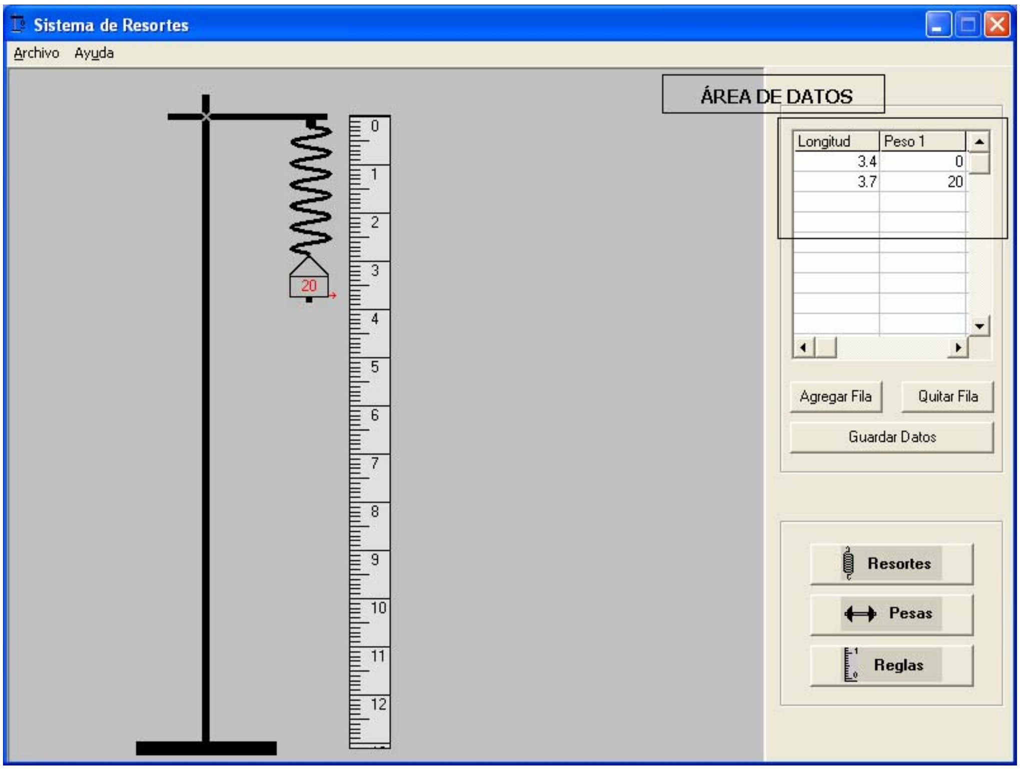
Una vez que hayas montando el arreglo y te hayas familiarizado con el manejo del mismo, comienza a desarrollar la siguiente actividad.

1. ¿Qué variables intervienen en este fenómeno? Describe cómo se relacionan

2. Organiza los datos obtenidos en la experimentación en la siguiente tabla.

Peso (g)	Posición del portapesas (mm)
0	
20	
40	
60	
80	
120	

Recuerda que tienes disponible el área de datos donde puedes ir guardando los datos que obtengas en tu experimentación.



¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan 70 gramos?

3. ¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 50 gramos?

¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 45 gramos?

¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 28.3 gramos?

4. Cambia el resorte y construye la siguiente tabla con los datos de la experimentación

Peso (g)	Posición del portapesas (mm)
0	
20	
40	
60	

80	
100	

¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 25 gramos?

¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 7 gramos?

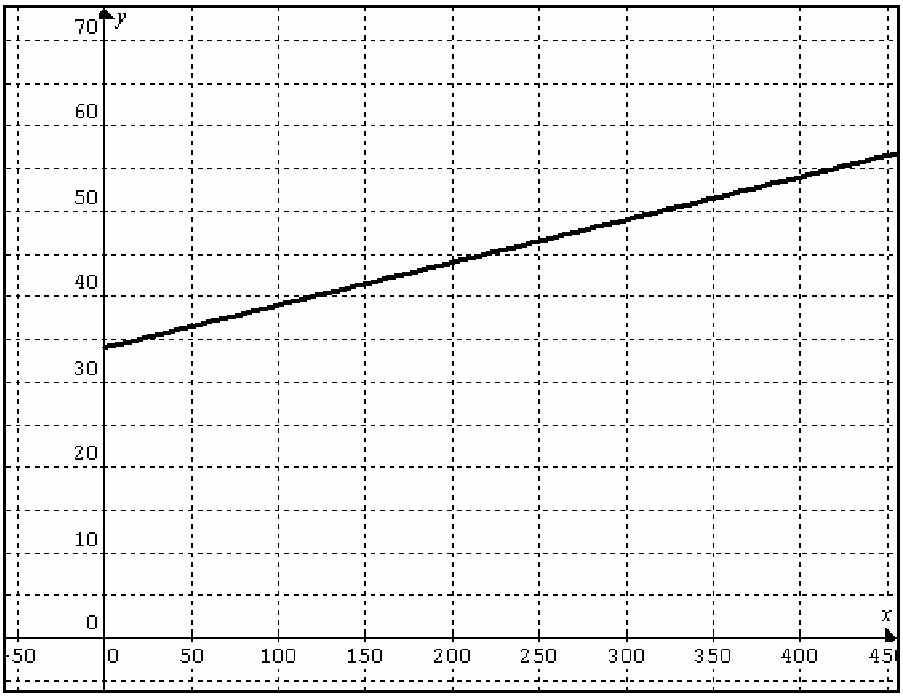
¿Cómo determinaste las posiciones? ¿Qué estrategia utilizaste?

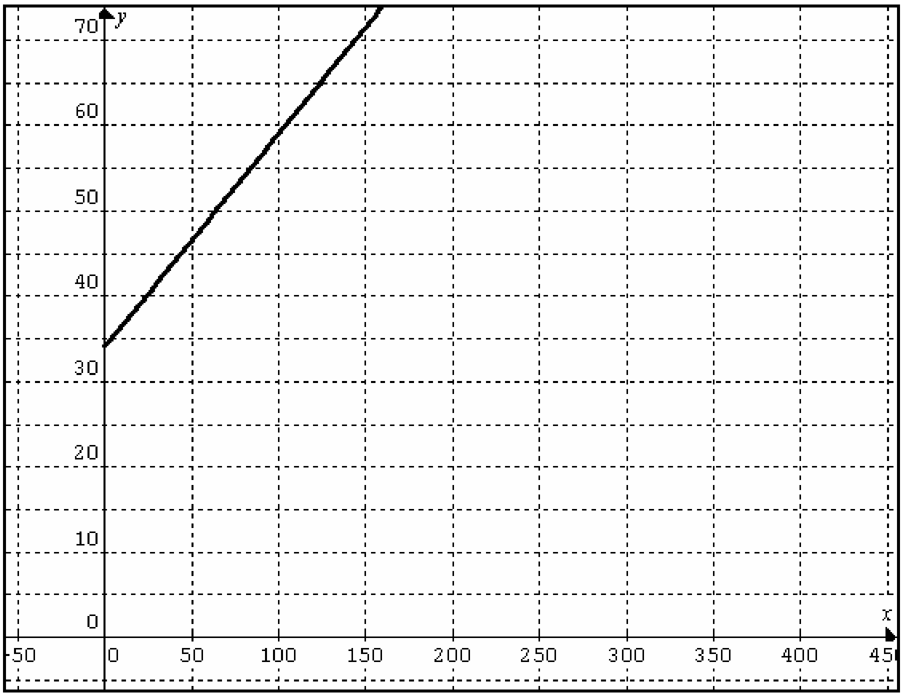
5. ¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan p gramos?

6. Representa gráficamente estos datos sobre un sistema de ejes cartesianos.

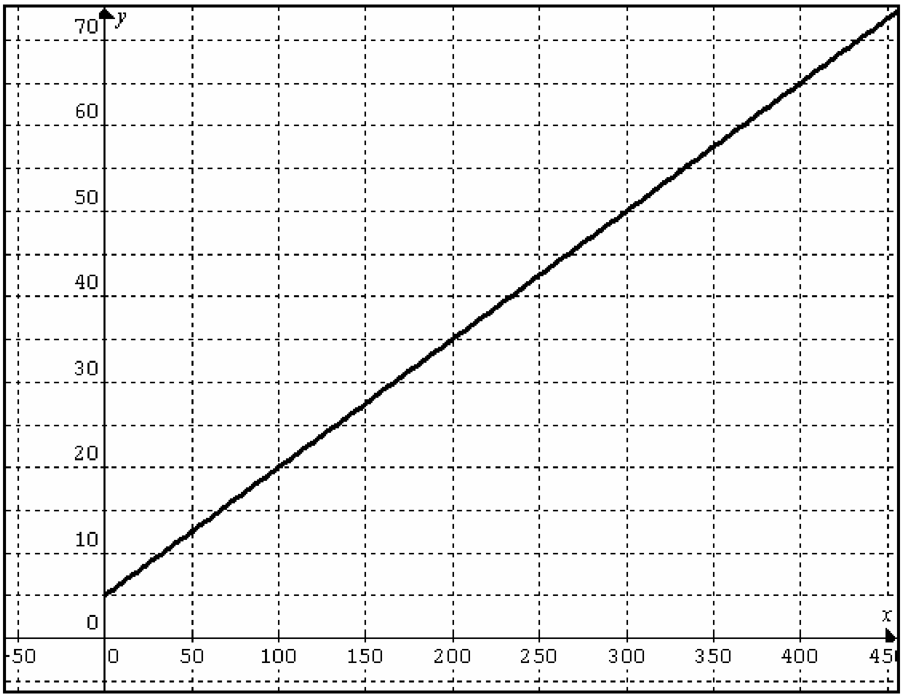
   Utilizando la gráfica, ¿cómo calcularías la posición del portapesas después de colocar 64 gramos?

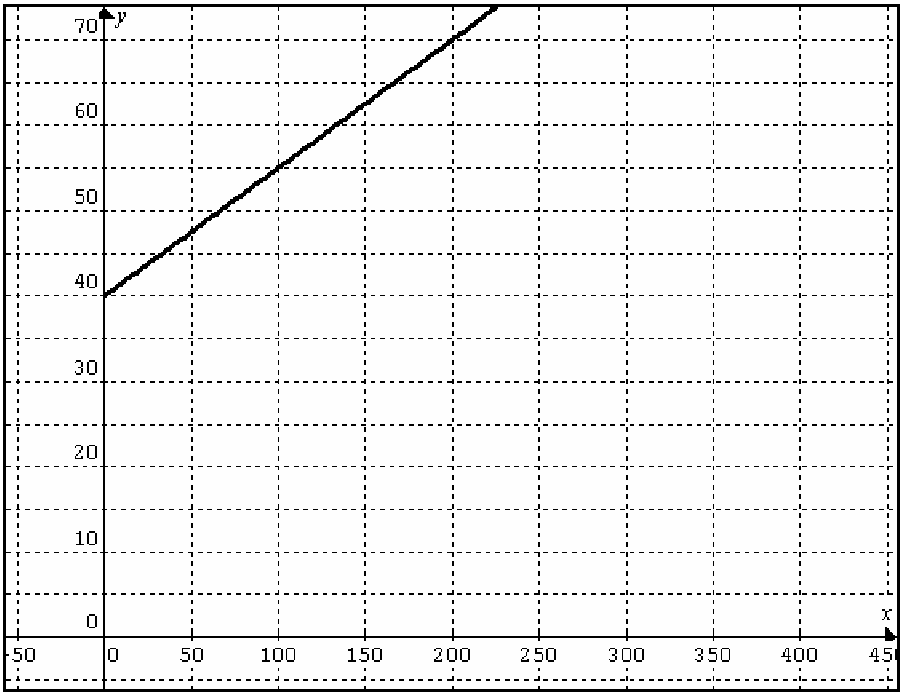
7. En cada caso, indica cuáles deberían ser las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre la longitud del resorte y el peso sea el dado:


y
70
60
50
40
30
20
10
0
x
-50
0
50
100
150
200
250
300
350
400
45


y
70
60
50
40
30
20
10
0
x
-50
0
50
100
150
200
250
300
350
400
45

8. En cada caso, indica cuáles deberían ser las condiciones del problema para que el gráfico que representa la relación entre la longitud del resorte y el peso sea el dado:





1era Parte

CICATA del IPN

Programa de Maestría en Matemática Educativa

http://www.matedu.cicata.ipn.mx

Curso:

Naturaleza del Pensamiento Matemático

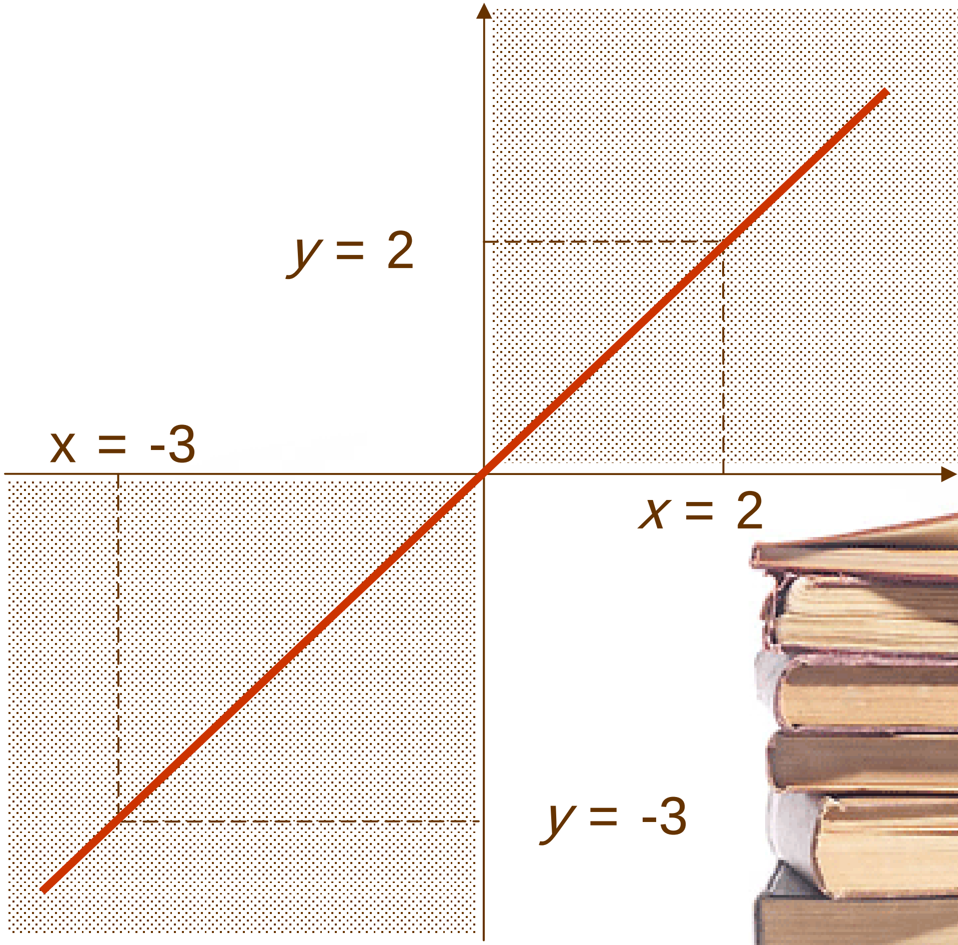
Unidad III. Operaciones Gráficas

Al hablar de operaciones gráficas nos referimos a sumar, multiplicar y dividir los gráficos que representan ciertas funciones en el plano cartesiano, en forma análoga a las operaciones que regularmente realizamos con números y variables.

Para iniciar nuestra actividad vamos a tomar a la gráfica de la función $f(x)=x$ como nuestra primitiva, o gráfica inicial.

Nuestra función primitiva se caracteriza porque a cada valor de *x*, nuestra variable independiente, le corresponde el mismo valor en *y*. Su gráfica viene por debajo del eje *x* (es negativa), cruza el eje (punto que denominamos como raíz) y continúa creciendo, ahora por arriba del eje (es positiva).

Nuestra primitiva, la función identidad



Si en la función $y = x$ la raíz se encuentra en (0, 0), ¿dónde estará la raíz de $y = x - 2$?, es decir, ¿qué valor debe tomar x para que y tome el valor de cero?, ¿dónde está la raíz de la función $y = x + 3$?, ¿dónde la raíz de la función $y = x + B$?

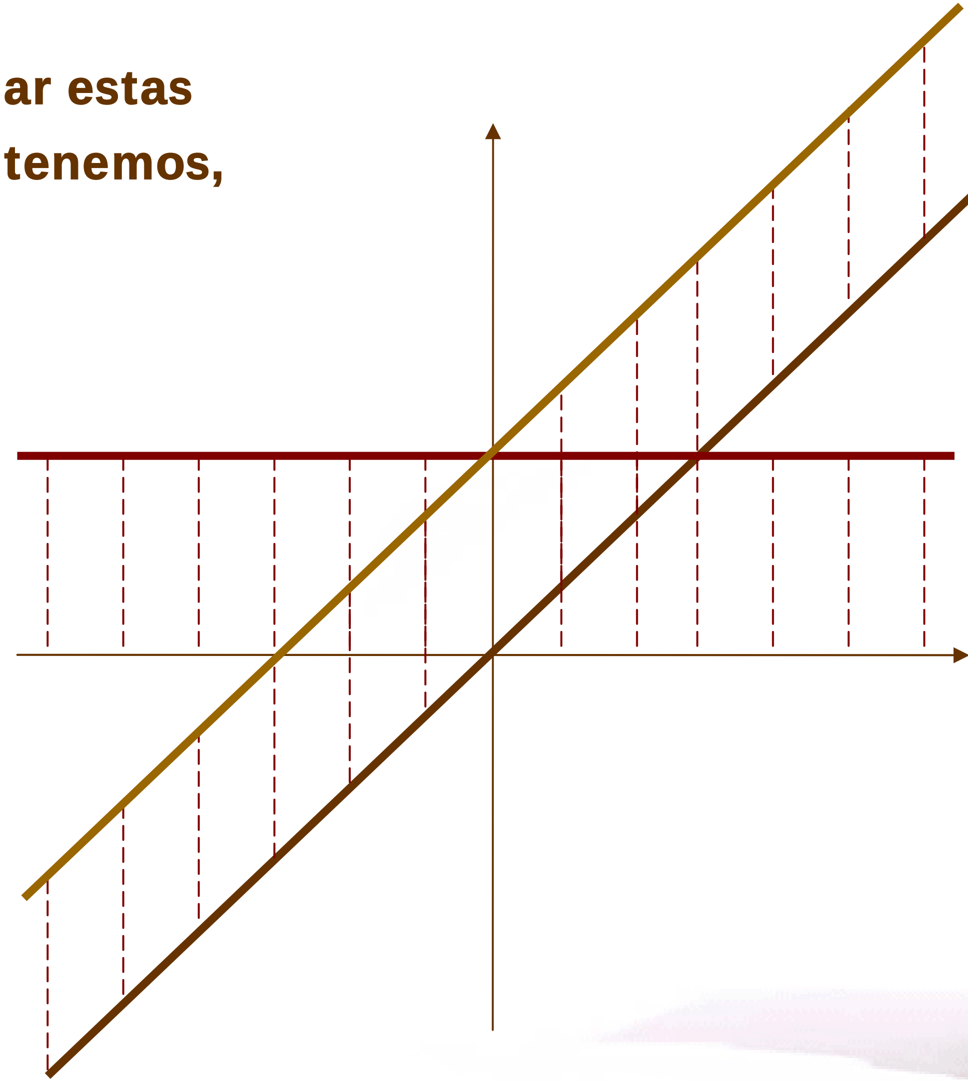
Iniciando con las operaciones

SUMA

$y = x + B$ puede interpretarse como la suma de la función primitiva (identidad) más la función constante. Gráficamente esta suma puede hacerse mediante las alturas de ambas funciones. Por ejemplo, $g(x) = B$ tiene las mismas alturas para todo x,

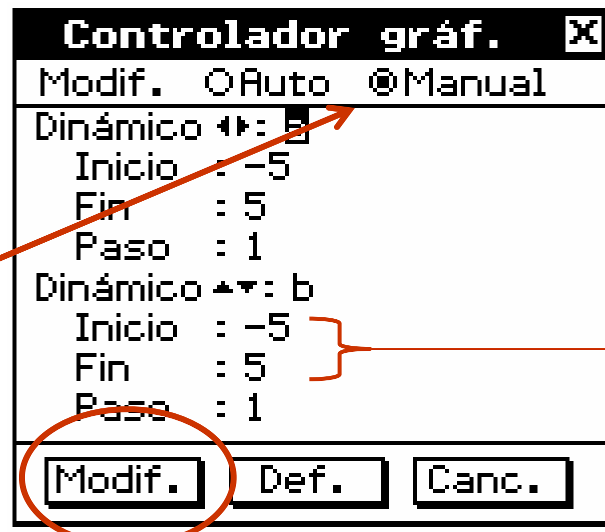
Sumando una constante

así que al sumar estas alturas a *f*(*x*) tenemos,



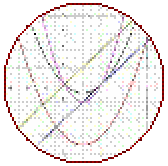
Para el ejemplo que acabamos de realizar es claro que *B* es una constante positiva, por ello colocamos las alturas por arriba de f(x)=x. Sin, embargo, pudiera no serlo. Utiliza el Classpad Manager para graficar $y=x+b$ y a través del controlador gráfico darle varios valores a *b*. utiliza los siguientes parámetros:

Manual



Rango

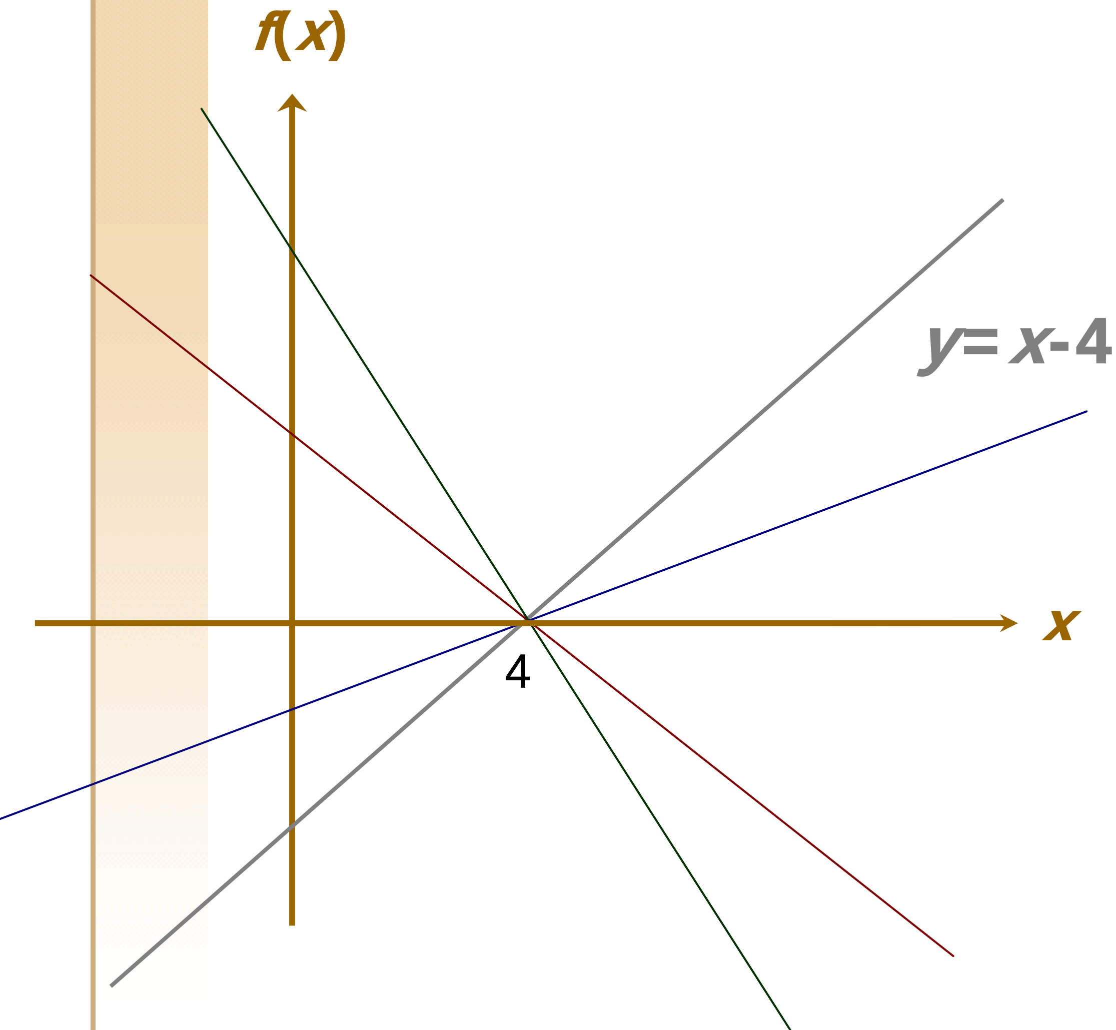
Apoyo: Video 1



Secuencia 4

Parte I. Resuelve sobre el archivo en Word que te hemos proporcionado. Las gráficas deben ser del software Graphmatica para hacer distinciones de color.

La recta $y = x - 4$ tiene raíz en (4, 0) por el desplazamiento que -4 provoca en la función primitiva.

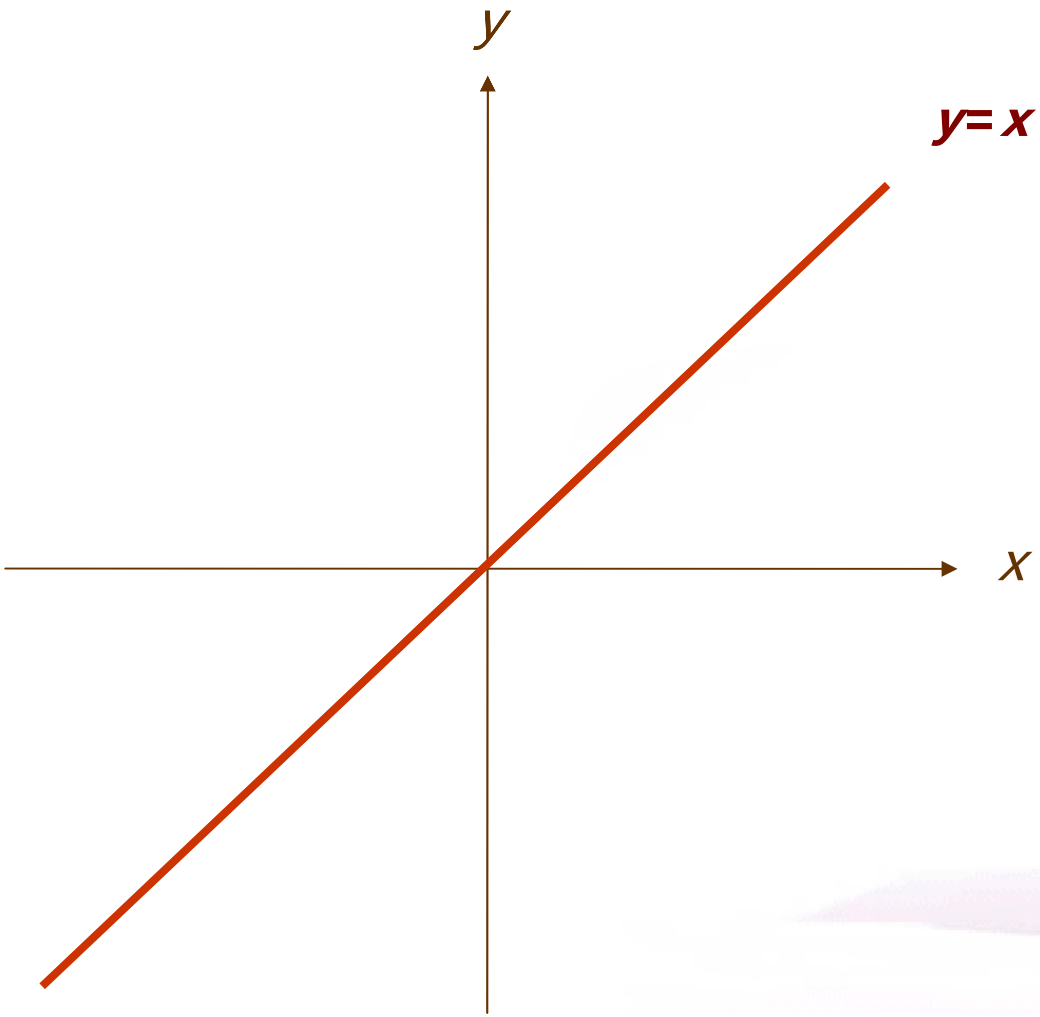


Estas tres rectas también tienen raíz en (4, 0), ¿cuál es la diferencia entre todas ellas?

La siguiente operación

MULTIPLICACIÓN

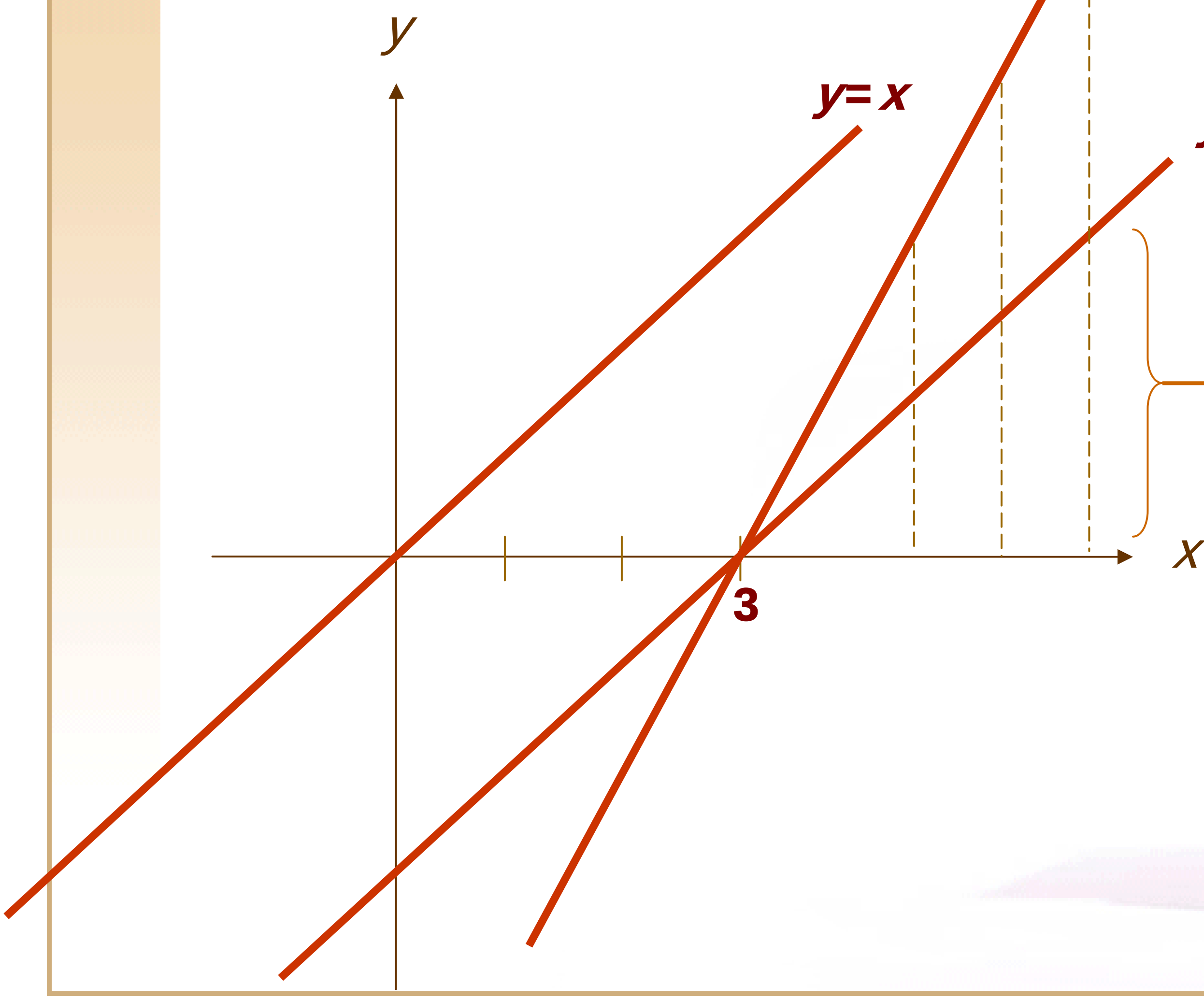
... multiplicando por una constante



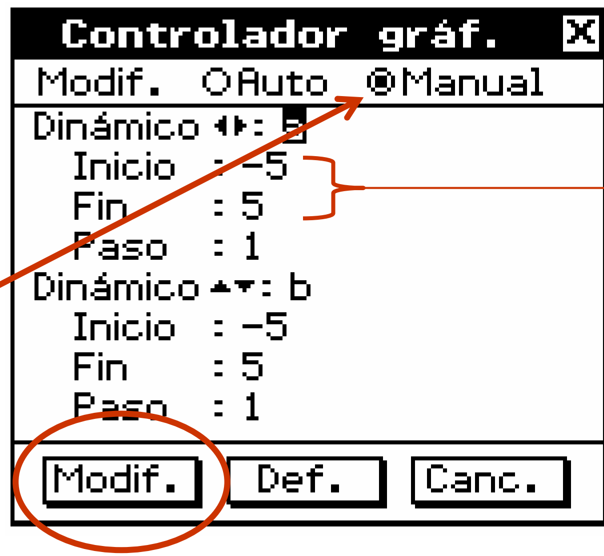
¿y=A (x+B)?

Duplica las alturas

... ejemplo $y = 2\,(x-3)$



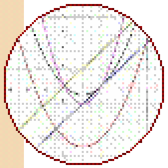
Utiliza el Classpad Manager para graficar $y = a\,(x + b)$ y a través del controlador gráfico darle varios valores a *a*. utiliza los siguientes parámetros:



Manual

Rango

Apoyo: Video 2



Secuencia 4

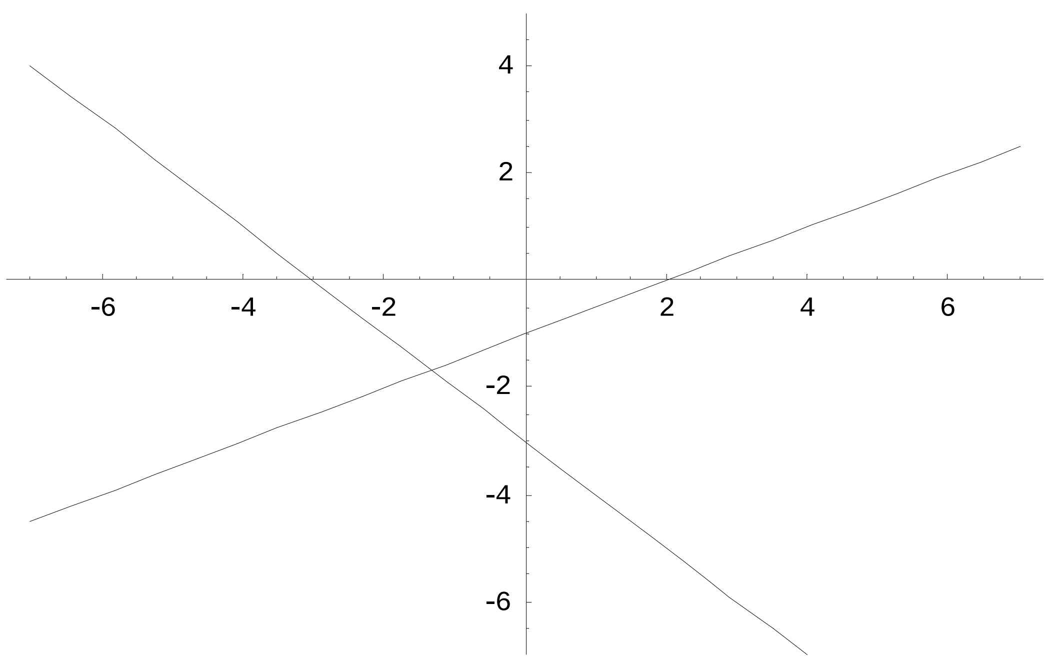
Parte II. Resuelve sobre el archivo en Word que te hemos proporcionado. Las gráficas deben ser del software Graphmatica para hacer distinciones de color.

Lee cuidadosamente las preguntas, contesta amplia y detalladamente.

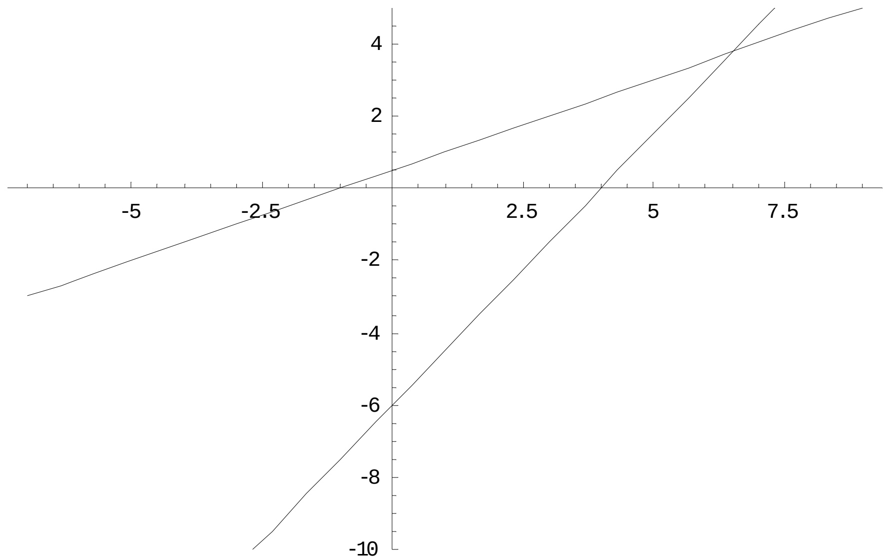
Parte I

1. Con un ejemplo (dos rectas cualesquiera) muestra en los registros numérico, gráfico y algebraico, que la suma de dos rectas es también una recta.

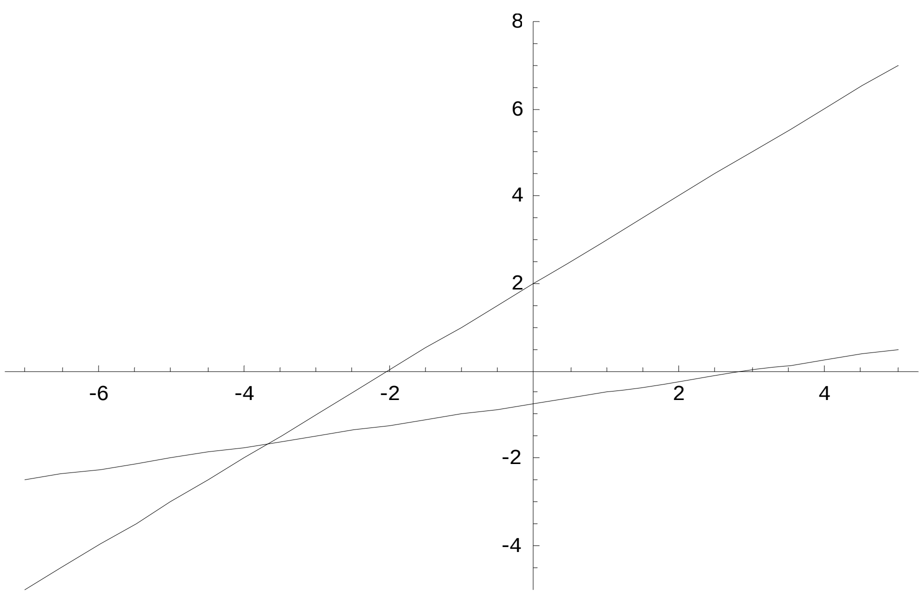
2. Utiliza las herramientas de dibujo de Word y bosqueja la recta resultante de sumar las rectas de cada plano (al final agrupa todos los elementos para que no se modifique tu gráfico).



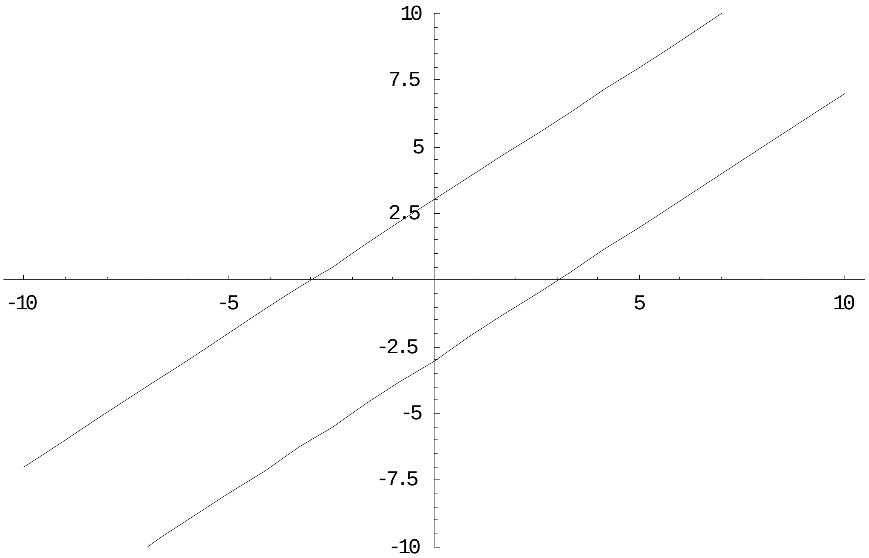
Plano 1



Plano 2



Plano 3



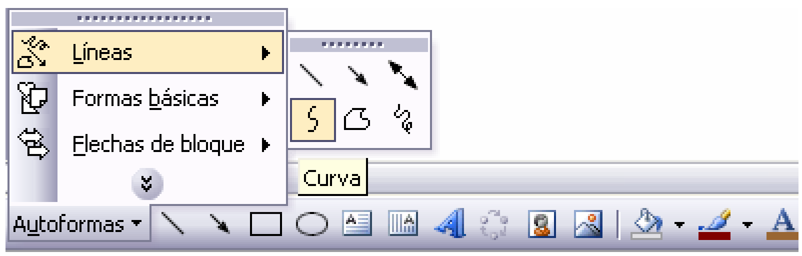
Plano 4

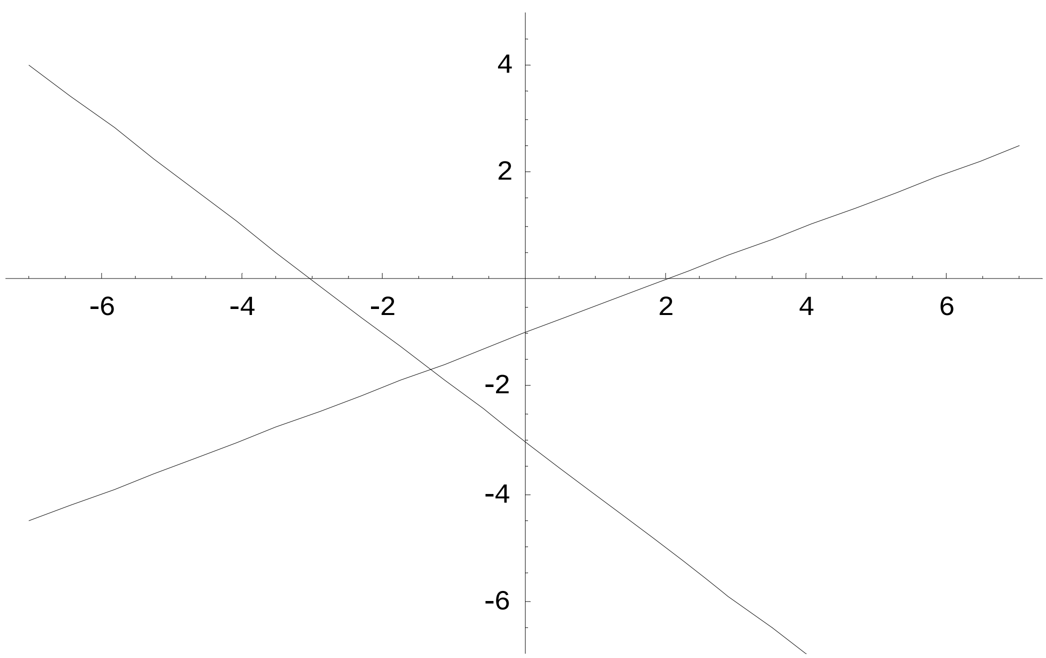
3. ¿Cuantos puntos son necesarios, como mínimo, para definir una única recta?

Parte II

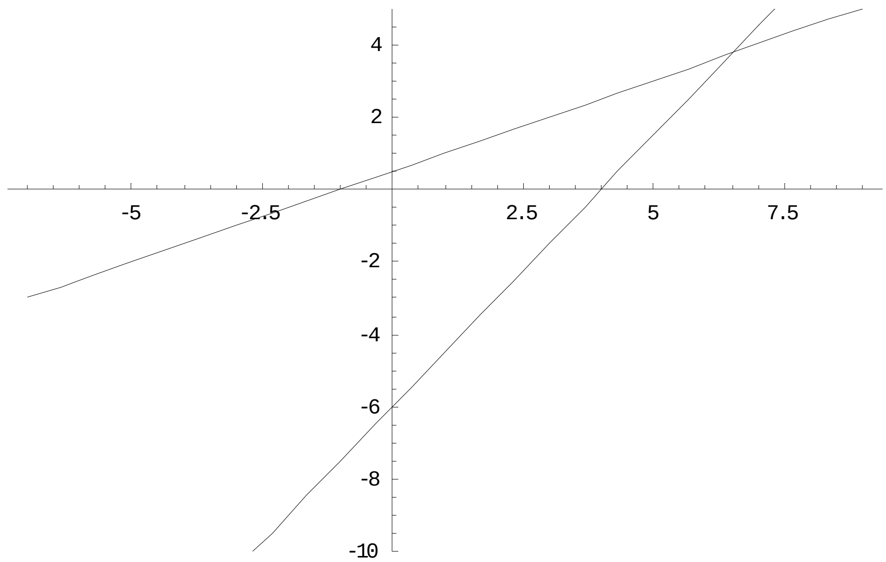
4. Con un ejemplo (dos rectas cualesquiera) muestra en los registros numérico, gráfico y algebraico, que la multiplicación de dos rectas no es una recta.

5. Utiliza las herramientas de dibujo de Word y bosqueja la recta resultante de sumar las rectas de cada plano (al final agrupa todos los elementos para que no se modifique tu gráfico).

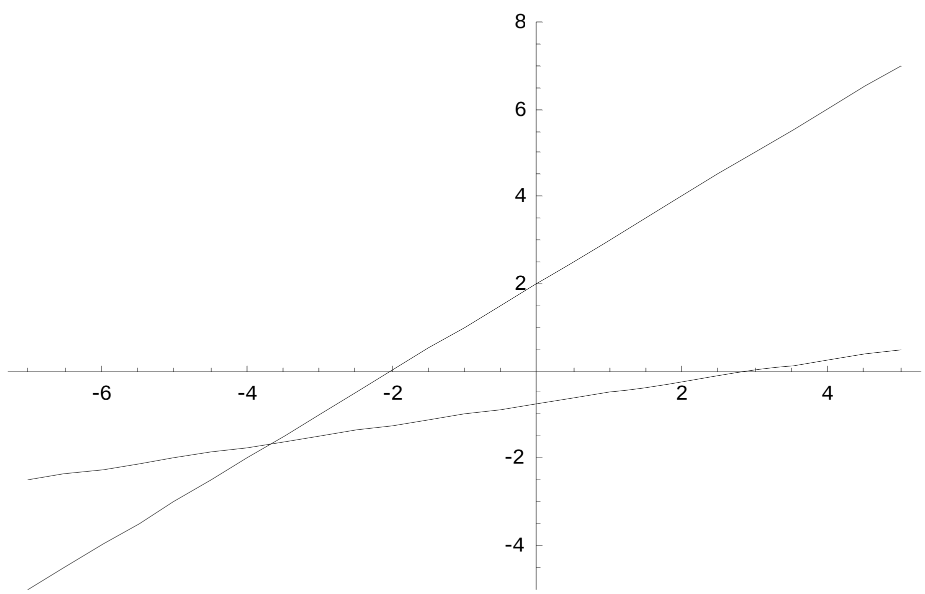




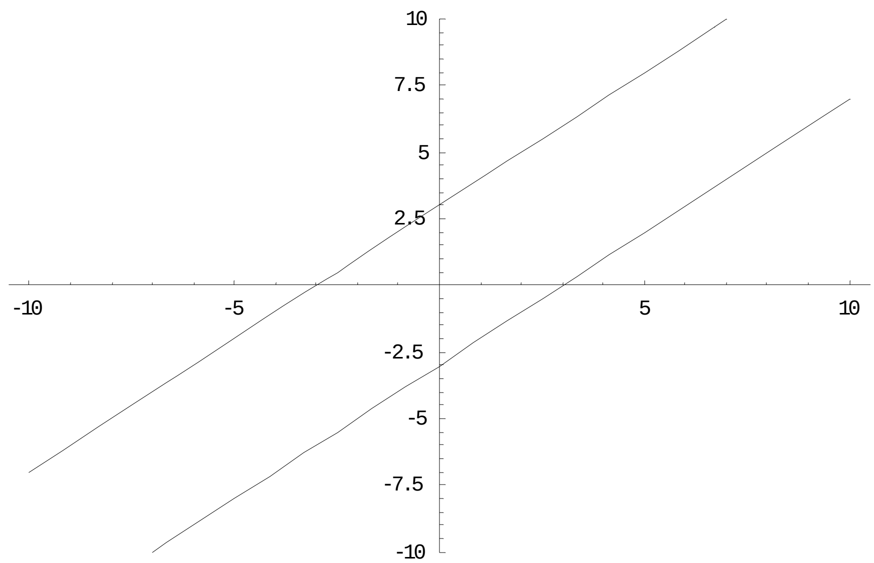
Plano 5



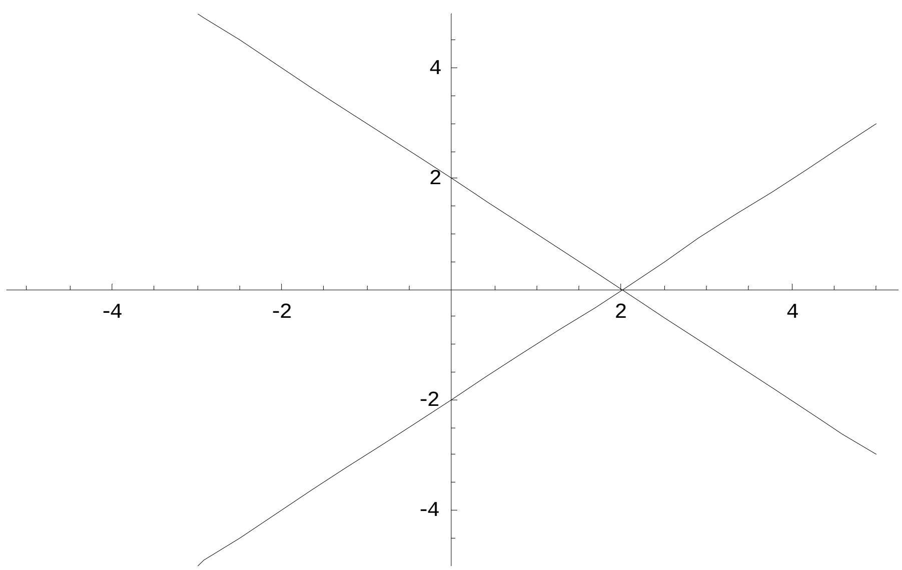
Plano 6



Plano 7

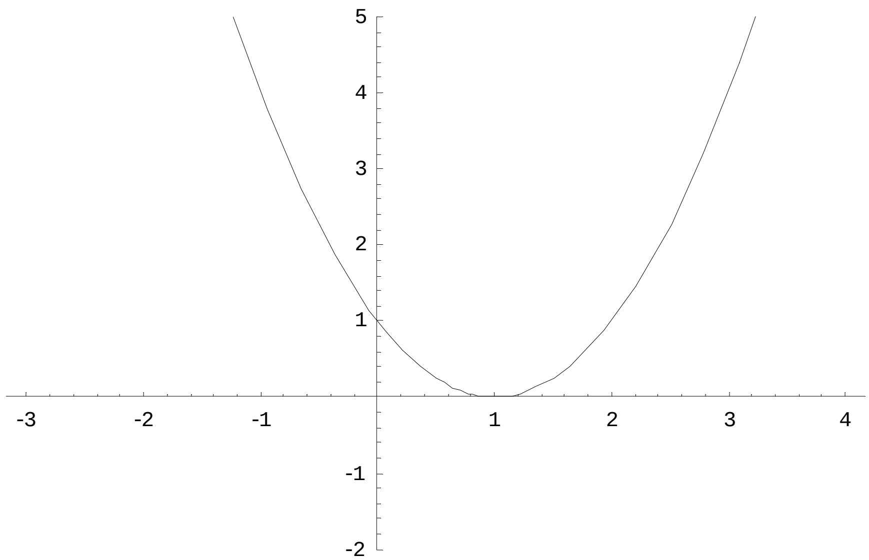


Plano 8



Plano 9

6. ¿Qué rectas (expresión y gráfica) multiplicadas producen la siguiente curva?



Anexo C

Notas sobre la didáctica de la función

Notas sobre La Didáctica de la Función

Introducción

El concepto de función se ha estudiado desde distintos paradigmas de nuestra disciplina, la Matemática Educativa (ME), de modo que hoy día contamos con resultados de investigación que pueden explicar algunos fenómenos didácticos y/o proporcionar variables didácticas para el diseño de situaciones problema.

La preocupación por el cómo aprenden los estudiantes o qué concepciones tiene sobre un concepto particular favoreció el desarrollo de investigaciones de corte cognitivo (Bell y Janvier, 1981; Breidenbach, et al., 1992; Dreyfus, Eisenberg, 1991; Dubinsky, Harel, 1992; Harel, et al., 1992; Hitt, 1998; Tall, 1996; Vinner, 1983; 1992). Estos trabajos de investigación reportaron distintos matices del concepto cuando se llevaba a escenarios escolares. Por ejemplo, su aprendizaje mediante el tránsito, vínculo y manejo adecuado de sus representaciones se ha convertido en un paradigma para líneas de investigación tales como la visualización.

Con la evolución de la disciplina y la ampliación de sus objetos de estudio se integran nuevos elementos a la investigación: el discurso matemático escolar y el conocimiento matemático específico. Estos elementos se encuentran en íntima relación al momento de estudiarlos, al conocer el origen y trayectoria evolutiva del concepto matemático se hace evidente la transformación que ha sufrido para llegar al aula y formar parte del discurso matemático escolar, aunque en este último sean las condiciones escolares, culturales y sociales, las que más peso tengan en la actividad didáctica.

Didáctica de la Función

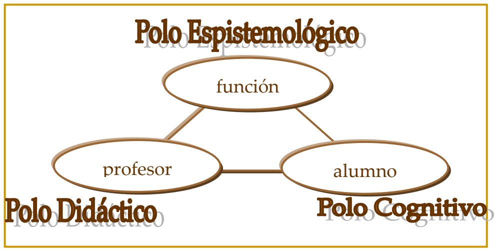
Debe entenderse cómo didáctica un proyecto social para que uno o más alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau, 1986). En esta acepción se hace hincapié en:

a) el papel del saber, pues en el proyecto educativo no tiene carácter didáctico más que lo que es específico del saber,

b) el carácter social del proyecto y

c) los protagonistas y el carácter intencional de la acción.

Es decir, se asume como ciencia encargada de estudiar las condiciones en las que se crean los conocimientos, se comunican y se emplean para satisfacer las necesidades sociales. En consecuencia, para hablar de la didáctica de la función debemos tomar en cuenta la naturaleza epistemológica del concepto, su transposición didáctica y los procesos cognitivos que permiten al estudiante apropiarse de dicho concepto. Sin embargo, la perspectiva cognitiva fue la primera en proporcionar resultados respecto del aprendizaje de la noción de función. De ahí que la mayor parte de las innovadoras propuestas de enseñanza – aprendizaje atiendan aspectos de visualización de la función mediante el tránsito y vinculo de diversos registros de representación, así como la resolución de problemas en contextos de aplicación.



Desde la Perspectiva Cognitiva

Bell y Janvier (1981) fueron quizá de los primeros en reconocer en los estudiantes algunas concepciones y habilidades al trabajar con el concepto de función, como por ejemplo:

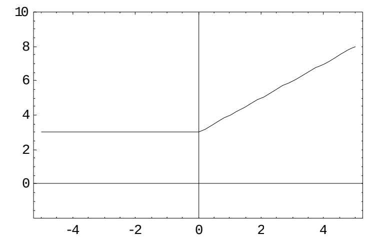
- Los alumnos son capaces de interpretar un gráfico punto a punto, pero muchos son incapaces de darle toda su significación global.

- Los gráficos, en numerosas ocasiones los observan como simples configuraciones visuales. Confunden el gráfico con el recorrido en las situaciones de movimiento.

- Tienen muchas dificultades para identificar el intervalo en el cual el incremento de la función (lineal o no) es máximo. Responden siempre con el valor de la función. Esto señala la tendencia que tienen a dar la respuesta en referencia a un punto más que a un intervalo. Este tipo de respuestas con indica que la interpretación puntual de los gráficos esta profundamente anclada en la cognición de nuestros estudiantes y les impide avanzar hacia una percepción mas global.

En el marco del Desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado, entre los años 80s y 90s, se desarrolló una explicación teórica alrededor del aprendizaje del concepto de función con base en los resultados de diversas experiencias de aula. Viner (1983) y Tall (1996) acuñaron los términos *imagen del concepto* y *definición del concepto* para explicar cómo el estudiante usaba dichas imágenes para resolver problemas que involucraban a la función, más que la definición establecida en la exposición del profesor o en los textos. Para los autores apropiarse del significado de la noción de función implica formar una imagen de la misma, es decir, tener estructuras cognitivas que se asocien al concepto, incluyendo sus representaciones mentales, procesos y propiedades asociados, más que la definición formal del concepto, y con el cúmulo de experiencias en el aula acercar las imágenes del concepto a la definición del mismo.

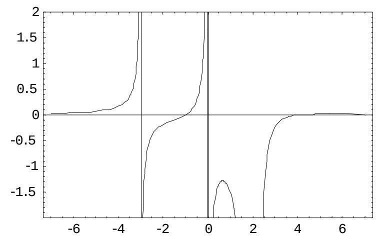
Entre las aportaciones de éstos trabajos de investigación rescatamos la exposición de las concepciones de los estudiantes respecto del concepto de función: asumen como función sólo aquellas cuyas gráficas tengan forma regular, rechazando las compuestas por intervalos por ejemplo (a); una función definida por n intervalos se asume como n funciones (b); en la gráfica de una función discontinua se consideran las *partes* como funciones distintas (c); dados los pares ordenados en una tabla, se asigna a cada par ordenado una función (d); entre otras:



(a)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & si \quad x < 0 \\ -x^2, & si \quad 0 \leq x \leq 10 \\ sen \quad x, si & x > 0 \end{cases}$$

(b)



(c)

x	y	
-5	4	-> de la función Y1
-3	2	-> de la función Y2
-1	0	-> de la función Y3
1	-2	-> de la función Y4
3	-4	-> de la función Y5
.	.	….

(d)

También dentro de la perspectiva cognitiva, pero en un paradigma distinto, Dubinsky y Harel (1992) y Breidenbach, et al., (1992) hacen una extensión del análisis piagetiano de la percepción y de la inteligencia usando el marco teórico de la abstracción reflexiva mediante *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* (conocida en la jerga como teoría APOE), para hablar de la apropiación de las nociones. En términos generales, en lo que respecta a la noción de función, reportan la complejidad de pasar de la concepción de acción a la concepción de proceso, debido a ciertas restricciones, como por ejemplo la restricción debida a su concepción de lo que es una función (restricción de manipulación, restricción de cantidades, restricción de continuidad en la gráfica). Se refieren a una concepción de acción cuando el alumno requiere de las instrucciones precisas, como por ejemplo del empelo de fórmulas algebraicas de la función para estar en condiciones de realizar transformaciones sobre ella, por ejemplo evaluar en puntos específicos o realizar la composición de dos funciones haciendo las sustituciones correspondientes, digámoslo así, haciendo sólo un paso a la vez. Una concepción de proceso significa bajo este enfoque, el tener una idea más dinámica, poder pensar a la función como algo que recibe una o más entradas y que regresa salidas o encontrar la inversa de una función. Esta etapa requiere de la coordinación de varias acciones. La concepción de objeto se logra cuando se manipulan las funciones mediante otras acciones y procesos, por ejemplo, cuando se derivan. Lograr la concepción de esquema involucra acciones, procesos y objetos del concepto de función, y distingue cuales pertenecen a cada esquema.

Estas explicaciones no excluían aspectos como la tradición escolar, simplemente no fueron analizadas a detalle. Por ejemplo Eisenberg y Dreyfus (1991) reportan que la reluctancia a visualizar en la clase de matemáticas puede deberse tanto a factores cognitivos como sociales, y en éste último aspecto se refieren a la transposición didáctica que sufre el contenido matemático y a su exposición escolar, pero destacan con mayor énfasis el papel de los elementos visuales en la tradición matemática, tanto científica como escolar.

Por otra parte, autores como Douady y Duval hacen explícito el papel que juegan las representaciones en la adquisición de la noción de función. Douady (1986; 1995; 1996), en su dialéctica *herramienta-objeto*, reporta la existencia de dificultades para considerar a las funciones como *herramientas* en el trabajo matemático y, de forma más notoria, para traducir al contexto de funciones aquellos problemas que han sido planteados en otros contextos matemáticos como el numérico, geométrico, o externos a la matemática y que requieren de una *traducción* para ser resueltos. Mientras que Duval (1999) establece que se aprende en la medida que se abstrae el objeto (el concepto de función) de sus representaciones, proceso en el cual es importante la adquisición de representaciones semióticas y el tránsito entre ellas.

En las aproximaciones teóricas anteriores se le confiere un estatus importante al manejo de las diferentes *representaciones* del concepto de función, ya sea en términos de imágenes del concepto, concepciones de acción, proceso, objeto y esquema o herramienta-objeto. La formación del pensamiento científico, particularmente en matemática, está íntimamente ligado al desarrollo de simbolismos específicos para *representar* a los objetos y a sus relaciones, por tanto, el progreso de los conocimientos implica la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos (Ferrari, 2001).

Con los *Fundamentos de* la *Teoría de Situaciones Didácticas* (Brousseau,) se sentaron las bases para una disciplina científica encargada de analizar, estudiar y teorizar sobre los fenómenos didácticos que surgen de la interacción sistémica del profesor y el estudiante respecto de un saber matemático escolar en particular. Establecida la unidad indivisible de análisis y los fundamentos de la teoría, se construyeron metodologías de investigación y diseño de situaciones didácticas, en forma natural nacen líneas de investigación y nuevas teorías que aportan elementos para la explicación de los fenómenos didácticos y amplían sus componentes, a saber, la didáctica, cognitiva y epistemológica.

En este sentido las dificultades con el aprendizaje del concepto de función no se podían limitar al manejo y articulación de sus representaciones. A la par de algunas posturas cognitivas se desarrollaban investigaciones sobre los *obstáculos epistemológicos*[1] del concepto de función, obstáculos inherentes al concepto y no así a las particularidades de las maneras de enseñar, que además, son propios de la construcción de una cultura y son obstáculos objetivos para nuevos modos de conocer.

Para hacer un análisis epistemológico de conceptos matemáticos, a fin de desentrañar significados, representaciones, contextos, usos y problemáticas perdidos en el proceso de transposición didáctica, la investigación en matemática educativa ha usado regularmente el método histórico como fuente principal de evidencia (publicaciones originales y estudios especializados).

De la Historia a la Epistemología del Concepto

Para hablar del desarrollo del concepto de función desde sus ideas germinales Youschkevitech (1976) hace referencia al *Desarrollo de la Idea de Función* en tres etapas: Antigüedad, Edad Media y Periodo Moderno, contemplando el trabajo matemático desde los babilonios hasta mediados del Siglo XIX.

[1] Obstáculo epistemológico es un concepto que acuña Bachelard en 1938 y que Brousseau introduce en 1983 a la Didáctica de las Matemáticas.

En la Antigüedad se carece del lenguaje simbólico que caracteriza a una función por su fórmula, no hay expresiones algebraicas, algoritmos y mucho menos expresiones analíticas. Sin embargo, con el trabajo de babilonios y griegos se construyeron los cimientos matemáticos de todo el desarrollo subsiguiente de la astronomía, y si bien hay un instinto de relación funcional (por ejemplo aquella que guardan cuerdas de longitudes desiguales con arcos de longitudes desiguales) no se desarrolla la idea general, la cual constituye la idea base del concepto. Aun más importante se carece de alguna alusión a esa idea más abstracta y general mediante la que se unifican las dependencias concretas e independientes entre cantidades o números, en cualquier forma (descripción verbal, tabla o gráfica). Ello indica que la construcción de relaciones tabulares no implica la percepción de la relación funcional.

Las ideas de cambio y cantidad variable eran ajenas al pensamiento de los griegos, el concepto cinemático de cantidad fluyente fue característico del cálculo infinitesimal de los siglos XVII, XVIII y XIX. Los límites de la geometría antigua no quedaron realmente superados más que cuando se tomo en consideración la variación continua de determinados elementos numéricos o geométricos ligados unos a otros.

Entre los siglos XIV y XVI las formas geométricas y mecánicas se convierten en las expresiones de las nociones generales de relación y dependencia, pero no se contaba con el lenguaje simbólico que pudiera definir la dependencia de dos cantidades.

El estudio de los fenómenos relacionados al cambio y la variación introduce conceptos como velocidad instantánea, aceleración y cantidad variable, a la par que la idea de que las leyes cuantitativas de la naturaleza eran leyes de tipo funcional va madurando en el campo de la filosofía natural. Las teorías desarrolladas en el Siglo XIV parecen estar basadas en el uso consciente de las ideas generales acerca de las cantidades variables dependientes e independientes, y aun cuando no se encuentran las definiciones directas de estas cantidades variables dependientes e independientes, cada una de ellas es designada mediante algún término en especial, la definición a una función se da mediante una descripción verbal de su propiedad específica, o directamente por medio de una gráfica. Entre los trabajos más característicos de esta nueva ciencia del cambio encontramos los de Oresme (1325-1382), que podemos resumir en cinco ideas innovadoras (González, citado en Pascual y Lacaste, 1998): la medida de diversas variables físicas por medio de segmentos, algún tipo de relación funcional entre variables, una aproximación a la introducción las coordenadas mediante la representación gráfica de las relaciones funcionales, la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo y una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo.

Sin embargo, surge una desproporción evidente entre el alto nivel de las especulaciones teóricas abstractas y la debilidad del aparato matemático (Youschkevitech, 1976). El impetuoso crecimiento de los cálculos matemáticos, el desarrollo del álgebra simbólica (literal) y la extensión del concepto de número[2] han constituido, por así decirlo, los preliminares del concepto de función como relación entre dos conjuntos numéricos más que como cantidades.

De Cotret (1985) a partir de elementos históricos, como los anteriores, realiza el primer análisis epistemológico para dar una explicación de

[2] Que a finales del S. XVI abarcaba los números naturales y complejos

fenómenos de aula. Sobre el origen y evolución histórico-epistemológicos del concepto señala:

- La evolución histórica del concepto muestra que la idea de variable dependiente es la base del concepto de función, idea que requiere de la noción de variación
- La costumbre de expresar todas las relaciones entre las cosas bajo la forma de proporciones es un obstáculo al desarrollo del concepto de función.
- La homogeneidad que conducía a comparar siempre magnitudes de la misma naturaleza, pudo ser también un obstáculo al desarrollo de la función, puesto que obscurecía e impedía encontrar, de forma significativa, dependencia entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional.
- La inconmensurabilidad y las paradojas (Zenon) son obstáculos a la noción de función, puesto que discretizan los números y esto impide que se establezcan relaciones generales numéricas entre las magnitudes.
- Es unificando la física y la matemática (la causa del movimiento con la cantidad abstracta) como se sientan las bases de la noción de función.
- Estudiar los movimientos de forma cuantitativa por medio de la experimentación contribuyó al desarrollo del concepto de función

Años más tarde, Sierpinska (1992) reporta los obstáculos de la construcción del concepto de función, pero con carácter de epistemológicos:

- Los objetos variables son aceptados en las ciencias naturales o en las aplicaciones pero no en la matemática pura
- Las magnitudes son entidades cualitativamente diferentes de los números, la proporcionalidad es diferente de la igualdad.
- Fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con las expresiones algebraicas.
- Lo más importante de la matemática es proveerse de un cálculo poderoso que permita a los científicos resolver problemas
- Los objetos geométricos son tomados implícitamente como un todo que contiene en sí mismo sus longitudes, áreas o volúmenes.

Con base en experiencias de aula y los obstáculos epistemológicos localizados, distingue 19 categorías en la comprensión del concepto:

1. la identificación de los cambios observados en el mundo que nos rodea,
2. la identificación de regularidades en las relaciones entre los cambios como medio para tratarlos,
3. la identificación de los objetos que cambian,

4. discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, y otro en término de variables y constantes,

5. discriminación entre variable dependiente y variable independiente,

6. generalización y síntesis de la noción de número,

7. discriminación entre cantidad y número,

8. síntesis entre el concepto de ley y el concepto de función; en particular, conocimiento del posible uso de las funciones en la modelización de relaciones entre magnitudes,

9. discriminación entre una función y las herramientas analíticas que se usan a veces para describir su ley,

10. discriminación entre definiciones y descripciones de objetos,

11. síntesis de la concepción general de la función como un objeto,

12. discriminación entre los conceptos de relación y función,

13. discriminación entre las nociones entre función y sucesión,

14. discriminación entre coordenadas de un punto de una curva y los segmentos "rellenos" de la curva de ciertas funciones,

15. discriminación entre la función y sus diferentes representaciones,

16. síntesis de las diferentes formas de expresar las funciones, representar las funciones y hablar sobre funciones,

17. generalización de la noción de variable,

18. síntesis de los roles de la noción de función y de causa, y

19. discriminación entre las nociones de relación causal y funcional.

En esta explicación sobre la comprensión del concepto en el estudiante, podemos distinguir tanto aspectos cognitivos como epistemológicos, es decir, entra en la discusión, sobre el aprendizaje en el estudiante, el papel que juega un concepto matemático muy particular y los obstáculos ligados a su construcción original. Añade a su explicación aspectos de motivación y contextualización, conocimientos previos y modalidades de exposición.

Epistemología, Cognición y Didáctica de la Función

Ruiz (1998) extiende la explicación de Sierpinska a un plano epistemológico–didáctico donde, si bien hace un análisis exhaustivo de los resultados de corte cognitivos (algunos discutidos anteriormente) de otros autores, caracteriza las concepciones que manifiestan los alumnos sobre la noción de función, atendiendo a los distintos aspectos que configuras dichas concepciones: las propiedades invariantes que reconocen, las representaciones y las situaciones en que se usa el concepto, tratando además de poner de manifiesto las condiciones y restricciones que sobre ellas ejerce el sistema de enseñanza en el que están situados los alumnos. Está última consideración añade a las explicaciones anteriormente discutidas el cómo vive la función, como concepto escolar, en un sistema educativo muy particular.

Ruiz parte de establecer las concepciones asociadas a la evolución histórico-epistemológica de la noción de función:

- identificación de regularidades en los fenómenos sujetos al cambio (relación entre cantidades de magnitudes variables)
- razón o proporción
- gráfica (visión sintética)
- curva (analítico-geométrica)
- expresión analítica
- correspondencia arbitraria (aplicación)
- función como terna,

describiendo detalladamente las situaciones que le dan origen, las invariantes, sus representaciones y el momento histórico de referencia. En seguida, cataloga los obstáculos epistemológicos en:

- Obstáculos a nivel de creencias y convicciones:
    - obstáculo de la concepción estática,
    - obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y números.
- Obstáculos a nivel de esquemas de pensamiento:
    - obstáculo de la razón o proporción,
    - obstáculo de la homogeneidad en las proporciones,
    - obstáculo de la concepción geométrica de las variables.
- Obstáculos a nivel de conocimiento técnico:
    - obstáculo de la concepción algebraica,
    - obstáculo de la concepción mecánica de la curva.

Al estudiar el fenómeno de *transposición didáctica* que sufre el concepto de función, lo distingue como objeto a enseñar (analizando los programas oficiales del sistema educativo español del nivel secundaria), como objeto de enseñanza (analizando el discurso de presentación en los libros de texto) y como objeto enseñado (analizando los apuntes de los estudiantes).

Identifica en los programas oficiales la inducción de la concepción de función como *aplicación entre conjuntos numéricos*, estructurada en:

- Polinomios-Ecuaciones
- Proporcionalidad de magnitudes (aritméticas y geométricas)

- Cálculo Infinitesimal (sucesiones, función, función derivada, función primitiva,…)
- Logaritmos (Función Logarítmica)
- Trigonometría (Función Trigonométrica)
- Estadística
- Significado práctico de las funciones como descripción de fenómenos

Respecto de los libros de texto (manuales escolares), caracteriza las nociones que induce en:

- Expresión algebraica o fórmula
- Curva representada en un diagrama cartesiano
- Aplicación entre conjuntos numéricos.

Y finalmente, extrae de los apuntes del estudiante fenómenos efecto de los contratos didáctico, escolar, pedagógico y de enseñanza que viven, explícita o implícitamente, en el salón de clase:

- la *programabilidad* de los temas,
- permanencia de la convicción en los Diagramas de Venn como soporte intuitivo primordial e ideograma gráfico riguroso,
- presentación de *reglas económicas* y *códigos* para reducir la incertidumbre (y el error) en el estudiante,
- la *transaccionalidad* o progreso en el tiempo del saber a enseñar,
- uso de *herramientas semióticas* (praxemas) como objetos de enseñanza que no figuran en el saber sabio,
- la enseñanza deforma el objeto función adaptándolo fuertemente a sus necesidades de *evaluabilidad* rompiendo epistemológicamente con los problemas y contextos a los que está ligada esta noción desde su nacimiento,
- presentación y manipulación del concepto mediante la progresión: criterio-fórmula, construcción de tablas, determinación de dominios, representación gráfica,
- la gráfica se concibe como un fin en sí mismo y no como un instrumento del trabajo matemático del alumno. Posteriormente se convierte en un instrumento de significación para objetos matemáticos definidos con alto grado de rigor y formalización (continuidad, límite, etc.) y, sobre todo, descontextualizados. Esto es, el gráfico se vuelve necesario en el discurso del profesor para salvar la distancia entre el rigor y la intuición,

tomando en consideración la influencia de la *noosfera*, en tanto la valoración de la actividad del alumno en el aula, la economía del sistema didáctico, como motor de la estructuración del conocimiento, y la evaluación a la que están sujetos estudiantes y profesores. Con ello configura las concepciones sobre la función que induce el profesor en situación de enseñanza:

- fórmula algebraica,
- curva representada en ciertos ejes cartesianos,
- aplicación entre conjuntos numéricos.

Finalmente, mediante un cuestionario organizado y diseñado con la intensión de explorar, distinguir y caracterizar las concepciones de los estudiantes, Ruiz realiza la tipología (distinguiendo en cada tipo las invariantes, las representaciones asociadas y situación que le da sentido):

a. algoritmo de cálculo

b. expresión algebraica

c. gráfica, a partir de la fórmula

d. ideograma (algebraico y gráfico)

e. correspondencia entre conjuntos numéricos

f. transformación

En sus conclusiones finales, Ruiz señala y aclara las inconsistencias, obstáculos didácticos y obstáculos a nivel de los conocimientos en los alumnos, y confirma sus hipótesis iniciales:

- las concepciones locales y parciales de los alumnos tienen aspectos coincidentes con las concepciones determinadas en la evolución histórica,
- la enseñanza enfatiza el tratamiento de la función como un objeto de estudio en sí mismo, minimizando su consideración como herramienta de la actividad matemática,
- el conjunto de restricciones del sistema de enseñanza induce concepciones muy limitadas y parciales en los alumnos, que se constituyen en obstáculos para la formación de una concepción más general y completa de la noción de función,
- los alumnos utilizaron preferentemente otros criterios de decisión que reflejan estadios anteriores de la concepción epistemológica de la función como aplicación.

Este estudio se constituye como el más completo sobre el fenómeno didáctico alrededor del concepto de función. Podemos distinguir una ampliación en el problema, tomando en cuenta las condiciones donde se lleva el fenómeno en estudio: aquellas que impone el sistema de enseñanza. Pero incluso considerando la componente epistemológica como pieza fundamental tanto en la caracterización de las concepciones en los estudiantes, cómo en las explicaciones de fenómenos didácticos y el diseño de ingenierías didácticas, las investigaciones anteriores consideraron al concepto "Función" en general. Esto es, las funciones algebraicas, exponencial, logarítmica y trigonométrica son tratadas por igual.

Sin embargo, la funcionalidad del concepto mismo puede marcar una diferencia significativa en el tratamiento de los diferentes tipos de funciones, lo cual no se vio reflejado a nivel de investigación y propuestas didácticas hasta recientes fechas. Esto es, atender a la naturaleza epistemológica de las funciones algebraicas y trascendentes, y dentro de las trascendentes la naturaleza epistemológica de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, en diferente estatus, sin ignorar las aportaciones alrededor de la función en general.

Aproximación Socioepistemológica al Estudio de la Función

La visión sistémica, ha permitido explicar los fenómenos didácticos en términos de cómo se enseña, cómo se aprende y qué se aprende. En esta dirección Farfán (1997) reporta una investigación que buscó significar entre profesores universitarios el concepto de convergencia de series infinitas, cuya hipótesis inicial planteaba como indispensable la significación que le daba origen al conocimiento matemático en juego y que, en este caso, era la determinación del estado estacionario. Sin embargo, este concepto físico no es producto de la primera experiencia sensible, se encontró que su abstracción representaba una tarea cognitiva muy compleja. En consecuencia el ámbito de la determinación del estado estacionario no resultó propicio para recrearse en el aula pues resultó ser aun más complejo que aquél que se deseaba introducir, el de la convergencia. A partir de aquí la autora se plantea poner más atención en los aspectos sociales de la construcción de conocimiento, aunque ello significara perder, en un cierto sentido, el ámbito propiamente escolar e incorporar otras prácticas de referencia (Cantoral y Farfán, 2003). En consecuencia *no podía centrar la atención en los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino tratar con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos*.

La aproximación teórica que incorpora estas prácticas a las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica recibe el nombre de *Aproximación Socioepistemológica a la Investigación en Matemática Educativa.* Desde esta aproximación se platearon preguntas importantes respecto del problema didáctico que plantea el estudio de la Función: ¿pueden aprenderse por igual, desde cualquier perspectiva, las funciones algebraicas que las transcendentes?, al incorporar una componente epistemológica a la explicación del fenómeno didáctico ¿no debemos atender la particularidad epistemológica de cada tipo de función: algebraica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, …? Con las investigaciones que nacen a partir de ese entonces, no se aceptó como válida la tesis que plantea que entender cómo se construye la noción de función desde un punto de vista epistemológico, cognitivo y didáctico, provee una explicación completa sobre la construcción de la noción de función trigonométrica, exponencial, o logaritmo (por mencionar a las más significativas) en escenarios escolares.

Sobre la Función Exponencial

Lezama (1999) en un estudio sobre la reproducibilidad de una situación didáctica establece en las fases de una ingeniería didáctica consideraciones alrededor de la función exponencial. Inicia considerando las dificultades para identificar distintas funciones, discriminar sus propiedades, darse cuenta de sus posibles aplicaciones e identificar las situaciones o fenómenos que modela, además de poderlas representar gráfica, tabular y analítica, así como transitar en dichas representaciones. Identifica la particularidad epistemológica de la función exponencial en íntima relación con la de la función logaritmo, siendo esta última definida a partir del estudio de las relaciones entre progresión geométrica y aritmética. Reconoce al modelo que construye Napier, auxiliándose de interpretaciones geométricas y físicas y contemplando como caso particular los valores discretos encontrados en la relación entre progresiones, como lo que permite el paso del caso discreto al continuo. A partir del pasaje anterior, se identificaron en el proceso de construcción de la función exponencial, las siguientes dificultades:

- dificultad para elevar números a distintas potencias, cada tipo de números que se maneje impondrá retos distintos y en ocasiones difíciles de interpretar el significado de la operación,

- dificultad en identificar la naturaleza y estructura en la función exponencial (estructura creciente, forma de crecimiento y la justificación del trazo continuo de su representación gráfica),

- dificultad en identificar la relación con la función logarítmica.

Finalmente, se consideran los señalamientos sobre los obstáculos y dificultades en el aprendizaje del concepto de función en general, como las que señalan Sierpinska (1992): *una posible consecuencia de identificar tablas de funciones con las funciones mismas es la creencia de que los métodos de interpolación dan los valores exactos de la función en puntos intermedios*, y Vergnaud (1990, citado en Lezama): *un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza; son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no esta en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo.*

Estas consideraciones, en conjunto con aquellas de naturaleza didáctica y cognitiva, componen el análisis preliminar para el diseño de la situación didáctica 2^x.

De esta investigación surgen nuevas preguntas alrededor de la construcción de algunos conceptos matemáticos específicos, como lo fueron los trabajos de Martínez (2000 y 2003) sobre la construcción de los exponentes no naturales. En su análisis preliminar Martínez localiza un mecanismo, al que denomina *convención matemática*, que posibilita la construcción de sistemas de conocimiento matemático. Posteriormente, con un diseño experimental, logra activar este mecanismo con grupos de estudiantes en situación escolar, mediante la contradicción o la necesidad de integración sistémica en los conocimientos matemáticos al momento de incluir un nuevo objeto de conocimiento.

Sobre la Función Logaritmo

Por su parte Ferrari (2001), considera las aportaciones respecto del aprendizaje de la función de distintos paradigmas como punto de partida en su investigación sobre la función logaritmo, pero se adentra en el devenir histórico–epistemológico del logaritmo para encontrar momentos relevantes de su desarrollo, significados y sentidos que pudieran haberse perdido en la transposición a escenarios escolares. Ferrari sintetiza su búsqueda caracterizando la construcción de la función logaritmo en tres momentos:

> … de nuestra indagación epistemológica concluimos entonces que en una primera instancia se pueden distinguir, bajo nuestra

óptica, seis etapas en el desarrollo de los logaritmos, a saber: *de exploración algorítmica, numérica utilitaria, gráfico-geométrica, de analiticidad, de simbolización, de formalismo* a las cuales, desde una perspectiva más global encuadramos en los tres momentos: los *logaritmos como transformación*, etapa que se desarrolla antes de su definición formal y que se refleja en las distintas exploraciones en torno a la formulación y extensión de las progresiones y en la búsqueda por facilitar engorrosos cálculos producto de necesidades sociales de la época; el momento *numérico utilitario,* cuando entran en escena Napier y Burgüi, definiendo por primera vez a los logaritmos; y finalmente el momento de *analiticidad* pues se logra su formulación en serie de potencias lo cual lo hace susceptible al análisis.

Posterior a este trabajo, Ferrari (2004) contempla a la covariación de progresiones aritméticas y geométricas como un argumento de discusión y construcción de las funciones polinómicas, exponenciales, potencia y logarítmica, aunque no generalizable a otras funciones tales como las trigonométricas. Esto la hace reafirmar su idea de reconocer la naturaleza propia de cada función.

Sobre la Función Trigonométrica

Finalmente, Maldonado (2005) y Montiel (2005) realizan estudios sobre la especificidad del fenómeno didáctico ligado a la función trigonométrica. Maldonado señala reporta que la relación (equivalencia) del radián y el real constituye el punto de partida para las Funciones Trigonométricas y concluye que al no hacerse explícito en el discurso matemático escolar provoca que para el estudiante sea indistinto el tratamiento de razón o de función. En nuestra opinión, hacer explícita dicha relación modificaría ligeramente las respuestas, pero es poco probable que modifique sus concepciones del concepto, ya que en realidad la explicación no genera la necesidad de cambiar la unidad de medida.

Por su parte Montiel propone una construcción social de la función trigonométrica a partir de las actividades ligadas al conocimiento en juego, las prácticas de referencia que lo producen y las prácticas sociales que lo inducen.

	Práctica Social		
	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física	Matematización de la Transferencia del Calor
Contexto Natural	Estático – Proporcional	Dinámico – Periódico	Estable – Analítico
Objeto Matemático Asociado	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica	Serie Trigonométrica
Variables en juego	$sen\ \theta$ θ ángulo (grados) $sen\ \theta$ longitud	$sen\ x$ x tiempo (radian-real) $sen\ x$ distancia	$sen\ t$ t tiempo (real) $sen\ t$ temperatura

Principios Básicos para la Construcción Social de la Función Trigonométrica

Es importante señalar que las investigaciones comentadas (Lezama, 1999 y 2003; Martínez, 2000 y 2003; Ferrari, 2001; y Montiel, 2005) ampliaron la problemática sistémica de la teoría de las situaciones didácticas, incorporando una componente a la construcción de conocimiento matemático. Fue quizá esta ampliación la que permitió localizar todas aquellas condiciones o factores que provocaran la necesidad de construir las nociones o conceptos de función exponencial, exponente no natural y función logaritmo.

La componente *social* afecta a las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva, pero sobre todo modifica su relación sistémica para explicar los fenómenos didácticos alrededor de la construcción de un conocimiento matemático particular en escenario escolar. Profundizando en estas investigaciones podemos distinguir momentos de uso del concepto (en tanto actividad humana), momentos de influencia cultural (como las prácticas sociales), etapas de consenso (teorización o consolidación de los conceptos), a la par que se distinguen las herramientas y contextos matemáticos accesibles para la evolución de nociones y conceptos. Dicho en otras palabras, encontraremos los factores sociales que generan conocimiento matemático, entendidos éstos como aquellas restricciones que pesan sobre los individuos por el sólo hecho de vivir en sociedad, y que no son estrictamente modificables por una voluntad individual (Martínez, 2003).

Referencias Bibliográficas

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nicholson, D. (1992). Development of the process Concept of function. *Educational Studies in Mathematics 23*(3), 247 – 285.

Boyer, C. (1989). *A history of mathematics*. New York: Wiley.

Brosseau, G. (1983). *Les obstacles épistemologiques et les problemes en Mathématiques*. Thése de Doctorat d'Etat. Université de Bordeaux.

Brosseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33 - 115.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003) Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 6*(1), 27 – 40.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (C. Gilman, Trad.). Argentina: Aique. (Trabajo original publicado en 1991).

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna, Italia : Pitagora.

Douady, R., (1986). Jeux de Cadres et Didactique outil-objeto. *Recherches en Didactique de Mathematique 7*(2), 5 - 31.

Douady, R., (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el* *aprendizaje de las matemáticas.* México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R., (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de Collége-Seconde. (P. Ferreiras-Soto, Trad.). En *Enseñanza de las matemáticas: relaciones entre saberes, programas y prácticas* (pp. 241-256). Francia: Topiques éditions.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). *On the reluctance to visualize in mathematics. Visualization in teaching and learning mathematics*. En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.) MAA Notes 19, 25 –38.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). (1992). *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Notes 25, MAA.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Restrepo. (Trabajo original publicado en 1995).

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, pp. 145 – 149). México: CLAME A. C.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representation linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior 17*(1), 123 - 134.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. K. (1990). Functions, graph and graphing: Task, learning, and Teaching. *Review of Educational Research 60*(1), 1 – 64.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Maldonado, E. (2005). U*n análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Monna, A. F. (1972). The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Bore and Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences 9*, 59 - 84.

Montiel, G. (2005) *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciencie in antiquity.* NY, USA: Dover.

Pedersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions. An essay in the history of Greek mathematics. *Archives Internationales D'Histoire des Sciencies 24*(94), 29 – 50.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Publicaciones de la Universidad de Jaén, España.

Smith, D. (1958). *History of mathematics* (Vol. 2). NY, USA: Dover.

Sierspinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.) *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Mathematical Association of America Notes Vol. 25, pp. 25 - 58). USA.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151 – 169.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. L. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Netherlands: Kluwer.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematics education, science and technology 14*(3), 293 – 305.

Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.) *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Mathematical Association of America Notes Vol. 25, pp. 195 - 213). USA.

Youschkevitch, A. (1976). El concepto de función hasta la primera mitad del siglo XIX. *Arch. for Hist. of Exact Sciences 16*, 37 – 85.