

LA VISUALIZACIÓN, COMO ESTRATEGIA DE ESTUDIO EN EL CONCEPTO DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Carlos Oropeza Legorreta, Javier Lezama Andalón

FESC - UNAM, CICATA - IPN

México

carlos_oropezamx@yahoo.es, jlezamaipn@gmail.com

Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado

Nivel: Superior

Resumen. En este trabajo nos apoyamos de experiencias en clase con estudiantes del curso de Álgebra Lineal, en las que se les proponen actividades que los conducen a elaborar representaciones de carácter geométrico de los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal. Estas experiencias ponen su atención en representaciones geométricas, que nos brindarán elementos para problematizar la adquisición de los conceptos de dependencia e independencia lineal, reconociendo en ellas una especial complejidad debido al nivel de abstracción que presentan. Es en los escenarios geométricos que podremos, a partir de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, encontrar los indicios de comprensión o no de dichos conceptos y estructurar preguntas precisas sobre la adquisición de los conceptos en Álgebra Lineal por parte de los estudiantes.

Palabras clave: visualización, combinación lineal, dependencia e independencia lineal

Introducción

La enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en las escuelas de ingeniería representa un conjunto de dificultades diferentes a las que se presenta, por ejemplo en el cálculo. En esta materia, es frecuente motivar la enseñanza de los conceptos a partir de otros conocimientos físicos o geométricos presentados previamente, pero en el álgebra lineal la mayor parte de conceptos son presentados por los libros de texto recomendados para su estudio, como definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene (en la mayoría de los casos) conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada. En el ámbito escolar, el carácter abstracto de esta materia ha obligado a la comunidad matemática de esta especialidad a reflexionar con relación a la búsqueda de representaciones diferentes del tema. Con el fin de clarificar las dificultades que enfrentan los alumnos al estudiar el concepto matemático de

dependencia e independencia lineal en polinomios de segundo grado que se aborda en la asignatura de álgebra lineal, en esta investigación se pretende hacer uso de las representaciones visuales para que los alumnos puedan incorporarlas en la búsqueda de significados en el concepto antes referido. Tradicionalmente los problemas asociados se resuelven usando la definición dada junto con argumentos derivados de la lógica. Esto hace que muchos estudiantes sientan que la materia es demasiado abstracta (se ha observado que en curso convencional los estudiantes son capaces de determinar si un conjunto de vectores forman o no un espacio vectorial, es decir pueden aplicar los axiomas con la dificultad inherente correspondiente, pero cuando se les cuestiona respecto a su significado, ellos no pueden articular una respuesta, entendemos este hecho como una manipulación algebraica carente de significado) y que los contenidos son objetos que no tienen relación con algo que se pueda aplicar en la realidad. Entre los problemas relativos al aprendizaje del álgebra lineal, están las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto y para las cuales no resulta muy claro para un estudiante que se trata del mismo objeto. Por ejemplo en un momento dado se puede presentar al conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo como un subespacio vectorial y en otro momento ese mismo conjunto se puede presentar como el núcleo de una transformación lineal o bien es frecuente ayudarse de la geometría en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 para visualizar la suma de vectores, pero es difícil usar la geometría para visualizar las sumas en espacios vectoriales como polinomios o matrices. El alumno se encuentra, entonces, con dos representaciones diferentes de la suma de vectores, una geométrica con una definición formal y otra enteramente formal para espacios vectoriales generales.

En busca de un Marco Teórico

Es mi interés encontrar un punto de vista que me permita reflexionar estrategias de la visualización, dentro de las perspectivas generales, los investigadores han desarrollado

múltiples marcos teóricos locales y metodologías que caracterizan de formas distintas el modo en que las preguntas de investigación se eligen y expresan y el modo en que son abordadas (afectando, por tanto, el tipo de resultados que se puede obtener y el modo en que son descritos). Artigue (2003). El desarrollo de las teorías que fortalecen la importancia de la visualización matemática, considerada como la habilidad para interpretar y representar de manera diferente la información percibida y la reflexión extraída de información visual, impone a los autores de textos considerar estas ideas para presentar nuevas propuestas de enseñanza. (Hitt, 2002). Arcavi (1999), admite haber combinado las definiciones de Zimmermann y Hershkowitz, declarando que la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo de reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento.

Por otra parte, la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como *“la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende”* (Cantoral & Montiel, 2002, p.24). En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura. La visualización de un problema matemático juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema.

Desde este punto de vista, en un primer acercamiento, no solamente es importante entender las dificultades para manipular cada una de esas representaciones, también lo es el análisis de las tareas de conversión entre representaciones que debemos proponer a

nuestros estudiantes. También es importante no priorizar alguna de ellas en detrimento de otras cuando estamos promoviendo un proceso de construcción de un concepto matemático.

Un par de exploraciones

El reporte que se presenta parte de experiencias escolares, hasta el momento se ha podido identificar algunos rasgos que muestran las dificultades en la interpretación del concepto de dependencia e independencia lineal, se ha observado por ejemplo, que los estudiantes pueden hacer uso de la visualización cuando al partir de un par de vectores como dato localizan cualquier punto en el plano, construyen una recta y con un conjunto de rectas forman la totalidad del plano. Al final de la actividad que se describe, algunos estudiantes llegan a la definición de combinación lineal como un resultado que refleja un cierto grado de generalización, pero cuando pasan al desarrollo de la segunda parte del diseño y los cuestionamientos son relacionados con aspectos visuales dentro del tema de los polinomios de segundo grado, los participantes no puedan llegar a categorizar si un conjunto de este tipo es linealmente dependiente o independiente (tal como se puede apreciar en el par de exploraciones propuestas en este documento).

Dentro de nuestra investigación, otro de los elementos que pretendemos estudiar son las dificultades que se puedan presentar en el uso y manejo por parte de los estudiantes del concepto denominado isomorfismo entre los polinomios de segundo orden y el espacio \mathbb{R}^3 , así como estudiar la propuesta que tiene que ver con el hecho de que los alumnos logren transitar en el sentido inverso, es decir, partir de un vector de posición en \mathbb{R}^3 y llegar a la representación de un polinomio de segundo grado de alguna manera. Además de utilizar el tránsito entre estas dos representaciones como una extensión de los antecedentes y características de los vectores libres con los que cuenta el estudiante y con ello replantear una propuesta alternativa que nos proporcione evidencias en cuanto a la disminución o no de las dificultades en el manejo de dicho concepto.

Del grupo de estudiantes de ingeniería que participaron en la puesta en escena, se muestran dos de las respuestas que ellos dieron. La comunidad estudiantil participante resolvió todas y cada una de las actividades que se han diseñado hasta este momento para tal efecto. La razón por la cual decidimos mostrar este extracto de su trabajo, es porque en él se pueden distinguir algunos de los rasgos que hemos encontrado en forma regular:

- Dan evidencia de que cuando hacen uso de la visualización como estrategia de estudio en el espacio de los vectores libres, ésta les puede ayudar en la reflexión y análisis de sus propuestas de solución y les permite replantear en cierto grado (cuando es necesario) las posibles correcciones de sus respuestas. Podemos considerar entonces que en dicho espacio vectorial, la visualización puede contribuir en el estudio de los conceptos de combinación lineal y de dependencia lineal.
- El reconocimiento de que la visualización se puede convertir en un obstáculo para caracterizar si un conjunto de polinomios de segundo grado es linealmente dependiente o independiente cuando se realiza la gráfica de las parábolas respectivas en el plano cartesiano.
- Manifiestan la necesidad de utilizar otras estrategias alternativas para lograr su objetivo, sin desprenderse de la propuesta emergida de la visualización, debido al rol de esta, en su vida cotidiana.

De esta reflexión, se abren nuevas interrogantes ¿es el contexto de los objetos matemáticos lo que no permite ver con claridad los resultados? , ¿Qué hace que los estudiantes no puedan entender el concepto de combinación lineal con polinomios de segundo grado? ¿Por qué no entienden con la misma claridad el asunto de sumar o restar un vector (polinomios)?

¿Por qué en los polinomios el estudiante no puede decir en forma directa si el conjunto que se le presenta es o no linealmente dependiente?

En el material de la figura 1 que se muestra a continuación, se aprecian las respuestas planteadas por un grupo de estudiantes, se observa que los estudiantes pensaron intuitivamente y proponen en sus respuestas que "la dependencia o independencia lineal se relacionaba con la existencia o no de un punto de intersección".

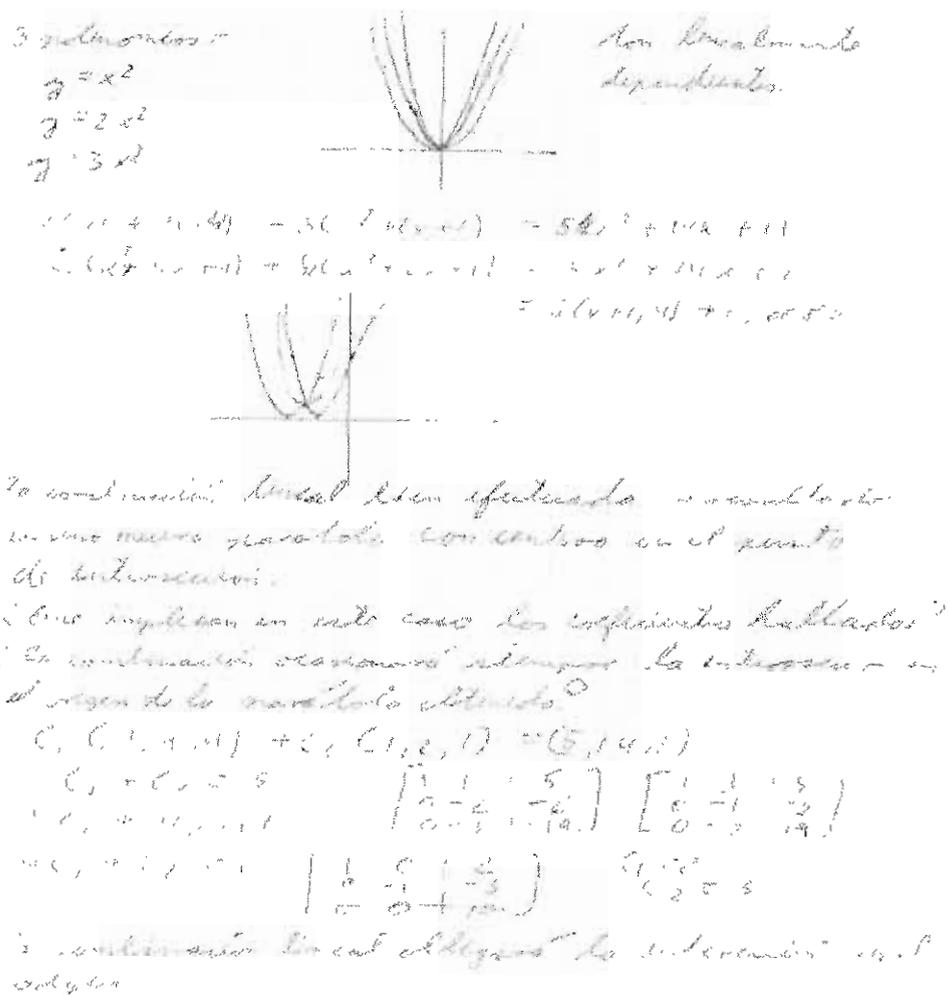


Figura 1

En la primera parte de esta figura se puede observar que la dependencia e independencia lineal en el espacio de los polinomios de segundo grado es determinada por el punto de intersección entre las parábolas correspondientes. En la segunda parte, se puede identificar la intención de generalizar su idea inicial, se aprecia que hacen uso de la definición de combinación lineal como un elemento que determina la producción de parábolas que se intersecan en un punto común, podemos considerar que su propuesta centrada en el análisis algebraico de casos particulares no les proporciona elementos suficientes para estructurar un planteamiento general.

Nótese en la figura 2, que la exploración realizada por este grupo de estudiantes se relaciona con la idea de multiplicidad entre dos polinomios de segundo orden y la intentan relacionar con los puntos que contienen en común las gráficas de estas parábolas.

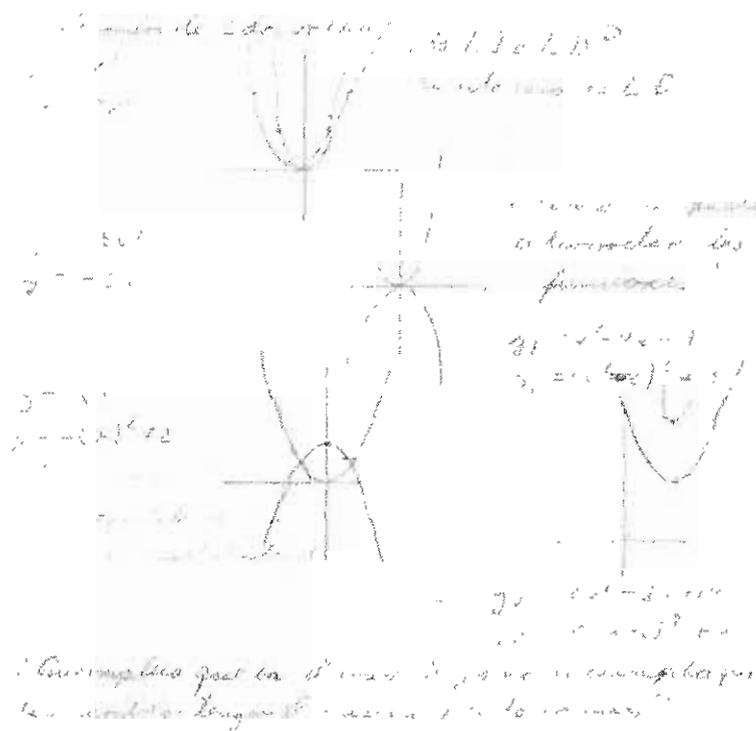


Figura 2

En la pregunta 3 que se les propone en esta actividad , los estudiantes ya no logran encontrar la regularidad que habían focalizado, pues en el ejercicio se incluyen dos polinomios que son múltiplos pero que no se intersecan y esto rompe con la estrategia que ellos habían utilizado, situación que puede ser observada con claridad al dar lectura a la pregunta que al final de su trabajo los estudiantes plantean *¿qué implica que en el caso 3 ya no se cumpla que las parábolas tengan el mismo punto común?*

¿Qué aprendimos de las exploraciones realizadas?

Las reflexiones que nos ha proporcionado la puesta en escena de las actividades mostradas son las siguientes:

- La dependencia e independencia lineal de los polinomios de segundo grado no se relaciona con los puntos de intersección entre las parábolas asociadas con los mismos.
- La dependencia e independencia lineal de polinomios de segundo grado no se relaciona con la multiplicidad entre dos vectores.
- Los estudiantes buscan dar respuestas aquello que no logran entender con elementos conocidos y privilegian el aspecto algebraico para la su solución de las actividades propuestas.
- Hacer uso del isomorfismo entre los polinomios de segundo grado y los vectores en el espacio R^3 , podría proporcionarnos información para replantear cuestionamientos relacionados con las dificultades al usar la visualización como estrategia de estudio del concepto de la dependencia e independencia lineal.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F., Santos, M. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp.55-80). Morelos, México

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X (2), 117-134.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2002). *Una presentación visual del polinomio de Lagrange*. Enseñanza de la Matemática. Asociación Venezolana de Educación Matemática, Vol. 11 (1), 24-38.

Sierpinska, A. (1996) *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra*, *Research Conference in Collegiate Mathematics Education*, Central Michigan University.