



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN



No. 218 Serie: AZUL Fecha: Agosto 2006

Empleo de la técnica Mapa Recurrente en el análisis de los Índices de Teleconexión atmosféricos

Karinne Ramírez Amaro¹
Jesús Figueroa Nazuno²

RESUMEN

En el estudio del clima se han observado relaciones sistemáticas entre variables medidas en diferentes partes del globo y a estas relaciones se les ha llamado Índices de Teleconexión (IT). Este trabajo presenta el estudio de un conjunto de índices climáticos, donde cada índice se presenta como una serie de tiempo. Para este análisis se hace uso de técnicas de análisis de dinámica no lineal en particular de la técnica de *Mapas Recurrentes*, con el objetivo de encontrar mayor información sobre estos IT. Los resultados que se obtuvieron indican que la dinámica de cada uno de los IT es diferente con respecto a los demás y bajo ciertas circunstancias varios índices se encuentran acoplados durante algún tiempo. Esta misma técnica se puede utilizar en diferentes situaciones, donde se tienen fenómenos descritos por series de tiempo y que existe cierta interacción entre estas series de tiempo.

Palabras Claves: Mapas Recurrentes, Mapas Recurrentes Cruzados, Series de Tiempo.

¹Alumna de Maestría en Ciencias del Centro de Investigación en Computación-IPN

²Profesor Investigador del Centro de Investigación en Computación-IPN

Copyright © 2006

Instituto Politécnico Nacional
Centro de Investigación en Computación
Av. Juan de Dios Bátiz casi esq.
Miguel Othón de Mendizabal Ote.
México, 07738, D.F.

ISBN 970-36-0330-0

Impreso en México

ÍNDICE GENERAL

| | | |
|----|---|----|
| 1 | INTRODUCCIÓN | 1 |
| 2 | TELECONEXIÓN Y SUS ÍNDICES | 3 |
| | 2.1 North Atlantic Oscillation (NAO) | 4 |
| | 2.2 East Atlantic Pattern (EA) | 6 |
| | 2.3 East Atlantic Jet Pattern (EA-JET)..... | 6 |
| | 2.4 North Pacific Pattern (NP) | 6 |
| | 2.5 Tropical/Northern Hemisphere Pattern (TNH) | 7 |
| | 2.6 Polar/Eurasia Pattern (POL)..... | 7 |
| | 2.7 Asia Summer Pattern (ASU) | 7 |
| | 2.8 Procedimientos para el cálculo de los Índices de Teleconexión.... | 7 |
| | 2.9 Procedimiento para el cálculo de la amplitud | 9 |
| 3 | SERIE DE TIEMPO | 10 |
| 4 | ESPACIO DE FASE | 11 |
| 5 | MAPA RECURRENTE | 15 |
| | 5.1 Estructuras en Mapas Recurrentes | 17 |
| | 5.2 Análisis cuantitativo de Mapas Recurrentes | 19 |
| 6 | MAPA RECURRENTE CRUZADO (MRC) | 24 |
| | 6.1 Medidas para el acoplamiento entre dos procesos observados ... | 25 |
| 7 | ANÁLISIS EXPERIMENTAL | 28 |
| 8 | ANÁLISIS DE RESULTADOS | 31 |
| | 8.1 Resultados de la Auto Recurrencia | 31 |
| | 8.2 Resultados de la Recurrencia Cruzada | 38 |
| 9 | CONCLUSIONES | 42 |
| 10 | REFERENCIAS | 44 |
| 11 | APENDICE | |
| | A, Tablas de Resultados del Mapa Recurrente Cruzado | 47 |

ÍNDICE DE TABLAS

| Nº | Título | Pág. |
|----|--|------|
| 1 | Índices de Teleconexión | 1 |
| 2 | Series de tiempo de los Índices de Teleconexión | 28 |
| 3 | Resultados del Porcentaje de Recurrencia | 31 |
| 4 | Resultados del Porcentaje de Determinismo | 33 |
| 5 | Resultados de MaxLine | 34 |
| 6 | Resultados de la Entropía | 35 |
| 7 | Resultados de Tendencia | 36 |
| 8 | Resultados del Porcentaje Laminar y Traptime | 37 |
| 9 | Resultados de todas las métricas | 38 |
| 10 | Resultados de los valores 20.44 – 41.68 | 39 |
| 11 | Resultados del Porcentaje de Determinismo para los índices entre los valores 44.12 y 76.60 | 39 |
| 12 | Resultados más altos de MaxLine | 40 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| Nº | Título | Pág. |
|----|---|------|
| 1 | Ubicación de algunos Índices de Teleconexión | 4 |
| 2 | Fase positiva del índice NAO | 5 |
| 3 | Fase negativa del índice NAO | 5 |
| 4 | Calendario mensual que muestra cuando cada índice de Teleconexión es importante | 8 |
| 5 | Ejemplo de la importancia de escoger una dimensión embebida óptima | 13 |
| 6 | Ejemplo de la reconstrucción del espacio de fase | 14 |
| 7 | A) Muestra un segmento de la trayectoria del espacio de fase de la serie de Lorenz, B) su correspondiente Mapa Recurrente | 15 |
| 8 | Ejemplo de las tres normas comúnmente usadas | 17 |
| 9 | Mapa recurrente sin umbral y con umbral | 17 |
| 10 | Topologías características de Mapas Recurrentes | 18 |
| 11 | A) Segmentos de dos trayectorias y B) su correspondiente Mapa Recurrente Cruzado | 24 |
| 12 | Ejemplo de dos series de tiempo, su reconstrucción en espacio de fase y su Mapa Recurrente cruzado | 26 |
| 13 | A) Ejemplo del análisis de una serie de tiempo y B) Ejemplo del análisis de dos series de tiempo | 29 |
| 14 | Esquema de las etapas del análisis | 30 |

1. INTRODUCCIÓN

En el estudio del clima se han visto relaciones sistemáticas entre diferentes partes del globo, a este conjunto de relaciones se les ha denominado teleconexiones, es decir el clima en una zona o región del globo afecta a otra región que está muy alejada. Un ejemplo de esto es el fenómeno del niño (ENSO), que es un cambio de temperatura cíclico que ocurre en las costas del Perú y que afecta en forma directa el clima en diversos lugares [Glantz, 1991]. De los estudios, que resultan de la medición de un conjunto de diferentes variables climatológicas en varios lugares, se han logrado destilar una serie de variables numéricas en formas de series de tiempo (ST) que son representativas de toda una región. A estas variables se les han llamado Índices de Teleconexión (IT) los cuales son calculados por varios centros de medición de datos climatológicos, en su mayoría en el Hemisferio Norte, que están sometidos a cambios en las temperaturas de la superficie tropical. La técnica utilizada para encontrar estos índices fue la Rotación del Análisis de Componentes Principales (MRCA), que a diferencia de los demás técnicas, ésta monitorea las zonas con grandes anomalías [Barnston y Livezey, 1987]. Como ejemplo de los Índices de Teleconexión se pueden mencionar los siguientes: North Atlantic Oscillation (NAO), Subtropical Zonal Pattern (SZ), Asia Summer Pattern (ASU), entre otros. Ver todos los índices que se utilizaron en este análisis en la Tabla 1.

Tabla 1. Índices de Teleconexión

| | |
|--------|--------------------------------------|
| NAO | North Atlantic Oscillation |
| EA | East Atlantic Pattern |
| EA/JET | East Atlantic Jet Pattern |
| WP | Western Pacific Pattern |
| EP | Eastern Pacific Pattern |
| NP | North Pacific Pattern |
| PNA | Pacific/North American Pattern |
| EA/WR | East Atlantic/West Russia Pattern |
| SCA | Scandinavia Pattern |
| TNH | Tropical/Northern Hemisphere Pattern |
| POL | Polar/Eurasia Pattern |
| PT | Pacific Transition Pattern |
| SZ | Subtropical Zonal Pattern |
| ASU | Asia Summer Pattern |

Sin embargo, no se ha realizado un análisis para conocer las dinámicas de estos Índices de Teleconexión. En este trabajo se propone el uso de técnicas modernas de análisis no lineal en particular de las técnicas de Mapas Recurrentes, para

encontrar mayor información que describa las dinámicas de los Índices de Teleconexión vistos en la tabla 1.

La relación entre los IT y las variaciones de la temperatura de la superficie, tormentas y precipitaciones, afectan al océano, a los ecosistemas, al cambio climático global, al incremento de CO₂, entre otros. En conjunto estos índices describen las variabilidades internas atmosféricas y su tendencia a través del tiempo [Hurrell et al, 2003].

La organización de este reporte es la siguiente: en la sección 2 se define el término teleconexión y los índices que se utilizaron en este análisis, en la sección 3 se define serie de tiempo y en la sección 4 espacio de fase, para así, poder introducir la técnica de Mapa Recurrente en la sección 5. En la sección 6 se define la técnica Mapa Recurrente Cruzado, en la sección 7 se explica la metodología que se empleo en este trabajo, en la sección 8 se interpretan los resultados obtenidos, finalizando con sección 9, conclusiones.

2. TELECONEXIÓN Y SUS ÍNDICES

El estudio de la variabilidad de la atmósfera comenzó con los trabajos de Walter y Bliss en el año de 1932 [Walter y Bliss, 1932], encontrando cierto comportamiento entre la presión atmosférica medida en dos lugares distintos, a la cual se denominó teleconexión. Sin embargo el término teleconexión no fue usado hasta 1935 cuando Ångström lo uso para describir un “fenómeno atmosférico” ahora conocido como la Oscilación del Atlántico del Norte (NAO por sus siglas en inglés) [Glantz, 1991]. No obstante, la importancia de las teleconexiones no fue ampliamente apreciada si no hasta mediados de los años 70, con el evento del niño o más correctamente ENSO (El Niño/Southern Oscillation) [Glantz, 1991] el cual es ampliamente conocido y estudiado como un índice de teleconexión [Lamb y Pepler 1991].

El concepto “Teleconexión” se define como: los patrones de comportamientos entre dos sitios distintos, a causa de la variabilidad climática ocurrida por alguna medición (temperatura, presión, etc.) [Quiring y Blair, 2002]. Esto es, un índice de teleconexión se define como la diferencia de temperaturas entre dos lugares distintos (centros de acción).

Todos los patrones de teleconexión ocurren de forma natural en nuestro sistema atmosférico caótico y se pueden presentar en las dinámicas internas de la atmósfera.

La teleconexión cuenta con varios índices que son medidos en distintos lugares del Hemisferio Norte y áreas subtropicales-tropicales. Cada uno de estos índices cuenta con dos centros de acción a partir de los cuales se observa la variabilidad climática de cada índice. El índice de teleconexión más importante es el índice NAO (North Atlantic Oscillation) por la gran periodicidad en la variabilidad de la circulación atmosférica [Hurrell et al, 2003]. Cada uno de los IT presenta dos fases, una positiva y otra negativa. A continuación se explicaran algunos IT cuyos centros de acción se observan en la Figura 1.

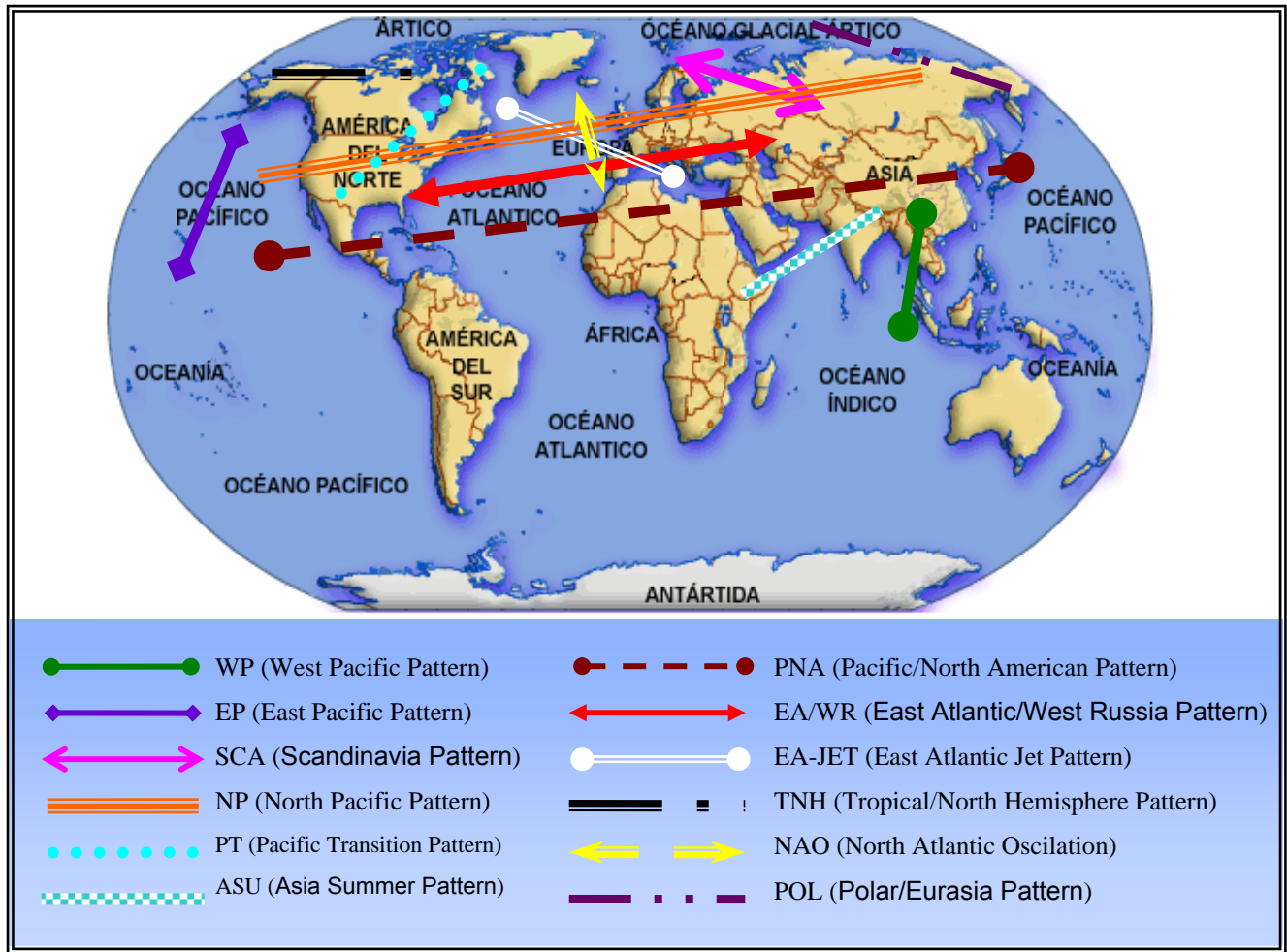


Figura 1. Ubicación de algunos Índices de Teleconexión

2.1 North Atlantic Oscillation (NAO).

Este índice fue identificado por Wallace y Gutzler en el año de 1981 durante la temporada invernal [Wallace y Gutzler, 1981]. Este índice tiene uno de sus centros localizados sobre Groenlandia y otro centro con signo opuesto que abarca latitudes centrales del norte del atlántico entre 35°N y 40°N. Ver Figura 1. Durante las últimas tres décadas se han observado dos fases en el comportamiento de este índice.

Fase Positiva: durante esta fase las condiciones del Atlántico Noroeste y las regiones del mediterráneo son más frías y secas que las condiciones promedio, mientras que las condiciones en el norte de Europa, el este de Estados Unidos y partes de Escandinava son más calientes y más húmedas que sus condiciones promedio como se muestra en la Figura 2. Lo anterior genera:

- Inviernos templados en las corrientes bajas de Europa hasta Asia.
- Inviernos más severos en el este de Canadá y el atlántico noroeste.
- Decrementos de las presiones a nivel de mar sobre el ártico provocando cambios en las propiedades físicas de sus aguas.
- Cambios en la producción de los organismos que viven en el plancton, lo cual genera cambios en la distribución de los peces.

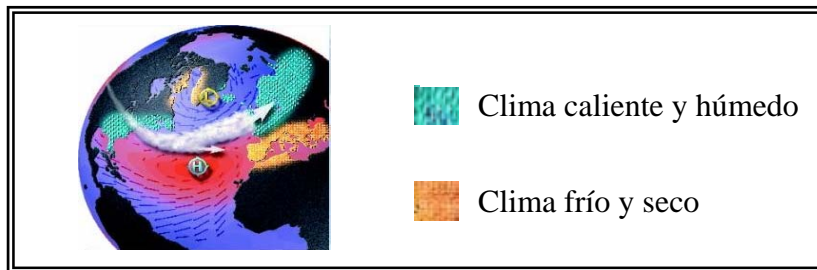


Figura 2. Fase positiva del índice NAO.

Fase negativa: muestra un incremento pequeño de la presión subtropical y de presión en el área de Islandia, como se muestra en la Figura 3. Esto genera:

- La reducción de la presión en tormentas pequeñas y débiles situadas al oeste, durante el invierno.
- Las condiciones del Atlántico Noroeste y las regiones del mediterráneo son más calidas y húmedas que las condiciones promedio, mientras que las condiciones en el norte de Europa, el este de Estados Unidos y partes de Escandinava son más frías y secas que sus condiciones promedio.
- La costa este de los Estados Unidos experimenta más corrientes de aire frío, generando condiciones de nevadas invernales, Groenlandia sin embargo tiene temperaturas invernales más cálidas.

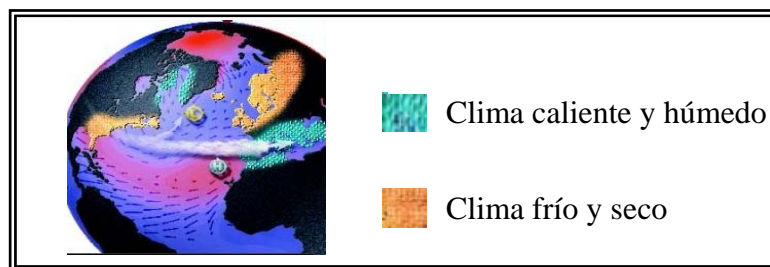


Figura 3. Fase negativa del índice NAO.

Datos oceánicos recolectados de CO₂ han revelado que los cambios asociados con ENSO y NAO causan grandes variaciones en el CO₂ del océano. Por ejemplo,

períodos del NAO positivo están asociados con un incremento en el número de tormentas, las cuales han significado implicaciones en el flujo de aire del Dióxido de Carbono.

2.2 East Atlantic Pattern (EA)

Este índice se presenta todos los meses excepto de Mayo a Agosto. El patrón es estructuralmente similar a la del NAO, sus centros de anomalías abarcan todo el Océano norte del Atlántico de este a oeste, estos son desplazados hacia el sureste hasta aproximarse a las regiones límites del índice NAO. Por esta razón el índice EA es a menudo confundido como simplemente un ligero cambio hacia el sur del índice NAO. Además, el centro de latitud menor tiene un vínculo subtropical fuerte reflejando modulaciones a gran escala en la fuerza y localidad del subtropical. Este enlace subtropical es lo que diferencia al índice EA del índice NAO.

2.3 East Atlantic Jet Pattern (EA-JET)

Este índice se presenta entre los meses abril y agosto. Con un centro principal localizado sobre las altas latitudes del este del Atlántico Norte y Escandinava, el otro centro esta localizado sobre el norte de África y el mar Mediterráneo. Ver Figura 1.

La fase *negativa* del índice EA-JET refleja una fuerte corriente de aire sobre las regiones este del Atlántico Norte sobre la mayor parte de Europa, algunas veces relacionado con bloques anticiclónicas altamente pobladas dentro del vecindario de Groenlandia y Gran Bretaña.

2.4 North Pacific Pattern (NP)

Este índice se presenta de marzo a julio y contiene un centro de anomalía primario que abarca latitudes centrales del oeste y centro del pacífico norte y otra región de anomalía débil de signo opuesto que abarca el este de Siberia, Alaska y sobre la región montañosa de América del Norte. Ver Figura 1.

La fase *positiva* del índice NP está asociada con un movimiento de las corrientes hacia el sur e intensificaciones de estas sobre el pacífico desde el este de Asia hacia el este del Pacífico Norte, seguido de un incremento de circulación ciclónica sobre el sur-este de los Estados Unidos. Recientemente Bell y Janowiak (1995) notaron que esta fase reflejaba una de las respuestas a la circulación de la atmósfera en el Hemisferio Norte del fenómeno ENSO durante la primavera. Sus estudios concluyeron en que estas condiciones fueron indirectamente importantes

con el inicio de las inundaciones de Midwest. Ellos fomentaron un estudio sobre intensas anomalías en tormentas sobre las latitudes medias del Pacífico Norte.

2.5 Tropical/Northern Hemisphere Pattern (TNH)

Este índice primero fue clasificado en [Mo y Livezey, 1986] y se presenta de noviembre a febrero. El índice TNH contiene un primer centro de anomalía sobre el golfo de Alaska y el otro centro separado sobre la bahía Hudson. La anomalía del Golfo de Alaska se extiende a través de México y el extremo suroeste de Estados Unidos. Ver Figura 1.

La fase *negativa* del índice TNH se observa principalmente durante diciembre y enero cuando las condiciones cálidas del pacífico se presentan (ENSO) [Barnston et al., 1991]. En contraste la fase *positiva* del índice TNH viene acompañada de vientos fríos del Pacífico.

2.6 Polar/Eurasia Pattern (POL)

Este índice ocurre únicamente en invierno y es una de las variabilidades más importantes con baja frecuencia, se presenta durante diciembre y febrero. Contiene un centro de anomalía sobre la región polar y otro centro separado y con signo opuesto sobre Europa y el noroeste de China. De esta manera este índice refleja cambios fuertes en la circulación polar y revela consigo cambios asimétricos los cuales ocurren en la circulación de latitud medio, sobre grandes regiones de Europa y Asia. Ver Figura 1.

2.7 Asia Summer Pattern (ASU)

Este índice se presenta de junio a agosto. Tiene anomalías del mismo signo observadas por todo el sur de Asia y el noroeste de África, ver Figura 1. Su fase positiva se caracteriza por anormales incrementos por todo el sur de Asia y el noroeste de África.

2.8 Procedimientos para el cálculo de los Índices de Teleconexión.

El procedimiento para identificar los índices de teleconexión es el Análisis de Componentes Principales Alternados (MRCA, Rotated Principal Component Analysis) [Barnston and Livezey, 1987]. Este procedimiento aísla los Índices de Teleconexión primarios para todos los meses y permite calcular las amplitudes de los índices. MRCA monitorea cada índice cada mes tomando como media 700-mb de las anomalías altas entre enero de 1964 y julio de 1994. En este análisis, diez índices (o eigenvectores—10 rotaciones especiales de Varimax) fueron

determinadas para cada calendario mensual mostrado en la Figura 4 y usando los campos de anomalías más altos por un período de tres meses centrado sobre ese mes: esto es, los índices de julio son calculados en base a los campos de anomalías desde junio hasta agosto.

| Índice | Dic | Ene | Feb | Mar | Abril | Mayo | Jun | Jul | Ago | Sep | Oct | Nov |
|---------------------------|-----|-----|-----|-----|-------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| NAO | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 5 | 1 | 1 |
| EA | 6 | 6 | 7 | 6 | 10 | --- | --- | --- | --- | 8 | 7 | 5 |
| EA-JET | --- | --- | --- | --- | 6 | 9 | 7 | 3 | 7 | --- | --- | --- |
| WP | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 4 | 6 |
| EP | 9 | 10 | 9 | 10 | 8 | 3 | 1 | 1 | --- | --- | 6 | 9 |
| NP | --- | --- | --- | 2 | 2 | 1 | 2 | 6 | --- | --- | --- | --- |
| PNA | 3 | 1 | 2 | 5 | 5 | 10 | --- | --- | 6 | 6 | 5 | 2 |
| EATL/ WRUS | 7 | 8 | 10 | 7 | 9 | 7 | --- | --- | --- | 7 | 3 | 4 |
| SCAND | 5 | 9 | 8 | 8 | 3 | 5 | --- | --- | 10 | 1 | 2 | 3 |
| POLAR- EURASIA | 1 | 4 | 1 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| TNH | 8 | 7 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | 8 |
| PT | --- | --- | --- | --- | --- | 8 | 4 | 4 | 4 | --- | --- | --- |
| ASIAN SUMMER | --- | --- | --- | --- | --- | --- | 5 | 5 | 5 | --- | --- | --- |

Figura 4. Calendario mensual que muestra cuando cada índice de Teleconexión es importante. Los valores tabulados indican el número de los Índices de Teleconexión para este calendario (i.e un 1 indica que el índice aparece como modo aleatorio líder durante ese mes, etc.) Ningún valor es graficado cuando un índice no aparece como modo aleatorio líder en un calendario dado.

El análisis cuenta la variabilidad en la estructura y amplitud de los Índices de Teleconexión asociados con ciclos anuales de la circulación atmosférica tropical.

Esto además permite una mejor continuidad de las series de tiempo de un mes hacia el siguiente, de la que se obtendría si los índices fuesen calculados basados sobre los datos por cada mes independientemente. Finalmente, esto permite resultados más robustos debido al incremento del número de campos usados en calcular los modos de cada mes.

El método MRCA ofrece mejores resultados para este caso, en comparación al análisis basado en puntos cuadrículados, típicamente determinado de los mapas

de puntos de correlación, en donde los Índices de Teleconexión son identificados basados en campos de corrientes y no sólo de anomalías altas de lugares seleccionados [Barnston y Livezey, 1987].

2.9 Procedimiento para el cálculo de la amplitud.

Como se mencionó anteriormente los Índices de Teleconexión se observan como series de tiempo y estas muestran mensualmente amplitudes estandarizadas de los Índices de Teleconexión del Hemisferio Norte, que fueron construidos del análisis de componentes principales alternados (MRCA) de la siguiente manera: Por cada mes en la base de datos, las amplitudes observadas de 10 Índices de Teleconexión correspondientes al calendario que se muestra en la Figura 4 son calculadas usando un análisis de regresión llamado mínimo cuadrados (Least-Squares). En este análisis, las amplitudes son determinadas simultáneamente tal que, la suma combinada de sus productos con los eigenvectores correspondientes al índice explican la máxima estructura espacial de las altas anomalías observadas durante un mes. Para cada índice, las amplitudes se juntan dentro de una serie de tiempo continua y estandarizada con media igual a cero y varianza igual a 1.0 para cada calendario independiente.

Las series de tiempo muestran amplitudes diarias (no estandarizadas a media=0 y varianza=1) de los índices seleccionados, son calculados para pronosticar diariamente altas anomalías a 700-hPa dentro de las diez importantes funciones empíricas ortogonales (EOF's, Empirical-determined Orthogonal Functions) correspondientes por cada tres meses los cuales comprenden las temporadas en el cual el día es encontrado.

3. SERIE DE TIEMPO

Una serie de tiempo es un conjunto de datos numéricos obtenidos a partir de una observación experimental de algún sistema, o mediante el cálculo numérico de las ecuaciones de movimiento (en el caso particular que sea posible calcular su solución). Las series de tiempo contienen información sobre las variables independientes de un sistema que determinan su dinámica (grados de libertad). La extracción de esta información es un problema que se estudia mediante el análisis (caracterización), predicción y modelado de las series de tiempo. La caracterización de las series de tiempo tiene como objetivo la extracción de la mayor cantidad de información sobre el comportamiento de la serie, es decir, sobre la dinámica del sistema representado, y así identificar o construir la mejor o mejores técnicas que puedan determinar el comportamiento de la dinámica del sistema expresada por la serie de tiempo [Bautista-Thompson, 2004].

En este trabajo se estudia a las series de tiempo, las cuales representan el comportamiento dinámico (en el tiempo) de variables experimentales de sistemas de origen natural.

Al estudiar la dinámica de un sistema, mediante un experimento, se selecciona un subconjunto de variables del sistema las cuales son observadas y medidas, donde dichas observaciones se representan por conjuntos de datos en el tiempo (series de tiempo). Una serie de tiempo es una proyección en R^m de la trayectoria de la dinámica del sistema en el espacio de fase de m dimensiones (grados de libertad del sistema).

Es decir, una serie de tiempo es un conjunto $ST = \{x(1), x(2), x(3), \dots, x(t), \dots, x(N)\}$. Este conjunto es una secuencia de datos experimentales para un intervalo de tiempo $T=N$, de una variable observable $x(t)$ de un sistema [Herrera-Alcántara et al. 2005].

La serie de tiempo de un sistema es una estructura de información a partir de la cual es posible recuperar la información necesaria para reconstruir la trayectoria dinámica del sistema, al menos de forma parcial. Lo anterior fue demostrado matemáticamente por [Whitney, 1934]. Posteriormente F. Takens en 1980, propuso y demostró un algoritmo para la construcción de la trayectoria del atractor en el espacio fase a partir del embebido de la serie de tiempo [Takens, 1981].

4. ESPACIO DE FASE

Los estados de sistemas en la naturaleza, o típicamente en la ingeniería cambian con respecto al tiempo. La investigación de este proceso sumamente complejo es una tarea importante en varias disciplinas científicas que ayudan a entender y describir estos cambios. El objetivo es usualmente encontrar un modelo matemático que pueda ser adaptado a un proceso real y usado para resolver los problemas propuestos.

Los métodos mejor conocidos y aprobados para analizar datos fueron aquellos basados en conceptos lineales como estimación de momentos, correlaciones, espectro de potencia, análisis de componentes, etc. En las dos últimas décadas esta gran variedad de métodos de análisis han sido enriquecidos con métodos teóricos de dinámica no lineal. Algunos de estos nuevos métodos se basan en métricas o análisis topológico del espacio de fase de dinámicas específicas o en la apropiada reconstrucción de este espacio de fase [Kantz y Schreiber, 1997] y [Takens, 1981].

La dinámica del sistema puede ser descrito como una trayectoria $\vec{x}_i \in R^n (i=1, \dots, N)$ en un espacio de fase n -dimensional [Eckman et al., 1987].

Un método frecuentemente utilizado para la reconstrucción de la trayectoria \vec{x}_i , es el método de tiempo de retardo de Takens:

$$\vec{x}_i = (u_i, u_{i+d}, \dots, u_{i+(m-1)d}) \quad (\text{Ec. 4.1})$$

donde m es la dimensión embebida y d es el tiempo de retardo. La preservación de las estructuras topológicas de la trayectoria original está garantizada si $m \geq 2d + 1$ [Takens, 1981].

La sucesión temporal de vectores en el espacio de fase forman una trayectoria (trayectoria del espacio de fase / órbita). La evolución en el tiempo de la trayectoria explica la dinámica del sistema, conocida como el atractor del sistema.

La forma de la trayectoria da información acerca del sistema; sistemas periódicos o caóticos tienen espacios de fase característicos. La observación de un proceso real usualmente no proporciona todas las variables de estado posibles, y a menudo no todas las variables de estado son conocidas o bien no todas pueden ser medidas.

Un acoplamiento entre los componentes del sistema implica que cada componente individual contiene información esencial acerca de la dinámica del sistema completo. Por consecuencia una trayectoria equivalente en el espacio de fase, la cual preserve las estructuras topológicas de la trayectoria del espacio de fase original puede ser reconstruida utilizando únicamente series de tiempo o la observación del sistema [Packard et al., 1980] y [Takens, 1981].

Los parámetros de dimensión m y retardo d , tienen que ser elegidos apropiadamente para garantizar la reconstrucción del espacio de fase original.

Existen diferentes métodos que son utilizados para determinar la dimensión embebida óptima [Cao, 1997] y [Kantz y Schreiber, 1997]:

1. El primer método es el cálculo de varias medidas invariantes sobre el atractor reconstruido, el cual podría cambiar si la dimensión embebida actual es muy pequeña, pero podría persistir si es lo suficientemente grande. Este método, que es subjetivo e inusual, requiere conjuntos de datos en grandes cantidades.
2. La investigación de los cambios en el vecindario de los puntos en el espacio de fase ocurren después de aplicar cambios en la dimensión embebida. Una dimensión embebida inapropiada puede causar un incremento en la cantidad de falsos vecinos cercanos.
3. La descomposición de valores simples de un conjunto inicial de la reconstrucción de vectores del espacio de fase revela el número más pequeño de direcciones no correlacionadas en el espacio de fase, los cuales pueden ser usados como una dimensión embebida.

En este trabajo se usa el método de falsos vecinos cercanos (FNN, por sus siglas en inglés) para el cálculo de la dimensión embebida. La idea fundamental de este método es que mediante un decremento de la dimensión embebida, un incremento entre los puntos del espacio de fase será proyectado en el vecindario de cualquier punto del espacio fase, incluso si ellos no son vecinos reales (Figura 5). Tales puntos son llamados falsos vecinos cercanos. El método simplemente usa la cantidad de estos falsos vecinos como una función de la dimensión embebida para encontrar la mínima dimensión [Kantz y Schreiber, 1997]. Tal dimensión debe de ser tomada cuando todos los falsos vecinos desaparezcán.

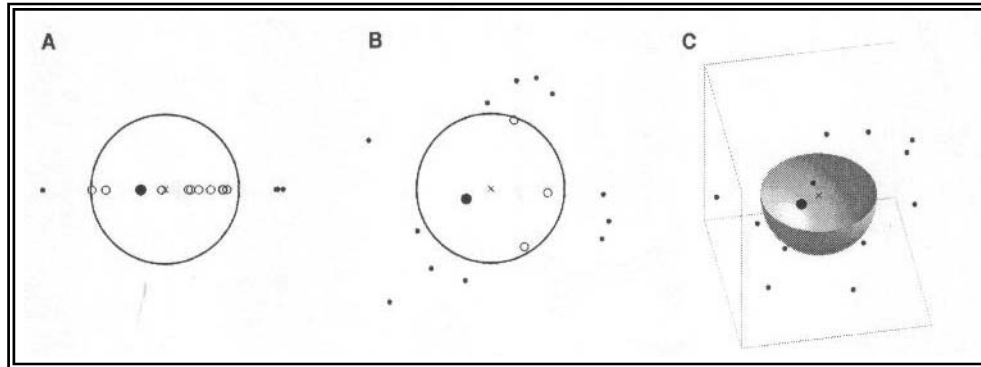


Figura 5. Ejemplo de la importancia de escoger una dimensión embebida óptima. El decremento de la dimensión embebida causa un incremento de falsos vecinos cercanos (círculos blancos) lo cuales caen dentro del vecindario (el círculo grande o la palota partida) de un punto del espacio de fase (la cruz); los verdaderos vecinos cercanos son los círculos negros; A) con dimensión $m=1$, B) $m=2$ y C) $m=3$.

Existen diversas variaciones de este método, una de ellas es definir previamente un valor ε (radio del vecindario) que sirva como umbral para determinar si dos puntos están dentro de un mismo vecindario y de esta forma se pueda calcular el porcentaje de falsos vecinos cercanos para un rango de dimensiones preestablecido, y en la dimensión en la cual el porcentaje de falsos vecinos cercanos tienda a ser cero, esta dimensión será tomada como la dimensión m apropiada.

En una dimensión embebida muy baja como para desdoblar el atractor, no todos los puntos que se mantienen juntos serán vecinos debido a la dinámica; algunos de ellos estarán alejados y aparecerán como vecinos en esa dimensión, dado que la geometría del atractor ha sido proyectada a un espacio de dimensión menor.

Para la reconstrucción apropiada del espacio de fase son dos los valores importantes que se deben de calcular: la dimensión embebida (m) y el tiempo de retardo (d), previamente se han descrito los métodos para el cálculo óptimo de la dimensión embebida. A continuación se mencionaran y describirán los métodos para el cálculo óptimo del tiempo de retardo:

1. Uno de los métodos para el cálculo de d es por medio de la función de autocovarianza. El retardo podría ser apropiado cuando la autocovarianza se aproxima a cero. Esto minimiza la correlación lineal entre los componentes, pero esto no significa que estos sean independientes. Sin embargo su recíproco es verdadero: Si dos variables son independientes estas podrían ser no correlacionadas.
2. Otro método para determinar el retardo es la información mutua (Mutual Information) [Fraser y Swinney, 1986] el cual estima el valor óptimo del tiempo de retardo d para la reconstrucción del espacio de fase.

Considerando la medición $u(t) = u_d$, el promedio de información mutua determina cuantos bits en promedio pueden ser predichos respecto una segunda medición $u(t+d) = u_{t+d}$. El promedio ponderado de esta información estadística se define como :

$$I(d) = \sum P(u_t, u_{t+d}) \log_2 \left[\frac{P(u_t, u_{t+d})}{P(u_t)P(u_{t+d})} \right] \quad (\text{Ec. 4.2})$$

Donde $P(u_t)$ es la densidad de probabilidad de un a medición y $P(u_t, u_{t+i})$ la densidad de probabilidad conjunta de dos mediciones. La prescripción para determinar si los valores de $u(t)$ y $u(t+d)$ son lo suficientemente independientes tal que se pueden usar para reconstruir la dinámica del sistema es tomar d donde el primer mínimo de $I(t)$ ocurre.

La ventaja del método de información mutua contra el método de la función autocovarianza es que encuentra interrelaciones no lineales y por lo tanto determina un retardo que cumple con el criterio de independencia.

Con los parámetros correctos de retardo y dimensión embebida, se puede reconstruir el espacio de fase más parecido al original. Ver Figura 6.

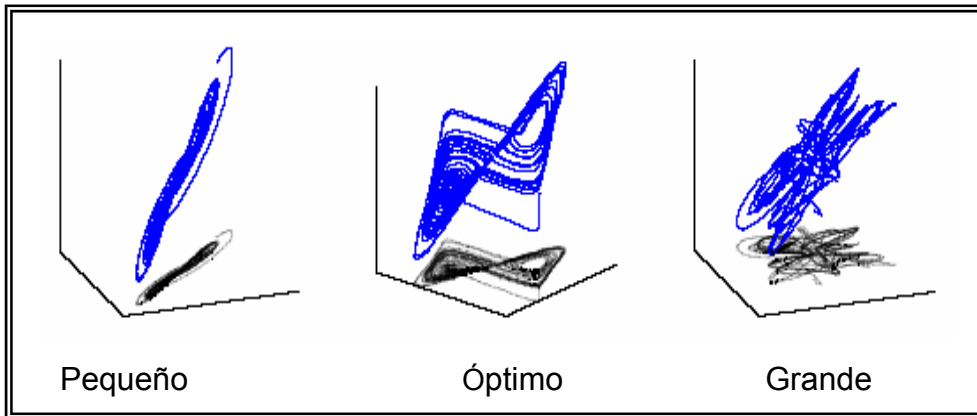


Figura 6. Ejemplo de la reconstrucción del espacio de fase con parámetros pequeños, óptimos y grandes.

La reconstrucción del espacio de fase es el punto de inicio para la construcción de un Mapa Recurrente y esto se explica a continuación.

5. MAPA RECURRENTE (MR)

Los procesos naturales presentan distintos comportamientos recurrentes, por ejemplo periodicidades (como temporadas), también ciclos irregulares (como el fenómeno ENSO). Sin embargo, la recurrencia de los estados, en el sentido que los estados están arbitrariamente cerca después de algún tiempo, es una propiedad fundamental de los sistemas dinámicos determinísticos y es típico para sistemas no lineales y caóticos [Ott, 1993] y [Argyris et al., 1994].

Eckmann y otros investigadores han introducido una herramienta con la cual se puede visualizar la recurrencia de los estados \bar{x}_i en un espacio de fase, por lo general un espacio de fase tiene mas de una dimensión. Espacios de fase con dimensiones altas solo pueden ser visualizados por proyección de dos o tres sub-espacios dimensionales, sin embargo la herramienta de Eckman nos permite investigar la trayectoria (dinámica del sistema) en un espacio de fase m -dimensional a través de una representación en dos dimensiones de sus recurrencias (Figura 7). Dicha recurrencia de un estado en el tiempo i en un diferente tiempo j es visualizado dentro de una matriz cuadrada bidimensional (matriz de recurrencia) con puntos blancos y negros, donde los puntos negros marcan una recurrencia y ambos ejes son de tiempo.

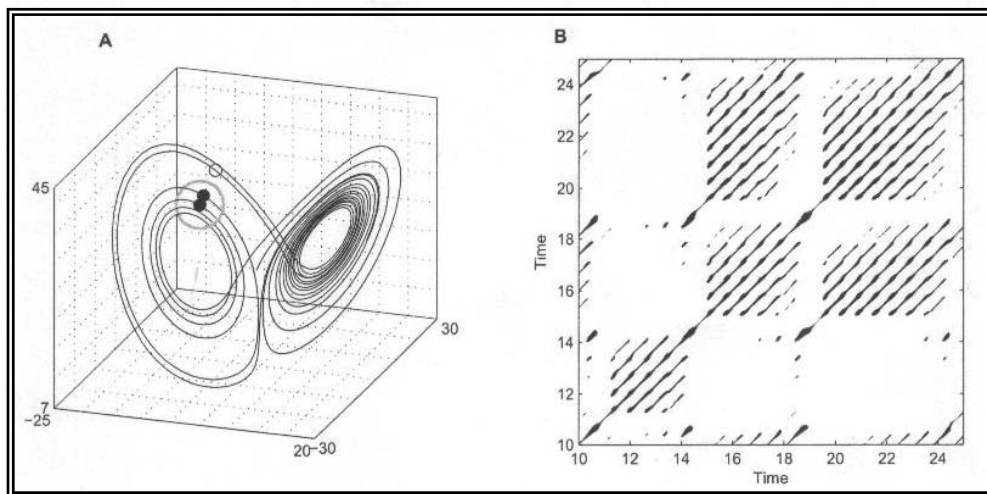


Figura 7. (A) Muestra un segmento de la trayectoria del espacio de fase de la serie Lorenz, (B) su correspondiente Mapa Recurrente. Un punto de la trayectoria j el cual cae dentro del vecindario (circulo gris en (A)) de un punto dado en i es considerado como un punto recurrente (punto negro sobre la trayectoria en (A)). Este es marcado como un punto negro en el MR en la posición (i, j) . Un punto fuera del vecindario (el circulo pequeño en (A)) causa un punto blanco en el MR.

Esta representación es llamada Mapa Recurrente (MR, Recurrente Plot). El cual puede ser matemáticamente expresado como:

$$R_{i,j}^{m,\varepsilon_i} = \Theta\left(\varepsilon_i - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|\right), \bar{x}_i \in \mathfrak{R}^m, i, j = 1 \dots N, \quad (\text{Ec. 5.1})$$

Donde N es el numero de estados considerados \bar{x}_i ; ε_i es la distancia umbral, $\|\cdot\|$ es una norma (e.g euclidiana) y $\Theta(\cdot)$, es la función de partición, donde $\Theta(x) = \{1|x > 0; 0|x \leq 0\}$.

Por definición $R_{i,i} = 1(i = 1 \dots N)$, el Mapa Recurrente tiene una línea negra en la diagonal principal y a esta se le llama Línea de Identidad (LOI), con un ángulo de $\pi/4$. Tiene que ser observado que un solo punto recurrente (i, j) no contiene información acerca de los estados actuales en los tiempos i y j . Sin embargo del total de los puntos recurrentes es posible reconstruir las propiedades de los datos. No obstante la trayectoria del espacio de fase puede también ser reconstruido del MR, donde la información sobre la longitud absoluta de los vectores del espacio de fase no existe.

Por lo tanto, la recurrencia está definida como un estado \bar{x}_i que esta lo suficientemente cerca de \bar{x}_j , lo cual implica que aquellos estados que caen dentro de un vecindario m -dimensional con radio ε_i centrado en \bar{x}_i son recurrentes. Estos \bar{x}_j son llamados puntos recurrentes.

En la definición anterior de Mapas Recurrentes, el vecindario es una bola (se utiliza la norma euclidiana (L_2)) y su radio es elegido de tal forma que ésta contiene una cantidad fija de estados \bar{x}_i [Eckman et, al., 1987] y el radio ε_i cambia para cada \bar{x}_i ($i=1 \dots N$) y $R_{i,j} \neq R_{j,i}$ porque el vecindario de \bar{x}_i no tiene que ser el mismo que el de \bar{x}_j . Sin embargo, el vecindario mas comúnmente utilizado es aquel con un radio fijo $\varepsilon_i = \varepsilon, \forall_i$, este vecindario fue utilizado originalmente por [Zbilut et al., 1991]. El hecho de utilizar un radio fijo implica que $R_{i,j} = R_{j,i}$ lo cual resulta en un MR simétrico. El tipo de vecindario a utilizar depende de cada aplicación.

Para obtener un Mapa Recurrente una norma debe de ser elegida. Las normas más conocidas son: la norma mínima (L_1 -Norm), la norma euclidiana (L_2 -Norm) y la norma máxima (L_∞ -Norm). Los vecindarios de estas normas tienen diferentes formas. (Figura 8). Considerando un radio aleatorio, la norma L_∞ encuentra los

máximos, la norma L_1 los mínimos y la norma L_2 encuentra una cantidad intermedia de vecinos.

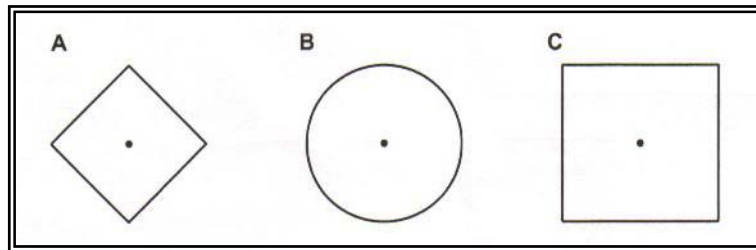


Figura 8. Tres de las normas comúnmente usadas para definir el vecindario con el mismo radio sobre un punto (punto negro) ejemplificado para un espacio de fase de dos dimensiones: (A) L_1 -norm, (B) L_2 -norm y (C) L_∞ -norm.

Se debe prestar atención en la manera de escoger el umbral ε . Es recomendable que se escoja un umbral óptimo. Sugerencias de la literatura muestran que este umbral debería ser un porcentaje del máximo diámetro del espacio de fase. [Mindlin y Gilmor, 1992] y éste no debe exceder el 10% de la media del máximo diámetro del espacio de fase [Zbilut y Webber, 1992] y [Koebe y Mayer-Kress, 1992]. Ejemplos de cómo afecta el umbral se observan en la Figura 9.

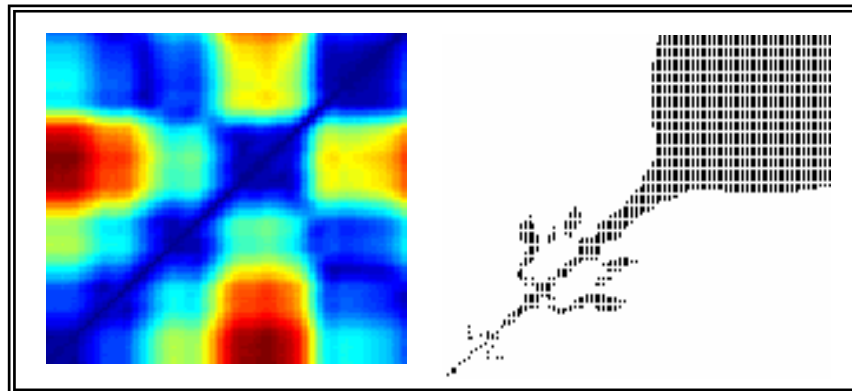


Figura 9: Mapa Recurrente sin umbral (izquierda) y con umbral (derecha).

5.1 Estructuras en Mapas Recurrentes.

El propósito fundamental de los MR (Mapas Recurrentes) es la inspección visual de trayectorias en espacios de fase de dimensiones altas. La inspección visual de los MR brinda indicios de la evolución en el tiempo de estas trayectorias. Una ventaja de los MR es que pueden ser aplicados a datos de longitud pequeña e incluso a datos no-estacionarios.

Los MR exhiben características a gran escala y patrones en escalas pequeñas. Los primeros patrones fueron denotados por Eckman et al. (1987), como *topología* y el posterior como *textura*. La topología ofrece una visión global, la cual puede ser caracterizada como: homogénea, periódica, con tendencia y desorganizada. Ver Figura 10.

- Los MR Homogéneos son típicos de sistemas estacionarios, un MR homogéneo es el producido por una serie de tiempo aleatoria. Ver Figura 10 A.
- Los MR periódicos son aquellos que presentan estructuras periódicas en el tiempo, la Figura 10 B muestra un ejemplo de un sistema periódico en tiempo.
- La tendencia en los MR se debe a que los parámetros de los sistemas varían lentamente. Ver Figura 10 C.
- El motivo por el cual los MR presentan una topología desorganizada se debe a que en la dinámica del sistema se presentan cambios abruptos lo cual genera áreas o bandas blancas en los MR. Como se observa en la Figura 10 D.

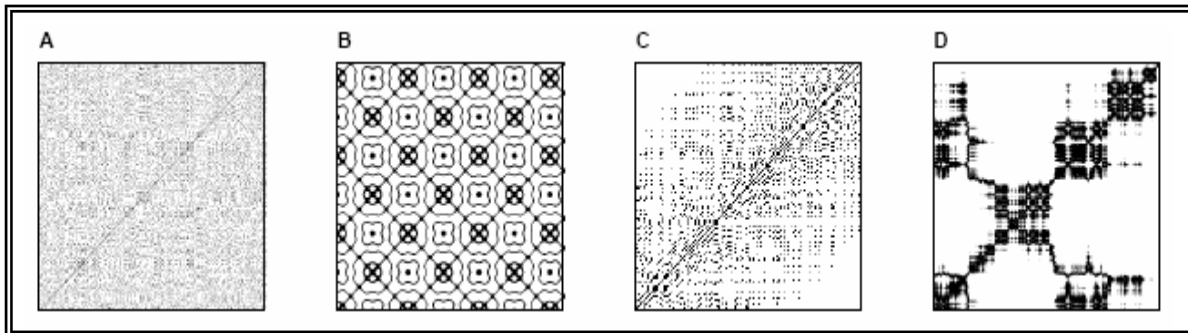


Figura 10. Topologías características de Mapas Recurrentes. A) Homogénea (ruido uniformemente distribuido), B) Periódica (oscilaciones armónicas), C) Tendencia (mapa logístico), D) Desorganizada (Movimiento).

La inspección cercana de los MR revela estructuras (las texturas) las cuales son: puntos individuales, líneas diagonales así como líneas verticales [Islas-Barrera, 2004]:

- Puntos de recurrencia individuales pueden presentarse si los estados son raros, si ellos no persisten en cualquier tiempo o bien si ellos fluctúan abruptamente.
- Una línea diagonal ocurre cuando un segmento de una trayectoria corre paralelo a otro segmento es decir la trayectoria pasa por la misma región del espacio de fase en tiempos distintos, la longitud de esta línea diagonal

esta determinada por la duración de la evolución local de los segmentos de la trayectoria.

- Una línea vertical indica una longitud de línea en la cual un estado no cambia o cambia muy lentamente. es decir que el estado se encuentra atrapado por algún tiempo. Este es un comportamiento típico de estados laminares (intermitencia).

Estas estructuras están basadas en un análisis cuantitativo de los MR.

A continuación se presenta una lista de observaciones que se pueden presentar en los MR y se da su correspondiente interpretación cualitativa [Islas-Barrera, 2004]:

1. Homogeneidad: El proceso es estacionario.
2. El desvanecimiento de las esquinas superior izquierda e inferior derecha: indican la no estacionalidad, es decir, el proceso contiene una tendencia.
3. Discontinuidades: no estacionalidad; algunos estados son raros o se encuentran lejos de la normal; transiciones podrían haber ocurrido en el sistema.
4. Patrones periódicos: existen ciclos en el proceso el tiempo de la distancia entre patrones periódicos corresponde al periodo.
5. Puntos aislados: fuertes fluctuaciones en el proceso, si únicamente puntos aislados ocurren, el proceso podría ser aleatorio.
6. Líneas diagonales: la evolución en los estados es similar en diferentes tiempos; el proceso podría ser determinístico; si estas líneas diagonales ocurren al lado de puntos aislados, el proceso puede ser de origen caótico, algunas veces esto es un signo de una mala elección de la dimensión m .
7. Líneas verticales y horizontales: algunos estados no cambian o cambian muy lentamente en el tiempo (estados laminares).

La interpretación visual de los MR requiere de experiencia. Su cuantificación ofrece una forma mas objetiva para la investigación de los sistemas considerados, gracias a la cuantificación de las características de los MR, se puede realizar análisis de datos con esta técnica.

5.2 Análisis cuantitativo de Mapas Recurrentes.

Zibut y Webber desarrollaron una herramienta que cuantifica las estructuras de los MRs antes mencionadas, dicha herramienta se denomina análisis de cuantificación de recurrencia (RQA, Recurrence Quantification Analisis) [Zbilut y Webber, 1992] y [Webber y Zbilut, 1994]. Ellos definieron medidas de complejidad

a través de la densidad de puntos recurrentes y estructuras en el MR, como son: El Porcentaje de Recurrencia, Porcentaje de Determinismo, la Entropía, Tendencia, entre otros. El cálculo de estas medidas en pequeñas ventanas (submatrices) del MR moviéndose a través de LOI (Line of Identity, la diagonal principal en un MR) provoca el comportamiento del tiempo dependiente de estas variables. Algunos estudios basados en estas medidas del RQA muestran que es posible encontrar puntos bifurcados, espacialmente en transiciones de caos-orden. El RQA se obtiene de los MR, los cuales son calculados utilizando un umbral ε fijo, de aquí que los MR son simétricos.

A continuación se presentan las métricas que integran al RQA:

La primera métrica del RQA es el **Porcentaje de Recurrencia**, el cual esta dado por:

$$REC = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}^{m,\varepsilon} \quad (\text{Ec. 5.2})$$

La ecuación anterior cuantifica los puntos negros existentes en la matriz de distancias, es decir es una medida de los puntos recurrentes de un MR. Esta métrica ha sido utilizada por [Eckman et al., 1987] y otros para el estudio de no-estacionalidad en los datos. Donde m es la dimensión embebida, ε es el radio (umbral) y N es el número de total de puntos de la serie de tiempo [Marwan, 2003] e [Islas-Barrera, 2004].

La siguiente métrica considera las líneas diagonales. La frecuencia de distribución de las longitudes l de las estructuras diagonales en el MR es $P^\varepsilon(l) = \{l_i; i = 1 \dots N\}$, donde N es el número de líneas diagonales. El porcentaje de puntos recurrentes que forman estructuras diagonales en todos los puntos recurrentes es introducido como una medida de determinismo en el sistema. Dicha métrica se denomina **Porcentaje de Determinismo** y esta dada por:

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N l P^\varepsilon(l)}{\sum_{i,j}^N R_{i,j}^{m,\varepsilon}} \quad (\text{Ec. 5.3})$$

El Porcentaje de Determinismo mide la proporción de puntos recurrentes que forman estructuras en líneas diagonales. El nombre de determinista viene de patrones repetitivos o deterministas en la dinámica del sistema. Señales periódicas (ejemplo: Ondas Seno) darán líneas diagonales muy largas, señales

caóticas (ejemplo: Atractor de Hennon) darán líneas diagonales muy cortas, y señales estocásticas (ejemplo: números random) darán puntos recurrentes únicos aislados [Marwan, 2003] e [Islas-Barrera, 2004].

La siguiente métrica se denomina **Promedio de Longitudes de Líneas Diagonales** y representa el tiempo promedio en el cual dos segmentos de la trayectoria están cerca el uno del otro y puede ser interpretado como el tiempo promedio de predicción, dicha medida esta dada por [Marwan, 2003] e [Islas-Barrera, 2004]:

$$L = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N lP(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^N P(l)} \quad (\text{Ec. 5.4})$$

La siguiente métrica se denomina **Longitud Máxima de Líneas Diagonales** y esta dada por:

$$L_{\max} = \max(\{l_i; i = 1 \dots N_l\}) \quad (\text{Ec. 5.5})$$

Eckmann estableció que “la longitud de las líneas diagonales esta relacionado con el máximo exponente de Lyapunov” si es que existe alguno en el sistema considerado [Eckmann et al., 1987]. Algunos consideran esta métrica como una variable muy importante de recurrencia, debido a que su inverso mide el máximo exponente de lyapunov [Webber y Zbilut, 2005]. Exponentes de Lyapunov positivos miden el porcentaje sobre el cual las trayectorias divergen y son el distintivo para dinámicas caóticas. Entonces mientras más chica sea esta medida más caótico se considera el sistema [Eckmann et al., 1987] y [Trulla et al., 1996].

La métrica de **Entropía** se refiere a la entropía de Shannon de la distribución de frecuencias de las longitudes de líneas diagonales y esta dada por:

$$\text{ENTR} = - \sum_{l=l_{\min}}^N p(l) \ln p(l) \quad \text{con} \quad p(l) = \frac{P^\varepsilon(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^N P^\varepsilon(l)} \quad (\text{Ec. 5.6})$$

Representa la complejidad de la estructura determinística en el sistema y refleja la complejidad de la estructura determinística en el sistema [Marwan, 2003] e [Islas-Barrera, 2004]. Para sistemas periódicos en los cuales las líneas diagonales son de igual magnitud, la entropía se espera que sea 0.0. La complejidad se refiere a la variabilidad en las estructuras diagonales [Webber y Zbilut, 2005].

La **Tendencia** es una medida que indica que tan rápido desaparecen y ocurren cambios desde la diagonal principal. La tendencia, como su nombre sugiere, ayuda a detectar la no estacionalidad en los datos:

$$TREND = \frac{\sum_{i=1}^{\tilde{N}} (i - \tilde{N}/2)(RR_i - \langle RR_i \rangle)}{\sum_{i=1}^{\tilde{N}} (i - \tilde{N}/2)^2} \quad (\text{Ec. 5.7})$$

Donde $\tilde{N} < N$ y N es el número de áreas diagonales. Si los puntos recurrentes están homogéneamente distribuidos a través del Mapa Recurrente, el valor de tendencia debería aproximarse a cero unidades. Si los puntos recurrentes están distribuidos heterogéneamente a través del Mapa Recurrente, el valor de tendencia será desviado de las cero unidades. La tendencia es calculada como la pendiente de la regresión de los mínimos cuadrados del porcentaje local de recurrencia como una función de desplazamientos ortogonales desde la diagonal central [Webber y Zbilut, 2005].

Análogamente a la métrica de determinismo, existe otra métrica denominada **Porcentaje Laminar**, la cual se define como el porcentaje de puntos recurrentes que forman líneas verticales, y esta dada por:

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=1}^N P(v)} \quad (\text{Ec. 5.8})$$

Donde $P(v)$ representa la frecuencia de distribución de las longitudes de línea verticales. Donde una línea vertical indica que un estado no cambia o cambia muy lentamente, es decir, el estado se encuentra atrapado durante algún tiempo. Este es un comportamiento típico de estados laminares [Islas-Barrera, 2004]. Esta métrica representa la ocurrencia de estados laminares en el sistema, pero no describe la longitud de las fases laminares [Marwan, 2003].

Otra métrica esta definida por el **Promedio de las Longitudes de Líneas Verticales** y se denomina tiempo atrapado (**Traptime**). Dicha métrica esta dada por:

$$TA = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^N vP(v)}{\sum_{v=V_{\min}}^N P(v)} \quad (\text{Ec. 5.9})$$

Esta métrica cuantifica el tiempo promedio en que los sistemas permanecen en un estado específico, es decir mide que tanto tiempo estará atrapado en un estado laminar [Marwan, 2003].

Los Mapas Recurrentes analizan la distancia entre todos los puntos en la misma trayectoria del espacio de fase. Sin embargo, ¿sería posible analizar cada punto de una trayectoria con cada punto de otra trayectoria en el mismo espacio de fase? Esto conlleva al concepto de Mapas Recurrentes Cruzados (MRC), y será tratado en la siguiente sección.

6. MAPA RECURRENTTE CRUZADO (MRC)

Empezando con el concepto de MR se considerará un espacio de fase con una trayectoria \bar{x}_i de longitud N_x . Ahora se añadirá una segunda trayectoria \bar{y}_i de longitud N_y dentro del mismo espacio de fase (Figura 11 A).

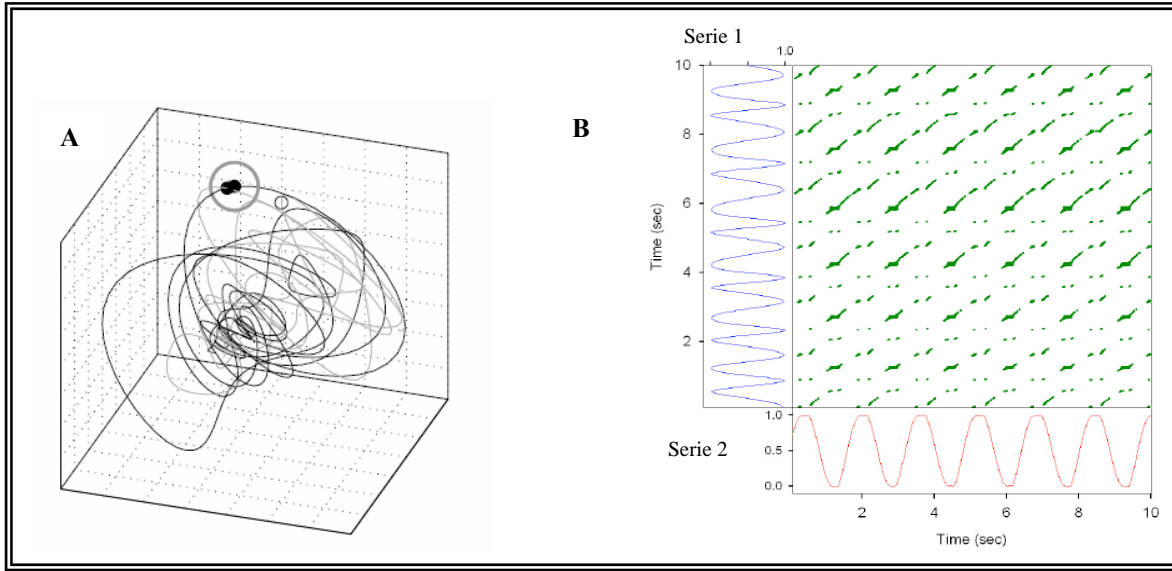


Figura 11. (A) Segmentos de la trayectoria del espacio de fase de el Niño (ENSO) y de una precipitación de serie de tiempo de San Salvador de Jujuy (argentina). **(B)** Su correspondiente Mapa Recurrente Cruzado.

El análisis entre todos los puntos de la primera trayectoria contra todos los puntos de la segunda trayectoria representan al Mapa Recurrente Cruzado (MRC, Cross Recurrence Plot).

$$CR_{i,j}^{m,\varepsilon_i} = \Theta\left(\varepsilon_i - \|\bar{x}_i - \bar{y}_j\|\right), \quad \bar{x}_i, \bar{y}_j \in \mathfrak{R}^m, \quad (\text{Ec. 6.0})$$

$$i = 1 \dots N_x, j = 1 \dots N_y$$

La notación es análoga a la definición de MR (Ec. 5.1). Si en la segunda trayectoria un estado en el tiempo j esta cerca de un estado sobre la primera trayectoria en el tiempo i , un punto blanco será asignado en la matriz MRC en la posición (i,j) . Este hecho de vecindarios en ambas trayectorias no es una

“recurrencia” de estados, sin embargo, la matriz (Ec. 6.0) no representa recurrencias, pero si los estados compartidos entre dos sistemas. Además esta representación no es realmente un “Mapa Recurrente Cruzado” [Marwan, 2003]. Sin embargo lo llamaremos así para seguir la manera de una generalización de MR y porque el término de “cuantificación de recurrencia cruzada” en la literatura esta en forma paralela al concepto de la generalización del RQA. [Zbilut et al., 1998]. Los vectores \vec{x}_i y \vec{y}_i no necesitan tener la misma longitud, por lo tanto la matriz MRC no es necesariamente cuadrada y por lo tanto no necesariamente simétrica. Esta extensión de MR fue usado primero por Zbilut et al. (1998) para la *cuantificación de la recurrencia cruzada* (Quantification recurrence cross).

Ambas trayectorias para la creación de un MRC tienen que representar el mismo sistema dinámico con variables de estados iguales porque ambas están en el mismo espacio de fase. Esto debería de estar tomado en cuenta si series de tiempo de diferentes medidas (e.j. temperatura y presión) son incluidas. Para la dimensión embebida y el análisis del MRC, la serie de tiempo puede ser tomada de diferentes métricas si estas son componentes o variables de estados del mismo sistema.

Asumiendo que ambas trayectorias vengan del mismo proceso pero de diferentes valores absolutos, el MRC llegaría a ser el esperado MR, si se escoge un umbral fijo ε . Sin embargo, es necesario adaptar ambas trayectorias a un mismo rango de valores, por ejemplo, usando una normalización de desviación estándar. Sin embargo la aplicación de una cantidad fija de vecinos cercanos (FAN), i.e., si ε_i cambia para cada estado \vec{x}_i , resuelve este problema automáticamente y entonces una modificación de amplitudes ya no es necesaria. Una última opción de un vecindario tiene una ventaja adicional de trabajo bueno por un cambio lento de trayectorias.

La ventaja de MRC con respecto a los métodos lineales convencionales, es que no requiere ninguna suposición sobre la naturaleza de los datos en cuestión.

6.1 Medidas para el acoplamiento entre dos procesos observados.

La estructura de la diagonal principal del MRC revela cierto acoplamiento de la evolución en tiempo de las trayectorias de dos procesos. Resulta obvio que un incremento de acoplamiento entre ambos procesos causa un incremento de la densidad de un punto recurrente sobre la diagonal principal $CR_{i,j}(i=1...N)$ hasta que una línea negra atraviese la diagonal principal (que podría ser igual a LOI y que el MRC llegara a ser un MR). Entonces el hecho de encontrar una línea diagonal en un MRC puede ser utilizado como punto de referencia (Benchmark) para considerar que dos procesos tienen cierta similitud o

acoplamiento [Marwan, 2003]. Ver Figura 12 para un ejemplo de Mapa Recurrente Cruzado.

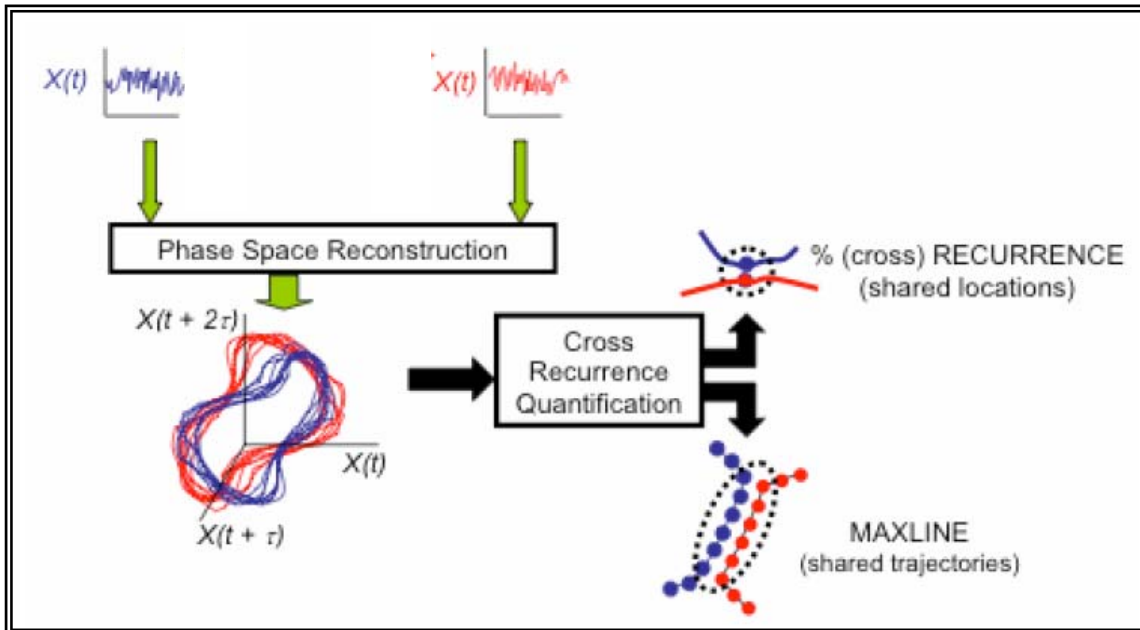


Figura 12. Ejemplo de dos series de tiempo, su reconstrucción del espacio de fase y las métricas de recurrencia cruzada: porcentaje de recurrencia y MaxLine.

Para poder cuantificar este acoplamiento algunas métricas tienen que ser definidas. Si se trabajan con líneas diagonales más o menos discontinuas, las métricas RQA (vistas en la sección 5.2) pudieran ser apropiadas para estos propósitos después de algunas modificaciones.

Se considera una diagonal $CR_{i,j}(j-i=k=const.)$, la cual es paralela a la diagonal principal y tiene una distancia de tiempo de retardo $t = k\Delta t$ desde la diagonal principal. Los puntos recurrentes en esta diagonal corresponden al retardo en tiempo de las trayectorias (delay t). Algunas métricas de RQA tendrán que ser redefinidas debido a esta diagonal. Estas métricas estarán en función de la distancia k desde la diagonal principal.

Siguiendo este procedimiento es necesario definir las frecuencias de distribución de la longitud de la línea diagonal $P_k^\varepsilon(l) = \{l_i; i=1 \dots N_l\}$ (N_l es el número absoluto de líneas diagonales) por cada diagonal paralela a la diagonal principal $CR_{i,j}^{m,\varepsilon}(j-i=k)$. Para $k=0$ esta línea es LOI, $k>0$ diagonales por encima y $k<0$ diagonales por debajo de LOI, que representa los tiempos de retardo positivo y negativo respectivamente.

Ahora el **Porcentaje de Recurrencia** es modificado a:

$$RR_k = RR_k(t) = \frac{1}{N-K} \sum_{j-i=k} CR_{i,j}^{m,\varepsilon} = \frac{1}{N-K} \sum_{l=1}^{N-K} lP_k^\varepsilon(l) \quad (\text{Ec. 6.1})$$

Representa la probabilidad de ocurrencia de estados acoplados o similares en ambos sistemas con un cierto retardo $t = k\Delta t$. Una alta densidad de puntos recurrentes en alguna diagonal representa un valor alto de RR_k . Este es el caso de sistemas cuyas trayectorias visitan a menudo las mismas regiones en el espacio de fase [Marwan, 2003]. Es decir el Porcentaje de Recurrencia es el porcentaje de locaciones compartidas con respecto al número total de posibles locaciones compartidas (ver Figura 12).

Análogo al RQA el **Porcentaje de Determinismo** es:

$$DET_k = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^{N-K} lP_k^\varepsilon(l)}{\sum_{l=1}^{N-K} lP_k^\varepsilon(l)} \quad (\text{Ec. 6.2})$$

Representa la proporción de puntos recurrentes que forman estructuras en líneas diagonales sobre todos los puntos recurrentes entre los sistemas acoplados, ahí esta la restricción a la diagonal considerada. Trayectorias suaves con alta autocorrelación resultará un MRC con estructuras diagonales largas, aun si las trayectorias no están ligadas entre sí. Para evitar contar diagonales “falsas”, el límite de la longitud de la línea diagonal l_{\min} debería de ser del orden del tiempo de autocorrelación [Marwan 2003].

Si dos procesos determinísticos tienen la misma o similar evolución, i.e. partes de las trayectorias en el espacio de fase coinciden en regiones similares por cierto tiempo, entonces la cantidad de grandes diagonales incrementa y la cantidad de pequeñas diagonales disminuye [Webber y Zbilut, 2005].

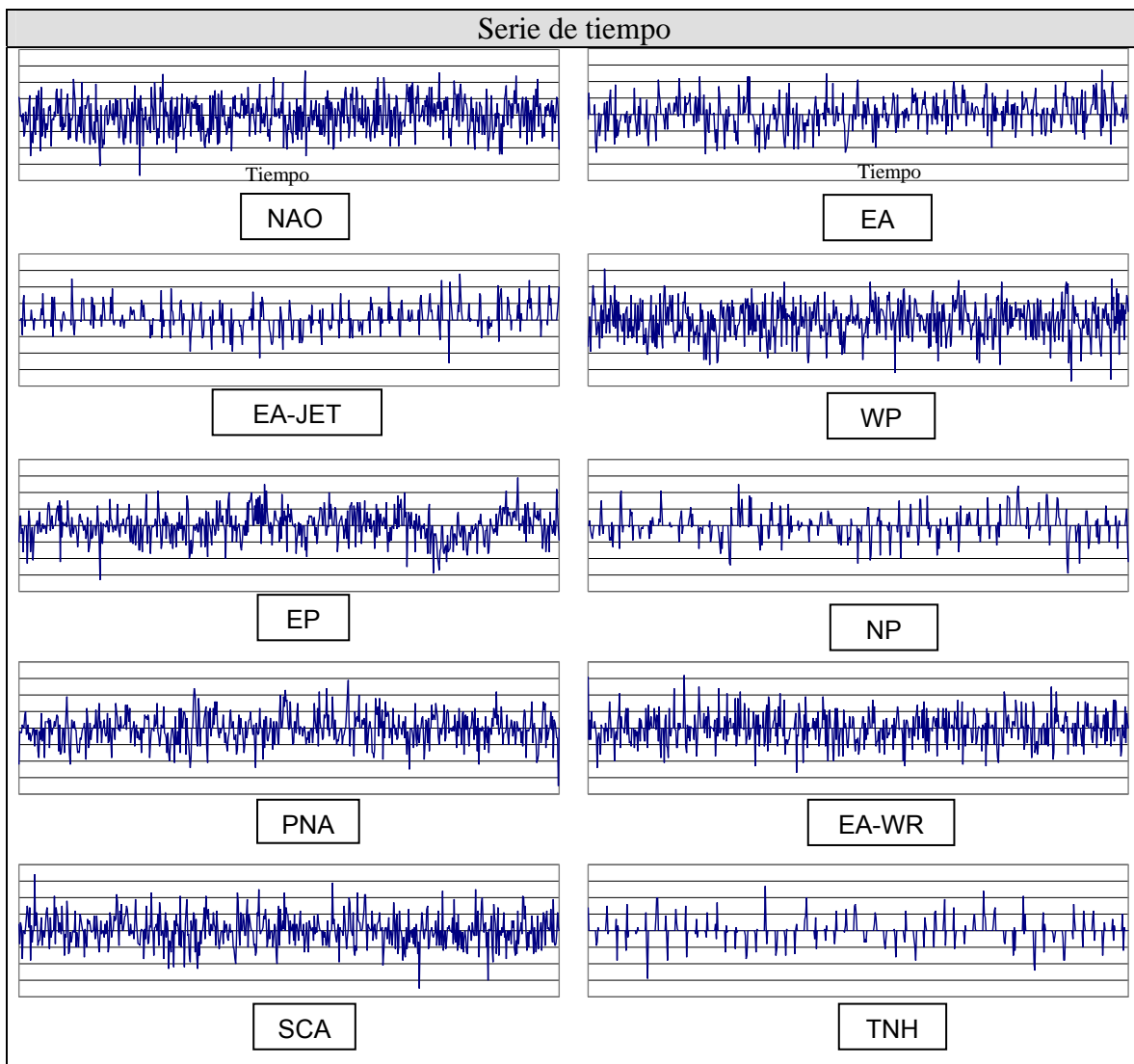
La siguiente métrica **MaxLine** mide la trayectoria compartida o similar más larga, además es una medida de la estabilidad de la actividad compartida, ver Figura 12. [Webber y Zbilut, 2005].

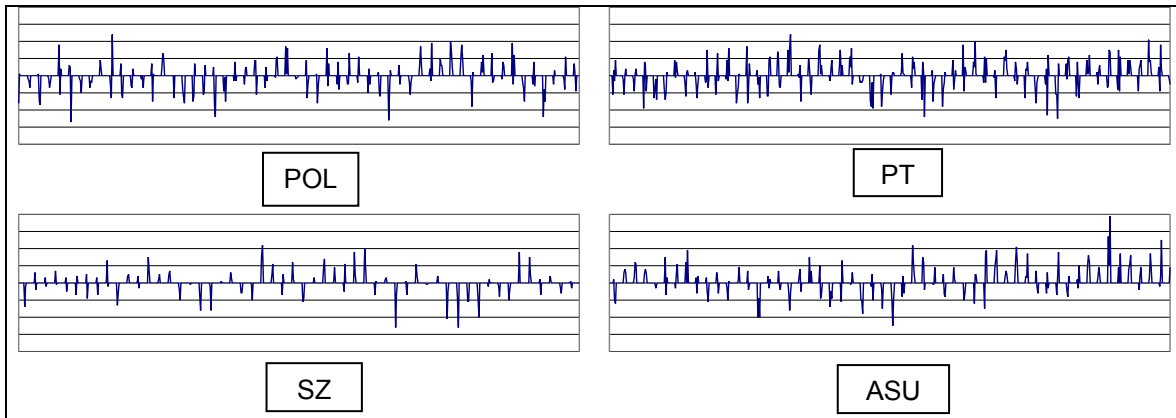
Finalmente la **Entropía** se refiere a la entropía de shannon de la distribución de la longitud de secuencias de localidades compartidas [Webber y Zbilut, 2005].

7. ANÁLISIS EXPERIMENTAL

Para el análisis experimental, se han tomado un conjunto de 14 series de tiempo de distintos Índices de Teleconexión y como se explico en la sección 2 estos índices fueron medidos mensualmente desde el año 1950 hasta junio del año 2004, dichas mediciones (series de tiempo) se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Series de tiempo de los Índices de Teleconexión





En este análisis se utilizó el programa *Cuantificación de Análisis de Recurrencia* (RQA, Recurrence Quantification Analysis) versión 8.1. Este paquete incluye 20 programas para examinar la recurrencia en una sola serie de tiempo y la recurrencia cruzada en dos series de tiempo. Este paquete corre en MSDOS, por lo tanto es necesario tener algunos conocimientos básicos sobre el ambiente MSDOS. Se recomienda leer el archivo de ayuda *README.TXT* para usuarios que utilicen por primera vez este software. En este trabajo se utilizaron dos programas *RQD.EXE* el cual es utilizado para generar la cuantificación de mapas recurrentes para una sola serie de tiempo (ver Figura 13 A) y el programa *KRQD.EXE* que es utilizado para generar los mapas recurrentes cruzados desde dos series de tiempo (ver Figura 13 B).

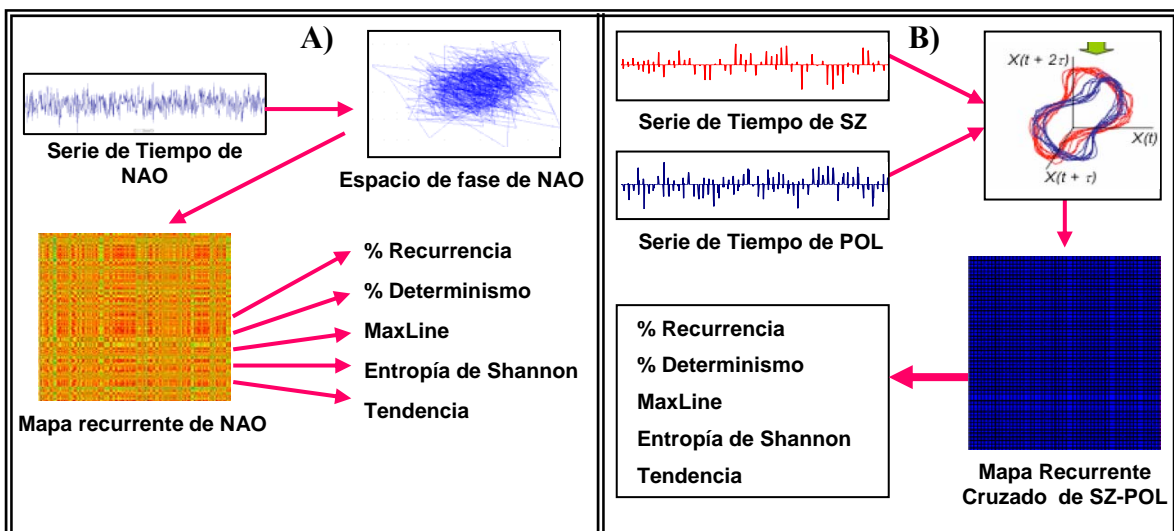


Figura 13 A) Ejemplo del análisis de una serie de tiempo. B) Ejemplo del análisis de dos series de tiempo.

Por lo tanto este trabajo se divide en dos análisis: **Auto Recurrencia**, es decir, el análisis de una serie consigo misma, para obtener sus características y la **Recurrencia Cruzada**, para saber si existe algún acoplamiento entre dos Índices de Teleconexión. Ver Figura 14.

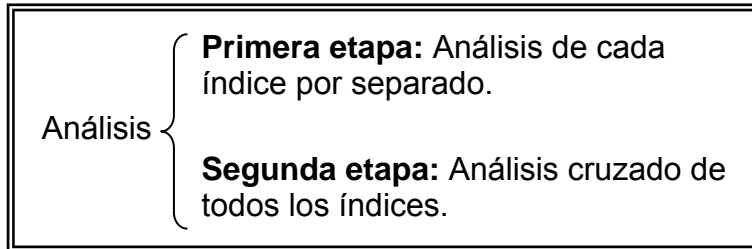


Figura 14. Esquema de las etapas del análisis.

Para ambos análisis (*RQD* y *KRQD*) es necesario definir siete parámetros: dimensión embebida, retardo, rango, norma, re-escalamiento, radio, y longitud de línea. Estos parámetros se definirán de manera breve a continuación:

- **Dimensión Embebida:** especifica cuantas dimensiones deberán ser utilizadas en la reconstrucción del espacio de fase.
- **Retardo:** especifica el tiempo de retraso usado para las copias retrasadas en tiempo de la serie original. Dimensión embebida y retardo, fueron descritos a mayor detalle en la sección 4. El programa que se utilizó para el cálculo óptimo de estos dos parámetros fue el VRA (Visual Recurrence Analysis) versión 4.2.
- **Radio:** especifica la distancia euclidiana dentro del cual los puntos de una o dos series de tiempo (dependiendo del análisis) son considerados vecinos, i.e. recurrentes, en el espacio de fase reconstruido. El radio seleccionado para este análisis fue de 15.
- **Norma:** especifica como las distancias están normalizadas en el espacio de fase reconstruido. Se seleccionó para este trabajo la norma euclidiana.
- **Re-escalamiento:** determina el método utilizado para reescalar la matriz de distancias. Se utilizó la distancia media.
- **Rango:** Las series de tiempo de este estudio consisten de 655 puntos, y se trata de utilizar la mayor cantidad de puntos para su análisis. Entonces debe de ir del punto 1 hasta el último punto 654 (este último valor depende de la dimensión embebida y el tiempo de retardo).
- **Longitud de línea:** especifica el número de puntos recurrentes consecutivos para definir un segmento de línea. Para este trabajo se eligió una longitud de 4.

8. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados se dividen en dos etapas, por lo comentado en la sección anterior (Figura 14) que serán descritas en las siguientes sub secciones.

8.1 Resultados de la Auto Recurrencia.

El primer análisis se realizó con el objetivo de obtener mayor información sobre cada uno de los Índices de Teleconexión representados por series de tiempo. Mediante el uso de la técnica de Mapas Recurrentes, es posible saber si existen puntos que se repiten dentro de la misma serie de tiempo (%Recurrencia), si estos puntos recurrentes forman alguna estructura diagonal (%Determinismo), saber cuanto tiempo duran estas estructuras diagonales (MaxLine), si estas estructuras diagonales muestran cierto orden (Entropía) y si se está tratando con un sistema estacionario (Tendencia), solo por mencionar algunas de las características que pueden ser extraídas de las series de tiempo. A continuación se describen cada una de las métricas mencionadas anteriormente junto con un resumen de los resultados que se obtuvieron.

% Recurrencia: Indica el porcentaje de puntos que se repiten en la serie de tiempo e indica la probabilidad de encontrar un punto en el mapa de recurrencia. Esta métrica depende del valor de entrada radio, como se explicó anteriormente en la sección 5 y 7. En este trabajo se definió un radio de 15 y con lo cual se obtuvieron los resultados de la siguiente tabla, obsérvese que estos resultados se encuentran ordenados.

Tabla 3. Resultados del Porcentaje de Recurrencia

| VARIABLES | Delay | DimEmb | #recurren | %Recur |
|-----------|-------|--------|-----------|--------|
| SZ | 2 | 2 | 100,456 | 47.33 |
| EA | 2 | 1 | 41,217 | 19.30 |
| NP | 3 | 2 | 39,608 | 18.72 |
| EA-JET | 3 | 2 | 34,518 | 16.32 |
| SCA | 2 | 1 | 26,632 | 12.47 |
| ASU | 3 | 3 | 26,077 | 12.44 |
| TNH | 3 | 3 | 25,132 | 11.99 |
| POL | 3 | 3 | 24,893 | 11.88 |
| EA-WR | 2 | 2 | 9,668 | 4.56 |
| NAO | 2 | 2 | 3,236 | 1.53 |
| PT | 3 | 6 | 2,559 | 1.26 |
| EP | 2 | 4 | 329 | 0.16 |
| PNA | 3 | 5 | 94 | 0.05 |
| WP | 2 | 5 | 49 | 0.02 |

Con respecto a la tabla anterior, se puede resumir los siguientes resultados:

- El mayor porcentaje de recurrencia lo obtuvo el índice SZ con el 47.3%. Para este índice en particular, este porcentaje significa que de todos los posibles puntos que pudieran ser recurrentes en esta serie de tiempo de longitud 652 igual a $212,552^1$ puntos recurrentes, únicamente 100,456 puntos fueron recurrentes, es decir se repitieron, y esto es equivalente al 47.3% de todos los posibles puntos. Lo que significa que casi la mitad de los estados del sistema tienen la misma probabilidad de que se repitan.
- También se tienen los índices EA, NP y EA-JET con porcentaje de recurrencia 19.3%, 18.7% y 16.3% respectivamente, lo que indica que la probabilidad de encontrar un punto que se repita en el mapa es mucho menor, casi la mitad que el índice SZ y esto trae como consecuencia que algunos de sus estados sólo en ciertas dinámicas se repitan.
- Por otro lado también se tienen los índices WP, PNA y EP con porcentaje de recurrencia de 0.024%, 0.046% y 0.157% respectivamente. Lo que significa que de los 212,552 puntos que pudieran ser recurrentes, únicamente 49, 94 y 329 puntos respectivamente se pudieran repetir en algún momento. Lo que indica que todos o casi todos los estados de estos sistemas son diferentes con respecto a los demás.

% Determinismo: Determina ciertas reglas sobre la evolución del sistema y además mide en porcentaje las estructuras diagonales que se forman en el sistema. Estas estructuras diagonales muestran el rango en el cual un segmento de la trayectoria es más cercano a otro segmento en un tiempo diferente. Esta métrica está relacionada con el porcentaje de recurrencia recordando que esta mide en porcentaje los puntos que se repiten, pero estos puntos cuando forman estructuras diagonales indican el período en el que se repite un estado y esto es medido con el porcentaje de determinismo. Con esta métrica se obtuvieron los resultados mostrados en la Tabla 4.

¹ La longitud es calculada como: $652 * 652 / 2 = 212,552$. El número total de posibles puntos recurrentes $[652 * 652]$ es dividido por 2 debido a que solo una de las regiones triangulares es usada para calcular la recurrencia, esto porque el mapa recurrente es simétrico sobre la diagonal principal.

Tabla 4. Resultados del Porcentaje de Determinismo

| VARIABLES | Delay | DimEmb | #recurren | #lineasD | %Determ |
|-----------|-------|--------|-----------|----------|---------|
| SZ | 2 | 2 | 100,456 | 13,695 | 79.03 |
| NP | 3 | 2 | 39,608 | 2,457 | 25.93 |
| EA-JET | 3 | 2 | 34,518 | 2,133 | 25.80 |
| EA | 2 | 1 | 41,217 | 2,405 | 24.39 |
| POL | 3 | 3 | 24,893 | 335 | 5.50 |
| TNH | 3 | 3 | 25,132 | 321 | 5.28 |
| ASU | 3 | 3 | 26,077 | 326 | 5.21 |
| SCA | 2 | 1 | 26,632 | 81 | 1.28 |
| EA-WR | 2 | 2 | 9,668 | 26 | 1.10 |
| PT | 3 | 6 | 2,559 | 4 | 0.74 |
| NAO | 2 | 2 | 3,236 | 1 | 0.12 |
| EP | 2 | 4 | 329 | 0 | 0 |
| PNA | 3 | 5 | 94 | 0 | 0 |
| WP | 2 | 5 | 49 | 0 | 0 |

- Se puede observar que el índice con mayor porcentaje de determinismo es nuevamente el índice SZ con 79.031% indicando que el sistema es casi del todo determinista, es decir, que algunos valores de la serie de tiempo SZ son recurrentes y forman parte de una serie de valores recurrentes consecutivos. Además indican el rango en el cual ciertos segmentos de la trayectoria están cercanos o se repiten.
- Se tienen los índices con un porcentaje de determinismo de 25.93%, 25.80% y 24.30% correspondiente a los índices NP, EA-JET y EA respectivamente. Lo cual indica que dichos sistemas son menos deterministas que SZ, indicando que los periodos en los que algunos segmentos se encuentran cercanos o se repiten es muchísimo menor.
- Por último se tienen los índices WP, EP y PNA con porcentaje de determinismo igual a 0 (cero). Lo que significa que son señales no deterministas, es decir, que cada valor en cada serie de tiempo no recurre en tiempo y cada valor que no recurra no es necesariamente parte de una línea diagonal, esto pudiera deberse como por ejemplo a factores como el ruido en la señal monitoreada.

MaxLine: Mide el mayor tiempo en que las trayectorias son cercanas o iguales. El inverso de esta métrica se refiere al máximo exponente positivo de Lyapunov, el cual mide el porcentaje sobre el cual las trayectorias divergen, es decir, mide la

estabilidad del sistema. Mientras MaxLine sea más grande, mayor será la estabilidad del sistema y viceversa. Esta métrica depende del muestreo correcto de los datos. Con esta métrica se obtienen los siguientes resultados, mostrados en la Tabla 5.

Tabla 5. Resultados de MaxLine

| VARIABLES | Delay | DimEmb | %Determ | MaxLine |
|------------------|--------------|---------------|----------------|----------------|
| ASU | 3 | 3 | 5.21 | 15 |
| TNH | 3 | 3 | 5.28 | 14 |
| SZ | 2 | 2 | 79.03 | 9 |
| NP | 3 | 2 | 25.93 | 8 |
| EA-JET | 3 | 2 | 25.80 | 7 |
| EA | 2 | 1 | 24.39 | 7 |
| SCA | 2 | 1 | 1.28 | 7 |
| POL | 3 | 3 | 5.50 | 6 |
| EA-WR | 2 | 2 | 1.10 | 5 |
| PT | 3 | 6 | 0.74 | 5 |
| NAO | 2 | 2 | 0.12 | 4 |
| EP | 2 | 4 | 0 | -1 |
| PNA | 3 | 5 | 0 | -1 |
| WP | 2 | 5 | 0 | -1 |

- Se observan los índices ASU y TNH con valor de 15 y 14 para MaxLine respectivamente, lo que significa que el tiempo máximo en que las trayectorias de cada uno de los sistemas se parecen es de 15 o 14 puntos. Por otro lado dichos números indican que estas series de tiempo son las más estables de este análisis. Si hacemos el cálculo para saber el porcentaje en el que el sistema es estable, tendríamos que para un sistemas 100% estable, MaxLine debería de ser igual a 651 puntos, lo que para MaxLine igual a 15 puntos el sistema es 2.3% estable. Si estas series de tiempo son las más estables de este estudio, y debido a que estas series de tiempo son Índices de Teleconexión, significa que estos valores pueden tener relación a como fueron monitoreados. Otra posibilidad es que en general la atmósfera es un sistema inestable, pero es algo que no se puede concluir.
- En el caso del índice SZ con un MaxLine de 9, significa que aún cuando es el sistema más determinista de este análisis, el tiempo máximo en que sus estados van a estar cercanos o iguales es de 9 puntos. Por lo que se puede decir que esta métrica no depende del grado de determinismo del sistema.

- Por otro lado tenemos los índices con MaxLine = -1, lo que indica que las series de tiempo son 100% inestables y que dichos sistemas no tienen trayectorias parecidas o cercanas en ningún punto.

Entropía: Refleja la complejidad de la estructura determinística del sistema. El término complejidad se maneja en este trabajo como el desorden en la distribución de las líneas diagonales. Mientras mayor es el valor de la entropía la distribución se encuentra más desordenada y viceversa. Los resultados que se obtuvieron se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Resultados de la Entropía

| VARIABLES | Delay | DimEmb | #lineasD | %Determ | Entropy |
|---------------|-------|--------|----------|---------|---------|
| SZ | 2 | 2 | 13,695 | 79.03 | 2.33 |
| PT | 3 | 6 | 4 | 0.74 | 0.81 |
| SCA | 2 | 1 | 81 | 1.28 | 0.76 |
| NP | 3 | 2 | 2,457 | 25.93 | 0.73 |
| EA | 2 | 1 | 2,405 | 24.39 | 0.72 |
| EA-JET | 3 | 2 | 2,133 | 25.80 | 0.71 |
| ASU | 3 | 3 | 326 | 5.21 | 0.6 |
| TNH | 3 | 3 | 321 | 5.28 | 0.53 |
| POL | 3 | 3 | 335 | 5.50 | 0.45 |
| EA-WR | 2 | 2 | 26 | 1.10 | 0.39 |
| NAO | 2 | 2 | 1 | 0.12 | 0 |
| EP | 2 | 4 | 0 | 0 | -1 |
| PNA | 3 | 5 | 0 | 0 | -1 |
| WP | 2 | 5 | 0 | 0 | -1 |

- El índice con mayor valor de entropía fue SZ con 2.33, lo que significa que es sistema con mayor desorden en este análisis, en cuanto a la distribución de sus estructuras diagonales. Pero en general para los demás índices se tiene una entropía menor a 0.723 lo que significa que los sistemas no son tan desordenados y se mantiene una distribución más o menos uniforme de estas estructuras diagonales. Hay algunas excepciones como es el caso de los índices EP, PNA y WP con entropía -1, lo cual significa que debido a que estos sistemas no presentan ninguna línea (estructura diagonal) no es posible calcular su entropía.

Tendencia: Cuantifica el grado de estacionalidad del sistema. Si el valor de tendencia esta dentro del rango ± 5 , el sistema analizado es estacionario. De acuerdo a lo anterior tenemos los siguientes resultados:

- Mientras el valor de tendencia este cercano a cero significa que el sistemas es más estacionario y los índices cuya tendencia es cercana a cero son: EA, EA-WR, NAO, PT, EP, PNA, WP. Por otro lado el índice TNH tiene una tendencia de -6.49 lo que significa que el sistema es no estacionario. Los índices restantes se observa que cumplen con el rango de estacionalidad.

Tabla 7. Resultados de Tendencia

| VARIABLES | Delay | DimEmb | Trend |
|---------------|-------|--------|-------|
| EA-JET | 3 | 2 | 1.23 |
| EA-WR | 2 | 2 | 0.17 |
| PNA | 3 | 5 | 0.06 |
| EA | 2 | 1 | 0.04 |
| WP | 2 | 5 | 0.03 |
| PT | 3 | 6 | -0.07 |
| NAO | 2 | 2 | -0.22 |
| EP | 2 | 4 | -0.53 |
| SZ | 2 | 2 | -1.94 |
| SCA | 2 | 1 | -2.52 |
| NP | 3 | 2 | -2.80 |
| POL | 3 | 3 | -3.39 |
| ASU | 3 | 3 | -4.21 |
| TNH | 3 | 3 | -6.49 |

Porcentaje Laminar: Se encarga de medir el porcentaje de puntos recurrentes, que forman líneas verticales. Donde cada línea vertical indica cuando un estado no cambia o cambia muy lentamente, es decir el estado se encuentra atrapado por algún tiempo. Lo anterior es un comportamiento típico de estados laminares. Los resultados que se obtuvieron se observan en la Tabla 8.

- Los índices SZ, EA-JET y NP con valores de Porcentaje Laminar iguales a 97.90, 84.13 y 80.21, respectivamente significa que algunos estados de sus sistema no cambian o cambian muy lentamente, es decir se encuentran atrapados que se define con la siguiente métrica Traptime.
- Por otro lado los índices NAO, WP, EP, PNA y PT con Porcentaje Laminar igual a cero, no presenta estados laminares en su sistema, es decir los estados de ese sistema son cambiantes en todo momento.

Tabla 8. Resultados del Porcentaje Laminar y Traptime.

| VARIABLES | Delay | DimEmb | %Laminar | Traptime |
|------------------|--------------|---------------|-----------------|-----------------|
| SZ | 2 | 2 | 97.90 | 8.03 |
| EA-JET | 3 | 2 | 84.13 | 4.22 |
| NP | 3 | 2 | 80.21 | 4.26 |
| EA | 2 | 1 | 73.63 | 4.27 |
| TNH | 3 | 3 | 21.79 | 4 |
| POL | 3 | 3 | 16.25 | 4.19 |
| ASU | 3 | 3 | 14.52 | 4.36 |
| EA-WR | 2 | 2 | 3.6 | 4 |
| SCA | 2 | 1 | 1.32 | 4 |
| NAO | 2 | 2 | 0 | -1 |
| WP | 2 | 5 | 0 | -1 |
| EP | 2 | 4 | 0 | -1 |
| PNA | 3 | 5 | 0 | -1 |
| PT | 3 | 6 | 0 | -1 |

Tiempo Atrapado (Traptime): Cuantifica el tiempo promedio en que los sistemas permanecen en un estado específico, es decir, mide el tiempo que un estado estará atrapado. Los resultados se observan en la Tabla 8.

- Esta métrica como es de esperarse va de la mano del Porcentaje Laminar, es decir si un sistema no presenta estados laminares como es el caso del los índices NAO, WP, EP, PNA y PT significa entonces que no es posible calcular su Traptime. Es por eso que en la tabla 8 aparecen -1 en los índices antes mencionados.
- Los demás índices si presentan estados laminares. Un caso particular es el índice SZ que presenta el mayor Traptime y eso significa que el sistema permanece atrapado por aproximadamente 8 puntos (que definen a la línea vertical) en algunos estados.

Si se observa la tabla completa no ordenada de todos los Índices de Teleconexión, mostrada en la Tabla 9, se podrá saber como es la información de un índice con respecto a otro.

Tabla 9. Resultados de todas las métricas.

| VARIABLES | Delay | DimEmb | %Recur | %Determ | MaxLine | Entropy | Trend | %Lam | Traptime |
|-----------|-------|--------|--------|---------|---------|---------|-------|-------|----------|
| NAO | 2 | 2 | 1.53 | 0.12 | 4 | 0 | -0.22 | 0 | -1 |
| EA | 2 | 1 | 19.30 | 24.39 | 7 | 0.72 | 0.04 | 73.63 | 4.27 |
| EA-JET | 3 | 2 | 16.32 | 25.80 | 7 | 0.71 | 1.23 | 84.13 | 4.22 |
| WP | 2 | 5 | 0.02 | 0 | -1 | -1 | 0.03 | 0 | -1 |
| EP | 2 | 4 | 0.16 | 0 | -1 | -1 | -0.53 | 0 | -1 |
| NP | 3 | 2 | 18.72 | 25.93 | 8 | 0.73 | -2.71 | 80.21 | 4.26 |
| PNA | 3 | 5 | 0.05 | 0 | -1 | -1 | 0.06 | 0 | -1 |
| EA-WR | 2 | 2 | 4.56 | 1.10 | 5 | 0.39 | 0.17 | 3.6 | 4 |
| SCA | 2 | 1 | 12.47 | 1.28 | 7 | 0.76 | -2.52 | 1.32 | 4 |
| TNH | 3 | 3 | 11.99 | 5.28 | 14 | 0.53 | -6.49 | 21.79 | 4 |
| POL | 3 | 3 | 11.88 | 5.50 | 6 | 0.45 | -3.38 | 16.25 | 4.19 |
| PT | 3 | 6 | 1.26 | 0.74 | 5 | 0.81 | -0.07 | 0 | -1 |
| SZ | 2 | 2 | 47.33 | 79.03 | 9 | 2.33 | -1.94 | 97.90 | 8.03 |
| ASU | 3 | 3 | 12.44 | 5.21 | 15 | 0.6 | -4.21 | 14.52 | 4.36 |

8.2 Resultados de la Recurrencia Cruzada.

En este segundo análisis se emplea la técnica de Mapas Recurrentes Cruzados y con esta técnica es posible medir el grado de acoplamiento de dos series de tiempo, en que porcentaje estas series de tiempo se encuentran acopladas (%Determinismo), cual es el tiempo máximo que estas series se encuentran acopladas (MaxLine), conservación de la estacionalidad, aún cuando se comparan dos series de tiempo distintas (Tendencia), solo por mencionar algunas de sus métricas. A continuación se resumen los resultados obtenidos.

% Recurrencia: Mide la relación del número de localidades (puntos) compartidos con respecto al número total posible de localidades compartidas entre las dos series de tiempo. Ver en la Tabla A1 del apéndice A.

- Si se consideran los veinte valores más altos, correspondientes a los números dentro del rango 20.44 - 41.68, entonces se podría decir que las dinámicas de las dos series de tiempo comparten ciertos puntos en ambas trayectorias, esto dependiendo del radio que se haya definido en los parámetros de entrada, recordemos que mientras más grande el rango mayor es la posibilidad de encontrar puntos recurrentes. Este parámetro nos indica que las dos trayectorias comparadas comparten ciertos puntos. Los índices correspondientes a este rango se observan en la Tabla 10. Los

valores que aparecen vacíos se debe a que no cumplen con el rango, pero si se desea saber las cantidades correspondientes, consulte la Tabla A1.

Tabla 10. Resultados de los valores 20.44 - 41.68

| | EA-JET | NP | TNH | POL | PT | SZ | ASU |
|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| EA | 27.32 | 27.97 | 32.37 | 32.38 | 29.77 | 30.25 | 32.51 |
| EA-JET | | | 22.37 | 22.32 | | 28.52 | 22.56 |
| NP | | | 24.01 | 23.96 | 20.65 | 30.73 | 24.22 |
| SCA | | 20.44 | 23.00 | 23.03 | 21.47 | 24.94 | 23.13 |
| SZ | 33.30 | 34.31 | 40.83 | 41.36 | 35.05 | | 41.68 |

- Por otro lado se tienen valores del Porcentaje de Recurrencia, dentro del rango [0.0 a 0.98], lo que quiere decir que las trayectorias o los estados de los dos sistemas son muy diferentes uno del otro. Los índices WP, EP, PT y PNA no presentan algún acoplamiento con otro índice, por lo que se comentó antes su valor oscila entre 0.01 y 0.41 y se observa que los índices TNH, POL y ASU no tienen ningún punto de acoplamiento entre las trayectorias con el índice NAO.

% Determinismo: Una vez que se sabe el porcentaje en el que dos trayectorias tienen ciertos puntos acoplados (%Recurrencia), se procede a buscar que dichos puntos formen segmentos acoplados entre ambas trayectorias, y a eso se le llama Porcentaje de Determinismo y usando este se obtuvo la Tabla A2 (Apéndice A).

- Para este análisis se considera un Porcentaje de Determinismo alto si se encuentra entre los valores 44.12 y 76.60 y esto significa, que los puntos en los cuales se acoplan las trayectorias de las dos series de tiempo forman ciertas estructuras y por lo cual estas trayectorias estas acopladas en segmentos y no solo en ciertos puntos. Los índices que pertenecen a dichos valores de porcentaje de determinismo se resumen en la Tabla 11, los espacios que aparecen vacíos, es porque no pertenecen a este porcentaje de determinismo.

Tabla 11. Resultados del Porcentaje de Determinismo para índices entre los valores 44.12 y 76.60

| | EA-JET | NP | TNH | POL | PT | SZ | ASU |
|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| EA | 49.14 | 48.93 | 60.02 | 59.68 | 54.62 | 68.17 | 59.77 |
| EA-JET | | | 45.34 | 45.23 | | 49.50 | 45.01 |
| NP | | | 44.24 | 44.12 | | 47.84 | 43.86 |
| SZ | 68.13 | 68.03 | 76.60 | 76.37 | 72.91 | | 75.56 |

- Los valores restantes son en su gran mayoría cero, lo que significa que no se tienen segmentos acoplados entre las trayectorias, dichos valores se observan en la Tabla A2.

MaxLine: Esta métrica indica el tiempo máximo en el cual las dos trayectorias analizadas permanecen acopladas y se obtienen los siguientes resultados, observados en la Tabla A3.

- El tiempo máximo de acoplamiento entre dos series lo tienen el índice SZ con respecto a ASU de 19 puntos acoplados. Las variables con mayor número de puntos acoplados están entre los valores 19 y 9 y se resumen en la Tabla 12.

Tabla 12. Resultados más altos de MaxLine

| | EA-JET | NP | TNH | POL | PT | SZ | ASU |
|--------|--------|----|-----|-----|----|----|-----|
| EA | | | 9 | 9 | | | 9 |
| EA-JET | | | | | | 17 | 15 |
| NP | | | 10 | 9 | 9 | 17 | 9 |
| TNH | | | | 15 | 13 | 16 | 14 |
| POL | | 13 | 15 | | | 15 | 15 |
| SZ | 9 | 10 | 9 | 10 | | | 19 |
| ASU | 12 | 6 | 14 | 15 | 14 | 16 | |

- Los índices se la Tabla A3 que tienen el valor de -1, significa que como el sistema no identifico ninguna estructura diagonal, no es posible calcular su MaxLine. Además podría ser un indicador de que al tratar de acoplar esos dos índices (series de tiempo) se convierte en un sistema inestable.

Tendencia: Esta medida cuantifica el grado de estacionalidad de dos sistemas cuando existe algún acoplamiento. Mientras más cercana este la tendencia a 0.0, más estacionarios son los sistemas acoplados, pero si por el contrario la tendencia no está dentro del rango de ± 5 , significa que los sistemas al hacer el acoplamiento ya no son estables, si alguna vez lo fueron. De acuerdo a lo anterior, se obtuvieron los siguientes resultados (ver Tabla A4 del Apéndice A):

- Los sistemas que no parecen seguir siendo estacionarios al ser acoplados, son los índices TNH con respecto a POL, SZ y ASU, el índice POL con respecto a TNH, el índice PT con respecto a SZ y finalmente el índice ASU con respecto a TNH. Lo anterior se observa en la Tabla A4.

- En cuanto a los demás índices respecto a todos los demás se observa que los sistemas permanecen estacionarios, hay que recordar que mientras más cercano este de cero (0) más estacionario es el sistema.

9. CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos un análisis de Índice de Teleconexión, representados por series de tiempo, con el objetivo de obtener mayor información sobre la dinámica de estos sistemas, empleando la técnica de Mapa Recurrente y Mapa Recurrente Cruzado.

Con la Técnica de Mapa Recurrente es posible observar la dinámica del sistema en dos dimensiones en el Mapa Recurrente (es decir, visualmente), en donde se observan algunos patrones de las series de tiempo (líneas diagonales). Los parámetros que se generan de dicha técnica proporcionan información cuantitativa de la dinámica del sistema.

Un detalle de la técnica de Mapa Recurrente, es que, aún cuando los parámetros que se generen para cada serie de tiempo sean iguales, no es posible hacer una comparación directa entre estos parámetros. Es decir, al analizar dos series de tiempo S1 y S2, si los dos sistemas presentan los mismos valores en alguna de sus métricas, por ejemplo Porcentaje de Determinismo, no se puede concluir que tienen dinámica similar. Lo anterior debido a que las métricas cuantifican el comportamiento de toda la dinámica y no por partes. Es decir, en el caso del Porcentaje de Determinismo, no es posible saber cuando las trayectorias de cada dinámica son repetidas.

Por un lado, si se desean analizar dos series de tiempo, es recomendable utilizar la técnica de Mapa Recurrente Cruzado. La técnica de Mapa Recurrente Cruzado, permite analizar la dinámica de dos series de tiempo en el mismo espacio de fase y nos proporciona, de manera visual, información sobre el acoplamiento de las dinámicas de ambos sistemas observando las líneas diagonales en el Mapa Recurrente Cruzado generado. Los parámetros que se originan de esta técnica indican de manera cuantitativa dicho acoplamiento, si es que existe.

Por otro lado, las métricas de la primera etapa (sección 8.1) dan una mejor descripción o información de las señales analizadas. Con los resultados que se obtuvieron se puede concluir que: aunque se midan los mismos fenómenos, en este caso Índices de Teleconexión, la dinámica de cada uno es diferente con respecto a los demás. Es decir estos fenómenos se están manifestando de diferente manera.

Con el segundo análisis (sección 8.2) es posible observar cierto acoplamiento entre algunos de los Índices de Teleconexión, por lo que es posible encontrar

ciertas características de acoplamiento de manera cualitativa (observando el MRC) y cuantitativa (con los parámetros obtenidos).

Este análisis es posible utilizarlo en situaciones donde se tienen fenómenos descritos por series de tiempo, si se desea conocer u obtener información de su dinámica. Para utilizar estas técnicas no se necesita de un experto, pero se debe tener cuidado en los datos que se desean analizar, debido a que un mal monitoreo o muestreo de estos, pudieran dar resultados no deseados.

10. REFERENCIAS

[Argyris et al., 1994]. J.H., Argyris, G. Faust, M. Haase, "An Exploration of Chaos". North Holland, Amsterdam, 1994.

[Barnston y Livezey, 1987]. Barnston, A. G., and R. E. Livezey. "Classification, seasonality and persistence of low-frequency atmospheric circulation patterns". *Mon. Wea. Rev.*, 115, 1987, pp. 1083-1126

[Bautista-Thompson, 2004]. Bautista-Thompson, E. F. "Medición de la Predictibilidad de Series de Tiempo: Un Estudio Experimental", Ph. D., Centro de Investigación en Computación, IPN, México, D.F., 2004.

[Bell y Janowiak, 1995]. Bell, G. D. and J. E. Janowiak. "Atmospheric circulation associated with the Midwest floods of 1993". *Bull. Am. Meteor. Soc.*, 76, 1995, pp. 681-695.

[Cao, 1997]. L. Cao, "Practical Method of Determining the Minimum Embedding Dimension of a Escalar Time Series". *Physica D* 110 (1-2), 1997, pp. 43-50.

[Eckman et al., 1987]. J.-P. Eckman, O.S. Kamphorst, D. Ruelle, "Recurrence Plots of Dynamical Systems". *Europhysics Letters* 5, 1987, pp. 973-977.

[Fraser y Swinney]. A.M. Fraser, H.L. Swinney, "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information". *Physical Review A* 33 (2), 1986, 1134-1140. DOI:10.1103/PhysRevA.33.1134

[Glantz, 1991]. Glantz, M.H. "General characteristics of El Niño-Southern Oscillation", in M.H. Glantz, N. Nicholls, and R.W. Katz (eds.), *Teleconnections Linking Worldwide Anomalies*. Cambridge University Press, 1991, pp. 1-12.

[Hurrell et al., 2003]. Hurrell, J.W., Y. Kushnir, M. Visbeck, and G. Ottersen. "An Overview of the North Atlantic Oscillation. The North Atlantic Oscillation: Climate Significance and Environmental Impact", J.W. Hurrell, Y. Kushnir, G. Ottersen, and M. Visbeck, Eds. *Geophysical Monograph Series*, 134, 2003, pp. 1-35.

[Islas-Barrera, 2004]. R. Islas-Barrera, "Análisis de similitud de señales sísmicas por la técnica de Mapa Recurrente". Eng. Tesis, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, IPN. México, D.F., 2004.

[Kantz y Schreiber, 1997]. H. Kantz, T. Schreiber, "Nonlinear Time Series Analysis". University Press, Cambridge, 1997.

[Koebbe y Mayre-Kress, 1992]. M. Koebbe, G. Mayre-Kress, "Use of Recurrence Plots in the Analysis of Time-Series Data". In: Casdagli, M. Eubank, S. (Eds.), Proceedings of SFI Studies in Science of Complexity. Vol. XXI. Addison-Wesley, Redwood City, 1992. pp. 361-378.

[Lamb y Pepler, 1991]. Lamb, P.J., and Pepler, R.A. "West Africa" Glantz, M. H. (ed) Teleconnections Linking Worldwide Climate Anomalies New York: Cambridge University Press, 1991.

[Marwan, 2003]. N. Marwan. "Encounters with Neighbours: Current developments of concepts based on recurrence plots and their applications", Ph. D. Tesis 2003, Instituto de Física de la Universidad de Potsdam.

[Mindlin y Gilmore, 1992]. G. M. Mindlin, R. Gilmore, Topological Analysis and Synthesis of Chaotic Time Series. Physica D 58 (1-4), 1992, pp. 229-242.

[Mo y Livezey, 1986]. Mo, K.C., and Livezey, R.E. "Tropical-extratropical geopotential height teleconnections during the Northern Hemisphere winter", Monthly Weather Review 114, 1986, pp. 2488-2515.

[Ott, 1993]. E. Ott, "Chaos in Dynamical Systems". University Press, Cambridge, 1993.

[Packard et al., 1980]. N. H. Packard, J. P Crutchfield, J.D. Farmer, R. S. Shaw, "Geometry from Time Series". Physical Review Letters 45 (9), 1980, pp. 712-716.

[Quiring y Blair, 2000]. Quiring, S.M., and D. Blair. "The utility of global teleconnections for long-range crop forecasting in the Canadian prairies". In: Prairie Perspectives: Geographical Essays, Winnipeg: University of Manitoba, Ed. Romanowski, J., v. 3, 2000, pp. 23-61.

[Takens, 1981]. F. Takens, "Detecting Strange Attractors in Turbulence". Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1981. pp. 366-381.

[Trulla et al., 1996]. Trulla L.L., A Giuliani., J.P.Zbilut., and C.L. Webber Jr., "Recurrence Quantification analysis of the logistic equation with transients". Physics Letters A, 223, 1996, pp. 255-260.

[Walker y Bliss, 1932]. Walker, G. T., and E. W. Bliss. "World Weather" V. Mem. Roy. Meteor. Soc., 4, No. 36, 1932, pp. 53-84. [Documents DJF and JJA variability.]

[Wallace y Gutzler, 1981]. Wallace, J.M., and Gutzler, D.S. "Teleconnections in the 500 mb geopotential height field over the Northern Hemisphere winter" Monthly Weather Review 109, 1981, pp. 784-812.

[Webber y Zbilut, 1994]. C. L. Webber Jr., J. P. Zbilut, "Dynamical Assessment of Physiological Systems and States Using Recurrence Plot Strategies". Journal of Applied Physiology 76 (2), 1994, pp. 965-973.

[Webber y Zbilut, 2005]. Webber, C.L., Jr., Zbilut, J.P. "Recurrence quantification analysis of nonlinear dynamical systems. In: Tutorials in contemporary nonlinear methods for the behavioral sciences", M.A. Riley, G. Van Orden, eds. Retrieved December 1, 2004 <http://www.nsf.gov/sbe/bcs/pac/>, 2005.

[Whitney, 1934]. Whitney, H., "*Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*", Trans. Am. Math. Soc. **36**, 1934, pp. 63–89

[Zbilut et al., 1998]. J. P. Zbilut, A. Giuliani, C.L. Webber Jr., "Detecting Deterministic Signals in Exceptionally Noisy Environments using Cross-Recurrence Quantification". Physics Letters A 246 (1-2), 1998, pp. 122-128. DOI: 10.1016/S0375-9601(98)00457-5.

[Zbilut et al., 1991]. Zbilut, J. P., Giuliani, A. Webber Jr., C. L., "Detecting deterministic signals in exceptionally noisy environments using cross-recurrence quantification". *Physics Letters A* 246 (1-2), 1998, pp. 122 -128. DOI: 10.1016/S0375-9601(98)00457-5.

[Zbilut y Webber, 1992]. J. P. Zbilut, C. L. Webber Jr. "*Embeddings and Delays as Derived from Quantification of Recurrence Plots*". Physics Letters A 171 (3-4), 1992, pp. 203. DOI: 10.1016/0375-9601(92)90426-M.

APENDICE

A. Tablas de Resultados del Mapa Recurrente Cruzado

Tabla A1. Resultados del Porcentaje de Recurrencia

| | NAO | EA | EA-JET | WP | EP | NP | PNA | EA-WR | SCA | TNH | POL | PT | SZ | ASU |
|---------------|------------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|------------|--------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|------------|
| NAO | | 2.33 | 3.18 | 1.53 | 1.98 | 3.23 | 1.91 | 2.12 | 1.91 | 2.27 | 2.28 | 2.14 | 2.50 | 2.31 |
| EA | 9.80 | | 27.32 | 9.41 | 15.38 | 27.97 | 14.54 | 17.20 | 15.07 | 32.37 | 32.38 | 29.77 | 30.25 | 32.51 |
| EA-JET | 2.74 | 6.67 | | 2.50 | 3.44 | 17.49 | 3.20 | 3.98 | 5.55 | 22.37 | 22.32 | 19.25 | 28.52 | 22.56 |
| WP | 0.01 | 0.02 | 0.05 | | 0.02 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.02 | 0.05 | 0.04 | 0.05 | 0.03 | 0.04 |
| EP | 0.10 | 0.20 | 0.26 | 0.10 | | 0.28 | 0.14 | 0.15 | 0.15 | 0.33 | 0.35 | 0.28 | 0.41 | 0.35 |
| NP | 2.80 | 7.03 | 17.49 | 2.56 | 3.60 | | 3.36 | 4.19 | 3.39 | 24.01 | 23.96 | 20.65 | 30.73 | 24.22 |
| PNA | 0.02 | 0.06 | 0.10 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | | 0.06 | 0.04 | 0.12 | 0.11 | 0.12 | 0.12 | 0.12 |
| EA-WR | 2.12 | 4.83 | 7.02 | 2.09 | 3.55 | 7.25 | 3.42 | | 3.63 | 9.07 | 9.12 | 8.04 | 10.45 | 9.21 |
| SCA | 9.18 | 15.07 | 19.95 | 9.03 | 12.76 | 20.44 | 12.26 | 13.76 | | 23.00 | 23.03 | 21.47 | 24.94 | 23.13 |
| TNH | 0.06 | 2.25 | 6.16 | 0.37 | 1.28 | 7.52 | 1.25 | 1.45 | 1.81 | | 11.97 | 9.22 | 19.52 | 12.25 |
| POL | 0.62 | 2.31 | 6.13 | 0.37 | 1.34 | 7.47 | 1.29 | 1.46 | 1.84 | 11.97 | | 9.17 | 19.40 | 12.19 |
| PT | 0.01 | 0.13 | 0.78 | 0.00 | 0.03 | 0.98 | 0.04 | 0.03 | 0.05 | 1.69 | 1.71 | | 4.04 | 1.75 |
| SZ | 2.50 | 15.59 | 33.30 | 2.07 | 5.38 | 34.31 | 4.14 | 10.45 | 4.85 | 40.83 | 41.36 | 35.05 | | 41.68 |
| ASU | 0.63 | 2.36 | 6.29 | 0.39 | 1.31 | 7.67 | 1.32 | 1.51 | 1.87 | 12.25 | 12.19 | 9.39 | 19.97 | |

Tabla A2. Resultados del Porcentaje de Determinismo

| | NAO | EA | EA-JET | WP | EP | NP | PNA | EA-WR | SCA | TNH | POL | PT | SZ | ASU |
|---------------|------------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|------------|--------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|------------|
| NAO | | 0.45 | 4.33 | 0.26 | 0.17 | 4.26 | 0.05 | 0.37 | 0.05 | 0.04 | 0.00 | 0.04 | 0.04 | 0.00 |
| EA | 0.26 | | 49.14 | 0.28 | 2.44 | 48.93 | 1.92 | 7.99 | 2.13 | 60.02 | 59.68 | 54.62 | 68.17 | 59.77 |
| EA-JET | 0.74 | 0.82 | | 0.00 | 0.03 | 26.19 | 0.00 | 0.00 | 0.06 | 45.34 | 45.23 | 36.70 | 49.50 | 45.01 |
| WP | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| EP | 0.00 | 0.48 | 0.00 | 0.00 | | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| NP | 0.81 | 0.74 | 26.19 | 0.00 | 0.00 | | 0.03 | 0.16 | 0.00 | 44.24 | 44.12 | 36.14 | 47.84 | 43.86 |
| PNA | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| EA-WR | 0.37 | 1.64 | 0.50 | 0.14 | 0.48 | 0.57 | 0.53 | | 0.43 | 0.29 | 0.28 | 0.35 | 0.40 | 0.42 |
| SCA | 0.44 | 2.13 | 3.08 | 0.30 | 0.95 | 3.25 | 1.05 | 1.37 | | 3.58 | 3.47 | 3.37 | 3.85 | 3.46 |
| TNH | 0.00 | 0.00 | 0.72 | 0.00 | 0.00 | 0.62 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | 5.73 | 1.40 | 8.15 | 5.37 |
| POL | 0.00 | 0.00 | 0.80 | 0.00 | 0.00 | 0.54 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 5.73 | | 1.65 | 7.72 | 5.51 |
| PT | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.16 | 0.20 | | 0.00 | 0.14 |
| SZ | 0.04 | 8.24 | 68.13 | 0.00 | 0.23 | 68.03 | 0.00 | 0.40 | 0.04 | 76.60 | 76.37 | 72.91 | | 75.56 |
| ASU | 0.00 | 0.00 | 0.82 | 0.00 | 0.00 | 0.50 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 5.37 | 5.51 | 1.62 | 7.94 | |

Tabla A3. Resultados del Máximo de Líneas (MaxLine)

| | NAO | EA | EA-JET | WP | EP | NP | PNA | EA-WR | SCA | TNH | POL | PT | SZ | ASU |
|--------|-----|----|--------|----|----|----|-----|-------|-----|-----|-----|----|----|-----|
| NAO | | 5 | 6 | 5 | 5 | 6 | 4 | 5 | 4 | 4 | -1 | 4 | 4 | -1 |
| EA | 5 | | 8 | 7 | 8 | 8 | 6 | 6 | 7 | 9 | 9 | 8 | 6 | 9 |
| EA-JET | 5 | 5 | | -1 | 4 | 7 | -1 | -1 | 5 | 8 | 8 | 7 | 17 | 15 |
| WP | -1 | -1 | -1 | | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| EP | -1 | 4 | -1 | -1 | | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| NP | 6 | 5 | 7 | -1 | -1 | | 4 | 4 | -1 | 10 | 9 | 9 | 17 | 9 |
| PNA | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| EA-WR | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 5 |
| SCA | 5 | 7 | 7 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| TNH | -1 | -1 | 5 | -1 | -1 | 7 | -1 | -1 | -1 | | 15 | 13 | 16 | 14 |
| POL | -1 | -1 | 5 | -1 | -1 | 13 | -1 | -1 | -1 | 15 | | 13 | 15 | 15 |
| PT | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 6 | 5 | | -1 | 5 |
| SZ | 4 | 6 | 9 | -1 | 4 | 10 | -1 | 5 | 4 | 9 | 10 | 8 | | 19 |
| ASU | -1 | -1 | 12 | -1 | -1 | 6 | -1 | -1 | -1 | 14 | 15 | 14 | 16 | |

Tabla A4. Resultados de la Tendencia

| | NAO | EA | EA-JET | WP | EP | NP | PNA | EA-WR | SCA | TNH | POL | PT | SZ | ASU |
|---------------|------------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|------------|--------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|------------|
| NAO | | -0.88 | -1.44 | -0.62 | -0.14 | -1.65 | 0.06 | -0.44 | 0.09 | -0.79 | -0.72 | -0.68 | -0.80 | -0.65 |
| EA | 0.11 | | 0.81 | -2.37 | -0.09 | -0.40 | 0.18 | 0.24 | -0.32 | -0.28 | 0.22 | -0.29 | 1.34 | -0.23 |
| EA-JET | 0.22 | 0.33 | | -1.23 | 0.26 | -1.38 | 0.37 | 0.61 | 3.16 | -0.76 | 0.05 | -0.72 | 0.26 | -1.14 |
| WP | -0.02 | -0.04 | -0.09 | | -0.04 | -0.06 | -0.04 | -0.01 | -0.03 | -0.10 | -0.11 | -0.12 | -0.06 | -0.09 |
| EP | -0.08 | 0.05 | 0.24 | -0.06 | | 0.21 | 0.21 | 0.07 | -0.13 | 0.36 | 0.37 | 0.34 | 0.59 | 0.24 |
| NP | 0.18 | -0.24 | -1.38 | 1.49 | 0.19 | | 0.62 | 0.68 | 1.84 | -3.39 | -2.03 | -2.35 | -2.47 | -3.34 |
| PNA | -0.01 | -0.02 | -0.07 | -0.05 | 0.05 | -0.02 | | 0.03 | 0.09 | -0.06 | -0.09 | -0.10 | 0.01 | -0.12 |
| EA-WR | -0.44 | -0.51 | 0.46 | -0.79 | 1.06 | 0.00 | 0.52 | | 0.63 | -0.60 | -0.26 | -0.02 | -0.18 | -0.15 |
| SCA | 0.23 | -0.32 | -0.91 | -1.19 | 0.39 | -1.20 | 0.24 | -0.29 | | -1.63 | -0.95 | -0.76 | -1.24 | -1.27 |
| TNH | -0.17 | -0.38 | -0.43 | -0.55 | -0.69 | -2.85 | -0.75 | -0.25 | 1.27 | | -5.03 | -2.72 | -6.19 | -5.04 |
| POL | -0.14 | -0.24 | -0.25 | -0.44 | -0.66 | -1.69 | -0.76 | -0.16 | 1.43 | -5.03 | | -1.71 | -2.95 | -3.50 |
| PT | -0.03 | -0.09 | -0.21 | 0.00 | -0.01 | -0.20 | -0.03 | 0.07 | 0.15 | -0.52 | -0.50 | | 5.14 | -0.87 |
| SZ | -0.80 | 0.30 | 1.44 | -1.59 | 2.69 | -1.42 | 0.43 | -0.18 | -0.90 | -1.15 | 0.14 | -1.50 | | -1.03 |
| ASU | -0.20 | -0.54 | -0.38 | -0.39 | -0.76 | -2.49 | -0.46 | -0.08 | 1.41 | -5.04 | -3.50 | -2.33 | -4.50 | |