

Capítulo 5

Control en presencia de ruido térmico

5.1. Introducción

En este capítulo se proponen dos estrategias de control para mover una partícula de una posición inicial a otra final en reposo, mediante la manipulación de la PO, bajo la suposición que la fuerza de amortiguamiento esta presente en el medio. La primera estrategia de manipulación es basada en el hecho de que el coeficiente de amortiguamiento del medio es conocido, mientras que, en la segunda, sólo una estimación de este parámetro es conocido, el cual en la práctica es más realista, debido a la dificultad de estimar este coeficiente porque es relativo a la densidad del medio y su valor depende de la temperatura del medio ambiente.

Para justificar ambas estrategias se usa el tradicional método de Lyapunov en conjunción con una función de saturación. Cabe hacer mención que el modelo en lazo abierto puede llevar a una partícula al origen, si esta localizada lo suficientemente cerca del centro geométrico del rayo láser o dentro del dominio de estabilización. Sin embargo, el modelo de control en lazo abierto es inútil si se tienen que llevar a cabo tareas más complejas o el ruido térmico debe ser considerado, como usualmente sucede en aplicaciones reales. Por ejemplo, en un adecuado estado de retroalimentación permite reducir las fluctuaciones producidas por el ruido térmico.

5.2. Modelo dinámico no lineal de la pinza óptica

El modelo simplificado de la PO consiste en una partícula inmersa en un medio viscoso atrapada en un campo potencial óptico. El movimiento de la partícula es descrito por las coordenadas generalizadas x y y , mientras que las acciones de control son representadas por las coordenadas de posición del rayo láser (x_0, y_0) . Las ecuaciones de movimiento correspondiente al modelo de control de la PO están dadas por [37]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \frac{2\ln(2)p_0(x-x_0)}{a^2} \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right)\right] &= -\beta\dot{x} + F_x(t) \\ m\ddot{y} + \frac{2\ln(2)p_0(y-y_0)}{b^2} \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right)\right] &= -\beta\dot{y} + F_y(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde p_0 es la profundidad del pozo, a y b están relacionadas con las dimensiones de la cintura del rayo láser, $\beta\dot{x}$ y $\beta\dot{y}$ son las fuerzas de arrastre presentes en el medio coloide; con $\beta > 0$, siendo el coeficiente de amortiguamiento. $F_x(t)$ y $F_y(t)$ son las fuerzas externas independientes (fuerzas de Langevin), donde las fuerzas aleatorias serán modeladas como señales de ruido blanco [36, 28].

Se puede mostrar mediante una linealización que el sistema (5.1) tiene un punto de equilibrio estable, definido por $(x_0, y_0, 0, 0)$, el cual es local y exponencialmente estable. Tiene un conjunto de puntos de equilibrio inestables dados por $(x \rightarrow \pm\infty, y \rightarrow \pm\infty, 0, 0)$. Esto significa que si la partícula esta lo suficientemente lejos del centro (x_0, y_0) , entonces no podrá ser atrapada por el potencial gaussiano, a menos que se mueva el centro a una vecindad cercana a la partícula. En otras palabras, el sistema (5.1) es localmente estable en lazo abierto.

A fin de gestionar el modelo anterior de una forma sencilla, se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= \dot{x}, & x_r &= x_1 - x_0, \\ y_1 &= y, & y_2 &= \dot{y}, & y_r &= y_1 - y_0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

y las constantes positivas

$$k_s = \frac{2\ln(2)p_0}{a^2m} \quad \gamma = \frac{\beta}{m} \quad \alpha = \frac{1}{m} \quad (5.3)$$

Así, el sistema (5.1) puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2}k_s x_r \exp\left[-\left(\frac{x_r^2}{a^2} + \frac{y_r^2}{b^2}\right)\right] - \gamma x_2 + \alpha F_x(t) \\ \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{1}{2}k_s y_r \exp\left[-\left(\frac{x_r^2}{a^2} + \frac{y_r^2}{b^2}\right)\right] - \gamma y_2 + \alpha F_y(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

evidentemente, x_r y y_r son las nuevas entradas de control del sistema (5.4). Desde ahora y en adelante, se usará q y \dot{q} para indicar los vectores de posición y velocidad del sistema respectivamente, que son, $q = [x_1, y_1]$ y $\dot{q} = [x_2, y_2]$.

Note que el modelo dinámico (5.4) no es afín en las variables de control x_r y y_r . Consecuentemente, muchas estrategias de control no pueden ser aplicadas directamente para manipular este tipo de sistemas. También, si las variables de control x_r y y_r son lo suficientemente grandes, entonces el sistema pierde controlabilidad. Físicamente, si la partícula está localizada lo suficientemente lejos del rayo láser, no es posible atraparla. Sin embargo, este inconveniente puede ser superado mediante el uso de un método basado en funciones de saturación. Afortunadamente, en el caso opuesto, esto es, cuando las variables de control x_r y y_r son lo suficientemente pequeñas (cercanas a cero), el sistema de la PO se comporta como un sistema lineal.

Debe notarse que el sistema (5.4) se dice que es un sistema en lazo cerrado si los controladores x_0 y y_0 permanecen constantes. En este caso, siempre que la partícula este dentro de su respectivo dominio de atracción, el sistema en lazo abierto asintóticamente la atrae al origen ($q = 0, \dot{q} = 0$). Sin embargo, para realizar cualquier tarea de manipulación, como cambiar la posición de la partícula o hacer al sistema más robusto contra perturbaciones externas tales como el ruido térmico, se necesita aplicar algunas estrategias de control, porque la fuerza de atracción ejercida por la trampa óptica es realmente una fuerza muy débil que decrece exponencialmente a cero, siempre y cuando la partícula se mueva lejos del foco del rayo láser (x_0, y_0).

Ahora se proporcionan algunas importantes consideraciones relacionadas al modelo del controlador de la PO.

- La partícula esta restringida a moverse únicamente dentro del plano (x, y) , los movimientos a lo largo del eje z son descartados.
- El caso donde la fuerza de gradiente, generalmente por la energía potencial Gaussiana (inducida por el rayo láser), es más fuerte que la fuerza de dispersión. Esto es, la fuerza de dispersión no es incluida en el modelo de control.

Es importante mencionar que en casi cualquier trabajo relacionado con el control del sistema de la PO, la configuración del modelo se propone de tal manera que la fuerza de dispersión es desatendido dentro de la región, donde la fuerza de gradiente siempre domina sobre la fuerza de dispersión (ver [56] para más detalles). De hecho, usando control retroalimentado ayuda a obtener

un sistema más robusto porque reduce los efectos no deseados de la dinámica no modelada, como las fuerzas de dispersión y estocásticas. Sin embargo, desde un punto de vista de la física la fuerza de dispersión debe tenerse en cuenta, en algunos casos, como se menciona en [77, 64].

5.3. Estabilización del sistema de la pinza óptica

Ahora se resolverá el problema de control antes mencionado. Con este fin, se proponen dos estrategias de control, ambas basadas en la aplicación de la Teoría de Control de Lyapunov en conjunción con una función de saturación. La primera estrategia de control esta basada en el hecho que el coeficiente de amortiguamiento β es conocido con una alta precisión, mientras que en la segunda se omite esta restricción. Ya que el análisis de estabilidad de un modelo dinámico no lineal (5.4) es generalmente muy difícil de obtener mediante el método de Lyapunov cuando señales de ruido térmico están presentes, así por simplicidad se asume que las perturbaciones externas son $F_x(t) = 0$ y $F_y(t) = 0$. Para evaluar el rendimiento de sistema en lazo cerrado en presencia de fuerzas térmicas se han llevado a cabo algunas simulaciones numéricas, que discutiremos más adelante.

Para evitar grandes valores en las variables de control x_r y y_r , se usa una función de saturación.

Definición 5.3.1. *Sea $M > 0$ un número real positivo. Se dice que $\sigma_M(w) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función de saturación, si satisface:*

1. $\sigma_M(w) = 0 \iff w = 0$,
2. $w\sigma_M(w) \geq 0 \forall w \in \mathfrak{R}$,
3. $\sigma_M(-w) = -\sigma_M(w) \forall w \in \mathfrak{R}$,
4. $-M \leq \sigma_M(w) \leq M; \forall w \in \mathfrak{R}$.

5.3.1. Estrategia de control donde el coeficiente de amortiguamiento es conocido

Se desarrolla una estrategia de control simple para cambiar la posición de la partícula, asumiendo que el parámetro β es conocido. Primero se introduce un

adecuado cambio de variables para escribir el sistema (5.4) como dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Entonces, usando la función cuadrática más simple se derivan los controladores necesarios que aseguren la convergencia asintótica al origen.

Se introducen las siguientes variables auxiliares:

$$w_x = \gamma(x_1 - x_f) + x_2 \quad w_y = \gamma(y_1 - y_f) + y_2 \quad (5.5)$$

Así, el sistema (5.4) puede ser fácilmente expresado como:

$$\begin{aligned} \dot{w}_x &= -\frac{1}{2}k_s x_r \exp \left[-\left(\frac{x_r^2}{a^2} + \frac{y_r^2}{b^2} \right) \right] \\ \dot{w}_y &= -\frac{1}{2}k_s y_r \exp \left[-\left(\frac{x_r^2}{a^2} + \frac{y_r^2}{b^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Note que si las variables w_x y w_y son llevadas a cero, se tiene

$$w_x = 0 = \gamma(x_1 - x_f) + \dot{x}_1; \quad w_y = 0 = \gamma(y_1 - y_f) + \dot{y}_1 \quad (5.7)$$

Por lo tanto, como $\gamma > 0$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1 = x_f \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1 = y_f \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2 = 0 \quad (5.8)$$

De (5.7) y (5.8), se puede diseñar una estrategia de control que lleve al sistema (5.6) hasta el punto de equilibrio en reposo ($w_x = 0, w_y = 0$). En otras palabras, se propone una estrategia de control que obliga al movimiento del sistema (5.6), iniciando desde cualquier condición inicial arbitraria ($w_x(0), w_y(0)$) hacia el punto de equilibrio en reposo.

Se proponen los siguientes controladores retroalimentados simples

$$\begin{aligned} x_r &= -\sigma_a(w_x) \hat{=} -\varepsilon \sigma_a\left(\frac{1}{\lambda}(\gamma(x_1 - x_f) + x_2)\right) \\ y_r &= -\sigma_b(w_y) \hat{=} -\varepsilon \sigma_b\left(\frac{1}{\lambda}(\gamma(y_1 - y_f) + y_2)\right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde ε y λ son constantes estrictamente positivas. Ahora, substituimos los dos controladores (5.9) dentro del sistema (5.6), se tiene el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{w}_x &= -\frac{1}{2}\varepsilon k_s \sigma_a\left(\frac{1}{\lambda}w_x\right) e^{-\left(\frac{x_r^2}{a^2} + \frac{y_r^2}{b^2}\right)} \\ \dot{w}_y &= -\frac{1}{2}\varepsilon k_s \sigma_b\left(\frac{1}{\lambda}w_y\right) e^{-\left(\frac{x_r^2}{a^2} + \frac{y_r^2}{b^2}\right)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para mostrar que el sistema (5.10) es asintóticamente estable, se introduce la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}w_x^2 + \frac{1}{2}w_y^2 \quad (5.11)$$

5.3. ESTABILIZACIÓN DEL SISTEMA DE LA PINZA ÓPTICA

Así, la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema (5.10), produce:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\varepsilon k_s \left(w_x \sigma_a \left(\frac{1}{\lambda} w_x \right) + w_y \sigma_b \left(\frac{1}{\lambda} w_y \right) \right) e^{-\left(\frac{\varepsilon^2 \sigma_a \left(\frac{1}{\lambda} w_x \right)^2}{a^2} + \frac{\varepsilon^2 \sigma_b \left(\frac{1}{\lambda} w_y \right)^2}{b^2} \right)} \quad (5.12)$$

Ahora, de la Definición 5.3.1 se tiene que $s\sigma_a(s/\lambda) > 0$; para toda $s \neq 0$ y $\lambda > 0$, por lo tanto $\dot{V} < 0$. Note que $0 < e^{-2\varepsilon^2} \leq e^{-\left(\frac{\varepsilon^2 \sigma_a \left(\frac{1}{\lambda} w_x \right)^2}{a^2} + \frac{\varepsilon^2 \sigma_b \left(\frac{1}{\lambda} w_x \right)^2}{b^2} \right)} \leq 1$. Esto es, la solución del sistema (5.10) asintóticamente converge a $(w_x = 0, w_y = 0)$. Por lo tanto, de (5.8), como el tiempo tiende a infinito, también se tiene que $q \rightarrow q_f$ y $\dot{q} \rightarrow 0$. También se puede mostrar que el sistema en lazo cerrado es local y exponencialmente estable. Este hecho puede ser visto con una simple linealización del sistema (5.10).

Ahora se introduce la siguiente proposición.

Proposición 5.3.1. *Considere el sistema no lineal (5.4) en lazo cerrado con los controladores*

$$\begin{aligned} x_r &= -\varepsilon \sigma_a \left(\frac{1}{\lambda} (\gamma(x_1 - x_f) + x_2) \right) \\ y_r &= -\varepsilon \sigma_b \left(\frac{1}{\lambda} (\gamma(y_1 - y_f) + y_2) \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde $\varepsilon > 0$ y $\lambda > 0$. Entonces el sistema de lazo cerrado resultante es global y asintóticamente estable. Además, el sistema de lazo cerrado es local y exponencialmente estable.

5.3.2. Estrategia de control donde el coeficiente de amortiguamiento es desconocido

Se presenta una estrategia de control alternativa para lograr el posicionamiento de la PO, bajo la suposición que β es un parámetro desconocido. Esto está bien justificado, ya que, en una aplicación real, el coeficiente de amortiguamiento esta relacionado con la densidad del medio, la cual varía según el entorno o la temperatura ambiente.

Se proponen los siguientes controladores retroalimentados.

$$\begin{aligned} x_r &= -\varepsilon \sigma_a \left(\frac{1}{\varepsilon} (k_1(x_1 - x_f) + k_2 x_2) \right) \hat{=} -\varepsilon \sigma_a \left(\frac{1}{\varepsilon} v_x \right) \\ y_r &= -\varepsilon \sigma_b \left(\frac{1}{\varepsilon} (k_1(y_1 - y_f) + k_2 y_2) \right) \hat{=} -\varepsilon \sigma_b \left(\frac{1}{\varepsilon} v_y \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Donde las ganancias estrictamente positivas ε , k_1 y k_2 serán determinadas posteriormente. Naturalmente, para este caso v_x y v_y pueden ser vistos como las nuevas salidas del sistema en lazo cerrado.

Para mostrar que el sistema (5.4), en lazo cerrado con la retroalimentación (5.14), es asintóticamente estable para algunas ganancias ε , k_1 y k_2 , se reescribe el sistema en lazo cerrado como un sistema lineal estable exponencialmente, perturbado por dos funciones residuales no lineales de las salidas v_x y v_y . A continuación, se da forma a una conveniente función candidata de Lyapunov de acuerdo con el Lema 5.3.1. De hecho, la función de Lyapunov es una función cuadrática de dos estados x y y . Finalmente, para asegurar que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable, se muestra que la derivada de la función de Lyapunov propuesta es estrictamente negativa.

Después de algunas manipulaciones se verifica que el sistema en lazo cerrado, definido por (5.4) y (5.14), puede ser expresado como la representación de espacio de estado, dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Br_x(v_x, v_y) \\ \dot{y} &= Ay + Br_y(v_x, v_y)\end{aligned}\quad (5.15)$$

donde

$$\begin{aligned}x &= \begin{bmatrix} x_1 - x_f \\ x_2 \end{bmatrix} & y &= \begin{bmatrix} y_1 - y_f y_2 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{2} & -\frac{k_2}{2} - \gamma \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.16)$$

y

$$\begin{aligned}r_x(v_x, v_y) &:= \frac{1}{2} \left(v_x - \varepsilon \sigma_a \left(\frac{1}{\varepsilon} v_x \right) e^{-w^2} \right) \\ r_y(v_x, v_y) &:= \frac{1}{2} \left(v_y - \varepsilon \sigma_b \left(\frac{1}{\varepsilon} v_y \right) e^{-w^2} \right)\end{aligned}\quad (5.17)$$

con $w^2 = (\sigma_a^2(v_x)/a^2 + \sigma_b^2(v_y)/b^2)$.

Antes de presentar el análisis de estabilidad, se introduce un útil lema, el cual nos permite formular la función candidata de Lyapunov.

Lema 5.3.1. Sean x , y , A y B definidas como (5.16). Seleccionando P y Q , como:

$$P = \begin{bmatrix} \gamma k_1 & k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 + 2(\gamma k_2 - k_1) \end{bmatrix}\quad (5.18)$$

donde k_1 y k_2 satisface $\gamma k_2 - k_1 > 0$. Entonces, P y Q son matrices estrictamente positivas las cuales satisfacen

$$\begin{aligned}PA + A^T P + Q &= 0, \\ x^T P B &= v_x; \quad y^T P B = v_y.\end{aligned}\quad (5.19)$$

5.3. ESTABILIZACIÓN DEL SISTEMA DE LA PINZA ÓPTICA

Además

$$Q - K \geq 0 \quad (5.20)$$

donde K esta dada por

$$K = \begin{bmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Demostración. Ver el Apéndice A.6. □

Continuando con el análisis de estabilidad, se introduce la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}x^T P x + \frac{1}{2}y^T P y \quad (5.22)$$

donde la matriz $P = P^T > 0$ es seleccionada de acuerdo al Lema 5.3.1.

Entonces, la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema (5.15), conducen a

$$\dot{V} = x^T (PA + A^T P)x + y^T (PA + A^T P)y + 2x^T P B r_x(v_x, v_y) + 2y^T P B r_y(v_x, v_y). \quad (5.23)$$

Ahora, por álgebra, se tienen las siguientes dos igualdades:

$$\begin{aligned} 2x^T P B r_x(v_x, v_y) &= v_x^2 - \varepsilon v_x \sigma_a\left(\frac{1}{\varepsilon}v_x\right)e^{-w^2} = x^T K x - \varepsilon v_x \sigma_a\left(\frac{1}{\varepsilon}v_x\right)e^{-w^2}, \\ 2x^T P B r_y(v_x, v_y) &= v_y^2 - \varepsilon v_y \sigma_b\left(\frac{1}{\varepsilon}v_y\right)e^{-w^2} = y^T K y - \varepsilon v_y \sigma_b\left(\frac{1}{\varepsilon}v_y\right)e^{-w^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Sustituyendo las igualdades anteriores dentro de la derivada de V (5.23), se tiene

$$\dot{V} = -x^T (Q - K)x - y^T (Q - K)y - \varepsilon v_x \sigma_a\left(\frac{1}{\varepsilon}v_x\right)e^{-w^2} - \varepsilon v_y \sigma_b\left(\frac{1}{\varepsilon}v_y\right)e^{-w^2}. \quad (5.25)$$

De acuerdo con el Lema 5.3.1 (ver definición de Q y (5.20)), se tiene que la última igualdad se puede leer como:

$$\dot{V} = -x_2^2(\gamma k_2 - k_1) - y_2^2(\gamma k_2 - k_1) - \varepsilon v_x \sigma_a\left(\frac{1}{\varepsilon}v_x\right)e^{-w^2} - \varepsilon v_y \sigma_b\left(\frac{1}{\varepsilon}v_y\right)e^{-w^2}. \quad (5.26)$$

La última igualdad implica que \dot{V} es definida estrictamente negativa (Note que, de la definición de w y a es pequeña y positiva, se tiene que $0 < \exp(-2a) \leq \exp(-w^2) < 1$), ya que $s\sigma_a\left(\frac{1}{\varepsilon}s\right) \geq 0 \forall s \in \mathfrak{R}$. Por lo tanto,

el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable. Por otra parte, la linealización del sistema en lazo cerrado (5.15), produce:

$$\dot{x} = Ax; \quad \dot{y} = Ay, \quad (5.27)$$

Donde, A es una matriz Hurwitz. Es decir, el sistema en lazo cerrado es también local y exponencialmente estable, es robusto con respecto a la pequeña perturbación externa,

Para resumir la discusión previa, se introduce la siguiente proposición.

Proposición 5.3.2. *El sistema no lineal (5.4) en lazo cerrado con la retroalimentación (5.14) es asintótica y globalmente estable, si las ganancias k_1 y k_2 son seleccionadas, siempre que $\gamma k_2 - k_1 > 0$. Además, el sistema en lazo cerrado es local y exponencialmente estable.*

Cabe hacer un par de observaciones:

- La positividad de $\gamma k_2 - k_1$ puede ser fácilmente asegurada seleccionando la ganancia k_1 lo suficientemente pequeña en comparación con la ganancia k_2 , sin saber el valor exacto de γ .
- La anterior observación no es lo suficientemente fuerte, porque siempre es posible seleccionar otro conjunto de ganancias positivas k_1 y k_2 , preservando la estabilidad asintótica en el lazo cerrado. Esto puede ser demostrado (al menos localmente) usando linealización simple.

5.4. Simulaciones numéricas

5.4.1. Simulación del primer enfoque

El rendimiento de la estrategia de control propuesta, resumida en la Proposición 5.3.1, fue probada con una simulación numérica. El experimento fue diseñado de la siguiente manera: los parámetros del sistema físico fueron fijados como se muestra en la Tabla 5.1, donde β fue estimada usando la formula de Stokes, $\beta = 6\pi\eta r$, donde $\eta \cong 10^{-3}\text{kg/ms}$ es la viscosidad del agua y $r = 2\mu\text{m}$ el radio de la partícula (ver [74, 37] para más detalles); la condición inicial se fijó ($x(0) = 4.5 \times 10^{-4}$, $y(0) = -3.6 \times 10^{-4}$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$), la función de saturación retroalimentada seleccionada fue $\sigma_m(s) = m \tanh(s)$, $\varepsilon = 1$ y $\lambda = a$.

$$\begin{aligned}
 a &= 600\mu\text{m} \\
 b &= 600\mu\text{m} \\
 p_0 &= 1 \times 10^{-14}\text{J} \\
 m &= 3.68 \times 10^{-14}\text{kg} \\
 \beta &= 3.7 \times 10^{-8}\text{Ns/m}
 \end{aligned}$$

Tabla 5.1: Parámetros del sistema físico

La Figura 5.1 muestra el rendimiento del sistema el lazo cerrado en comparación del sistema en lazo abierto correspondiente; en ambos casos la tarea final fue llevar el sistema al origen, asumiendo que la condición inicial esta lo suficientemente cerca del origen. Recordando que x_0 y y_0 son las acciones de control y están relacionadas con el centro geométrico del foco del rayo láser; en otras palabras, representa como el foco de la PO debería ser manipulado para lograr posición final deseada (x_f, y_f) .

Como se puede ver en la Figura 5.1, la estrategia de lazo cerrado logra más rápido la estabilización, en comparación de la correspondiente estrategia en lazo abierto, esta es una de las principales ventajas de usar sistemas de retroalimentación de estado sobre sistemas de lazo abierto. Por simplicidad, se usa CL1 para referirse a la respuesta en lazo cerrado de la primera estrategia de control, esto es, el sistema (5.4) en lazo cerrado con (5.13). Similarmente, OP denota la respuesta en lazo abierto, *i.e.*, donde $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.

5.4.2. Simulación del segundo enfoque

El rendimiento de la segunda estrategia de control fue probado mediante un segundo experimento numérico. Las condiciones iniciales y los valores de los parámetros físicos fueron los mismos que en el primer experimento (Tabla 5.1). Las ganancias de los controladores fueron fijadas como $k_1 = 1/a$ y $k_2 = 2/(a\bar{\beta})$, con $\bar{\beta} = 3 \times 10^{-8}$, mientras la función de saturación fue seleccionada como $\sigma_a(s) = \tanh(s)$. La tarea de control fue llevar el sistema al origen.

La Figura 5.2 muestra el rendimiento del sistema en lazo cerrado en comparación al correspondiente sistema en lazo abierto. Nuevamente la estrategia en lazo cerrado logra estabilizar más rápidamente que la correspondiente estrategia en lazo abierto. Note que ambos sistemas de coordenadas de posición con sus respectivos controladores convergen asintóticamente a la posición en reposo después de transcurrir 0.11 segundos.

También, como en la Figura 5.1, x_0 y y_0 están relacionados con el centro

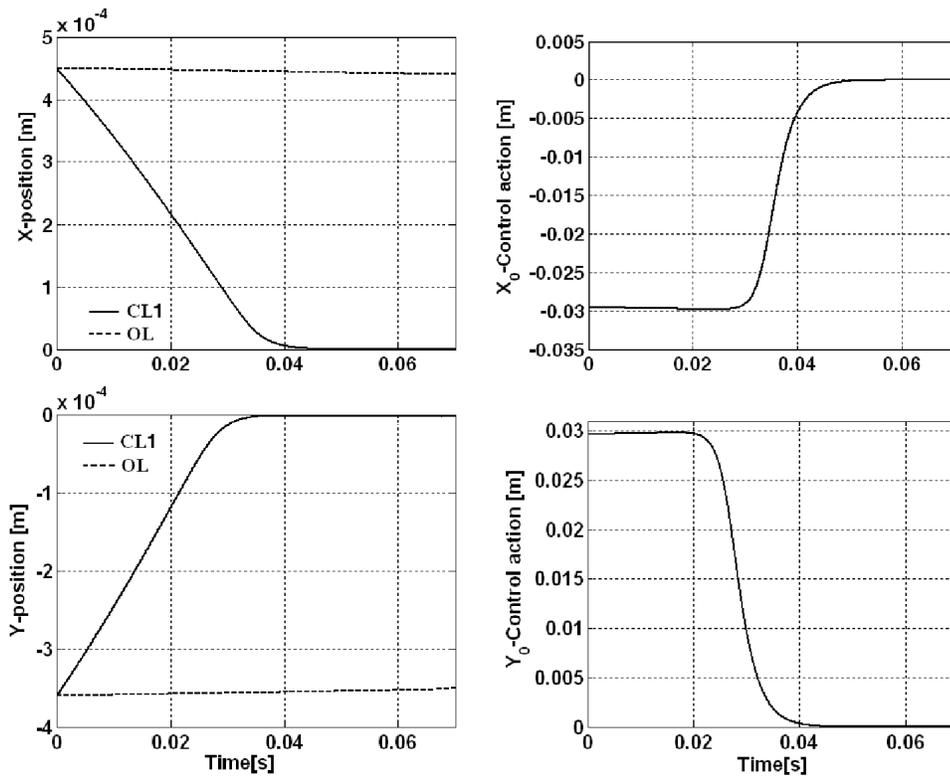


Figura 5.1: Respuesta de la primera estrategia de control del sistema de la PO en lazo cerrado. Por comparación, la respuesta en lazo abierto correspondiente es mostrada como una línea punteada. Como se esperaba, la respuesta en lazo cerrado supera la respuesta en lazo abierto.

geométrico del foco del rayo láser. Por simplicidad, CL2 denota la respuesta en lazo cerrado de la segunda estrategia de control, esto es, el sistema en lazo cerrado (5.4) con (5.14); OP denota la correspondiente respuesta en lazo abierto. De las simulaciones numéricas se puede ver que la primera estrategia de control tiene un mejor tiempo de ajuste que la segunda. Esto se esperaba ya que en la primera estrategia el coeficiente de amortiguamiento es perfectamente conocido.

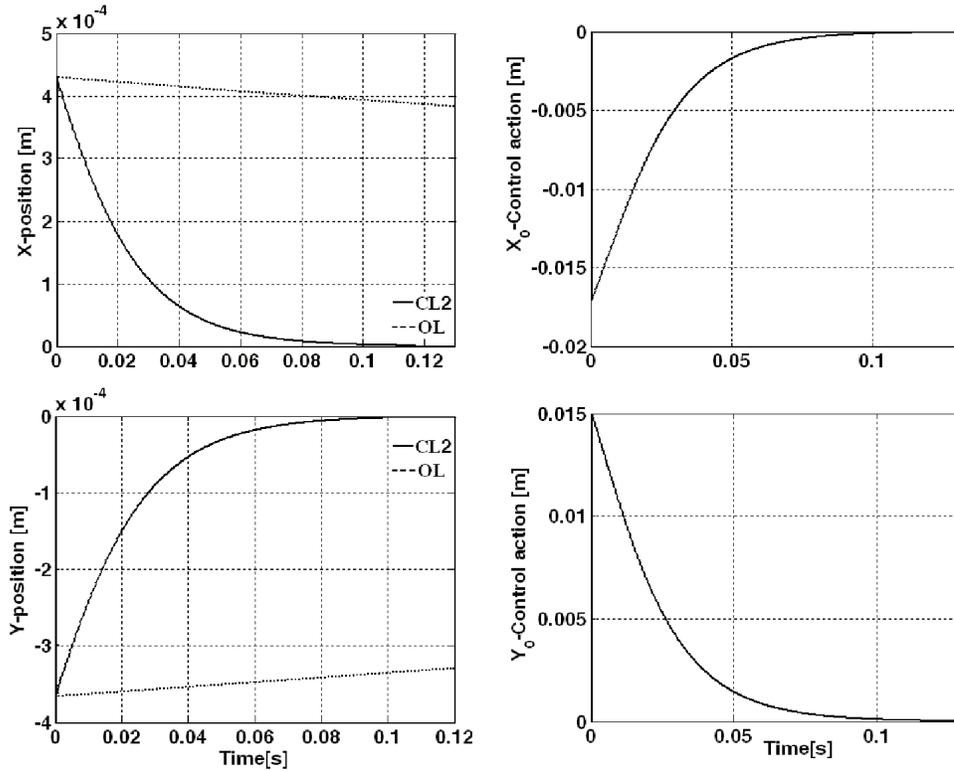


Figura 5.2: Respuesta de la segunda estrategia de control del sistema de la PO en lazo cerrado en una tarea de estabilización. Como podemos ver es sistema efectivamente alcanza la posición final, $(x_f = 0, y_f = 0)$.

5.4.3. Estabilización en presencia de ruido térmico

En esta sección, se considera el efecto inherente del ruido térmico en nuestro modelo de control. Para este propósito, se diseñó una simulación numérica donde el ruido térmico aleatorio externo es incluido en el modelo. Esto es, las perturbaciones aleatorias externas independientes $F_x(t)$ y $F_y(t)$ (denominado como las fuerzas térmicas aleatorias de Langevin) son modeladas como

$$F_x(t) = \sqrt{4k_B T \beta} \eta_1(t); \quad F_y(t) = \sqrt{4k_B T \beta} \eta_2(t) \quad (5.28)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, β es el coeficiente de amortiguamiento (estimado por la formula de Stokes), T es la temperatura absoluta, $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$

son señales de ruido blanco independientes, *i.e.*, para toda t, t' ,

$$\langle \eta_i(t) \rangle = 0; \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t') \quad (5.29)$$

con la dimensión de $\eta_i(t)$ dada por \sqrt{s} , para más detalles acerca de este tópico, ver [36, 28] y los capítulos 3 y 10 de Risken [61]. Las simulaciones numéricas en presencia de ruido térmico fueron obtenidas mediante el uso de los mismos parámetros físicos que fueron presentados en la Tabla 5.1. Por simplicidad, se toma $k_B T$ aproximadamente como $3.8 \times 10^{-21} \text{Nm}$. Por consiguiente, se tiene que $\sqrt{4k_B T \beta} = 2.5 \times 10^{-10} \text{N}/\sqrt{s}$.

Otra vez, el primer y segundo enfoque de control (ver (5.4) con (5.13) y (5.4) con (5.14)) fueron simulados en presencia de ruido térmico para resaltar las ventajas de usar retroalimentación de estado. La tarea de control consistió de mantener todos los estados lo suficientemente cerca del origen, bajo la suposición de que el sistema fue inicializado en el punto de equilibrio en reposo. Para reducir el tiempo de ejecución del proceso estocástico, se usa una versión simple del método numérico de Euler, con un tiempo de muestreo de $1 \times 10^{-7} \text{s}$.

En la Figura 5.3 se muestra, la respuesta en lazo abierto y en lazo cerrado para el primer enfoque de control. Para lograr esto, se usa la misma ganancia que en el primer enfoque. De la Figura 5.3 se ve que en lazo cerrado el efecto de la fuerza térmica es menos dominante que en el lazo abierto. Esta es una de las principales ventajas de usar retroalimentación de estado en comparación con la respuesta en lazo abierto.

En la Figura 5.4 se muestra, nuevamente, la respuesta en lazo cerrado y en lazo abierto para el segundo enfoque de control. Se usaron las mismas ganancias de control que fueron propuestas en la Subsección 5.4.2. Como era de esperar, la primera estrategia supera a la segunda.

Finalmente, la Figura 5.5 muestra la respuesta en lazo cerrado de ambas estrategias de control para el cambio de posición de la PO en presencia de ruido térmico. La finalidad del control fue llevar a la partícula desde el origen a una posición final ($x_f = 1.2 \times 10^{-4} \text{m}$, $y_f = -1.4 \times 10^{-4} \text{m}$). Se puede notar que la primera estrategia de control supera a la segunda.

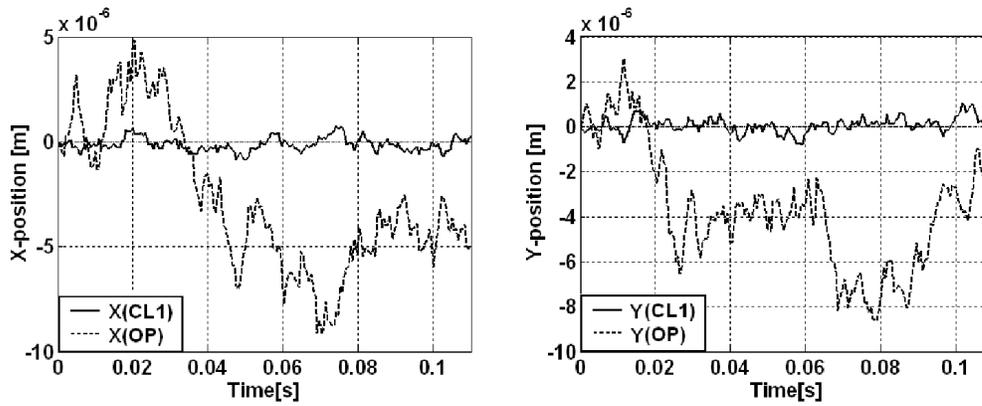


Figura 5.3: Respuesta en lazo cerrado del sistema de la PO para la primera estrategia de control con la correspondiente respuesta en lazo abierto (línea punteada), donde el sistema de la PO es sujeto a fuerzas térmicas externas.

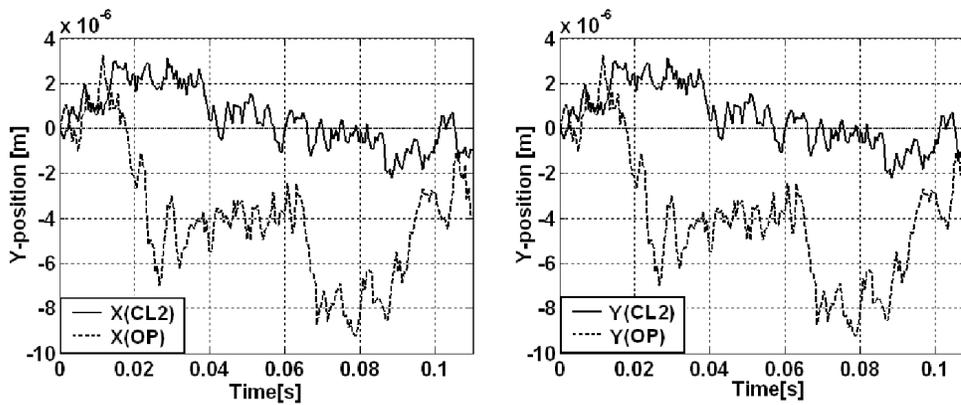


Figura 5.4: Respuesta en lazo cerrado del sistema de la PO para el segundo controlador en comparación con la correspondiente respuesta en lazo abierto (línea punteada), donde las fuerzas térmicas externas se presentan en el modelo.

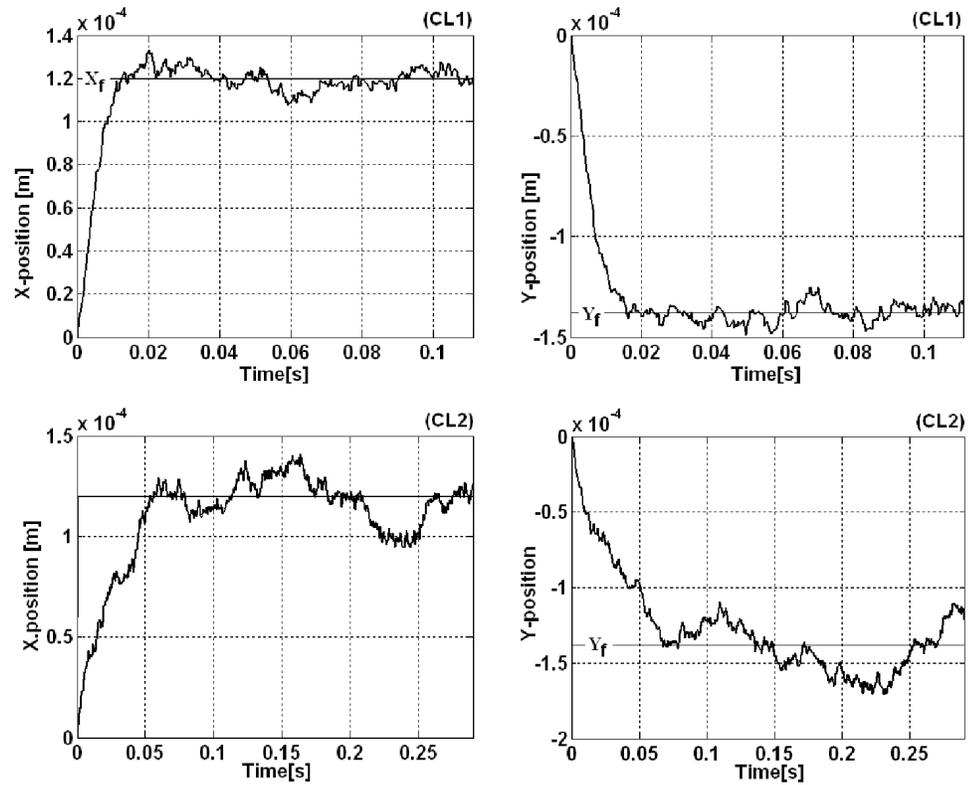


Figura 5.5: Comparación de la respuesta en lazo cerrado de las dos estrategias de control para el cambio de posición de la PO en presencia de ruido térmico.