

Matemáticas para la vida. Una propuesta para la profesionalización docente de profesores de matemáticas

Olda Covián Chávez
Avenilde Romo-Vázquez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada
y Tecnología Avanzada del IPN

Resumen

La sociedad espera que la formación matemática que tiene lugar en las escuelas dote a los ciudadanos de herramientas para enfrentar diversas situaciones y problemas de la vida actual. Para generar esta formación matemática, el profesor resulta un elemento fundamental. Por consiguiente, en este trabajo se presenta el curso de un programa de profesionalización docente en línea y a distancia, diseñado para proveer de herramientas teórico-metodológicas (de la Teoría Antropológica de lo Didáctico) a profesores latinoamericanos de matemáticas en servicio. Las cuatro actividades de este curso, realización, develación, diseño e implementación permitieron proponer una ruta para que los profesores diseñaran y adaptaran actividades didácticas para la vida. En este artículo se presenta a profundidad el análisis de las producciones de los profesores en la primera actividad del curso, en la cual se relaciona geometría y topografía. Esta actividad resulta crucial para que posteriormente se diseñen actividades similares.

Palabras clave

Matemáticas para la vida, profesionalización docente, diseños didácticos.

Mathematics for life: a proposal for the professionalization of mathematics instructors

Abstract

Society expects that the mathematics training that takes place in schools provide its citizens with tools to confront different situations and problems in modern life. To create this mathematics training, the professor is a fundamental element. Therefore this work presents a course from a program for online and remote instructor professionalization, designed to provide working Latin American mathematics professors with theoretical-methodological tools (from the Anthropological Theory of Didactics). The four activities of this course—execution, disclosure, design and implementation—allowed the proposal of a route for professors to design and adapt didactic activities for life. This paper presents an in-depth analysis of what the professors produced in the first activity of course, which involved geometry and topography. This activity is crucial for the future design of similar activities.

Keywords

Didactic designs, instructor professionalization, mathematics for life.

Recibido: 28/11/2015
Aceptado: 11/05/2016

Introducción

Una de las demandas para la enseñanza de las matemáticas, en la actualidad, es que los conocimientos matemáticos sean herramientas para abordar problemas y enfrentar situaciones de la vida (UNESCO, 2014; OECD, 2016). Sin embargo, se han evidenciado prácticas de enseñanza en las que el énfasis está en los conceptos y los saberes matemáticos, sin necesariamente comprender su contexto de origen o su relación y uso en otros contextos. Esto se ve reflejado, por ejemplo, en la enseñanza de la geometría que se ha centrado en el estudio de lo teórico, favoreciendo el estudio de la figuras geométricas y demostraciones, dejando el contexto de aplicación como una “vestimenta” de la actividad matemática a desarrollar (Covián, 2013; Lave, 1988). Dichas prácticas o enfoques didácticos son denominados por Chevallard (1992) como monumentalistas. Por lo que, uno de los cuestionamientos es cómo cambiar este enfoque hacia uno más abierto e innovador, en el que se explicita la razón de ser de la enseñanza de las matemáticas. Una de las rutas para generar este nuevo enfoque es a través de los profesores, que como menciona Artigue (2011, p. 7) “[...] son el elemento clave de toda evolución positiva y durable de los sistemas educativos. Constituyen hoy el reto principal de una educación matemática para todos”. Es decir, incidir en su desarrollo profesional es incidir en la formación de calidad de los futuros ciudadanos.

En las últimas dos décadas se han desarrollado diversos programas de profesionalización docente con el objetivo de actualizar y enriquecer los conocimientos didácticos de los profesores (Tirosh, 2009). Una parte, todavía mínima, de estos programas son propuestos en la modalidad en línea y a distancia. Éstos conforman comunidades de formación y profesionalización, que permiten que los profesores generen discusiones y reflexiones profundas de su práctica, a través de la interacción con colegas de diferentes realidades educativas y con expertos en la investigación en didáctica (Scott y Scott, 2010). Sin embargo, hay muchas cuestiones todavía abiertas sobre las necesidades de los profesores y las formas en que los programas de este tipo las atienden. Algunas de ellas, son ¿Cómo acercar los múltiples resultados de la investigación en matemática educativa a los profesores? ¿Cómo lograr que las herramientas teóricas y metodológicas se vuelvan útiles para los profesores y les permitan generar una enseñanza de las matemáticas para la vida?

Considerando esta última pregunta, se ha diseñado un curso para un programa de profesionalización docente en la modalidad en línea y a distancia del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnologías Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN), cuyo objetivo es proveer herramientas teóricas y metodológicas para que los profesores diseñen actividades didác-

ticas para la vida. Se consideró que para poder elaborar este tipo de diseños primero es necesario analizar la actividad matemática tanto en contextos escolares como no escolares –de la vida–. Es decir, para estar en posibilidad de generar nuevas relaciones entre estos contextos a través de los conocimientos matemáticos. Se eligió como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), ya que ésta posee un modelo para el análisis de la actividad en su dimensión institucional (Chevallard, 1999).

Esta comunicación consta de cinco secciones que se enuncian a continuación. En la primera, se presenta una propuesta teórico-metodológica basada en elementos de la TAD, que permite el diseño de actividades para la vida. En la segunda, se muestra el diseño de una actividad para la vida que relaciona conocimientos geométricos y topográficos. En la tercera, se presenta el diseño del curso implementado en el programa de profesionalización docente. En la cuarta, se presenta el análisis de las producciones de los profesores al realizar la actividad topográfica-geométrica y cómo esta vivencia incide de manera importante en los diseños didácticos que ellos generan en equipo, que se ilustran con dos ejemplos. Finalmente, en la sección cinco, se reportan las conclusiones de este trabajo.

Propuesta teórico-metodológica basada en elementos de la TAD

Esta investigación se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que tiene un modelo para el análisis la actividad (actividad matemática, actividad topográfica) en su dimensión institucional. Particularmente se consideran tres de sus elementos: institución, praxeología y modelo praxeológico extendido. Las instituciones, según Castela y Romo (2011), son organizaciones sociales estables, que establecen normas y condiciones que restringen la actividad de los sujetos, pero al mismo tiempo la posibilitan, a través de recursos que ponen a su disposición. En esta investigación el interés está centrado en analizar conocimientos matemáticos en contextos escolares Ce y contextos extra-escolares (de la vida) Cv , vistos como instituciones que tienen sus propias condiciones y recursos. Podríamos decir que, en Ce la función principal del conocimiento matemático es su difusión a través de la enseñanza, mientras que en Cv , dependiendo el caso, la función principal es su uso para enfrentar o explicar situaciones. Para mostrar la utilidad de las matemáticas y las posibles razones de su enseñanza, se considera necesario establecer relaciones genuinas entre conocimientos matemáticos presentes en un determinado Ce con un determinado Cv . Para ello, es pertinente identificar y analizar estos conocimientos en cada uno de estos contextos. Y de manera más general, analizar las actividades

en las cuales dichos conocimientos están involucrados, a través de la praxeología.

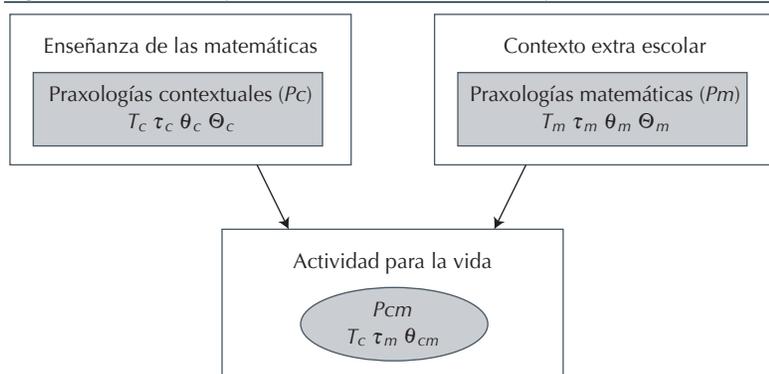
La praxeología está compuesta por dos bloques: técnico-práctico (T, τ) y tecnológico-teórico (θ, Θ). Donde T es una tarea de cierto tipo, compuesta por una tarea t , que debe realizarse por una técnica τ justificada por una tecnología θ que permite producirla, validarla y justificarla a través de una teoría Θ . En resumen “toda actividad pone en obra una organización que puede escribirse [$T/\tau/\theta/\Theta$] y que se llama praxeología u organización praxeológica” (Chevallard, 1992, p. 3). Una praxeología matemática escolar podría ser t : calcular la hipotenusa c de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 unidades. τ : $c^2 = (3)^2 + (4)^2 = 25$, $c = 5$. θ : teorema de Pitágoras y Θ : trigonometría.

La praxeología también permite analizar actividades matemáticas en Cv , sin embargo, la tecnología no será únicamente matemática sino también de uso. Por ejemplo, cuando en albañilería (Cv) se busca garantizar la escuadra o ángulo recto en las esquinas de una habitación (tarea), se colocan 3 clavos en un lado y 4 en el otro, equidistantes y se comprueba que al unir sus extremos hay 5 unidades. Aunque la técnica se apoya en el teorema de Pitágoras, ciertos albañiles no lo conocen y validan la técnica de forma práctica, ya que “siempre” ha funcionado. Es decir, existen explicaciones, justificaciones y validaciones asociadas **al uso** de la técnica matemática. Para analizarlas, se considera el modelo praxeológico extendido (Castela y Romo, 2011) esquematizado en la figura 1.

Figura 1. Modelo praxeológico extendido (Castela y Romo-Vázquez, 2011)

$$\left[T, \tau, \frac{\theta^{th}}{\theta^p}, \Theta \right] \begin{array}{l} \leftarrow P(S) \\ \leftarrow Iu \end{array}$$

En éste, la tecnología tiene dos componentes uno teórico (θ^{th}) y uno práctico (θ^p). El componente práctico tiene seis funciones tecnológicas: describir, validar, favorecer, explicar, evaluar y justificar el uso de la técnica. Éstas, permiten analizar y evidenciar el tipo de validaciones que se producen al utilizar una técnica matemática para realizar una tarea (matemática o no) en un contexto no escolar. En este caso, $P(S)$ es la disciplina matemática que produce y valida tecnologías matemáticas (como el teorema de Pitágoras) e Iu es una institución usuaria como la Albañilería o la Topografía. Con estos elementos teóricos es posible diseñar actividades para la vida (praxeologías didácticas) en las que se relacionen matemáticas escolares (praxeologías matemáticas o Pm) con matemáticas utilizadas en contextos extra-escolares (praxeologías contextuales Pc), ver figura 2.

Figura 2. Elementos para el diseño de actividades para la vida

Para ilustrarlo, a continuación, se presenta el diseño de una actividad para la vida que relaciona praxeologías topográficas (Pc) con praxeologías geométricas (Pm).

Diseño de una actividad para la vida que relaciona praxeologías topográficas con praxeologías geométrica

En esta sección se presenta el diseño de una actividad topográfica-matemática, en torno al cálculo de áreas. Para su diseño se consideró y adaptó la metodología propuesta en Macías (2012) que consta de cuatro fases: la elección de un contexto extra-escolar, que en este caso es el topográfico; el análisis praxeológico para el cálculo de áreas en la topografía; el análisis praxeológico para el cálculo de áreas en la enseñanza de las matemáticas y el diseño de una actividad para la vida que relaciona praxeologías topográficas con praxeologías matemáticas. A continuación, describimos las últimas tres fases.

Análisis praxeológico para el cálculo de áreas en la topografía

Se consideró el libro de difusión de la topografía de Pérez de Moya (1573), se identificaron dos praxeologías para el cálculo de áreas de terrenos “planos” y “no-planos” (P1 y P2), donde las técnicas y tecnologías involucran conocimientos geométricos.

P1. Tipo de tarea 1

Determinar el área de un terreno “plano” (que carece de protuberancias o sinuosidades). *Tarea 1.* Determinar el área del terreno presentado en la figura 3.

P2. Tipo de tarea 2

Determinar el área de un terreno “no plano” (con protuberancias o sinuosidades). **Tarea 2.** Determinar el área del terreno irregular con un lago en el centro, presentado en la figura 4.

Técnica 2. Se describe primero una técnica general. “Se hará un paralelogramo o cuadrado circunscrito a tal terreno. Después de medido este cuadrado o paralelogramo se restará lo que vieres con lo que mide.” (Pérez de Moya, 1573, p. 186). Para facilitar la explicación de la técnica se da un ejemplo:

Como si fuese un pedazo de tierra que contenga una laguna de agua, de tal manera que se denota la figura abcd (Figura 4), haz un paralelogramo colocando tu instrumento a la redonda de manera que quede dcbi (Figura 5). Supongamos que este paralelogramo que circunscribe o abarca la tierra tiene por un lado 50 tamaños (sean varas o palos o lo que quieras) y por el otro 30. Mídela con tu regla y será 1500 y tantos tamaños o cantidades cuadradas. Mide después por la regla del triángulo

Figura 4. Terreno “no plano” con forma irregular (Pérez de Moya, 1573, p. 186)

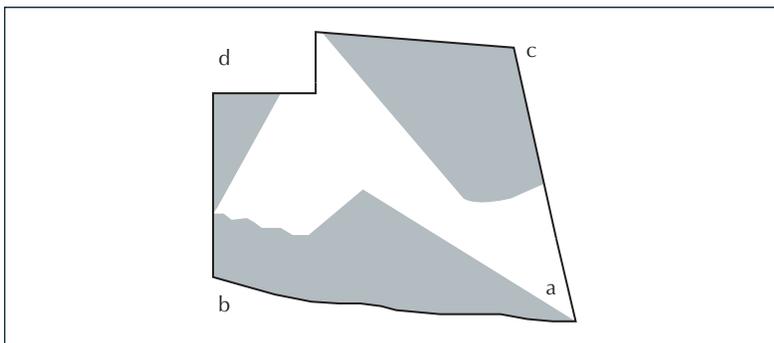
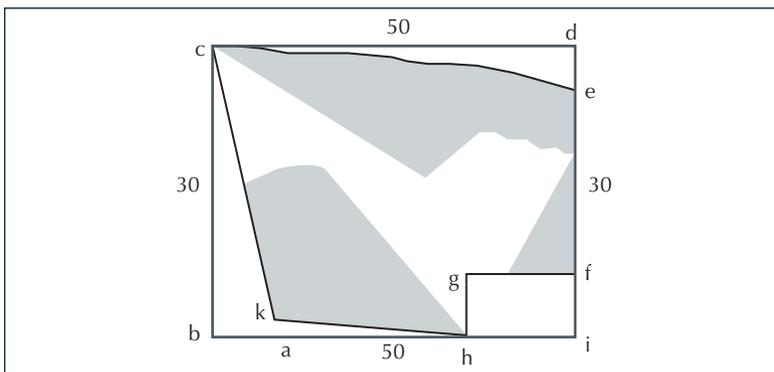


Figura 5. Técnica para medir el área de un terreno “no plano” con forma irregular (Pérez de Moya, 1573, p. 186)



la cantidad que hay entre la línea bc y el final de la tierra akc y lo que vieras entre kah y entre ihgf y entre edc. Lo que obtuvieras de restar con el paralelogramo y lo que queda, será el área de dicha tierra y de este modo se medirá cualquier otra forma. (Pérez de Moya, 1573, p. 186)

Tecnología θ^b . Propiedades de los paralelogramos, ángulos interiores rectos y lados opuestos iguales. La fórmula para calcular el área de triángulos.

Tecnología θ^p . La tecnología práctica que motiva el uso de la técnica es la forma y tipo del terreno, irregular y que tiene lagos o espacios de agua; así como el uso que se dé a éste. Elección de puntos estratégicos para medir sin interferencia del lago.

La longitud y unidad de medida depende del lugar donde se efectúe la medición, como se ilustra en la siguiente cita: “Y por qué para medir de un modo u otro he puesto regla, no me detengo en ello, ni quiero decir otra cosa, sino que en uno y otro el Geómetra guarde la unidad del pueblo donde trabaje.” (Pérez de Moya, 1573, p. 186).

En estas dos praxeologías aparecen dos tipos de tareas no matemáticas, medir y calcular el área de terrenos planos y de terrenos con lagos o ríos en su interior. Las técnicas son matemáticas y topográficas (como el tipo de instrumento para hacer la medición). La unidad de medida aparece como un elemento clave, ya que en la época no existía una común a los diferentes pueblos. A pesar de que estos elementos, parecen no tener vigencia hoy en día, se considera que la búsqueda de precisión puede ser clave en un diseño didáctico y que los softwares de geometría (como Geogebra) pueden simular condiciones de terrenos para motivar técnicas geométricas sofisticadas.

Análisis praxeológico para el cálculo de áreas en la enseñanza las matemáticas

Se analizaron praxeologías matemáticas en libros de educación media superior (Fuenlabrada, 2007; Velasco, 2010; Zamora, Vázquez y Sánchez, 2007; Zúñiga, Zúñiga, y Zúñiga, 2012). En la mayoría se identificaron tareas para el cálculo de áreas de figuras “conocidas” (triángulos, cuadriláteros o circunferencias) y polígonos irregulares compuestos por estas figuras. Las técnicas predominantes favorecen el cálculo a través de la aplicación de fórmulas y la validación estaba relacionada con el uso adecuado de dichas fórmulas. Sin embargo en Zamora, *et al.* (2007) se identificó la praxeología para el cálculo de área de la Ciudad de México. Tarea no matemática justificada con técnicas matemáticas pero con validaciones (tecnología) de naturaleza topográfica.

P3. Tipo de Tarea 3.

Calcular el área de terrenos irregulares. **Tarea 3.** Calcular el área de la Ciudad de México, dado su mapa (Figura 6).

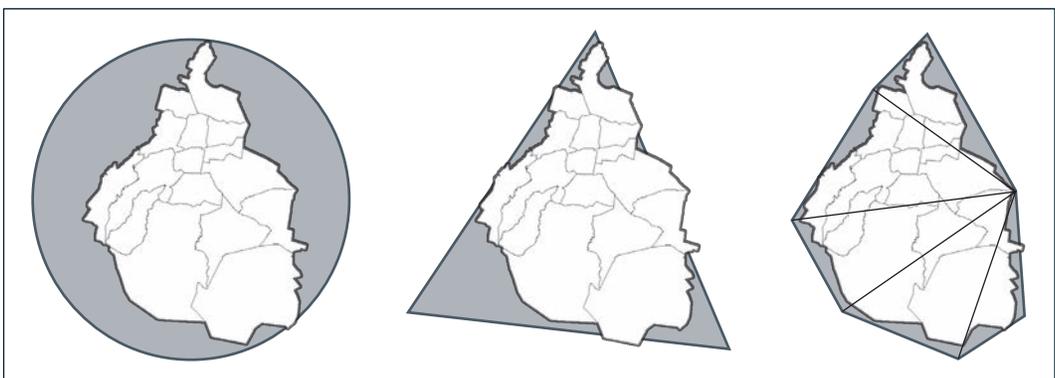
Técnica 3. En Zamora, *et al.* (2007), se presenta una técnica en tres partes, a, b y c, como se muestra a continuación:

- Datos: el mapa puede inscribirse en una figura geométrica.
- Análisis: en primera instancia, intentaremos acotar el contorno de la figura geométrica que nos permita calcular el área correspondiente. Observemos que de las tres figuras (Figura 7) el heptágono irregular es el que se aproxima con menos error al área del mapa de la ciudad. Si triangulamos el polígono, sabemos que por ser heptágono debe contener $(n-2)$ triángulos, es decir: $7-2=5$ triángulos. Podemos afirmar que la suma de las áreas de los cinco triángulos es aproximadamente igual al área de la Ciudad de México. Área del Heptágono $= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = \text{Área del mapa de la Ciudad de México}$.
- Síntesis interpretativa: observa que los triángulos son diferentes, por tanto, el resultado implica obtener el área respectiva de cada uno de ellos. (Zamora *et al.* 2007, p. 104).

Figura 6. Mapa de la Ciudad de México (Zamora *et al.*, 2007, p.103)



Figura 7. Selección de la figura geométrica que se aproxima al área del mapa de la Ciudad de México (Zamora *et al.*, 2007, p. 104)



Esta técnica puede reconocerse como matemática y topográfica, ya que se circunscribe a la figura, polígonos que permitan “encerrarla” de la mejor manera, como se propone en P2. Esto permite en un segundo momento triangular y calcular el área.

Tecnología θ^b . Cálculo de área de figuras irregulares a partir de una descomposición en figuras regulares conocidas y sus fórmulas.

Tecnología θ^p . Lo que motiva la técnica realizada es la aproximación de una figura lo más parecida al contorno de la figura de la Ciudad de México.

Esta praxeología se conforma de una tarea no matemática, elaborada a través de una técnica matemática cuya validación es matemática. Sin embargo, aunque no se presenta en la explicación del libro, la justificación práctica está basada en el grado de aproximación, elemento determinante en P1 y P2. Una vez identificados estos elementos (la unidad de medida, la asignación de medidas arbitrarias, el instrumento de medición y la búsqueda de proximidad) se procede a diseñar una actividad didáctica.

Diseño de una actividad para la vida que involucra tareas geométricas y topográficas.

La actividad propuesta tiene seis tareas, geométricas y topográficas-geométricas, propuestas en un orden que permita a los profesores reconocer la riqueza de la actividad matemática de las tareas topográficas-geométricas. Así, las primeras tareas provienen de la enseñanza de la geometría, tienen formas conocidas, valores y unidades de medida asignadas.

Las tareas 4, 5 y 6 son tareas topográficas basadas en P1, P2 y P3. En cada tarea se representa un terreno particular y para cada uno de pide calcular el área.

Figura 8. Dibujos de las tareas 1, 2 y 3 de la Actividad 1

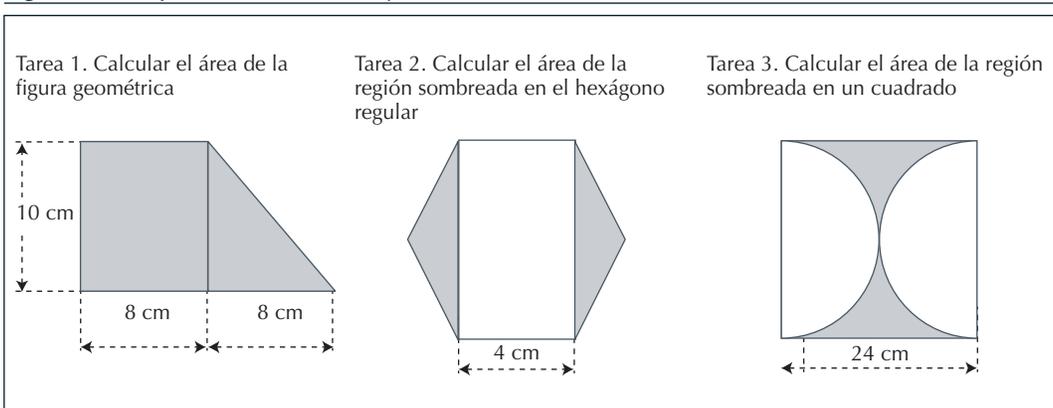
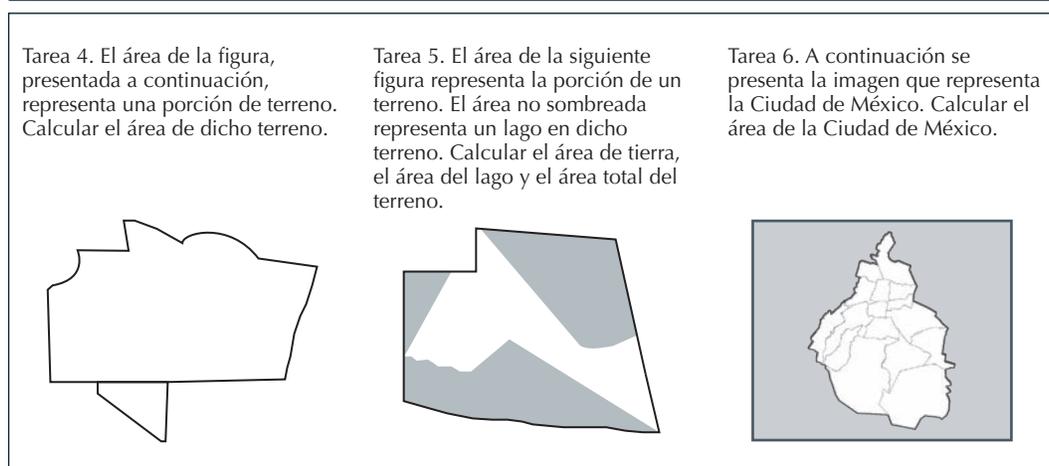


Figura 9. Dibujos de las tareas 4, 5 y 6 de la Actividad 1

Como se observa, los dibujos presentados para las tareas 4 y 5 (figura 9) se basan en los terrenos representados en P1 y P2. Pero, se omiten los “datos”, como puntos de referencia (letras), unidades de medida y dimensiones. El dibujo de la tarea 6 se toma tal cual de P3.

En las tareas 1, 2 y 3 se solicitan técnicas matemáticas con validaciones (tecnología) geométricas: conocimiento de las propiedades de las figuras y uso adecuado de las fórmulas. Mientras que las tareas 4, 5 y 6 poseen datos que caracterizan el terreno (planos, no planos, irregulares o forma de una ciudad conocida) más que una figura geométrica, lo que solicita el uso de técnicas sofisticadas y creativas que involucren elementos geométricos. La validación está asociada al grado de aproximación que se busque, entre mayor sea, la técnica más sofisticada será. Las potencialidades de estas últimas tres tareas, como se puede ver, están asociadas a una actividad matemática mucho más rica cercana a la matemática para la vida, pues para su realización requiere tanto de conocimientos geométricos, como de creatividad y de reflexión; de un trabajo autónomo y de capacidad para adaptar conocimientos conocidos a tareas nuevas, así como generar validaciones más allá de las matemáticas (precisión asociada al instrumento y a la unidad de medida). Se considera que, para acercar estas tareas y sus potencialidades a los profesores de matemáticas, es necesario que éstos las realicen y a partir de esta experiencia y de sus conocimientos profesionales puedan, en un segundo momento adaptarlas o implementarlas con sus estudiantes. Para ilustrarlo, se muestra a continuación un curso de profesionalización docente, donde la primera actividad es ésta del cálculo de áreas que involucra geometría y topografía.

Un curso de profesionalización docente para el diseño de actividades que relacionan *Pc* con *Pm*

Se diseñó un curso para el primer semestre (de la generación 2014-2016) de la maestría en Matemática Educativa del CICATA-IPN, la cual, está dirigida a profesores de matemáticas en servicio, en la modalidad en línea y a distancia. Los profesores participantes, de primaria hasta profesional, fueron 13 en total (9 mexicanos, 2 uruguayos y 1 paraguayo). El objetivo principal, en el curso, era proporcionar herramientas (presentadas en la sección 2 de esta comunicación) para el diseño de actividades didácticas para la vida que involucran relaciones entre *Pc* y *Pm*. El curso tuvo cuatro actividades, una por semana, que se detallan a continuación:

Realización de actividades matemáticas para la vida (Actividad 1). Se solicitó a los profesores realizar las tareas de la actividad de cálculo de áreas que involucra praxeologías geométricas con praxeologías topográficas-geométricas (figuras 8 y 9).

Develación de los elementos teórico-metodológicos que sustentan la actividad para la vida (Actividad 2). Se les devela, a los profesores, los elementos teóricos y metodológicos que sirvieron para diseñar la actividad realizada. Para ello, se solicitó la lectura y análisis del artículo (Covián y Romo, 2014), en el cual, se presenta un análisis praxeológico de la construcción de la vivienda maya y del levantamiento y trazo topográfico en la cultura egipcia. En ambos contextos se utilizan conocimientos matemáticos, como son la medida de la inclinación, la proporcionalidad, el teorema de Pitágoras y la construcción de figuras geométricas. Para guiar su análisis se propusieron preguntas del tipo: ¿qué conocimientos matemáticos aparecen en el análisis de construcción de la vivienda maya?, ¿estos conocimientos son objeto de enseñanza?, ¿en qué nivel?, ¿consideras que podría proponerse una actividad didáctica basada en el análisis de la construcción de la vivienda maya?, ¿tendría sentido?

Diseño de una actividad para la vida (Actividad 3). Se solicitó a los profesores trabajar en equipo y diseñar una actividad didáctica. Esta actividad debía contener dos o más tareas que involucraran al menos un uso de cierto tema matemático. Es decir, hacer aparecer una utilidad actual de las matemáticas, y en cierta medida, real para los estudiantes. Para presentar su diseño, los profesores debían considerar al menos seis aspectos: tema matemático, utilidad de la enseñanza de este tema, nivel educativo, objetivos de la actividad, material necesario y la actividad didáctica.

Implementación de la actividad para la vida diseñada (Actividad 4). Se solicitó implementar la actividad diseñada (Actividad 3), a un grupo de estudiantes (pequeño grupo de voluntarios o bien a su clase). Esto para que ellos tuvieran una validación experimental de la actividad diseñada.

Estas cuatro actividades en su conjunto debían permitir a los profesores diseñar una actividad que involucrara un contexto de la vida (extra-escolar) y experimentarla con estudiantes. Este tipo de diseños están asociados a la complejidad de comprender la lógica del contexto considerado y la forma en que los conocimientos matemáticos se relacionan con otro tipo de conocimientos (prácticos, contextuales). Debido a esta gran complejidad, se considera que la Actividad 1 del curso resulta crucial para “convencer” a los profesores de que el diseño de actividades para la vida es sumamente importante y necesario para formar ciudadanos capaces de utilizar eficazmente las matemáticas en su vida. Para ilustrar este rol crucial de la Actividad 1, se presenta a detalle su análisis en la siguiente sección.

Análisis de las praxeologías topográficas-geométricas realizadas por profesores de matemáticas en el curso

Los profesores generaron una gran diversidad de técnicas para las tareas 4, 5 y 6 de la Actividad 1 del curso: trazo de figuras conocidas, cuadriculación de figuras, técnica mixta (fusión de las dos anteriores), trazo de un polígono sobre la figura utilizando un software y técnicas topográficas. La búsqueda de una “buena” aproximación fue un factor determinante para justificar, controlar y validar las técnicas. Para mostrar la riqueza de las técnicas y el rol de la precisión, se presenta a continuación el análisis del trabajo de 10 de los profesores, debido a que fueron los que presentaron con más detalle sus resoluciones y justificaciones.

Trazo de figuras conocidas

Para calcular el área del terreno plano (tarea 4), algunos profesores optaron por técnicas similares a las presentadas en P1. Insertaron figuras (triángulos o rectángulos) que abarcaran la mayor área posible. Seguido, insertaron figuras como triángulos y trapecios que también abarcaran el máximo de área restante y así sucesivamente. Luego calcularon el área de cada figura y las sumaron para obtener el total (figuras 10 y 11).

Ambos profesores buscaban una “buena” aproximación, como se ilustra en las descripciones que hacen sobre sus técnicas. Karla señala: “El resultado sería una aproximación. Si quisiera una buena aproximación entonces lo que haría es trazar una mayor cantidad de polígonos para tratar de cubrir mejor el área en cuestión”. Santiago demás explicita la escala como elemento que *facilita* la precisión: “El área de la figura es aproximadamente 18.62 cm^2 . El área aproximada de la porción de terreno dependerá de la escala empleada para realizar dicha figura”. Sin embargo, estos profesores

usan nuevamente sus técnicas (1 y 2) en tareas donde ya no son óptimas. Karla privilegia el uso de rectángulos (ver figuras 12 y 13), lo que impide una buena aproximación, particularmente en el cálculo del área de la Ciudad de México. No investiga esta área, ya conocida 1.485 km², lo que le impide buscar otra técnica, que resulte más precisa.

Santiago al trazar nuevamente triángulos, obvia el lago (ver figura 14) y no busca una técnica más sofisticada, que le asegure mayor precisión en el cálculo de área (ver figura 15).

Entre mayor sea la aproximación buscada, se dibujaría un mayor número de polígonos conocidos, los más adecuados a la forma del terreno. Es decir, la precisión es una tecnología que

Figura 10. Técnica de trazo de figuras conocidas en terreno plano por Karla

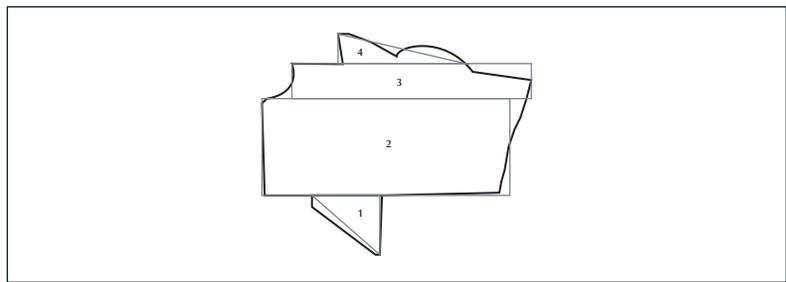


Figura 11. Técnica de trazo en figuras conocidas en terreno plano por Santiago

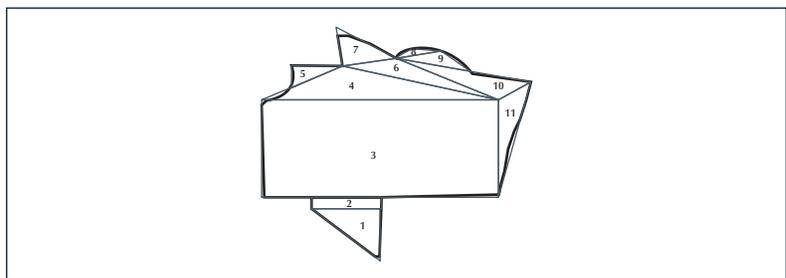


Figura 12. Técnica de trazo de figuras conocidas en terreno con lago por Karla

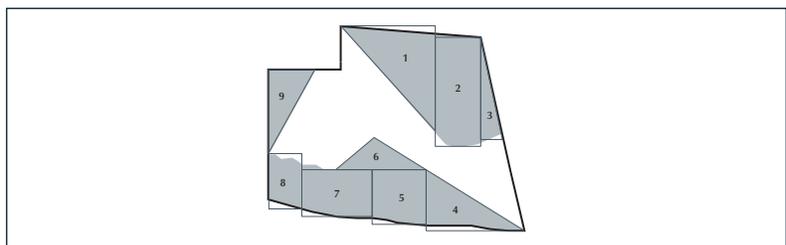


Figura 13. Técnica de trazo de figuras conocidas para calcular el área de la Ciudad de México por Karla

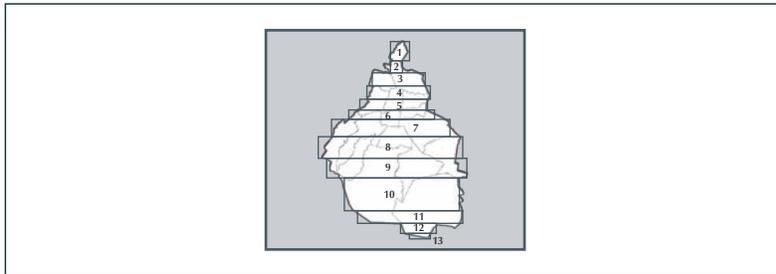


Figura 14. Técnica de trazo de figuras conocidas en terreno con lago por Santiago

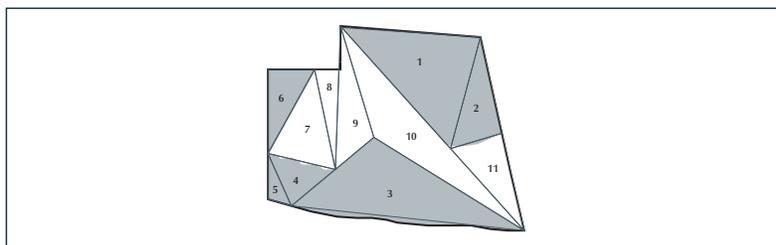
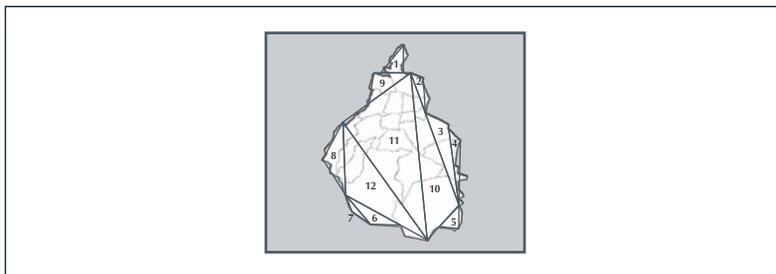


Figura 15. Técnica de trazo de figuras conocidas para calcular el área de la Ciudad de México por Santiago



regula y controla técnica, lo que se confirmará en las otras técnicas como se muestra a continuación.

Cuadrícula de figuras

Esta técnica consiste en sobreponer una cuadrícula o “rejilla” sobre la figura considerada, contar los cuadrillos y determinar el área. La colocación de la “rejilla” se hace manualmente (a lápiz y papel) o con programas computacionales, como GeoGebra, Paint o Word.

La cuadrícula manual la utilizan sólo dos profesores Alfonso y Horacio. Alfonso establece como unidad de medida 1 cm^2

y determina un área de 21 cm^2 para el terreno plano y un área total de 24 cm^2 para el terreno con lago, donde 15 cm^2 corresponden a la tierra firme (ver figuras 16 y 17). Horacio utiliza esta misma técnica para el cálculo del área de la Ciudad de México, el papel milimétrico es un medio que le permite obtener diferentes unidades de medida y por tanto determinar una mayor o menor aproximación (ver figura 18):

Figura 16. Técnica de cuadrícula para terreno plano por Alfonso

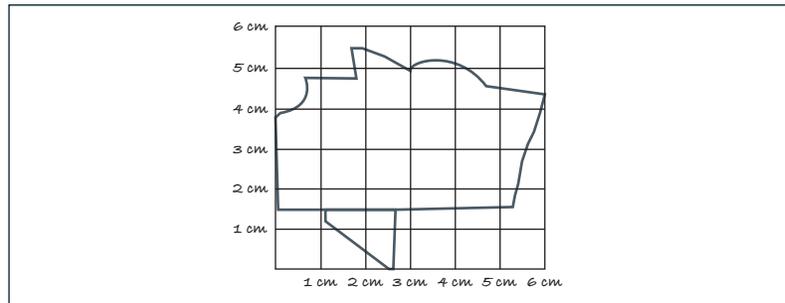


Figura 17. Técnica de cuadrícula para terreno con lago por Alfonso

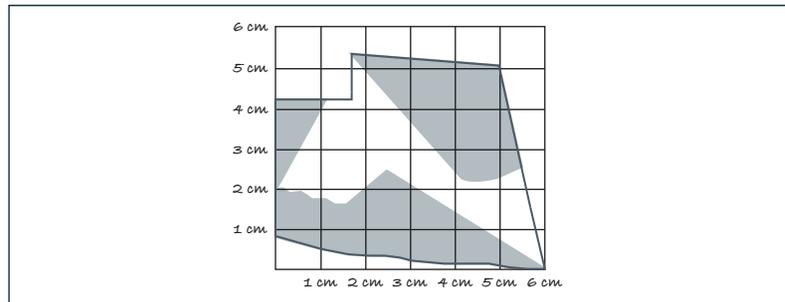


Figura 18. Técnica de cuadrícula para calcular el área de la Ciudad de México por Horacio



[...] haciendo alarde de buena vista y concentración se procede a contar los “cuadritos” realizando ajustes en el caso de los bordes. Es decir, contar 2 por 1 o incluso 3 por 1, dependiendo del porcentaje ocupado. Cabe mencionar que, al realizarlo con otras personas, alumnos voluntarios, se obtuvo una medida de 593 a 600 unidades cuadradas o 5.93 a 6.00 cm². (Extracto de reporte de Horacio, p. 3).

Para tener una mayor precisión, tres profesores usaron esta misma técnica, pero apoyándose en el uso de un software que permite ajustar la unidad de medida de área (cada cuadro).

En el caso de María (figura 19), aunque no hizo el cálculo, la búsqueda de precisión está presente en su justificación, al mencionar que se pueden hacer aproximaciones al área por exceso (asignando cuadros grandes) o por defecto (dividiendo los cuadros grandes en cuadros cada vez más pequeños). En contraste César y Juan Pablo sí hacen los cálculos y determinan que el área del terreno plano es de 130 u² y 2008.51 mm², respectivamente (ver figuras 20 y 21). César considera la forma del terreno y en los bordes de la figura decide contar los cuadros como la mitad de la unidad considerada, mientras que Juan Pablo disminuye el

Figura 19. Técnica de cuadrícula para terreno plano por María

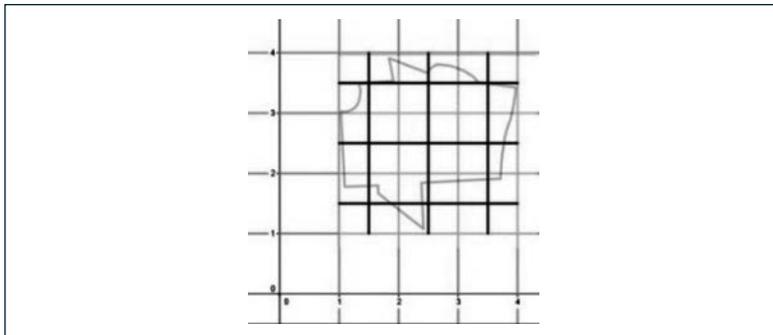


Figura 20. Técnica de cuadrícula para terreno plano por César

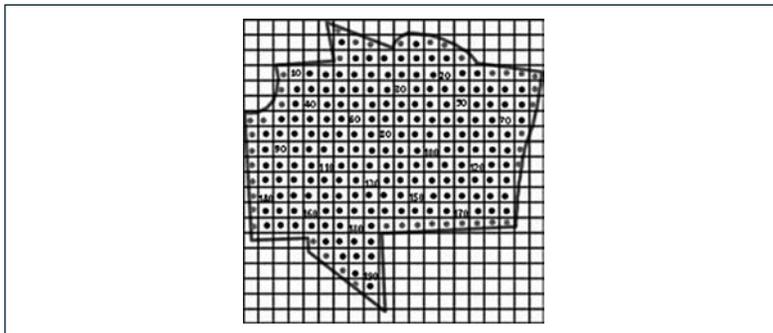
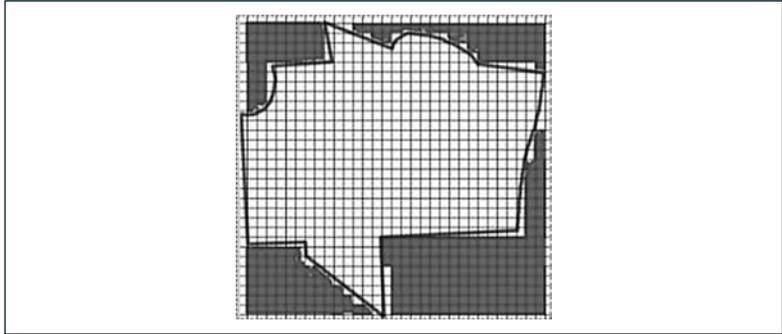


Figura 21. Técnica de cuadrícula para terreno plano por Juan Pablo



tamaño de la unidad cuadrada de área para alcanzar una mayor precisión.

Esta misma técnica las adaptan César y Juan Pablo para obtener el área de la Ciudad de México (Figuras 22 y 23) con 1 mm² de unidad.

Figura 22. Técnica de cuadrícula para calcular el área de la Ciudad de México por César

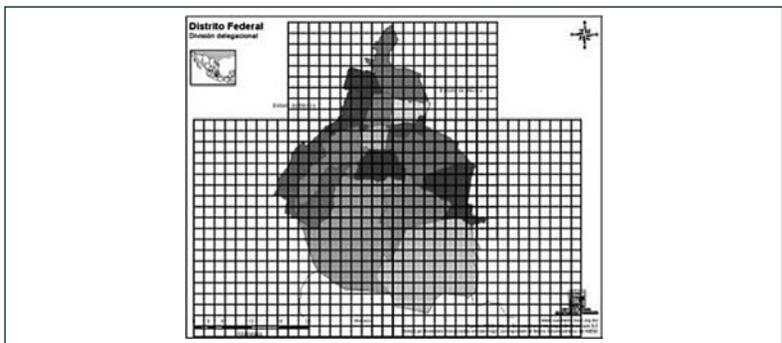
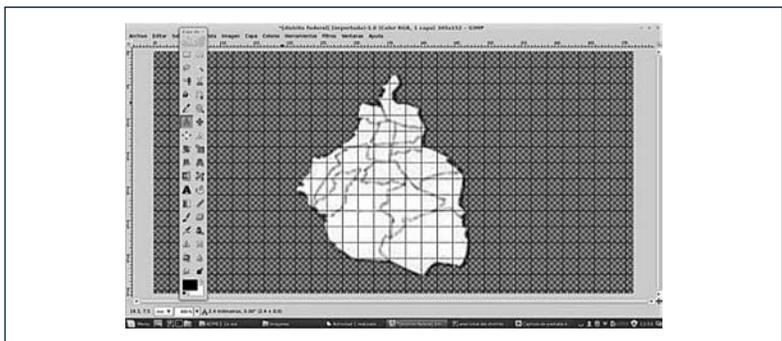


Figura 23. Técnica de cuadrícula para calcular el área de la Ciudad de México por Juan Pablo



En particular, se observó que el trabajar con una imagen “conocida” los llevó a cuestionar la precisión de su técnica. César menciona

[...] del conteo resultan 297 unidades de 4 km^2 , esto es, un total de $297 \times 4 = 1188 \text{ km}^2$. Al final, el método tuvo sus deficiencias, puesto que el área de la Ciudad de México, según diversas fuentes, fluctúa entre 1485 y 1499 km^2 . (Extracto de reporte de César, p. 5)

Juan Pablo justifica el valor obtenido, considerando que no se calcula el área de los relieves presentes en la ciudad, lo cual es una justificación que tiene sentido al considerar el contexto “real” de la tarea:

Área calculada igual a 451584 km^2 . Donde se da la escala de $1 \text{ mm}^2:1 \text{ km}^2$. Se hace notar aquí que esto no corresponde a la superficie de la Ciudad de México, pues faltan los relieves del terreno. Lo que se calculó de manera aproximada fue entonces la superficie plana de la Ciudad de México. (Extracto de reporte de Juan Pablo, p. 4)

Se nota cómo el tipo de terreno juega un rol fundamental en la elección y refinamiento de la técnica, pero también el contexto “real”, particularmente de la Ciudad de México, permite contrastar el valor obtenido con el valor real de área. Efectuar el cálculo de área deja de ser una técnica únicamente geométrica y por tanto que tiene justificarse de acuerdo al contexto, como es el considerar montañas, cerros y relieves que también tienen una superficie.

Técnica Mixta

La técnica que se ha denominado Mixta es una “fusión” entre las dos técnicas analizadas previamente. Primero se cuadrícula la figura, luego se insertan figuras geométricas conocidas (triángulos y rectángulos principalmente), se cuentan los cuadros en cada figura geométrica y se suman. Dos profesores usan software, mientras que Horacio vuelve a utilizar el papel milimétrico (ver figuras 24, 25 y 26).

Carmen hace el cálculo de área “por compensación”, y describe la técnica así:

Considero que la zona del terreno que no quedó coloreada compensa aproximadamente los sobrantes que tengo en el polígono rojo y en el polígono celeste. Por lo que el área del terreno es aproximadamente la suma de las áreas de los polígonos rojo, violeta y celeste. La cuadrícula tiene relación 1:1.

Figura 24. Técnica mixta en terreno plano por Carmen

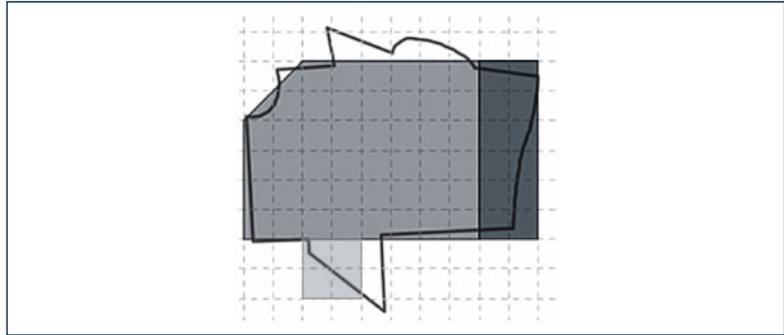


Figura 25. Técnica mixta en terreno con lago por María

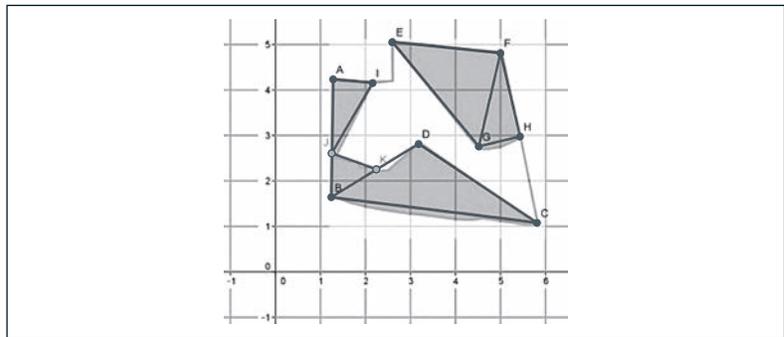
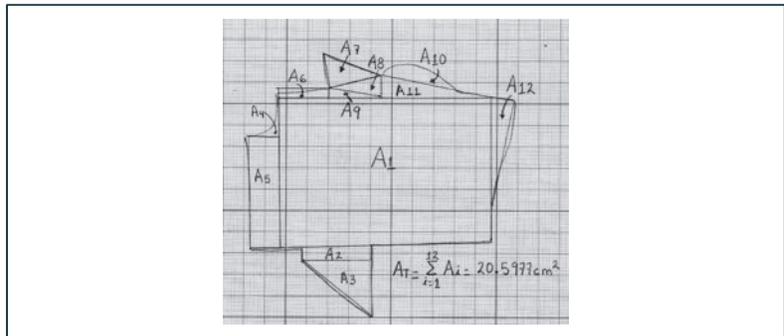


Figura 26. Técnica mixta en terreno plano por Horacio



El área de cada cuadradito es de 1 unidad cuadrado. Polígono rojo medio: 46 unidades cuadrado. Polígono rojo: 12 unidades cuadrado. Polígono rojo claro: 4 unidades cuadrado. El área del terreno es aproximadamente 62 unidades cuadro (Extracto del reporte de Carmen, p. 5)

Se resalta que no utiliza “unidades cuadradas” sino unidades cuadrado, que muestran claramente lo que representa el área

calculada (62 unidades cuadrado). Por su parte, Horacio presentó un procedimiento que busca mayor precisión: estableció una unidad de medida (1 cm²) e insertó cuatro rectángulos, siete triángulos y una sección de círculo en la figura procesada (ver figura 26). María traza triángulos sobre tierra firme y cuenta los cuadros (ver figura 25). Esta técnica fue también utilizada para calcular el área de la Ciudad de México, asumiendo que esta tarea es del mismo tipo que la anterior: calcular el área de un terreno plano, pero con un contorno más irregular. Lamentablemente, para ellos el contexto “real” es obviado (ver figuras 27, 28 y 29).

Figura 27. Técnica mixta para calcular el área de la Ciudad de México por Carmen

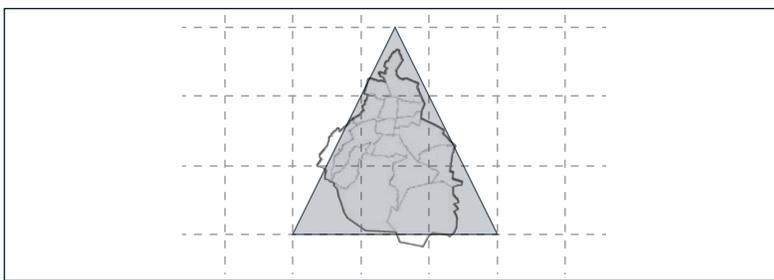


Figura 28. Técnica mixta para calcular el área de la Ciudad de México por Julio César

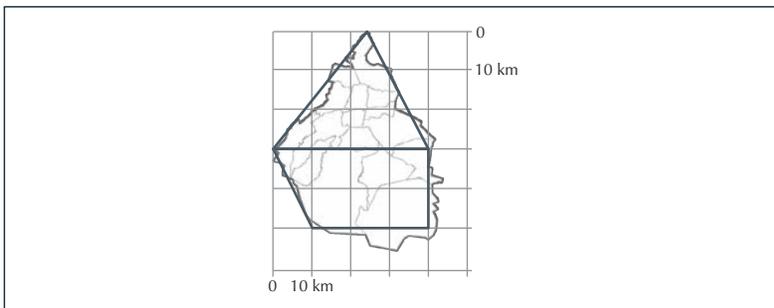
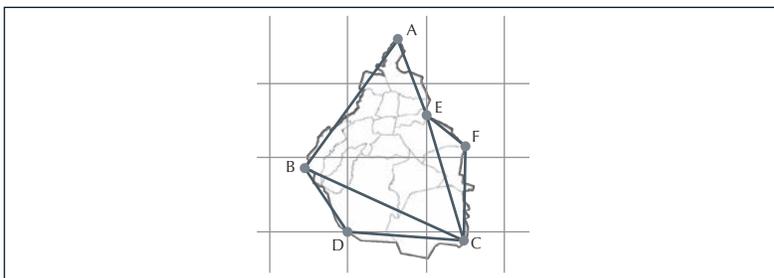


Figura 29. Técnica mixta para calcular el área de la Ciudad de México por María



Trazo de un polígono sobre la figura con el apoyo de un software

Esta técnica consiste en trazar un polígono sobre la figura la figura de terreno plano y del terreno con un lago, apoyándose en la ayuda de un software (GeoGebra o Free Map Tool) que tiene herramientas para el cálculo de áreas. Una cuestión que apareció fue la preservación de la escala al escanear y procesar la imagen. Los profesores buscaron que el cálculo obtenido mediante el software fuera realmente el de las figuras “originales”. Esta técnica fue presentada por los profesores Gilberto, Alfonso y Julio César. A continuación, se ilustran las dos primeras (ver figuras 30 y 31).

Dado que el software permite el trazo de polígonos con gran cantidad de lados, entonces “un polígono con mayor número de lados” asegura “mayor precisión en el cálculo del área”. Esto se ilustra particularmente bien en las técnicas presentadas por

Figura 30. Técnica de trazo de un polígono en terreno plano por Gilberto

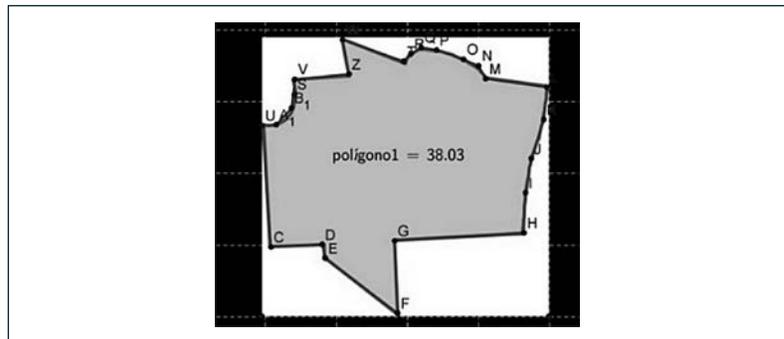
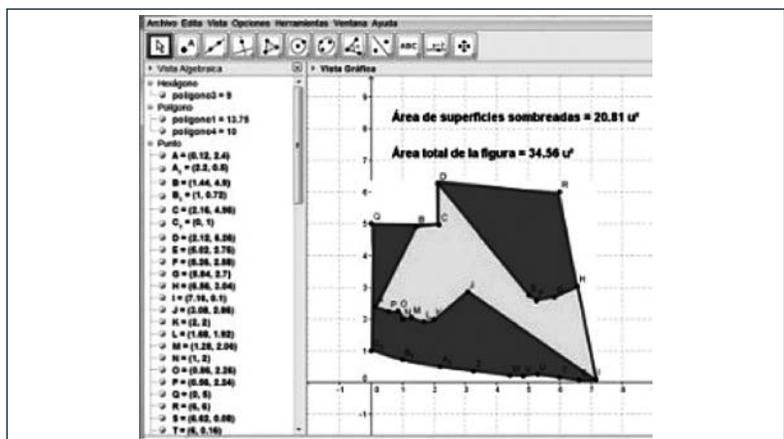


Figura 31. Técnica de trazo de un polígono en terreno con lago por Alfonso



Alfonso y Julio César para el cálculo del área de la Ciudad de México. Alfonso utilizó GeoGebra y obtuvo el valor del área. Julio César investigó en la red y ubicó el software Free Tool Maps, en éste es posible pedir la representación del mapa de cualquier ciudad, por lo que él solicitó el de la Ciudad de México, luego insertó un polígono y obtuvo el valor del área con un error de 61077 km² con respecto al valor “real”. Aunque él explicita en su reporte que, si dibujaba polígonos con mayor número de lados, obtendría una mejor aproximación, no lo hizo. Un trabajo sobre este software permitió corroborar que efectivamente es posible hacer cálculos con mayores aproximaciones.

Figura 32. Técnica de trazo de un polígono para calcular el área de la Ciudad de México por Alfonso

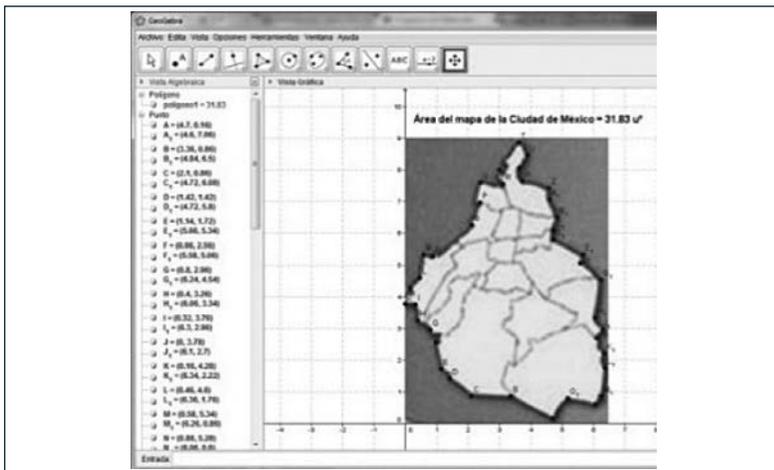
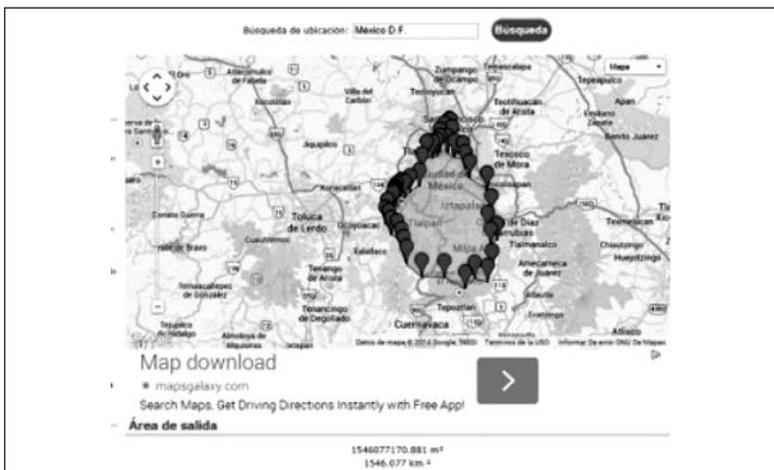


Figura 33. Técnica de trazo de un polígono para calcular el área de la Ciudad de México por Julio César



Técnicas topográficas

Las dos técnicas presentadas a continuación, cálculo de áreas por medio de coordenadas rectangulares y el cálculo de áreas por medio de la inscripción de círculos, son topográficas, puesto que son usadas en Topografía para determinar el área de terrenos delimitados por polígonos o poligonales “muy irregulares”.

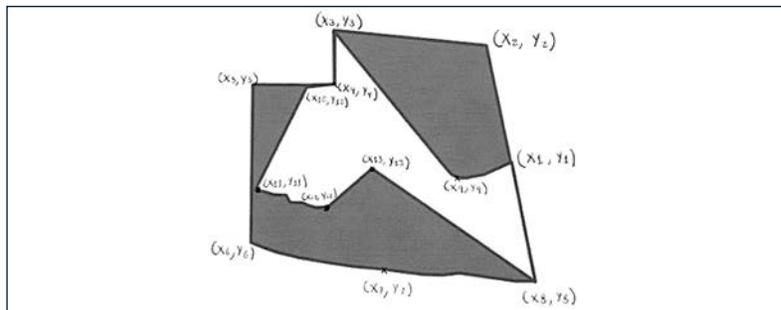
Cálculo de áreas por medio de coordenadas rectangulares

Esta técnica, como su nombre lo indica, consiste en asignar coordenadas a cada uno de los vértices que componen el polígono o la poligonal que representa el terreno. Una vez que se tienen las coordenadas de cada vértice se procede a efectuar el cálculo del área por medio de determinantes, conocida como Gauss Jordan. Generalmente se asignan las coordenadas con datos del terreno (como la altura o distancia a cierto punto de referencia), sin embargo, los profesores asignan las coordenadas de manera “arbitraria”. César y Horacio usan esta técnica para calcular el área del terreno que contiene un lago. Horacio asignó coordenadas generales (ver figura 34) y César procesó la imagen y la ubicó en un plano cartesiano para poder determinar los valores de las coordenadas y hacer los cálculos (ver figura 35).

En el planteamiento de Horacio, A_T es el área total de la figura 34, A_L es el área del lago y A_F el área final que se quiere calcular, es decir, el área de tierra firme.

$$A_T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix} = \frac{(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_7y_8 + x_8y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \dots + y_7x_8 + y_8x_1)}{2}$$

Figura 34. Técnica de cálculo de coordenadas para el terreno con lago por Horacio

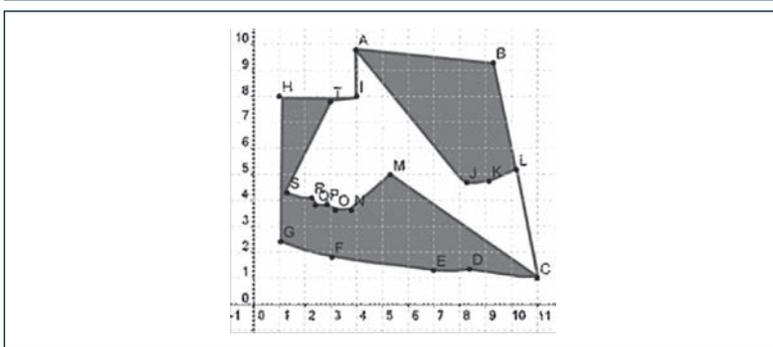


$$A_T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_9 & y_9 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_{10} & y_{10} \\ \vdots & \vdots \\ x_{13} & y_{13} \\ x_8 & y_8 \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix} = \frac{(x_1y_8 + x_8y_3 + \dots + x_{13}y_8 + x_8y_1) - (y_1x_9 + y_9x_3 + \dots + y_{13}x_8 + y_8x_1)}{2}$$

$$A_F = A_T - A_F$$

César al hacer los cálculos obtiene 40.16 u², que al analizarlos tienen una aproximación bastante buena.

Figura 35. Técnica de cálculo de coordenadas para el terreno con lago por César



Cálculo de áreas por medio de la construcción de círculos

Esta técnica consiste en ubicar un punto lo más cercano al centro del terreno considerado, luego trazar un radio cada 10 grados, a puntos del terreno (36 radios, de diferentes circunferencias), sumar los radios y promediarlos, el resultado es el radio de la circunferencia que se supone representa el área del terreno. Finalmente, se calcula el área de dicha circunferencia. Esta técnica está diseñada para el cálculo de áreas de terrenos “muy irregulares” y no muy extensos (ya que discrimina la curvatura de la tierra).

María usa esta técnica para calcular el área del terreno plano, traza radios a puntos “arbitrarios” y se guía por los vértices que representa la figura, adaptándola “no muy fortuitamente” (ver figura 36). Horacio la usa para calcular el área de la Ciudad de

Figura 36. Técnica de trazo de radios para terreno plano por María

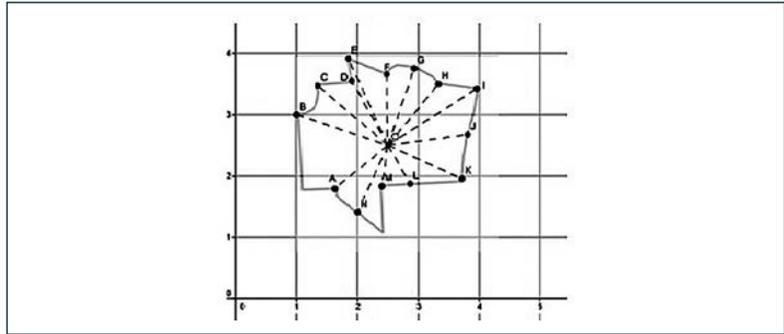
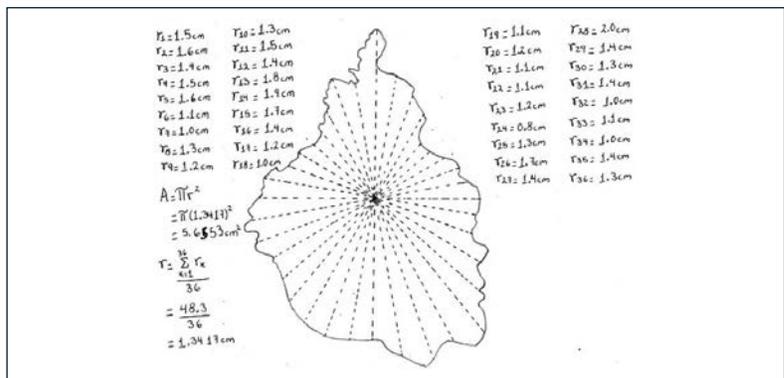


Figura 37. Técnica de trazo de radios en la figura de la Ciudad de México por Horacio



México, tal como se describió más arriba y como usa en Topografía, trazando los 36 radios, promediando y calculando el área de la circunferencia (ver figura 37).

Es importante señalar que en el curso se analizó con los profesores, las técnicas que ellos presentaron para realizar estas tareas (las adecuadas, las óptimas, las “incorrectas”), lo que mostró que considerar la realidad es complejo, pero lleva a una actividad matemática significativa, lo que tuvo un impacto en el diseño de las actividades para sus estudiantes.

Principales resultados del análisis de las técnicas de los profesores a las tareas geométrico-topográficas

El análisis previo permitió identificar que los elementos contextuales, tipo de terreno (plano, con lago, con relieves) y la forma (irregularidad) determinan la técnica más eficaz para el cálculo de áreas. Por ejemplo, en el cálculo de área de la Ciudad de México, algunos profesores calculan el área de un terreno plano, que

no tiene relieves. Para ellos, da lo mismo que se diga que representa la Ciudad de México, mostrando valores numéricos completamente irreales. Por el contrario, los profesores que toman en cuenta “la realidad” del contexto, investigan técnicas utilizadas para este tipo de tareas en la Topografía (vida real) como es la de radiaciones o la de los determinantes. Asimismo, investigan la existencia de software utilizados para ello y los utilizan. Es decir, el tipo de tarea los lleva a producir técnicas que involucran conocimientos geométricos, ciertamente, pero también topográficos, informáticos y tecnológicos. Esta tarea resulta ser la más importante ya que muestra una actividad matemática rica en la que la precisión juega un rol determinante para controlar la validez de la técnica. En las otras dos tareas aparece otro elemento de realidad, la representación de un lago y un contorno irregular, que lleva a varios de los profesores a generar técnicas que permitan el cálculo del área, cuadrículas finas, compensaciones, trazo de figuras geométricas, elección de la escala y de la unidad de medida. Esto muestra cómo la geometría de la precisión tiene una razón de ser importantísima, pero no por sí misma, sino porque permite resolver tareas reales. Obviar el lago, usar la misma técnica en tipos de tareas diferentes puede ser un efecto del paradigma tradicional en la enseñanza, “una vez que identifiques una técnica óptima la usas si las tareas se parecen un poco: cálculo de áreas”. Para mostrar cómo la realización de estas tareas les permitió a los profesores identificar las potencialidades, pero también la complejidad de proponer tareas en contextos reales, se presentan los diseños de los equipos 1 y 2.

El equipo 1 elaboró un diseño para el tratamiento de la función exponencial en el bachillerato. Éste se presenta en las figuras 38 y 39.

Como se observa, este equipo de profesores contextualizó la función exponencial en la medicina, particularmente en el tratamiento del cáncer. Para ello, buscan acercarse a los estudiantes a este contexto a través del tráiler de una película y de una lectura (tareas 1 y 2). En las tareas 3 y 4 se presenta la exponencial como un modelo matemático de tiempo de vida del Radón 222 y el crecimiento de células cancerígenas. Se observa que estos modelos sólo representan una parte de los comportamientos del Radón 222 y del crecimiento de células cancerígenas y que un análisis más fino es necesario para asegurar el uso real de los modelos en medicina. Sin embargo, estos profesores comienzan a buscar tareas en contextos extra-escolares (de la vida) para dar sentido a la enseñanza del modelo exponencial.

Por su parte, el equipo 2, planteó un diseño basado en el contexto de corte y confección, como se observa en la figura 40. La actividad está planteada para estudiantes de nivel secundaria y bachillerato. Los conocimientos que se pretenden movilizar son los de proporcionalidad. Sin embargo, la técnica óptima no

Figura 38. Tareas 1, 2 y 3 del diseño del equipo 1

Maestría en Matemática Educativa – IPN
Análisis del discurso matemática escolar I

TAREA 1

a) Mira el tráiler de la película "Bajo la misma estrella". Lo encontrarás en el siguiente enlace:

<http://goo.gl/dJmRha>

b) ¿Cuál es el tema de la película?

TAREA 2

a) Lee el siguiente texto.

El cáncer es la causa principal de muerte por enfermedad en la población de adolescentes y adultos jóvenes; es la causa más común de muerte relacionada con enfermedades en las mujeres y le sigue solo a las enfermedades cardíacas en los hombres. En este grupo de edad de adolescentes y adultos jóvenes, solo los accidentes, los suicidios y los homicidios cobran más vidas que el cáncer.

Resulta difícil de entender qué relación puede existir entre las matemáticas y el cáncer. Un tumor se origina cuando una célula de un organismo se niega a morir y se divide sin control dando lugar a generaciones de células hijas que proliferan hasta tal punto de poner en peligro la existencia del organismo completo. Con esta descripción es fácil entender que cada tipo de célula de nuestro cuerpo, si por alguna razón se vuelve cancerosa, puede generar un tumor. Dado que tenemos más de un centenar de tipos distintos de células en nuestro organismo, pueden surgir cientos de tipos de tumores diferentes. Comprender cada uno de ellos, detectarlos a tiempo, conocer su evolución futura, encontrar sus debilidades para aplicar tratamientos adecuados, es un reto para la medicina y para la ciencia en general.

Estudiar todos los factores que intervienen en un sistema biológico cualquiera es prácticamente imposible. La cantidad de variables que intervienen, desde las que controlan las reacciones químicas entre átomos y moléculas hasta las que intervienen en la interacción, crecimiento y evolución de organismos completos es inmensa. Sistemas biológicos hay muchísimos, una población de bacterias que crece, la proliferación de una enfermedad infecciosa, los latidos de un corazón como producto de la acción coordinada de miles de millones de células o, como en el caso que nos ocupa, la proliferación de células cancerosas en un tumor, son unos pocos ejemplos. El modelo matemático no tiene en cuenta a todas las variables, tan sólo incluye unas pocas en un conjunto de ecuaciones, pero con ellas es posible extraer, teóricamente por supuesto, ciertos comportamientos del sistema completo y su evolución con el tiempo. Después, si el modelo es lo suficientemente bueno, sus resultados se acercarán al comportamiento real y, ello permitirá obtener respuestas sobre el comportamiento futuro del sistema.

b) Responde las siguientes preguntas

- ¿Para qué sectores de la población mundial es el cáncer la principal causa de muerte?
- Según el texto, ¿qué posibilidades ofrecen los modelos matemáticos con respecto al estudio del cáncer?

Maestría en Matemática Educativa – IPN
Análisis del discurso matemática escolar I

TAREA 3

El siguiente gráfico corresponde a una función M.

Refiere al proceso de desintegración del Radón-222, una sustancia empleada en medicina para realizar diagnósticos y tratamientos de radioterapia contra el cáncer.

La **radioactividad** es un fenómeno en el que una sustancia emite radiaciones y por ello durante ese proceso se desintegra. El tiempo que tarda en reducirse a la mitad se llama **"vida media"**.

Masa (g)

Tiempo (días)

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la imagen de 0?
¿Qué significa la imagen de 0, en esta actividad?
- La masa de Radón-222, ¿aumenta o disminuye con el pasar de los días?
¿Cómo justificas esa afirmación?
- La masa de Radón-222, ¿llega a ser 0 algún día? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la vida media del Radón-222?

e) Dos estudiantes de otro grupo estimaron que la relación entre la masa y el tiempo, $M(t)$, se puede expresar de las siguientes formas:

$$M(t) = 100(0,84)^t$$

$$M(t) = 100\left(\frac{1}{0,84}\right)^t$$

¿Estás de acuerdo con alguna de ellas? ¿Por qué?

Figura 39. Tarea 4 del diseño del equipo 1

Maestría en Matemática Educativa – IPN
Análisis del discurso matemática escolar I

TAREA 4

Se conoce que el número de células cancerosas de un tumor viene dado por la expresión $N(t) = e^{0,23t}$, siendo t el número de meses transcurridos desde su aparición.

a) Completa la siguiente tabla

Meses transcurridos	1	3	6	10	15	20	30	50
Número de células cancerosas								

b) Representa gráficamente la función N , utilizando el siguiente par de ejes.

Por cada centímetro cúbico de tumor hay 10^9 células cancerosas. A una persona enferma de cáncer se le detecta un tumor de 34,4 cc.

- ¿Cuándo se originó el cáncer de esta persona? Muestra tus planteos.
- ¿Crees que es útil este modelo matemático, en relación al estudio del cáncer? ¿Por qué?

Referencias bibliográficas

Abner, P. y López, G. (s/f). *La función exponencial* [Presentación PowerPoint]. Recuperado de <http://es.slideshare.net/pabloabner/funcion-exponencial>

Anderiz, M. (2011). *Matemáticas y Cáncer* [Presentación PowerPoint]. Recuperado de <http://es.slideshare.net/Medim81/matematicas-y-cncer>

Figura 40. Tareas 1 y 2 del diseño del equipo 2

Tarea 1
 A partir del gráfico de abajo, que corresponde al molde de la parte frontal izquierda de un chaleco para bebé, diseñar otro molde semejante al dado pero con 4 cm más de largo, elaborado en papel kraft en tamaño real.

CHALECO DE BEBÉ

Figura 41. Tareas 1 y 2 del diseño del equipo 2

Tarea 2
 Contestar las siguientes preguntas.

- ¿Qué operaciones realizaste? Escribe las y describe para qué realizaste dichas operaciones.
- ¿Qué figuras geométricas encontraste para realizar tu molde?
- Describe qué instrumentos utilizaste para trazar el largo del chaleco.
- Ordena y escribe los pasos que seguiste para la realización de tu molde.
- Describe qué dificultades encontraste para trazar el cuello del chaleco.
- Describe qué dificultades encontraste para trazar la sisa.
- ¿Qué enseñanza te deja esta actividad?
- ¿Encontraste alguna fórmula o método para que al trazar un molde, este proceso sea rápido y correcto, sí o no?, descríbelo.

se apoya en la proporcionalidad ya que no se trata de hacer un dibujo a escala, sino de trazar un dibujo en el que la longitud varía, pero no proporcionalmente. La tarea propuesta, sin embargo, permitirá generar técnicas matemáticas y no-matemáticas (por ejemplo, cómo determinar la sisa y el cuello si se modifica la longitud del chaleco) validadas por conocimientos contextuales (de corte y confección).

En estos diseños puede percibirse una primera apropiación de la metodología expuesta en la sección 3, eligen un contexto, lo analizan y buscan una relación de las matemáticas de éste con las escolares. Es decir, estos dos equipos identificaron tareas no matemáticas (en contextos de medicina y corte y confección) que permiten movilizar técnicas, validaciones y justificaciones matemáticas y contextuales. Se considera que en estos diseños subyace la idea de que conocer la utilidad de las matemáticas requiere seguir una ruta metodológica compleja, pero insoslayable para la formación de ciudadanos competentes matemáticos.

Conclusiones

El curso presentado permitió mostrar un camino para comunicar, una propuesta teórica-metodológica para el diseño de actividades

didácticas, en un programa de profesionalización docente. Un elemento clave del curso fue proponer la actividad didáctica topográfica-geométrica a los profesores, para que al enfrentarla pudieran experimentar la potencialidad de las tareas, determinar el área de terrenos planos, determinar el área de terrenos con un lago y determinar el área de la Ciudad de México, ya que éstas provocan la generación de una diversidad de técnicas geométricas normadas por la precisión. Estas técnicas: cuadriculación, trazo de figuras conocidas, radiación, determinantes, trazo de polígonos de numerosos lados y cálculo de su área usando software, requieren tomar en cuenta el tipo de terreno, la unidad de medida, la escala, las propiedades de figuras geométricas conocidas, las propiedades de polígonos irregulares, los medios a disposición (papel milimétrico, software) y el grado de aproximación al “valor buscado”.

Además de realizar la actividad didáctica topográfica-geométrica y analizar los elementos antes mencionados, los profesores acceden a los elementos teóricos que subyacen al diseño, generan un nuevo diseño y lo implementa con estudiantes. Todo esto los lleva a cuestionar el paradigma tradicional, centrado en conceptos, definiciones y mecanización de técnicas, y a considerar que una manera de modificarlo es utilizar las herramientas teóricas-metodológicas puestas a su disposición, para generar una enseñanza más rica cuya razón de ser esté asociada al uso de las matemáticas en situaciones reales.

Referencias

- Artigue, M. (2011). *Les défits de l'enseignement de mathématiques dan l'education de base*. UNESCO: París
- Castela, C. y Romo-Vázquez, A. (2011). Des Mathématiques A L'Automatique: Etude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Covián, O y Romo-Vázquez, A. (2014). Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y el levantamiento y trazo topográfico. *Bolema*, 28(48), pp. 128-148.
- Covián, O. (2013). *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción*. Tesis de doctorado no publicada. México: CINVESTAV-IPN.
- Fuenlabrada, S. (2007). *Geometría y Trigonometría* (Tercera ed.). D.F., México: Mc Graw Hill.
- Lave, J. (1988). *La cognición en la Práctica*. Ediciones Paidós Ibérica.

- Macías, M. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros*. Tesis de maestría no publicada. México: CICATA-IPN.
- OECD (2016). PISA 2015 Mathematics Framework. In *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematics and Financial Literacy*, OECD Publishing, París. DOI: <http://dx.doi.org/10.1787/9789264255425-5-en>
- Pérez de Moya, J. (1573). *Tratado de Geometría Prácticas y Especulativa*. Observatorio de Marina de San Fernando y con licencia y privilegio Real de los Reinos de Castilla y Aragón.
- Scott, D. & Scott, S. (2010). Innovations in the Use of Technology and Teacher Professional Development. In J. O. Lindberg & A.D. Olofsson (Eds.), *Online Learning Communities and Teacher Professional Development: Methods for Improved Education Delivery* (pp. 169-189). Hershey, New York: Information Science Reference.
- Tirosh, D. (2009). What do we know about mathematics teacher education? What evidence do we have? What comes next? *Journal Mathematics Teacher Education*, 12, 83-87.
- UNESCO. (2014). *Programas y Presupuesto Aprobados (37 C/5)*. Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002266/226695s.pdf>
- Velasco, G. (2010). *Geometría y Trigonometría*. Ciudad de México, México: Trillas.
- Zamora, S., Vázquez, G. y Sánchez, L. (2007). *Matemáticas 2: Geometría y Trigonometría*. D.F., México: ST Editorial.
- Zúñiga, J. A., Zúñiga, E., & Zúñiga, H. I. (2012). *Geometría y Trigonometría: Formación basada en competencias, valores y desarrollo de secuencias didácticas*. Ciudad de México, México: IURE Editores.