

Olvera Aldana Miguel\*, Martínez Nuño Jesús\*, Ramírez Díaz Mario Humberto\*\*  
\*Escuela Superior de Cómputo, I.P.N, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, C.P. 07738  
\*\*Centro de Formación e Innovación educativa, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, C.P. 07738

[molveraa@ipn.mx](mailto:molveraa@ipn.mx), [jsilva@ipn.mx](mailto:jsilva@ipn.mx), [jmartinezn@ipn.mx](mailto:jmartinezn@ipn.mx), [mdiazr@ipn.mx](mailto:mdiazr@ipn.mx).

Resumen:

El presente técnico contiene información sobre el análisis, diseño y desarrollo del proyecto, *Simulación de Deformación de Sólidos con autómatas celulares*, que consiste en simular la deformación de un material sólido al aplicársele cierta fuerza y considerando condiciones iniciales y de frontera específicas. En el cálculo de la deformación se utilizan autómatas celulares, con lo cual se pretende impactar de una forma visual algunos conceptos del área de Física y Cómputo

Palabras clave: autómata celular, ley de Hooke, cuerda tensa, deformaciones, etc.

## SIMULACIÓN DE DEFORMACIÓN DE SÓLIDOS CON AUTÓMATAS CELULARES

### 1. OBJETIVO

Hacer la simulación de la deformación de un material al aplicársele cierta fuerza, la aplicación de la fuerza se simulará con movimientos de algún dispositivo como el Mouse, Teclado o Palanca de

Control. Además se contempla la implementación de un algoritmo que a través de la simulación de la deformación de estructuras sólidas, pueda predecir posibles fracturas.

Las diferentes estructuras a simular serán cilindros, barras y esferas. Se hará uso de la ley de Hooke como primer modelo de iteración entre partículas vecinas dentro de una estructura sólida y los materiales tendrán diferentes condiciones en la frontera.

Por ejemplo, que una barra esté sujeta de una o ambas extremidades; posiblemente que una esfera se encuentre colocada en el suelo, y que un cilindro esté apoyada en una de sus caras.

### 2. INTRODUCCIÓN

La modelación de la mayoría de sistemas físicos, eléctricos y mecánicos, está basada en métodos y expresiones matemáticas, las cuales representan teóricamente el comportamiento de dichos sistemas. Generalmente, para modelar sistemas de naturaleza continua, son utilizadas las ecuaciones diferenciales, las integrales funcionales y las variables de estado, entre otras. Algunos procedimientos de discretización y digitalización de sistemas, permiten realizar análisis numéricos sobre modelos aproximados.

Una técnica matemática compleja utilizada para modelar algunos sistemas físicos y mecánicos es el *Método de los Elementos Finitos (FEM)*, cuya finalidad es discretizar espacios de naturaleza continua, sobre los cuales es posible realizar análisis numéricos para comprender, por medio de un modelo discreto, el comportamiento de sistemas analógicos. No obstante, la complejidad de aplicar FEM sobre algunos sistemas es tal, que



resulta difícil lograr modelos que describan con precisión sus comportamientos. FEM es de amplia utilización en análisis de sistemas y espacios físico-mecánicos donde el objetivo sea comprender la resistencia de materiales, la dinámica de partículas y en general el comportamiento y la interacción de los elementos base del sistema en el espacio; pero quedan aún muchos sistemas complejos y de diversa naturaleza en los cuales no es convencional aplicar esta técnica, por ejemplo, sistemas químicos, biológicos, evolutivos, genéticos, eléctricos, computacionales e inclusive otros físicos y mecánicos. Para el modelado de este tipo de sistemas quedan aún tres opciones: Lograr un modelo de naturaleza continua, en el cual se requiere expresiones de funciones continuas; utilizar métodos aproximativos de discretización (sin embargo, se tienen problemas de digitalización del modelo) o modelar con un *Autómata Celular*.

**Los *Autómatas Celulares* son estructuras ideales para construir modelos digitales aproximados de algunos sistemas complejos de naturaleza continua, sin pasar por modelos analógicos. Es posible, por ejemplo, lograr sencillos modelos digitales que representen con suma fidelidad algunas leyes de la física.**

**En nuestro caso, hemos considerado como objeto de estudio, los sistemas de estructuras sólidas y su deformación e incluso fractura de estos sistemas al ser alterados por una fuerza externa. También hemos considerado que las leyes de interacción entre partículas pueden ser reproducidas con fidelidad a través de la ley de Hooke<sup>1</sup>.**

### 3. MARCO TEÓRICO

#### 3.1.1 *Autómatas Celulares*

Un *Autómata Celular* es una herramienta computacional que hace parte de la *Inteligencia Artificial* basada en *modelos biológicos*, el cual está básicamente compuesto por una estructura estática de datos y un conjunto finito de reglas que son aplicadas a los elementos de la estructura. El interés que ha despertado esta técnica radica en la sencillez y en la simplicidad que caracteriza la construcción de los modelos; además, en la particularidad de los patrones de comportamiento presentados por el *Autómata* en tiempo de ejecución.

La estructura de un *Autómata Celular*<sup>1</sup>, se definen como sus componentes básicos:

- Un conjunto de entes.
- Un conjunto finito de estados para cada ente.
- Una vecindad para cada ente.
- Una regla de evolución aplicable a todos los entes.
- La regla de evolución debe ser aplicada al conjunto de entes en una sola iteración.

**Uno de los autómatas celulares más conocidos es el que John Horton Conway llamado el juego de la VIDA (Life Game<sup>2</sup>). El juego de la vida es un autómata celular bidimensional en cuadrícula con dos estados por celda. Cada celda o célula puede**



estar viva o muerta y en cada generación se aplica un algoritmo que sigue estas tres reglas:

- 1.- Cada célula viva con dos o tres células vecinas vivas sobrevive a la siguiente generación.
- 2.- Cada célula viva con ninguna, una, o más de tres células vivas a su alrededor pasa a estar muerta.
- 3.- Cada célula muerta con tres células vecinas vivas resucita en la siguiente generación.

El juego de la vida presenta configuraciones finales estables, periódicas o no. Langton<sup>3</sup> defiende que presenta propiedades de catálisis (acciones de construcción arbitrarias), de transporte (borrando estructuras y reconstruyéndolas en otro lugar del espacio celular), estructurales (como elementos estáticos, barreras, etc.), de regulación, defensa e incluso informativas, y que por tanto estos autómatas virtuales tienen capacidades computacionales suficientes para cumplir los papeles funcionales que juegan las macromoléculas en la lógica molecular de la vida. En definitiva, funcionalmente, los autómatas son equiparables a los componentes básicos de la vida en nuestro planeta.

### 3.1.2 Clasificación de los autómatas celulares

Los autómatas celulares también son susceptibles de ser clasificados. Si tomamos a consideración la regla de evolución de un autómata celular, entonces podemos clasificarlos en:

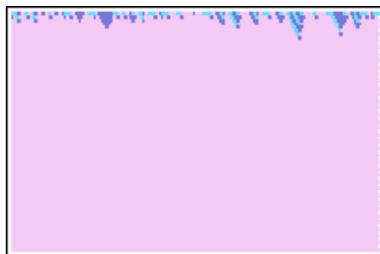
*Lineales.*- Son aquellos que en la regla de evolución que rige al sistema, su exponente es uno.

*No lineales.*- Son aquellos que en la regla de evolución que rige al sistema, su exponente es diferente de uno.

Si al ser iterado  $t_n$  veces, un sistema con autómatas celulares, es posible regresar a su configuración  $t_{n-1}$  o tal vez a su configuración inicial  $t_0$  entonces también se les puede clasificar como reversibles y no reversibles.

Por su parte Wólfram<sup>4</sup> presenta una clasificación dentro de cuatro clases.

*Clase I.* Comportamientos uniformes.



◀ *Figura 3.3.1 Comportamiento uniforme.*

Se presenta en un AC que ha sido iterado varias veces y adopta un solo estado siendo arbitraria la configuración inicial.

Como puede verse en el diagrama de evoluciones, un sólo estado es el que domina a los demás a través del tiempo y este comportamiento es siempre el mismo con cualquier configuración aleatoria.

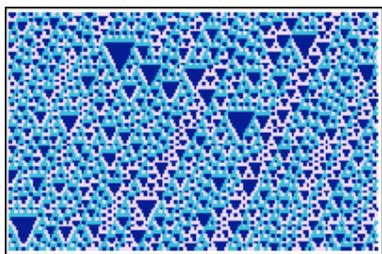
*Clase II. Comportamientos cíclicos aislados.*



◀ *Figura 3.3.2 Comportamiento cíclico aislado.*  
Se presenta en un AC que ha sido iterado varias veces y adopta un conjunto finito de estados para cualquier iteración y configuración.

En el diagrama de evoluciones podemos observar como dos estados se comportan de manera repetitiva bajo una vecindad dada. Este comportamiento siempre es el mismo a través del tiempo y con cualquier configuración.

*Clase III. Comportamientos caóticos.*



◀ *Figura 3.3.3 Comportamiento Caótico.*  
Se presenta en un AC que a través del tiempo es totalmente inestable y no es posible de terminar una

En el diagrama de evoluciones podemos observar como es que el patrón que se muestra a través del tiempo es totalmente inestable, es decir, no podemos determinar a simple vista que tipo de configuración se presentará de generación en generación.

*Clase IV. Comportamientos complejos.*



◀ *Figura 3.3.1 Figura Comportamiento Complejo.*  
Se presenta en un AC que presenta áreas estables y áreas en donde no se definen estados.

En esta clase aparecen estructuras complicadas, algunas veces localizadas y otras trasladándose por el espacio celular. Se ha conjeturado que los Autómatas Celulares de esta naturaleza son capaces de procesar información al estilo de las máquinas de Turing.

Es importante señalar que un autómata celular que se clasifica como de clase I e incluso clase II cae también dentro de la clasificación de autómata celular reversible. Pues un comportamiento repetitivo es susceptible a ser reproducido a cualquier tiempo  $t_{n-k}$ .

Un autómata celular que es caótico también es irreversible, debido a que no se pueden determinar patrones de comportamiento.

Y un autómata celular que es complejo, puede ser reversible en ciertas  $t_k$  iteraciones pero irreversible en otras iteraciones. En suma, el proceso de revertir este tipo de autómata celular es muy complejo.

### 3.2 Ley de Hooke

Consideremos un resorte que actúa sobre una partícula de masa  $m$ . La partícula se mueve en dirección horizontal, la cual tomamos que sea la dirección  $x$ , con el origen ( $x = 0$ ) representando la posición de la partícula cuando el resorte está relajado (figura 889). Sobre la partícula actúa una fuerza externa  $F_{ext}$  en dirección opuesta a la fuerza del resorte. Suponemos que la fuerza externa es siempre aproximadamente igual a la fuerza del resorte, de modo que la partícula esté en equilibrio en todo momento ( $a = 0$ ).

Sea desplazada la partícula una distancia  $x$  desde su posición original  $x = 0$ . Si el agente externo ejerce una  $F_{ext}$  sobre la partícula, el resorte ejercerá una fuerza opuesta  $F_s$ . Esta fuerza está dada con bastante aproximación por:

$$F_s = -kx,$$

Donde  $k$  es una constante positiva, llamada la constante de fuerza del resorte. La constante  $k$  está asociada a las características del resorte; los resortes más rígidos tienen los valores de  $k$  mayores. La ecuación anterior es la ley de la fuerza para los resortes, y se le conoce como ley de Hooke.

El signo menor en la ecuación nos advierte que en la dirección de la fuerza ejercida por el resorte se opone siempre a la dirección del desplazamiento de la partícula. Cuando el resorte se estira,  $x > 0$  y  $F_s$  es negativa: cuando el resorte se comprime,  $x < 0$  y  $F_s$  es positiva. La fuerza ejercida por el resorte es una fuerza de restitución: tiende siempre a restablecer a la partícula a su posición  $x = 0$ . Los resortes más reales obedecen a la ecuación anterior razonablemente bien siempre y cuando no los estiremos más allá de una cantidad límite.

### 3.3 Método de Euler

Este método tiene por objeto obtener una aproximación de un problema bien planteado de valor inicial

$$(3.3.1.1) \quad \frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

En la práctica se generan aproximaciones a la solución continua en varios valores, llamados puntos de red, en el intervalo  $[a, b]$ . Una vez obtenida la aproximación en los puntos, podemos obtener por interpolación la solución aproximada en otros puntos del intervalo.



En primer lugar, estipulamos que los puntos de red tienen una distribución uniforme en todo el intervalo  $[a, b]$ . Y garantizamos esta condición al seleccionar un entero positivo  $N$  y los puntos de red  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ , donde

$$T = a + ih, \text{ para cada } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

La distancia común entre los puntos  $h = (b - a) / N$  recibe el nombre de tamaño de paso.

Utilizaremos el teorema de Taylor para derivar el método de Euler.

Supongamos que  $y(t)$ , la solución única de la ecuación (3.3.1.1), tiene dos derivadas continuas en  $[a, b]$ , de modo que para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i) y'(t_i) + (t_{i+1} - t_i)^2 / 2 y''(\xi_i)$$

Para algún número  $\xi_i$  en  $(t_i, t_{i+1})$ . Si  $h = t_{i+1} - t_i$ , entonces

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + h^2 / 2 y''(\xi_i)$$

y, como  $y(t)$  satisface la ecuación diferencial (3.3.1.1),

El método de Euler construye  $w_i \approx y(t_i)$  para cada  $i = 1, 2, \dots, N$ , al eliminar el término restante. Por tanto,

$$w_0 = \alpha, \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \text{ para cada } i = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

A la ecuación anterior se le llama ecuación de diferencia asociada al método de Euler

### 3.4 Movimiento Armónico Amortiguado

Cuando se excita un sistema lineal, su respuesta dependerá del tipo de excitación y del amortiguamiento que esté presente.

En realidad, la amplitud de la oscilación disminuye en forma gradual hasta cero como resultado de la fricción. Se dice que el movimiento está amortiguado por la fricción y se le llama movimiento armónico amortiguado. A menudo la fricción surge de la resistencia del aire o de fuerzas internas. En la mayoría de los casos de interés la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad del cuerpo pero directamente opuesta a él. En la figura 3.4.0.1 se muestra un ejemplo.

La fuerza neta sobre el cuerpo oscilatorio es la suma de las fuerzas de restitución  $-kx$  y la fuerza de amortiguamiento, la cual suponemos tiene la forma de  $-bv$ . Aquí  $b$  es una constante positiva, que depende de las propiedades del fluido, como la densidad, y la forma y dimensión del objeto sumergido. Partiendo de la segunda ley de Newton en la forma  $\sum F = ma$ , entonces

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$



O sea

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

(3.4.1.1)

Una solución de esta ecuación es

$$(3.4.1.2) \quad x = x_m e^{-bt/2m} \text{Cos}(\omega't + \Phi),$$

Donde

$$(3.4.1.3) \quad \omega' = \sqrt{[k/m - (b/2m)^2]}$$

Esta forma de solución de la ecuación (3.4.1.1) es válida para constantes  $b$  de amortiguamiento que sean lo suficientemente pequeñas de modo que la cantidad en el radical de la ecuación 3.4.1.3 sea positiva. En la figura (3.4.1.3) se traza el desplazamiento  $x$  en función del tiempo  $t$  en este caso.

Existen dos características notables en esta solución. Primeramente, la frecuencia es más pequeña (y el periodo más largo) cuando está presente la fricción. La fricción retarda al movimiento, como cabe esperar. Si no hubiese fricción presente,  $b$  sería igual a cero y  $\omega'$  sería igual a  $\sqrt{k/m}$ , que es la frecuencia angular  $\omega$  de un movimiento no amortiguado. Cuando la fricción está presente,  $\omega'$  es ligeramente menor que  $\omega$ , como lo muestra la ecuación (3.4.1.2). En el caso mostrado en la figura (3.4.1.3), que representa un fuerte amortiguamiento en el que la amplitud disminuye según un factor de 10 en 5 ciclos,  $\omega'$  difiere de  $\omega$  en 0.3% solamente.

En segundo lugar, la amplitud del movimiento, representada en la ecuación (3.4.1.2) por el factor  $x_m e^{-bt/2m}$  y en la figura (3.4.1.3) por las curvas de puntos, disminuye exponencialmente hasta cero. El intervalo de tiempo  $\tau$  durante el cual la amplitud cae a  $1/e$  de su valor inicial se llama vida media de la oscilación. El factor exponencial en la ecuación (3.4.1.2) tendrá el valor  $e^{-1}$  cuando  $t = \tau = 2m/b$ . Una vez más, si no hubiera fricción presente,  $b$  sería igual a cero y la amplitud tendría el valor constante  $x_m$  al pasar el tiempo; la vida media sería infinita.

Las ecuaciones (3.4.1.2) y (3.4.1.3) sólo son válidas para  $b \leq 2\sqrt{km}$ . Si  $b$  tiene su mayor valor posible en el intervalo ( $b = 2\sqrt{km}$ ), entonces  $\omega' = 0$ , y el desplazamiento tiende a cero exponencialmente sin oscilación. La vida media  $\tau$  tiene su valor más pequeño, el cual puede demostrarse que es igual a  $\omega^{-1}$ , o sea, el inverso de la frecuencia angular de la oscilación no amortiguada. Esta condición, llamada amortiguamiento crítico, es a menudo la meta de los ingenieros mecánicos al diseñar un sistema en el que las oscilaciones desaparezcan en el menor tiempo posible.

### 3.5 Modelo de AC para la deformación

Los *Autómatas Celulares* son estructuras ideales para construir modelos digitales aproximados de algunos sistemas complejos, de naturaleza continua, y que representan con fidelidad algunas leyes de la física.

En éste sistema, hemos considerado como objeto de estudio a los sistemas de estructuras sólidas, su deformación e incluso posibles fracturas, al ser alterados por una fuerza externa.



Se ha considerado que las leyes de interacción entre partículas pueden ser reproducidas con fidelidad a través de la ley de Hooke.

Al realizar la deformación de un sólido, hemos considerado que dicho sólido puede representarse por una malla uniforme de partículas unidas a través de resortes. Entonces, el modelo de autómata celular que nos permite calcular la deformación es el siguiente:

- Una estructura sólida está formada por un número finito de partículas.
- Una vecindad para cada partícula.
- Un conjunto finito de estados para cada partícula.
- La regla de evolución es la ley de Hooke y no es aplicable a todas las partículas.
- En una sola iteración se realizan el cálculo para todas las partículas.

Cada partícula contiene la siguiente información:

Una partícula puede encontrarse fija o no fija. La regla de evolución no es aplicable a Partículas que se encuentren fijas.

Cada partícula contiene su velocidad y posición.

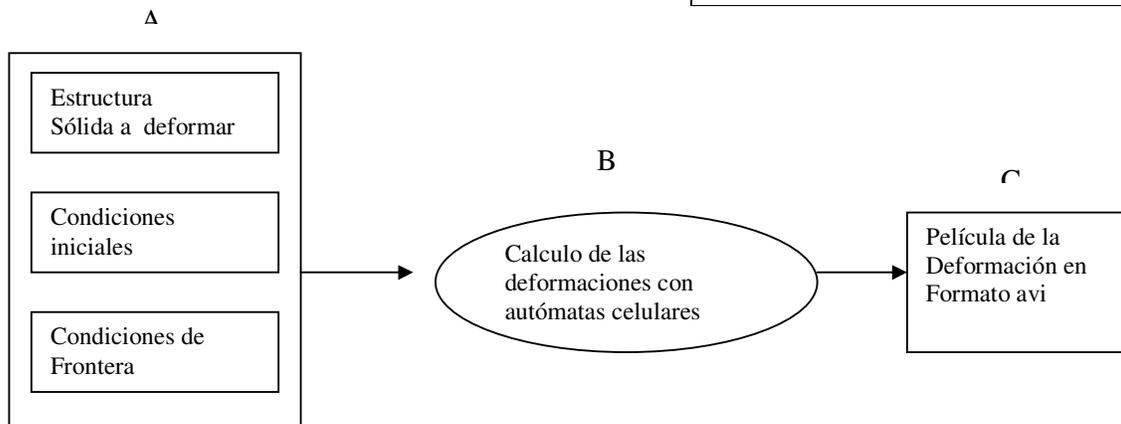
Todas las partículas contienen información sobre su vecindad: la distancia de equilibrio que guarda con cada vecino y el índice de cada uno de estos.

**Nota: la interacción entre partículas para nuestro AC es a primeros vecinos.**

### 3.6 Diagrama de Flujo de Datos

A continuación explicaremos los módulos principales en los que se compone el sistema. El sistema de la simulación se puede analizar de la siguiente forma:

| Información que contiene cada partícula |   |
|---|---|
| 1. Velocidad                            | - Velocidad Actual<br>- Velocidad Anterior                                      |
| 2. Posición                             | - Posición Actual<br>- Posición Anterior  |
| 3. Vecindad de la partícula             | - Distancia de Equilibrio e<br>- Índice de partículas vecinas                   |
| 4. Bandera de interacción <b>Fija</b>   | - Fija = 1, la partícula está fija.<br>- Fija = 0, la partícula se puede mover. |



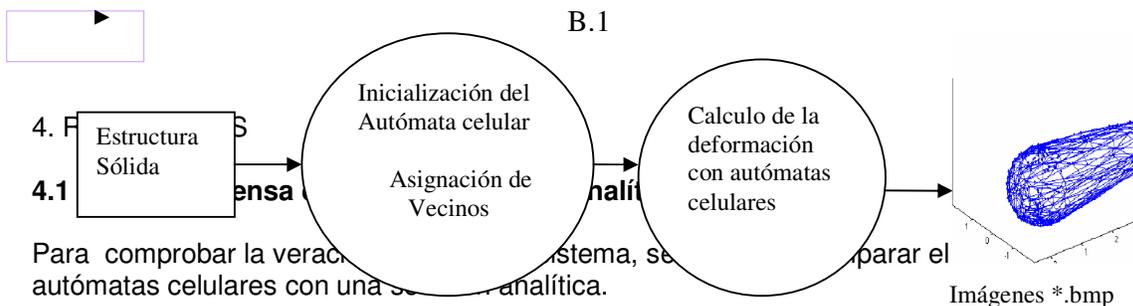
El esquema muestra tres partes; la parte A que consta de las partes de las entradas del sistema, la parte B que se encarga del procesamiento de la deformación de la estructura con Autómatas Celulares y la parte C que es la parte que recopila la información necesaria para formar la película de la deformación.

En la primera parte se introducen las condiciones iniciales, condiciones de frontera y la estructura que se va a simular.

Con las condiciones iniciales indicamos las posiciones y velocidades iniciales de cada partícula, la fuerza externa que altera la estructura, el nivel de rompimiento del sistema y la constante del resorte que une a las partículas.

Las condiciones de frontera nos sirven para indicarle al sistema que partículas quedaran fijas en el sistema. De esta manera podemos tener una estructura como la de la figura siguienteXXX e indicarle al sistema que alguno de sus planos estará fijo en el suelo, o tal vez dos de sus planos estarán fijos, etc.

Para indicarle al sistema la estructura que va a ser deformada, este parte del sistema se a desarrollado de dos formas. En principio se especifican estructuras paralelepípedas de X\*Y\*Z dimensiones. Esto permitió ensayar, principalmente, la deformación de barras como la de la figura XXX



Para comprobar la veracidad del sistema, se comparó el resultado de los autómatas celulares con una solución analítica.

Primeramente se recurrió a la ecuación analítica que describe la vibración de un cordón elástico, que se estira una longitud L y luego se fijan sus extremos.

$$\frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u(x,t)}{dt^2}$$

En donde

- u(x, t) es la deflexión de la cuerda.
- $c^2 = T / \rho$
- $\rho$  es la masa de la cuerda por unidad de longitud y
- T es la tensión.

La ecuación anterior tiene como condiciones de frontera a  $u(0, t) = 0$  y  $u(l, t) = 0$ , para todo valor de  $t$  y se resuelve para las condiciones iniciales siguientes.

$$u(x,0)=f(x) = \begin{cases} 2kx / l & \text{para } 0 < x < l / 2 \\ 2k(l - x) / l & \text{para } l / 2 < x < l \end{cases}$$

La solución de la ecuación de su movimiento. La

$$\frac{d u(x,t)}{d t} \Big|_{t=0} = g(x) = 0$$



le onda y

### 4.2 Modelo AC vs Fenomeno de la naturaleza

Una segunda opción para comprobar la funcionalidad de nuestro sistema, fue comparar el sistema, con un experimento real de la naturaleza. Para ello se ha considerado que el experimento podría ser el siguiente:

- 1.- Observar la deformación de una cuerda de guitarra, al ser rasgada por una fuerza externa.
- 2.- Pisar la cuerda justo a la mitad y realizar la misma operación sobre uno de los extremos de la cuerda pisada.

Al realizar este experimento, surgen dos premisas importantes que hemos tomado a consideración:

- Cuando rasgamos una cuerda, esta sufre una elongación y se queda vibrando a cierta frecuencia, hasta llegar a su posición original que es el reposo (figura 4.3.0.1).
- Al realizar la parte dos del experimento, se espera observar que la vibración que experimenta la mitad de la cuerda, sea el doble de la vibración de toda la cuerda.

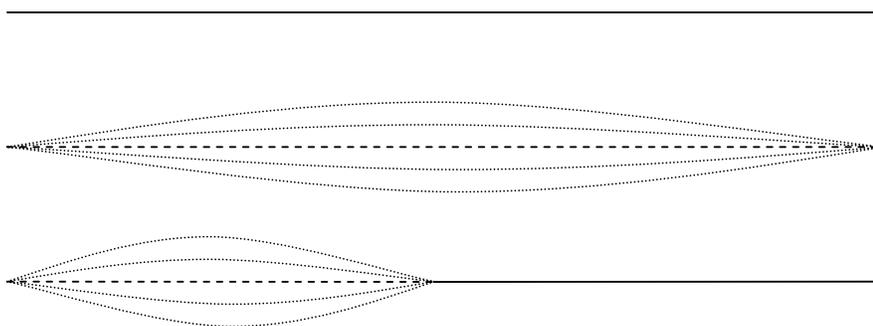


Figura 4.3.0.1

En el modelo estaríamos considerando a un sólido que contiene  $n$  partículas alineadas a lo largo del eje de las  $x$ 's (con  $n$  como la longitud de la cuerda) Las  $n$  partículas están unidas entre sí por resortes y la constante de cada resorte es la misma para todos.



Las condiciones iniciales y de frontera que se consideraron para la simulación son las siguientes:

- Se consideró que cien partículas representan la cuerda completa.
- La línea que forman las partículas estaría sujeta de los dos extremos.
- Todas las partículas parten del reposo.
- La fuerza externa que se le aplica a toda la cuerda, es de la misma magnitud para la mitad de la cuerda.

Los resultados de la simulación fueron los esperados. En la siguiente figura se presentan las graficas de la cuerda real y de la simulación.

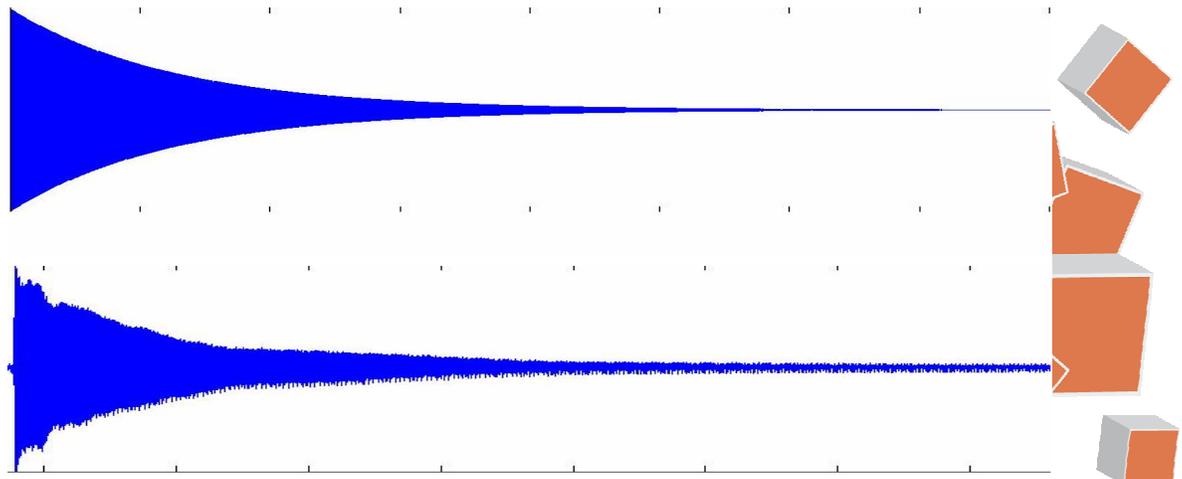


Figura 496

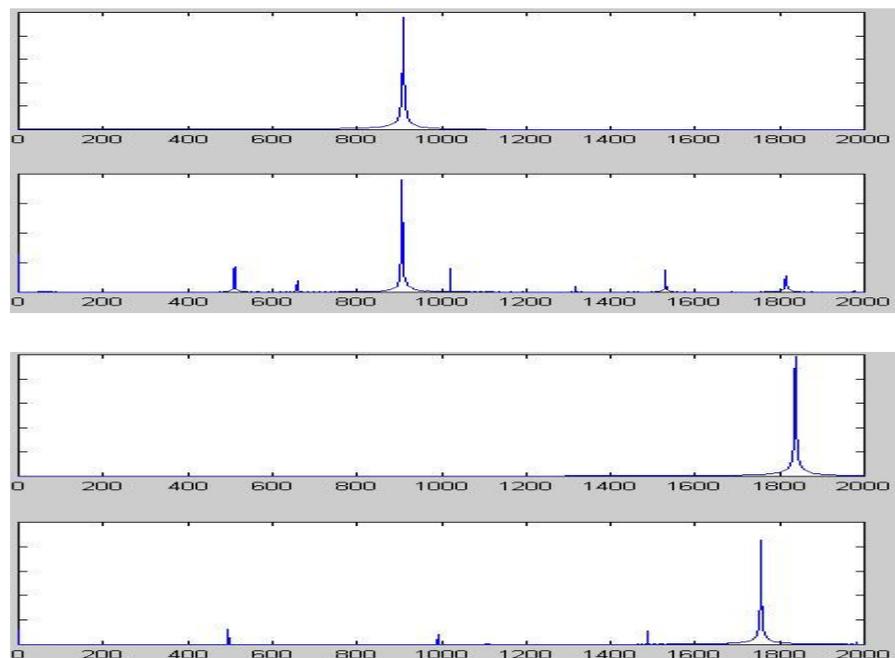


Figura 4698

