



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

*Estudio Numérico del Péndulo Elástico de Resorte de Masa No
Despreciable.*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

Citlalitl Nava Gaxiola

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Arturo Zúñiga Segundo

México, D. F.

OCTUBRE de 2008



A mis papás:

César y Raquel.

Y a mis hermanos:

Cabezón y César.

Agradecimientos especiales a:

Hugo Corrales, Eduardo Nava,

Julián González y al Dr. Zúñiga

por el apoyo brindado durante la realización de este trabajo.

Índice general

Índice general	III
Introducción	V
1. Ecuaciones de movimiento	1
1.1. Péndulo Simple	1
1.2. Péndulo Elástico de resorte de masa despreciable	6
1.3. Péndulo Elástico de resorte de masa no despreciable	11
2. Solución Numérica	15
2.1. Péndulo Simple	16
2.2. Péndulo Elástico de resorte de masa despreciable	17
2.3. Péndulo Elástico de resorte de masa no despreciable	22
3. Conclusiones	27
A. Derivación de las ecuaciones de movimiento	29
A.1. Péndulo Simple	29
A.2. Péndulo Elástico de resorte de masa despreciable	30
A.2.1. Coordenadas Polares	30
A.2.2. Coordenadas Cartesianas	32
A.3. Péndulo Elástico de resorte de masa no despreciable	33
B. Ángulos pequeños	37
C. Rutinas	39
C.1. Rutinas de Integración Numérica	39
C.1.1. Péndulo Simple	39
C.1.2. Péndulo Elástico de resorte de masa despreciable	41

C.1.3. Péndulo Elástico de resorte de masa no despreciable	42
C.2. Rutina de Animación	44
Bibliografía	49

Introducción

A primera vista, un péndulo elástico modelado con una masa y un resorte de masa despreciable, es un sistema simple cuyas ecuaciones de movimiento no son difíciles de derivar, sin embargo, después de más de 70 años de estudio aún no se cuenta con una solución analítica que describa el movimiento de este sistema "simple".

La primera motivación del análisis del péndulo elástico data de 1933; Vitt y Gorelik, haciendo una analogía con el fenómeno cuántico de resonancia de Fermi en el espectro infrarrojo del CO_2 , presentan una discusión sobre la transferencia de energía del modo elástico al pendular. De esta manera, las ecuaciones del péndulo elástico tienen una estructura muy similar a las presentadas en estudios de diversas áreas de la física, por ejemplo en estudios atmosféricos, ópticos y celestes.

Al no tener solución analítica, el uso de aproximaciones e integración numérica ha sido de gran utilidad para describir su movimiento bajo ciertas condiciones. Según Peter Lynch [1], los primeros en utilizar una computadora para el estudio de una clase de sistemas que incluye el péndulo elástico, fueron Kane y Kahn en 1968. Han sido muchos los que han mostrado su interés en este sistema, a pesar de esto, los resultados que se tienen a la fecha se reducen a desplazamientos pequeños como condiciones iniciales. Así pues, aún no se han obtenido resultados analíticos como la condición de resonancia autoparamétrica cuando se toman en cuenta grandes deformaciones.

Por otra parte, como se menciona antes, generalmente el péndulo elástico es modelado con un resorte de masa despreciable, Joseph Christensen [2] presenta un análisis detallado de un péndulo elástico limitado a desplazamientos pequeños en el que no se desprecia la masa del resorte, obtiene analíticamente la condición que provoca el fenómeno de resonancia autoparamétrica y compara sus resultados con los obtenidos experimentalmente.

El propósito de este trabajo es el presentar un estudio numérico del péndulo elástico de resorte de masa no despreciable para pequeñas y grandes deformaciones. Se deriva la condición que ocasiona el fenómeno de resonancia autoparamétrica para pequeñas deformaciones en este sistema. Además, se muestra que las ecuaciones de movimiento de este sistema permiten recuperar el movimiento del péndulo simple y del péndulo elástico en el que el resorte es de masa despreciable para cualquier tipo de deformación. La dinámica de este trabajo consiste en analizar primero el sistema del péndulo simple, posteriormente el del péndulo elástico de resorte de masa despreciable, y finalmente el péndulo elástico de resorte de masa no despreciable.

El Capítulo 1 está dedicado al estudio de las ecuaciones de movimiento de estos sistemas. Para el péndulo simple se deriva la solución analítica para cualquier tipo de deformación, así como una

expresión para el periodo de oscilación. Para los péndulos elásticos de resorte de masa despreciable y no despreciable se derivan las condiciones de resonancia autoparamétrica para pequeños desplazamientos.

En el Capítulo 2 se presentan los resultados de la integración numérica de las ecuaciones dadas en el Capítulo 1. En este mismo capítulo, se muestra bajo que condiciones es posible recuperar el movimiento de un sistema más simple a partir de otro más complejo. También se presentan los resultados numéricos de la integración de las ecuaciones de movimiento para grandes deformaciones, tanto para el péndulo elástico de resorte de masa despreciable como para el de masa no despreciable.

En el Capítulo 3 se desarrollan las conclusiones de este trabajo. Por último, en el Apéndice se muestra de manera más detallada cómo se derivan las ecuaciones presentadas en el Capítulo 1, también se presentan las rutinas con las que se generaron las figuras de el Capítulo 2 y la de la animación de las ecuaciones del péndulo elástico de resorte de masa no despreciable.

Capítulo 1

Ecuaciones de movimiento

Para todos los sistemas que a continuación se presentan, se asume que el movimiento está restringido a un plano. Están sometidos al campo gravitacional de la Tierra y no existe fuerza disipativa alguna que detenga el movimiento.

Primero se presenta el caso más sencillo, un péndulo simple. En la segunda sección, se quita la restricción de longitud constante para dar paso al caso de un péndulo elástico, considerando que la masa del resorte utilizado es despreciable. Por último, se toma en cuenta esta masa para llegar al caso más general. De esta manera, los primeros dos son casos particulares del tercero.

Las derivaciones de las ecuaciones de movimiento se presentan con detalle en el apéndice A.

1.1. Péndulo Simple

En esta sección se presenta la ecuación de movimiento de un péndulo simple de masa m y longitud constante L , suspendido de un extremo fijo como lo muestra la Figura 1.1, siendo la posición de la masa en $\theta = 0$ el cero de referencia.

El movimiento del péndulo es en dos dimensiones, y está restringido a moverse sobre una circunferencia de radio L . De la Figura 1.1, es fácil ver que la posición de la masa en coordenadas polares para un tiempo t , es $\overrightarrow{P}(t) = (L \sin \theta, L \cos \theta)$. Haciendo uso de las ecuaciones de Hamilton se deriva la ecuación de movimiento de este sistema.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta \quad (1.1)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden. A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, existe muy poca teoría que nos permita resolver fácilmente esta ecuación. Sin embargo, valiéndose de que el péndulo simple es un sistema conservativo, de las integrales elípticas y funciones elípticas de Jacobi es posible resolverla, y además, dar una expresión para el periodo.

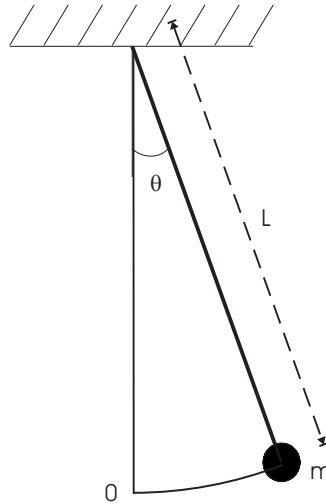


Figura 1.1: Péndulo Simple de longitud L y masa m .

Se pueden resaltar algunas propiedades que tendrá la solución antes de resolverla, por ejemplo, para ángulos pequeños¹, la solución oscilará periódicamente. También se puede notar que existen ciertas posiciones de equilibrio θ_E , es decir, si el péndulo está en reposo en θ_E , entonces permanecerá ahí. Puesto que θ_E es una constante, $\dot{\theta}_E = 0$ y $\ddot{\theta}_E = 0$. Por tanto, $\sin \theta_E = 0$, esto implica que únicamente para estas dos posiciones, las fuerzas se balancearán y no provocarán movimiento. La posición $\theta_E = 0$, es la posición natural de un péndulo y $\theta_E = \pi$ es la posición invertida del péndulo. Aunque estas dos son posiciones de equilibrio, existe una gran diferencia entre ellas, $\theta_E = 0$ es estable, mientras que $\theta_E = \pi$ no lo es, la demostración de este hecho se puede encontrar en [3].

La energía total E del sistema está dada por:

$$E = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + mgL(1 - \cos \theta) \quad (1.2)$$

La identidad trigonométrica $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ permite reescribir la energía como:

$$E = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + 2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.3)$$

Despejando $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}^2 = 2 \frac{E - 2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2}}{mL^2} = \frac{2E}{mL^2} \left(1 - \frac{2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2}}{E} \right) \quad (1.4)$$

Se sabe que $\exists \theta_{\text{máx}}$ en el que se detiene el péndulo y toda la energía se convierte en energía potencial, es decir,

¹Ver apéndice B.

$$E = 2mgL \sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} \quad (1.5)$$

Además, para este sistema la energía se mantiene constante para todo tiempo t , pues el sistema es conservativo, así, sustituyendo (1.5) en (1.4)

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \frac{2E}{mL^2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}} \right) \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{2E}{mL^2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}} \right)} \\ dt &= \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{mL^2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}} \right)}} \quad (1.6) \\ \int_0^{t_{\text{máx}}} dt &= \sqrt{\frac{mL^2}{2E}} \int_0^{\theta_{\text{máx}}} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}} \right)}} \end{aligned}$$

Sea Δt el tiempo que tarda el péndulo en recorrer desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \theta_{\text{máx}}$.

$$\Delta t = \sqrt{\frac{mL^2}{2E}} \int_0^{\theta_{\text{máx}}} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}} \right)}} \quad (1.7)$$

Notando que el período T del péndulo es $4\Delta t$.

Para resolver la integral de la derecha de (1.7) se hace $a = \sin \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}$ y utilizando el cambio de variable

$$x = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{a}$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{2a} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2a} \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \frac{1}{2a} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \frac{1}{2a} \sqrt{1 - a^2 x^2} d\theta \end{aligned}$$

se obtiene

$$d\theta = \frac{dx}{\frac{1}{2a} \sqrt{1 - a^2 x^2}}$$

De esta manera, de (1.7)

$$\begin{aligned}
\Delta t &= 2a\sqrt{\frac{mL^2}{2E}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-x^2}} \\
&= 2a\sqrt{\frac{mL^2}{4mgL \sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-x^2}} \\
&\Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-x^2}} \tag{1.8}
\end{aligned}$$

Se sabe que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-x^2}}$ es una integral elíptica completa de primera clase para $a < 1$ [4]

$$\mathbf{K}(a) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-x^2}} \tag{1.9}$$

Calculando $\mathbf{K}(a)$ con series de Taylor:

$$\mathbf{K}(a) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 a^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 a^6 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 a^8 + O(a^{10}) \right]$$

Sustituyendo el cambio de variable $a = \sin \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}$

$$\mathbf{K}(a) = \pi \left[1 + \frac{1}{8} \sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} + \frac{9}{128} \sin^4 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} + \frac{25}{512} \sin^6 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} + \frac{1225}{32768} \sin^8 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} + O(\sin^{10} \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}) \right]$$

de (1.8) y (1.9)

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{8} \sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} + \frac{9}{128} \sin^4 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} + \frac{25}{512} \sin^6 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} + \frac{1225}{32768} \sin^8 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} + O(\sin^{10} \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}) \right] \tag{1.10}$$

Como se señaló antes, el período T es cuatro veces Δt . Por otra parte, puesto que el sistema es conservativo $\theta_{\text{máx}}$ es precisamente $\theta(0) = \theta_0$, por tanto:

$$T = 4\Delta t = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{128} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \frac{1225}{16384} \sin^8 \frac{\theta_0}{2} + O(\sin^{10} \frac{\theta_0}{2}) \right] \tag{1.11}$$

De (1.6)

$$t + C = \int_0^t dt = \sqrt{\frac{mL^2}{2E}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}}\right)}} \tag{1.12}$$

donde C es una constante de integración, utilizando el mismo cambio de variable

$$x = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{a}$$

y de (1.5), se reescribe (1.12)

$$t + C = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2} \sqrt{1 - x^2}} \quad (1.13)$$

$\int_0^{\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{a}} \frac{dx}{\sqrt{1 - a^2 x^2} \sqrt{1 - x^2}}$ es la integral elíptica incompleta de primera clase $\mathbf{F}_a(x)$, y su inversa es la primera función elíptica de Jacobi $sn(x) = \mathbf{F}_a^{-1}(x)$, que expresada en series de Taylor es:

$$\mathbf{F}_a^{-1}(x) = x - (1 + a^2) \frac{x^3}{3!} + (1 + 14a^2 + a^4) \frac{x^5}{5!} - (1 + 135a^2 + 135a^4 + a^6) \frac{x^7}{7!} + O(x^9)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a^{-1} \left((t + C) \sqrt{\frac{g}{L}} \right) &= x \\ &= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta_{\text{máx}}}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = 2 \arcsin \left(\mathbf{F}_a^{-1} \left((t + C) \sqrt{\frac{g}{L}} \right) \sin \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \theta(0) = 2 \arcsin \left(\mathbf{F}_a^{-1} \left(C \sqrt{\frac{g}{L}} \right) \sin \frac{\theta_{\text{máx}}}{2} \right)$$

$$1 = \mathbf{F}_a^{-1} \left(C \sqrt{\frac{g}{L}} \right)$$

pues $\theta(0) = \theta_{\text{máx}}$, así

$$\sqrt{\frac{L}{g}} \mathbf{F}_a(1) = C$$

Sustituyendo en la expresión para $\theta(t)$

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left(\mathbf{F}_a^{-1} \left(t \sqrt{\frac{g}{L}} + \mathbf{F}_a(1) \right) \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (1.14)$$

1.2. Péndulo Elástico de resorte de masa despreciable

El péndulo elástico es modelado con un resorte de masa despreciable y constante de elasticidad k , en un extremo del resorte se encuentra unida una masa m , mientras que el otro extremo se encuentra fijo en el cero de referencia (ver Figura 1.2). La longitud del resorte en reposo es L , y se deforma unicamente en la dirección radial. Al poner el resorte en posición vertical el peso de la masa ocasiona que se deforme a una nueva posición de equilibrio $L + mg/k$.

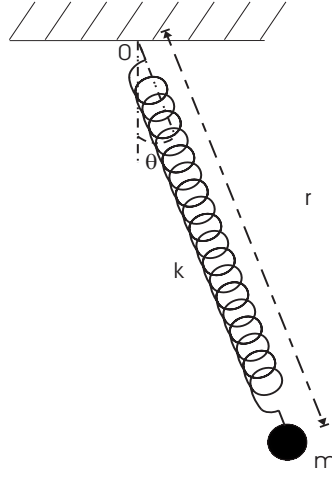


Figura 1.2: Péndulo elástico de longitud variable r y masa m .

En este sistema la longitud del resorte representa un grado de libertad más. Luego así, el péndulo elástico cuenta con dos grados de libertad, θ y r . El vector de posición de la masa en coordenadas polares está dado por: $\vec{P}(t) = (r \sin \theta, -r \cos \theta)$. Las ecuaciones de movimiento se obtienen de la misma manera que en el caso anterior.

De las ecuaciones de Hamilton[5] se deriva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

$$\dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{mr^2} \quad (1.15)$$

$$\dot{p}_{\theta} = -mgr \sin \theta \quad (1.16)$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (1.17)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_{\theta}^2}{mr^3} - k(r - L) + mg \cos \theta \quad (1.18)$$

donde p_θ y p_r representan las componentes angular y radial del momento respectivamente. De estas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de segundo orden:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta \quad (1.19)$$

$$\ddot{r} = \dot{\theta}^2 r - \frac{k}{m}(r - L) + g \cos \theta \quad (1.20)$$

Nuevamente, las ecuaciones diferenciales que modelan este sistema mecánico son no lineales, pero a diferencia del caso del péndulo simple, no existe solución analítica para este.

Sin embargo, aproximándose a deformaciones pequeñas y ángulos pequeños, se obtienen ciertos resultados que permiten explicar cómo es el movimiento bajo esta restricción.

Aunque parece natural utilizar coordenadas polares para analizar éste sistema como lo hace Minorsky [6], el análisis se simplifica considerablemente utilizando coordenadas cartesianas y cambiando el cero de referencia (ver Figura 1.3) a la posición de equilibrio

$$y_0 = L + mg/k \quad (1.21)$$

En el apéndice A.2.2 se encuentra el Lagrangiano para éste sistema (A.26)

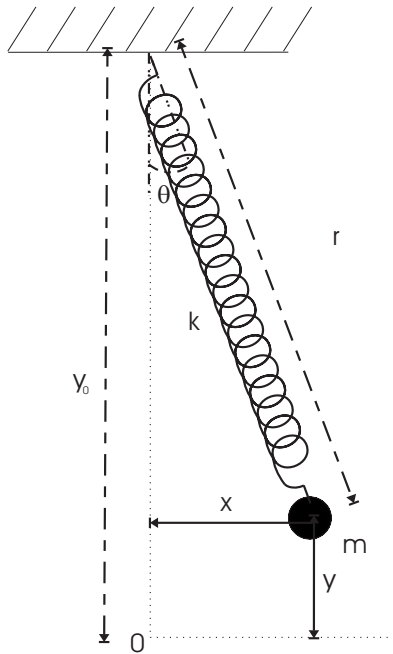


Figura 1.3: Péndulo elástico de longitud variable r y masa m en coordenadas cartesianas

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(L - r)^2 - mgy \quad (1.22)$$

Desarrollando en series de Taylor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{y_0} x^2 + \frac{k}{m} y^2 - \frac{k}{m} \frac{L}{y_0^2} y x^2 + \frac{m g^2}{k} \right) + O(x^2 y^2) + O(x^4) + O(y^4)$$

Haciendo $\omega_r^2 = \frac{k}{m}$ y $\omega_p^2 = \frac{g}{y_0}$ se tiene:

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} \left(\omega_p^2 x^2 + \omega_r^2 y^2 - \omega_r^2 \frac{L}{y_0^2} y x^2 + \frac{g^2}{\omega_r^2} \right)$$

Como $\omega_r^2 \frac{L}{y_0^2}$ es una constante digamos λ , el Lagrangiano(1.22) se puede aproximar por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \omega_p^2 x^2 - \omega_r^2 y^2 + \lambda y x^2 - \frac{g^2}{\omega_r^2} \right) \quad (1.23)$$

de las ecuaciones de Lagrange:

$$\ddot{x} + \omega_p^2 x = \lambda y x \quad (1.24)$$

$$\ddot{y} + \omega_r^2 y = \lambda x^2 / 2 \quad (1.25)$$

Estas ecuaciones de movimiento también fueron derivadas por Olsson [7], a partir de un Lagrangiano muy parecido a (1.23).

Al aproximar a las ecuaciones (1.24) y (1.25) no se ha logrado obtener ecuaciones lineales, pues los términos de la derecha las convierten en no lineales. No obstante, puestas de esta manera, se pueden concluir algunas características de la solución bajo estas aproximaciones.

Se observa que ω_p es justamente la frecuencia a la que el péndulo simple de longitud L oscila cuando está restringido a ángulos pequeños, mientras que ω_r corresponde a la frecuencia en la que oscila un oscilador armónico de constante de elasticidad k . Esto conduce a concluir que si los términos de la derecha de las ecuaciones (1.24) y (1.25) son cero, entretanto que el movimiento en la dirección x será el de un péndulo simple, el movimiento en la dirección y será el de un oscilador armónico, siendo los dos movimientos independientes uno del otro. Así, los términos de la derecha son los responsables del acoplamiento de las dos ecuaciones.

Para llegar a otro resultado que proporcione un mejor entendimiento del movimiento del péndulo elástico, se considera primero el caso en el que el movimiento elástico domina el movimiento pendular, es decir, $x(t) \ll y(t)$. Luego, haciendo $\lambda x^2 / 2 = 0$ en la ecuación (1.25) se tiene que:

$$y = A \cos \omega_r t$$

con $A = cte$.

Sustituyendo en (1.24)

$$\ddot{x} + \omega_p^2 x = \lambda A x \cos \omega_r t$$

\Rightarrow

$$\ddot{x} + (\omega_p^2 - \lambda A \cos \omega_r t) x = 0$$

Este tipo de ecuación ha sido ampliamente estudiada, y es conocida como ecuación canónica de Mathieu, y de acuerdo con Stoker [8], cuando $\frac{\omega_r}{\omega_p} = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ las soluciones son inestables aún para A 's muy pequeñas, de otra forma las soluciones son estables; esta inestabilidad es más notoria cuando $n = 1$; . De hecho se demostrará más adelante que el único valor posible de n es 1. Si

$$\omega_r = 2\omega_p \tag{1.26}$$

la solución x oscilará con una amplitud que crecerá exponencialmente como se mostrará a continuación. La posibilidad de resonancia se puede notar de la ecuación (1.24), pues el producto xy contendrá la frecuencia ω_p y, en consecuencia, las oscilaciones horizontales se harán más grandes a expensas de las verticales [7]. El resultado es pues, una transferencia de energía de la oscilación elástica al movimiento del tipo pendular.

Ahora, si se inicia con el caso en el que el movimiento del péndulo domina al de el resorte, $y(t) \ll x(t)$, se encuentra la solución del péndulo no forzado, haciendo $\lambda xy = 0$,

$$x = B \cos \omega_p t$$

con $B = cte$.

Sustituyendo en el lado derecho de (1.25)

$$\lambda \frac{x^2}{2} = \lambda \frac{B^2}{4} (1 + \cos 2\omega_p t) = C + D \cos 2\omega_p t$$

Para que ocurra el fenómeno de resonancia en y , se necesita que $\lambda \frac{x^2}{2}$ oscile a la frecuencia ω_r , y así nuevamente se tiene la misma condición para resonancia, $\omega_r = 2\omega_p$, sucediendo lo mismo que en el caso anterior, la energía se transferirá de un modo a otro.

De este modo, el caso $\omega_r = 2\omega_p$ atrae más atención que cualquier otro en el que la solución sea estable. Veamos para que parámetros se puede tener esta condición. De (1.21)

$$\frac{k}{m} \left(1 - \frac{L}{y_0}\right) = \frac{g}{y_0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{4}{n^2}(y_0 - L) &= y_0 \\ \Rightarrow \left(\frac{4}{n^2} - 1\right)y_0 &= \frac{4}{n^2}L \\ \Rightarrow y_0 &= \frac{4}{n^2} \frac{L}{\left(\frac{4}{n^2} - 1\right)} \\ \Rightarrow y_0 &= \frac{4L}{(4 - n^2)} \end{aligned}$$

De aquí que el único caso posible sea $n = 1$.

$$y_0 = \frac{4}{3}L \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow m = \frac{kL}{3g} \quad (1.28)$$

Por tanto, cuando se cumpla esta condición inicial la frecuencia de oscilación del resorte duplicará la del péndulo, y no se logrará tener un movimiento puramente vertical u horizontal, el movimiento estará acoplado para todo tiempo t .

De acuerdo con Minorsky [6], cuando el parámetro de un sistema oscilatorio se hace oscilar a una frecuencia $2f$, siendo f la frecuencia natural del sistema, el sistema comienza a oscilar con la frecuencia f . A este fenómeno se le conoce como resonancia paramétrica. Esto implica que bajo la condición de inestabilidad (1.26) el sistema entra en resonancia paramétrica, y es la oscilación de la longitud del péndulo el parámetro que ocasiona que se presente este fenómeno.

De manera más específica, debido a que la oscilación de la longitud del péndulo es consecuencia del movimiento del resorte, que no tiene dependencia explícita en el tiempo en el sistema de ecuaciones que modelan este sistema (1.24) y (1.25), la resonancia paramétrica en este sistema no es resultado de alguna fuerza externa, la resonancia es autoparamétrica.

Citando el artículo de Olsson [7] "La transferencia de energía al movimiento del resorte descrita por (1.25) puede ser vista como un estándar de efecto de resonancia en un oscilador lineal. La excitación del oscilador es, por supuesto, debido al movimiento del péndulo".

La presencia de este fenómeno en el sistema péndulo elástico abre la puerta a aplicaciones de los resultados que se obtengan para este sistema. Por ejemplo, el problema que motivó a Vitt

y Gorelik (1933) a estudiar este sistema fue el fenómeno cuántico de resonancia de Fermi en el espectro infrarrojo del CO_2 .

Núñez Yépez [9] construye las secciones de Poincaré para diferentes valores de energía integrando numéricamente las ecuaciones (1.15)-(1.18), bajo la condición de resonancia (1.28), y graficando el espacio fase para diferentes condiciones iniciales. Para un valor cercano a la energía mínima posible y la condición de resonancia, las orbitas del sistema presentan un comportamiento cuasiperiódico. Al incrementar la energía el comportamiento se vuelve caótico, si se aumenta nuevamente, se ordena otra vez. Así, este sistema exhibe un comportamiento ordenado-caótico-ordenado cuando la energía se incrementa.

Un análisis más extenso de la resonancia autoparamétrica en el péndulo elástico aproximado a oscilaciones pequeñas, puede ser encontrado en el artículo de Rusbridge [10]; donde además se demuestra que bajo esta aproximación la energía se mantiene constante.

1.3. Péndulo Elástico de resorte de masa no despreciable

En esta sección se trata el péndulo elástico presentado en la sección anterior de una manera más general. Para esto, se considera que la masa del resorte no es despreciable, siendo ρ su densidad de masa. El sistema de ecuaciones que describen este péndulo es muy similar al del péndulo en el que se desprecia la masa del resorte como se muestra a continuación:

$$\dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{(m + \frac{\rho L}{3})r^2} \quad (1.29)$$

$$\dot{p}_{\theta} = -(m + \frac{\rho L}{2})gr \sin \theta \quad (1.30)$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{(m + \frac{\rho L}{3})} \quad (1.31)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_{\theta}^2}{(m + \frac{\rho L}{3})r^3} - k(r - L) + (m + \frac{\rho L}{2})g \cos \theta \quad (1.32)$$

De nuevo, es posible obtener un sistema de ecuaciones de segundo orden a partir de estas. Por tanto,

$$\ddot{\theta} = -\frac{(m + \frac{\rho L}{2})g}{(m + \frac{\rho L}{3})r} \sin \theta \quad (1.33)$$

$$\ddot{r} = \dot{\theta}^2 r - \frac{k}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)}(r - L) + \frac{\left(m + \frac{\rho L}{2}\right)}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)}g \cos \theta \quad (1.34)$$

también describen el movimiento de este tipo de péndulo.

Para analizar el comportamiento de este sistema, se procede de la misma manera que en la sección 1.2, donde se demostró que, restringiendo el movimiento del péndulo elástico a desplazamientos pequeños, la resonancia autoparamétrica tiene lugar cuando (1.26)

$$\begin{aligned} \omega_r &= 2\omega_p \\ \Rightarrow \frac{1}{T_r} &= \frac{2}{T_p} \\ \Rightarrow T_p &= 2T_r \end{aligned} \quad (1.35)$$

donde $T_p = 2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}}$ y $T_r = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Como se mencionó en la sección 1.2 para que se satisfaga (1.35) es forzoso que se cumpla (1.28). Es importante notar, que esta condición fue derivada para el caso en el que no se considera la masa del resorte, así pues, esta condición no es válida para este caso, en el que no se desprecia la masa del resorte.

Para encontrar la condición de masa que conduce a resonancia autoparamétrica, primero se halla la expresión para T_r , para esto supone que el movimiento únicamente tiene lugar en la dirección radial con $\theta = 0$. La posición de equilibrio (1.21) se ve afectada por la masa del resorte. Siguiendo el desarrollo de [2], el resorte se representa como la unión de N resortes etiquetados de manera ascendente de arriba hacia abajo, cada uno con masa $m_i = \frac{\rho L}{N}$, constante de elasticidad $k_i = Nk$, y longitud sin deformar $L_i = \frac{L}{N}$. El i -ésimo resorte soporta el peso de los $(N - i)$ resortes abajo de él y la masa m que está unida al N -ésimo resorte. De esta forma, cada resorte, como consecuencia del peso que soporta, es deformado a la longitud

$$r_{i0} = L_i + \frac{mg}{k_i} + \frac{(N-i)m_i g}{k_i},$$

el segundo término corresponde a la deformación debida al peso de la masa m , mientras que el tercero a la ocasionada por el peso de los resortes debajo de él. Así, se puede conocer la posición de equilibrio:

$$\begin{aligned}
r_e &= \sum_{i=1}^N y_{i0} = \sum_{i=1}^N L_i + \frac{mg}{k_i} + \frac{(N-i)m_i g}{k_i} \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{L}{N} + \frac{mg}{Nk} + \frac{(N-i)\rho Lg}{N^2k} \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \left(L + \frac{mg}{k} + \frac{(N-i)\rho Lg}{Nk} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \left(r_0 + (N-i)\frac{\rho Lg}{Nk} \right) \\
&= r_0 + \left(N^2 - \frac{N(N+1)}{2} \right) \frac{\rho Lg}{N^2k} \\
&= r_0 + \left(1 - \frac{1}{N} \right) \frac{\rho Lg}{2k}
\end{aligned}$$

Si $N \rightarrow \infty$, $\frac{1}{N} \rightarrow 0$. Por tanto,

$$r_e = r_0 + \frac{\rho Lg}{2k} \quad (1.36)$$

En el apéndice A.3 se desarrollan las energías cinética y potencial de este modelo, puesto que se supone que $\theta = 0$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{\rho L}{3} \right) \dot{r}^2 - \frac{1}{2} k (r - L)^2 + \left(m + \frac{\rho L}{2} \right) gr \quad (1.37)$$

$$\Rightarrow \ddot{r} + \frac{k(r-L)}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)} - \frac{\left(m + \frac{\rho L}{2}\right)g}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)} = 0 \quad (1.38)$$

Utilizando el cambio de variable

$$r = u + r_e \quad (1.39)$$

y sustituyendo en (1.38) obtenemos la ecuación:

$$\ddot{u} + \frac{k}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)} u = 0 \quad (1.40)$$

cuya solución está dada por:

$$u(t) = A \cos \omega_r t + B \sin \omega_r t$$

donde $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)}}$. La solución de esta ecuación, como se esperaba, es la de un oscilador armónico. Las constantes A y B se definen a partir de las condiciones iniciales $u(0) = u_0$ y $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$:

$$u(t) = u_0 \cos \omega_r t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_r} \sin \omega_r t$$

puesto que $\dot{u}_0 = 0$ y $u_0 = r_0 - r_e$

$$u(t) = (r_0 - r_e) \cos \omega_r t$$

de (1.39)

$$r(t) = (r_0 - r_e) \cos \omega_r t + r_e$$

$$\Rightarrow T_r = 2\pi \sqrt{\frac{(m + \frac{\rho L}{3})}{k}} \quad (1.41)$$

Tal como lo menciona Joseph Christensen [2], la distribución de masa en el sistema debe ser analizada para poder expresar el periodo de movimiento pendular T_p . Por simplicidad, se supone que el resorte es una barra rígida de longitud r_e . Considerando sólo ángulos pequeños, se aproxima $\sin \theta = \theta^1$, de la ecuación de movimiento para un péndulo simple de longitud r_e en el que la densidad de masa ρ de la barra no es despreciable (A.32) se tiene:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{m + \frac{\rho r_e}{2}}{m + \frac{\rho r_e}{3}} \right) \frac{g}{r_e} \theta = 0$$

Esta ecuación es de la misma forma que (1.40), de la cual ya conocemos la solución, luego así:

$$T_p = 2\pi \sqrt{\left(\frac{m + \frac{\rho r_e}{3}}{m + \frac{\rho r_e}{2}} \right) \frac{r_e}{g}} \quad (1.42)$$

Notando que la masa del resorte $\rho L = \rho r_e$, de (1.35), (1.41) y (1.42)

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{m + \frac{\rho L}{3}}{m + \frac{\rho L}{2}} \right) \frac{r_e}{g}} &= 2 \sqrt{\frac{(m + \frac{\rho L}{3})}{k}} \\ \Rightarrow \left(m + \frac{\rho L}{3} \right) \frac{r_e}{g} &= 4 \frac{(m + \frac{\rho L}{3})}{k} \left(m + \frac{\rho L}{2} \right) \end{aligned}$$

sustituyendo (1.36)

$$m = \frac{kL}{3g} - \frac{\rho L}{2} \quad (1.43)$$

Si se compara con (1.28) esta nueva condición de resonancia sólo difiere por la resta de $\frac{\rho L}{2}$.

¹Ver Apéndice B.

Capítulo 2

Solución Numérica

Al intentar resolver problemas de esta índole, los métodos numéricos de integración juegan un papel muy importante para simular la solución de sistemas de los que no se conoce su solución exacta.

Como se indicó en el capítulo anterior, el sistema de ecuaciones obtenidas para modelar el comportamiento de un péndulo elástico, ya sea considerando la masa del resorte o no, no tiene solución analítica. También se comentaron algunas de las aproximaciones que se han hecho para predecir cómo es la solución.

Lai [11] y Christensen [2] presentan datos obtenidos experimentalmente. Con dichos datos, les fue posible comprobar los resultados que lograron sobre resonancia autoparamétrica; Lai trabajó en el péndulo elástico de resorte de masa despreciable, y Christensen en el de resorte de masa no despreciable.

En 1975, Cayton utilizó el método Runge Kutta Gill para integrar numéricamente las ecuaciones obtenidas del péndulo elástico de resorte de masa despreciable. En publicaciones más recientes, se pueden encontrar los resultados numéricos alcanzados al resolver el péndulo elástico de resorte de masa despreciable. Por mencionar algunos, en 1990 Nuñez Yépez [9] usó el algoritmo de Verlet, en el 2005 Gustavo A. Boroni y Alejandro Clause emplearon Runge Kutta de orden 4, el paquete de rutinas de Fortran LSODE y diferencias hacia atrás con multipaso de tercer orden [12], y en febrero de este año, Tuwankotta y Quispel [13], aplicaron un método de integración simpléctica así como Runge Kutta de orden 7 y 8.

Seguramente, la lista de autores que han estudiado el problema del péndulo elástico es mucho más extensa de la aquí presentada. De hecho, en el artículo de Peter Lynch [1] se puede encontrar una lista más detallada.

A excepción de Tuwankotta y Boroni, los autores arriba mencionados emplearon los métodos de integración para resolver las ecuaciones de movimiento aproximadas a desplazamientos pequeños.

Por otra parte, el único de los arriba citados que presentó un estudio sobre el péndulo elástico de resorte de masa no despreciable fue Christensen, sin embargo, también se limitó a estudiar el comportamiento de éste sistema restringiéndose a desplazamientos pequeños.

En este trabajo se resuelven numéricamente las ecuaciones de movimiento del péndulo simple, del péndulo elástico de resorte de masa despreciable y del péndulo elástico de resorte de masa no despreciable para todo tipo de desplazamiento utilizando el método Runge Kutta de orden 4 con tamaño de paso $dt = 0.01$.

2.1. Péndulo Simple

Se compararon los resultados de la integración numérica de las ecuaciones (A.3) y (A.9) con la solución analítica (1.14) que se evaluó utilizando las rutinas *ellipke* y *ellipj* de *Matlab* 7.0, las cuales proporcionan la integral elíptica y la función elíptica de Jacobi haciendo uso del algoritmo presentado por Abramowitz [4]. Los errores absolutos obtenidos para diferentes tamaños de paso dt son:

$$\mathcal{E} = 5.2427 \times 10^{-7} \quad \text{con } dt = 0.1$$

$$\mathcal{E} = 5.2200 \times 10^{-10} \quad \text{con } dt = 0.01$$

En la Figura 2.1 se muestra la gráfica del espacio fase para el péndulo simple de longitud $L = 0.5m$ y masa $m = 0.25Kg$, en el intervalo de tiempo $0s \leq t \leq 100s$.

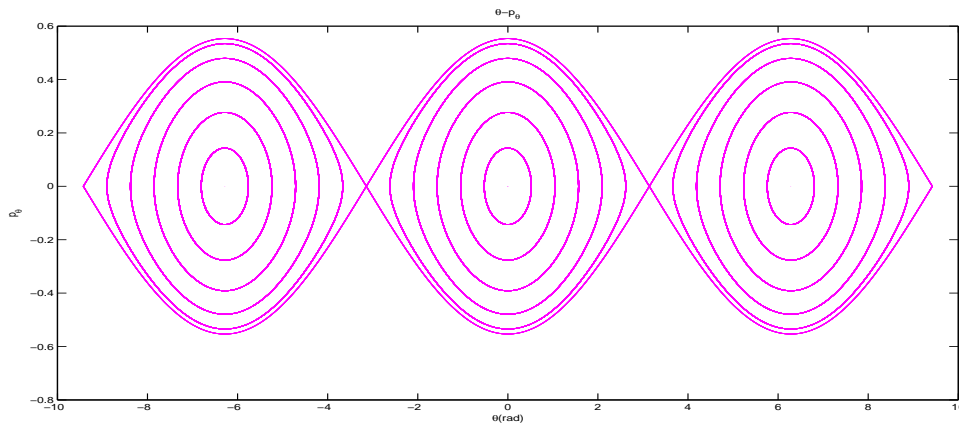


Figura 2.1: Espacio fase del péndulo simple

Al utilizar el integrador numérico *ode45* de *Matlab* 7.0 para los mismos tamaños de paso $dt = 0.1$ y $dt = 0.01$, así como para pasos más pequeños, la energía total no se conservó constante, mientras que utilizando Runge Kutta de orden 4 sí satisfizo esta condición.

2.2. Péndulo Elástico de resorte de masa despreciable

En la Figura 2.2 se puede observar cómo la energía oscila ligeramente en un periodo de 10 segundos. También se puede notar que, puesto que la diferencia entre la energía máxima y mínima en este periodo es del orden de 10^{-7} , este método nos da una buena aproximación numérica a la energía constante.

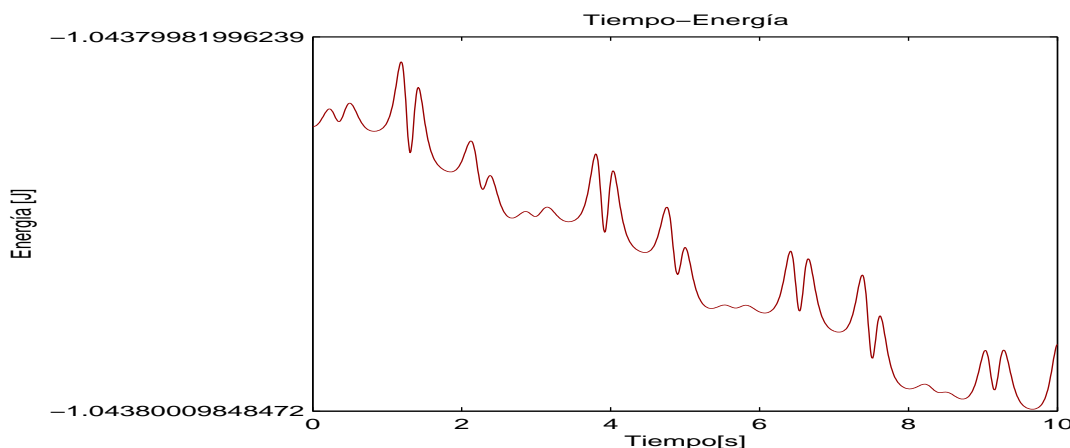


Figura 2.2: Energía del péndulo elástico de masa $m = 0.25 \text{ Kg}$, longitud inicial $L = 0.50 \text{ m}$, constante de elasticidad $k = 7 \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2}$ y ángulo inicial $\theta_0 = 45^\circ$ en el intervalo de tiempo $0s \leq t \leq 10s$.

Se verifica que a partir de las ecuaciones del péndulo elástico (1.15)-(1.18), al considerar un resorte muy rígido, se recupera el movimiento de un péndulo simple. Para visualizarlo se presentan los espacios fase de un péndulo elástico de longitud inicial $L = 0.5m$ y masa $m = 0.25\text{Kg}$, con $k = 100 \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2}$ en las Figura 2.3 y $k = 10,000 \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2}$ en la Figura 2.4.

Los errores porcentuales \mathcal{E} calculados respecto a los resultados numéricos del péndulo simple para estos mismos parámetros de masa y longitud con $k = 100 \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2}$ son:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\leq 19.90 \% && \text{para el ángulo} \\ \mathcal{E} &\leq 39.13 \% && \text{para el momento radial} \\ \mathcal{E} &\leq 18.98 \% && \text{para el radio, con } 0s \leq t \leq 100s \end{aligned}$$

Obviamente, al tomar el parámetro $k = 100 \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2}$ no se obtuvo el comportamiento buscado, pues en el péndulo simple el radio se mantiene constante. De los errores porcentuales presentados bajo este parámetro, se concluye que las ecuaciones del péndulo elástico no representan el movimiento del péndulo simple.

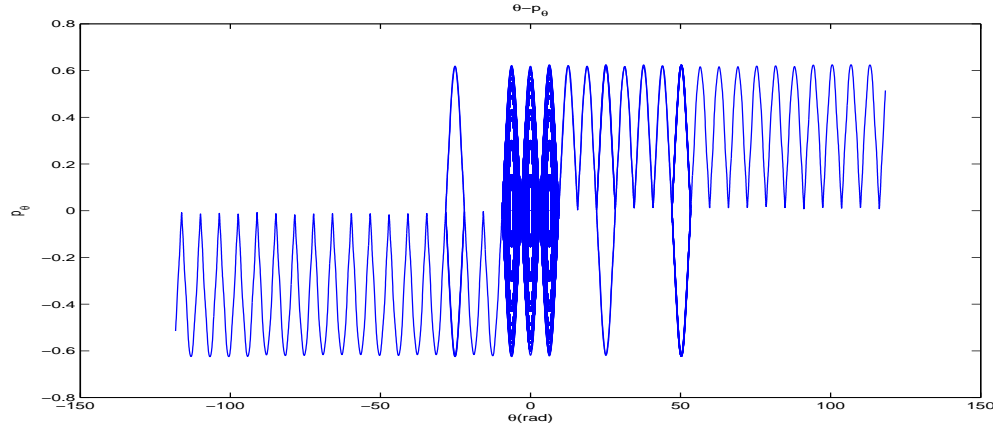


Figura 2.3: Espacio fase del péndulo elástico de constante de elasticidad $k = 100 \frac{Kg}{s^2}$ en el intervalo de tiempo $0s \leq t \leq 100s$.

En el caso $k = 10,000 \frac{Kg}{s^2}$ los errores porcentuales son aceptables:

$$\mathcal{E} \leq 0.66 \% \quad \text{para el ángulo}$$

$$\mathcal{E} \leq 1.32 \% \quad \text{para el momento radial}$$

$$\mathcal{E} \leq 0.14 \% \quad \text{para el radio, con } 0s \leq t \leq 100s$$

Por tanto, un resorte con constante de elasticidad $k = 10,000 \frac{Kg}{s^2}$ es lo suficientemente rígido para que las ecuaciones del péndulo elástico (1.15)-(1.18) describan numéricamente el movimiento del péndulo simple.

Como se mostró en el capítulo anterior, las condiciones iniciales que proporcionan el caso más interesante para observar el movimiento de este tipo de péndulo son las que conducen al fenómeno de resonancia autoparamétrica (1.28); esta condición fue derivada para desplazamientos pequeños. En la Figura 2.5 se presentan mapas de las figuras generadas por péndulos elásticos en resonancia autoparamétrica con $\omega_r = 4.42$ bajo diferentes condiciones iniciales de desplazamiento. El inciso a) muestra el mapa presentado en el manual de laboratorio de Reed College[14], el cual fue construido integrando las ecuaciones (1.15)-(1.18) para diferentes valores de tiempo final.

Las ecuaciones (1.15)-(1.18) fueron derivadas para todo tipo de deformación. En la Figura 2.6 se muestra un mapa de figuras de un péndulo elástico donde las condiciones de deformación son grandes tanto para el ángulo como para el radio, se utilizan los mismos parámetros de longitud inicial $L = 1.5049m$ y constante de elasticidad $k = 7 \frac{Kg}{s^2}$ que en la Figura 2.5. Además, también se utilizó la masa adecuada que conduce a resonancia autoparamétrica con $\omega_r = 4.42$.

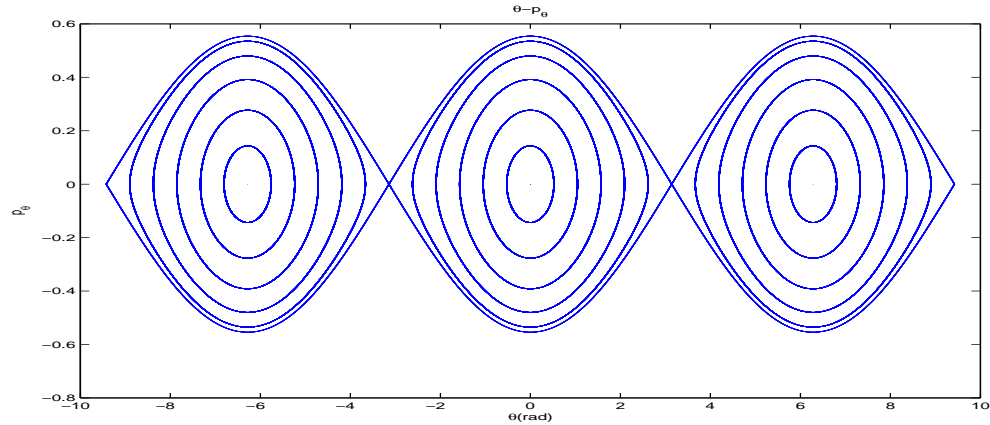


Figura 2.4: Espacio fase del péndulo elástico de constante de elasticidad $k = 10,000 \frac{Kg}{s^2}$ en el intervalo de tiempo $0s \leq t \leq 100s$.

De las Figuras 2.5 y 2.6 se nota que las oscilaciones del péndulo elástico bajo resonancia autoparamétrica presentan dos tipos de movimiento. Cuando los desplazamientos iniciales en x son casi los mismos que los desplazamientos iniciales en y se presenta el movimiento al que llamaremos media luna como lo muestra la Figura 2.7a. En caso contrario, el movimiento que tiene lugar es como el de la Figura 2.7b al que llamaremos del tipo limón por su similitud con un limón al que se le ha quitado una tajada de la parte superior, inferior o ambas.

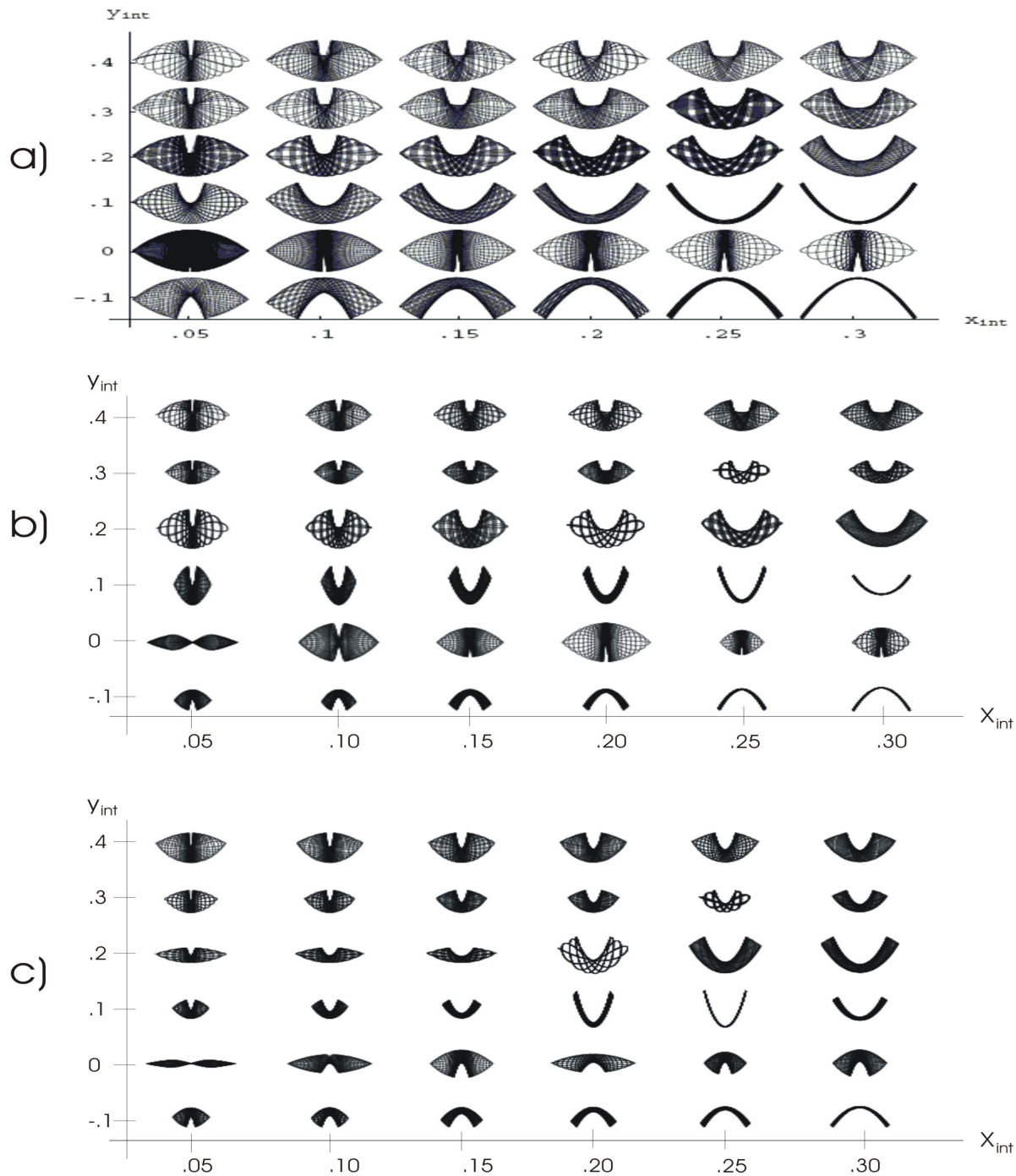


Figura 2.5: Mapas del movimiento del péndulo para pequeñas deformaciones: a) Presentado en [14] para diferentes valores de t y utilizando el integrador numérico de Mathematica $DSolve$, b) Construido con la solución numérica de las ecuaciones (1.24) y (1.25), y c) Resultado numérico de la solución de las ecuaciones (1.15)-(1.18). Las ecuaciones de b) y c) se integraron con Runge Kutta de orden 4, constante de elasticidad $k = 7 \frac{Kg}{s^2}$ para $0s \leq t \leq 50s$. Nótese que el cero de referencia en este caso se encuentra en la posición de equilibrio.

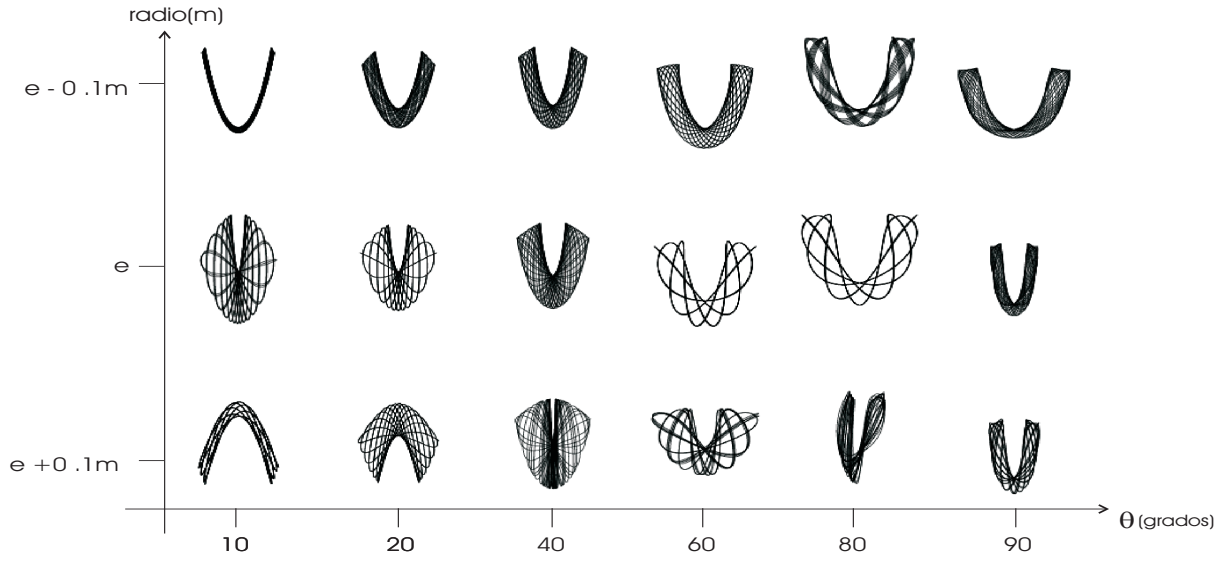


Figura 2.6: Mapa del movimiento del péndulo elástico con constante de elasticidad $k = 7$ para grandes deformaciones en el intervalo de tiempo $0s \leq t \leq 50s$.

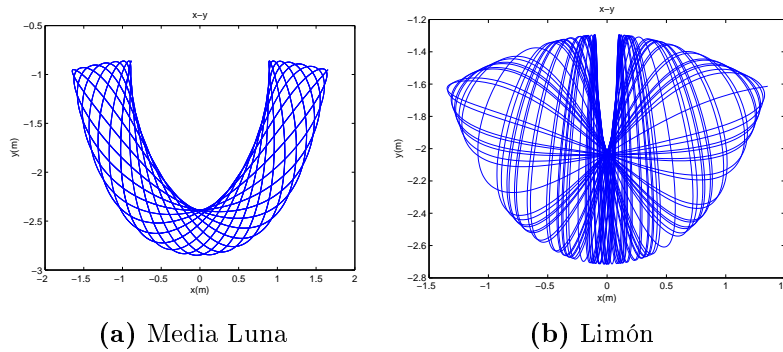


Figura 2.7: Tipos de movimientos del péndulo elástico bajo resonancia autoparamétrica

2.3. Péndulo Elástico de resorte de masa no despreciable

La energía total del péndulo elástico de resorte de masa no despreciable oscila alrededor de 5 veces más que la de un péndulo de resorte de masa despreciable, ya que mientras para este último la diferencia entre la energía total inicial y 10 segundos después es del orden de 10^{-7} (ver Figura 2.2), al considerar un péndulo elástico con resorte de densidad $\rho = 0.01$, bajo las mismas condiciones de masa y longitud inicial, la oscilación sobre el mismo intervalo de tiempo es del orden de 10^{-2} (ver Figura 2.8). A pesar de esto, una oscilación de este orden continua siendo una buena aproximación numérica al valor esperado de energía constante, pues significa un error porcentual menor a 2%.

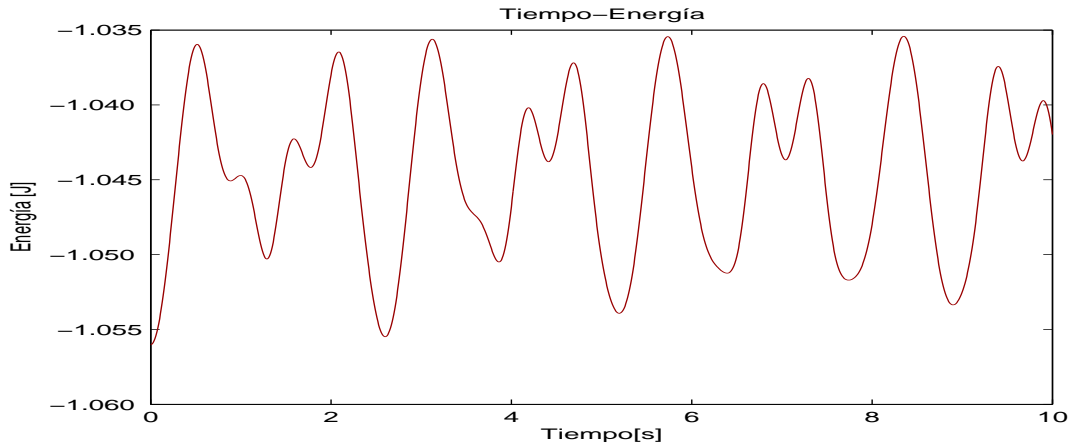


Figura 2.8: Energía del péndulo elástico de masa $m = 0.25 \text{ Kg}$, longitud inicial $L = 0.50 \text{ m}$, constante de elasticidad $k = 7 \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2}$, densidad de masa del resorte $\rho = 0.01$ y ángulo inicial $\theta_0 = 45^\circ$ en el intervalo de tiempo $0s \leq t \leq 100s$.

Así como para ciertas condiciones de constante de elasticidad se recuperó el movimiento del péndulo simple en la sección anterior, es de esperarse que bajo ciertas condiciones de densidad de masa en el resorte se recupere el movimiento del péndulo elástico de resorte de masa despreciable. En la Figura 2.9 se muestran los mapas de figuras resultado de la integración numérica de las ecuaciones (1.29)-(1.32) para resortes de densidad de masa $\rho = 5.0 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$ y $\rho = 0.01 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$ con las mismas condiciones de resonancia autoparamétrica, desplazamiento y constante de elasticidad k que en la Figura 2.5 sobre el mismo intervalo de tiempo $0s \leq t \leq 50s$.

Aunque para $\rho = 0.01$ el mapa de figuras de desplazamientos pequeños parezca igual que el de un péndulo simple de resorte de masa despreciable, las posiciones de equilibrio de los péndulos elásticos de resortes de masa despreciable y no despreciable sólo coinciden en dos dígitos con este valor de densidad. Por otra parte, considerando desplazamientos grandes, la Figura 2.10 muestra los mapas de figuras obtenidos para resortes de densidad de masa $\rho = 5.0 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$, $\rho = 0.01 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$ y $\rho = 0.0001 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$ con

las condiciones de resonancia autoparamétrica, desplazamientos iniciales y constante de elasticidad k de la sección 2.2 (Figura 2.6) en el intervalo de tiempo $0s \leq t \leq 50s$.

Al igual que $\rho = 0.01 \frac{Kg}{m}$, $\rho = 0.0001 \frac{Kg}{m}$ no proporciona la misma posición de equilibrio que la de un péndulo donde se desprecia la masa del resorte pues coincide únicamente en 4 dígitos, la constante de densidad de masa que permita recuperar completamente el movimiento del péndulo elástico de la sección anterior es la más pequeña posible. Por ejemplo, al comparar los resultados de la integración numérica de (1.29)-(1.32) utilizando $\rho = 1.0 \times \rho^{-13} \frac{Kg}{m}$ con los de la integración de (1.15)-(1.18) los errores porcentuales son:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\leq 1.0 \times 10^{-8} \% && \text{para el momento angular} \\ \mathcal{E} &\leq 1.0 \times 10^{-7} \% && \text{para el ángulo} \\ \mathcal{E} &\leq 1.0 \times 10^{-8} \% && \text{para el momento radial} \\ \mathcal{E} &\leq 1.0 \times 10^{-10} \% && \text{para el radio, con } 0s \leq t \leq 100s \end{aligned}$$

y las posiciones de equilibrio coinciden en 13 dígitos.

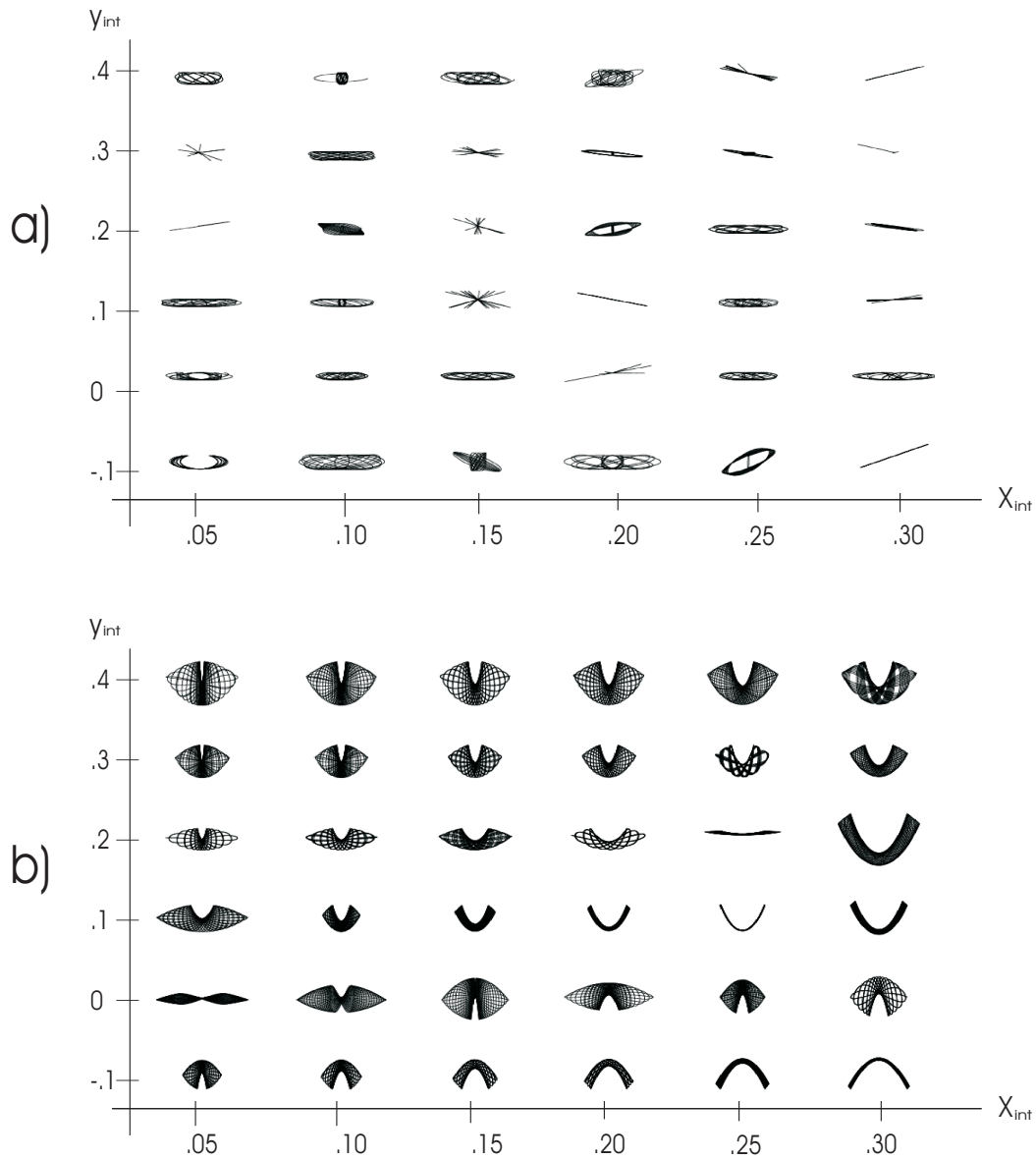


Figura 2.9: Mapas de movimiento de los péndulos elásticos de constante de elasticidad $k = 7 \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2}$, $\omega_r = 4.42$ y resortes de densidad de masa: a) $\rho = 5.0 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$ y b) $\rho = 0.01 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$ para deformaciones pequeñas en el intervalo de tiempo $0s \leq t \leq 50s$. Nótese que el cero de referencia en este caso se encuentra en la posición de equilibrio.

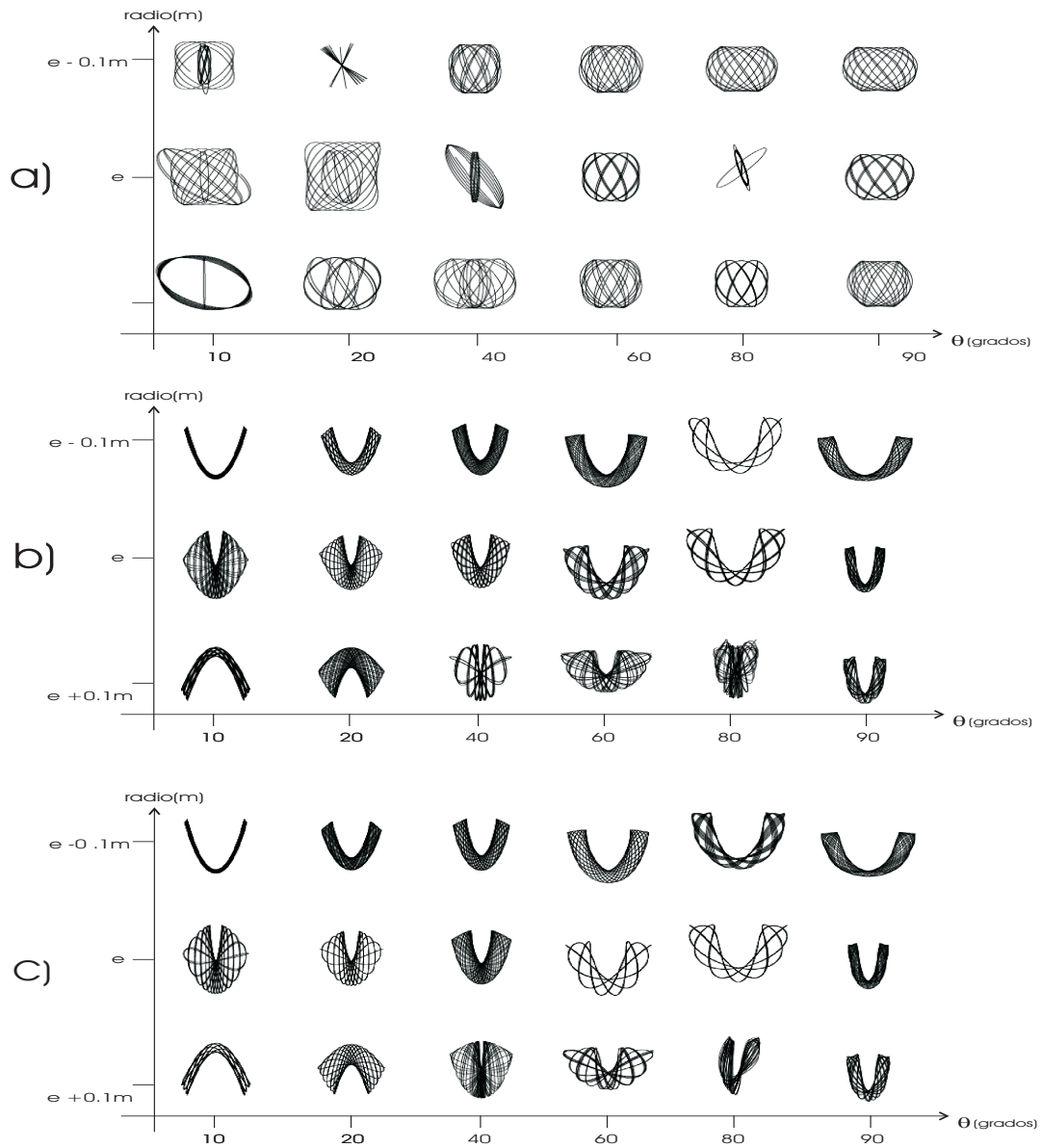


Figura 2.10: Mapas de movimiento de los péndulos elásticos de constante de elasticidad $k = 7$ y resortes de densidad de masa: a) $\rho = 5.0 \frac{Kg}{m}$, b) $\rho = 0.01 \frac{Kg}{m}$ y c) $\rho = 0.0001 \frac{Kg}{m}$ para grandes deformaciones $0s \leq t \leq 50s$.

Capítulo 3

Conclusiones

Se comprobó que la aproximación de la integración numérica de la ecuación del péndulo simple (1.1) con Runge Kutta de orden 4 y tamaño de paso $dt = 0.01$ es muy aceptable. Utilizando este tamaño de paso en la integración numérica de las ecuaciones del péndulo elástico de resorte de masa despreciable (1.15)-(1.18), y constante de elasticidad $k = 10,000 \frac{Kg}{g^2}$ se lograron errores porcentuales, respecto a la solución analítica del péndulo simple (1.14), que permiten concluir que bajo este parámetro de rigidez se recupera numéricamente el movimiento del péndulo simple.

Al construir el mapa de figuras de movimiento de un péndulo elástico, en el cual las condiciones iniciales son desplazamientos grandes, con la misma condición de resonancia autoparamétrica derivada para pequeñas deformaciones (1.28), se observa que las figuras son del mismo aspecto que las logradas para pequeños desplazamientos; considerando al cero de referencia en la posición de equilibrio como en la Figura 1.3, se presenta movimiento del tipo media luna (Figura 2.7a) cuando la deformación en x y en y son casi iguales, y del tipo limón (Figura 2.7b) en otro caso. Se llega a esta misma conclusión al considerar un resorte de masa no despreciable utilizando la condición derivada para resonancia autoparamétrica (1.43).

Como se esperaba, se verificó numéricamente que los movimientos del péndulo simple y del péndulo elástico de resorte de masa despreciable, se recuperan de las ecuaciones de movimiento del péndulo elástico de resorte de masa no despreciable con las condiciones de rigidez y densidad de masa adecuadas. Así mismo, se comprueba que las figuras de movimiento logradas con este método de integración empatan con las presentadas por Hayden MacGinnes y Hal Haggard [14].

Este tema de investigación aún no ha sido completamente desarrollado; tal como se menciona en el desarrollo de este trabajo, no existe una solución analítica de este problema, así pues no es posible medir el error absoluto del método de integración utilizado. Utilizando funciones estimadoras Boroni presenta una estimación al error de los resultados numéricos que obtuvo. Futuros trabajos de investigación pueden realizarse en esta dirección y en otras, por ejemplo, la derivación de condiciones de resonancia autoparamétrica para los casos en los que las condiciones iniciales son desplazamientos grandes y la integración numérica utilizando la condición de resonancia

autoparamétrica que deriva Christensen [2].

Apéndice A

Derivación de las ecuaciones de movimiento

A.1. Péndulo Simple

De la Figura 1.1 la posición de la masa en coordenadas polares es $\overrightarrow{P}(t) = (L \sin \theta, L \cos \theta)$. Así pues, la posición de la masa en un tiempo t estará determinada por $\theta(t)$.

La ecuación de movimiento del péndulo es muy fácil de obtener con la mecánica de Newton. En este trabajo, las ecuaciones de movimiento de los sistemas mecánicos presentados son derivadas a partir de las ecuaciones de Hamilton, esto con el fin de obtener sistemas de ecuaciones de primer grado para los grados de libertad y los momentos asociados a estos. Para esto, es necesario definir la energía potencial y cinética del sistema.

La energía cinética T está dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 \quad (\text{A.1})$$

ya que $|\dot{x}| = L\dot{\theta}$. Y la energía potencial del sistema es:

$$V = mgL(1 - \cos \theta) \quad (\text{A.2})$$

De esta manera, el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 - mgL(1 - \cos \theta)$$

Debido a que el Lagrangiano satisface [15]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = p_{\theta}$$

se tiene que:

$$\dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{mL^2} \quad (\text{A.3})$$

Puesto que este sistema es conservativo, el Hamiltoniano se define por:

$$\mathcal{H} = T + V = E \quad (\text{A.4})$$

Luego,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + mgL(1 - \cos \theta) \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo (A.3)

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2mL^2} + mgL(1 - \cos \theta) \quad (\text{A.6})$$

Por otra parte, de las ecuaciones de Hamilton [5]

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta \quad (\text{A.8})$$

Como consecuencia, se encuentra nuevamente que se satisface (A.3) y que:

$$\dot{p}_\theta = -mgL \sin \theta \quad (\text{A.9})$$

Derivando (A.3)

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{mL^2} \quad (\text{A.10})$$

Por tanto, de (A.9)

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgL \sin \theta}{mL^2}$$

Luego así, la ecuación de movimiento del péndulo es:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta \quad (\text{A.11})$$

A.2. Péndulo Elástico de resorte de masa despreciable

A.2.1. Coordenadas Polares

El vector de posición de la masa en coordenadas polares es: $\overrightarrow{P}(t) = (r \sin \theta, -r \cos \theta)$. Así, el péndulo elástico (Figura 1.2) tiene dos grados de libertad, la longitud r y el ángulo θ . Por lo tanto, utilizando la mecánica Hamiltoniana se encuentran cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado para describir el movimiento de este sistema.

Se supone que la masa del resorte es suficientemente pequeña comparada con la masa m , de manera que se puede despreciar, también se considera que el resorte se deforma de manera uniforme.

Haciendo análisis de las energías del sistema, se tiene que la energía cinética T del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}m \left| \dot{\vec{P}} \right|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (\text{A.12})$$

mientras que, la energía potencial del sistema está dada por:

$$V = \frac{1}{2}k(r - L)^2 - mgr \cos \theta \quad (\text{A.13})$$

De esta manera, el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r - L)^2 + mgr \cos \theta$$

Dado que, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = p_\theta$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = p_r$,

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$p_r = m\dot{r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (\text{A.15})$$

Construyendo el Hamiltoniano [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}k(r - L)^2 - mgr \cos \theta \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - L)^2 - mgr \cos \theta \end{aligned}$$

De las ecuaciones de Hamilton [5] se encuentra un sistema de ecuaciones de primer orden que describen el movimiento de este sistema:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} \quad (\text{A.16})$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta \quad (\text{A.18})$$

$$\Rightarrow \dot{p}_\theta = -mgr \sin \theta \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \dot{r} \quad (\text{A.20})$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -\dot{p}_r \quad (\text{A.22})$$

$$\Rightarrow \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - k(r - L) + mg \cos \theta \quad (\text{A.23})$$

Derivando (A.17) y (A.21) , y sustituyendo (A.19) y (A.23) se hallan las ecuaciones de movimiento en ecuaciones diferenciales de segundo orden que también representan el movimiento de este tipo de péndulo elástico:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta \quad (\text{A.24})$$

$$\ddot{r} = \dot{\theta}^2 r - \frac{k}{m}(r - L) + g \cos \theta \quad (\text{A.25})$$

A.2.2. Coordenadas Cartesianas

En esta sección se limita únicamente a obtener el Lagrangiano del sistema, que será utilizado para el análisis del comportamiento del péndulo elástico restringido a pequeñas deformaciones. De la Figura 1.3, las energías cinética y potencial son:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = \frac{1}{2}k(L - r)^2 + mgy$$

donde

$$r = \sqrt{(y_0 - y)^2 + x^2}$$

con

$$y_0 = L + \frac{mg}{k}$$

Así, el Lagrangiano para éste sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(L - r)^2 - mgy \quad (\text{A.26})$$

A.3. Péndulo Elástico de resorte de masa no despreciable

En esta sección se derivan las ecuaciones del péndulo elástico presentado en la Figura 1.2, donde la masa del resorte no es despreciable. Este es un caso más complejo que el anterior, pues al no tener masa despreciable, el resorte aporta tanto energía cinética como potencial al sistema. Se considera que la densidad de masa del resorte es ρ , y que la deformación del resorte, al igual que en el caso anterior, es uniforme.

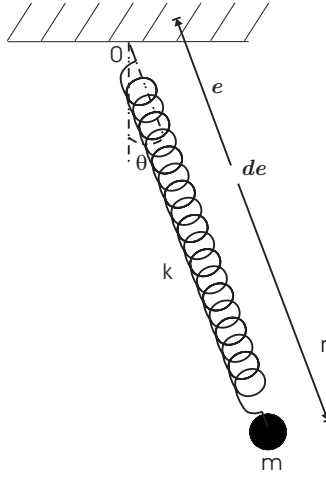


Figura A.1: Péndulo elástico de masa m y longitud variable r con densidad de masa ρ

Sea $\vec{P} = (r \sin \theta, -r \cos \theta)$ en coordenadas polares el vector de posición de la masa m para un tiempo t , y sea $d\vec{e}$ un diferencial del resorte cuyo vector de posición es \vec{e} como lo muestra la Figura A.1. Se supone que inicialmente, cuando el resorte aún no es deformado, $|\vec{e}| = e$ y $|\vec{P}| = L$. Luego así, para un tiempo t el resorte se deforma de la longitud L a $|\vec{P}|$. De una regla de tres:

$$\vec{e} = \frac{e}{L} \vec{P}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{e}} = \frac{e}{L} \dot{\vec{P}}$$

Entonces, la energía cinética del resorte está dada por:

$$\begin{aligned} T_{\text{resorte}} &= \int_0^L \left[\frac{1}{2} (\rho de) |\dot{\vec{e}}|^2 \right] = \int_0^L \left[\frac{1}{2} (\rho de) \left(\frac{e}{L} \right)^2 |\dot{\vec{P}}|^2 \right] \\ &\Rightarrow T_{\text{resorte}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho L}{3} \right) |\dot{\vec{P}}|^2 \end{aligned}$$

Ya que se supone que el resorte se deforma de manera uniforme, el centro de masa del resorte está dado por:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{2}\vec{P}$$

Esto implica que la energía potencial del resorte es:

$$V_{resorte} = -\frac{\rho L}{2}gr \cos \theta$$

De la sección anterior se conocen las energías cinética (A.12) y potencial (A.13) del péndulo elástico en coordenadas polares, sólo resta agregar las energías del resorte para así obtener las energías del sistema:

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\rho L}{3}\right) \left|\dot{\vec{P}}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V = \frac{1}{2}k(r - h)^2 - \left(m + \frac{\rho L}{2}\right)gr \cos \theta$$

Por tanto, el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r - L)^2 + \left(m + \frac{\rho L}{2}\right)gr \cos \theta$$

De la expresión anterior se encuentran los ímpetus generalizados p_θ y p_r .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = p_\theta = \left(m + \frac{\rho L}{3}\right)r^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)r^2} \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = p_r = \left(m + \frac{\rho L}{3}\right)\dot{r}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)} \quad (\text{A.28})$$

De esta manera, el Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)} + \frac{p_\theta^2}{2\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)r^2} + \frac{1}{2}k(r - L)^2 - \left(m + \frac{\rho L}{2}\right)gr \cos \theta \quad (\text{A.29})$$

De (A.16) y (A.18)

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)r^2} \\
\dot{p}_\theta &= -\left(m + \frac{\rho L}{2}\right)gr \sin \theta \\
\Rightarrow \ddot{\theta} &= -\frac{\left(m + \frac{\rho L}{2}\right)g}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)r} \sin \theta
\end{aligned} \tag{A.30}$$

De (A.20) y (A.22)

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{p_r}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)} \\
\dot{p}_r &= \frac{p_\theta^2}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)r^3} - k(r - L) + \left(m + \frac{\rho L}{2}\right)g \cos \theta \\
\Rightarrow \ddot{r} &= \dot{\theta}^2 r - \frac{k}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)}(r - L) + \frac{\left(m + \frac{\rho L}{2}\right)g \cos \theta}{\left(m + \frac{\rho L}{3}\right)}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Las ecuaciones (A.30) y (A.31) forman el sistema de ecuaciones que describen el movimiento de un péndulo elástico considerando que la masa del resorte no es despreciable.

A continuación se deriva la ecuación de movimiento de un péndulo simple considerando que el hilo es de masa no despreciable, es decir, se puede considerar como una barra. La figura que representa este sistema es la misma que para el péndulo simple (Figura 1.1), donde la barra, que se consideró de masa despreciable en esa sección, ahora posee una densidad de masa ρ .

Considerando un diferencial de masa $d\vec{e}$, \vec{e} su vector de posición, y \vec{P} el vector de posición de la masa m en el tiempo t , y utilizando los argumentos de la sección anterior se puede concluir que:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e}} &= \frac{|\vec{e}|}{L} \dot{x}^2 \\
\Rightarrow T_{barra} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\rho L}{3}\right) (L\dot{\theta})^2
\end{aligned}$$

El centro de masa de una barra de densidad ρ es:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\rho L}{2}x$$

De el vector de posición $x(t) = (L \sin \theta, L \cos \theta)$ se tiene:

$$V_{barra} = \frac{\rho L^2}{2}g(1 - \cos \theta)$$

Por tanto, valiéndose de (A.1) y (A.2):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(m + \frac{\rho L}{3} \right) (L\dot{\theta})^2 - \left[\left(m + \frac{\rho L}{2} \right) gL(1 - \cos \theta) \right] \\ \Rightarrow \ddot{\theta} &= - \frac{\left(m + \frac{\rho L}{2} \right) g}{\left(m + \frac{\rho L}{3} \right) L} \sin \theta\end{aligned}\tag{A.32}$$

Apéndice B

Ángulos pequeños

Cuando se aproxima a ángulos pequeños una función, si se desea acotar el error de aproximación se restringe el valor máximo para éste ángulo. Se puede conocer este valor máximo y el error de aproximación desarrollando en series de Taylor.

Dada $f(x)$ función $n + 1$ derivable en una vecindad de x que contenga a x_0 , por el teorema de Taylor se verifica que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\text{B.1})$$

donde c está entre x y x_0 , $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ es el polinomio de Taylor desarrollado alrededor de x_0 de orden n , la expresión $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ se denomina resto de Lagrange, ya que fue este quien la derivó.

A continuación se desarrolla la aproximación $x = \sin x$. Puesto que $\sin x$ es infinitamente diferenciable, aplicando B.1 con $x_0 = 0$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{\sin^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{(-1)^{n+1} \cos c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

De esto, si aproxima $\sin \theta$ a θ , se tiene $n = 2$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} \cos \bar{\theta} \% \quad \text{con } 0 < \bar{\theta} < \theta.$$

Por lo tanto, el error absoluto \mathcal{E} en esta aproximación es $\mathcal{E} = -\left(\frac{\theta^3}{6}\right) \cos \bar{\theta}$, entonces $|\mathcal{E}| < \frac{\theta^3}{6}$ pues $|\cos \bar{\theta}| < 1$. Esto implica que el error porcentual es menor a $\frac{\theta^2}{6}$. De esta forma, si deseamos que el error porcentual sea menor a 5%:

$$\mathcal{E} < 100 \left(\frac{\theta^2}{6} \right) < 5 \Rightarrow \theta < 31.28^\circ$$

Si $\theta = 10^\circ$ el error porcentual E satisface:

$$\mathcal{E} < .5077\%$$

Apéndice C

Rutinas

C.1. Rutinas de Integración Numérica

Como se menciona anteriormente en este trabajo se utiliza el integrador numérico Runge Kutta de Orden 4 para n ecuaciones, cuya rutina en *Matlab* 7.0 es la siguiente:

```
function [T,Y]=RK4n(f,a,b,ya,dt)
M=floor((b-a)/dt)+1;
T=zeros(1,M+1);
Y=zeros(M+1,length(ya));
T=a:dt:b;
Y(1,:)=ya;
for j=1:M
    k1=dt*feval(f,T(j),Y(j,:));
    k2=dt*feval(f,T(j)+dt/2,Y(j,:)+k1/2);
    k3=dt*feval(f,T(j)+dt/2,Y(j,:)+k2/2);
    k4=dt*feval(f,T(j)+dt,Y(j,:)+k3);
    Y(j+1,:)=Y(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
```

C.1.1. Péndulo Simple

En esta rutina se presenta la integración numérica de las ecuaciones diferenciales (A.3) y (A.9), además se presentan las expresiones del péndulo simple, y la solución analítica (1.14) y numérica para un tiempo dado t en el intervalo de integración $[a1, a2]$. También proporciona expresiones que permiten la representación gráfica de la posición de la masa, ya sea en coordenadas cartesianas o polares.

```

clear all
clc;
global m g h grados
h=input('Longitud del péndulo (m): ');
m=input('Masa (kg): ');
grados=input('Angulo inicial(grados): ');
velocidad=input('Velocidad angular inicial (grados/s): ');
a1=input('Tiempo inicial(s): ');
a2=input('Tiempo final(s): ');
dt=input('Tamano del paso: ');
g=9.8;
% vector de condiciones iniciales u(1)=ángulo inicial u(2)=velocidad inicial
u=[grados*pi/180,m*velocidad*h^2];

% periodo t
s=sin(u(1)/2);
t=2*pi*sqrt(h/g)*(1+(1/4)*s+(9/128)*s^2+(25/256)*s^3+(1225/16384)*s^4);

% genera la solución método Runge Kutta de orden 4
[T U]=RK4n(@fra',a1,a2,u,dt);

% solución analítica THETA
b=sqrt(g/h);
for p=1:length(T)
    c(p)=T(p)*b;
    THETA(p)=2*asin(ellipj(c(p)+ellipke(s^2),s^2)*s);
end

for p=1:length(T)
    u(p)=U(p,1); % ángulo
    V(p)=U(p,2); % momento del ángulo
    x(p)=h*sin(u(p)); % coordenada cartesiana x
    y(p)=-h*cos(u(p)); % coordenada cartesiana y
    W(p)=(1/(2*m*h^2))*V(p)^2; % energía cinética en el tiempo T(p)
    X(p)=m*g*h*(1-cos(u(p))); %energía potencial en el tiempo T(p)
    Y(p)=W(p)+X(p); %Energía total en el tiempo T(p)
end

```

donde *fra* está es la rutina de la función que representa las ecuaciones (A.3)-(A.9) :

```
function [du]=fra(t,u)
global m g k h
du=zeros(size(u));
du(1)=u(2)/(m*h^2);
du(2)=-m*g*h*sin(u(1));
```

C.1.2. Péndulo Elástico de resorte de masa despreciable

En la siguiente rutina se presenta la integración de las ecuaciones (1.15)-(1.18) que describen el movimiento de este sistema, así como las expresiones numéricas para las posiciones x y y , las velocidades \dot{x} y \dot{y} , y las energías cinética, potencial y total para un t en el intervalo de integración $[a1, a2]$.

```
clear all
clc;
global m g k h grados
h=input('Longitud del resorte sin deformar(m): ');
m=input('Masa (kg): ');
k=input('Constante de elasticidad (Kg/(s^2)) ');
grados=input('Angulo inicial(grados): ');
r0=input('Radio inicial (m): ');
rvel=input('Velocidad radial inicial (grados/s): ');
avel=input('Velocidad angular inicial (grados/s): ');
a1=input('Tiempo inicial: ');
a2=input('Tiempo final: ');
dt=input('Tamano del paso: ');
g=9.8;
%posición de equilibrio
e=h+(m*g)/k;
%vector de condiciones iniciales u(1)=ángulo inicial u(2)=momento inicial
%del radio u(3)= ángulo inicial (en radianes) u(4)= momento angular inicial
u=[r0,rvel/m,grados*pi/180,avel/(m*r0^2)];
%genera la solución método Runge Kutta de orden 4
[T U]=RK4n(@fra,a1,a2,u,dt);
for p=1:length(T)
```

```

r(p)=U(p,1); % radio
Pr(p)=U(p,2); % momento radial
a(p)=U(p,3); % ángulo
Pa(p)=U(p,4); % momento angular
R(p)=U(p,2)/m; % velocidad radial
A(p)=U(p,4)/(m*r(p)^2); % velocidad angular
x(p)=r(p)*sin(a(p)); % posición x
y(p)=-r(p)*cos(a(p)); % posición y
X(p)=r(p)*A(p)*cos(a(p))+R(p)*sin(p); % velocidad x
Y(p)=-r(p)*A(p)*sin(a(p))+R(p)*cos(a(p)); % velocidad y
cin(p)=.5*m*(A(p)^2*(r(p)^2)+(R(p)^2)); % energía cinética
pot(p)=.5*k*(r(p)-h)^2-m*g*r(p)*cos(a(p)); % energía potencial
total(p)=cin(p)+pot(p); % energía total

```

end

con *fra* como la representación de las ecuaciones que representan al péndulo elástico de resorte de masa despreciable (1.15)-(1.18):

```

function [du]=fra(t,u) global m g k h
du=zeros(size(u));
du(1)=u(2)/m;
du(2)=m*g*cos(u(3))-k*(u(1)-h)+(u(4)^2)/(m*u(1)^3);
du(3)=u(4)/(m*u(1)^2);
du(4)=-m*g*u(1)*sin(u(3));

```

C.1.3. Péndulo Elástico de resorte de masa no despreciable

La rutina de integración de las ecuaciones que modelan este sistema (1.29)-(1.32), es muy parecida a la presentada en C1.2, salvo que es necesario considerar el valor de ρ ; la función *fra* que permite la integración de estas ecuaciones es:

```

function [du]=fra(t,u)
global m g k h rho
c1=m+rho/2;
c2=m+rho/3;
du=zeros(size(u));
du(1)=u(2)/c2;
du(2)=c1*g*cos(u(3))-k*(u(1)-h)+(u(4)^2)/(c2*u(1)^3);

```



```
du(3)=u(4)/(c2*u(1)^2);
du(4)=-c1*g*u(1)*sin(u(3));
```

A continuación, la rutina de integración en la que dada una frecuencia de oscilación para el resorte, constante de elasticidad y condiciones iniciales de radio, ángulo y velocidades, se producen las condiciones necesarias de masa y longitud del resorte sin deformar para lograr que el sistema sufra resonancia autoparamétrica.

```
clf
clear all
global m g k h rho
wr=input('Frecuencia de oscilación del resorte= ');
rho=input('Densidad de masa del resorte (kg/m)= ');
k=input('Constante de elasticidad= ');
grados=input('Angulo inicial(grados): ');
r0=input('Radio inicial (m): ');
rvel=input('Velocidad radial inicial (grados/s): ');
avel=input('Velocidad angular inicial (grados/s): ');
a1=input('Tiempo inicial: ');
a2=input('Tiempo final: ');
dt=input('Tamano del paso: ');
g=9.8;
%definición de la longitud inicial y masa necesarias para resonancia
%autoparámetrica
q=(wr^2)*(2*k-g*rho);
h=6*g*k/q;
m=(2*k*k-3*g*k*rho)/q;
%posición de equilibrio
e=h+((m*g)/k)+((rho*h*g)/(2*k));
%vector de condiciones iniciales u(1)=ángulo inicial u(2)=momento inicial
%del radio u(3)= ángulo inicial (en radianes) u(4)= momento angular inicial
u=[r0,rvel/m,grados*pi/180,avel/(m*r0^2)];
%genera la solución método Runge Kutta de orden 4
[T U]=RK4n(@fra,a1,a2,u,dt);
for p=1:length(T)
    r(p)=U(p,1); % radio
```

```

Pr(p)=U(p,2); % momento radial
a(p)=U(p,3); % ángulo
Pa(p)=U(p,4); % momento angular
R(p)=U(p,2)/(m+((h*rho)/3)); % velocidad radial
A(p)=U(p,4)/((m+((h*rho)/3))*r(p)^2); % velocidad angular
x(p)=r(p)*sin(a(p)); %posición x
y(p)=-r(p)*cos(a(p)); %posición y
X(p)=r(p)*A(p)*cos(a(p))+R(p)*sin(p); %velocidad x
Y(p)=-r(p)*A(p)*sin(a(p))+R(p)*cos(a(p)); %velocidad y
cin(p)=.5*(m+((h*rho)/3))*(A(p)^2*(r(p)^2)+(R(p)^2)); %energía cinetica
pot(p)=.5*k*(r(p)-h)^2-(m+((h*rho)/2))*g*r(p)*cos(a(p)); %energía potencial
total(p)=cin(p)+pot(p); %energía total
end

```

C.2. Rutina de Animación

Esta rutina de animación, implementada en *Wolfram Mathematica* 6.0, permite visualizar en tiempo real la posición de la masa para diferentes parámetros, con un apartado especial para la resonancia autoparamétrica. También muestra de forma opcional los niveles de energía mediante una gráfica de barras, además es posible generar la gráfica de movimiento.

```

n = 10; Rm = 0.75;
Construccion[{x_, y_}] := Module[{l, Dx, Dy, A, i, Th, Cth, Sth, P},
  l = Sqrt[x^2 + y^2];
  Th = ArcTan[x, y];
  Cth = Cos[Th]; Sth = Sin[Th];
  P = {{Cth, -Sth}, {Sth, Cth}};
  Dx = l/(2 n);
  Dy = Abs[Sqrt[d^2 - (Dx/2)^2]];
  A = {{0, 0}};
  For[i = 0, i < 2 n, i++,
    AppendTo[A, P.{Dx/2 + i*Dx, If[OddQ[i], -Dy, Dy]}}];
  ];
  {AppendTo[A, P.{l, 0}], P.{l + Rm, 0}}
fra[u_] := { u[[2]]/c2, c1*g*Cos[u[[3]]] - k*(u[[1]] - h) + (u[[4]]^2)/(c2*u[[1]]^3),
  u[[4]]/(c2*u[[1]]^2), -c1*g*u[[1]]*Sin[u[[3]]] };

```

```

V[n_] := Module[{k1, k2, k3, k4, ant, nue},
  If[n == 0,
    nue = {r0, vr0, a0, va0};
    AppendTo[A, nue];
    nue,
    ant = A[[n]];
    k1 = dt*fra[ant];
    k2 = dt*fra[ant + k1/2];
    k3 = dt*fra[ant + k2/2];
    k4 = dt*fra[ant + k3];
    nue = ant + (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4)/6;
    AppendTo[A, nue];
  ];
];

Posicion[t_] := Module[{r, th, n, m, p},
  n = Floor[t/dt];
  m = Dimensions[A][[1]];
  If[n < m, n = m - 1, n = m];
  V[n];
  r = A[[n + 1, 1]]; th = A[[n + 1, 3]];
  p = r*Sin[th], -r*Cos[th];
  AppendTo[B, p]; p
];

Inicializacion[R0_, VR0_, A0_, VA0_, M_, K_, Rho_, H_, G_, Dt_] := Module[{}],
  k = K; r0 = R0; vr0 = VR0; va0 = VA0; a0 = A0; m = M; rho = Rho;
  h = H; g = G; dt = Dt; L = h; d = L/(2 n);
  c1 = M + Rho/2; c2 = M + Rho/3; A = {}; B = {}; L = H; d = L/(2 n);
  t = 0;];

FR[n_] := A[[n, 2]]/c2; t = 0;
FA[n_] := A[[n, 4]]/(c2*A[[n, 1]]^2);
EC[t_] := Module[{n, m},
  n = Floor[t/dt];
  m = Dimensions[A][[1]];
  If[n < m, n = m, n = m + 1];
  0.5*c2*(FA[n]^2*A[[n, 1]]^2 + FR[n]^2)
];

```

```

EP[t_] := Module[{n, m},
  n = Floor[t/dt];
  m = Dimensions[A][[1]]; If[n < m, n = m, n = m + 1];
  0.5*k*(A[[n, 1]] - h)^2 - c1*g*A[[n, 1]]*Cos[A[[n, 3]]]
];
ET[t_] := EC[t] + EP[t];
Needs["BarCharts` "]

TabView["Pendulo elastico" ->(*Sin restricciones*)
  Manipulate[
    Inicializacion[r0, 0, a0, 0, m, k, rho, h, g, 0.025];
    Animate[p = Posicion[t]; R = Construccion[p];
    Show[ListLinePlot[R[[1]],PlotRange->{{-20, 20},{-20, 20}},AspectRatio->1/1,Axes->
    {True, False}],
      Graphics[{{Red, Disk[R[[2]], Rm]}},
        {t, 0, t1, dt}, ControlPlacement->Bottom,DefaultDuration->t1,
        AnimationRepetitions->1, AnimationRunning ->False, ControlPlacement ->Left],
    Item[Style["Posicion Inicial", Bold, Medium], Alignment ->Center],
    {{r0, 10, Radio Inicial"}, 1, 10},
    {{a0,0,"Ángulo Inicial"},-Pi,Pi},Delimiter,Item[Style["Tiempo Final",Bold,Medium],
      Alignment ->Center],
    {{t1, 60, },}, Delimiter, Item[Style["Masa", Bold, Medium], Alignment ->Center],
    {{m, 0.5, },}, Delimiter, Item[Style["Condiciones del Resorte", Bold, Medium],
      Alignment ->Center],
    {{k, 7, Constante de elasticidad"}, 1, 25},
    {{h, 10, "Longitud sin deformación"}, 1, 10},
    {{rho, 0.5, "Densidad de masa"}, 0.01, 1}, Delimiter,Item[Style[".opciones", Bold, Medium],
    Alignment ->Center],
    {{gra, False, "Trayectoria"}, {True, False}}, {{ene, False, ".Energías"}, {True, False}},
    Dynamic[Grid[{{Dynamic[If[ene,BarChart[{EC[t], EP[t], ET[t]}, PlotRange ->{-100, 100},
    BarLabels ->{Cinética", "Potencial", "Total"}],}],
      Dynamic[If[gra, ListLinePlot[B, PlotRange ->{{-20, 20}, {-20, 20}}],]]}]]
  ],

```

```

Resonancia Autoparametrica" ->(*Con restricciones*)
Manipulate[q = (wr^2)*(2 k - g*rho); h2 = 6*g*k/q; m2 = (2*k*k - 3*g*k*rho)/q;
  Inicializacion[r0, 0, a0, 0, m2, k, rho, h2, 9.8, 0.025];
  Animate[p = Posicion[t]; R = Construccion[p];
  Show[ListLinePlot[R[[1]], PlotRange ->{{-5, 5}, {-5, 5}},AspectRatio ->1/1,
    Axes ->{True, False}],Graphics[{Red, Disk[R[[2]], Rm]}]],
    {t, 0, t1, dt},ControlPlacement->Bottom,DefaultDuration->t1,
    AnimationRepetitions->1,AnimationRunning ->False, ControlPlacement ->Left],
Item[Style["Frecuencia del Oscilador",Bold,Medium],Alignment->Center],{{wr,1},1,10},
Item[Style["Posicion Inicial", Bold, Medium],Alignment ->Center],
{{r0, 1, Radio Inicial"}, 0.1, 1},
{{a0, 0, .^angulo Inicial"}, -Pi, Pi}, Delimiter,
Item[Style["Tiempo Final", Bold, Medium], Alignment ->Center],
{{t1, 60, },}, Delimiter,Item[Style[Condiciones del Resorte", Bold, Medium],
Alignment ->Center],
{{k, 7, Constante de elasticidad"}, 1, 25},
{{rho, 0.5, "Densidad de masa"}, 0.01, 1}, Delimiter,
Item[Style[.opciones", Bold, Medium], Alignment ->Center],
{{gra, False, "Trayectoria"}, {True, False}}, {{ene, False,.^energias"}, {True, False}},
Dynamic[If[ene, BarChart[{EC[t], EP[t], ET[t]}, PlotRange ->{-10, 10},
BarLabels ->{Cinetica","Potencial", "Total"}], ],
Dynamic[If[gra, ListLinePlot[B, PlotRange ->{{-5, 5}, {-5, 5}}], ||
  ]
]
]

```


Bibliografía

- [1] Peter Lynch, *The swinging Spring: A model for Atmospheric Balance del libro Large Scale Atmospheric-Ocean Dynamics Vol. II: Geometric Methods and Models*, Cambridge University Press, 2002.
- [2] Joseph Christensen, *An Improved calculation of the mass for the resonant spring pendulum*, American Journal of Physics, (2004), Vol. **72(6)**, pp. 818-828.
- [3] R. Haberman, *Mathematical Models, Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*, Prentice-Hall, 1977.
- [4] Abramowitz M. y Stegun I.A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics, 1964.
- [5] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 2002.
- [6] Nicholas Minorsky, *Nonlinear Oscillations*, Robert E. Krieger, 1974.
- [7] M.G. Olsson, *Why does a mass on a spring sometimes misbehave?*, American Journal of Physics, (1976), Vol. **44(12)**, pp. 1211-1212.
- [8] J.J. Stoker, *Nonlinear Vibrations*, Interscience, 1950.
- [9] H.N. Núñez Yépez, A.L. Salas-Brito, C.A. Vargas y L. Vicente, *Onset of Chaos in an Extensible Pendulum*, Physics Letters A, (1990), Vol. **145**, pp. 101-105.
- [10] M.G. Rusbridge, *Motion of the sprung pendulum*, American Journal of Physics, (1980), Vol. **48(2)**, pp. 146-151.
- [11] H.M. Lai, *On the recurrence phenomenon of a resonant spring pendulum*, American Journal of Physics, (1984), Vol. **52(3)**, pp. 219-223.

- [12] Gustavo A. Boroni y Alejandro Clause, *Una formulación matemática orientada a objetos para simulación continua*, Mecánica Computacional, (2005), Vol.**XXIV**, pp. 2451-2470.
- [13] J.M. Tuwankotta y G.R.W. Quispel, *Geometric Numerical Integration Applied to The Elastic Pendulum at Higher Order Resonance*, Journal of Computational and Applied Mathematics, (2008), Vol. **154(1)**, pp. 1-15.
- [14] Hal Haggard y Hayden MacGinnes, *Physics 100 Laboratory Manual*, Reed College, Portland Oregon, 2002.
- [15] Grant R. Fowles y George L. Cassiday, *Analytical Mechanics 6th Edition*, Saunders College Publications, 1999.