

# Capítulo 2

## Estado del Arte

### 2.1. Antecedentes y desarrollo de las pinzas ópticas

Las trampas ópticas y la manipulación de partículas se dan a conocer a partir de la invención del láser y que actualmente juega un mayor rol en el estudio de partículas en áreas como la física, química y biología. Se sabía de la física y de la historia temprana de la óptica, que la luz tenía momento lineal y momento angular, por lo tanto, podrían ejercer presión de radiación y torque en objetos físicos. Estos efectos fueron tan pequeños que no fueron fáciles de detectar. El estudio de la presión de radiación se consideró interesante en física, pero no muy práctico a principios del siglo XX cuando E. F. Nichols y P. N. Lebedev lograron detectar experimentalmente la presión de radiación en objetos macroscópicos y gases absorbentes [14]. El tema esencialmente cayó en el olvido hasta la invención del láser en 1960.

La detección de la dispersión óptica y las fuerzas de gradiente sobre partículas fue reportada por vez primera en el año de 1970 por Arthur Ashkin [12], científico norteamericano que trabajaba en los laboratorios Bell en Estados Unidos de Norteamérica, quien diseñó un experimento para medir la presión de radiación ejercida por un láser continuo. Para evitar efectos de calentamiento debidos a la absorción de la luz, Ashkin utilizó microesferas transparentes de látex suspendidas en agua, cuyos diámetros iban desde fracciones de micrómetro hasta varios micrómetros. No sólo encontró que la presión de radiación afectivamente era capaz de empujar a las partículas en la dirección de propagación del haz del láser, sino que también observó que, simultáneamente, las partícu-

## 2.1. ANTECEDENTES Y DESARROLLO DE LAS PINZAS ÓPTICAS

---

las eran atraídas hacia el centro del haz, en la dirección transversal. Partiendo de estos resultados Ashkin decidió colocar dos haces de luz propagándose en direcciones opuestas a lo largo de un eje horizontal, de modo que las fuerzas ejercidas por cada uno de los láseres se equilibraran entre sí en algún punto intermedio, donde la partícula quedaría atrapada por la luz. Estos descubrimientos marcaron el inicio de lo que hoy en día se ha convertido en una de las áreas de mayor impacto en la ciencia y la tecnología: la micromanipulación óptica.

En la década de los setenta y principios de los ochenta del siglo XX, tanto Ashkin y su equipo de colaboradores como otros grupos científicos alrededor del mundo centraron su atención en comprender mejor los fundamentos físicos del fenómeno y en desarrollar nuevas técnicas de captura óptica. Se realizaron diversos experimentos de “levitación óptica” con partículas micrométricas de diferentes materiales y propiedades ópticas.

A pesar de estos avances, las aplicaciones de las técnicas de captura óptica aún eran bastante limitadas. Sin embargo, Ashkin y su equipo reportaron en 1986, la primera observación de una trampa óptica [15], que es un láser altamente enfocado capaz de levitar partículas. Al final de la década de los ochenta, Ashkin y sus colegas, entre los que destacan Steve Chu<sup>1</sup>, aplicaron esta nueva tecnología a la biología, usándola para atrapar un virus de mosaico del tabaco individual y la bacteria *escherichia coli*. No sólo lograron atrapar y manipular bacterias, sino que también pudieron mantenerlas en la trampa óptica el tiempo suficiente para poder ver su reproducción sin daño alguno [74].

A través de la década de los 90's y después, investigadores como Steven Block [18] y James Spudich fueron los pioneros en el uso de la trampa óptica para caracterizar los motores biológicos a escala molecular. En el 2004 las pinzas ópticas hicieron el salto desde las grandes, complicadas y costosas máquinas a mucho más simples, pequeñas y recientemente sistemas portables con la introducción de los DLBT (Diode Laser Bar Trapping); sistemas liderados por Applegate et al. en Colorado School of Mines [11].

### 2.1.1. Descripción general

Las pinzas ópticas son capaces de manipular partículas dieléctricas tanto de tamaño nanométrico como micrométrico ejerciendo fuerzas extremadamente pequeñas por medio de un haz láser altamente enfocado [1]. El haz es típicamente enfocado es enviado a través de un objetivo microscópico. El punto más

---

<sup>1</sup>Premio Nobel de física 1997 por sus contribuciones el enfriamiento y captura de átomos con luz.

angosto del haz enfocado, es conocido como la cintura del haz, contiene un gradiente de campo eléctrico muy potente, Figura 2.1.

La presión de radiación cercana al foco se eleva debido a la fuerza de dispersión

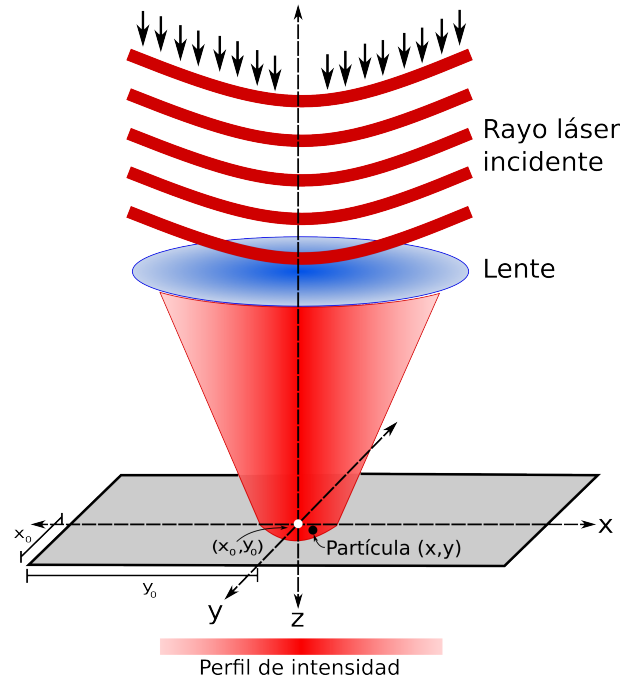


Figura 2.1: Una pinza óptica es un dispositivo capaz de manipular micro o nanopartículas con gran precisión y sin infringirles daño.

la cual es proporcional a la intensidad de la luz y esta en la misma dirección que la luz incidente. La fuerza del gradiente es proporcional al gradiente espacial de la intensidad de la luz [22].

Resulta ser que las partículas dieléctricas son atraídas a lo largo del gradiente a la región del campo eléctrico más fuerte, el cuál es el centro del haz. La luz láser también tiende a ejercer una fuerza sobre las partículas en el haz a lo largo de la dirección de propagación del haz. Esto es fácil de comprender si se imagina a la luz como un grupo de pequeñas partículas, cada una de ellas ejerciendo presión sobre la pequeña partícula dieléctrica en su camino. Esto es conocido como la fuerza de dispersión y cuyo resultado es que la partícula es desplazada ligeramente abajo de la posición exacta de la cintura del haz.

La mayoría de las trampas ópticas tienen una intensidad con perfil gaussiano. En este caso, si la partícula es desplazada desde el centro del haz, la

## 2.1. ANTECEDENTES Y DESARROLLO DE LAS PINZAS ÓPTICAS

---

partícula tiene una fuerza neta que la regresa al centro de la trampa debido a que haces más intensos impelen un cambio de momento mayor hacia el centro de la trampa que los haces menos intensos, lo cuales impelen un cambio de momento menor lejos del centro de la trampa. El cambio de momento neto o fuerza, regresa a la partícula al centro de la trampa. Si la partícula está localizada en el centro del haz, entonces los rayos de luz individuales son refractados a través de la partícula simétricamente, resultando esto en una fuerza lateral nula. La fuerza neta en este caso está a lo largo de la dirección central del eje de la trampa, la cual cancela la fuerza de dispersión del rayo láser. La anulación de esta fuerza de gradiente central del eje con la fuerza de dispersión es lo que causa que la partícula se mantenga estable ligeramente alejada de la cintura del haz.

### 2.1.2. Composición básica de una pinza óptica

En la Figura 2.2 se muestra la composición básica de una pinza óptica con un solo haz. El haz proveniente de un láser que es expandido con un par de lentes con el fin de que el haz llene completamente la apertura de salida del objetivo de microscopio.

Se usan un par de lentes para controlar la dirección del haz, el cual posteriormente es desviado hacia el objetivo de microscopio de  $100x$  mediante un espejo dicróico. De esta manera se logra tener un haz altamente enfocado sobre la muestra, la cual reposa en una montura con desplazamiento en los ejes coordenados  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

La observación de la captura de la partícula se puede realizar a través una cámara CCD cuando la partícula es iluminada con una lámpara convencional de luz blanca. Se utiliza un lente para enfocar la imagen de la escena a la cámara. La partícula es llevada al foco de la trampa mediante desplazamientos verticales ya que el objetivo permanece estático. Así es como las partículas son manipuladas en un contexto real.

### 2.1.3. Aplicaciones

Las pinzas ópticas son dispositivos altamente sensibles y capaces de manipular y detectar desplazamientos nanométricos para partículas [49]. Por tal razón son utilizadas para manipular y estudiar moléculas por la interacción por ejemplo con una esfera de látex que ha sido adjuntada a una partícula. Las proteínas, enzimas y el ADN son comúnmente estudiadas de esta forma, al pegarles con biotina un elemento manipulable por la pinza óptica.

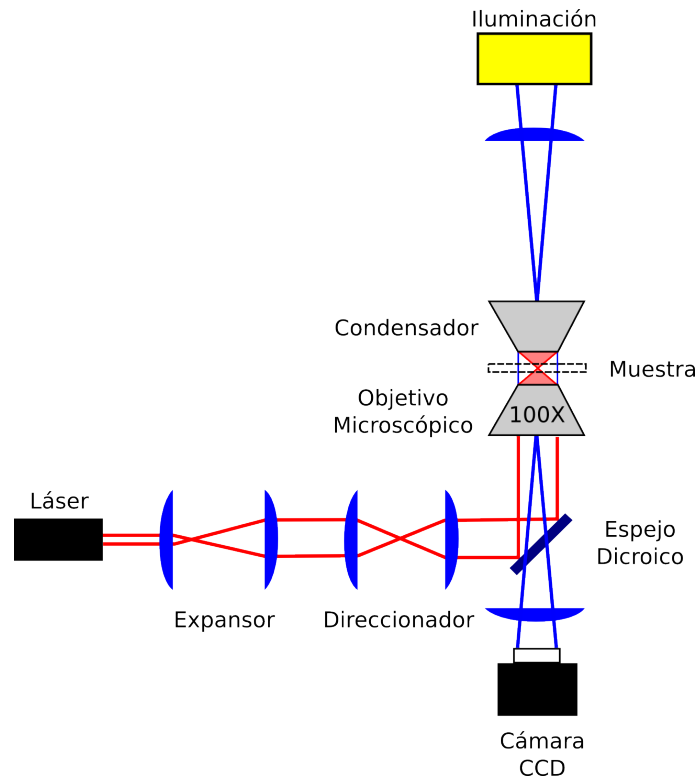


Figura 2.2: Composición básica de una pinza óptica.

En la actualidad las pinzas ópticas se han convertido en una útil herramienta en diversas disciplinas como lo son: medicina, biofísica, biología molecular, biotecnología, biología celular, óptica.

La PO ha sido ampliamente usada por físicos, biólogos y químicos entre otros, en diversas aplicaciones, la mayoría de ellas basadas en la necesidad de atrapar o mover, una partícula desde una posición a otra. Por ejemplo, la PO ha sido usada para atrapar una partícula de zymosan que se pone en contacto con un macrófago con el fin de medir el efecto de citocalasina D en un fagocitosis a través del citoesqueleto [2]. En Henderson et al. [30] una PO con rayo dual ha sido usado para medir la distancia de coeficientes de fricción coloidal con resultados en concordancia con el Número de Reynolds pequeño. Otra útil y común aplicación propuesta por Evans et al. es presentada en [24], y usa la PO para estirar microtubos sobre su eje principal mediante la fijación de dos cuentas de sus extremos, el cual es un procedimiento estándar para medir las fuerzas estáticas en los tubos extendidos, así como los efectos dinámicos que pasan

## 2.1. ANTECEDENTES Y DESARROLLO DE LAS PINZAS ÓPTICAS

---

cuando estos estiramientos se llevan a cabo a altas velocidades. También, la PO ha sido usada para crear canales 1D, los cuales ya habían sido sintetizados como poros casi cilíndricos en material zeolítico [76], creando estructuras de canales en forma de anillo, donde las partículas coloidales son atrapadas y distribuidas para modelar la reacción catalítica de materiales zeolíticos.

Otros ejemplos de la aplicación de las pinzas ópticas son:

### **Motores moleculares**

Los motores moleculares son ubicuos en biología, y son los responsables de la locomoción y la acción mecánica dentro de la célula. Las trampas ópticas permitieron a biofísicos observar las fuerzas y la dinámica de los motores a una escala nanométrica o de molécula-única; la trampa óptica de espectroscopia de fuerza ha permitido desde entonces llegar a un mayor entendimiento de la naturaleza estocástica de estas fuerzas generadoras en la molécula [46, 48].

### **Clasificación celular**

Las pinzas ópticas han probado ser útiles también en otras áreas de la Biología. Por ejemplo, en 2003 las técnicas de las pinzas ópticas fueron aplicadas en el campo de la clasificación celular (cell sorting); creando una gran intensidad óptica sobre el área con muestra microbiológica, la célula puede ser clasificada por sus características ópticas intrínsecas [41, 34, 48].

### **Escalpelo óptico**

Otro ejemplo es el escalpelo óptico, el cual se utiliza para realizar fertilización in vitro. El escalpelo óptico consiste en enviar un pulso controlado y corto de un rayo láser de muy alta concentración y longitud de onda ultravioleta que perforará y creará un agujero en el óvulo con una gran precisión. Con una pinza óptica se atrapa un espermatozoide el cual es arrastrado hasta el agujero hecho en el óvulo, para realizar la fertilización [74].

### **Estiramiento de una molécula de ácido desoxirribonucleico (ADN)**

Esto se puede lograr adhiriendo una esfera de látex a uno de los extremos de la molécula, para luego atrapar la esfera con una pinza óptica, después se usa la fuerza hidrodinámica de un fluido para estirar la molécula de ADN. Otra forma es utilizar dos pinzas ópticas, una que se mantiene fija y la otra que se mueve,

cada una con una esfera de látex que esta adherida a los extremos de la molécula de ADN (Figura 2.3). De esta forma se pueden determinar las propiedades mecánicas del ADN al medir la fuerza necesaria para producir este estiramiento [74].

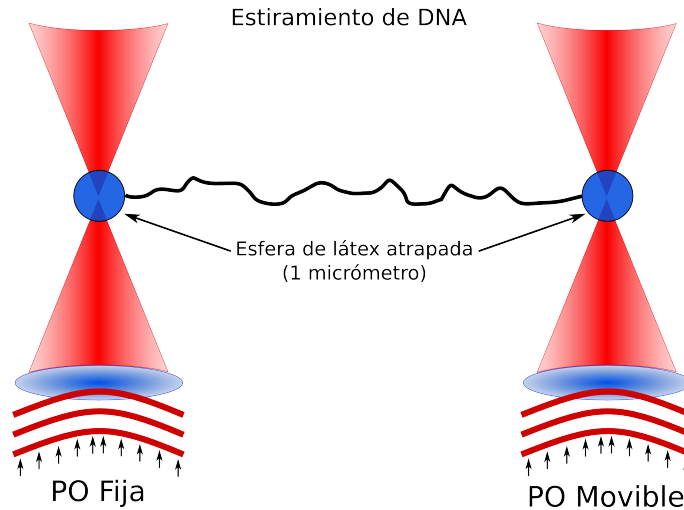


Figura 2.3: En los extremos de una molécula de ADN son adheridas esferas de látex las cuales son atrapadas y manipuladas usando pinzas ópticas.

Para mediciones científicas cuantitativas, la mayoría de las trampas ópticas son operadas de tal forma que la partícula que es un dieléctrico raramente se mueve lejos del centro de la trampa. La razón de esto es que la fuerza aplicada a la partícula es lineal con respecto a su desplazamiento desde el centro de la trampa mientras el desplazamiento sea pequeño.

## 2.2. Fundamentos teóricos

### 2.2.1. Teoría de Lyapunov

En los sistemas de control una de las interrogantes más importantes consiste en saber si el sistema es estable o no, debido a que si el sistema de control es inestable, típicamente éste es inútil.

A finales del siglo XIX, el matemático Ruso Aleksandr Mikhailovich Lyapunov introdujo la aproximación más útil y general para el estudio de la estabilidad en los sistemas no-lineales en su trabajo denominado “El problema general

de la estabilidad en el movimiento” (*The General Problem of Motion Stability*) [40], en el que incluyó dos métodos para el análisis de la estabilidad (denominados, Método de linealización y Método directo). El método de linealización describe la estabilidad local de los sistemas no-lineales alrededor de un punto de equilibrio a partir de las propiedades de estabilidad de su aproximación lineal. Por otro lado, el método directo no se restringe a un movimiento local, y determina las propiedades de estabilidad del sistema partiendo de la construcción de una función escalar de energía examinando su variación en el tiempo. En la actualidad, estos métodos son de gran interés en la Teoría de Control debido a que el método de linealización es la justificación teórica de la estabilidad en los sistemas lineales mientras que el método directo es una de las herramientas más importantes para el análisis y diseño de sistemas no-lineales, por lo que ambos constituyen la *Teoría de estabilidad de Lyapunov*.

Los resultados presentados en esta sección son ampliamente conocidos y empleados en la literatura del control no-lineal [68, 33, 32]. Por lo que el propósito de este apartado no es presentar un tratado sobre la Teoría de Lyapunov, sino mostrar algunas de las definiciones y conceptos básicos. Incluyéndose únicamente con el propósito de crear un texto de autocontenido, ya que son esenciales para los desarrollos de este proyecto de investigación.

Considérese un sistema autónomo de la forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ . De manera mas general,  $x$  denota un conjunto de coordenadas locales en un espacio  $m$ -dimensional  $\mathcal{X}$ . Además, suponemos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente continua en el sentido de Lipschitz en el dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ , implicando la existencia y unicidad de soluciones.

**Definición 2.2.1. Punto de Equilibrio** [68, Def. 3.2]

Un estado  $x^*$  es un estado de equilibrio (o punto de equilibrio) del sistema si alguna solución  $x(t)$  es igual a  $x^*$  y permanece igual a  $x^*$  para todo el tiempo futuro. Matemáticamente esto significa que el vector constante  $x^*$  satisface:

$$0 = f(x^*) \quad (2.2)$$

con,  $f(x)$  de la forma (2.1)

Lo anterior significa que los puntos de equilibrio se determinan solucionando la ecuación algebraica (2.2).

**Definición 2.2.2.** [33, Def. 3.1]

El punto de equilibrio del sistema (2.1) es:



- **Estable**, si para cada  $\epsilon > 0$  hay un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$$

- **Inestable**, si no es estable.
- **Asintóticamente estable**, si el punto de equilibrio es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- **Exponencialmente estable**, si existen dos números estrictamente positivos independientes del tiempo  $\alpha$  y  $\lambda$  tal que:

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}, \forall t > 0$$

en alguna bola  $B$  alrededor del origen.

Esto significa que el vector de estado de un sistema exponencialmente estable converge al origen más rápido que una función exponencial. El número positivo  $\lambda$  es llamado razón de convergencia exponencial.

Las definiciones anteriores corresponden a una propiedad local del sistema alrededor del punto de equilibrio. Por tanto, los conceptos de estabilidad llegan a ser globales cuando se satisfacen las condiciones correspondientes para cualquier estado inicial.

### Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov es una extensión matemática de las observaciones físicas, es decir, si la energía total de un sistema mecánico (o eléctrico) se disipa de manera continua, entonces dicho sistema, ya sea lineal o no lineal, se estabiliza en un punto de equilibrio, concluyendo que la estabilidad de un sistema se puede determinar con la variación de una sola función escalar.

Las siguientes definiciones y teoremas son parte importante para el estudio de la estabilidad en los sistemas y resumen de manera general el método directo de Lyapunov.

#### **Definición 2.2.3. Funciones definidas o semidefinidas [68, Def. 3.7]**

Una función escalar  $V(x)$  se dice localmente definida positiva si  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$ . De manera similar,  $V(x)$  es definida negativa si  $-V(x)$  es definida positiva. Además, si  $V(x)$  es igual a cero para  $x \neq 0$ , se puede decir

que la función es semi-definida positiva o negativa:

Si  $V(0) = 0$  y  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$  se le llama semi-definida positiva; de la misma manera  $V(x)$  es semi-definida negativa, si  $-V(x)$  es semi-definida positiva.

**Definición 2.2.4. Función de Lyapunov** [68, Def. 3.8]

$V(x)$  se llama función de Lyapunov para el sistema de la forma (2.1)

- Si en una bola  $B$  que contiene el origen,  $V(x)$  es definida positiva y tiene derivada parcial continua.
- Si la derivada con respecto al tiempo a lo largo de cualquier trayectoria de estado del sistema (2.1) es semi-definida negativa, es decir:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$$

ó bien,

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

Los siguientes teoremas pueden ser usados para el análisis de estabilidad local o global.

**Teorema 2.2.1. Estabilidad local** [68, Teo. 3.2]

Si en una bola  $B$  existe una función escalar continuamente diferenciable  $V(x)$  tal que:

- $V(x)$  sea definida positiva (localmente en  $B$ )
- $\dot{V}(x)$  sea semi-definida negativa (localmente en  $B$ )

Entonces, el punto de equilibrio  $\mathbf{0}$  es **estable**.

Más aun, si la derivada  $\dot{V}(x)$  es definida negativa localmente en  $B$ , es decir,

$$V(x) < 0 \text{ en } B - \{0\}$$

entonces, el punto de equilibrio  $\mathbf{0}$  es **asintóticamente estable**.

**Teorema 2.2.2. Estabilidad Global** [68, Teo. 3.3]

Supongamos que existe una función escalar  $V$  del estado  $x$  con primera derivada continua tal que:

- $V(x)$  es definida positiva

- $\dot{V}(x)$  es definida negativa
- $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$

Entonces, el punto de equilibrio en el origen es **globalmente asintóticamente estable**.

### Teoremas de conjuntos invariantes

Krasovskii-LaSalle extendieron el análisis de estabilidad anterior cuando  $\dot{V}(x)$  es sólo semi-definida negativa. El punto central en estos teoremas es el conjunto invariante, el cual es una generalización del concepto de punto de equilibrio.

#### **Definición 2.2.5. Conjuntos invariantes** [68, Def. 3.9]

Un conjunto  $S$  es un **conjunto invariante** para un sistema dinámico si para cada trayectoria del sistema la cual comienza desde un punto en  $S$  permanece en  $S$  para todo el tiempo.

#### **Teorema 2.2.3. Principio de invariancia de LaSalle** [33, Teo. 3.4]

Sea  $\Omega$  un conjunto compacto (cerrado y acotado) con la propiedad de que cada solución del sistema (2.1) que comienza en  $\Omega$  permanece en  $\Omega$  para todo el tiempo. Sea  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ .

Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Sea  $M$  el mayor conjunto invariante, entonces toda solución que comienza en  $\Omega$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Cuando  $V(x)$  es definida positiva los siguientes dos corolarios son válidos extendiendo los teoremas de estabilidad.

#### **Corolario 2.2.1.** [33, Cor. 3.1] **Barbashin-LaSalle**

Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de (2.1). Sea  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida positiva, continuamente diferenciable en un dominio  $D$  que contiene al origen  $x = 0$ , tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $D$ . Sea  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $S$ , entonces, el origen es **asintóticamente estable**.

#### **Corolario 2.2.2.** [33, Cor. 3.2] **Krasovskii-LaSalle**

Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de (2.1). Sea  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida positiva continuamente diferenciable y radialmente no acotada, tal que

$\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathfrak{R}^n$ . Sea  $S = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $S$ , entonces, el origen es **asintóticamente estable globalmente**.

Es importante mencionar que cuando  $\dot{V}(x)$  es definida negativa,  $S = \{0\}$ , entonces los corolarios 2.2.1 y 2.2.2 coinciden con los teoremas 2.2.1 y 2.2.2 respectivamente.

### 2.2.2. Platitud diferencial

La platitud diferencial es una propiedad de algunos controladores de sistemas dinámicos los cuales permiten trivializar las tareas de planeación de trayectoria, sin resolver ecuaciones diferenciales. La propiedad de platitud permite una completa parametrización de todas las variables del sistema (de estado, entradas y salidas) en términos de un conjunto finito de variables independientes, llamadas *salidas planas*, y un número finito de sus derivadas [66].

Platitud diferencial es una idea natural asociada con sistemas de ecuaciones indeterminados. Representa la posibilidad de parametrizar completamente cada variable del sistema en términos de un conjunto finito de variables *libres* en el sistema. A fin de entender las características básicas de la platitud, consideramos un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas de  $n + m$  incógnitas

$$\zeta = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (x, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (x, f),$$

escrito como

$$Ax + Bf = 0, \quad B \neq 0, \quad \text{rango}[A, B] = n$$

Asumimos que  $A$  es invertible y que  $B$  es de rango completo  $m$ . Claramente, todas las soluciones de  $x$  podrían ser escritas en términos del vector de incógnitas  $f$  como

$$x = -A^{-1}Bf$$

En otras palabras, todas las soluciones son parametrizables en términos de  $f$ . Por otra parte, ya que la matriz  $B$  de  $n \times m$  es de rango completo, la variable  $f$  es expresable en términos de las componentes de  $x$ , como en la formula

$$f = -(B^T B)^{-1} B^T Ax$$

El sistema linear  $[A, B]\zeta = 0$  exhibe un privilegiado conjunto de variables, es decir,  $f = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ , el cual es un conjunto de variables *internas* del sistema de ecuaciones capaz de hacer que  $x$  tome cualquier valor arbitrario finito. Suponga que la matriz  $A$  es no invertible, se dice que esta en rango  $n - m$ . Entonces, en general,  $f$  ya no es libre de tomar cualquier valor, ya que se convertirá en cero para cualquier  $x$  que se desee, el cual se encuentra en el espacio nulo de  $A$ . Como una consecuencia, ya no es cierto que los componentes de  $x$  puedan ser completamente parametrizados en términos de  $f$ . La propiedad de hacer que  $x$  tome cualquier valor, mediante la adecuada elección de  $f$ , se pierde. Note que, en la discusión de arriba, el rol del vector  $f$  podría ser sustituido, en principio, por otro subconjunto de  $m$  variables en  $\zeta$  por lo cual, la correspondiente matriz  $A$  es invertible y la correspondiente matriz  $B$  es de rango completo.

### Seguimiento de trayectoria en sistemas no lineales

El seguimiento de trayectoria en sistemas no lineales constituye el problema más desafiante e interesante en control. Ya que todos los sistemas reales son, en gran medida, no lineales, y el objetivo de estabilización del sistema puede lograrse siguiendo cuidadosamente las trayectorias adecuadas. Considere el siguiente sistema

$$\dot{x} = f(x, u), x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^m \quad (2.3)$$

Suponga un estado nominal deseado y su correspondiente entrada de control nominal, de la forma

$$x = x_*(t), u = u_*(t) \quad (2.4)$$

La linealización tangencial del sistema no lineal alrededor de las trayectorias dadas por el sistema lineal variante en el tiempo

$$\dot{x}_\gamma = A(t)x_\gamma + B(t)u_\gamma \quad (2.5)$$

donde

$$x_\gamma = x - x_*(t), u_\gamma = u - u_*(t) \quad (2.6)$$

y

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_*(t), u_*(t)), B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_*(t), u_*(t)) \quad (2.7)$$

El problema de seguimiento de trayectoria es ahora localmente trasladado a un problema de estabilización asintótico (para el punto equilibrio  $x_\gamma = 0$ ) para el sistema linealizado variante en el tiempo. Se asume que el sistema es

plano, así el diseño del controlador es facilitado enormemente, ya que el sistema es equivalente. Resolviendo el problema de estabilización para el sistema transformado, permite tener en términos de las variables de estado originales, un controlador variante en el tiempo lineal de la forma

$$u_\gamma = -K(t)x_\gamma(t) \quad (2.8)$$

La ley de control a ser aplicada al sistema no lineal es dada por

$$u = u_*(t) + u_\gamma(t) = u_*(t) - K(t)x_\gamma(t) \quad (2.9)$$

Esta ley de control garantiza la estabilidad asintótica y localmente del sistema no lineal hacia las trayectorias nominales deseadas  $x = x_*$  y  $u = u_*(t)$ .