



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

No. 173

Serie: AZUL

Fecha: Marzo de 2003

Análisis Experimental de la Recuperación Perfecta de Patrones en la Memoria Hopfield

Juan Luis Díaz de León Santiago¹
Cornelio Yáñez Márquez²

RESUMEN

En este informe técnico se presenta un estudio teórico y experimental, respecto de la recuperación perfecta de patrones bivaluados n -dimensionales en la Memoria Asociativa Hopfield, dado un conjunto fundamental para la fase de aprendizaje y un conjunto de patrones de prueba para la fase de recuperación de patrones.

Con esta publicación, el Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes (GRAI) del Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional, continúa sus actividades científicas encaminadas a evidenciar las bondades del nuevo enfoque asociativo para reconocimiento y clasificación de patrones, creado en 2002 por miembros del GRAI.

Palabras clave: Clasificación de patrones, Reconocimiento de patrones, Memorias asociativas, Memoria Asociativa Hopfield, Recuperación perfecta de patrones.

Agradecimientos: Los autores agradecen el apoyo que recibieron de las siguientes instituciones, para la realización de este trabajo: Instituto Politécnico Nacional, COFAA y Secretaría Académica del IPN, CONACyT y Sistema Nacional de Investigadores.

Nota: Esta publicación forma parte de las actividades del Proyecto de Investigación CGPI-20020210.

¹Director del CIC-IPN jdiaz@cic.ipn.mx

²Profesor-Investigador del CIC-IPN cyanez@cic.ipn.mx

Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes grai@cic.ipn.mx. Tel. 7296000 ext. 56584 y 56597

PRESENTACIÓN DEL GRAI

Es mejor equivocarse por actuar y experimentar, que salvarse del error al precio de no hacer nada.

GRAI es el acrónimo de la expresión: Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes.

La génesis de este grupo se remonta a las postrimerías del año 1997, cuando en el Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional, se inició el aglutinamiento de una *masa crítica* de elementos humanos proclives a incursionar de manera seria y profesional en esa fascinante disciplina llamada Robótica, y en los apasionantes recovecos del Procesamiento, el Análisis y el Álgebra de Imágenes.

En la actualidad, el GRAI cuenta entre sus filas con investigadores, profesores, alumnos de maestría y de doctorado del CIC-IPN, y algunas personas de otras instituciones con intereses congruentes con los propósitos y acciones del grupo.

Las bases teóricas de las actividades que se realizan en el GRAI provienen de áreas tan interesantes y útiles como la Morfología Matemática, el Álgebra de Imágenes, la Teoría del Control, las Matemáticas Discretas, las Redes Neuronales, las Memorias Asociativas, la Teoría de la Información y la Teoría de las Transformadas Matemáticas, entre otras.

La actividad ha sido productiva y creciente. El GRAI tiene en su haber un premio nacional "Luis Enrique Erro", una presea "Lázaro Cárdenas", un proyecto REDII-Conacyt, media decena de proyectos CGPI-IPN, la autoría de un libro y la edición de otro, varios capítulos de libro, algunos artículos en revista internacional o nacional, media decena de graduados en maestría y tres de doctorado y más de media docena de tesis en proceso.

Existe un basto bagaje de temas, tanto teóricos como de aplicación práctica, que paulatinamente irán saliendo a la luz en los Informes Técnicos del CIC-IPN, con miras a compartir con estudiantes, investigadores y público en general los productos de la actividad coordinada que se realiza en el GRAI, para beneficio del grupo, del Centro, del Instituto y del País.

México, D.F., marzo de 2003

ÍNDICE

	Pág.
1 Introducción	1
2 Memorias asociativas	2
3 La Memoria Asociativa Hopfield	5
3.1 Fases de aprendizaje y recuperación	6
3.2 Ejemplo	8
3.3 Disquisiciones experimentales	14
4 Epílogo	16
5 Bibliografía	17

1. Introducción.

En este informe técnico se presenta un estudio teórico y experimental, respecto de las condiciones suficientes para que se cumpla la recuperación perfecta de patrones binarios n-dimensionales en la Memoria Asociativa Hopfield, dado un conjunto fundamental para la fase de aprendizaje y un conjunto de patrones de prueba para la fase de recuperación de patrones

Las memorias asociativas han merecido la atención de numerosos investigadores internacionales desde hace más de cuatro décadas. Uno de los pioneros fue el científico alemán Karl Steinbuch quien, a principios de la década de los sesenta, ideó, desarrolló y aplicó la *Lernmatrix* (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961).

La *Lernmatrix* constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas, y constituye uno de los primeros intentos exitosos de codificar información en arreglos cuadrículados conocidos como *crossbar* (Simpson, 1990).

Once años después de que Steinbuch dio a conocer *Lernmatrix*, dos investigadores concluyeron y presentaron ante al comunidad científica internacional sus trabajos de investigación. Apoyado por la *UCLA*, a principios de 1972 James A. Anderson desarrolló y presentó su *Interactive Memory* (Anderson, 1972), y meses más tarde, Teuvo Kohonen, a la sazón profesor de la *Helsinki University of Technology*, dio a conocer ante el mundo sus *Correlation Matrix Memories* (Kohonen, 1972). Los trabajos de Anderson y Kohonen dieron lugar al modelo que actualmente se conoce con el nombre genérico de *Linear Associator*.

Es pertinente mencionar un hecho curioso, que se ha presentado en personajes dedicados a otras ramas de la ciencia: James A. Anderson y Teuvo Kohonen obtuvieron resultados *asombrosamente similares* a pesar de que trabajaron independientemente, alejados, y sin tener noticia uno del otro, hasta tiempo después de que aparecieron los artículos; además, estos autores tienen formaciones profesionales totalmente diferentes: Anderson es neurofisiólogo (estadunidense) y Kohonen es físico e ingeniero eléctrico (finlandés) (Anderson & Rosenfeld, 1990; Kohonen, 1989).

Si 1972 fue el año de los pioneros en el área de las memorias asociativas, 1982 fue el año de John J. Hopfield. Su artículo de ese año (Hopfield, 1982), publicado por la prestigiosa y respetada *National Academy of Sciences* (en sus *Proceedings*), impactó positivamente y trajo a la palestra internacional su memoria asociativa.

Las autorizadas voces de los editores del compendio *Neurocomputing* (Anderson, & Rosenfeld (Eds.), 1990) aseguran que la era moderna de las memorias asociativas (y de las redes neuronales) nace a raíz de la publicación del artículo de Hopfield; afirman que el éxito de este artículo se debe en gran parte a que, además de tener un estilo claro, coherente y sofisticado, fue escrito por el distinguido y reconocido físico John J. Hopfield, “en cuyas manos la teoría se convierte en algo legítimo y respetable”.

La formación como físico del autor queda de manifiesto cuando declara que en los sistemas físicos constituidos por un gran número de elementos simples, las interacciones entre estos elementos

dan lugar a fenómenos colectivos (las orientaciones de los dominios en sistemas magnéticos y los patrones de vórtices en sistemas de fluidos ejemplifican esta afirmación).

A partir de estas consideraciones, Hopfield se pregunta si la interacción de elementos simples de procesamiento similares a las *neuronas*, cuyo modelo simplificado se conocía desde hacía cuatro décadas (McCulloch & Pitts, 1943), da lugar a la aparición de propiedades computacionales colectivas, tales como la estabilidad de memorias; acto seguido, el autor afirma que en efecto, su artículo de 1982 demuestra que este tipo de propiedades computacionales aparecen espontáneamente.

En este trabajo se presenta un estudio sistemático y experimental de la recuperación de patrones en la Memoria Hopfield.

2. Memorias asociativas.

El propósito de esta sección es plantear de manera diáfana y concisa el problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas. Por su naturaleza, este problema se escinde en dos fases claramente distinguibles:

1. Fase de *aprendizaje* (generación de la memoria asociativa)
2. Fase de *recuperación* (operación de la memoria asociativa)

Para estar en condiciones de realizar el planteamiento del problema, es preciso previamente proporcionar los conceptos básicos, las notaciones y la nomenclatura relacionados con el diseño y funcionamiento de las memorias asociativas.

Los conceptos básicos son conocidos tres décadas ha, y se presentan como originalmente fueron establecidos en las referencias (Kohonen, 1972, 1977, 1987, 1989; Anderson, 1972; Anderson & Bower, 1977; Anderson & Rosenfeld, 1990; Hassoun, 1993, 1995, 1997).

El propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar patrones completos a partir de patrones de entrada que pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado. De acuerdo con esta afirmación, una *memoria asociativa* M puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$x \longrightarrow \boxed{M} \longrightarrow y$$

El *patrón de entrada* está representado por un vector columna denotado por x y el *patrón de salida*, por el vector columna denotado por y .

Cada uno de los patrones de entrada forma una *asociación* con el correspondiente patrón de salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones x y y del esquema forman la asociación (x, y) .

Para facilitar la manipulación algebraica de los patrones de entrada y de salida, los denotaremos con las mismas letras negrillas, \mathbf{x} y \mathbf{y} , agregándoles números naturales como superíndices para efectos de discriminación simbólica. Por ejemplo, a un patrón de entrada \mathbf{x}^1 le corresponderá un patrón de salida \mathbf{y}^1 , y ambos formarán la asociación $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$; del mismo modo, para un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

La memoria asociativa \mathbf{M} se representa mediante una matriz cuya componente ij -ésima es m_{ij} (Palm, Schwenker, Sommer & Strey, 1997); la matriz \mathbf{M} se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: éste es el *conjunto fundamental de asociaciones*, o simplemente *conjunto fundamental*. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p es un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$$

A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama *patrones fundamentales*.

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas. Si se cumple que $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, se dice que la memoria es *autoasociativa*; de otro modo, la memoria es *heteroasociativa* (Kohonen, 1972). Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente: $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ para el que se cumple que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$.

Es posible que los patrones fundamentales sean alterados con diferentes tipos de ruido. Para diferenciar un patrón alterado del correspondiente patrón fundamental, usaremos la tilde en la parte superior; así, el patrón $\tilde{\mathbf{x}}^k$ es una versión alterada del patrón fundamental \mathbf{x}^k , y el tipo de alteración que representa $\tilde{\mathbf{x}}^k$ se evidenciará en el contexto específico donde se use.

Si al presentarle a la memoria \mathbf{M} un patrón alterado $\tilde{\mathbf{x}}^\omega$ como entrada ($\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$), \mathbf{M} responde con el correspondiente patrón fundamental de salida \mathbf{y}^ω , se dice que la recuperación es *perfecta*. Una *memoria perfecta* es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.

Naturalmente, también los patrones de salida pueden ser alterados; por ejemplo, si \mathbf{y}^3 es un patrón fundamental, entonces $\tilde{\mathbf{y}}^3$ representa una versión alterada de \mathbf{y}^3 .

Abundemos en la caracterización de los patrones de entrada, de salida y de la matriz \mathbf{M} .

Primeramente se requiere la especificación de dos conjuntos a los que llamaremos arbitrariamente A y B . La importancia de estos dos conjuntos radica en que las componentes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, serán elementos del conjunto A , y las entradas de la matriz \mathbf{M} serán elementos del conjunto B .

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Esto significa que el número de posibilidades para escoger A y B es infinito; a continuación se ejemplifican algunas de ellas:

- $A = B = \mathbb{R}$, donde \mathbb{R} es el símbolo que representa al conjunto de los números reales.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{-1, 1\}$, donde \mathbb{Z} es el conjunto de los números enteros.
- $A \subset \mathbb{Z}$ y $B \subset \mathbb{Z}$

Cada uno de los modelos de memorias asociativas que se incluyen en esta colección, posee sus propias especificaciones para los conjuntos A y B , de acuerdo con las necesidades del creador del modelo en cuestión.

Ya que se tienen especificados los conjuntos A y B , es necesario establecer las dimensiones de los patrones, tanto de entrada como de salida.

Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada, y por m la dimensión de los patrones de salida; claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que $m \neq n$, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A , y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A . Es decir:

$$\mathbf{x}^\mu \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^\mu \in A^m \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$$

La j -ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$ o $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ según corresponda). La j -ésima componente de un vector columna \mathbf{x}^μ se representa por

$$x_j^\mu$$

Ejemplos:

- La i -ésima componente del vector columna \mathbf{x}^μ se representa por x_i^μ
- La tercera componente del vector columna \mathbf{x}^5 se representa por x_3^5
- La j -ésima componente del vector columna \mathbf{y}^μ se representa por y_j^μ

- La l -ésima componente del vector columna \mathbf{y}^ω se representa por y_l^ω

Al usar el superíndice t para indicar el transpuesto de un vector, se obtienen las siguientes expresiones para los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida, respectivamente:

$$\mathbf{x}^\mu = (x_1^\mu, x_2^\mu, \dots, x_n^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n$$

$$\mathbf{y}^\mu = (y_1^\mu, y_2^\mu, \dots, y_m^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

Con lo anterior, es ya posible presentar el planteamiento del *problema general de las memorias asociativas*:

1. **Fase de aprendizaje.** Encontrar los operadores adecuados y una manera de generar una matriz \mathbf{M} que almacene las p asociaciones del conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2), \dots, (\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^p)\}$, donde $\mathbf{x}^\mu \in A^n$ y $\mathbf{y}^\mu \in A^m \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$, la memoria será *heteroasociativa*; si $m = n$ y $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, la memoria será *autoasociativa*.
2. **Fase de recuperación.** Hallar los operadores adecuados y las condiciones suficientes para obtener el patrón fundamental de salida \mathbf{y}^μ , cuando se opera la memoria \mathbf{M} con el patrón fundamental de entrada \mathbf{x}^μ ; lo anterior para todos los elementos del conjunto fundamental y para ambos modos: autoasociativo y heteroasociativo. Exhibir y caracterizar, además, el ruido que puede soportar la memoria en el patrón de entrada $\tilde{\mathbf{x}}^\omega$, para entregar una salida perfecta \mathbf{y}^ω .

3. La Memoria Asociativa Hopfield.

En el legendario artículo (Hopfield, 1982) se considera un sistema físico descrito por un vector de estado \mathbf{x} cuyas coordenadas son (x_1, x_2, \dots, x_n) ; se considera además que el sistema tiene puntos límite localmente estables $\mathbf{x}^a, \mathbf{x}^b \dots$. Entonces, si el sistema es activado en un estado suficientemente cercano a cualquier punto límite localmente estable, digamos en $\mathbf{x} = \mathbf{x}^a + \Delta$, al transcurrir el tiempo el estado del sistema cambiará hasta llegar a que se cumpla $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}^a$.

El punto de arranque $\mathbf{x}^a + \Delta$ representa un conocimiento parcial del estado estable \mathbf{x}^a , y a partir de ahí el sistema genera la información correcta \mathbf{x}^a . Hopfield declara categóricamente que un sistema físico que se comporte de esta manera y que, además, sea susceptible de que *cualquier* conjunto

predeterminado de estados pueda ser asignado como el conjunto de estados localmente estables, es útil como memoria asociativa.

En el modelo que originalmente propuso Hopfield, cada neurona x_i tiene dos posibles estados, a la manera de las neuronas de McCulloch-Pitts: $x_i = 0$ y $x_i = 1$; sin embargo, en la sección *Studies of the collective behaviors of the model* del mismo artículo, el autor hace la relevante observación de que, para un nivel dado de exactitud en la recuperación de patrones, la capacidad de almacenamiento de información de la memoria se puede incrementar por un factor de 2, si se escogen como posibles estados de las neuronas los valores $x_i = -1$ y $x_i = 1$ en lugar de los valores originales $x_i = 0$ y $x_i = 1$.

Al utilizar el conjunto $\{1, -1\}$ y el valor de umbral cero, la fase de aprendizaje para la memoria Hopfield será similar, en cierta forma, a la fase de aprendizaje del *Linear Associator*.

La intensidad de la fuerza de conexión de la neurona x_i a la neurona x_j se representa por el valor de m_{ij} , y se considera que hay simetría, es decir, $m_{ij} = m_{ji}$. Si x_i no está conectada con x_j , entonces $m_{ij} = 0$; en particular, no hay conexiones recurrentes de una neurona a sí misma, lo cual significa que $m_{ii} = 0, \forall i$. El estado instantáneo del sistema está completamente especificado por el vector columna de dimensión n cuyas coordenadas son los valores de las n neuronas.

La memoria Hopfield es autoasociativa, simétrica, con ceros en la diagonal principal.

En virtud de que la memoria es autoasociativa, el conjunto fundamental para la memoria Hopfield es $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ con

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad \text{y} \quad A = \{1, -1\}$$

3.1 Fases de aprendizaje y recuperación

La *fase de aprendizaje* para la memoria Hopfield es similar a la fase de aprendizaje del *Linear Associator*, con una diferencia relacionada con la diagonal principal en ceros, como se muestra en la siguiente regla para obtener la ij -ésima componente de la memoria Hopfield M :

$$m_{ij} = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^p x_i^\mu x_j^\mu & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1)$$

Operativamente, el resultado de la expresión anterior se puede obtener en tres etapas:

1. Para cada una de las p asociaciones $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$ se encuentra la matriz $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$ de dimensiones $n \times n$, la cual tiene unos en su diagonal principal:

$$\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \cdot (x_1^\mu, x_2^\mu, \dots, x_n^\mu) = \begin{pmatrix} x_1^\mu x_1^\mu & x_1^\mu x_2^\mu & \cdots & x_1^\mu x_i^\mu & \cdots & x_1^\mu x_n^\mu \\ x_2^\mu x_1^\mu & x_2^\mu x_2^\mu & \cdots & x_2^\mu x_i^\mu & \cdots & x_2^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_i^\mu x_1^\mu & x_i^\mu x_2^\mu & \cdots & x_i^\mu x_i^\mu & \cdots & x_i^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^\mu x_1^\mu & x_n^\mu x_2^\mu & \cdots & x_n^\mu x_i^\mu & \cdots & x_n^\mu x_n^\mu \end{pmatrix} \quad (2)$$

2. A cada una de las p matrices $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$ se le resta la matriz identidad \mathbf{I} de dimensiones $n \times n$, con el fin de lograr ceros en la diagonal principal:

$$\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & x_1^\mu x_2^\mu & \cdots & x_1^\mu x_i^\mu & \cdots & x_1^\mu x_n^\mu \\ x_2^\mu x_1^\mu & 0 & \cdots & x_2^\mu x_i^\mu & \cdots & x_2^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_i^\mu x_1^\mu & x_i^\mu x_2^\mu & \cdots & 0 & \cdots & x_i^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^\mu x_1^\mu & x_n^\mu x_2^\mu & \cdots & x_n^\mu x_i^\mu & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

3. Se suman la p matrices $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I}$ para finalmente obtener la memoria \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^p [\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I}] = [m_{ij}]_{n \times n} \quad (4)$$

La forma en que se lleva a cabo la *fase de recuperación* para la memoria Hopfield cambia drásticamente respecto de lo que sucede en el *Linear Associator*. Al presentar un patrón de entrada $\tilde{\mathbf{x}}$ a la memoria Hopfield, ésta cambiará su estado con el tiempo, de modo que cada neurona x_i ajuste su valor de acuerdo con el resultado que arroje la comparación de la cantidad

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j$$

con un valor de umbral cuyo valor es normalmente cero.

Representemos el estado de la memoria Hopfield en el tiempo t por $\mathbf{x}(t)$; entonces $x_i(t)$ representa el valor de la neurona x_i en el tiempo t y $x_i(t+1)$ el valor de x_i en el tiempo siguiente ($t+1$).

Dado un vector columna de entrada $\tilde{\mathbf{x}}$, la fase de recuperación consta de tres pasos:

1. Para $t = 0$, se hace $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}$; es decir, $x_i(0) = \tilde{x}_i, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$
2. $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ se calcula $x_i(t+1)$ de acuerdo con la condición siguiente:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j(t) > 0 \\ x_i(t) & \text{si } \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j(t) = 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j(t) < 0 \end{cases} \quad (5)$$

3. Se compara $x_i(t+1)$ con $x_i(t) \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Si $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t)$ el proceso termina y el vector recuperado es $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$. De otro modo, el proceso continúa de la siguiente manera: los pasos 2 y 3 se iteran tantas veces como sea necesario hasta llegar a un valor $t = \tau$ para el cual $x_i(\tau+1) = x_i(\tau) \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$; el proceso termina y el patrón recuperado es $\mathbf{x}(\tau)$.

El proceso de convergencia descrito en el paso 3 de la fase de recuperación, indica que el sistema llega a un punto límite localmente estable en el tiempo τ .

La existencia de τ está garantizada a través de la demostración que hace Hopfield de que existen puntos límite localmente estables en su modelo de memoria asociativa; para ello, define E de la siguiente manera, tomando en cuenta la condición de que $m_{ii} = 0, \forall i$:

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_i x_j \quad (6)$$

y acto seguido demuestra que E es una función de x_i monótona decreciente.

3.2 Ejemplo

Para ejemplificar la memoria Hopfield, usaremos patrones de dimensión $n = 4$; iniciemos con tres vectores ($p = 3$).

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos, de acuerdo con las expresiones 1, 2 y 3, las matrices $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I}$:

$$\mathbf{x}^1 \cdot (\mathbf{x}^1)^t - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1, -1, -1, 1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^2 \cdot (\mathbf{x}^2)^t - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1, 1, -1, 1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^3 \cdot (\mathbf{x}^3)^t - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-1, -1, 1, -1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La memoria Hopfield \mathbf{M} se obtiene a partir de la suma de las matrices, como lo indica la expresión 4 que corresponde al tercer paso de la fase de aprendizaje:

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^3 \mathbf{x}^{\mu} \cdot (\mathbf{x}^{\mu})^t =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con la obtención de la memoria \mathbf{M} concluye la fase de aprendizaje.

Ahora se le presentará el patrón $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^3$ a la memoria \mathbf{M} para llevar a cabo la fase de recuperación.

El primer paso consiste en realizar la asignación $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$. Entonces se tiene:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se requiere calcular la cantidad

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j(0)$$

$\forall i$ antes de aplicar la condición del paso 2; esto se logra operando el producto de la matriz \mathbf{M} por el vector $\mathbf{x}(0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (1) + 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-1) + (0) \cdot (-1) + (-1) \cdot (1) + 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (0) \cdot (1) + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-1) + (1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (1) + (0) \cdot (-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 m_{1j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^3 m_{2j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^3 m_{3j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^3 m_{4j}x_j(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es decir: $\sum_{j=1}^3 m_{1j}x_j(0) = -1$, $\sum_{j=1}^3 m_{2j}x_j(0) = -1$, $\sum_{j=1}^3 m_{3j}x_j(0) = 5$ y $\sum_{j=1}^3 m_{4j}x_j(0) = -3$

Ahora apliquemos el paso 2 a cada una de las coordenadas:

$$x_1(1) = -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{1j}x_j(0) = -1 < 0$$

$$x_2(1) = -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{2j}x_j(0) = -1 < 0$$

$$x_3(1) = 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{3j}x_j(0) = 5 > 0$$

$$x_4(1) = -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{4j}x_j(0) = -3 < 0$$

El paso 3 indica que se realicen las comparaciones de $x_i(t+1)$ con $x_i(t) \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$; veamos:

$$\begin{aligned}
x_1(1) &= -1 = x_1(0) \\
x_2(1) &= -1 = x_2(0) \\
x_3(1) &= 1 = x_3(0) \\
x_4(1) &= -1 = x_4(0)
\end{aligned}$$

Lo anterior significa que $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(0)$. Por lo tanto, el patrón recuperado es el mismo $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^3$.

Analicemos lo que sucede en la fase de recuperación al presentarle el patrón $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^1$ a la memoria \mathbf{M} . Primer paso:

$$\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igual que antes, previamente a la aplicación de la condición del paso 2 se requiere calcular la cantidad $\sum_{j=1}^n m_{ij}x_j(0), \forall i$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (1) + (0) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (1) + (-1) \cdot (-1) + (0) \cdot (-1) + (-3) \cdot (1) \\ 1 \cdot 1 + (1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (0) \cdot (1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 m_{1j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^3 m_{2j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^3 m_{3j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^3 m_{4j}x_j(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 2 en cada una de las coordenadas:

$$x_1(1) = 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{1j}x_j(0) = 3 > 0$$

$$x_2(1) = 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{2j}x_j(0) = 1 > 0$$

$$x_3(1) = -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{3j}x_j(0) = -3 < 0$$

$$x_4(1) = 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{4j}x_j(0) = 1 > 0$$

El paso 3 indica que se realicen las comparaciones de $x_i(t + 1)$ con $x_i(t) \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$; veamos:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= 1 = x_1(0) \\ x_2(1) &= 1 \neq x_2(0) \\ x_3(1) &= -1 = x_3(0) \\ x_4(1) &= 1 = x_4(0) \end{aligned}$$

Para la coordenada 2 no se cumple la igualdad, y esto significa que $\mathbf{x}(1) \neq \mathbf{x}(0)$ y que $\tau \neq 0$: se deben iterar los pasos 2 y 3.

Producto de la matriz \mathbf{M} por el vector $\mathbf{x}(1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(1) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (1) + (0) \cdot (1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (1) + (-1) \cdot (1) + (0) \cdot (-1) + (-3) \cdot (1) \\ 1 \cdot 1 + (1) \cdot (1) + (-1) \cdot (-1) + (0) \cdot (1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 m_{1j}x_j(1) \\ \sum_{j=1}^3 m_{2j}x_j(1) \\ \sum_{j=1}^3 m_{3j}x_j(1) \\ \sum_{j=1}^3 m_{4j}x_j(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al aplicar el paso 2 a cada una de las coordenadas, tenemos:

$$x_1(2) = 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{1j}x_j(1) = 1 > 0$$

$$x_2(2) = 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{2j}x_j(1) = 1 > 0$$

$$x_3(2) = -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{3j}x_j(1) = -5 < 0$$

$$x_4(2) = 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^3 m_{4j}x_j(1) = 1 > 0$$

Apliquemos el paso 3 $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} x_1(2) &= 1 = x_1(1) \\ x_2(2) &= 1 = x_2(1) \\ x_3(2) &= -1 = x_3(1) \\ x_4(2) &= 1 = x_4(1) \end{aligned}$$

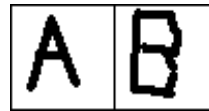
Lo anterior significa que $\mathbf{x}(2) = \mathbf{x}(1)$. Por lo tanto, el patrón recuperado es:

$$\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \tilde{\mathbf{x}}$$

3.3 Disquisiciones experimentales

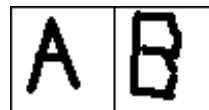
En esta sección se describe el tipo de ejemplos que inspiraron los experimentos realizados para verificar cuantitativamente los nuevos resultados y las condiciones para recuperación perfecta de patrones.

El primer conjunto fundamental consta de dos patrones binarios de 50×50 pixeles:



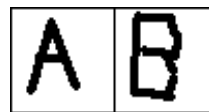
3.3.1 Experimento 1

En la figura siguiente se presentan los patrones que recuperó la memoria Hopfield, al presentarle los dos patrones sin ruido:



3.3.2 Experimento 2

Se le presentaron a la memoria Hopfield los patrones alterados con diferentes porcentajes de ruido aditivo y sustractivo. Para todos los casos desde 1 % hasta 32 % de ruido aditivo, y para ruido sustractivo desde 1 % hasta 99 %, la Memoria Asociativa Hopfield entregó salida perfecta, como en el experimento 1:



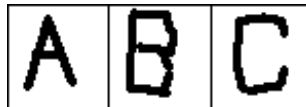
Sin embargo, a partir de 33 % y hasta 49 % de ruido aditivo, la salida ya no fue perfecta, a diferencia de lo que pasaba con las entradas sin ruido. La salida para este rango se muestra en la siguiente figura:



De 50 % de ruido aditivo en adelante, la Memoria Asociativa Hopfield entregó la salida que se ilustra a continuación:



El segundo conjunto fundamental consta de tres patrones binarios de 50x50 pixeles, los cuales se presentan en la siguiente figura:



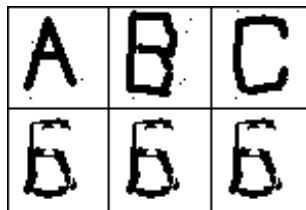
3.3.3 Experimento 3

No obstante que con dos patrones esta memoria asociativa arrojó ambas recuperaciones perfectas, al trabajar con el conjunto fundamental de tres patrones, la Memoria Asociativa Hopfield ya no logró recuperar de manera perfecta ni uno solo de los tres patrones, como se muestra en la figura:

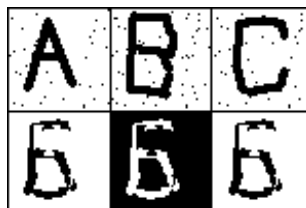


3.3.4 Experimento 4

Con patrones de entrada alterados con ruido aditivo, la respuesta de la Memoria Asociativa Hopfield se degradó notoriamente respecto del comportamiento que tuvo con dos patrones de entrada alterados con ruido aditivo, como se muestra en las siguientes figuras:



(1 % ruido aditivo).



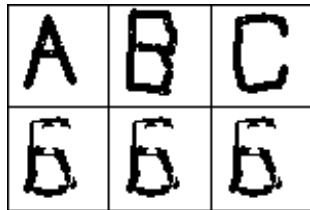
(10 % ruido aditivo).



(50 % ruido aditivo).

3.3.5 Experimento 5

Con patrones de entrada alterados con ruido sustractivo, la Memoria Asociativa Hopfield no presentó recuperaciones perfectas, como se muestra en las siguientes figuras:



(1 % ruido sustractivo).



(99 % ruido sustractivo).

4. Epílogo.

En este informe técnico hemos tratado uno de los trabajos clásicos en memorias asociativas: La Memoria Asociativa Hopfield, cuyo autor es el físico norteamericano John Hopfield quien es responsable, según voces autorizadas, de haber revivido el interés, a principios de los ochenta del siglo XX, en las redes neuronales y en particular en las memorias asociativas, después de un período de estancamiento de más de una década.

Se ha presentado un estudio teórico y experimental, respecto de las recuperación perfecta de patrones bivaluados n-dimensionales en la Memoria Asociativa Hopfield, dado un conjunto fundamental para la fase de aprendizaje y un conjunto de patrones de prueba para la fase de recuperación de patrones.

5. Bibliografía.

- [1] Abu-Mostafa, Y. & St. Jacques, J. (1985). Information capacity of the Hopfield model, *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-31, 4, 461-464.
- [2] Adeodato P. J. L. & Taylor J. G. (1996). Autoassociative memory with high storage capacity, In C. von der Malsburg, W. von Seelen, J. C. Vorbrueggen & B. Sendhoff (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, 1112, (pp. 29-34),. Bochum, Germany: ICANN'96.
- [3] Aleksander, I. & Morton, H. B. (1997). Weightless and other memory-based networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.5:1-C1.5:15). New York: Oxford.
- [4] Amari, S. (1972). Learning patterns and pattern sequences by self-organizing nets of threshold elements, *IEEE Transactions on Computers*, C-21, 11, 1197-1206.
- [5] Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics*, 26, 175-185.
- [6] Anderson, J. A. (1972). A simple neural network generating an interactive memory, *Mathematical Biosciences*, 14, 197-220.
- [7] Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing: Foundations of Research*, Cambridge: MIT Press.
- [8] Anderson, J. A., Silverstein, J., Ritz, S. & Jones, R. (1977). Distinctive features, categorical perception, and probability learning: some applications of a neural model, *Psychological Review*, 84, 413-451.
- [9] Anderson, J. R. & Bower, G. (1977). *Memoria Asociativa*, México: Limusa.
- [10] Austin, J. (1987). ADAM: A Distributed Associative Memory for Scene Analysis, In *Proceedings of First International Conference on Neural Networks*, (pp. 285-295). San Diego: Ed. M Caudhill and C Butler.
- [11] Austin, J., Buckle, S., Kennedy, J., Moulds, A., Pack, R. & Turner, A. (1997). The cellular neural network associative processor, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 284-306). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- [12] Bandyopadhyay, S. & Datta, A. K. (1996). A novel neural hetero-associative memory model for pattern recognition, *Pattern Recognition*, 29, 5, 789-795.
- [13] Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, *Neural Networks* (11), 5, 869-876.
- [14] Browne, C. & Aleksander, I. (1996). Learned Probabilistic Prediction in a Weightless Neural Network, London Imperial College Technical Report NSE96_03.
- [15] Buhmann, J. (1995). Oscillatory associative memories, In M. Arbib (Ed.), *Handbook of Brain Theory & Neural Networks*, (pp. 691-694). Cambridge: MIT Press.
- [16] Chen, C. & Honavar, V. (1995). A neural architecture for content as well as address-based storage and recall: theory and applications, Iowa State University Technical Report TR95-03.
- [17] Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias asociativas con respuesta perfecta y capacidad infinita, *Memoria del TAINA '99, México, D.F.*, 23-38.
- [18] Flynn, M., Kanerva, P. & Bhadkamkar, N. (1989). Sparse distributed memory: principles and operation, Stanford University Technical Report CSL-TR-89-400.

- [19] Gori, M., Lastrucci, L. & Soda, G. (1996). Autoassociator-based models for speaker verification, *Pattern Recognition Letters*, 17, 3, 241-250.
- [20] Graham, B. & Willshaw, D. (1995). Improving recall from an associative memory, *Biological Cybernetics*, 72, 337-346.
- [21] Haralick, R. M., Sternberg, S. R. & Zhuang, X. (1987). Image analysis using mathematical morphology, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-9, 4, 532-550.
- [22] Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.
- [23] Hassoun, M. H. (1995). *Fundamentals of Artificial Neural Networks*, Cambridge: MIT Press.
- [24] Hassoun, M. H. & Watta, P. B. (1997). Associative memory networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.3:1-C1.3:14). New York: Oxford.
- [25] Hattori, M. & Hagiwara, M. (2000). Associative memory for intelligent control, *Mathematics and Computers in Simulation*, 51, 349-374.
- [26] Hely, T. A., Willshaw, D. J. & Hayes, G. M. (1997). A new approach to Kanerva's sparse distributed memory, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 8, 3, 791-794.
- [27] Herrmann, F. P. & Sodini, C. G. (1992). A dynamic associative processor for machine vision applications, *IEEE Micro*, 12, 3, 31-41.
- [28] Hopfield, J.J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79, 2554-2558.
- [29] Hopfield, J.J. (1984). Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81, 3088-3092.
- [30] Imada, A. & Araki K. (1995). Genetic algorithm enlarges the capacity of associative memory. In L.J.Eshelman(Ed.), *Proceedings of 6th International Conference on Genetic Algorithms*, (pp 413-420). San Francisco: Morgan Kaufmann.
- [31] Jagota, A., Narasimhan, G. & Regan, K. W. (1998). Information Capacity of Binary Weights Associative Memories, *Neurocomputing*, 19(1-3), 35-38.
- [32] Jørgensen, T. M. (1997). Classification of handwritten digits using a RAM neural net architecture, *International Journal of Neural Systems*, 8, 1, 17-26.
- [33] Kanerva, P. (1988). *Sparse Distributed Memory*, Cambridge: MIT Press.
- [34] Kennedy, J. V., Austin, J. & Cass, B. (1995). A hardware implementation of a binary neural image processor, *Proceedings of the IEE Conference on Image Processing and its Applications*, Edinburgh, UK.
- [35] Kinser, J. M. (1995). Fast analog associative memory, *Pocceedings of the SPIE*, 2568, 290-293.
- [36] Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions on Computers*, C-21, 4, 353-359.
- [37] Kohonen, T. (1974). An adaptive associative memory principle, *IEEE Transactions on Computers*, C-24, 4, 444-445.
- [38] Kohonen, T. (1987). *Content-Addressable Memories*, Berlin: Springer-Verlag.
- [39] Kohonen, T. (1989). *Self-Organization and Associative Memory*, Berlin: Springer-Verlag.
- [40] Kohonen, T. (1997). *Self-Organizing Maps*, Berlin: Springer.

- [41] Kohonen, T. & Ruohonen, M. (1973). Representation of associated data by matrix operators, *IEEE Transactions on Computers*, C-22, 701-702.
- [42] Kolen, J. F., & Pollack, J. B. (1991). Multiassociative memory, *The Proceedings of the Thirteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 785-789.
- [43] Kosko, B. (1988). Bidirectional associative memories, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18, 1, 49-60.
- [44] Kosko, B. (1992). *Neural Networks and Fuzzy Systems*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [45] Krikelis, A. & Weems, C. C. (1997). Associative Processing and Processors, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 2-9). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- [46] Little, W. & Shaw, G. (1975). A statistical theory of short and long term memory, *Behavioral Biology*, 14, 115-133.
- [47] Ludermir, T. B., Carvalho, A., Braga, A. & Souto, M. C. P. (1999). Weightless neural models: a review of current and past works, *Neural Computing Surveys*, 2, 41-61.
- [48] McCulloch, W. & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133.
- [49] McEliece, R., Posner, E., Rodemich, E. & Venkatesh, S. (1987). The capacity of the Hopfield associative memory, *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-33, 4, 461-482.
- [50] Minsky, M. & Papert, S. (1988). *Perceptrons*, Cambridge: MIT Press.
- [51] Moore, J. (1968). *Elements of linear algebra and matrix theory*, New York: McGraw-Hill.
- [52] Nakano, K. (1972). Associatron-A model of associative memory, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-2, 3, 380-388.
- [53] Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- [54] Ritter, G. X., Sussner, P. & Diaz-de-Leon, J. L. (1998). Morphological associative memories, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9, 281-293.
- [55] Ritter, G. X., Diaz-de-Leon, J. L. & Sussner, P. (1999). Morphological bidirectional associative memories, *Neural Networks*, 12, 851-867.
- [56] Rosen, K. H. (1995) *Discrete Mathematics and its Applications*, New York: McGraw-Hill.
- [57] Schwenk, H. & Milgram, M. (1995). Transformation invariant autoassociation with application to handwritten character recognition, In D. S. Touretzky, G. S. Tesauro & T. K. Leen (Eds.), *Neural Information Processing Systems*, (pp. 991-998). Cambridge: MIT Press.
- [58] Serra, J. (1992). *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*, London: Academic Press.
- [59] Silver, S., Glover, R. & Stonham, T. (1996). Associative memory neural networks for time series prediction, *Proceedings of the Third IEEE ICECS*, 651-654.
- [60] Simpson, P. K. (1990). *Artificial Neural Systems*, New York: Pergamon Press.
- [61] Sommer, F. T. & Palm, G. (1998). Bidirectional retrieval from associative memory, In M. I. Jordan,

- M. J. Kearns, & S. A. Solla (Eds.), *Advances in Neural Information Processing Systems 10*, (pp. 675-681). Cambridge: MIT Press.
- [62] Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, *Kybernetik*, 1, 1, 36-45.
- [63] Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, *Kybernetik*, 1, 3, 117-124.
- [64] Storkey, A. J. (1997). Increasing the capacity of a Hopfield network without sacrificing functionality, *International Conference on Artificial Neural Networks*, 451-456.
- [65] Stright, J. R., Coffield, P. C. & Brooks, G. W. (1998). Analog VLSI implementation of a morphological associative memory, *Proceedings of the SPIE*, 3452-03, 14-22.
- [66] Turner, M. & Austin, J. (1997). Matching performance of binary correlation matrix memories, *Neural Networks*, 10, 9, 1637-1648.
- [67] Villanueva, N. & Figueroa, J. (1998). Superposición de información en memorias aleatorias: análisis cualitativo, *Memorias del Simposium Internacional de Computación CIC'98*, 559-564.
- [68] Willshaw, D., Buneman, O. & Longuet-Higgins, H. (1969). Non-holographic associative memory, *Nature*, 222, 960-962.
- [69] Zboril, F. (1997). An application of the sparse distributed memory, *Proceedings of the ASIS 97*, 127-132.