Apéndice A

Demostraciones, pruebas y comentarios

A.1. Demostración del Lema 4.3.1

Demostración. La idea detrás de la demostración es estimar la región donde las funciones (4.5) puedan ser invertibles. Por simplicidad, se fija $q = (x, y)$ y se define la siguiente función como:

$$H(q) = \begin{bmatrix} f(q) \\ g(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \exp\left[-\ln(2)\,(x^2 + y^2)\right] \\ y \exp\left[-\ln(2)\,(x^2 + y^2)\right] \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

Note que $H(0) = 0$.

Ahora, recurriendo al cálculo elemental, se puede mostrar que la función (A.1) tiene una función inversa bien definida siempre que la siguiente matriz sea definida por

$$\nabla_q H(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f & \frac{\partial}{\partial y} f \\ \frac{\partial}{\partial x} g & \frac{\partial}{\partial y} g \end{bmatrix} = 2^{-(x^2+y^2)} \begin{bmatrix} 1 - x^2 \log 4 & -xy \log 4 \\ -xy \log 4 & 1 - y^2 \log 4 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

y sea no singular en alguna región $(x, y) \in S \subset \Re^2$. Para aplicar este resultado, se tiene que $\det(H(q)) = 2^{-2(x^2+y^2)}(1 - (x^2 + y^2) \log 4)$, el cual, es no singular en el conjunto S definido como:

$$S = \{q = (x, y) : (x^2 + y^2) < \overline{v}^2 \widehat{=} \frac{1}{\log 4}\}. \tag{A.3}$$

Para asegurar que el sistema de ecuaciones $H(q) = L \widehat{=} [L_x, L_y]^T$ tiene una única solución, q, con $q \in S$, es suficiente que $L_x^2 + L_y^2 < L^2 = \overline{v}^2/e$. De hecho, esto se deduce del hecho de que la función $\|H(q)\|$ tiene un mínimo local en el origen $q = 0$ y su correspondiente máximo es dado por los puntos en el conjunto $\partial S = \{q : (x^2 + y^2) = \overline{v}^2\}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|H(q)\| < \overline{L}^2 \widehat{=} \max_{q \in S} \|H(q)\| = \\ \max_{q \in \partial S}(x^2 + y^2) \exp\left[-\ln(4)\,(x^2 + y^2)\right] = \\ \overline{v}^2 \exp[-1] \end{aligned} \tag{A.4}$$

define un conjunto convexo. Consecuentemente, $H(q) = L$; con $\|L\| < \overline{L}$ implica que hay una sola $q \in S$. Esto significa que se puede encontrar siempre un sólo punto $q \in S$, tal que $H(q) = L$. $\square$

A.2. Demostración de la Proposición 4.3.1

Demostración. Del Lema 4.3.1, se tiene que la expresión de control implícita dada por (4.8) esta bien definida. Por lo tanto, hay una sola υ_x y υ_y dentro de la región $\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 < \overline{v}^2$ que satisface (4.8). En otras palabras, se puede decir que siempre se encontrará una sola v_x y una sola v_x que cumplan con (4.8).

Diferenciando los dos errores de seguimiento (4.6) dos veces con respecto al tiempo, y después usando la expresión dada en (4.4), se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{e}_x - \ddot{F}_* = \upsilon_x \mathrm{e}^{-\ln(2)\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right)} \\ \ddot{e}_y - \ddot{G}_* = \lambda \upsilon_y \mathrm{e}^{-\ln(2)\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right)} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Sustituyendo (4.8) en (A.5), se tienen las siguientes ecuaciones dinámicas de error:

$$\ddot{e}_x + \sigma_{\overline{x}}(k_p e_x + k_d r_x) = 0; \quad \text{y} \quad \ddot{e}_y + \sigma_{\overline{y}}(k_p e_y + k_d r_y) = 0, \tag{A.6}$$

con

$$\begin{aligned} \dot{r}_x = -r_x - \sigma_{\overline{x}}(k_p e_x + k_d r_x) \\ \dot{r}_y = -r_y - \sigma_{\overline{y}}(k_p e_y + k_d r_y) \end{aligned} \tag{A.7}$$

Por lo tanto, ambos errores de seguimiento convergen asintótica, global y localmente a cero (ver apéndice A.3). $\square$

Note que las señales r_x y r_y son las estimaciones de la velocidad y posición, horizontal y vertical respectivamente. Entonces, en la estrategia de control propuesta no hay necesidad de medir la velocidad real de la PO. Sin embargo, si se desea sintetizar una ley de control simple, sólo se necesita utilizar los valores reales de $\dot{e}_x$ y $\dot{e}_y$ en lugar de los estimados.

A.3. Prueba de estabilidad de los sistemas (A.6) y (A.7)

Demostración. Por simplicidad, sólo se considera el caso cuando $k_p = k_d = 1$. Entonces la estabilidad de (A.6) y (A.7) puede ser analizada en términos de la estabilidad del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\sigma_{\overline{x}}(x + r) \\ \dot{r} &= -r - \sigma_{\overline{x}}(x + r) \end{aligned} \tag{A.8}$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^{x+\dot{x}} \sigma_{\overline{x}}(s)ds + \frac{1}{2}r^2 \tag{A.9}$$

Note que el segundo término de V es una función estrictamente positiva. Se deduce de la definición de la función de saturación, que la derivada del tiempo de V a lo largo de las trayectorias de (A.8) es dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\dot{x}\sigma_{\overline{x}}(x + r) + \sigma_{\overline{x}}(x + r)(\dot{x} + \dot{r}) + r\dot{r} \\ &= \dot{r}\left(r + \sigma_{\overline{x}}(x + r)\right) = -\left(r + \sigma_{\overline{x}}(x + r)\right)^2 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Como V es una función estrictamente positiva y $\dot{V}$ es una función negativa semi-definida, se llega a la conclusión de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Sin embargo, invocando al teorema de invariancia de LaSalle, es fácil ver que todas las soluciones de (A.8) convergen asintóticamente al origen $x = 0$, $\dot{x} = 0$ y $r = 0$. Por otro lado, la linealización tangencial de la ecuación (A.8), produce

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - r \\ \dot{r} &= -2r - x \end{aligned} \tag{A.11}$$

la cual es evidentemente, exponencialmente estable alrededor del origen. Por lo tanto, las ecuaciones de lazo cerrado son local y exponencialmente estables. □

A.4. Implementación numérica del método Newton-Raphson

Para encontrar los controladores necesarios v_x y v_y, se resuelve el sistema de ecuaciones (4.8) aproximándolo, usando el método Newton-Raphson de la siguiente manera:

Note que el sistema de ecuaciones (4.8) puede reescribirse como:

$$H(v) = L \tag{A.12}$$

donde $H(v)$, definida en (A.1), con $v = (v_x, v_y)^T$ y

$$L = \begin{bmatrix} \sigma_{\overline{x}}(k_p e_x + k_d r_x) - \ddot{F}_* \\ \frac{1}{\lambda}\left(\sigma_{\overline{y}}(k_p e_y + k_d r_y) - \ddot{G}_*\right) \end{bmatrix}. \tag{A.13}$$

Finalmente, para encontrar la v que satisface (A.13), se usa iterativamente, para cada instante de tiempo, la siguiente implementación numérica del algoritmo Newton-Rapshon:

$$v_{k+1} = v_k - \lambda \left(\nabla_u^{-1} H(v) \mid_{v=v_k}\right) (H(v_k) - L), \tag{A.14}$$

donde $\lambda > 0$ es el paso de integración. Para la iteración inicial fijamos $v_0 = v(t - \delta)$, donde $\delta > 0$ es un retardo de tiempo muy pequeño.[1] Entonces, continuamos aplicando el algoritmo desde v_0 hasta $\|v_{k+1} - v_k\| < \epsilon$. Evidentemente, el controlador de estabilización es $v = v_{k+1}$.

A.5. Consideraciones numéricas del método Newton-Raphson

Los valores de los parámetros utilizados en la implementación del método de Newton-Raphson fueron fijados como $\lambda = 1, \delta = 10^{-2}\tau$ (tiempo normalizado), $\epsilon = 10^{-3}$. Hay que decir que en un principio el método de Newton-Raphson necesita alrededor de 24 iteraciones para encontrar los primeros controladores. Sin embargo, como el tiempo se incremento el número de iteraciones necesarias fueron entre dos y cuatro.

A.6. Demostración del Lema 5.3.1

Demostración. Se mostró que P y Q son definidas estrictamente positivas. Calculando los determinantes de P y Q, se tiene que

$$\det(P) = k_1(-k_1 + \gamma k_2); \quad \det(Q) = 2k_1^2(-k_1 + \gamma k_2) \tag{A.15}$$

□

[1] Evidentemente, si el sistema inicia cuando $t = 0$ escogemos $v_0 = 0$.

De la suposición de $\gamma k_2 - k_1 > 0$, se tiene que ambos determinantes son positivos y también k_1 y γ son positivos, por lo tanto P y Q son positivos.

Ahora, la primera matriz en la ecuación (5.18) puede ser probada substituyendo los respectivos valores de las matrices dadas P, Q y A (definidas en el Lema 5.3.1. Del mismo modo, podemos comprobar que las igualdades en (5.18) se mantienen.

Finalmente, de la definición de Q y K, dadas respectivamente en (5.18) y (5.21), resulta que $w^T(Q-K)w = 2(\gamma k_2 - k_1)w_2^2 \geq 0$; para todo $w^T = [w_1, w_2]$.

Apéndice B

Productos derivados del proyecto de investigación

B.1. Publicaciones en libros

- C. Aguilar-Ibañez, A. Barrañón, H. Sira-Ramirez, and L.I. Rosas-Soriano. *New Nanotechnology Developments*, chapter On the manipulation of a Microscopic Particle by using Optical Tweezers: Flatness based approach, pages 137–144. Nanotechnology Science and Technology. Nova Publisher, 2009.

B.2. Publicaciones en revistas

- C. Aguilar-Ibañez, A. Barrañon-Cedillo, H. Sira-Ramirez, and Luis I. Rosas-Soriano. Flatness based approach for the manipulation of a microscopic particle by optical tweezers. *International Journal of Control*, 82(11):2026 – 2033, November 2009.

- Carlos Aguilar-Ibañez and Luis I. Rosas-Soriano. On the positioning problem of a microscopic particle trapped in optical tweezers. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009:16, 2009. Article ID 969714.

- Carlos Aguilar-Ibañez, Miguel S. Suarez-Castanon, and Luis I. Rosas-Soriano. A simple control scheme for the manipulation of a particle by means of optical tweezers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(3):328-337, February 2011.

B.3. Participación en congresos

- Carlos Aguilar-Ibañez, Miguel S. Suárez-Castañón, and Luis I. Rosas-Soriano. A maneuver control strategy for optical tweezers. In 2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2009), pages 267–272, Toluca, México, November 10-13 2009. Universidad Autónoma del Estado de México, IEEE. Formerly known as ICEEE.

- Carlos Aguilar-Ibañez, Hebertt Sira-Ramirez, and Luis I. Rosas-Soriano. On the approximated control of optical tweezers via flatness based approach. In 2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2009), pages 273–278, Toluca, México, November 10-13 2009. Universidad Autónoma del Estado de México, IEEE. Formerly known as ICEEE.

- Carlos Aguilar-Ibáñez, Miguel S. Suárez Castañón, and Luis I. Rosas-Soriano. Manipulation of a particle by means of optical tweezers: A simple control scheme. In XIV Congreso Latinoamericano de Automática y XIX Congreso de la Asociación Chilena de Control Automático (ACCA - 2010), Santiago de Chile, August 24-27 2010. Universidad de Santiago de Chile.

B.4. Participación en simposios

- L.I. Rosas-Soriano, C. Aguilar-Ibáñez, and A. Barrañón-Cedillo. Control simulation of optical tweezers for the manipulation of micro-particles. *In Simposio 2010 Nanotecnología y Nanociencias en la UAM*, D.F., México, 15-16 Noviembre 2010. Universidad Autónoma Metropolitana, Red Nanociencias UAM. Cartel.

Apéndice C

Distinción derivada del proyecto de investigación

C.1. Distinción del Instituto Politécnico Nacional

- Al *Mejor Desempeño Académico de Alumnos de Posgrado 2009-2010 del Programa de Doctorado en Ciencias de la Computación del Centro de Investigación en Computación*.
  Diploma entregado por la directora General del Instituto Politécnico Nacional, Dra. Xoloxóchitl Bustamante Díez.
  18 de Noviembre de 2010.