Volumen VIII, núm. 15, Julio-Diciembre, 2012, pp. 101-116

UNA PROPUESTA PARA MEDIR DINÁMICA Y COHERENTEMENTE EL RIESGO OPERACIONAL

José Francisco Martínez Sánchez*
Francisco Venegas Martínez**

(Recibido: Mayo 2012 / Aprobado: Septiembre 2012)

Resumen

El propósito de este trabajo es proponer una estructura teórica dinámica para calcular un conjunto coherente de Valores en Riesgo para varios periodos a través de un proceso estocástico incremental. Para ello se utiliza la topología de un árbol de decisión para caracterizar los posibles estados del proceso y calcular sus probabilidades. Los estados forman un conjunto de aceptación coherente de Valores en Riesgo representando un cono convexo cerrado. A diferencia de los modelos estáticos para un sólo periodo, el modelo dinámico propuesto permite al tomador de decisiones contar con información dinámica sobre la máxima pérdida esperada de un portafolio o estrategia de inversión y, de esta manera, poder determinar el capital mínimo requerido.

Palabras clave: medida de riesgo dinámica, medidas coherentes de riesgo, árbol binomial de decisión
Clasificación JEL: D81, C11, C15

---

* Escuela Superior de Apan, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Correo electrónico: <marzan67@hotmail.com>.

** Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional, Correo electrónico: <fvenegas1111@yahoo.com.mx>.

Abstract

The purpose of this paper is to propose a dynamic theoretical framework to calculate a coherent set of Values at Risk for various periods through an incremental stochastic process. It uses the topology of a decision tree to characterized the possible states of the process and compute their probabilities. The states form a coherent set of acceptance of "Values at Risk" representing a closed convex cone. Unlike the static models for a single period, the proposed dynamic model allows the decision maker to have dynamic information on the maximum expected loss from an investment portfolio or strategy, and thus to determine the minimum capital requirement.

Keywords: dynamic risk measure, coherent risk measure, binomial tree
JEL Classification: D81, C11, C15

1. Introducción

El Valor en Riesgo (VaR, por sus siglas en inglés, Value at Risk) es el indicador más utilizado para estimar pérdidas potenciales debido a la exposición a un ambiente con riesgo. Una ventaja del uso del VaR es que éste es un sólo número que expresa la máxima pérdida esperada en un periodo de tiempo establecido. Es decir, el VaR es un indicador estático que proporciona información solamente para un periodo de tiempo, un día, una semana, etc., lo cual es una limitante importante para el inversionista o el administrador de riesgos; lo mismo sucede con el VaR condicional, o CVaR, el cual cuantifica las pérdidas que se pueden encontrar en las colas de las distribuciones.

Con respecto a dicha limitante, trabajos como los de Cheridito *et al.* (2003) proponen para medir el riesgo un indicador en tiempo continuo mediante un proceso estocástico incremental, de tal manera que el administrador de riesgos puede conocer en cualquier momento su exposición y sus efectos sobre una estrategia de inversión. En este mismo sentido varios autores han extendido la noción de una medida de riesgo condicional con un ajuste dinámico. Las medidas de riesgo condicionales han sido estudiadas por Detlefsen y Scandolo (2005) y Bion-Nadal (2004). Medidas de riesgo coherentes han sido desarrolladas por Delbaen (2006) y Artzner *et al.* (2007). Medidas de riesgo dinámicas convexas han sido propuestas por Riedel (2004), Frittelli y Rosazza (2004) y Kloppel y Suiza (2007).

El objetivo del presente trabajo es proponer una estructura conceptual para calcular un Valor en Riesgo dinámico, de tal manera que el indicador no depende de un sólo periodo si no de un proceso estocástico multiperiódico. Para ello se utilizará una estructura de árbol de decisión, el cual caracterizará los posibles estados del proceso y las probabilidades asociadas, así como un conjunto de aceptación coherente; éste último es un cono convexo cerrado. Al igual que en el caso del CVaR de un sólo período, se cumplen las propiedades de: monotonicidad creciente, homogeneidad positiva, invarianza bajo translaciones y subaditividad.

El presente trabajo está organizado en siete secciones. En la siguiente sección se revisan las condiciones necesarias para que una medida de riesgo sea coherente según Artzner *et al.* (2008). La tercera sección introduce el concepto de Valor en Riesgo condicional, CVaR. La cuarta sección incorpora el análisis multiperiodo de una medida de riesgo coherente, para lo cual se utiliza una topología de un árbol de decisión donde se define un proceso estocástico que toma distintos valores en cada periodo del tiempo y que le permite al tomador de decisiones o analista de riesgos contar con información actualizada sobre la máxima pérdida esperada de una cartera de inversión o estrategia. En la quinta sección se presenta el Teorema de representación de una estructura dinámica del Valor en Riesgo coherente. A través de la sexta sección se presenta una ilustración de la metodología propuesta. Por último, la séptima sección proporciona las conclusiones.

2. Medidas coherentes de riesgo

Los modelos basados en probabilidades proporcionan una descripción de la exposición al riesgo, generalmente, a través de uno o varios números denominados "indicadores clave" de riesgo. En particular, el Valor en Riesgo (VaR), es un cuantil de la distribución de riesgos agregados, sin embargo el VaR ha sido seriamente criticado cuando las distribuciones de las pérdidas no se distribuyen "normalmente", teniendo problemas de subaditividad debido a la existencia de colas anchas o a la falta de continuidad de las distribuciones.

Existen principalmente dos enfoques en la aplicación de medidas de riesgo para calcular el capital mínimo requerido para hacer frente a eventos de riesgo en instituciones financieras. El primero consiste en el desarrollo de modelos matemáticos para cada exposición al riesgo y de esta manera asignar el capital correspondiente; el capital total requerido es la suma de los capitales individuales vinculados con cada exposición al riesgo. El segundo enfoque considera una visión integral de la organización e incorpora todas las interrelaciones entre unidades de negocio y tipos de riesgo, por lo que las correlaciones son parte de la estructura del modelo.

Una medida de riesgo es un mapeo de una variable aleatoria en los números reales que representa las pérdidas asociadas al riesgo. Los estudios de medidas de riesgo se han enfocado a garantizar la "coherencia" en la forma de medirlo, en el sentido de Artzner *et al.* (2008). Evidentemente, la distribución de probabilidades del total de pérdidas por riesgo operacional X no sólo depende de la distribución de pérdidas individuales sino de la interrelación entre ellas.

El VaR se convirtió en una medida estándar de riesgo y se puede interpretar como el capital necesario para asegurar, con un nivel de confianza dado, que la institución no quedará insolvente ante eventos de riesgo consumados. Considere una variable aleatoria X_j que representa las pérdidas potenciales asociadas al riesgo en alguna institución del sector financiero. La pérdida agregada total, X, para n unidades de negocio o tipos de riesgo es la suma de todas las pérdidas, $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. .

2.1. Medida coherente de riesgo $\rho(X)$

Una medida coherente de riesgo, $\rho(X)$, es aquella que satisface las siguientes cuatro propiedades para cualquier par de variables aleatorias acotadas de pérdidas X y Y:

a) Subaditividad: $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Esta propiedad expresa que la integración de portafolios no crea riesgo adicional. En el contexto de portafolios de inversión esta propiedad dice que la diversificación reduce el riesgo. El cumplimiento de la subaditividad permite prácticas de administración de riesgos más eficientes. Por ejemplo, si dos áreas de análisis de una misma institución financiera calculan, de manera independiente, las medidas $\rho(X)$ y $\rho(Y)$ de los riesgos que tomarán y la medida de riesgo que utilizan es subaditiva, el tomador de decisiones puede estar seguro de que $\rho(X) + \rho(Y)$ es una garantía aceptable relativa al riesgo de $X + Y$.

b) Monotonicidad creciente: si $X \leq Y$ para todos los posibles resultados, entonces se cumple que $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

Es decir, si partiendo de un mismo portafolio, el cambio en el valor del portafolio X es menor que el de Y, entonces, por la pérdida de valor de X, el riesgo de X debería ser mayor que el de Y.

c) Homogeneidad positiva: para cualquier constante positiva c, $\rho(cX) = c\rho(X)$.

Esta propiedad establece que el tamaño del portafolio influye directamente en el riesgo. No es lo mismo invertir una unidad monetaria en activos financieros que invertir varias unidades en los mismos activos. En el segundo caso es más riesgoso. En este contexto, también se dice que $\rho(\cdot)$ es una función homogénea de grado uno.

d) Invarianza bajo traslaciones: para cualquier constante $a > 0$, $\rho(X + c) = \rho(X) - a$.

Si existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés libre de riesgo, r, y si se escribe

$$\rho(X + a) = \rho\left(X + \frac{a}{r} r\right)$$

se puede interpretar a r como el interés libre de riesgo, que paga un depósito bancario sobre una inversión inicial c/r. De esta manera, la propiedad de invarianza bajo traslaciones dice que el riesgo disminuye en dichos intereses. Si c es negativa, ésta se interpreta como un adeudo al banco, lo que incrementa el riesgo en el portafolio. Además, si se escribe $c = \rho(X)$, entonces $\rho(X + \rho(X)) = 0$, ya que $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(x) = 0$. De esta manera, $c = \rho(X)$ se puede interpretar como la cantidad monetaria que se requiere para eliminar el riesgo de X. Es decir, $\rho(X)$ funciona como cobertura de X.

2.2. El VaR no es una medida coherente de riesgo

Si X es la variable aleatoria de pérdidas, el VaR de X a un nivel de confianza del 100p%, denotado por $VaRp(X)$ o x_p es el cuantil 100p de la distribución de X. Para distribuciones continuas se escribe $VaRp(X)$ como el valor de x_p que satisface

$$\Pr(X > x_p) = p$$

La subaditividad tiene un significado especial dentro de la administración de riesgo, ya que está asociada con el principio de diversificación. No obstante, el VaR no satisface la propiedad de subaditividad. A continuación se presenta una medida de riesgo coherente.

3. Valor en Riesgo Condicional (CVaR)

El CVaR (del término en inglés, Conditional Value at Risk) o Expected Shortfall (ES por sus siglas en inglés) es una medida alternativa al VaR que cuantifica las pérdidas que se pueden encontrar en las colas de las distribuciones. Como medida de riesgo tiene ventajas significativas frente al VaR y se deriva también de la distribución de los rendimientos del portafolio de activos. Se define como la pérdida esperada para los casos en donde la pérdida de valor del portafolio exceda el valor del VaR. En consecuencia, el valor de VaR no sería nunca mayor al valor del CVaR, por ello, portafolios con bajo CVaR tendrían un VaR aún menor. La importancia del CVaR se basa en que analiza los rendimientos inferiores al VaR. Dos portafolios de activos pueden tener igual VaR y aparentar tener el mismo nivel de riesgo, sin embargo, analizando el CVaR se podría determinar que el portafolio de mayor riesgo sería el que cuente con el mayor CVaR. Este punto escapa al análisis del VaR, por lo que se prefiere trabajar con el CVaR. Por otro lado, la optimización del portafolio de activos mediante la minimización del VaR cuenta con algunos problemas de inestabilidad como la no subaditividad y no convexidad para situaciones en la que no se cuenta con normalidad de la distribución de los rendimientos. Ante ello, se considera la minimización del CVaR como una metodología con mayor consistencia, de acuerdo con Rockafellar y Uryasev (2000). El CVaR sí es un estimador "coherente" en el sentido de Artzner *et al.* (1998) por lo que cuenta con mejores propiedades respecto al VaR.

Si X denota la variable aleatoria de pérdidas, entonces el CVaR de X a un nivel de confianza del 100p%, denotado por $CVaR_p(X)$, es la pérdida esperada dado que las pérdidas totales exceden el cuantil 100p de la distribución de X. Para distribuciones continuas se sigue que el $CVaR_p(X)$ está dado por (véase, por ejemplo, Venegas-Martínez, 2008)

$$CVaR_p(X) = E(X | X > x_p) = \frac{\int_{x_p}^{\infty} x dF(x)}{1 - F(x_p)} = x_p \frac{\int_{x_p}^{\infty} (x - x_p) dF(x)}{1 - F(x_p)}$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de X. Además, para distribuciones continuas, si la cantidad anterior es finita, podemos usar integración por partes para reescribir lo anterior como:

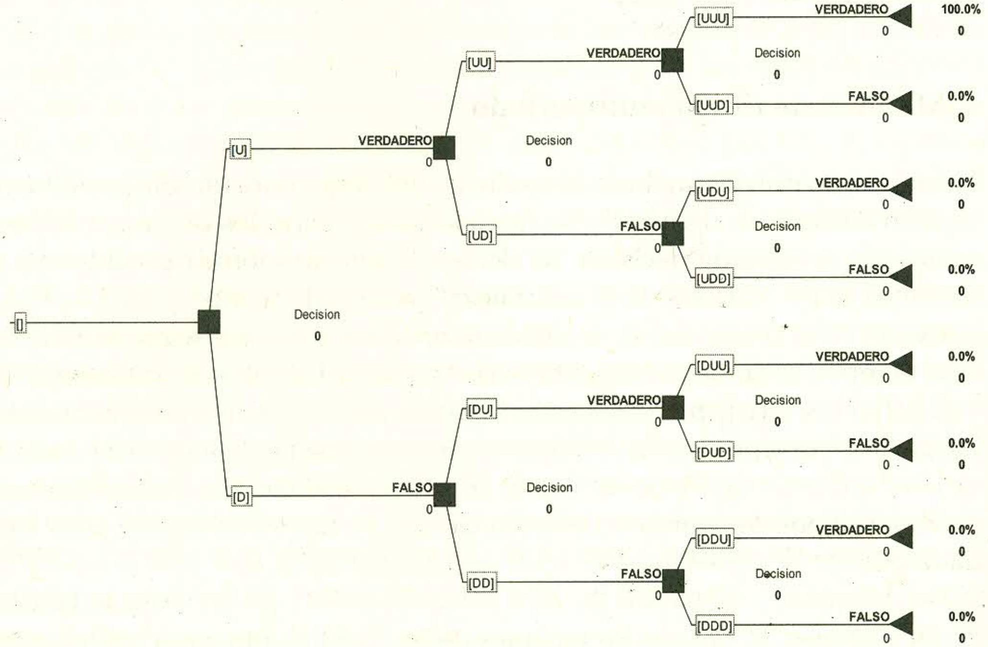
$$CVaR_p(X) = \frac{\int_{x_p}^{\infty} x f(x) dx}{1 - F(x_p)} = \frac{\int_p^1 VaR_u(X) du}{1 - p}$$

Así, el CVaR se puede ver como el promedio de todos los valores VaR sobre el nivel de confianza p.

4. Medidas de riesgo multiperiodo

Las secciones previas analizan la medición del riesgo para un sólo periodo; de aquí en adelante se desarrolla un modelo para T periodos de incertidumbre utilizando árboles de decisión. Se denota la información disponible con el conjunto Ω de "estados de la naturaleza", para cada tiempo $t = 0, 1, \ldots, T$. La partición $N_t \subset \Omega$ consiste en un subconjunto de eventos que se presentan o no en el tiempo t, mismos que constituyen los nodos del árbol. Se usará la notación $(\underline{n}, t(n))$ ó $\underline{n}$ x $\{t(n)\}$ para cada nodo. La partición N_{t+1} es un refinamiento de la partición N_t que produce la relación "padre-hijo", de $(\underline{m}, t)$ a $(\underline{n}, t+1)$ a través de la relación $\underline{n} \subset \underline{m}$. Por ejemplo, un árbol binomial con tres periodos puede ser descrito por dos caminos (véase la Gráfica 1). La estructura del árbol está dada por $\Omega = N3 = \{[UUU], [UUD], [UDU], [UDD], [DUU], [DUD], [DDU], [DDD]\}$, $N2 = \{[UU], [UD], [DU], [DD]\}$, $N1 = \{[U], [D],\}$, $N0 = \{[\ ]\}$ (véase la Gráfica 3). En este caso, U y D son los tamaños de un movimiento hacia arriba y uno hacia abajo, respectivamente. En otras palabras, en el tiempo $t = 1$ el proceso puede tomar la trayectoria hacia arriba, U (verdadero), o la trayectoria hacia abajo, D (falso); en el tiempo $t = 2$ existen cuatro posibilidades, dado que tomó el camino (U) puede volver a subir y tener la trayectoria (UU) o bajar para tener la trayectoria (*UD*), mientras que si toma el camino (*D*) puede subir para alcanzar la trayectoria (*DU*) o bajar para quedar en (*DD*). De manera similar, para el tiempo $t = 3$ existen 8 posibilidades, dado que tiene la trayectoria (*UU*) puede subir para alcanzar (*UUU*) o bajar y obtener (*UUD*), si inicia con (*UD*) puede subir para alcanzar la trayectoria (*UDU*) o bajar para alcanzar la trayectoria (*UDD*), también si inicia con (*DU*) y sube alcanza (*DUU*) o si baja llega a (*DUD*), finalmente cuando el proceso está en (*DD*) y sube obtiene la trayectoria (*DDU*) y si baja alcanza la trayectoria (*DDD*). En general, se tendrán 2^t posibles trayectorias para cada tiempo $t = 0,1,...,T$. Los conjuntos abiertos son los elementos del conjunto potencia de Ω. Los pesos, w_j, se asignan yendo de atrás hacia delante como se puede observar en la Gráfica 3.

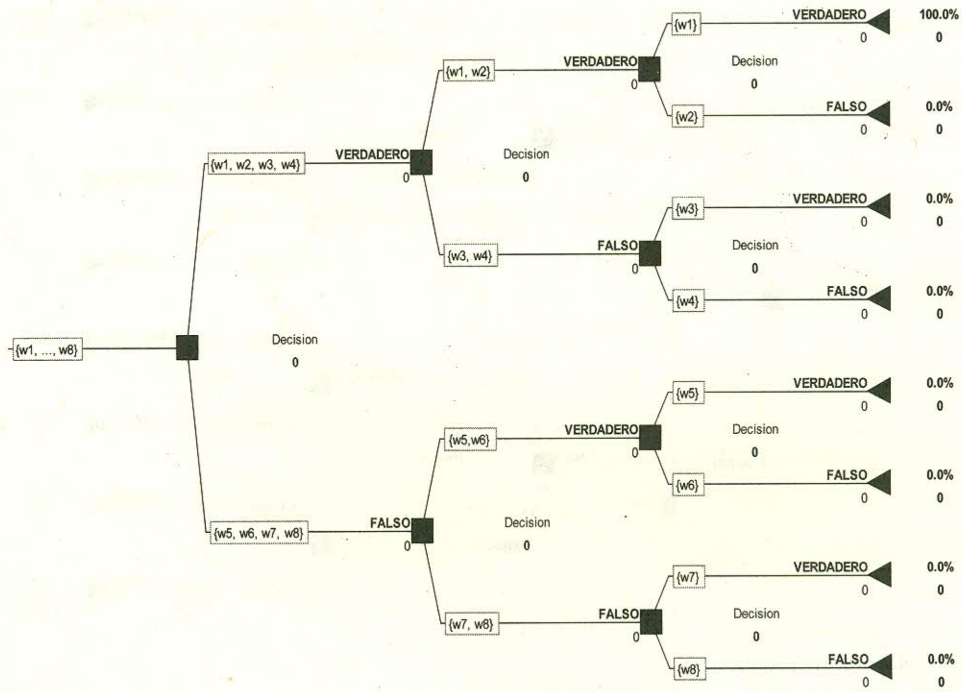
Gráfica 1(a)
Árboles de decisión. Trayectorias posibles



Fuente: elaboración propia.

Gráfica 1(b)

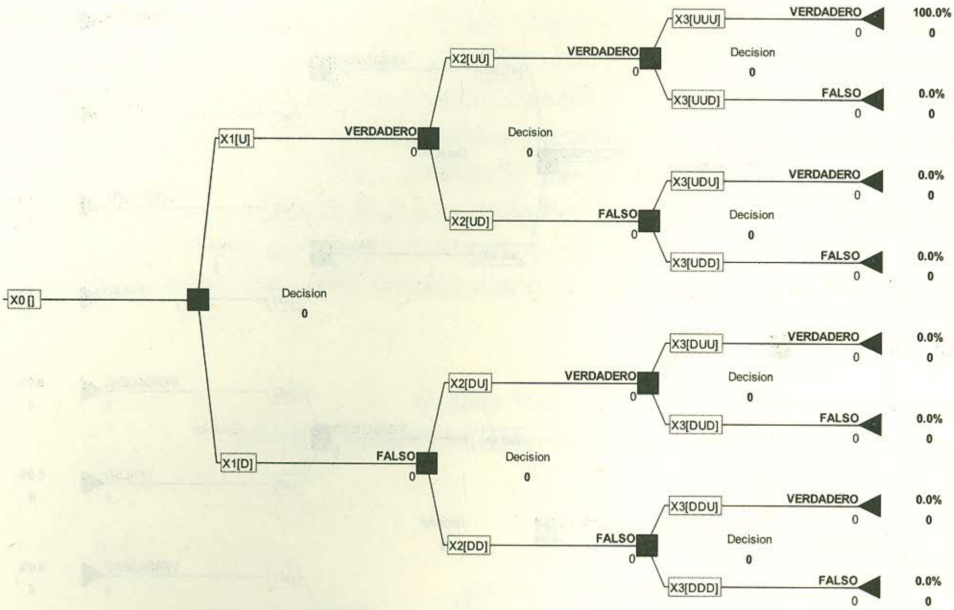
Árboles de decisión. Asignación de pesos de atrás hacia adelante



Fuente: elaboración propia.

Los "valores" secuenciales en los tiempos $0,1,\ldots,T$ serán el objeto de estudio, y técnicamente son representados como funciones en el árbol $\tau(\Omega)$ (llamadas *procesos* para enfatizar su dependencia del tiempo); dichas funciones se restringen al conjunto de nodos N_t. En el día t es también considerada una función en Ω y se denota por X_t. Por lo tanto, $X_t(n)$ es el "valor" en el día t para el nodo o evento n así como cualquiera de los estados de la naturaleza relacionados con $\underline{n}$. Resulta interesante ver el proceso $X=(X_t)_{0\leq t\leq T}$ como una función en el espacio $\{0,1,\ldots,T\}$ x Ω que es constante en cada nodo de ese día: $X_t(w)=X_t(w')$ de tal forma que si existe un nodo n en el día t con dos estados, w y w', relacionados con $\underline{n}$, entonces $X_t(w)=X_t(w')$. Por ejemplo, si los eventos de riesgo se traducen en pérdidas, entonces $X_t(n)$ sería la pérdida acumulada en el tiempo t para el nodo n. En la Gráfica 2 se representa la función de pérdidas que depende de las trayectorias o información disponible del nodo hasta en tiempo t.

Gráfica 2
Valores secuenciales en el árbol



Fuente: elaboración propia.

A continuación se obtiene para cualquier probabilidad $\mathbb{P}$ en Ω (con $\mathbb{P}\left[\{w\}\right] > 0$ para cada w en Ω por simplicidad) una probabilidad $\mathbb{P}_\tau$ en $\tau(\Omega)$, para cada nodo *n*, a través de la siguiente expresión:

$$\mathbb{P}_\tau\left[\{n\}\right] = \frac{1}{T+1}\sum\nolimits_{w\in \underline{n}} \mathbb{P}\left[\{w\}\right]$$

Para cada función Y en $\tau(\Omega)$ se tiene:

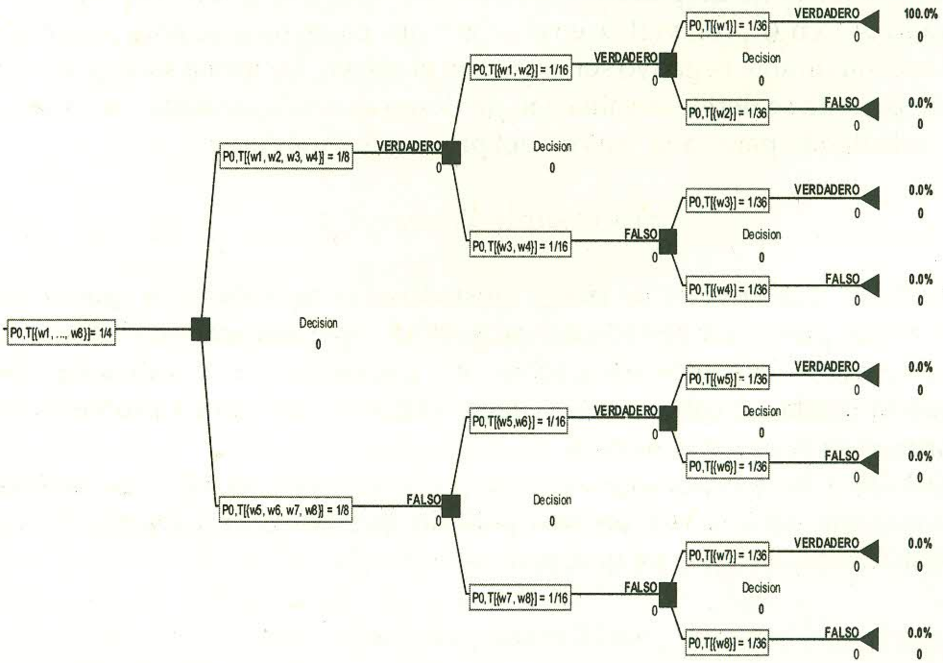
$$E_{\mathbb{P}_\tau}\left[Y\right] = \frac{1}{T+1}\sum\nolimits_{0\le t\le T} E\left[Y_t\right]$$

Para cada probabilidad $\mathbb{P}$ en Ω, cada día *t* y cada variable aleatoria X_t, la esperanza condicional en el tiempo *t* de X_t es la función en N_t definida por:

$$E_{\mathbb{P}}\left[X_T \middle| N_t\right](n) = E_{\mathbb{P}}\left[X_T \middle| \underline{n}\right]$$

La Gráfica 3 muestra la probabilidad $\mathbb{P}_0$ en el árbol binomial de tres periodos. Asimismo, en la Gráfica 3 se asigna una distribución de probabilidad a cada nodo de la red, y si los "valores" son pérdidas por eventos de riesgo tenemos al final la pérdida esperada en los tiempos $t = 0, 1, ..., T$ para el nodo n.

Gráfica 3
Probabilidades asignadas en el árbol binomial



Fuente: elaboración propia.

Un supervisor, administrador de riesgos o regulador elige en el día 0 sobre un conjunto aceptable de "valores" un subconjunto del conjunto $\mathcal{G}_\tau$ de todos los procesos de valor. Existen muchas interpretaciones del significado "valor", por ejemplo: valores de mercado de capital; valor contable de las acciones; flujos de efectivo acumulados; valores de liquidación; plusvalía; o valores actuariales.

5. Teorema de representación de una estructura dinámica del Valor en Riesgo coherente

La solvencia es un tema importante. Para el "valor" $(X_t)_{0\le t\le T}$ de un portafolio o de una estrategia se define el "tiempo de insolvencia" como $\sigma=\inf\{t|X_t<0,1\le t\le T\}$, y el proceso de paro X^{σ} igual a X_t antes del tiempo σ y X_{σ} a partir del tiempo σ. Cuando X es el valor de mercado se dice que la medida de riesgo representa el equilibrio entre el costo de insolvencia y el beneficio de tomar el riesgo.

Un conjunto de aceptación coherente de "valores" es un cono convexo cerrado $\mathcal{A}_{cc}$ en $\mathcal{G}_{\tau}$, con vértice en el origen que contiene al ortante positivo y cortando al ortante negativo solamente en el origen. De forma similar al caso de un periodo se define la valuación de riesgo ajustada asociada con el cono $\mathcal{A}_{cc}$ calculando para cada "valor" del proceso X el número:

$$\pi(\mathrm{X})=\sup\{m|\mathrm{X}-m\in\mathcal{A}_{cc}\}$$

Es decir, que el valor de riesgo ajustado es la cantidad más grande de capital que puede ser restada del proyecto X y permanecer en el conjunto de aceptación. Los supuestos sobre $\mathcal{A}_{cc}$ garantiza que la valuación del riesgo ajustada es coherente; es decir, satisface las cuatro propiedades definidas en la primera sección.

Debido a la incorporación del tiempo en el conjunto $\tau(\Omega)$, se deduce directamente del caso de un sólo periodo que existe un conjunto $\mathcal{P}_{\tau}$ de probabilidades en $\tau(\Omega)$ tal que, para cada $X\in\mathcal{G}_{\tau}$,

$$\pi(X)=\inf_{\mathbb{P}_{\tau}\in\mathcal{P}_{\tau}}E_{\mathbb{P}_{\tau}}[X]$$

Cada $\mathbb{P}_{\tau}\in\mathcal{P}_{\tau}$ puede ser descrito por su densidad $f_{\tau}=\dfrac{d\mathbb{P}_{\tau}}{d\mathbb{P}_{0,\tau}}$ con respecto $\mathbb{P}_{0,\tau}$, donde

$$\frac{d\mathbb{P}_{\tau}}{d\mathbb{P}_{0,\tau}}(n)=\frac{\mathbb{P}_{\tau(n)}}{\mathbb{P}_{0,\tau(n)}}$$

para cada nodo n en $\tau(\Omega)$. Esta densidad tiene una función f_{τ} en el árbol $\tau(\Omega)$, la cual está representada por $f_{\tau}=(f_t)_{0\le t\le T}$ donde cada f_t es una función positiva en N_t, tal que

$$\sum\nolimits_{0\le t\le T}\frac{1}{T+1}E_{\mathbb{P}_0}[f_t]=1$$

Por definición se tiene que para cada X,

$$E_{\mathbb{P}_\tau}\left[X\right]=\sum\nolimits_{0\le t\le T}\frac{1}{T+1}E_{\mathbb{P}_0}\left[f_t X_t\right]$$

Si se define el proceso incremental A_t como: $A_t = A_{t-1}+\frac{1}{T+1}f_t$, con $A_{t-1}=0$, se obtiene que $E_{\mathbb{P}_0}\left[A_\tau\right]=1$. Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

Teorema de representación:

Para cada valuación ajustada de riesgo coherente, existe un conjunto $\mathcal{A}$ de procesos crecientes positivos A_T con $E_{\mathbb{P}_0}\left[A_T\right]=1$, tal que para cada valor del proceso X su valor de riesgo ajustado en el día 0 está dado por:

$$\pi\left(X\right)=\inf\nolimits_{A\in\mathcal{A}}E_{\mathbb{P}_0}\left[\sum_{0\le t\le T}X_t\left(A_t-A_{t-1}\right)\right]$$

Ahora bien, si para cada $t<T$ todos los A_t son cero, obtenemos la siguiente fórmula para el Valor en Riesgo ajustado:

$$\pi\left(X\right)=\inf\nolimits_{A\in\mathcal{A}}E_{\mathbb{P}_0}\left[A_T X_T\right]=\inf\nolimits_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}}E_{\mathbb{P}}\left[X_T\right]$$

donde, $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las probabilidades definidas en Ω teniendo como densidad cualquier variable aleatoria A_t con respecto a la probabilidad de referencia $\mathbb{P}_0$, tal que $E_{\mathbb{P}_0}\left[A_T\right]=1$. De esta manera, el análisis para un sólo periodo es un caso particular del modelo multiperiodo.

A continuación se presenta otra ilustración dinámica de la metodología propuesta. Se define un proceso $A\in\mathcal{A}$ el cual permite tiempos de paro (un tiempo de paro es cualquier mapeo σ de Ω al conjunto de fechas tales que para cada día $t, 0\le t\le T$); el evento $\{\sigma=t\}$ es la unión de nodos de N_t. Si $\mathbb{P}_0\left[\sigma\le T\right]>0$, un tiempo de paro σ define un proceso incremental A^σ por A_0^σ y por

$$A_t^\sigma=\frac{1}{\mathbb{P}_0\left[\sigma\le T\right]}1_{\{\sigma\le t\}}\quad\text{para todo } 0\le t\le T,$$

donde para cada evento $E, 1_E\left(w\right)=1$ ó 0 dependiendo de si $w\in E$ o no. En cuyo caso el valor coherente del riesgo ajustado dado por $\pi\left(X\right)=E_{\mathbb{P}_0}\left[X_\sigma\right]$, también satisface

$$\pi(X) = \inf_{A \in \mathcal{A}} E_{\mathbb{P}_0}\left[\sum_{0 \le t \le T} X_t\left(A_t^\sigma - A_{t-1}^\sigma\right)\right]$$

Este resultado proporciona el Valor en Riesgo coherente ajustado para un ambiente dinámico, un conjunto $\mathcal{A}$ de procesos crecientes positivos A_t. Observe que $\pi(X) \le \pi(Y)$ y para cualquier constante positiva c, $\pi(cX) = c\pi(X)$.

6. Aplicación de la metodología propuesta

En esta sección se presenta una ilustración de la metodología propuesta. En la Gráfica 4 se muestran los resultados para una simulación con 5 mil iteraciones.[1] En este escenario, en el primer periodo la pérdida es $X_1(U) = 111.95$ con probabilidad del 50%, mientras que $X_1(D)$ representa una pérdida de 109.86 con probabilidad del 50%. Observe que los "valores" (pérdidas potenciales) pueden generarse conociendo los parámetros de su distribución, esto por supuesto no es trivial ya que implica tener datos estadísticos o, en su defecto, utilizar estadística Bayesiana donde la información se puede obtener de expertos. Por último, observe que en el árbol se calcula para cada periodo t la pérdida esperada y se puede incorporar nueva información para calibrar el modelo y ajustarlo a nuevas condiciones del entorno.

7. Conclusiones

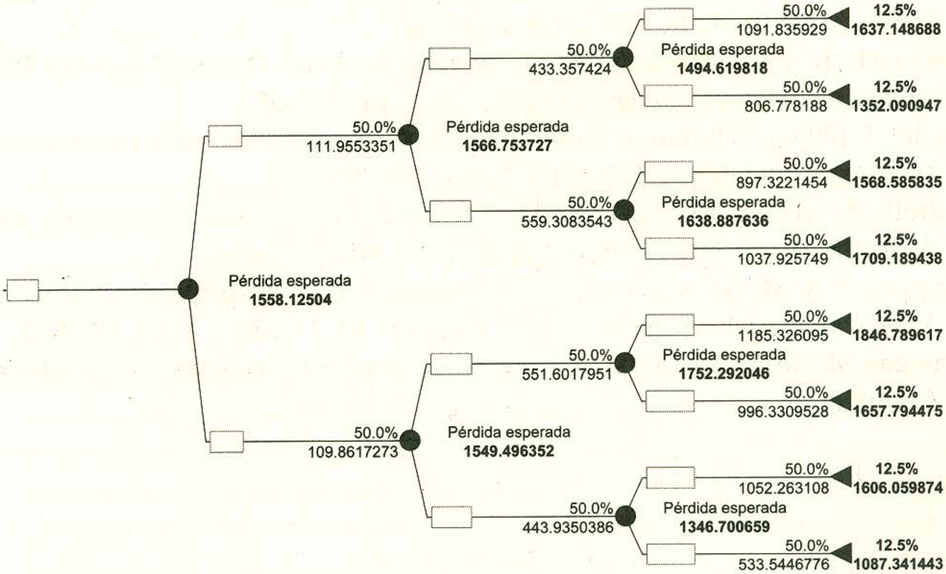
Las medidas de riesgo permiten a los agentes (individuos, instituciones o países) calcular las pérdidas potenciales por el acontecimiento de un evento con riesgo. Por ahora, las medidas de riesgo que se utilizan ampliamente en la práctica son estáticas y se requiere, sin duda, desarrollar estructuras dinámicas coherentes. La medida dinámica de riesgo propuesta toma en cuenta los aspectos temporales, lo cual parecen ser aceptable para periodos mensuales en uno o dos años.

---

[1] El tiempo de procesamiento al utilizar la simulación Monte Carlo se incrementa con el número de iteraciones, pero también con la cantidad de nodos y ramas del árbol, por lo que se puede llegar a requerir mayor capacidad de procesamiento. El tiempo aproximado de procesamiento para el ejemplo corrido fue de 32 segundos.

La literatura sobre medidas de riesgo es muy escasa. Este trabajo realiza una revisión breve de la literatura sobre la medición del riesgo multiperiodico o dinámico y presenta una estructura teórica basada en topología de árboles de decisión para representar un proceso estocástico continuo de la máxima pérdida esperada para cualquier tiempo *t*, con $0 \leq t \leq T$. Otros estudios se han concentrado en teorías con medidas de riesgo dinámicas cuasi-convexas.

Gráfica 4
Aplicación de la metodología propuesta



Fuente: elaboración propia.

En conclusión, los modelos de valuación de riesgos están cambiando para adaptarse a las condiciones contingentes actuales: incertidumbre y volatilidad de los mercados financieros. Los modelos estáticos requieren extensiones dinámicas que deben considerar tres aspectos fundamentales: *a)* considerar multiperiodos, *b)* incorporar información del mercado en cualquier momento y *c)* calibrar el modelo en cualquier momento con información del mercado.

Referencias bibliográficas

Artzner, P., F. Delbaen, J. Eber J. y D. Heath (1998), "Coherent Measures of Risk", manuscript, Université Louis Pasteur.

Artzner, P., F. Delbaen, J. Eber, D. Heath y H. Ku (2007), Coherent Multiperiod Risk Adjusted Values and Bellman's Principle, *Annals of Operations Research*, vol. 152, núm. 1, pp. 5-22.

Bion-Nadal, J. (2004), *Conditional Risk Measure and Robust Representation of Convex Conditional Risk Measures*, Preprint CMAP 557.

Delbaen, F. (2006), "The Structure of m-Stable Sets and in Particular of the Set of Risk Neutral Measures", Seminaire de Probabilités XXXIX, Lecture Notes in Mathematics 1874, pp. 215-258.

Detlefsen, K. y G. Scandolo (2005), "Conditional and Dynamic Convex Risk Measures", *Finance and Stochastics*, vol. 9, pp. 539-561.

Riedel, F. (2004), "Dynamic Coherent Risk Measures", *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 112, núm. 2, pp. 185-200.

Frittelli, M. y G. E. Rosazza (2004), "Dynamic Convex Risk Measures", *Risk Measures for the 21st Century*, Capítulo 12, Wiley Finance.

Kloppel, S. y M. Schweizer (2007), Dynamic Utility Indifference Valuation Via Convex Risk Measures, *Math. Finance*, vol. 17, núm. 4, pp. 599-627.

Venegas-Martínez, F. (2008), *Riesgos Financieros y Económicos*, 2da. Edición, Cengage.