



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Unidad Azcapotzalco**

**Sección de Estudios de Posgrado e Investigación**

**Rechazo de perturbaciones por técnicas de  
estructura al infinito y control geométrico.**

---

**T E S I S**

PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERÍA DE MANUFACTURA**

P R E S E N T A

**ING. YTZEEN LEYVA GILES**

---

DIRECTORES:

DRA. MARICELA GUADALUPE FIGUEROA GARCÍA

DR. JOSÉ DE JESÚS RUBIO AVILA

MÉXICO, D.F. 2011





# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 19:00 horas del día 27 del mes de Mayo del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de SEPI - ESIME UA para examinar la tesis titulada:

Rechazo de perturbaciones por técnicas de estructura al infinito y control geométrico.

Presentada por el alumno:

Leyva

Apellido paterno

Giles

Apellido materno

Ytzeen

Nombre(s)

Con registro:

B	0	9	1	5	9	1
---	---	---	---	---	---	---

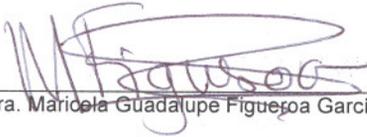
aspirante de:

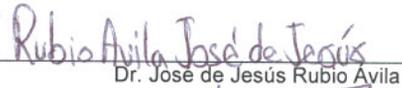
Maestro en Ingeniería de Manufactura

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

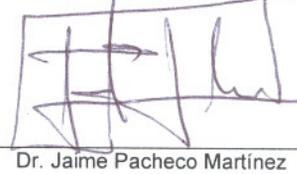
### LA COMISIÓN REVISORA

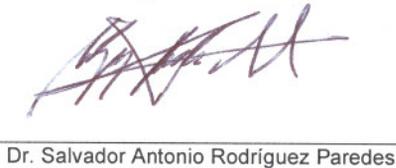
Directores de tesis

  
Dra. Maricela Guadalupe Figueroa García

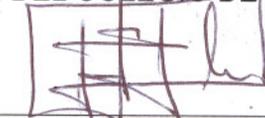
  
Dr. José de Jesús Rubio Avila

  
Dra. Juana Eloina Mancilla Tolama

  
Dr. Jaime Pacheco Martinez

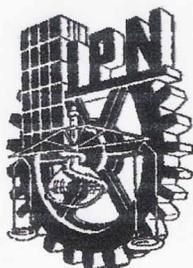
  
Dr. Salvador Antonio Rodríguez Paredes

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES



Dr. Jaime Pacheco Martínez





# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D. F. el día 6 del mes de Junio del año 2011, el que suscribe Ytzeen Leyva Giles alumno del Programa Maestría en Ingeniería de Manufactura con número de registro B091591, adscrito a SEPI-ESIME-UA, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. José de Jesús Rubio Avila y la Dra. Maricela Guadalupe Figueroa García y cede los derechos del trabajo intitulado "Rechazo de perturbaciones por técnicas de estructura al infinito y control geométrico", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [ytzeen.lg@gmail.com](mailto:ytzeen.lg@gmail.com) o [jrubioa@ipn.mx](mailto:jrubioa@ipn.mx); Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Nombre y Firma

---

Ing. Leyva Giles Ytzeen

# AGRADECIMIENTOS

Primero que nada quiero agradecer a mis padres Celia C. Giles Vargas y G. Rosalio Leyva Carreto por las enseñanzas que me han dado y los buenos ejemplos, así como el apoyo para realizar mis estudios.

Me gustaría agradecer al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo económico brindado a través del programa PIFI participando como becario en el proyecto SIP20091035 llamado *Diseño de un controlador mediante minimización de norma infinita para atenuación de perturbaciones externas*. A la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco, por permitirme utilizar sus recursos e instalaciones.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada durante la maestría.

A mis asesores Dra. Maricela Guadalupe Figueroa García y Dr. José de Jesús Rubio Ávila por su apoyo, asesoría y el tiempo que me dedicaron para el desarrollo de este trabajo.

A los miembros del jurado: Dra. Juana Eloina Mancilla Tolama, Dr. Jaime Pacheco Martínez, Dr. Salvador Antonio Rodríguez Paredes y Dr. Carlos Adolfo Hernández Carreón por sus comentarios para la mejora del presente trabajo.

Ing. Leyva Giles Ytzeen

México D.F., Junio del 2011

# ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL .....	I
RESUMEN .....	III
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 GENERALIDADES .....	1
1.2 ANTECEDENTES .....	2
1.3 JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO .....	2
1.4 OBJETIVOS .....	3
1.5 CONTRIBUCIONES ESPECÍFICAS .....	3
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO .....	6
2.1 ENFOQUE GEOMÉTRICO DEL ALGEBRA LINEAL.....	6
2.1.1 NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL .....	7
2.2 APLICACIÓN A SISTEMAS DE CONTROL .....	15
2.2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE RECHAZO DE PERTURBACIONES .....	16
2.2.2 SUBESPACIOS INVARIANTES .....	17
2.2.3 SUBESPACIO $A, \text{Im}B$ -INVARIANTE .....	17
2.3 SISTEMA DE PRENSA HIDRÁULICA SIMPLE .....	19
2.3.1 PARAMETROS QUE INTERVIENEN .....	21
2.3.2 DESARROLLO DEL MODELO MATEMÁTICO Y REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADO .....	22
2.3.3 PERTURBACIONES EN ESTE SISTEMA .....	23
2.4 CONCLUSIONES .....	24
CAPÍTULO 3. RECHAZO DE PERTURBACIÓN VÍA ESTRUCTURA AL INFINITO .....	25
3.1 RECHAZO DE PERTURBACIÓN .....	25
3.2 EJEMPLO: SISTEMA MASA RESORTE .....	28

3.3 CONCLUSIONES .....	35
CAPÍTULO 4. RECHAZO DE PERTURBACION VIA CONTROL GEOMETRICO .....	36
4.1 RECHAZO DE PERTURBACIONES .....	36
4.2 EJEMPLO ACADÉMICO .....	39
4.3 CONCLUSIONES .....	45
CAPÍTULO 5. RECHAZO DE PERTURBACION EN LA PRENSA HIDRÁULICA POR ESTRUCTURA AL INFINITO Y CONTROL GEOMÉTRICO .....	46
5.1 RECHAZO DE PERTURBACIÓN POR ESTRUCTURA AL INFINITO .....	47
5.2 RECHAZO DE PERTURBACIÓN POR CONTROL GEOMÉTRICO .....	52
5.3 CONCLUSIONES .....	57
CAPÍTULO 6. RECHAZO DE PERTURBACION EN UN SISTEMA TERMICO POR ESTRUCTURA AL INFINITO Y CONTROL GEOMÉTRICO .....	59
6.1 RECHAZO DE PERTURBACIÓN POR ESTRUCTURA AL INFINITO .....	61
6.2 RECHAZO DE PERTURBACIÓN POR CONTROL GEOMÉTRICO .....	67
6.3 CONCLUSIONES .....	71
CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS .....	72
APENDICE A .....	73
BIBLIOGRAFÍA .....	75

# RESUMEN

En este trabajo se presentan dos métodos utilizados en la teoría de sistemas de control para el problema de rechazo de perturbación. El primero de estos métodos es el llamado estructura al infinito donde se trabaja en el dominio de la frecuencia, se utilizan los modelos matemáticos del sistema nominal y del sistema perturbado, se analiza la estructura al infinito de cada modelo y si la estructura al infinito de ambos sistemas coinciden la teoría indica que el sistema admite rechazo de perturbaciones. Para ilustrar este método se utilizan ejemplos académicos, posteriormente se resuelven dos problemas físicos. El segundo es el control geométrico, este método trabaja con ecuaciones de estados y álgebra de subespacios invariantes. Se trata de confinar la perturbación en un subespacio invariante mediante una función de control apropiada con el fin de que la perturbación no afecte la salida del sistema. Al igual que el primer método también se utilizan ejemplos académicos y físicos para su ilustración. Para comparar los dos métodos se puso énfasis al problema de rechazo de perturbaciones en una prensa hidráulica así como en un sistema térmico.

# ABSTRACT

In this paper are showed two methods used in the theory of control systems for the problem of disturbance rejection. The first of these methods is called the structure at infinity, which works in the frequency domain, use the mathematical models of the nominal system and the perturbed system, make analysis of the structure at infinity of each model and if the structure at infinity of both systems are similar, the theory suggests that the system supports disturbance rejection. To illustrate this method using examples academics as well as physical problems. The second is the geometric approach, this method works with states equations and invariant subspaces. This looking for reject the disturbance in a subspace invariant by a suitable control function so that the disturbance does not affect the system output. Like the first method also used academic and physical examples for illustration. To compare the two methods working in a hydraulic press and a thermal system.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 GENERALIDADES

El problema de rechazo de perturbaciones es un tema muy importante dentro del área de sistemas de control, tanto en el enfoque teórico como en las aplicaciones a la Ingeniería de Manufactura. El efecto de las perturbaciones sobre el proceso a controlar, consiste en alejar a este del punto de operación deseado. Este problema se ha dado en diferentes tipos de sistemas y con el tiempo se descubren mas tipos de perturbaciones y al mismo tiempo se van desarrollando y poniendo en práctica métodos para evitar estas variaciones en dichos sistemas, el esquema de control utilizado en este trabajo corrige las desviaciones en el punto de operación solamente hasta que la perturbación ha afectado a la operación del proceso.

Una idea que se ha explotado para mejorar el desempeño de sistemas dentro de la industria manufacturera, consiste en la posibilidad de medir las perturbaciones que ingresan al proceso, de manera tal que el controlador actúe sobre la planta aún antes de que tales perturbaciones alejen al proceso de la acción que se desea.

Para lograr este propósito, la perturbación medida  $d$  se alimenta a un controlador, en este trabajo se utilizan dos métodos para hallar este controlador, el cual genera una acción de control  $u$  para tratar de mantener a la variable controlada. Cabe mencionar que el controlador que se obtiene no puede tomar ninguna acción correctiva cuando ingresan al proceso perturbaciones no medibles.

## **1.2 ANTECEDENTES**

El tema de "rechazo de perturbaciones" fue utilizado desde hace ya algún tiempo con autores como Davison (1976), Francisco y Wonham(1976), este último demostró que es necesario colocar una realimentación que considere a la perturbación a fin de que las alteraciones existentes no afecten al sistema y no produzcan desviaciones en la salida deseada.

El método de estructura al infinito [11] o la forma de Smith-McMillan al infinito son herramientas bien conocidas para resolver algunos problemas de control, tales como el desarrollo de modelos y rechazo de perturbaciones.

La noción de ceros al infinito se ha generalizado a los sistemas no lineales [10], para sistemas lineales con dimensiones infinitas y en el caso particular de los operadores limitados, la estructura al infinito se describe de varias maneras [9] y se utiliza para resolver algunos problemas de control.

El método de estructura al infinito no es demasiado débil para asegurar una buena solución para los problemas de control. Esta estructura sólo está bien definida para algunas clases de sistemas. Cuando existe el problema de rechazo de perturbaciones en un sistema y se puede resolver por este método entonces es un hecho de que la función de control que se obtiene usando el método rechaza la perturbación y se obtienen señales de salida limpias.

## **1.3 JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO**

El estudio de problemas de rechazo de perturbaciones es importante en el área de sistemas de control y sus aplicaciones, pues ya que además de ser un tema de mucho interés teórico tiene aplicaciones en diversas áreas de la Ingeniería de Manufactura. Dentro de este trabajo se muestran dos sistemas en los que se aplicaron estos métodos y pueden servir como guía a otras personas que tengan interés en conocer y aprender sobre estos métodos. Estos dos problemas tienen gran importancia en la Industria de la manufactura ya que las prensas hidráulicas y

los sistemas térmicos son utilizados para muchas de las líneas de producción y procesos para la deformación de materiales.

Además esta tesis puede servir como plataforma para posteriores trabajos de aplicación.

## **1.4 OBJETIVOS**

### ***Objetivo general:***

Estudio de estructura al infinito y control geométrico para rechazo de perturbaciones.

### ***Objetivos específicos:***

- Estudio del problema de rechazo de perturbaciones utilizando estructura al infinito.
- Estudio del problema de rechazo de perturbaciones vía control geométrico.
- Resolución del problema de rechazo de perturbaciones en una prensa hidráulica.
- Resolución del problema de rechazo de perturbaciones en un sistema térmico.

## **1.5 CONTRIBUCIONES ESPECÍFICAS**

Se comprueba como las perturbaciones si pueden ser rechazadas a partir de una función de control, la cual tiene que estimarse antes de proceder a crear un sistema físicamente, ya que estos métodos se realizan de manera teórica para después llevarlos a la práctica.

A través de esta tesis se podrá comprender mejor la teoría de rechazo de perturbaciones y principalmente como aplicar el método de estructura al infinito y el método del control geométrico.

Este trabajo consta de 6 capítulos.

*Capítulo 1. INTRODUCCIÓN.* En este capítulo se describe en donde se encuentran los problemas de perturbaciones en sistemas y porque es importante que exista un rechazo de estas. Se dan los antecedentes de los métodos estudiados en este trabajo y el interés en estudiarlos. También se describen cuales son los objetivos del presente trabajo.

*Capítulo 2. MARCO TEÓRICO.* En este capítulo se dan a conocer las herramientas de algebra lineal necesarias para el estudio del método de control geométrico. Se describe el problema de rechazo de perturbaciones y se plantea el sistema de prensa hidráulica y su modelo matemático.

*Capítulo 3. RECHAZO DE PERTURBACIÓN VÍA ESTRUCTURA AL INFINITO.* En este capítulo se describe el método de estructura al infinito y se realiza un ejemplo de un sistema masa resorte con el fin de que el método sea comprendido y estudiado fácilmente.

*Capítulo 4. RECHAZO DE PERTURBACIÓN VÍA CONTROL GEOMÉTRICO.* En este capítulo se describe el método de control geométrico y se realiza un ejemplo de un sistema con el fin de que el método sea comprendido y estudiado fácilmente.

*Capítulo 5. RECHAZO DE PERTURBACIÓN EN LA PRENSA HIDRÁULICA POR ESTRUCTURA AL INFINITO Y CONTROL GEOMÉTRICO.* En este capítulo se resuelve el problema de rechazo de perturbaciones en una prensa hidráulica por los dos métodos estudiados.

*Capítulo 6.* RECHAZO DE PERTURBACIÓN EN UN REGULADOR DE TEMPERATURA POR ESTRUCTURA AL INFINITO Y CONTROL GEOMÉTRICO. En este capítulo se resuelve el problema de rechazo de perturbaciones en un sistema térmico por los dos métodos estudiados.

# CAPÍTULO 2

## MARCO TEÓRICO

La piedra angular del enfoque geométrico es el concepto de invariancia de un subespacio con respecto a una transformación lineal. Este capítulo se presentan las propiedades más importantes y el significado geométrico de subespacios invariantes, así como su conexión con la teoría de control. También se define el problema de rechazo de perturbaciones. Por último se presenta el modelo matemático del sistema conocido como prensa hidráulica pues es el sistema utilizado para mostrar una aplicación de los dos métodos de rechazo de perturbaciones estudiados en esta tesis.

### 2.1 ENFOQUE GEOMÉTRICO DEL ALGEBRA LINEAL.

Los conjuntos  $\mathbb{R}^2$  (vectores en el plano),  $\mathbb{R}^3$  (Vectores en el espacio) o  $\mathbb{R}^n$  (vectores con  $n$  coordenadas) se les conoce como espacios vectoriales.

Definición general de espacio vectorial real: Un espacio vectorial real  $Z$  es un conjunto de objetos llamados vectores, junto con dos operaciones llamadas suma y multiplicación junto con un escalar. La palabra “real” significa que los escalares son números reales [7].

En este trabajo únicamente trabajaremos con espacios  $\mathbb{R}^n$ .

#### Definición de subespacio vectorial.

Un subconjunto no vacío  $\mathcal{V}$  de un espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  si se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Si  $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}$  y  $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$  entonces  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$
2. Si  $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}$  entonces  $a\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V} \forall a \in \mathbb{R}$ .

Sean  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  dos subespacios vectoriales:

### Suma

$$Q = \mathcal{V} + \mathcal{W} = \{\mathbf{z} | \mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \mathbf{w} \in \mathcal{W}\}$$

### Intersección

$$Q = \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{z} | \mathbf{z} \in \mathcal{V}, \mathbf{z} \in \mathcal{W}\}$$

### Definición de supremo de una familia de subespacios.

Sea  $\mathcal{Q}$  una familia de subespacios. El elemento supremo de  $\mathcal{Q}$ , cuando existe, se denota como  $\mathcal{V}^*$  y es el elemento de  $\mathcal{Q}$  que contiene a todo elemento de  $\mathcal{Q}$ . Es decir:

$$\text{Si } \mathcal{V} \in \mathcal{Q} \text{ entonces } \mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*.$$

Notación:

$$\mathcal{V}^* = \sup\{\mathcal{V} | \mathcal{V} \in \mathcal{Q}\}$$

### 2.1.1 NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales. Una transformación lineal  $T$  de  $V$  en  $W$  es una función que asigna a cada vector  $\mathbf{v} \in V$  un único vector  $T\mathbf{v} \in W$  y que satisface para cada  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  en  $V$  y cada escalar  $a$ :

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$T(a\mathbf{v}) = aT(\mathbf{v})$$

Notación:  $T = V \rightarrow W$

### Núcleo de una transformación lineal.

El núcleo de  $T$  es el subconjunto formado por todos los vectores en  $V$  que se mapean a cero en  $W$ :

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V | T(\mathbf{v}) = 0 \in W\}$$

El núcleo de  $T$  es un subespacio de  $V$  y se acostumbra llamarlo también kernel de  $V$ .

**Ejemplo 2.1:** Determine el núcleo de la transformación  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix}$$

Antes de resolver este problema, recordemos que la transformación  $T$  puede ser representada matricialmente, es decir, es posible encontrar una matriz  $M$  tal que  $T(\mathbf{v}) = M\mathbf{v}$ , es decir, aplicar  $T$  a un vector equivalente a multiplicar por una cierta matriz  $M$  al vector  $\mathbf{v}$ . En ese caso, la matriz  $M$  es la representación matricial de  $T$ .

*Solución:* Un vector  $\mathbf{v} = (x, y, z)'$  pertenece al núcleo de  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  si  $T(\mathbf{v}) = 0$ , es decir:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces para pertenecer al núcleo debe cumplirse:

$$x + y + z = 0$$

$$2x + 2y + 2z = 0$$

La matriz aumentada [7] es:

$$M = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Su forma escalonada reducida es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

entonces obtenemos la ecuación

$$x + y + z = 0$$

es decir

$$x = -y - z$$

por lo tanto, la solución está dada por

$$\begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces en este caso el núcleo de  $T$  es un espacio generado por los vectores

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , es decir:

$$\ker(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## La imagen de una transformación

La imagen de  $T: V \rightarrow W$  es el conjunto de todas las imágenes de  $T$  en  $W$ :

$$\text{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}), \text{ para algún } \mathbf{v} \in V\}$$

La imagen de  $T$  es un subespacio de  $W$ .

**Ejemplo 2.2:** Determine la imagen de la transformación lineal  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y + z \\ 8x + 12y + 6z \\ -4x - 2y - 4z \end{pmatrix}$$

donde  $V = \mathbb{R}^3 = W$

Solución:

El vector  $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3)'$  está en la imagen de  $T$  si existe un vector en  $\mathbf{v} = (x, y, z)' \in V$ , es decir, si es consistente el sistema:

$$2x + 5y + z = b_1$$

$$8x + 12y + 6z = b_2$$

$$-4x - 2y - 4z = b_3$$

La matriz aumentada tiene la forma

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & b_1 \\ 8 & 12 & 6 & b_2 \\ -4 & -2 & -4 & b_3 \end{array} \right)$$

La forma escalonada reducida es

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{8} & -\frac{3}{4}b_1 + \frac{5}{16}b_2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{8}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3 \end{array} \right)$$

Entonces el vector  $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3)'$  esta en la imagen de  $T$  si el sistema anterior es consistente, es decir:

$$-\frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3 = 0$$

entonces:

$$b_1 = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3$$

así tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= b_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por tanto

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

### Dimensión del núcleo de $T$ y de la imagen de $T$ .

Sea  $T: V \rightarrow W$

Recordemos que [7]:

- $\text{Ker}T \subseteq V$
- $\text{Im}T \subseteq W$

**Proposición 2.1** véase [18]

$$\dim V = \dim \text{ker } T + \dim \text{Im } T$$

Sea  $M$  la representación matricial de  $T$ . Entonces:

- $\dim \text{ker } M$  es el número de columnas sin pivote en  $A$  reducida.
- $\dim \text{Im } M$  es el número de columnas con pivote en  $A$  reducida.

**Ejemplo 2.3**: Consideremos el ejemplo (2.2), la matriz escalonada reducida del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\dim \text{Im}T = 2,$$

se determina  $\ker T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$x + \frac{9}{8}z = 0$$

$$x = -\frac{9}{8}z$$

y

$$y - \frac{1}{4}z = 0$$

$$y = \frac{1}{4}z$$

entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8}z \\ \frac{1}{4}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

finalmente

$$\ker T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

como

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im} T$$

Entonces se verifica

$$\dim V = 1 + 2 = 3$$

**Imagen inversa de  $W$  bajo la transformación  $T$ .**

$$T^{-1}W = \{\mathbf{v} \in V \mid T\mathbf{v} \in W\}$$

Continuando con el ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$x + \frac{9}{8}z = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{9}{8}z$$

y

$$y - \frac{1}{4}z = 1$$

$$y = 1 + \frac{1}{4}z$$

entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{9}{8}z \\ 1 + \frac{1}{4}z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

así que

$$T^{-1}W = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## 2.2 APLICACIÓN A SISTEMAS DE CONTROL.

Consideremos el siguiente sistema lineal  $(A, B, C)$  descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); & t \geq 0 & \quad (\text{ec. 2.1}) \\ y(t) &= Cx(t); & t \geq 0 & \end{aligned}$$

donde

$\mathcal{X} \approx \mathbb{R}^n$  es el espacio de estado,  $x(t) \in \mathcal{X}$  es el estado.

$\mathcal{U} \approx \mathbb{R}^m$  es el espacio de entradas,  $u(t) \in \mathcal{U}$  es la función de control.

$\mathcal{Y} \approx \mathbb{R}^p$  es el espacio de salidas,  $y(t) \in \mathcal{Y}$  es la salida a controlar.

$A, B$  y  $C$  son matrices con dimensiones apropiadas.

Ahora consideremos el sistema lineal perturbado  $(A, B, C, E)$  correspondiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ed(t); & t \geq 0 & \quad (\text{ec. 2.2}) \\ y(t) &= Cx(t); & t \geq 0 & \end{aligned}$$

donde

$\mathcal{D} \approx \mathbb{R}^q$  es el espacio de perturbaciones,  $d(t) \in \mathcal{D}$  es la perturbación y  $E$  es una matriz con dimensiones apropiadas.

También considere el sistema discreto correspondiente del sistema  $(A, B, C)$ :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad x(0) = 0$$

$$y(k) = Cx(k)$$

donde

$$x(k) \in \mathcal{X} \approx \mathbb{R}^n$$

Luego la solución del sistema anterior implica que  $x(1) = B(0) = \text{Im}B$ , entonces el estado  $x(1) = 1$ , pertenecen a  $\text{Im}B$ .

$x(2) = Ax + Bu(1) = A(\text{Im}B) + \text{Im}B$ : entonces los estados que se obtienen pertenecen a  $A(\text{Im}B) + \text{Im}B$ .

y así sucesivamente:

$$\text{Im}B + A(\text{Im}B) + \dots + A^{n-1}(\text{Im}B) =: \langle A | \text{Im}B \rangle$$

donde  $\langle A | \text{Im}B \rangle$  se le conoce como espacio controlable del sistema.

### **2.2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE RECHAZO DE PERTURBACIONES.**

Supongamos que el estado  $x$  y la perturbación  $d$  son medibles. El problema de rechazo de perturbaciones tiene solución si existe una retroalimentación de estado  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  y una función  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que la función de control

$u = Fx + Gd$  aplica que el sistema:

$$\dot{x} = (A + BF)x + (BG + E)d$$

con salida

$$y = Cx$$

Es tal que, la función de transferencia  $d \rightarrow y$  es nula.

Aplicando la transformada de Laplace al sistema (ecuación 2.1):

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s) + Ed(s)$$

$$sx(s) - Ax(s) = B(Fx(s) + Gd(s)) + Ed(s)$$

$$(sI - A - BF)x(s) = (BG + E)d(s)$$

$$x(s) = (sI - A - BF)^{-1}(BG + E)d(s)$$

$$y(s) = Cx(s)$$

$$y(s) = C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E)d(s)$$

$$\frac{y(s)}{d(s)} = C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E)$$

Sea  $T(s) = \frac{y(s)}{d(s)}$

### 2.2.2 SUBESPACIOS INVARIANTES

Consideremos la aplicación lineal  $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  y los subespacios  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$ .

**Definición 2.4:**  $\mathcal{V}$  es  $A$  invariante si  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ .

**Interpretación para el sistema:**  $\dot{x} = Ax$

$\mathcal{V}$  es  $A$ -invariante si y solo si, toda trayectoria de estado  $x$  que empieza en  $\mathcal{V}$  nunca se sale de  $\mathcal{V}$ .

### 2.2.3 SUBESPACIO $(A, \text{Im}B)$ -invariante.

Consideremos las aplicaciones lineales  $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  y  $B: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  los subespacios  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$ .

**Definición 2.5:**  $\mathcal{V}$  es  $(A, \text{Im}B)$ -invariante si existe  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  definida como  $Fx = u$  tal que

$$(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$$

**Interpretación para el sistema:**  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

$\mathcal{V}$  es un subespacio  $(A, \text{Im}B)$ -invariante si y solo si toda trayectoria de estado  $x$  iniciada en  $\mathcal{V}$  permanece en  $\mathcal{V}$  obligada por una función de control  $u$  adecuada.

**Propiedad:** Si  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  son  $(A, \text{Im}B)$ -invariantes, entonces también  $\mathcal{V} + \mathcal{W}$  es  $(A, \text{Im}B)$ -invariante [2].

**Consecuencia:** Para un  $\Gamma \subset \mathcal{X}$ , existe un subespacio supremo  $(A, \text{Im}B)$ -invariante contenido en  $\Gamma$ . Este subespacio supremo puede ser calculado como el límite del siguiente algoritmo no creciente:

$$\begin{aligned}\Gamma^0 &= \Gamma \\ \Gamma^{i+1} &= \Gamma \cap A^{-1}(\Gamma^i + \text{Im}B)\end{aligned}$$

**Lema:** El subespacio  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  es  $(A, \text{Im}B)$ -invariante si y solamente si

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im}B$$

Supongamos que  $\mathcal{V}$  es  $(A, \text{Im}B)$ -invariante.

Sea  $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}$ , entonces

$$\begin{aligned}(A + BF)\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V} \\ A\mathbf{v}_1 + BF\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V} \\ A\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 - BF\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V} + \text{Im}B\end{aligned}$$

entonces

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im}B$$

Supóngase ahora que  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im}B$ .

Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $\mathcal{V}$ , entonces  $Ae_i = \mathbf{v}_i + b_i$  donde  $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ ,  $b_i = Bu_i$

Defina  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $Fe_i = u_i$

$$\begin{aligned}Ae_i &= \mathbf{v}_i + b_i \\ &= \mathbf{v}_i + Bu_i \\ &= \mathbf{v}_i + BFe_i\end{aligned}$$

así que,

$$\begin{aligned}Ae_i - BFe_i &= \mathbf{v}_i \\ (A - BF)e_i &= \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}\end{aligned}$$

entonces

$$(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$$

## 2.3 SISTEMA DE PRENSA HIDRÁULICA SIMPLE

La prensa es una máquina herramienta que tiene como finalidad lograr la deformación permanente o incluso cortar un determinado material, mediante la aplicación de una carga. En la ingeniería de manufactura las prensas son utilizadas en sus diversas formas y tipos, haciendo de esta una maquina casi esencial en la industria manufacturera, razón por la que se tuvo el interés de trabajar sobre ella en este trabajo.

La acción de las prensas se lleva a cabo por medio de una herramienta que es impulsada a presión contra el material laminado. La herramienta puede ser maciza o hueca, afilada o sin filo y de formas variadas según el caso.

Si clasificamos a las prensas de acuerdo al mecanismo de conducción, se pueden clasificar en mecánicas o hidráulicas, pudiendo ser las primeras operadas manualmente, en el caso más elemental, y con motor en la mayoría de los casos.

Las prensas hidráulicas son producidas en varios tipos y tamaños. Debido a que pueden proveerse de casi ilimitada capacidad, la mayoría de las prensas más grandes son de este tipo. El uso de varios cilindros hidráulicos permite la aplicación de fuerzas en el martinete en varios puntos, y proveen de la fuerza y ritmo necesario al soporte de discos. Las prensas hidráulicas de alta velocidad proporcionan más de 600 golpes por minuto, y se utilizan para operaciones de corte de alta velocidad.

Las prensas hidráulicas están diseñadas en base al principio de Pascal, el cual afirma que cualquier aumento de presión de un fluido se transmite a cualquier punto del fluido. El fundamento de la prensa hidráulica consta de la existencia de 2 émbolos con áreas  $S_1$  y  $S_2$ , si se aplica una fuerza  $F_1$  a un pequeño émbolo de área  $S_1$ . El resultado es una fuerza  $F_2$  mucho más grande en el émbolo de área  $S_2$ . Para comprender mejor esto, en la figura 2.1 se muestra una representación del funcionamiento de la prensa hidráulica simple.

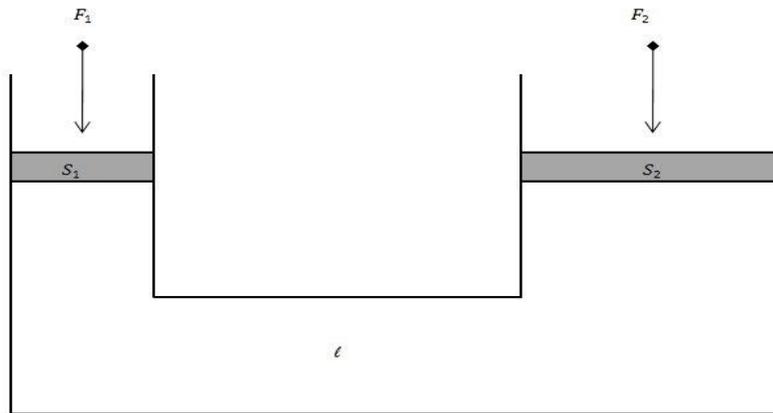


Figura 2.1

Se considera que las fuerzas son generadas por pistones, cuando se aplica una fuerza  $F_1$  sobre el émbolo de menor área  $S_1$  se genera una presión  $p_1$ :

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1}$$

Del mismo modo en el segundo émbolo  $S_2$ :

$$p_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

Se observa que el líquido “l” esta comunicado, luego por el principio de Pascal, la presión en los dos pistones es la misma, por tanto se cumple que  $p_1 = p_2$  al ponerle aire comprimido con aceite y/o agua

$$p_1 = p_2$$

esto es

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

y la relación de fuerzas:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

Luego la fuerza resultante de la prensa hidráulica es:

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

### 2.3.1 PARAMETROS QUE INTERVIENEN

La figura 2.2 muestra los parámetros que intervienen en la prensa hidráulica que utilizaremos para el desarrollo de esta este trabajo, donde se ha colocado un resorte en la parte más baja del sistema.

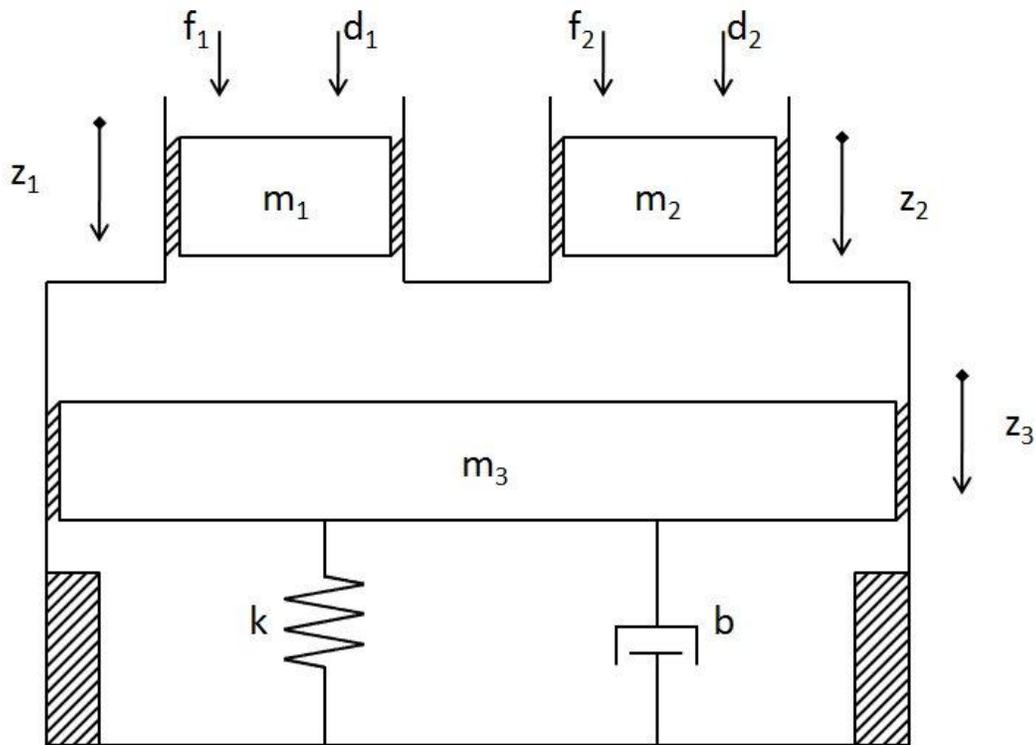


Figura 2.2

donde:

$m_1$  y  $m_2$  son bloques en donde son aplicadas las fuerzas que actuarán sobre el

bloque  $\mathbf{m}_3$ .

$\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  son las fuerzas de entrada a la prensa.

$\mathbf{d}_1$  y  $\mathbf{d}_2$  son fuerzas no deseadas pero que se pueden medir.

$\mathbf{z}_1$ ,  $\mathbf{z}_2$ ,  $\mathbf{z}_3$  son los desplazamientos de los bloques.

$\mathbf{k}$  es la constante elástica.

$\mathbf{b}$  es el coeficiente de amortiguamiento.

### 2.3.2 DESARROLLO DEL MODELO MATEMÁTICO Y REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADO

Para el modelado de la prensa se comienza por:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{z}_1 &= f_1 + d_1 \\m_2 \ddot{z}_2 &= f_2 + d_2 \\m_3 \ddot{z}_3 &= f_1 + d_1 + f_2 + d_2 - k z_3 - b \dot{z}_3\end{aligned}$$

si

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ \dot{z}_1 &= x_2 \\ z_2 &= x_3 \\ \dot{z}_2 &= x_4 \\ z_3 &= x_5 \\ \dot{z}_3 &= x_6 \\ f_1 &= u_1 \\ f_2 &= u_2\end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones de estado tienen la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_1} u_1 + \frac{1}{m_1} d_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \frac{1}{m_2} u_2 + \frac{1}{m_2} d_2 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \frac{1}{m_3} u_1 + \frac{1}{m_3} d_1 + \frac{1}{m_3} u_2 + \frac{1}{m_3} d_2 - \frac{k}{m_3} x_5 - \frac{b}{m_3} x_6 \\ y_1 &= x_2 + x_4 \\ y_2 &= x_5 \end{aligned}$$

Si  $m_1 = m_2 = m_3 = k = b = 1$ .

Entonces el sistema es representado por la ecuación:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

### 2.3.3 PERTURBACIONES EN ESTE SISTEMA

Para esta prensa hidráulica se muestran dos masas que reciben la fuerza de entrada, cada una de ellas es manipulada por pistones diferentes para obtener una mayor fuerza, debido a que las fuerzas de entrada que actúan en el sistema vienen de diferentes fuentes es necesario que estas se encuentren en sintonía, esto con el fin de que no afecte a la salida que finalmente es la presión que se desea.

Las diferentes perturbaciones que pueden afectar al sistema pueden ser: una mayor fuerza ejercida por uno de los pistones, la fricción o el rozamiento de una de las masas.

En este caso consideremos una perturbación que actúa en los pistones de fuerza al no tener una buena presión.

Y así la representación del sistema considerando la perturbación  $d(t)$  queda como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} d$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

## 2.4 CONCLUSIONES

En este capítulo se describieron las herramientas necesarias para el desarrollo de esta tesis: Enfoque geométrico del álgebra lineal y su aplicación a sistemas de control. También se da la definición general del problema de rechazo de perturbaciones. Más adelante se estudian los dos métodos para la solución de este problema. En este capítulo también se desarrolla el modelo matemático del sistema de prensa hidráulica, el cual nos servirá para aplicar los dos métodos para el rechazo de perturbaciones.

# CAPÍTULO 3

## RECHAZO DE PERTURBACIÓN VÍA ESTRUCTURA AL INFINITO.

Consideremos el siguiente sistema lineal dado en (ecuación 2.1). El sistema perturbado correspondiente es el mostrado en la (ecuación 2.2).

### 3.1 RECHAZO DE PERTURBACIÓN

La matriz de transferencia del sistema es:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

y la matriz de transferencia del sistema con perturbación es:

$$H^d(s) = C(sI - A)^{-1}E$$

Las matrices  $H(s)$  y  $H^d(s)$  son racionales y estrictamente propias.

**Definición 3.1** *Una función compleja  $f(s)$  es propia si  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} f(s)$  es finito cuando  $|s| \rightarrow \infty$ . Y si además este límite es cero entonces  $f(s)$  es estrictamente propia.*

**Definición 3.2** *Una matriz  $B(s)$  es bipropia si es propia y su inversa también es propia.*

**Definición 3.3** *Una función racional se dice que es propia cuando  $gr(\text{num}) \leq gr(\text{den})$  y es estrictamente propia cuando no se cumple la igualdad.*

**Definición 3.4** Una función racional  $f(s) \neq 0$  tiene cero en  $s = \infty$  si

$$f(s) = \frac{1}{s^r} g(s)$$

donde

- 1)  $r$  es un número positivo
- 2)  $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) < \infty$
- 3)  $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) \neq 0$

Esto significa que  $f(s)$  tiene cero al infinito con orden  $r$ .

**Definición 3.5** Existen (no únicas) matrices bipropias  $B_1$  y  $B_2$  tal que:

$$H(s) = B_1(s)\Delta(s)B_2(s) = B_1(s) \begin{bmatrix} s^{-n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{-n_r} \end{bmatrix} B_2(s)$$

donde  $\Delta(s) = \text{diag} [s^{-n_1}, \dots, s^{-n_r}]$ . Los enteros  $n_r$  son llamados del orden de los ceros al infinito y la lista de los enteros  $\{n_1, \dots, n_r\}$  es la estructura al infinito y se denotan por  $\sum_{\infty}(C, A, B)$  ó  $\sum_{\infty} H(s)$ .

A  $\Delta(s)$  se le conoce como Forma de Smith McMillan al infinito de  $H(s)$ .

**Método para determinar la Forma de Smith McMillan al infinito.**

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} s^{-n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{-n_r} \end{bmatrix}$$

$r = \text{rango de } H(s)$

$n_i = \text{orden de los ceros al infinito } n_{i+1} \geq n_i$

Cálculos de los  $n_i$

$$n_1 = q_1$$

$$n_2 = q_2 - q_1$$

$\vdots$

$$n_i = q_i - q_{i-1} \quad i > 1$$

Para obtener  $q_1$  se determina el primer menor principal de  $T(s)$ , véase [19], se calcula su determinante y como es una función racional estrictamente propia se puede calcular el orden de la estructura al infinito el cual es  $q_1$ .

Para obtener  $q_2$  se determina el siguiente menor principal de  $T(s)$ , se calcula su determinante y como es una función racional estrictamente propia se calcula el orden de la estructura al infinito, el cual es  $q_2$ .

Y así sucesivamente.

**Ejemplo**

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$$

Primer menor principal:  $\left[ \frac{1}{s+1} \right]$

$$\det \left[ \frac{1}{s+1} \right] = \frac{1}{s+1} \text{ entonces } q_1 = 1$$

segundo menor principal:  $\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \text{ entonces } q_2 = 4$$

por tanto

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 \\ n_2 &= q_2 - q_1 = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

entonces

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} s^{-n_1} & 0 \\ 0 & s^{-n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-3} \end{bmatrix}$$

y por definición (3.5):

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s-2}{s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{6s^2}{(s+1)(s+3)} & \frac{8s^2}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}$$

**Teorema 3.1** El problema de rechazo de perturbaciones tiene solución si y solo si la estructura al infinito de  $H(s)$  y  $H^d(s)$  son iguales. Para ver demostración cf. [1].

**Teorema 3.2** Las siguientes proposiciones son equivalentes [2]:

1. La perturbación es rechazada por la realimentación  $u = Fx + Gd$ ,  

$$C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E) = 0$$
2.  $\sum_{\infty}[H(s)H^d(s)] = \sum_{\infty}[H(s) \ 0]$

### 3.2 EJEMPLO: SISTEMA MASA RESORTE

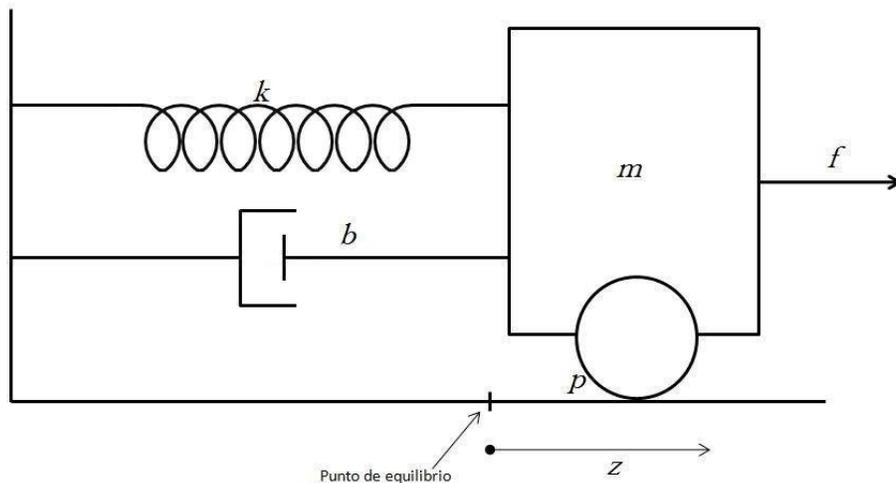


Figura 3.1

Un oscilador masa-resorte amortiguado está formado por una masa  $m$  unida a un resorte fijo en un extremo (ver figura 3.1);  $f$  es la fuerza ejercida sobre la masa,  $p$  es una fuerza de fricción.

La ecuación diferencial que gobierna el movimiento de este oscilador, tomando en cuenta las fuerzas que actúan sobre él debido a la elasticidad del resorte, la fricción (amortiguamiento) y las posibles influencias externas (que pueden ser gravitacionales, eléctricas o magnéticas). La ecuación diferencial que representa este sistema es:

$$f = m\ddot{z} + b\dot{z} + kz$$

donde  $k$  es la constante elástica,  $z(t)$  define la evolución del desplazamiento y  $b(t) \geq 0$  es el coeficiente de amortiguamiento.

Para obtener el modelo de estado de un sistema de segundo orden se necesitan dos variables de estado:

$$\begin{aligned}x_1 &= z \\x_2 &= \dot{z}\end{aligned}$$

Considerando  $f(t) = u(t)$  y  $p(t) = d(t)$ , las ecuaciones de estado tienen la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{z} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}z - \frac{b}{m}\dot{z} + \frac{1}{m}u - \frac{1}{m}d \\ &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u - \frac{1}{m}d\end{aligned}$$

$$y = x_1$$

En su forma matricial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0]x\end{aligned}$$

Consideremos la perturbación  $d(t) \geq 0$ , entonces el sistema es representado por la ecuación:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} d$$

$$y = [1 \quad 0]x$$

Si se ejerce una fuerza  $f$  de  $100N$  y la constante del resorte  $k$  es  $80N/m$ , la constante del amortiguador  $b$  es de  $20N s/m$ , y el peso de la masa es  $7Kg$ . Entonces:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{80}{7} & -\frac{20}{7} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} d$$

$$y = [1 \quad 0]x$$

Calculando la función de transferencia  $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , entonces:

$$H(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{80}{7} & s + \frac{20}{7} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{20}{7}}{q(s)} & \frac{1}{q(s)} \\ -\frac{80}{7q(s)} & \frac{s}{q(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7s^2 + 20s + 80}$$

Donde  $q(s) = s^2 + \frac{20}{7}s + \frac{80}{7}$

Expresando esta función de transferencia como:

$$H(s) = s^{-2} \left( \frac{1}{7 + 20s^{-1} + 80s^{-2}} \right)$$

Podemos observar que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{7 + 20s^{-1} + 80s^{-2}} = \frac{1}{7}$$

Entonces por la definición (2.4) la estructura al infinito del sistema es 2.

Y entonces calculando la función de transferencia del sistema perturbado  $H^d(s) = C(sI - A)^{-1}E$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} H^d(s) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{80}{7} & s + \frac{20}{7} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s + \frac{20}{7} & 1 \\ \frac{80}{7q(s)} & \frac{s}{q(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{7s^2 + 20s + 80} \end{aligned}$$

Expresando esta función de transferencia como:

$$-\frac{1}{7s^2 + 20s + 80} = s^{-2} \left( -\frac{1}{7 + 20s^{-1} + 80s^{-2}} \right)$$

Podemos observar que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-1}{7 + 20s^{-1} + 80s^{-2}} = -\frac{1}{7}$$

De acuerdo con la definición (3.5) la estructura al infinito del sistema con perturbación es 2.

Observamos que la estructura al infinito del sistema sin perturbación y la estructura al infinito del sistema perturbado son iguales y por teorema (3.1) entonces el sistema si admite rechazo de perturbaciones.

Entonces por teorema (3.2) se puede hallar una función de control  $u = Fx + Gd$  tal que

$$\frac{y(s)}{d(s)} = C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E) = 0$$

Sea  $J_1 = sI - A - BF$ ,  $L_1 = BG + E$ ,  $F = [f_1 \quad f_2]$  y  $G$  es un escalar.

Entonces:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{80}{7} & -\frac{20}{7} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} [f_1 \quad f_2] \\
 &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{80}{7} - \frac{f_1}{7} & s + \frac{20}{7} - \frac{f_2}{7} \end{bmatrix} \\
 (J_1)^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{7s + 20 - f_2}{7s^2 + 20s + sf_2 + 80 - f_1} & \frac{7}{7s^2 + 20s + sf_2 + 80 - f_1} \\ \frac{-80 + f_1}{7s^2 + 20s + sf_2 + 80 - f_1} & \frac{7s}{7s^2 + 20s + sf_2 + 80 - f_1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ G \\ \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Realizando los cálculos necesarios obtenemos:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{G - 1}{7s^2 + 20s - sf_2 + 80 - f_1} = 0$$

$$G - 1 = 0$$

por lo tanto vemos que  $G = 1$ .

Entonces la función de control  $u(t)$  queda como:

$$u(t) = [f_1 \quad f_2]x(t) + d(t)$$

Como  $F$  es arbitraria podemos asignarle los siguientes valores:

$$F = [3 \quad 0]$$

entonces:

$$u(t) = [3 \ 0]x(t) + d(t)$$

Se realizo la simulación en el programa Matlab-Simulink y bajo la condición inicial  $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  se obtuvieron las siguientes señales, las cuales muestran como es rechazada la perturbación:

En la gráfica de la figura (3.2) se observa la salida  $y(t)$  del sistema perturbado sin la función de control:

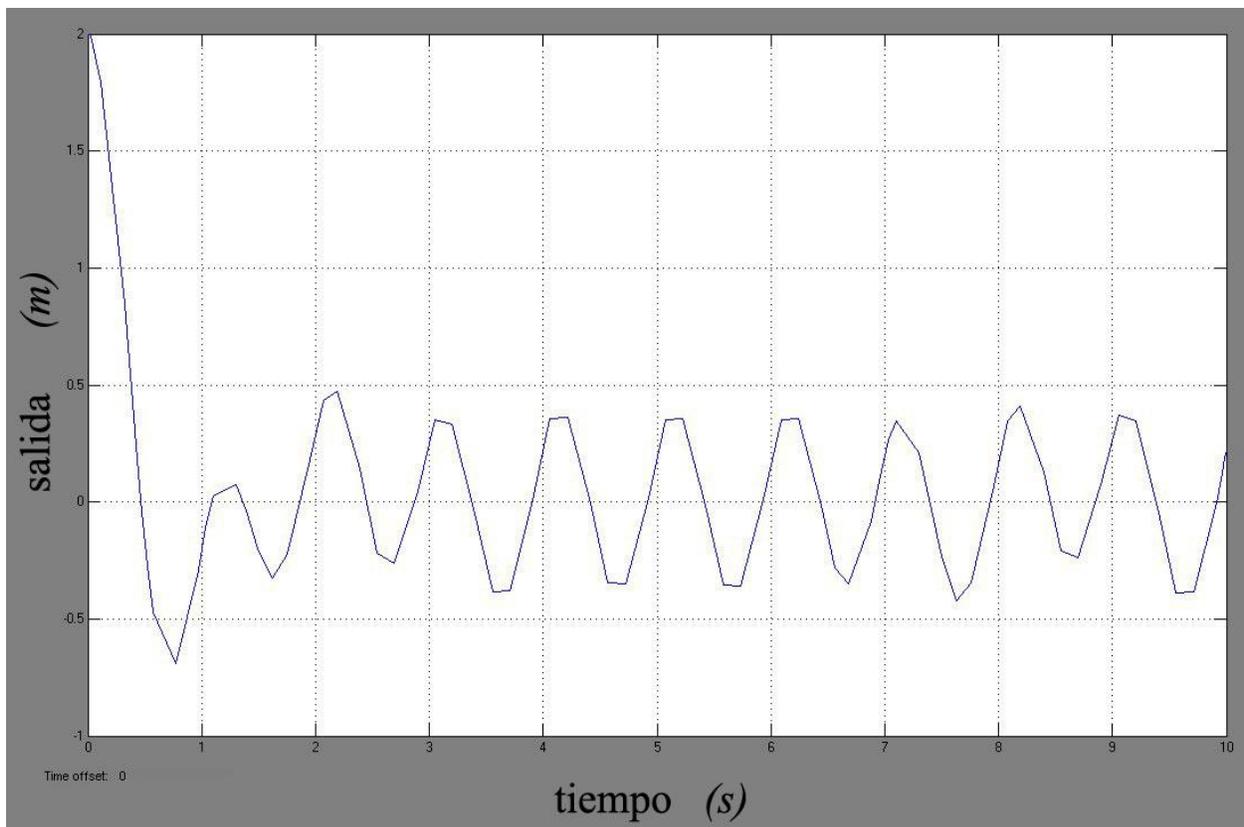
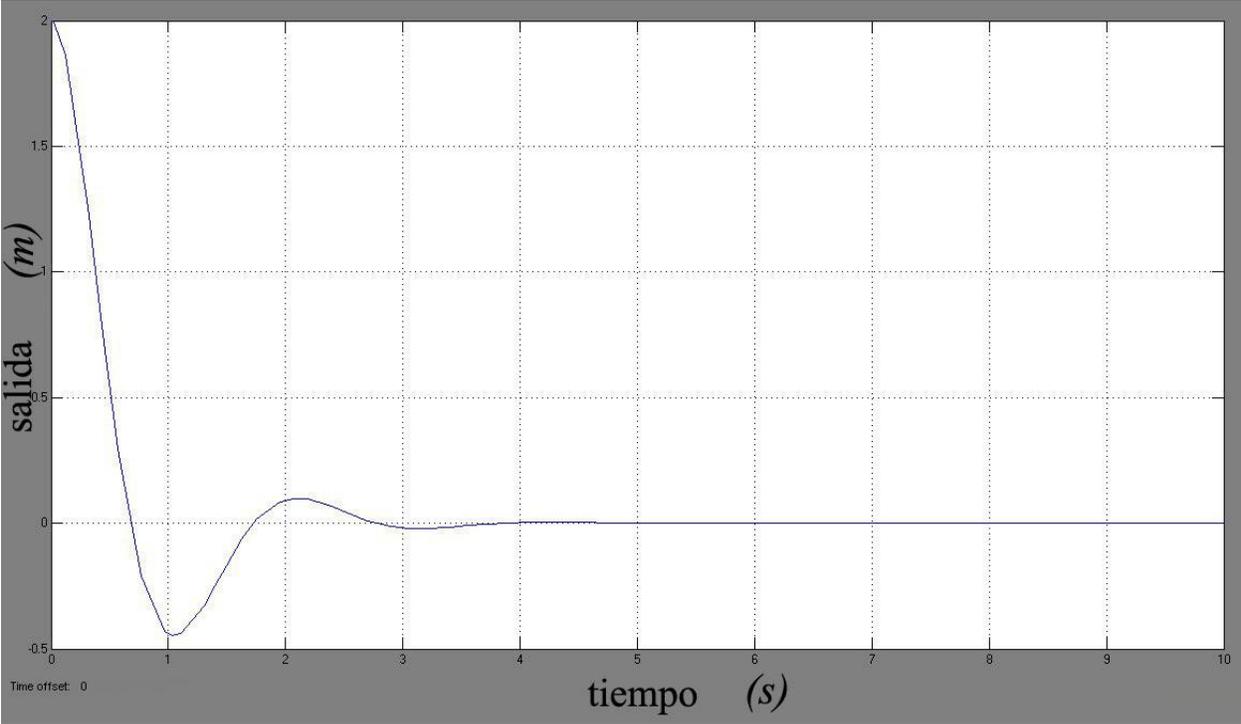


Figura 3.2

Y en la figura (3.3) se muestra la salida  $y(t)$  del sistema perturbado con la función de control:



*Figura 3.3*

En la figura (3.4) se comparan las 2 señales de salida  $y(t)$  con la función de control y sin la función de control.

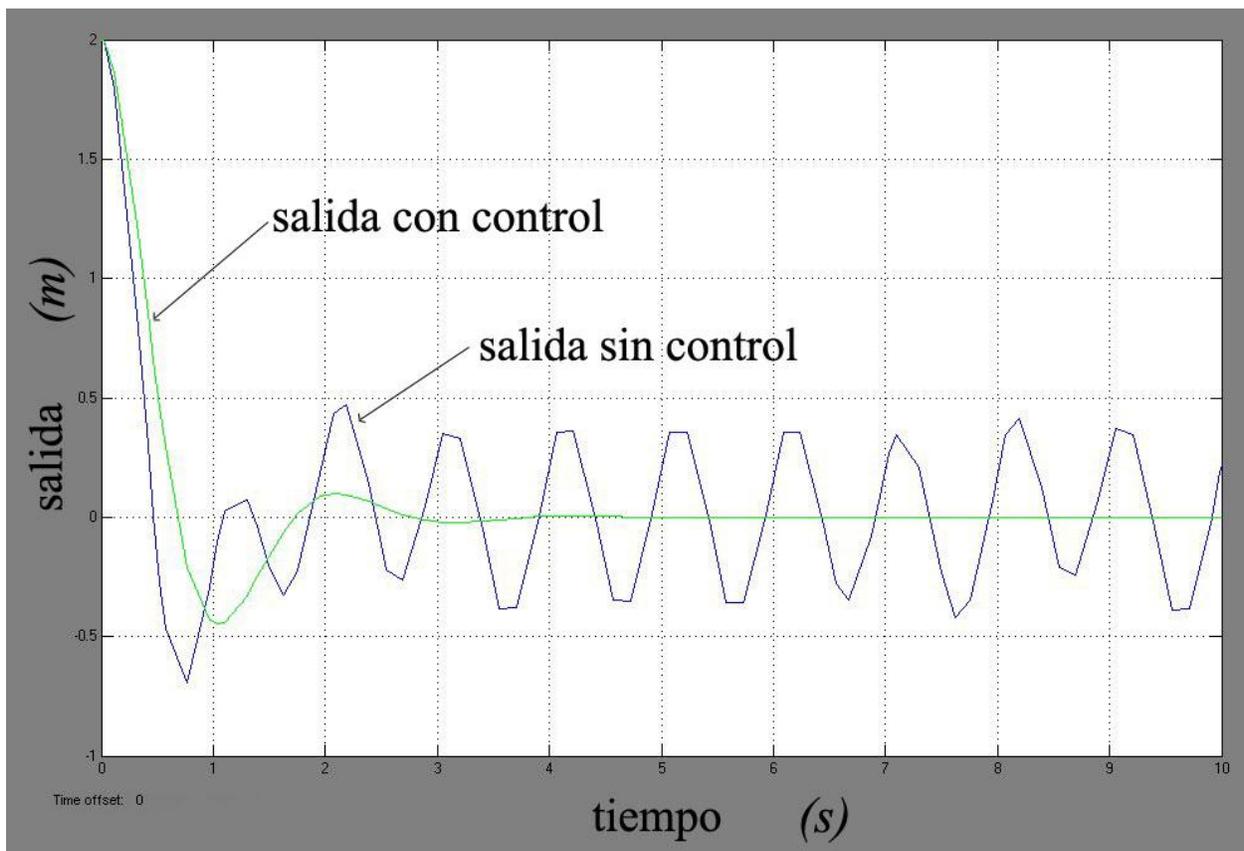


Figura 3.4

### 3.3 CONCLUSIONES

En este capítulo se estudio el método de estructura al infinito y se realizó un ejemplo de un sistema mecánico. Se comprobó que por medio del método de estructura al infinito la perturbación es rechazada al encontrar una función de control.

# CAPÍTULO 4

## RECHAZO DE PERTURBACIÓN VÍA CONTROL GEOMÉTRICO

Este capítulo está dedicado al estudio del problema de rechazo de perturbaciones por el método de control geométrico. La herramienta fundamental es el subespacio invariante, el cual fue estudiado en el capítulo (2).

Considere el sistema lineal perturbado  $(A, B, C, E)$  descrito por el sistema mostrado en la ecuación (2.2):

### 4.1 RECHAZO DE PERTURBACIONES.

Dadas las aplicaciones lineales  $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $B: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $C: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $E: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$ . La función de control  $u(t) = Fx(t)$  rechaza la perturbación si el subespacio:

$$\langle A + BF | \text{Im } E \rangle \subset \ker C$$

donde

$$\begin{aligned} \langle A + BF | \text{Im } E \rangle &= \text{Im } E + (A + BF)\text{Im } E + (A + BF)^2\text{Im } E + \dots \\ &+ (A + BF)^{n-1}\text{Im } E \end{aligned}$$

Sustituyendo  $u = Fx$  en

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ed$$

Se obtiene

$$\dot{x} = Ax + BFx + Ed = (A + BF)x + Ed$$

**Teorema:** El problema de rechazo de perturbaciones tiene solución si y solamente si

$$\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$$

Donde  $\mathcal{V}^*$  es el supremo de la familia de subespacios  $(A, \text{Im } B)$ -invariantes contenidos en  $\ker C$ .

Es decir:

$$\mathcal{V}^* = \sup\{\mathcal{V} \subset \ker C \mid A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im } B\}$$

**Prueba:**

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que el problema de rechazo de perturbación tiene solución.

Sea

$$\langle A + BF \mid \text{Im } E \rangle = \mathcal{V}$$

Es decir

$$\text{Im } E + (A + BF)\text{Im } E + \dots + (A + BF)^{n-1}\text{Im } E = \mathcal{V}$$

entonces

$$\text{Im } E \subset \mathcal{V}$$

Como  $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ , entonces  $\mathcal{V}$  pertenece a la familia de subespacios  $(A, \text{Im } B)$ -invariantes contenidos en  $\ker C$ , por lo tanto:

$$\text{Im } E \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*$$

( $\Leftarrow$ ) Ahora supongamos que  $\text{Im } E \subset \mathcal{V}^*$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle A + BF \mid \text{Im } E \rangle &\subset \langle A + BF \mid \mathcal{V}^* \rangle \\ &= \mathcal{V}^* + (A + BF)\mathcal{V}^* + \dots + (A + BF)^{n-1}\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* \subset \ker C \end{aligned}$$

Entonces

$$\langle A + BF \mid \text{Im } E \rangle \subset \ker C$$

Por tanto el sistema admite rechazo de perturbación.

**Calculo de  $\mathcal{V}^*$**

$\mathcal{V}^*$  puede ser calculada como el límite del siguiente algoritmo no creciente.

$$\mathcal{V}^0 = \ker C$$

$$\mathcal{V}^{j+1} = \ker C \cap A^{-1}(\text{Im } B + \mathcal{V}^j)$$

Cuando  $j=0,1,2,3,\dots$

Entonces  $\mathcal{V}^{j+1} \subset \mathcal{V}^j$  y para algún  $k \leq \dim \ker C$  se cumple que para todo  $j \geq k$ :

$$\mathcal{V}^j = \mathcal{V}^*$$

Donde  $\mathcal{V}^*$  es el subespacio supremo  $(A, \text{Im } B)$ -invariante contenido en  $\ker C$ .

**El problema de Rechazo de Perturbaciones cuando la función de control tiene la forma  $u = Fx + Gd$ .**

Ahora si la función de control es  $u = Fx + Gd$  entonces en (ecuación 2.2) se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(Fx + Gd) + Ed \\ &= Ax + BFx + BGd + Ed \\ &= (A + BF)x + (BG + E)d\end{aligned}$$

**Proposición:**

$$\text{Im}(BG + E) \subset \mathcal{V}^* \text{ si y solo si } \text{Im} E \subset \mathcal{V}^* + \text{Im} B$$

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\text{Im}(BG + E) \subset \mathcal{V}^*$

$$\begin{aligned}(BG + E)\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}^* \\ BG\mathbf{v}_1 + E\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 \\ E\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 - BG\mathbf{v}_1\end{aligned}$$

entonces

$$\text{Im} E \subset \mathcal{V}^* + \text{Im} B$$

( $\Leftarrow$ ) Ahora supongamos que  $\text{Im} E \subset \mathcal{V}^* + \text{Im} B$

Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $\mathcal{V}^*$ , entonces  $Ee_i = \mathbf{v}_i + b_i$  donde  $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}^*$ ,  $b_i = Bu_i$

Defina  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $Ge_i = u_i$

$$\begin{aligned}Ee_i &= \mathbf{v}_i + b_i \\ &= \mathbf{v}_i + Bu_i \\ &= \mathbf{v}_i + BGe_i\end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}Ee_i - BGe_i &= \mathbf{v}_i \\ (E - BG)e_i &= \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}^*\end{aligned}$$

entonces

$$\text{Im}(E - BG) \subset \mathcal{V}^*$$

**Consecuencia:** El problema de rechazo de perturbaciones tiene solución si y solamente si

$$\text{Im} E \subset \mathcal{V}^* + \text{Im} B$$

Donde  $\mathcal{V}^*$  es el supremo de la familia de subespacios  $(A, \text{Im} B)$ -invariantes contenidos en  $\ker C$ .

## 4.2 EJEMPLO ACADÉMICO:

Para demostrar el método de control geométrico veremos un ejemplo académico.

Consideremos las siguientes matrices del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces su ecuación de estado:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} d$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} d$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

Lo primero es determinar el subespacio invariante  $\mathcal{V}^*$ .

Comenzamos a obtener  $\mathcal{V}^0 = \ker C$

Tenemos la matriz aumentada  $C$ :

$$C = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

y en su forma escalonada reducida:

$$C = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

así obtenemos las ecuaciones:

$$x_1 - 2x_3 - x_4 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$\mathcal{V}^0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora la imagen de  $B$  se obtiene con la matriz en su forma escalonada reducida:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

así

$$\text{Im } B = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

entonces  $\text{Im}B + \mathcal{V}^0$ :

$$\text{Im}B + \mathcal{V}^0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{X}$$

Vemos que

$$\mathcal{V}^1 = \ker C \cap A^{-1}(\text{Im}B + \mathcal{V}^0)$$

$$A^{-1}(\text{Im}B + \mathcal{V}^0) = A^{-1}\mathcal{X} = \mathcal{X}$$

$$\mathcal{V}^1 = \mathcal{X}$$

$$\mathcal{V}^1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

así que:

$$\mathcal{V}^* = \text{gen}\{\mathcal{V}_1^*, \mathcal{V}_2^*\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para verificar que la imagen de  $E$  está contenida en  $\mathcal{V}^*$ :

$$\text{Im } E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Calculo de  $u(t) = Fx(t)$ .**

Como  $\text{Im}E \subset \mathcal{V}^*$  entonces cualquier  $F$  que verifica  $(A + BF)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$  rechazará la perturbación.

$$\text{Sea } F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} A + BF &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ f_{11} & f_{12} - 1 & f_{13} & f_{14} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (A + BF)\mathcal{V}^* &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ f_{11} & f_{12} - 1 & f_{13} & f_{14} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} - 1 \end{pmatrix} \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2f_{11} - 2f_{12} + f_{13} + 2 & f_{11} - f_{12} + f_{14} + 1 \\ -1 & 1 \\ 2f_{21} - 2f_{22} + f_{23} & f_{21} - f_{22} + f_{24} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Sea } F_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2f_{11} - 2f_{12} + f_{13} + 2 \\ -1 \\ 2f_{21} - 2f_{22} + f_{23} \end{pmatrix} \text{ y } F_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ f_{11} - f_{12} + f_{14} + 1 \\ 1 \\ f_{21} - f_{22} + f_{24} - 1 \end{pmatrix}$$

Como  $(A + BF)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* = \text{gen}\{\mathcal{V}_1^*, \mathcal{V}_2^*\}$

Entonces hay que hallar  $F = f_{ij}$  tales que:

$$F_1 = \alpha_1 \mathcal{V}_1^* + \alpha_2 \mathcal{V}_2^*$$

$$F_2 = \beta_1 \mathcal{V}_1^* + \beta_2 \mathcal{V}_2^*$$

Realizando cálculos se obtiene:

$$F_1 = -\mathcal{V}_1^* - 2\mathcal{V}_2^*$$

$$F_2 = \mathcal{V}_1^* - 4\mathcal{V}_2^*$$

es decir

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Para verificar que  $F$  rechaza la perturbación utilizaremos la función de transferencia existente entre la perturbación y la salida del sistema retroalimentado, esto es:

$$H_{dy}(s) = C(sI - A - BF)^{-1}E$$

Sea  $p = (sI - A - BF)^{-1}$ :

$$p = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{(s+2)s} & \frac{1}{(s+2)s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(s+2)s} & \frac{s+1}{(s+2)s} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{(s^2+5s+6)s} & -\frac{1}{(s^3+6s^2+11s+6)s} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2+4s+3} \\ -\frac{s+1}{(s^2+5s+6)s} & -\frac{1}{(s^2+5s+6)s} & 0 & \frac{1}{s+3} \end{pmatrix}$$

Entonces realizando los cálculos necesarios tenemos que

$$C(sI - A - BF)^{-1}E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la función de control seleccionada rechaza la perturbación.

En la siguiente grafica (figura 4.1) se observa la salida  $y_1$ :

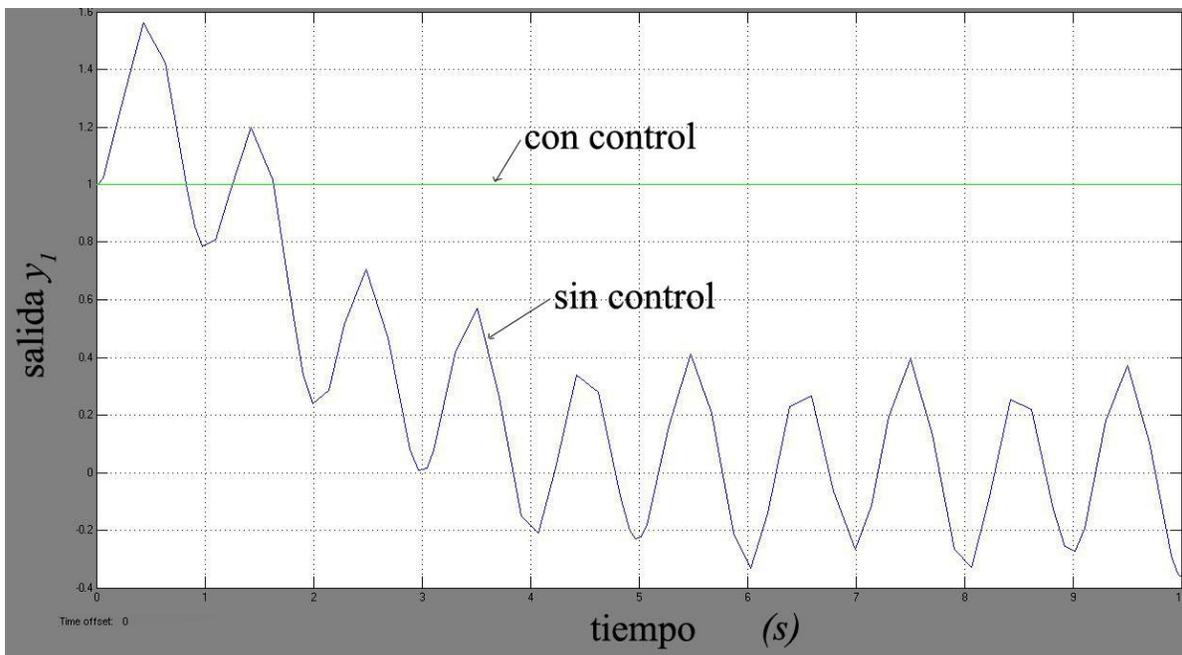
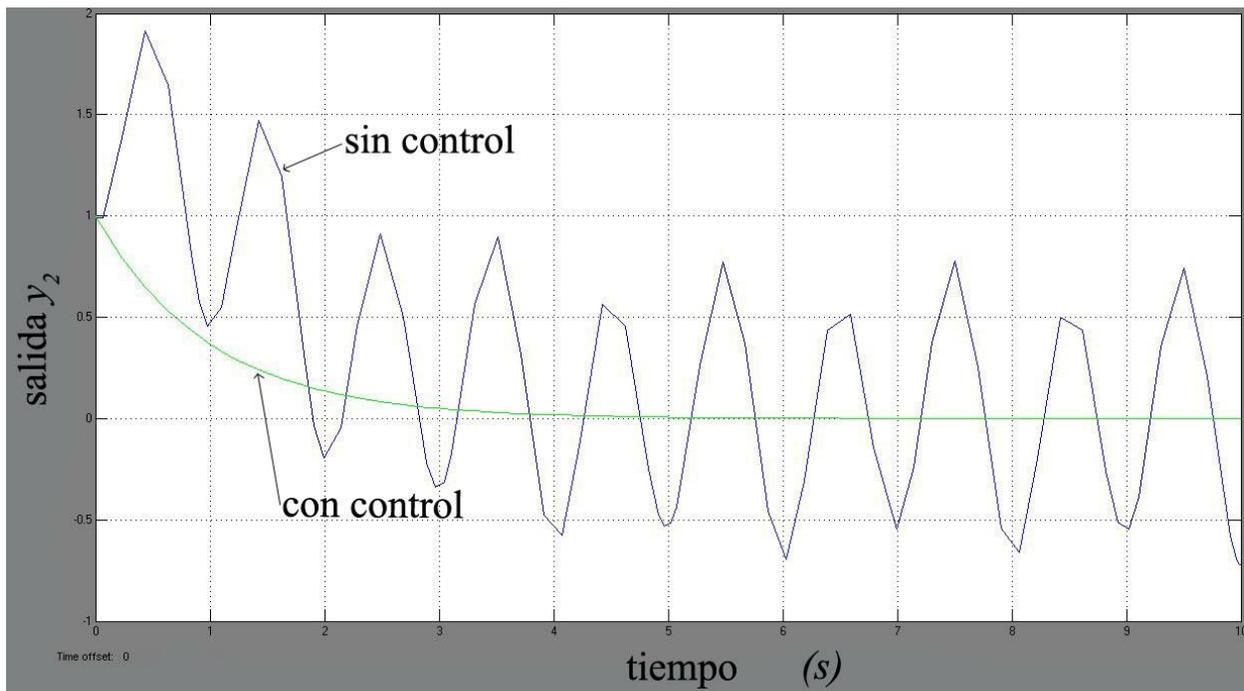


Figura 4.1

Y ahora la salida  $y_2$  (figura 4.2):



*Figura 4.2*

### 4.3 CONCLUSIONES

En este capítulo se estudio el método de control geométrico y se realizó un ejemplo académico de un sistema. Se comprobó que por medio del método de control geométrico la perturbación es rechazada al encontrar una función de control.

## CAPÍTULO 5

# RECHAZO DE PERTURBACIÓN EN LA PRENSA HIDRÁULICA POR ESTRUCTURA AL INFINITO Y CONTROL GEOMÉTRICO

En este capítulo aplicaremos los métodos estudiados al sistema prensa hidráulica (ver sección 2.3.1). Comenzaremos con el método de la estructura al infinito y posteriormente resolveremos el problema utilizando el método geométrico.

Recordemos las ecuaciones de estado del sistema de la sección (2.3.2) en donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 5.1 RECHAZO DE PERTURBACIÓN POR ESTRUCTURA AL INFINITO

Para aplicar este método lo primero que necesitamos son las matrices de transferencia del sistema nominal y del sistema perturbado.

Calculando la función de transferencia  $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ ,

$$\text{donde } (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s+1}{s^2+s+1} & \frac{1}{s^2+s+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{s^2+s+1} & \frac{s}{s^2+s+1} \end{bmatrix}$$

entonces

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2+s+1} & \frac{1}{s^2+s+1} \end{bmatrix}$$

Usando la forma de Smith-McMillan (véase definición 3.5), tenemos que la estructura al infinito del primer menor principal es 1.

Y para el segundo menor principal es 0

Por lo que su estructura al infinito:

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y entonces calculando la función de transferencia del sistema perturbado  $H^d(s) = C(sI - A)^{-1}E$ , obtenemos:

$$H^d(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2 + s + 1} & \frac{1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix}$$

Nuevamente tenemos que por la forma de Smith McMillan la estructura al infinito del primer menor principal es 1 y del segundo menor principal es 0 por lo que tenemos que su estructura al infinito:

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que la estructura al infinito tanto del sistema perturbado como el sistema sin perturbación es la misma por lo que sabemos que el sistema admite rechazo de perturbaciones de acuerdo al teorema (2.2).

### **Cálculo de la función de control $u = Fx + Gd$**

Ahora procedemos a calcular la función de control que rechaza la perturbación.

Sea

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \end{bmatrix}$$

y sea

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo todos los datos en la ecuación (ver teorema 3.2):

$$C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E) = 0$$

Se obtuvo un sistema homogéneo con  $n$  ecuaciones donde las incógnitas son los elementos de la matriz  $F$  y la matriz  $G$ . Al resolver el sistema de ecuaciones

entonces los valores de las incógnitas se sustituyeron en las matrices  $F$  y  $G$ , esto es:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la función de control  $u(t) = Fx + Gd$  queda como:

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} d(t)$$

### **Simulación en MatLab- simulink**

Utilizando la función de control encontrada realizamos las simulaciones correspondientes.

Y bajo la condición inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtuvimos las señales mostradas a continuación.

Primero la salida  $y_1$ :

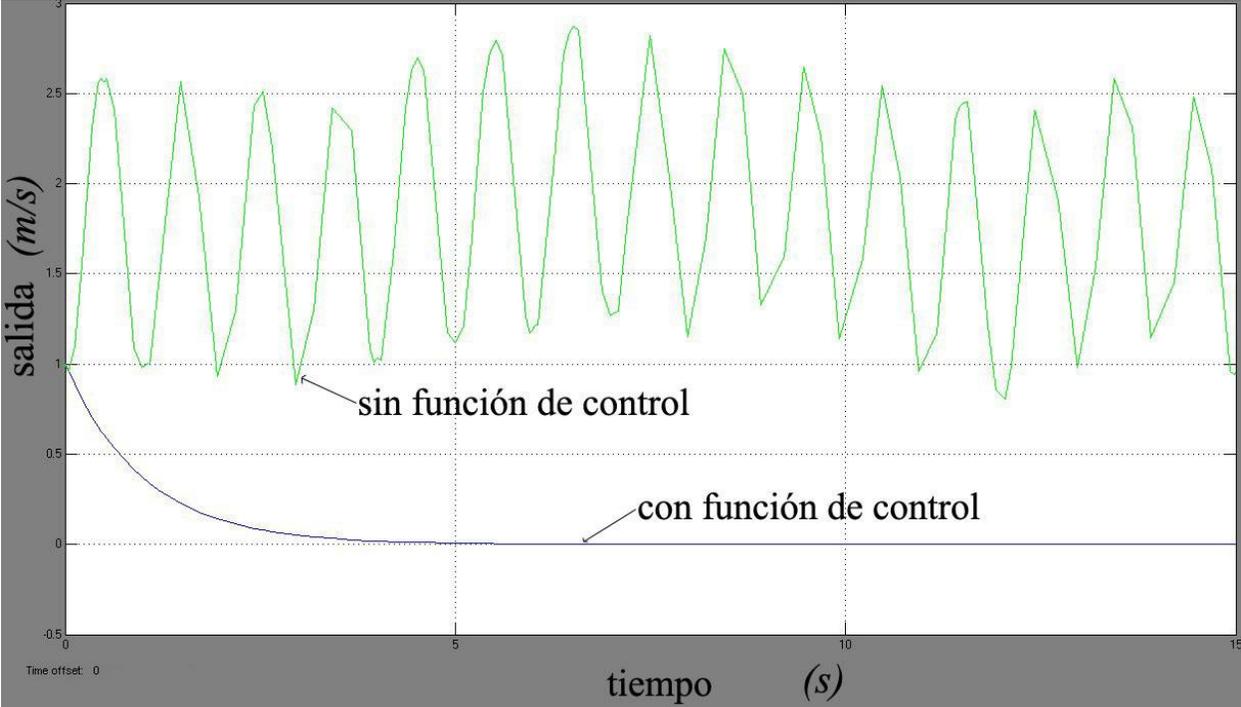


Figura 5.1

En la siguiente gráfica (figura 5.2) se muestra la salida  $y_2$  tanto con función de control como sin función de control:

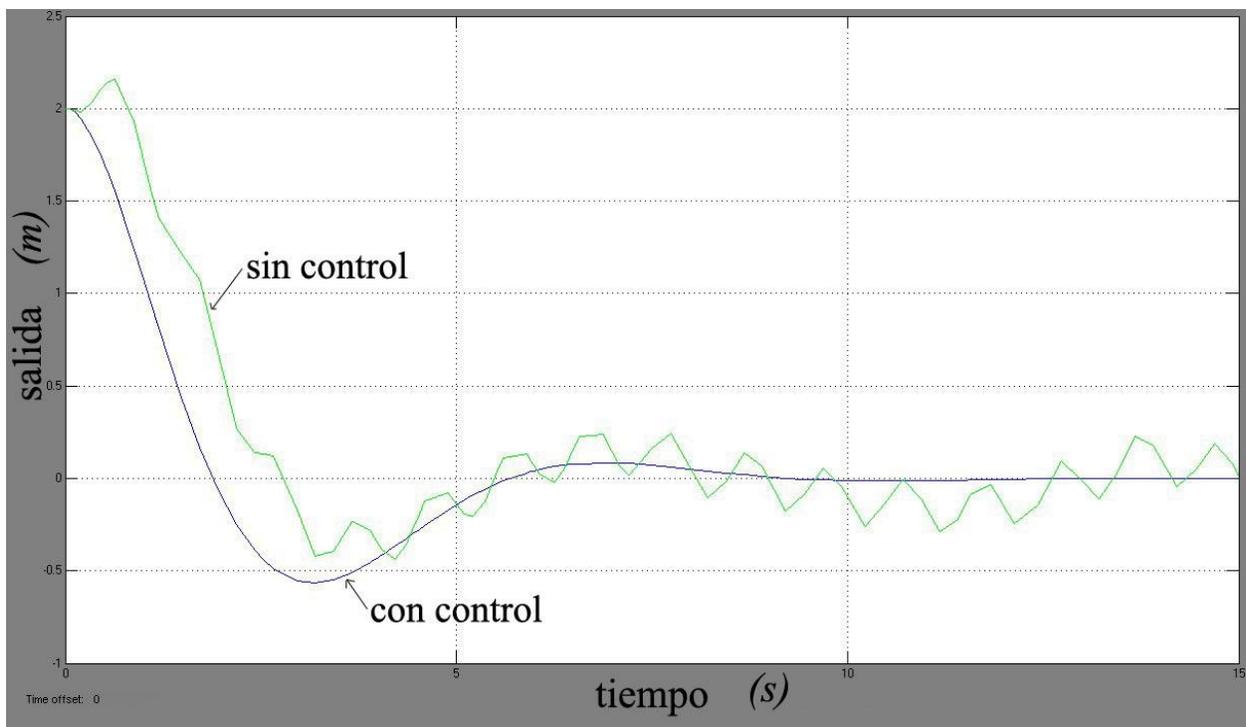


Figura 5.2

## 5.2 RECHAZO DE PERTURBACIÓN POR CONTROL GEOMÉTRICO

Para utilizar este método lo primero que necesitamos determinar es el subespacio invariante  $\mathcal{V}^*$ .

Comenzamos a obtener  $\mathcal{V}^0 = \ker C$

Tenemos la matriz aumentada C:

$$C = \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Su forma escalonada reducida es la misma:

$$C = \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ x_6 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\mathcal{V}^0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como

$$\text{Im } B = \text{gen}\{\beta_1, \beta_2\}$$

$$\text{Donde } \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces  $\text{Im } B + \mathcal{V}^0$ :

$$\text{Im } B + \mathcal{V}^0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{X}$$

Ahora calculamos  $\mathcal{V}^1$ :

$$\mathcal{V}^1 = \ker C \cap A^{-1}(\text{Im } B + \mathcal{V}^0) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como  $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}^1$ , entonces

$$\mathcal{V}^* = \text{gen}\{\mathcal{V}_1^*, \mathcal{V}_2^*, \mathcal{V}_3^*, \mathcal{V}_4^*\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Podemos observar que  $\text{Im } E \subset (\mathcal{V}^* + \text{Im } B)$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como  $\text{Im } E \subset (\mathcal{V}^* + \text{Im } B)$  entonces existe una función de control  $u(t) = Fx + Gd$  que rechaza la perturbación.

$$\text{Sea } F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \end{bmatrix} \text{ y sea } G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

Utilizando el hecho  $(A + BF)\mathcal{V}^* \subset (\mathcal{V}^* + \text{Im } B)$

Para hallar los valores de  $F$ , se necesita conocer  $A + BF$ :

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{11} + f_{21} & f_{12} + f_{22} & f_{13} + f_{23} & f_{14} + f_{24} & f_{15} + f_{25} - 1 & f_{16} + f_{26} - 1 \end{bmatrix}$$

Ahora  $(A + BF)\mathcal{V}^*$ :

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ f_{11} & f_{13} & f_{14} - f_{12} & f_{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_{21} & f_{23} & f_{22} + f_{24} & f_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{11} + f_{21} & f_{13} + f_{23} & f_{22} - f_{12} + f_{14} + f_{24} & f_{16} + f_{26} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sea } F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{11} \\ 0 \\ f_{21} \\ 0 \\ f_{11} + f_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{13} \\ 0 \\ f_{23} \\ 0 \\ f_{13} + f_{23} \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -f_{12} + f_{14} \\ 1 \\ -f_{22} + f_{24} \\ 0 \\ f_{14} - f_{12} - f_{22} + f_{24} \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{16} \\ 0 \\ f_{26} \\ 1 \\ f_{16} + f_{26} - 1 \end{pmatrix}$$

Entonces hacemos los cálculos

$$F_1 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = -\mathcal{V}_1^* + \mathcal{V}_2^* - 2\mathcal{V}_3^* + \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_4 = -2\mathcal{V}_4^* + \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces  $F = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  y sustituyendo en  $C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E)$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{G_{11} + G_{21} + 1}{s + 1} & \frac{G_{12} + G_{22} + 1}{s + 1} \\ \frac{s(G_{11} + G_{21} + 1)}{(s^2 + s + 1)(s + 1)} & \frac{s(G_{12} + G_{22} + 1)}{(s^2 + s + 1)(s + 1)} \end{bmatrix} = 0$$

entonces si

$$G_{11} = -1, G_{12} = 0, G_{21} = 0 \text{ y } G_{22} = -1$$

Cumple que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Entonces la función de control correspondiente es:

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} d(t)$$

En las siguientes graficas se observa como es rechazada la perturbacion en este sistema.

En la figura (5.3) se muestra la comparación de las salidas  $y_1$  y  $y_2$

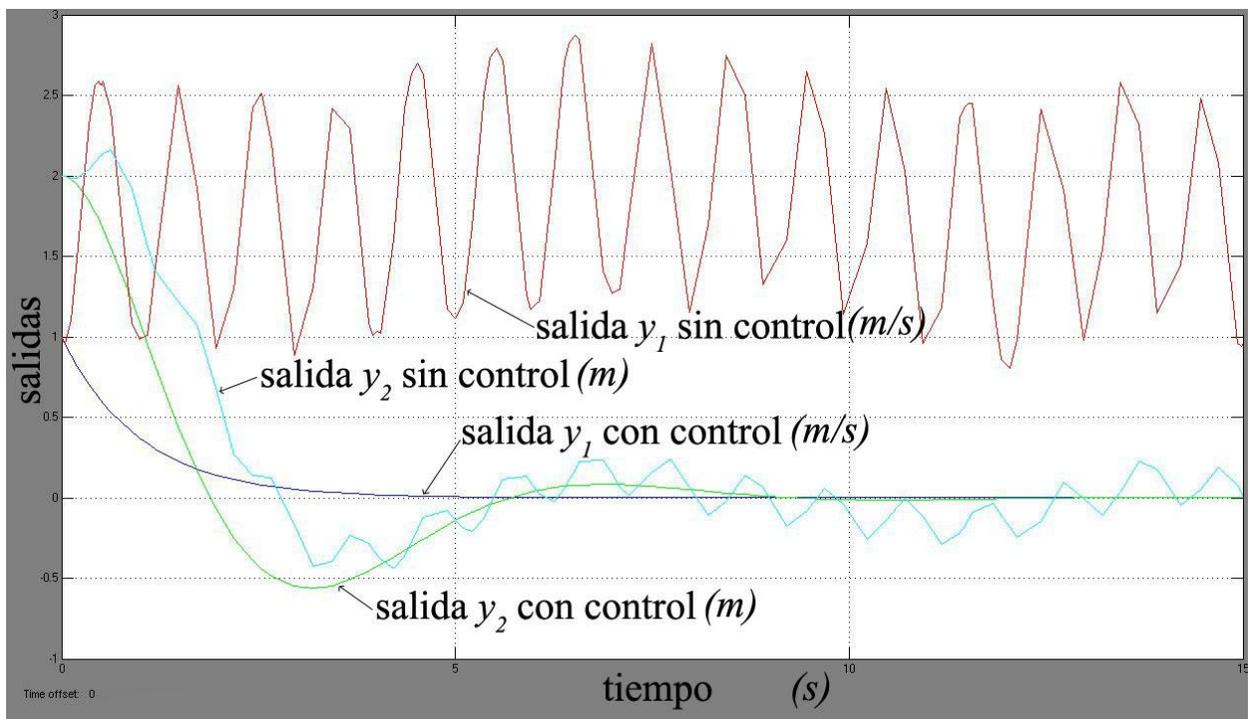


Figura 5.3

### 5.3 CONCLUSIONES

Se verificó que los dos métodos estudiados en este trabajo sirven para obtener una función de control la cual rechazara la perturbación al ser empleada en el sistema de la prensa hidráulica y de igual manera nos sirven para aplicarlos sobre

otros sistemas. La función de control de este sistema se puede aplicar a una prensa real y gracias a esto obtener un funcionamiento adecuado sobre el trabajo que realice la prensa.

## CAPÍTULO 6

# RECHAZO DE PERTURBACIÓN EN UN SISTEMA TÉRMICO POR ESTRUCTURA AL INFINITO Y CONTROL GEOMÉTRICO

En este capítulo aplicaremos los métodos estudiados a un sistema térmico. Comenzaremos con el método de la estructura al infinito y posteriormente resolveremos el problema utilizando el método geométrico.

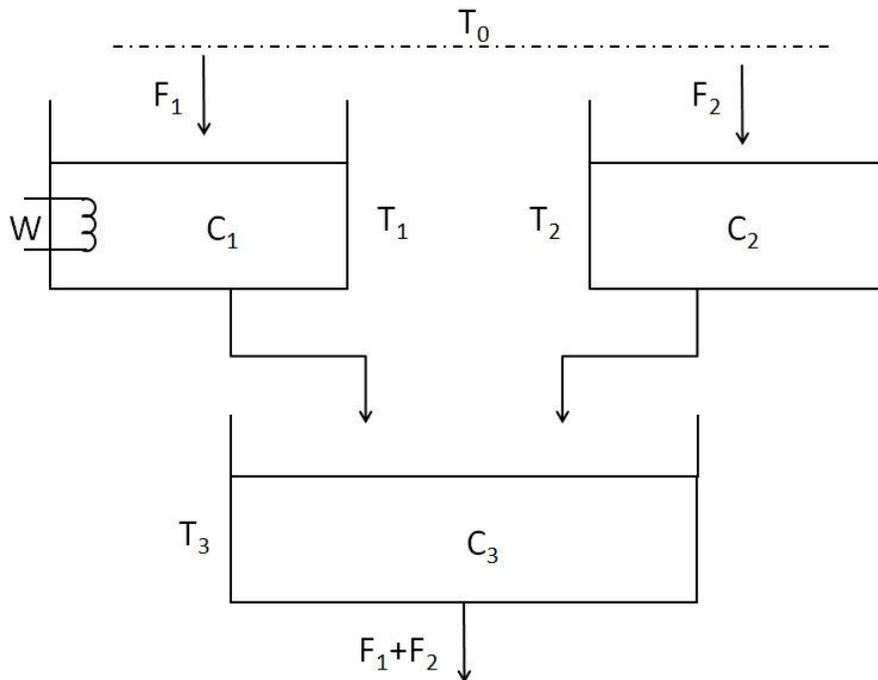


Figura 6.1

donde  
 $T_0$  es la temperatura inicial.

$T_1, T_2$  y  $T_3$  son temperaturas en los contenedores.

$F_1$  y  $F_2$  son los flujos

$C_1, C_2$  y  $C_3$  son los contenedores.

$W$  es un generador de calor.

El sistema regulador de temperatura mostrado en la figura (6.1) tiene una entrada  $T_0$  que llega a los contenedores  $C_1$  y  $C_2$  los cuales llevan su salida a  $C_3$ . El contenedor  $C_1$  tiene un generador de calor que provoca una alteración a la temperatura  $T_1$ . Se trata de que la temperatura generada por el generador  $W$  no afecte a la salida del sistema y se siga conservando la temperatura deseada con la suma de  $F_1$  y  $F_2$ .

Para el modelado de este sistema tenemos las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{T}_1 &= -\frac{F_1}{C_1}T_1 + \frac{1}{C_1}W + \frac{F_1}{C_1}T_0 \\ \dot{T}_2 &= -\frac{F_2}{C_2}T_2 + \frac{F_2}{C_2}T_0 \\ \dot{T}_3 &= \frac{F_1}{C_3}T_1 + \frac{F_2}{C_3}T_2 - \frac{F_1 + F_2}{C_3}T_3 \\ y &= T_3\end{aligned}$$

si

$$W = d$$

$$T_0 = u$$

$$T_1 = x_1$$

$$T_2 = x_2$$

$$T_3 = x_3$$

$$\text{y } F_1 = F_2 = 1, C_1 = C_2 = C_3 = 1$$

Entonces en su forma matricial tenemos:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1]x$$

y la representación del sistema perturbado:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1]x$$

así que  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \quad 0 \quad 1]$ ,  $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

## 6.1 RECHAZO DE PERTURBACIÓN POR ESTRUCTURA AL INFINITO

Para aplicar este método lo primero que necesitamos son las matrices de transferencia del sistema nominal y del sistema perturbado.

La función de transferencia del sistema nominal  $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , entonces:

$$H(s) = [0 \quad 0 \quad 1] \left( \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Expresando esta función de transferencia como:

$$\frac{2}{(s+1)(s+2)} = s^{-2} \left( \frac{2}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} \right)$$

podemos observar que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = 2$$

Entonces por la definición (3.4) la estructura al infinito del sistema es 2.

Y entonces calculando la función de transferencia del sistema perturbado  $H^d(s) = C(sI - A)^{-1}E$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} H^d(s) &= [0 \quad 0 \quad 1] \left( \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

Expresando esta función de transferencia como:

$$\frac{1}{1s^2 + 3s^1 + 2s} = s^{-2} \left( \frac{1}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} \right)$$

Podemos observar que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = 1$$

De acuerdo con la definición (3.4) la estructura al infinito del sistema con perturbación es 2.

Observamos que la estructura al infinito del sistema nominal y la estructura al infinito del sistema perturbado son iguales y por teorema (3.1) entonces el sistema si admite rechazo de perturbaciones.

Entonces por teorema (3.2) se puede hallar una función de control  $u = Fx + Gd$  tal que

$$T(s) = C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E)$$

Sea  $Q = (sI - A - BF)$ ,  $N = (BG + E)$ ,  $F = [f_1 \quad f_2 \quad f_3]$ ,  $G$  un escalar.

Entonces

$$\begin{aligned}
 Q &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [f_1 \quad f_2 \quad f_3] \\
 &= \begin{bmatrix} s+1-f_1 & -f_2 & -f_3 \\ -f_1 & s+1-f_2 & -f_3 \\ -1 & -1 & s+2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$Q^{-1} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]$$

donde

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{s^2+3s+2-f_2s-2f_2-f_3}{q_1} \\ \frac{f_1s+2f_1+f_3}{q_1} \\ \frac{f_1+s+1-f_2}{q_1} \end{bmatrix}; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{f_2s+2f_2+f_3}{q_1} \\ \frac{s^2+3s+2-f_1s-2f_1-f_3}{q_1} \\ \frac{s+1-f_1+f_2}{q_1} \end{bmatrix}; \quad Q_3 = \begin{bmatrix} \frac{f_3}{q_2} \\ \frac{f_3}{q_2} \\ \frac{s-f_2-f_1+1}{q_2} \end{bmatrix}$$

donde

$$q_1 = s^3 + 4s^2 + 5s - f_2s^2 - 3f_2s - 2f_3s + 2 - 2f_2 - 2f_3 - f_1s^2 - 3f_1s - 2f_1$$

y

$$q_2 = s^2 + 3s - f_1s - f_2s - 2f_3 + 2 - 2f_2 - 2f_1$$

Luego tenemos que

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G + 1 \\ G \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando los cálculos necesarios obtenemos que T(s):

$$= \frac{f_1 + 2sG + s + 2G + 1 - f_2}{s^3 + 4s^2 + 5s - f_2s^2 - 3f_2s - 2f_3s + 2 - 2f_2 - 2f_3 - f_1s^2 - 3f_1s - 2f_1}$$

Entonces si se pueden hallar los valores para  $G$  y  $F$  con:

$$f_1 + 2sG + s + 2G + 1 - f_2 = 0$$

Si  $G = -\frac{1}{2}$  entonces:

$$f_1 - f_2 = 0$$

Así que se asignan los valores:  $f_1 = 2$ ,  $f_2 = 2$  y  $f_3 = 0$ .

Por lo tanto la función de control seleccionada rechazará la perturbación.

$$u(x) = (2 \quad 2 \quad 0)x + \left(-\frac{1}{2}\right)d$$

Se realizó la simulación en el programa Matlab-simulink bajo la condición inicial

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En las siguientes graficas se observa cómo es rechazada la perturbación.

Primero se muestra la salida  $y(t)$  sin función de control en la figura (6.2)

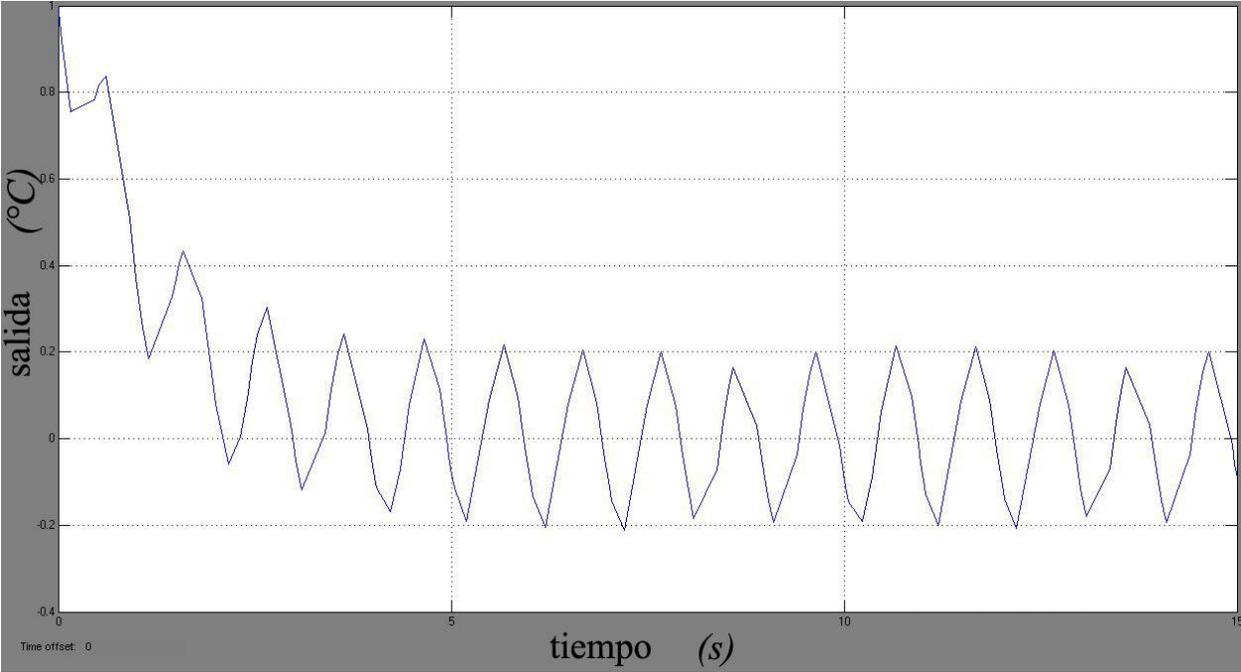
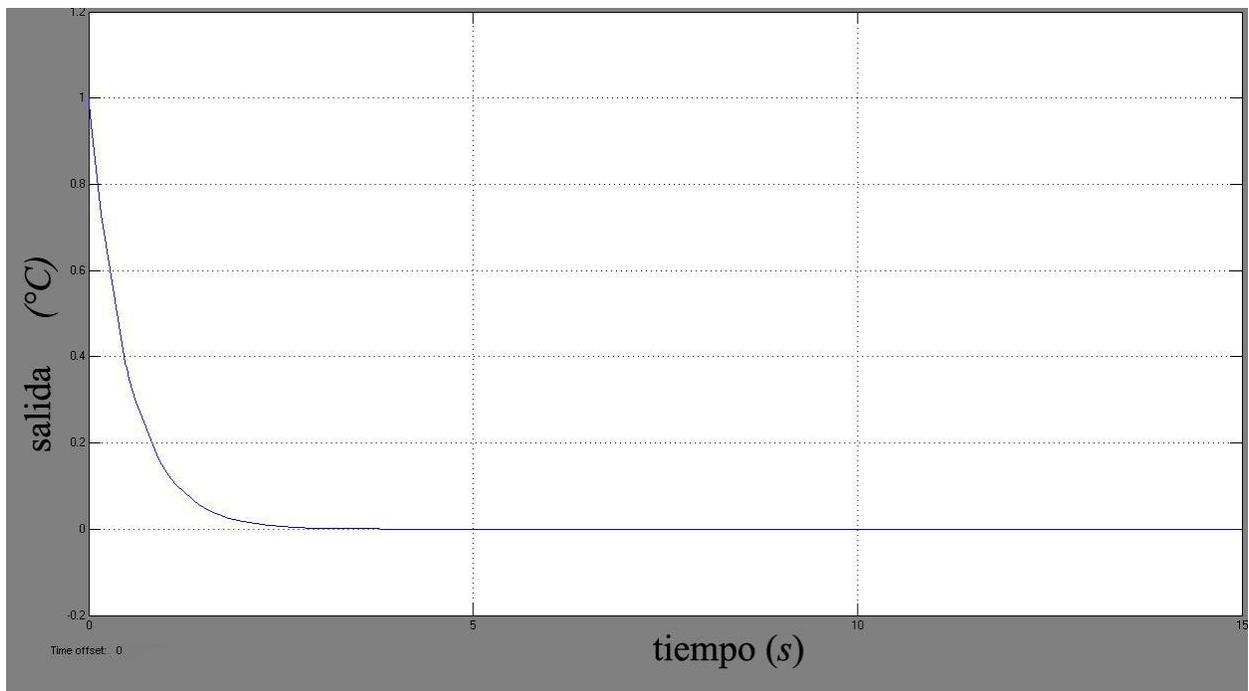


Figura 6.2

Ahora se muestra la salida  $y(t)$  con función de control en la figura (6.3)



*Figura 6.3*

## 6.2 RECHAZO DE PERTURBACIÓN POR CONTROL GEOMÉTRICO

Para utilizar este método lo primero que necesitamos determinar es el subespacio invariante  $\mathcal{V}^*$ .

Y comenzamos a obtener  $\mathcal{V}^0 = \ker C$

Tenemos la matriz aumentada  $C$ :

$$C = (0 \quad 0 \quad 1|0)$$

Y su forma escalonada reducida es la misma por lo que obtenemos la ecuación:

$$x_3 = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\mathcal{V}^0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \ker C$$

Ahora, si tenemos que

$$\text{Im } B = \{\beta_1, \beta_2\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

entonces  $\text{Im } B + \mathcal{V}^0$ :

$$\text{Im } B + \mathcal{V}^0 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

vemos que

$$\mathcal{V}^1 = \ker C \cap A^{-1}(\text{Im } B + \mathcal{V}^0)$$

$$\mathcal{V}^1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

así que:

$$\mathcal{V}^* = \text{gen}\{\mathcal{V}_1^*, \mathcal{V}_2^*\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Para verificar que la imagen de  $E$  esta contenida en  $\mathcal{V}^* + \text{Im}B$ :

$$\text{Im}E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Calculo de  $u(t) = Fx(t) + Gd(t)$ .**

Como

$$\text{Im} E \subset (\mathcal{V}^* + \text{Im} B)$$

Entonces existen  $F = (f_1 \quad f_2 \quad f_3)$  y  $G$  tal que  $u = Fx + Gd$  rechaza la perturbación.

Entonces si se pueden hallar los valores para  $F$  tal que:

$$(A + BF)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* + \text{Im} B$$

así

$$A + BF = \begin{bmatrix} -1 + f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & -1 + f_2 & f_3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A + BF)\mathcal{V}^* = \begin{bmatrix} -1 + f_1 & f_2 \\ f_1 & -1 + f_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sea } F_1 = \begin{bmatrix} -1 + f_1 \\ f_1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } F_2 = \begin{bmatrix} f_2 \\ -1 + f_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$F_1 = (0)\mathcal{V}_1^* + (1)\mathcal{V}_2^* + (1)\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = (1)\mathcal{V}_1^* + (0)\mathcal{V}_2^* + (1)\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$F = [1 \quad 1 \quad 0]$$

y sustituyendo  $F$  en

$$C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E) = 0$$

Sea  $J_2 = (sI - A - BF)$ ,  $L_2 = (BG + E)$  y  $G$  un escalar.

quedando como:

$$\begin{aligned} J_2 &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad 0] \\ &= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ -1 & -1 & s+2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$J_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2-1} & \frac{1}{s^2-1} & 0 \\ \frac{1}{s^2-1} & \frac{s}{s^2-1} & 0 \\ \frac{1}{s^2+s-2} & \frac{s}{s^2+s-2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

y

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G+1 \\ G \\ 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo los cálculos tenemos que

$$\frac{2G+1}{s^2+s-2} = 0$$

Si  $G = -\frac{1}{2}$

Entonces la función de control queda como

$$u(x) = (1 \quad 1 \quad 0)x + \left(-\frac{1}{2}\right)d$$

la cual rechazará la perturbación.

Sustituyendo  $F$  y  $G$  en  $C[sI - A - BF]^{-1}[BG + E]$ :

$$\left( \frac{1}{s^2 + s - 2} \quad \frac{1}{s^2 + s - 2} \quad \frac{1}{s + 2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

En la siguiente gráfica (figura 6.3) se observa como es rechazada la perturbación, comparando la señal de salida  $y(t)$  sin función de control, y con función de control.

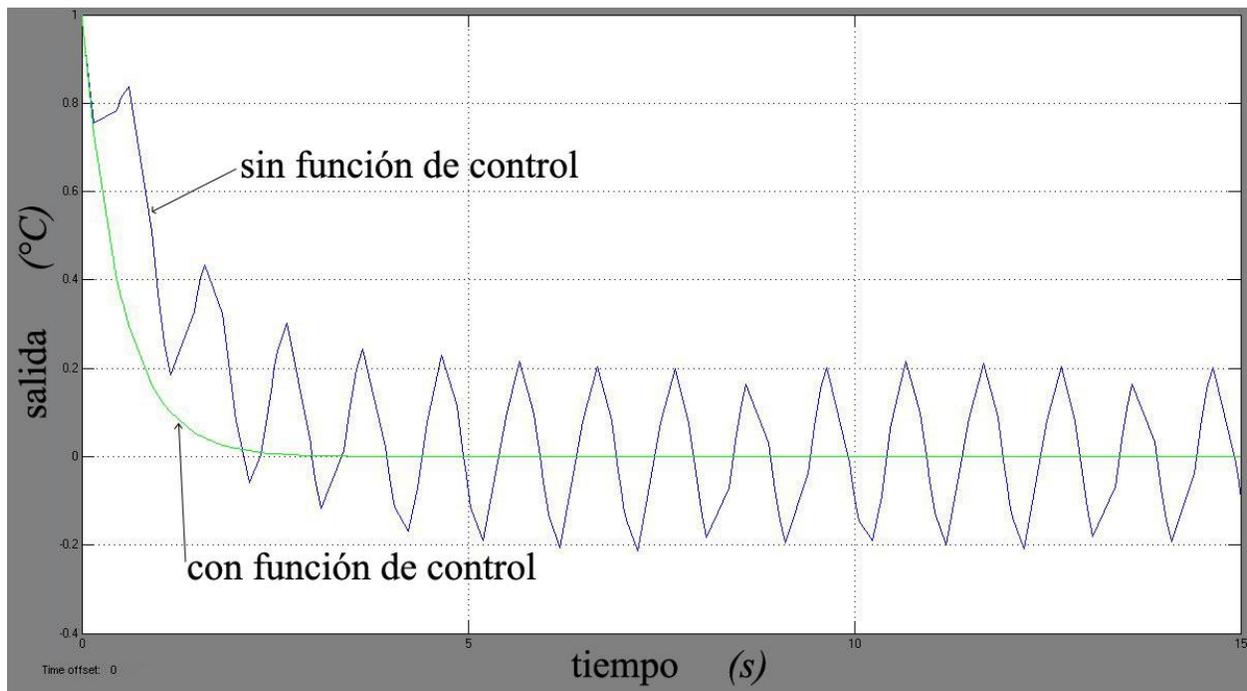


Figura 6.4

### **6.3 CONCLUSIONES**

En este capítulo se compararon los dos métodos (estructura al infinito y control geométrico) y se aplicaron en un sistema de control de temperatura en el que existe una perturbación. Se comprobó que mediante los dos métodos se puede hallar una función de control la cual admite el rechazo de perturbaciones en este sistema térmico.

# CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se estudiaron dos métodos para resolver el problema de rechazo de perturbaciones, estos métodos son: estructura al infinito y control geométrico. Se explicaron las herramientas necesarias para comprender dichos métodos y se realizaron ejemplos y problemas para que el estudio de estos sea fácil de entender. Se realizaron dos ejercicios de sistemas reales los cuales son: una prensa hidráulica y un sistema de regulación de temperatura, en los que se obtuvo, para cada uno, una función de control que garantiza que los sistemas rechazarán señales no deseadas (perturbaciones) y se deja abierta la invitación para seguir trabajando en estos problemas.

Con las bases aquí dadas el lector podrá seguir utilizando estos dos métodos para la solución de problemas de rechazo de perturbaciones en otros sistemas y así sea más sencillo comprobar si estos sistemas rechazarán perturbaciones a la hora de medir las señales de salida. También se puede llevar a cabo la experimentación de los dos sistemas descritos y utilizarlos en la enseñanza en materias relacionadas a este tema.

# APÉNDICE A

Artículos publicados durante la maestría.

De los productos de la presente tesis se publicaron artículos en revistas internacionales, de los cuales las fichas bibliográficas son las siguientes:

1.- Maricela Guadalupe Figueroa, José de Jesús Rubio, Ytzeen Leyva, Quasipolinomials and the structure at infinity of linear delay systems, *International Journal of Systems, Control and Communications*, ISSN: 1755-9340, Incluida en Genamics JournalSeek, Aceptado.

2.- Maricela Guadalupe Figueroa, José de Jesús Rubio, Y. Leyva, Javier Bejarano, Perturbing reject with infinity structure and geometric approach, *Neural Computing and Applications*, En redacción.

# Quasipolynomials and the Structure at Infinity of Linear Systems with Delay

Maricela Figueroa\*, José de Jesús Rubio\*\*, Ytzeen Leyva\*\*\*

Figueroa and Rubio are in the Sección de Estudios de Posgrado e Investigación - ESIME Azcapotzalco – Instituto Politécnico Nacional. MEXICO. Av. de las Granjas No. 682 Col. Sta. Catarina. Del. Azcapotzalco, CP: 02250, [mfigueroag@ipn.mx](mailto:mfigueroag@ipn.mx)\*, [jrubioa@ipn.mx](mailto:jrubioa@ipn.mx)\*\*.

\*\*\*Student of the SEPI - ESIME-Azcapotzalco - IPN. MEXICO and sponsored by CONACYT.

**Abstract:** In this article is studied the structure at infinity of linear systems with delays, the transfer function is expressed as a quotient of quasipolynomials. To know the behavior at infinity of the transfer function is studied the location of the roots of quasipolynomials in the extended complex plane. It also explores the concept of zero at infinity of a rational function, since the structure at infinity is related to the zeros at infinity of the transfer function. Subsequently there is an application to the problem of disturbance rejection.

**Keywords:** Quasipolynomials, transfer function, zero at infinity, linear systems with delay.

## INTRODUCTION

The structure at infinity is a very important tool in the theory of control systems, because it is very useful to solve problems such as disturbance decoupling, row-by-row and model matching.

The structure at infinity is obtained through of the zero at infinity of a transfer function. An interesting research is the notion of structure at infinity of control systems with delays studied in [1]. In [1] the Disturbance Decoupling Problem is solved defining two structures at infinity, the weak structure and the strong structure at infinity and expressing the transfer function as a Laurent series. But the weak structure at infinity is defined only for real values  $s$  such that  $s \rightarrow \infty$  and the strong structure at infinity es only for  $\Re(s) \rightarrow \infty$ , i.e, in the first case we can only observe the behavior of the function in the real line and the second case only in a region of the complex semiplane right.

In the section1 we analyze the transfer function expressed as a Laurent series and shows that is convergent in all the complex plane when the delays are present only in the input of the system, whereas when delays appear in the states this serie converges only in certain region of the complex plane. These facts prevent us from analyzing the behavior of the transfer function in all the extended complex plane.

Due to the previous, in this paper the behavior at infinity of a transfer function of a system with delays is analyzed expressing it like a quotient of quasipolynomials.

The quasipolynomials are functions of complex variable that possess in the extended complex plane an infinite number of roots distributed around of curves logarithmical.

These facts allow observing in all the complex plane the behavior at infinity of the transfer function.

In the section 2 there is studied the power diagram of a quasipolynomial, since in a power diagram is possible to observe the logarithmic sectors on which the roots of very large module are distributed, while in interlogarithmic regions the quasipolynomial does not possess roots of very large modules.

## ANALYSIS OF THE CONVERGENCE OF LAURENT SERIES

Analysis of the case only when there are delays in the system input (each delay is a multiple of a real number):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \sum_{k=0}^m \mathbf{b}_k \mathbf{u}(t - k) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_0 \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

# BIBLIOGRAFÍA:

- [1] Rabah, R. and Malabre, M. (1999) *On the structure at infinity of linear delay systems with application to the disturbance decoupling problem*, Kybernetika, Vol. 35, No. 6, pp.668–680.
- [2] W. M. Wonham (New York, 1985) *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer–Verlag.
- [3] Rabah, R. and Malabre, M. (1993) *Structure at infinity, model matching and disturbance rejection for linear systems with delays*. Kybernetika, Vol. 29
- [4] Eves, H.W. (1968) *Funciones de Variable Compleja*. Tomo II. C.E.C.S.A.
- [5] H. J. Zwart (Berlin, 1989) *Geometric theory for infinite dimensional systems*. (Lecture Notes in Control and Information Sciences 115.) Springer–Verlag.
- [6] M. Malabre and V. Kucera *Infinite structure and exact model matching problem: a geometric approach*. IEEE Trans. Automat. Control AC-29 (1984), 3, 266–268.
- [7] Stanley I. Grossman (E.U.A., 1987) *Algebra lineal*. Iberoamericana.
- [8] Giuseppe Basile and Giovanni Marro (1991) *Controlled and conditioned invariants in linear system theory*. ISBN:0-13172974-8. Prentice Hall.
- [9] M. L. J. Hautus (1975) *The formal Laplace transform for smooth linear systems*. In: *Proc.of Internat. Symposium on Mathematical Systems Theory, Udine (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 131)*, Springer–Verlag, Berlin pp. 29–47.
- [10] C. Moog: *Inversion, d'écouplage, poursuite de mod`ele des syst`emes non lin`eaires*. PhD Thesis, ENSM, Nantes 1987.
- [11] R. Rabah and M. Malabre: *Structure at infinity for delay systems revisited*. In: Proc.

of IMACS and IEEE–SMC Multiconference CESA’96, Symposium on Modelling, Analysis and Simulation, Lille 1996, pp. 87–90.

[12] L. M. Silverman and A. Kitapci: *System structure at infinity*. In: Colloque National CNRS, Développement et Utilisation d’Outils et Modèles Mathématiques en Automatique des Systèmes et Traitement du Signal, Belle-Ile 1983, Ed. CNRS, Vol. 3, pp. 413–424.

[13] R. Rabah: *Structural properties and controllability for delay systems of neutral type*. In: Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes 1995, pp. 354–359.

[14] L. Pandolfi: *Disturbance decoupling and invariant subspaces for delay systems*. Appl. Math. Optim. 14 (1986), 55–72.

[15] M. L. J. Hautus: *The formal Laplace transform for smooth linear systems*. In: Proc. of Internat. Symposium on Mathematical Systems Theory, Udine 1975 (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 131), Springer–Verlag, Berlin pp. 29–47.

[16] C. Commault, J. F. Lafay and M. Malabre: *Structure on linear systems: Geometric and transfer matrix approaches*. Kybernetika 27 (1991), 170–185.

[17] E. Emre and M. L. J. Hautus: *A polynomial characterization of  $(A,B)$  invariant and reachability subspaces*. SIAM J. Control Optim. 18 (1980), 4, 402–436.

[18] Stanley I. Grossman (1987) *Algebra lineal*. Iberoamericana. pp.293

[19] Katsuhiko Ogata *Ingenieria de control moderna* Prentice Hall 3a. Edición.