

Capítulo 4

Control mediante un enfoque de platitud diferencial

4.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla una adecuada y útil estrategia de control para manipular con precisión una partícula desde la perspectiva del enfoque de *platitud diferencial*, desarrollada en la Teoría de Control introducida en [26] (ver también [66]). El diseño del controlador fue seleccionado debido al hecho de que la PO resulta ser un *sistema diferencial plano*. Las salidas de la PO son definidas mediante las coordenadas de las posiciones horizontal y vertical del centro geométrico del rayo láser de la PO. Teniendo en mente que medir la velocidad de una partícula es un procedimiento muy difícil y caro, se incluye en el enfoque el correspondiente estimador de velocidad de la partícula, basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov. Además, el sistema en lazo cerrado resulta ser local, exponencial y asintóticamente estable, haciendo al sistema robusto en presencia de perturbaciones externas, como el movimiento Browniano y la fuerza de arrastre con viscosidad. Hay que enfatizar que la propiedad de platitud del sistema facilita enormemente los cálculos y el diseño del controlador, al de un sistema lineal. Estas son consecuencias directas del hecho de que las salidas planas son completamente parametrizadas de una manera diferencial.

4.2. Modelo dinámico de la pinza óptica

Se ha utilizado el modelo base descrito en la Subsección 3.3.2 para el siguiente desarrollo, así, considerando una partícula esférica de radio r y masa m , con una distribución homogénea, la cual esta atrapada en un campo potencial con una distribución Gaussiana [37, 13]. Sea x y y la posición horizontal y vertical de la partícula, con respecto al marco de referencia fijo. El modelo no lineal del sistema, puede ser obtenido a partir del sistema (3.13), así se tiene que

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{2 \ln(2) p_0 (x-x_0)}{m a^2} \exp \left[-\ln(2) \left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right) \right] \\ \ddot{y} &= -\frac{2 \ln(2) p_0 (y-y_0)}{m b^2} \exp \left[-\ln(2) \left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde p_0 es la profundidad del pozo, x_0 y y_0 indica el centro de la trampa, a y b son parámetros relacionados con las dimensiones del láser [37]. Note que x_0 y y_0 son las variables de control. Esto es, cambiando de manera adecuada la posición (x_0 y y_0) se puede forzar a una partícula a realizar una tarea dirigida. El diagrama general de bloques se puede observar en la Figura 4.1, donde las perturbaciones son consideradas inexistentes para el presente caso. Por otra parte, este sistema tiene un conjunto de puntos de equilibrio inestables dados por $(x \rightarrow \pm\infty, y \rightarrow \pm\infty, 0, 0)$ y un punto de equilibrio estable, dado por $w_0 = (x_0, y_0, 0, 0)$.

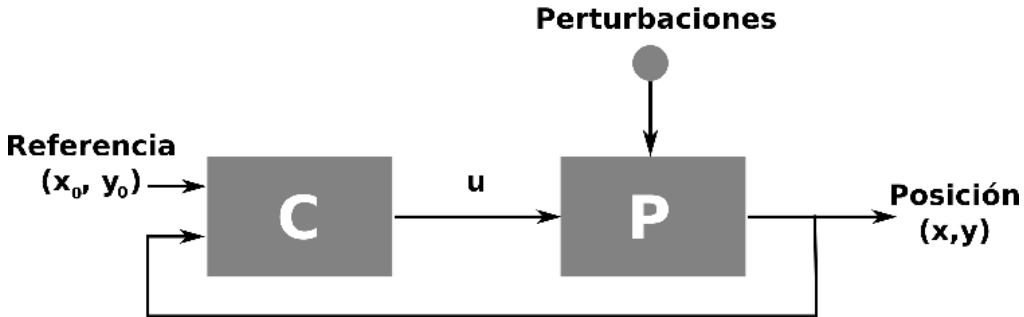


Figura 4.1: Diagrama de bloques para el control de la pinza óptica para la manipulación de partículas de escala nano y micrométrica.

Varios modelos matemáticos de energía potencial inducida por la PO han sido considerados por diferentes investigadores [37, 16, 57]; sin embargo, el modelo de energía potencial gaussiano ha mostrado ser el que mejor se ajusta a los cálculos de la fuerza de atracción real que un rayo láser ejerce sobre una partícula. Esto es explicado por el hecho que la intensidad de la luz del rayo láser

$x_1 = \frac{x}{a};$	$y_1 = \frac{y}{b};$	$x_2 = \frac{\dot{x}}{ak};$
$y_2 = \frac{\dot{y}}{bk};$	$\lambda = \frac{b}{a};$	$k = \sqrt{\frac{2 \ln(2) p_0}{a^2 m}};$
$\tau = kt;$	$u_x = \frac{x_0}{a};$	$u_y = \frac{y_0}{b}.$

Tabla 4.1: Transformaciones escalares.

tiene una función con perfil gaussiano. El cual es preservado incluso cuando la luz del rayo láser pasa a través de una lente convergente, el cual, de hecho, corresponde a la construcción de la PO real. Por lo tanto, usar un potencial con perfil gaussiano en el enfoque de control esta correctamente justificado [10, 23]. Por otra parte, muchos de los modelos alternativos pueden ser considerados como simplificaciones del modelo utilizado en este proyecto de investigación. Dichos modelos consideran al sistema de la PO como un sistema controlado masa-resorte. Además, estos modelos se puede considerar que se comportan como un resorte lineal, o no lineal, restringido a una muy pequeña vecindad, alrededor del correspondiente punto de equilibrio.

Para simplificar la manipulación algebraica en los futuros desarrollos, se normalizarán las ecuaciones anteriores mediante la introducción de las transformaciones escalares de la Tabla 4.1.

Por lo tanto, el sistema (4.1) puede ser reescrito, con flexibilidad en la notación, en la cual la notación “punto” ahora indica derivación con respecto al tiempo escalado, así:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -(x_1 - u_x) \exp[-\ln(2) ((x_1 - u_x)^2 + (y_1 - u_y)^2)] \\
 \dot{y}_1 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= -\frac{1}{\lambda} (y_1 - u_y) \exp[-\ln(2) ((x_1 - u_x)^2 + (y_1 - u_y)^2)]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde, u_x y u_y son las nuevas entradas de control para el sistema (4.2).

Ahora se plantea nuestro problema como: *Dada una partícula, que satisfaga al sistema normalizado (4.2), se desea seguir una trayectoria de referencia normalizada suave dada por $(x_r(\tau), y_r(\tau))$; con $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$. En otras palabras, se desea que el centro de la pinza óptica sea movido de tal manera que asegure que la partícula siga una trayectoria suave deseada.*

4.3. Estrategia de control retroalimentado

Aquí se establece el marco referencia para resolver el problema de control. Primero, se mostrará que el sistema (4.2) es plano, con respecto a sus posiciones medibles: x_1 y y_1 . Esto es, que se puede expresar todas las variables del sistema en términos de sus salidas planas y un número finito de sus respectivas derivadas con respecto al tiempo. Basados en esta propiedad, un controlador de seguimiento de trayectoria es propuesto para el problema de la pinza óptica.

Se introduce la siguiente definición:

Definición 4.3.1. *Considere un sistema no lineal en la siguiente forma general (ver [26, 66]):*

$$\dot{x} = f(x, u); x \in \mathbb{R}^n \text{ y } u \in \mathbb{R}^k \quad (4.3)$$

donde $n > k$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ es una función suave de x y u , respectivamente. El sistema (4.3) se dice que es un sistema plano si hay un cierto vector de salida, llamado salida plana, y denotado por $y \in \mathbb{R}^k$, tal que:

$$y = \nu(x, \dot{x}, \dots, x^{(\mu)})$$

y

$$x = \phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \quad u = \eta(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)})$$

donde r , μ y k son enteros finitos, ϕ y η son funciones vector suaves del vector salida y y un número finito de sus respectivas derivadas con respecto al tiempo.

En términos generales, el sistema no lineal de arriba es plano si hay un conjunto de funciones independientes, dependiendo del estado y un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo, compuesta de un vector llamado *salida plana* y , tal que cada estado del sistema y variable de control de entrada son, en efecto, expresables como una función de la salida especial y y un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo de sus componentes.

Considere, entonces, el sistema (4.2) y se definen las salidas $F = x_1$ y $G = y_1$. Claramente, este sistema es plano, con respecto a esas salidas, ya que, $x_2 = \dot{F}$, $y_2 = \dot{G}$ y

$$\begin{aligned} \ddot{F} &= -(F - u_x) \exp[-\ln(2) ((F - u_x)^2 + (G - u_y)^2)] \\ \lambda \ddot{G} &= -(G - u_y) \exp[-\ln(2) ((F - u_x)^2 + (G - u_y)^2)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Consecuentemente, de la definición 4.3.1, se dice que el sistema (4.2) es plano con respecto a las salidas F y G . Note que el sistema no lineal (4.4)

puede ser resuelto usando un método numérico iterativo, como el método de Newton-Raphson (ver [21]).

El siguiente Lema da las condiciones necesarias para calcular las raíces del sistema no lineal (4.4).

Lema 4.3.1. *Considere el siguiente conjunto de ecuaciones no lineales:*

$$\begin{aligned} L_x &= -v_x \exp \left[-\ln(2) (v_x^2 + v_y^2) \right] \\ L_y &= -v_y \exp \left[-\ln(2) (v_x^2 + v_y^2) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $L_x^2 + L_y^2 < \bar{L}^2$; con $\bar{L} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{e}} \cong 0.5151$ y $\bar{v} = 1/\sqrt{2 \ln(2)} \cong 0.849$. Entonces, hay un solo v_x y un solo v_y que satisfacen las ecuaciones anteriores, con $v_x^2 + v_y^2 < \bar{v}^2$ (Recuerde que $e = 2.71828$).

Demostración. Ver el Apéndice A.1. □

El Lema 4.3.1 proporciona las condiciones suficientes para asegurar que la función (4.5), dependiente de v_x y v_y , tenga una función inversa en alguna región restringida del espacio subyacente.

4.3.1. Enfoque de asignación de polos basado en platitud diferencial

Habiendo mostrado que el sistema (4.1) es un sistema plano con salidas planas definidas por las dos variables F y G , se procede a obtener los controladores u_x y u_y que permiten resolver el problema de seguimiento anteriormente mencionado. Para este propósito, se usa un enfoque basado en platitud en conjunción con una función de saturación. La función de saturación permite calcular las variables de control que satisfagan las condiciones del Lema 4.3.1.

Antes de resolver el problema de seguimiento, se introduce la siguiente definición:

Definición 4.3.2. *Sea $M > 0$ un número real estrictamente positivo. Se dice que $\sigma_M(w) : \Re \rightarrow \Re$ es una función de saturación lineal, si satisface:*

$$\sigma_M(w) = \begin{cases} w & \text{si } |w| \leq M \\ M \text{sign}(w) & \text{si } |w| > M \end{cases}$$

donde $\text{sign}()$ es la función signo.

Es posible usar otro tipo de función de saturación no lineal, pero se selecciona la función de saturación lineal porque es una función lineal localmente. Ahora se establece un marco de referencia para resolver el problema de control de seguimiento propuesto. Se desea que las salidas planas F y G , del sistema (4.2), sigan a $F_*(\tau)$ y $G_*(\tau)$; con $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$, donde esas señales de referencia satisfagan la inecuación: $|\ddot{F}_*| \leq \bar{k} < \bar{L}$ y $|\ddot{G}_*| \leq \bar{k} < \bar{L}$ para asegurar la validez de las condiciones establecidas en el Lema 4.3.1. Se define el error de seguimiento como:

$$e_x = F - F_*; \quad e_y = G - G_* \quad (4.6)$$

y las variables de entrada de control auxiliares como,

$$v_x = F - u_x; \quad v_y = G - u_y$$

Bajo este marco de referencia, el problema de control de seguimiento puede ser visto como el problema de encontrar las entradas de control auxiliares v_x y v_y , tal que ambos errores de seguimiento converjan a cero. La siguiente proposición da una solución retroalimentada al problema del seguimiento basada en el enfoque de platitud en conjunción con la función de saturación.

Proposición 4.3.1. *Sea $|\ddot{F}_*| \leq \bar{k}$ y $|\ddot{G}_*| \leq \bar{k}$, y sea $\{\bar{x}, \bar{y}, k_p, k_d, \bar{k}\}$ un conjunto de constantes positivas tales que:*

$$(\bar{x} + \bar{k})^2 + \lambda^2(\bar{y} + \bar{k})^2 < \bar{L}^2 \quad (4.7)$$

Suponga que v_x y v_y satisfacen:

$$\begin{aligned} v_x \exp[-\ln(2)(v_x^2 + v_y^2)] &= \sigma_{\bar{x}}(k_p e_x + k_d r_x) - \ddot{F}_* \\ \lambda v_y \exp[-\ln(2)(v_x^2 + v_y^2)] &= \sigma_{\bar{y}}(k_p e_y + k_d r_y) - \ddot{G}_* \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde r_x y r_y cumplen con las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{r}_x &= -r_x - \sigma_{\bar{x}}(k_p e_x + k_d r_x) \\ \dot{r}_y &= -r_y - \sigma_{\bar{y}}(k_p e_y + k_d r_y) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por lo tanto, los controladores auxiliares locales, asintóticos y exponenciales mencionados anteriormente estabilizan los errores de seguimiento en (4.6).

Demostración. Ver el Apéndice A.2. □

Vale la pena mencionar que el sistema en lazo cerrado es robusto con respecto a las pequeñas fricciones viscosas inherentes a un medio coloide. Esto puede ser probado mediante el recurso de la linealización tangente en la ecuación (A.5) del Apéndice.

4.4. Resultados de la simulación

Las simulaciones fueron realizadas para evaluar el desempeño de la estrategia de control propuesta, para tres tareas de seguimiento de trayectoria comunes. La primera tarea consiste en seguir una línea recta pasando a través del origen; la segunda tarea consiste en seguir un camino elíptico con centro en el origen. En la tercera tarea se realizó una maniobra de transferencia para llevar a la partícula desde su posición original en reposo a una posición final deseada en reposo. Los parámetros físicos fueron tomados del experimento real presentado en [50, 37]: $a = 1\mu\text{m}$, $b = 1\mu\text{m}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $p_0 = 1 \times 10^{-5}\text{nJ}$ y $m = 1 \times 10^{-12}\text{kg}$. En el Apéndice (A.4 y A.5) se explica como se aplicó el conocido método de Newton-Raphson para encontrar las v_x y v_y necesarias, que satisfagan a (4.8).

4.4.1. Seguimiento de una línea recta

Se desea que la partícula se mueva en línea recta pasando a través del origen. También, la partícula seguirá esta línea a una velocidad constante. La trayectoria lineal, en coordenadas reales, es dada como

$$F_*(t) = \kappa t; \quad G_*(t) = \kappa t,$$

donde $\kappa = 0.1125\text{m/s}$ y $t \in [0.8 \times 10^{-4}\text{s}]$. Claramente, para este caso se tiene que $\ddot{F}_* = 0$, $\ddot{G}_* = 0$, $\lambda = 1$. Los parámetros de control del controlador normalizado se fijaron como $\bar{x} = \bar{y} = 0.5$ para asegurar la condición (4.7) el resto de los parámetros fueron fijados como: $k_p = 0.81$ y $k_d = 1.27$. La Figura 4.2 muestra las trayectorias de lazo cerrado para la posición y las variables de control de entrada en las coordenadas reales del sistema de la pinza óptica. Se fijaron las condiciones iniciales para el sistema como: $x(0) = 0.07 \times 10^{-4}\text{m}$, $y(0) = -0.03 \times 10^{-4}\text{m}$, $\dot{x}(0) = 0.1\text{m/s}$ y $\dot{y}(0) = 0$. De la Figura 4.2, se puede ver que incluso cuando estas condiciones no están lo bastante cerca al origen de la señal de seguimiento, el rendimiento del sistema sigue siendo bastante satisfactorio.

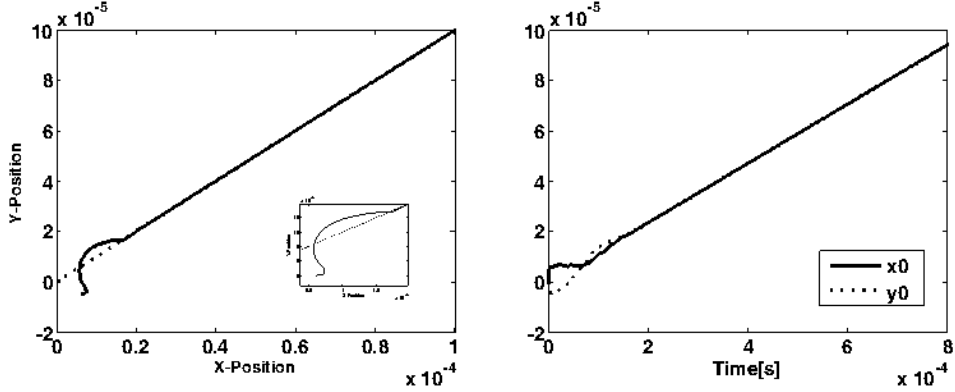


Figura 4.2: Seguimiento retroalimentado de una línea recta.

4.4.2. Seguimiento una trayectoria elíptica

Ahora se desea mover la partícula sobre una trayectoria elíptica, cuyos ejes principales corresponden con el actual sistema de ejes de coordenadas con el centro situado en el origen. Las trayectorias de salida planas deseadas son especificadas como,

$$F_*(t) = A \cos \omega t; \quad G_*(t) = B \sin \omega t.$$

donde $A = 3 \times 10^{-5} \text{m}$, $B = 2.5 \times 10^{-5} \text{m}$, $\omega = 0.017 \text{rad/s}$ y $t \in [0, \omega/2\pi]$. A fin de satisfacer la condición (4.7) se fijan los parámetros de control del controlador normalizado como $\bar{x} = \bar{y} = 0.3$. Los restantes parámetros, fueron fijados como en el primer experimento simulado. La Figura 4.3 muestra las coordenadas de posición de las pinzas ópticas. En este caso se fijan las condiciones iniciales como $x(0) = 2.1 \times 10^{-5} \text{m}$, $y(0) = 0.5 \times 10^{-5} \text{m}$, $\dot{x}(0) = 0.1 \text{m/s}$ y $\dot{y}(0) = 0$. De la Figura 4.3, se puede ver que a pesar de que el movimiento de la trampa comienza significativamente lejos de la trayectoria deseada, el rendimiento del sistema es lo suficientemente bueno.

4.4.3. Manipulación desde una posición inicial en reposo a una posición final en reposo

La manipulación puede llevarse a cabo siguiendo una trayectoria suave. Es decir, se desea mover la partícula desde una posición inicial en reposo a una

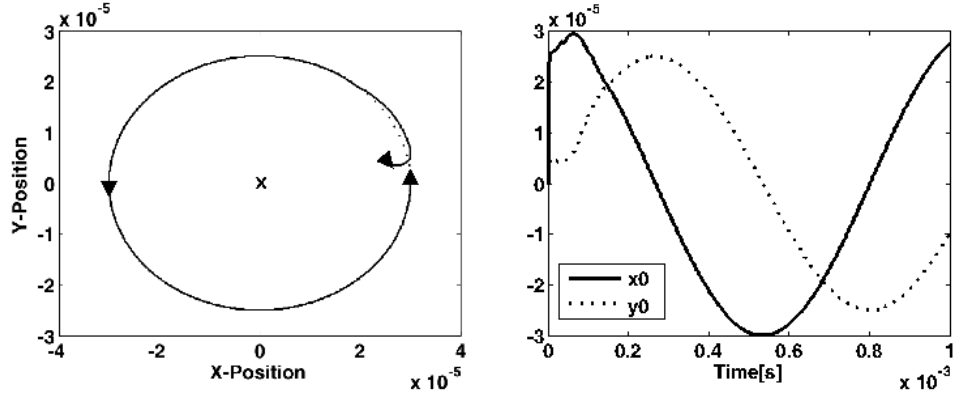


Figura 4.3: Controlador retroalimentado para el seguimiento de una trayectoria elíptica.

posición final en reposo deseada dentro de un intervalo de tiempo finito. Esta tarea fue implementada usando las siguientes funciones:

$$Z_k(t) = Z_k(t_i) + [Z_k(t_f) - Z_k(t_i)] \psi(t, t_i, t_f); k = 1, 2.$$

donde $\psi(t, t_i, t_f)$ es un polinomio normalizado en la variable de tiempo t satisfaciendo:

$$\psi(t, t_i, t_f) = 0, \psi(t, t_i, t_f) = 1.$$

Se describe un polinomio de interpolación suave entre 0 y 1 como sigue:

$$\psi(t, t_i, t_f) = \left(\frac{t - t_i}{T} \right)^5 \sum_{i=1}^6 (-1)^{i-1} r_i \left(\frac{t - t_i}{T} \right)^{i-1}$$

con $r_1 = 252$, $r_2 = 1050$, $r_3 = 1800$, $r_4 = 1575$, $r_5 = 700$ y $r_6 = 126$. Para propósitos de la implementación se fijan $Z_1(t) = F_*(t)$ y $Z_2(t) = G_*(t)$, con $t_i \leq t \leq t_f$ y $t_i < t_f$. El experimento se llevó a cabo con los parámetros de la Tabla 4.2.

En aras de la simplicidad, los parámetros de control fueron tomados del anterior experimento. La Figura 4.4 muestra la respuesta de lazo cerrado para la manipulación de la posición. Se fijan las condiciones iniciales como $x_0 = 3 \times 10^{-6}$ m, $y_0 = 7 \times 10^{-6}$ m, $\dot{x}_0 = 0$ m/s y $\dot{y}_0 = 0$ m/s. Como se puede ver en la Figura 4.4 la manipulación es completada satisfactoriamente.

4.4. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

	<i>Inicial</i>	<i>Final</i>
t	0s	2.3×10^{-3} s
F_*	0m	3×10^{-5} m
G_*	0m	4.5×10^{-5} m

Tabla 4.2: Parámetros para la simulación del experimento de manipulación desde una posición inicial a una final en reposo usando el enfoque de *plattitud diferencial*.

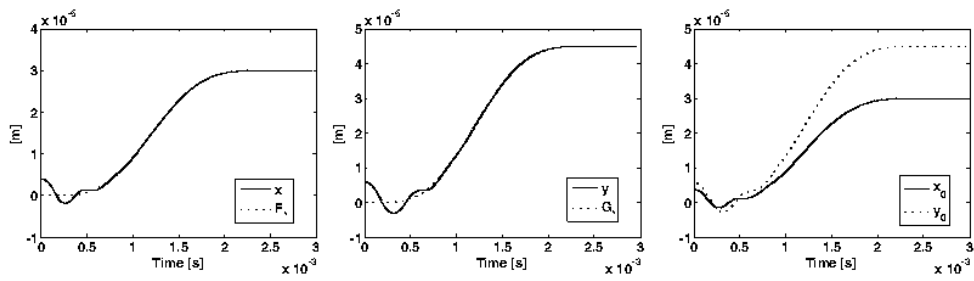


Figura 4.4: Respuesta de lazo cerrado del controlador retroalimentado para la manipulación de posición.