



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

No. 175

Serie: AZUL

Fecha: Marzo de 2003

Memorias Autoasociativas Morfológicas *max*: Condiciones Suficientes para Convergencia, Aprendizaje y Recuperación de Patrones

Cornelio Yáñez Márquez¹
Juan Luis Díaz de León Santiago²

RESUMEN

En este informe técnico se estudian las condiciones suficientes para convergencia, aprendizaje y recuperación perfecta de patrones reales n -dimensionales en las Memorias Autoasociativas Morfológicas *max*. Los resultados se sustentan con apoyo de experimentos computacionales simulados para algunos conjuntos fundamentales de patrones para la fase de aprendizaje y un conjunto de patrones de prueba para la fase de recuperación.

Con esta publicación, el Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes (GRAI) del Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional, continúa sus actividades científicas encaminadas a evidenciar las bondades del nuevo enfoque asociativo para reconocimiento y clasificación de patrones, creado en 2002 por miembros del GRAI.

Palabras clave: Memorias asociativas, Memorias asociativas morfológicas, Operador máximo, Memorias Autoasociativas, Recuperación perfecta de patrones.

Agradecimientos: Los autores agradecen el apoyo que recibieron de las siguientes instituciones, para la realización de este trabajo: Instituto Politécnico Nacional, COFAA y Secretaría Académica del IPN, CONACyT y Sistema Nacional de Investigadores.

Nota: Esta publicación forma parte de las actividades del Proyecto de Investigación CGPI-20020210.

¹Profesor-Investigador del CIC-IPN cyanez@cic.ipn.mx

²Director del CIC-IPN jdiaz@cic.ipn.mx

Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes grai@cic.ipn.mx. Tel. 7296000 ext. 56584 y 56597

PRESENTACIÓN DEL GRAI

Es mejor equivocarse por actuar y experimentar, que salvarse del error al precio de no hacer nada.

GRAI es el acrónimo de la expresión: Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes.

La génesis de este grupo se remonta a las postrimerías del año 1997, cuando en el Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional, se inició el aglutinamiento de una *masa crítica* de elementos humanos proclives a incursionar de manera seria y profesional en esa fascinante disciplina llamada Robótica, y en los apasionantes recovecos del Procesamiento, el Análisis y el Álgebra de Imágenes.

En la actualidad, el GRAI cuenta entre sus filas con investigadores, profesores, alumnos de maestría y de doctorado del CIC-IPN, y algunas personas de otras instituciones con intereses congruentes con los propósitos y acciones del grupo.

Las bases teóricas de las actividades que se realizan en el GRAI provienen de áreas tan interesantes y útiles como la Morfología Matemática, el Álgebra de Imágenes, la Teoría del Control, las Matemáticas Discretas, las Redes Neuronales, las Memorias Asociativas, la Teoría de la Información y la Teoría de las Transformadas Matemáticas, entre otras.

La actividad ha sido productiva y creciente. El GRAI tiene en su haber un premio nacional "Luis Enrique Erro", una presea "Lázaro Cárdenas", un proyecto REDII-Conacyt, media decena de proyectos CGPI-IPN, la autoría de un libro y la edición de otro, varios capítulos de libro, algunos artículos en revista internacional o nacional, media decena de graduados en maestría y tres de doctorado y más de media docena de tesis en proceso.

Existe un basto bagaje de temas, tanto teóricos como de aplicación práctica, que paulatinamente irán saliendo a la luz en los Informes Técnicos del CIC-IPN, con miras a compartir con estudiantes, investigadores y público en general los productos de la actividad coordinada que se realiza en el GRAI, para beneficio del grupo, del Centro, del Instituto y del País.

México, D.F., marzo de 2003

ÍNDICE

	Pág.
1 Introducción	1
2 Memorias asociativas	3
3 Memorias Autoasociativas Morfológicas <i>max</i>	6
3.1 Fases de aprendizaje y recuperación	9
3.2 Condiciones para convergencia, aprendizaje y recuperación perfecta de patrones	10
3.3 Disquisiciones experimentales	12
4 Epílogo	14
5 Bibliografía	14

1. Introducción.

En este informe técnico se presenta un estudio teórico y experimental, respecto de las condiciones suficientes para convergencia, aprendizaje y recuperación de patrones en las Memorias Autoasociativas Morfológicas *max*, dado un conjunto fundamental para la fase de aprendizaje y un conjunto de patrones de prueba para la fase de recuperación de patrones

Las memorias asociativas han merecido la atención de numerosos investigadores internacionales desde hace más de cuatro décadas. Uno de los pioneros fue el científico alemán Karl Steinbuch quien, a principios de la década de los sesenta, ideó, desarrolló y aplicó la *Lernmatrix* (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961).

La *Lernmatrix* constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas, y constituye uno de los primeros intentos exitosos de codificar información en arreglos cuadrículados conocidos como *crossbar* (Simpson, 1990).

Once años después de que Steinbuch dio a conocer *Lernmatrix*, dos investigadores concluyeron y presentaron ante al comunidad científica internacional sus trabajos de investigación. Apoyado por la *UCLA*, a principios de 1972 James A. Anderson desarrolló y presentó su *Interactive Memory* (Anderson, 1972), y meses más tarde, Teuvo Kohonen, a la sazón profesor de la *Helsinki University of Technology*, dio a conocer ante el mundo sus *Correlation Matrix Memories* (Kohonen, 1972). Los trabajos de Anderson y Kohonen dieron lugar al modelo que actualmente se conoce con el nombre genérico de *Linear Associator*.

Es pertinente mencionar un hecho curioso, que se ha presentado en personajes dedicados a otras ramas de la ciencia: James A. Anderson y Teuvo Kohonen obtuvieron resultados *asombrosamente similares* a pesar de que trabajaron independientemente, alejados, y sin tener noticia uno del otro, hasta tiempo después de que aparecieron los artículos; además, estos autores tienen formaciones profesionales totalmente diferentes: Anderson es neurofisiólogo (estadunidense) y Kohonen es físico e ingeniero eléctrico (finlandés) (Anderson & Rosenfeld, 1990; Kohonen, 1989).

Si 1972 fue el año de los pioneros en el área de las memorias asociativas, 1982 fue el año de John J. Hopfield. Su artículo de ese año (Hopfield, 1982), publicado por la prestigiosa y respetada *National Academy of Sciences* (en sus *Proceedings*), impactó positivamente y trajo a la palestra internacional su memoria asociativa.

Las autorizadas voces de los editores del compendio *Neurocomputing* (Anderson, & Rosenfeld (Eds.), 1990) aseguran que la era moderna de las memorias asociativas (y de las redes neuronales) nace a raíz de la publicación del artículo de Hopfield; afirman que el éxito de este artículo se debe en gran parte a que, además de tener un estilo claro, coherente y sofisticado, fue escrito por el distinguido y reconocido físico John J. Hopfield, “en cuyas manos la teoría se convierte en algo legítimo y respetable”.

La formación como físico del autor queda de manifiesto cuando declara que en los sistemas físicos constituidos por un gran número de elementos simples, las interacciones entre estos elementos

dan lugar a fenómenos colectivos (las orientaciones de los dominios en sistemas magnéticos y los patrones de vórtices en sistemas de fluidos ejemplifican esta afirmación).

A partir de estas consideraciones, Hopfield se pregunta si la interacción de elementos simples de procesamiento similares a las *neuronas*, cuyo modelo simplificado se conocía desde hacía cuatro décadas (McCulloch & Pitts, 1943), da lugar a la aparición de propiedades computacionales colectivas, tales como la estabilidad de memorias; acto seguido, el autor afirma que en efecto, su artículo de 1982 demuestra que este tipo de propiedades computacionales aparecen espontáneamente.

La capacidad de aprendizaje y almacenamiento, la eficiencia en la respuesta o recuperación de patrones, la rapidez y la inmunidad al ruido, son tópicos de interés entre los investigadores que se dedican a estudiar estos modelos con el fin de proponer variaciones y generalizaciones que, a la postre, se traduzcan en nuevos modelos de memorias asociativas con ventajas claras sobre los modelos conocidos y que, además, sean propicios para su aplicación directa en problemas reales.

Así, se han propuesto esquemas alternativos ante los clásicos (o variaciones de éstos), cuyos autores aseguran que sus modelos de memorias asociativas hacen gala de gran capacidad de almacenamiento (Chen & Honavar, 1995; Graham & Willshaw, 1995; Imada & Araki, 1995; Adeodato & Taylor, 1996; Storkey 1997; Bosch & Kurfess, 1998; Jagota, Narasimhan & Regan, 1998); exhiben más rapidez que otras (Kinser, 1995); prueban ser eficientes en cuanto a la recuperación de patrones (Hely, Willshaw & Hayes, 1997; Sommer & Palm, 1998) o se han implementado en hardware (Kennedy, Austin & Cass, 1995; Krikelis, & Weems, 1997; Stright, Coffield, & Brooks, 1998).

Existen equipos de investigación que han dirigido sus esfuerzos a incorporar las bondades de las técnicas aleatorias en los esquemas para memorias asociativas (Kanerva, 1988; Browne, & Aleksander, 1996; Villanueva, & Figueroa, 1998). Las indefectibles aplicaciones de las memorias asociativas también han dado lugar a relevantes proyectos y trabajos de investigación (Herrmann, & Sodini, 1992; Schwenk & Milgram, 1995; Gori, Lastrucci & Soda 1996; Silver, Glover & Stonham, 1996; Jørgensen 1997; Hattori & Hagiwara, 2000).

En esta vorágine de aportaciones e innovaciones, la aparición, desarrollo, aplicaciones y consolidación de las memorias asociativas morfológicas representó un salto cualitativo en la concepción y desarrollo de las memorias asociativas, por las características propias de las operaciones morfológicas, que permitieron ventajas de las memorias asociativas morfológicas respecto de los modelos conocidos (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999); con objeto de proporcionar una muestra de la magnitud de este salto cualitativo, mencionaré que al funcionar en uno de los posibles modos (autoasociativo), las memorias asociativas morfológicas tienen respuesta perfecta y capacidad infinita de aprendizaje y almacenamiento (Díaz-de-León & Yáñez, 1999).

Un hecho que puede ser importante en el contexto de las potencialidades de la tecnología de punta a niveles de seguridad nacional, es que investigadores del *Air Force Research Lab.* de los Estados

Unidos implementaron las memorias asociativas morfológicas en hardware VLSI (Stright, Coffield, & Brooks, 1998).

En este informe técnico se estudian las condiciones suficientes para convergencia, aprendizaje y resuperación perfecta de patrones reales n-dimensionales en las Memorias Autoasociativas Morfológicas *max*. Los resultados se sustentan con apoyo de experimentos computacionales simulados para algunos conjuntos fundamentales de patrones para la fase de aprendizaje y un conjunto de patrones de prueba para la fase de recuperación.

2. Memorias asociativas.

El propósito de esta sección es plantear de manera diáfana y concisa el problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas. Por su naturaleza, este problema se escinde en dos fases claramente distinguibles:

1. Fase de *aprendizaje* (generación de la memoria asociativa)
2. Fase de *recuperación* (operación de la memoria asociativa)

Para estar en condiciones de realizar el planteamiento del problema, es preciso previamente proporcionar los conceptos básicos, las notaciones y la nomenclatura relacionados con el diseño y funcionamiento de las memorias asociativas.

Los conceptos básicos son conocidos tres décadas ha, y se presentan como originalmente fueron establecidos en las referencias (Kohonen, 1972, 1977, 1987, 1989; Anderson, 1972; Anderson & Bower, 1977; Anderson & Rosenfeld, 1990; Hassoun, 1993, 1995, 1997).

El propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar patrones completos a partir de patrones de entrada que pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado. De acuerdo con esta afirmación, una *memoria asociativa* M puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{M} \longrightarrow \mathbf{y}$$

El *patrón de entrada* está representado por un vector columna denotado por \mathbf{x} y el *patrón de salida*, por el vector columna denotado por \mathbf{y} .

Cada uno de los patrones de entrada forma una *asociación* con el correspondiente patrón de salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones \mathbf{x} y \mathbf{y} del esquema forman la asociación (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

Para facilitar la manipulación algebraica de los patrones de entrada y de salida, los denotaremos con las mismas letras negrillas, \mathbf{x} y \mathbf{y} , agregándoles números naturales como superíndices para efectos de discriminación simbólica. Por ejemplo, a un patrón de entrada \mathbf{x}^1 le corresponderá un

patrón de salida \mathbf{y}^1 , y ambos formarán la asociación $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$; del mismo modo, para un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

La memoria asociativa \mathbf{M} se representa mediante una matriz cuya componente ij -ésima es m_{ij} (Palm, Schwenker, Sommer & Strey, 1997); la matriz \mathbf{M} se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: éste es el *conjunto fundamental de asociaciones*, o simplemente *conjunto fundamental*. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p es un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$$

A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama *patrones fundamentales*.

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas. Si se cumple que $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, se dice que la memoria es *autoasociativa*; de otro modo, la memoria es *heteroasociativa* (Kohonen, 1972). Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente: $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ para el que se cumple que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$.

Es posible que los patrones fundamentales sean alterados con diferentes tipos de ruido. Para diferenciar un patrón alterado del correspondiente patrón fundamental, usaremos la tilde en la parte superior; así, el patrón $\tilde{\mathbf{x}}^k$ es una versión alterada del patrón fundamental \mathbf{x}^k , y el tipo de alteración que representa $\tilde{\mathbf{x}}^k$ se evidenciará en el contexto específico donde se use.

Si al presentarle a la memoria \mathbf{M} un patrón alterado $\tilde{\mathbf{x}}^\omega$ como entrada ($\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$), \mathbf{M} responde con el correspondiente patrón fundamental de salida \mathbf{y}^ω , se dice que la recuperación es *perfecta*. Una *memoria perfecta* es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.

Naturalmente, también los patrones de salida pueden ser alterados; por ejemplo, si \mathbf{y}^3 es un patrón fundamental, entonces $\tilde{\mathbf{y}}^3$ representa una versión alterada de \mathbf{y}^3 .

Abundemos en la caracterización de los patrones de entrada, de salida y de la matriz \mathbf{M} .

Primeramente se requiere la especificación de dos conjuntos a los que llamaremos arbitrariamente A y B . La importancia de estos dos conjuntos radica en que las componentes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, serán elementos del conjunto A , y las entradas de la matriz \mathbf{M} serán elementos del conjunto B .

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Esto significa que

el número de posibilidades para escoger A y B es infinito; a continuación se ejemplifican algunas de ellas:

- $A = B = \mathbb{R}$, donde \mathbb{R} es el símbolo que representa al conjunto de los números reales.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{-1, 1\}$, donde \mathbb{Z} es el conjunto de los números enteros.
- $A \subset \mathbb{Z}$ y $B \subset \mathbb{Z}$

Cada uno de los modelos de memorias asociativas que se incluyen en esta colección, posee sus propias especificaciones para los conjuntos A y B , de acuerdo con las necesidades del creador del modelo en cuestión.

Ya que se tienen especificados los conjuntos A y B , es necesario establecer las dimensiones de los patrones, tanto de entrada como de salida.

Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada, y por m la dimensión de los patrones de salida; claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que $m \neq n$, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A , y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A . Es decir:

$$\mathbf{x}^\mu \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^\mu \in A^m \quad \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$$

La j -ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$ o $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ según corresponda). La j -ésima componente de un vector columna \mathbf{x}^μ se representa por

$$x_j^\mu$$

Ejemplos:

- La i -ésima componente del vector columna \mathbf{x}^μ se representa por x_i^μ
- La tercera componente del vector columna \mathbf{x}^5 se representa por x_3^5
- La j -ésima componente del vector columna \mathbf{y}^μ se representa por y_j^μ
- La l -ésima componente del vector columna \mathbf{y}^ω se representa por y_l^ω

Al usar el superíndice t para indicar el transpuesto de un vector, se obtienen las siguientes expresiones para los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida, respectivamente:

$$\mathbf{x}^\mu = (x_1^\mu, x_2^\mu, \dots, x_n^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n$$

$$\mathbf{y}^\mu = (y_1^\mu, y_2^\mu, \dots, y_m^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

Con lo anterior, es ya posible presentar el planteamiento del *problema general de las memorias asociativas*:

1. **Fase de aprendizaje.** Encontrar los operadores adecuados y una manera de generar una matriz \mathbf{M} que almacene las p asociaciones del conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2), \dots, (\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^p)\}$, donde $\mathbf{x}^\mu \in A^n$ y $\mathbf{y}^\mu \in A^m \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$, la memoria será *heteroasociativa*; si $m = n$ y $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, la memoria será *autoasociativa*.
2. **Fase de recuperación.** Hallar los operadores adecuados y las condiciones suficientes para obtener el patrón fundamental de salida \mathbf{y}^μ , cuando se opera la memoria \mathbf{M} con el patrón fundamental de entrada \mathbf{x}^μ ; lo anterior para todos los elementos del conjunto fundamental y para ambos modos: autoasociativo y heteroasociativo. Exhibir y caracterizar, además, el ruido que puede soportar la memoria en el patrón de entrada $\tilde{\mathbf{x}}^\omega$, para entregar una salida perfecta \mathbf{y}^ω .

3. Memorias Autoasociativas Mofológicas *max*.

La diferencia fundamental entre las memorias asociativas clásicas y las morfológicas, radica en que los fundamentos operacionales de las *memorias asociativas morfológicas*, se encuentran en las operaciones morfológicas de dilatación y erosión. Estas memorias rompieron el esquema utilizado a través de los años en los modelos de memorias asociativas clásicas, que utilizan operaciones convencionales entre vectores y matrices para la fase de aprendizaje, y *suma de productos* para recuperar patrones.

Las memorias asociativas morfológicas, por otro lado, usan *máximos o mínimos de sumas* para la fase de aprendizaje, y *máximos o mínimos de sumas* para la fase de recuperación (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999). La información que se expone a continuación constituye un resumen ilustrativo del diseño, operación y características de las memorias asociativas morfológicas y está tomada libremente del contenido de estas dos

referencias (las cuales contienen, en total, 17 teoremas y cuatro corolarios) y de (Díaz-de-León & Yáñez, 1999).

Hay dos tipos de memorias asociativas morfológicas: las memorias *max*, simbolizadas con \mathbf{M} , y las memorias *min*, las cuales se simbolizan con \mathbf{W} ; en cada uno de los dos tipos, las memorias pueden funcionar en ambos modos *heteroasociativo* y *autoasociativo*. Nótese, de entrada, esta ventaja que poseen las memorias asociativas morfológicas respecto de la memoria Hopfield, la cual se diseñó para funcionar sólo como memoria autoasociativa.

Para las memorias autoasociativas morfológicas *max* el conjunto fundamental será $\{\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ con

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n$$

Antes de iniciar, es necesario definir dos nuevas operaciones entre matrices en términos de las operaciones $+$, \vee y \wedge , con el fin de poder expresar las fases de aprendizaje y recuperación de las memorias asociativas morfológicas.

Sea D una matriz $[d_{ij}]_{m \times p}$ y H una matriz $[h_{ij}]_{p \times n}$ cuyos términos son números enteros.

El *producto máximo* de D y H , denotado por $C = D \nabla H$, da como resultado una matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ y se define de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^p (d_{ik} + h_{kj}) \quad (1)$$

Existen dos casos particulares de suma importancia en la aplicación del *producto máximo*.

El primer caso es cuando D es una matriz de dimensiones $m \times n$ y H es un vector columna de dimensión n . Al aplicar la expresión 1 para calcular el producto máximo $C = D \nabla H$ cuando D es una matriz $[d_{ij}]_{m \times n}$ y H es un vector columna de dimensión n $[h_i]_n$ se obtiene un vector columna C de dimensión m , cuya i -ésima componente es:

$$c_i = \bigvee_{j=1}^n (d_{ij} + h_j) \quad (2)$$

El segundo caso es cuando se realiza el *producto máximo* entre un vector columna de dimensión m por un vector fila de dimensión n ; en ambos vectores se cumple que $p = 1$.

Al aplicar la expresión 1 para calcular $C = D \nabla H$ siendo D un vector columna de dimensión m y H un vector fila de dimensión n , se obtiene una matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^1 (d_{ik} + h_{kj}) = (d_{i1} + h_{1j})$$

expresión en la que se puede eliminar el subíndice 1, para quedar finalmente que la componente c_{ij} de la matriz $[c_{ij}]_{m \times n}$ que resulta del *producto máximo* entre un vector columna D de dimensión m por un vector fila H de dimensión n es:

$$c_{ij} = (d_i + h_j) \quad (3)$$

Similarmente, el *producto mínimo* $C = D \Delta H$ se define así:

$$c_{ij} = \bigwedge_{k=1}^p (d_{ik} + h_{kj}) \quad (4)$$

Al aplicar la expresión 4 para calcular el producto mínimo $C = D \Delta H$ cuando D es una matriz $[d_{ij}]_{m \times n}$ y H es un vector columna de dimensión n $[h_i]_n$ se obtiene un vector columna C de dimensión m , cuya i -ésima componente es:

$$c_i = \bigwedge_{j=1}^n (d_{ij} + h_j) \quad (5)$$

Y la componente c_{ij} del *producto mínimo* entre un vector columna D de dimensión m por un vector fila H de dimensión n es:

$$c_{ij} = \bigwedge_{k=1}^1 (d_{ik} + h_{kj}) = (d_{i1} + h_{j1}) = (d_i + h_j) \quad (6)$$

Las expresiones anteriores contienen a los operadores máximo \bigvee y mínimo \bigwedge , los cuales están íntimamente ligados con los conceptos de las dos operaciones básicas de la morfología matemática: *dilatación* y *erosión*, respectivamente (Serra, 1992; Haralick, Sternberg, & Zhuang, 1987; Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998); de ahí el nombre de memorias asociativas *morfológicas*.

Las memorias morfológicas Autoasociativas *max* utilizan el *producto mínimo* para ambas fases: aprendizaje y recuperación de patrones. Además, en la fase de aprendizaje juega un papel relevante el operador *máximo*; de ahí el nombre de memorias *max*.

3.1 Fases de aprendizaje y recuperación

La *fase de aprendizaje* consiste de dos etapas:

1. Aplicando la expresión 6, para cada una de las p asociaciones $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$ se encuentra la matriz $\mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t$ de dimensiones $n \times n$, donde $(-\mathbf{x}^\mu)^t = (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t &= \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \Delta (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu) \\ \mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t &= \begin{pmatrix} [x_1^\mu + (-x_1^\mu)] & [x_1^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [x_1^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [x_1^\mu + (-x_n^\mu)] \\ [x_2^\mu + (-x_1^\mu)] & [x_2^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [x_2^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [x_2^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [x_i^\mu + (-x_1^\mu)] & [x_i^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [x_i^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [x_i^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [x_n^\mu + (-x_1^\mu)] & [x_n^\mu + (-x_2^\mu)] & \cdots & [x_n^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [x_n^\mu + (-x_n^\mu)] \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t &= \begin{pmatrix} x_1^\mu - x_1^\mu & x_1^\mu - x_2^\mu & \cdots & x_1^\mu - x_j^\mu & \cdots & x_1^\mu - x_n^\mu \\ x_2^\mu - x_1^\mu & x_2^\mu - x_2^\mu & \cdots & x_2^\mu - x_j^\mu & \cdots & x_2^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_i^\mu - x_1^\mu & x_i^\mu - x_2^\mu & \cdots & x_i^\mu - x_j^\mu & \cdots & x_i^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^\mu - x_1^\mu & x_n^\mu - x_2^\mu & \cdots & x_n^\mu - x_j^\mu & \cdots & x_n^\mu - x_n^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

2. Se aplica el operador *máximo* \bigvee a las p matrices para obtener la memoria \mathbf{M} .

$$\mathbf{M} = \bigvee_{\mu=1}^p [\mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t] = [m_{ij}]_{n \times n} \quad (8)$$

de manera que la ij -ésima componente de la memoria \mathbf{M} se expresa así:

$$m_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^p (x_i^\mu - x_j^\mu) \quad (9)$$

La *fase de recuperación* consiste en realizar el producto mínimo Δ de la memoria \mathbf{M} con un patrón de entrada \mathbf{x}^ω , donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, para obtener un vector columna \mathbf{x} de dimensión n :

$$\mathbf{x} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{x}^\omega \quad (10)$$

De acuerdo con la expresión 5, la i -ésima componente del vector \mathbf{x} es:

$$x_i = \bigwedge_{j=1}^n (m_{ij} + x_j^\omega) \quad (11)$$

3.2 Condiciones para convergencia, aprendizaje y recuperación perfecta de patrones

Los resultados que aquí se presentan provienen de varias fuentes. Algunos son resultados originales publicados en las referencias (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999; Díaz-de-León & Yáñez, 1999 y Yáñez-Márquez, 2002); y los demás, son resultados originales de los autores de este informe técnico, obtenidos durante el desarrollo del Proyecto de Investigación CGPI-20020210 titulado *Investigación de las condiciones suficientes para convergencia, aprendizaje y recuperación de patrones en las memorias asociativas morfológicas*. La información se expone a continuación en forma de lemas, teoremas y corolarios, explicando en cada caso la motivación, las consecuencias y los puntos clave que deben ser verificados en la etapa experimental.

En el Teorema 1 y el Corolario 1.1 que aparecen en el informe técnico número 174 de esta serie azul sustituiremos los patrones \mathbf{x}^μ por patrones \mathbf{x} como lo requieren las memorias autoasociativas.

El Teorema 1 especifica ciertas condiciones que debe cumplir una memoria autoasociativa morfológica *max*, para aprender el conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ y recuperar de manera perfecta los patrones de entrada, cuando se le presentan a la memoria, sin ruido.

Teorema 1: \mathbf{M} es perfecta si y sólo si para cada $\mu = 1, 2, \dots, p$, cada renglón de la matriz $[\mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t] - \mathbf{M}$ contiene una entrada cero.

Este importante teorema puede escribirse de manera diferente, para facilitar la implementación experimental. A continuación se presenta la segunda versión del Teorema 1:

Teorema 1 (bis): $\mathbf{M} \Delta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{x}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$ si y sólo si para cada índice de fila $i = 1, \dots, n$ existen índices de columna $j_i^\varepsilon \in \{1, \dots, n\}$ tales que $m_{ij_i^\varepsilon} = x_i^\omega - x_{j_i^\varepsilon}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$.

Una consecuencia inmediata de este teorema se expresa en el Corolario 1.1:

Corolario 1.1: $\mathbf{M} \Delta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{x}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$ si y sólo si para cada índice de fila $i = 1, \dots, n$ y cada $\gamma \in \{1, \dots, p\}$ existen índices de columna $j_i^\gamma \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$x_{j_i}^\gamma = \bigwedge_{\varepsilon=1}^p (x_{j_i}^\varepsilon - x_i^\varepsilon) + x_i^\gamma$$

No es difícil mostrar que las condiciones del Teorema 1 y del Corolario 1.1 siempre se cumplen para las memorias autoasociativas morfológicas *max*, por lo que los resultados se pueden resumir en un nuevo teorema:

Teorema 2: Si \mathbf{M} es una memoria autoasociativa morfológica *max*, entonces recupera de manera perfecta el conjunto fundamental completo; es decir, se cumple que $\mathbf{M} \triangle \mathbf{x}^\omega = \mathbf{x}^\omega$ para todo $\omega = 1, \dots, p$.

El resultado del Teorema 2 es extraordinariamente importante: las memorias autoasociativas morfológicas *max* tienen capacidad de almacenamiento ilimitada, y recuperan de manera perfecta el conjunto fundamental (patrones sin ruido) sin importar su tamaño o dimensión.

Mientras que los resultados anteriores están relacionados con el desempeño de la memoria asociativa para el caso en que se le presentan a la memoria patrones sin ruido, una pregunta de sumo interés con respecto al desempeño de una memoria asociativa es: ¿qué cantidad, y qué tipo de ruido se puede permitir como distorsión para los patrones de entrada sin sacrificar la respuesta (salida) perfecta?. Para el caso de las memorias clásicas, es un hecho que aun sin distorsión en la entrada, no es plausible esperar una respuesta perfecta. Para las memorias morfológicas autoasociativas *max*, en cambio, es permisible la existencia de ruidos sin perder la propiedad de respuesta perfecta. La forma del ruido permisible está dada por el siguiente teorema:

Teorema 2: Para $\gamma = 1, \dots, p$ sea $\tilde{\mathbf{x}}^\gamma$ una versión distorsionada del patrón \mathbf{x}^γ . Entonces $\mathbf{M} \triangle \tilde{\mathbf{x}}^\gamma = \mathbf{x}^\gamma$ si y sólo si se cumple que:

$$\tilde{x}_j^\gamma \geq x_j^\gamma \wedge \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{\varepsilon \neq \gamma} [x_i^\gamma - x_i^\varepsilon + x_i^\varepsilon] \right) = x_j^\gamma \wedge \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{\varepsilon \neq \gamma} x_i^\gamma \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

y para cada índice renglón $i \in \{1, \dots, n\}$ existe un índice columna $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

$$\tilde{x}_{j_i}^\gamma = x_{j_i}^\gamma \wedge \left(\bigwedge_{\varepsilon \neq \gamma} [x_i^\gamma - x_i^\varepsilon + x_{j_i}^\varepsilon] \right)$$

Otro hecho muy importante y digno de resaltar es que las memorias autoasociativas morfológicas *max* *no requieren* convergencia; es decir, son capaces de responder en forma perfecta *en un solo paso*. En general, las memorias asociativas morfológicas no son retroalimentadas, son *one-shot*.

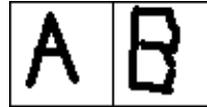
Lo anterior queda expresado en el siguiente teorema:

Teorema 3: Si \mathbf{x} y \mathbf{z} pertenecen al conjunto fundamental de entrada de una memoria autoasociativa morfológica *max* \mathbf{M} y $\mathbf{M} \triangle \mathbf{z} = \mathbf{x}$, entonces se cumple que $\mathbf{M} \triangle \mathbf{x} = \mathbf{x}$

3.3 Disquisiciones experimentales

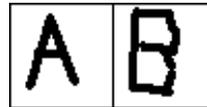
En esta sección se describe el tipo de ejemplos que inspiraron los experimentos realizados para verificar cuantitativamente los resultados de la sección anterior relacionados con las condiciones para convergencia, aprendizaje y recuperación perfecta de patrones.

El primer conjunto fundamental consta de dos patrones binarios de 50×50 pixeles:



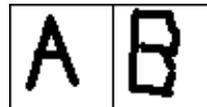
3.3.1 Experimento 1

En la figura siguiente se presentan los patrones que recuperó la memoria autoasociativa morfológica *max*, al presentarle los dos patrones sin ruido:



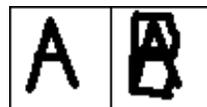
3.3.2 Experimento 2

La memoria autoasociativa morfológica *max* entregó salida perfecta para todos los casos, desde 1 % hasta 395 % de ruido aditivo en los patrones de entrada. La salida se muestra en la figura:



(1 % a 395 % ruido aditivo).

La salida para las entradas alteradas con 396 % de ruido aditivo, tiene el aspecto de la siguiente figura:



(396 % ruido aditivo).

Para patrones de entrada con porcentajes de ruido aditivo de 397 % en adelante, la salida luce como se muestra en la siguiente figura:

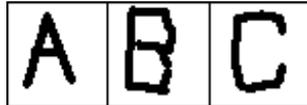


(ruido aditivo $\geq 397\%$).

3.3.3 Experimento 3

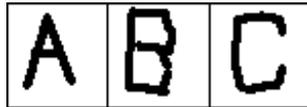
La memoria autoasociativa morfológica *max* no entregó salida perfecta para ningún caso donde el ruido era sustractivo en los patrones de entrada.

El segundo conjunto fundamental consta de tres patrones binarios de 50×50 pixeles, los cuales se presentan en la siguiente figura:



3.3.4 Experimento 4

Al igual que con dos patrones, la recuperación fue perfecta con tres patrones:

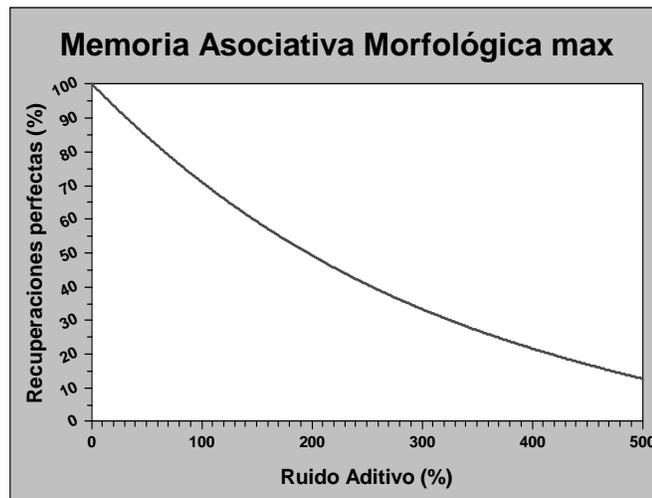


3.3.5 Experimento 5

Con tres patrones de entrada alterados con ruido aditivo, la respuesta de la memoria autoasociativa morfológica *max* fue perfecta; sin embargo, al presentarle patrones alterados con ruido sustractivo, la respuesta no fue perfecta en ningún caso.

3.3.6 Experimento 6

La siguiente gráfica muestra la respuesta de la memoria autoasociativa morfológica *max* ante patrones alterados con ruido aditivo:



Es preciso hacer hincapié en un resultado experimental que el equipo de investigación encontró: no obstante que las memorias autoasociativas morfológicas *max* son robustas a cantidades muy grandes de ruido aditivo, son muy sensibles a pequeñas cantidades de ruido sustractivo. Esa es una de las desventajas de las memorias autoasociativas morfológicas *max*.

4. Epílogo.

En este informe técnico se han estudiado, tanto teórica como experimentalmente, las condiciones suficientes para convergencia, aprendizaje y recuperación perfecta de patrones reales n -dimensionales en las Memorias Autoasociativas Morfológicas *max*. Los resultados se sustentan con apoyo de experimentos computacionales simulados para algunos conjuntos fundamentales de patrones para la fase de aprendizaje y un conjunto de patrones de prueba para la fase de recuperación.

Se ha descubierto experimentalmente que las memorias autoasociativas morfológicas *max* son robustas a ruido aditivo, pero sensibles a ruido sustractivo. Además, dado que son memorias *one-shot*, no tienen problemas de convergencia.

5. Bibliografía.

- [1] Abu-Mostafa, Y. & St. Jacques, J. (1985). Information capacity of the Hopfield model, *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-31, 4, 461-464.
- [2] Adeodato P. J. L. & Taylor J. G. (1996). Autoassociative memory with high storage capacity, In C. von der Malsburg, W. von Seelen, J. C. Vorbrueggen & B. Sendhoff (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, 1112, (pp. 29-34),. Bochum, Germany: ICANN'96.
- [3] Aleksander, I. & Morton, H. B. (1997). Weightless and other memory-based networks, In Emile Fiesler

- (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.5:1-C1.5:15). New York: Oxford.
- [4] Amari, S. (1972). Learning patterns and pattern sequences by self-organizing nets of threshold elements, *IEEE Transactions on Computers*, C-21, 11, 1197-1206.
- [5] Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics*, 26, 175-185.
- [6] Anderson, J. A. (1972). A simple neural network generating an interactive memory, *Mathematical Biosciences*, 14, 197-220.
- [7] Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing: Foundations of Research*, Cambridge: MIT Press.
- [8] Anderson, J. A., Silverstein, J., Ritz, S. & Jones, R. (1977). Distinctive features, categorical perception, and probability learning: some applications of a neural model, *Psychological Review*, 84, 413-451.
- [9] Anderson, J. R. & Bower, G. (1977). *Memoria Asociativa*, México: Limusa.
- [10] Austin, J. (1987). ADAM: A Distributed Associative Memory for Scene Analysis, In *Proceedings of First International Conference on Neural Networks*, (pp. 285-295). San Diego: Ed. M Caudhill and C Butler.
- [11] Austin, J., Buckle, S., Kennedy, J., Moulds, A., Pack, R. & Turner, A. (1997). The cellular neural network associative processor, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 284-306). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- [12] Bandyopadhyay, S. & Datta, A. K. (1996). A novel neural hetero-associative memory model for pattern recognition, *Pattern Recognition*, 29, 5, 789-795.
- [13] Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, *Neural Networks* (11), 5, 869-876.
- [14] Browne, C. & Aleksander, I. (1996). Learned Probabilistic Prediction in a Weightless Neural Network, London Imperial College Technical Report NSE96_03.
- [15] Buhmann, J. (1995). Oscillatory associative memories, In M. Arbib (Ed.), *Handbook of Brain Theory & Neural Networks*, (pp. 691-694). Cambridge: MIT Press.
- [16] Chen, C. & Honavar, V. (1995). A neural architecture for content as well as address-based storage and recall: theory and applications, Iowa State University Technical Report TR95-03.
- [17] Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias asociativas con respuesta perfecta y capacidad infinita, *Memoria del TAINA '99, México, D.F.*, 23-38.
- [18] Flynn, M., Kanerva, P. & Bhadkamkar, N. (1989). Sparse distributed memory: principles and operation, Stanford University Technical Report CSL-TR-89-400.
- [19] Gori, M., Lastrucci, L. & Soda, G. (1996). Autoassociator-based models for speaker verification, *Pattern Recognition Letters*, 17, 3, 241-250.
- [20] Graham, B. & Willshaw, D. (1995). Improving recall from an associative memory, *Biological Cybernetics*, 72, 337-346.
- [21] Haralick, R. M., Sternberg, S. R. & Zhuang, X. (1987). Image analysis using mathematical morphology, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-9, 4, 532-550.
- [22] Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.

- [23] Hassoun, M. H. (1995). *Fundamentals of Artificial Neural Networks*, Cambridge: MIT Press.
- [24] Hassoun, M. H. & Watta, P. B. (1997). Associative memory networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.3:1-C1.3:14). New York: Oxford.
- [25] Hattori, M. & Hagiwara, M. (2000). Associative memory for intelligent control, *Mathematics and Computers in Simulation*, 51, 349-374.
- [26] Hely, T. A., Willshaw, D. J. & Hayes, G. M. (1997). A new approach to Kanerva's sparse distributed memory, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 8, 3, 791-794.
- [27] Herrmann, F. P. & Sodini, C. G. (1992). A dynamic associative processor for machine vision applications, *IEEE Micro*, 12, 3, 31-41.
- [28] Hopfield, J.J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79, 2554-2558.
- [29] Hopfield, J.J. (1984). Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81, 3088-3092.
- [30] Imada, A. & Araki K. (1995). Genetic algorithm enlarges the capacity of associative memory. In L.J.Eshelman(Ed.), *Proceedings of 6th International Conference on Genetic Algorithms*, (pp 413-420). San Francisco: Morgan Kaufmann.
- [31] Jagota, A., Narasimhan, G. & Regan, K. W. (1998). Information Capacity of Binary Weights Associative Memories, *Neurocomputing*, 19(1-3), 35-38.
- [32] Jørgensen, T. M. (1997). Classification of handwritten digits using a RAM neural net architecture, *International Journal of Neural Systems*, 8, 1, 17-26.
- [33] Kanerva, P. (1988). *Sparse Distributed Memory*, Cambridge: MIT Press.
- [34] Kennedy, J. V., Austin, J. & Cass, B. (1995). A hardware implementation of a binary neural image processor, *Proceedings of the IEE Conference on Image Processing and its Applications*, Edinburgh, UK.
- [35] Kinser, J. M. (1995). Fast analog associative memory, *Pocceedings of the SPIE*, 2568, 290-293.
- [36] Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions on Computers*, C-21, 4, 353-359.
- [37] Kohonen, T. (1974). An adaptive associative memory principle, *IEEE Transactions on Computers*, C-24, 4, 444-445.
- [38] Kohonen, T. (1987). *Content-Addressable Memories*, Berlin: Springer-Verlag.
- [39] Kohonen, T. (1989). *Self-Organization and Associative Memory*, Berlin: Springer-Verlag.
- [40] Kohonen, T. (1997). *Self-Organizing Maps*, Berlin: Springer.
- [41] Kohonen, T. & Ruohonen, M. (1973). Representation of associated data by matrix operators, *IEEE Transactions on Computers*, C-22, 701-702.
- [42] Kolen, J. F., & Pollack, J. B. (1991). Multiassociative memory, *The Proceedings of the Thirteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 785-789.
- [43] Kosko, B. (1988). Bidirectional associative memories, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18, 1, 49-60.
- [44] Kosko, B. (1992). *Neural Networks and Fuzzy Systems*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.

- [45] Krikelis, A. & Weems, C. C. (1997). Associative Processing and Processors, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 2-9). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- [46] Little, W. & Shaw, G. (1975). A statistical theory of short and long term memory, *Behavioral Biology*, 14, 115-133.
- [47] Ludermir, T. B., Carvalho, A., Braga, A. & Souto, M. C. P. (1999). Weightless neural models: a review of current and past works, *Neural Computing Surveys*, 2, 41-61.
- [48] McCulloch, W. & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133.
- [49] McEliece, R., Posner, E., Rodemich, E. & Venkatesh, S. (1987). The capacity of the Hopfield associative memory, *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-33, 4, 461-482.
- [50] Minsky, M. & Papert, S. (1988). *Perceptrons*, Cambridge: MIT Press.
- [51] Moore, J. (1968). *Elements of linear algebra and matrix theory*, New York: McGraw-Hill.
- [52] Nakano, K. (1972). Associatron-A model of associative memory, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-2, 3, 380-388.
- [53] Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
- [54] Ritter, G. X., Sussner, P. & Diaz-de-Leon, J. L. (1998). Morphological associative memories, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9, 281-293.
- [55] Ritter, G. X., Diaz-de-Leon, J. L. & Sussner, P. (1999). Morphological bidirectional associative memories, *Neural Networks*, 12, 851-867.
- [56] Rosen, K. H. (1995) *Discrete Mathematics and its Applications*, New York: McGraw-Hill.
- [57] Schwenk, H. & Milgram, M. (1995). Transformation invariant autoassociation with application to handwritten character recognition, In D. S. Touretzky, G. S. Tesauro & T. K. Leen (Eds.), *Neural Information Processing Systems*, (pp. 991-998). Cambridge: MIT Press.
- [58] Serra, J. (1992). *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*, London: Academic Press.
- [59] Silver, S., Glover, R. & Stonham, T. (1996). Associative memory neural networks for time series prediction, *Proceedings of the Third IEEE ICECS*, 651-654.
- [60] Simpson, P. K. (1990). *Artificial Neural Systems*, New York: Pergamon Press.
- [61] Sommer, F. T. & Palm, G. (1998). Bidirectional retrieval from associative memory, In M. I. Jordan, M. J. Kearns, & S. A. Solla (Eds.), *Advances in Neural Information Processing Systems 10*, (pp. 675-681). Cambridge: MIT Press.
- [62] Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, *Kybernetik*, 1, 1, 36-45.
- [63] Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, *Kybernetik*, 1, 3, 117-124.
- [64] Storkey, A. J. (1997). Increasing the capacity of a Hopfield network without sacrificing functionality, *International Conference on Artificial Neural Networks*, 451-456.

- [65] Stright, J. R., Coffield, P. C. & Brooks, G. W. (1998). Analog VLSI implementation of a morphological associative memory, *Proceedings of the SPIE*, 3452-03, 14-22.
- [66] Turner, M. & Austin, J. (1997). Matching performance of binary correlation matrix memories, *Neural Networks*, 10, 9, 1637-1648.
- [67] Villanueva, N. & Figueroa, J. (1998). Superposición de información en memorias aleatorias: análisis cualitativo, *Memorias del Simposium Internacional de Computación CIC'98*, 559-564.
- [68] Willshaw, D., Buneman, O. & Longuet-Higgins, H. (1969). Non-holographic associative memory, *Nature*, 222, 960-962.
- [69] Yáñez-Márquez, C. (2002). *Memorias Asociativas basadas en Relaciones de Orden y Operadores Binarios*. Tesis doctoral, CIC-IPN, México.
- [70] Zboril, F. (1997). An application of the sparse distributed memory, *Proceedings of the ASIS 97*, 127-132.