INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Azcapotzalco

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Control Proporcional Derivativo para un Brazo Robótico Articulado.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA DE MANUFACTURA

P R E S E N T A

ING. Luis Arturo Soriano Avendaño

DIRECTORES:

DR. JOSÉ DE JESÚS RUBIO AVILA
DR. SALVADOR ANTONIO RODRÍGUEZ PAREDES

MÉXICO, D. F. 2011

SIP-14-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 26 del mes de Abril del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de SEPI – ESIME UA para examinar la tesis titulada:

Control Proporcional Derivativo para un Brazo Robótico Articulado

Presentada por el alumno:

Soriano	Avendaño	Luis Arturo
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: | B | 0 | 9 | 1 | 9 | 2 | 2 |

aspirante al grado de:

Maestro en Ingeniería de Manufactura

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

Rubio Avila José de Jesús

Dr. José de Jesús Rubio Ávila

Director de tesis

Dr. Salvador Antonio Rodríguez Paredes

Dr. Jaime Pacheco Martínez

Dr. Maricela Guadalupe Figueroa García

M.C. Gerardo Villegas Medina

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Jaime Pacheco Martínez

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
UNIDAD PROFESIONAL AZCAPOTZALCO
SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

Cd/

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D. F. el día 01 del mes de Junio del año 2011, el que suscribe Luis Arturo Soriano Avendaño alumno del Programa Maestría en Ingeniería de Manufactura con número de registro B091922, adscrito a SEPI-ESIME-UA, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. José de Jesús Rubio Ávila y el Dr. Salvador Antonio Rodríguez Paredes y cede los derechos del trabajo intitulado "Control Proporcional Derivativo para un Brazo Robótico Articulado", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección jrubioa@ipn.mx o larturo.soriano@gmail.com; Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Nombre y Firma

Luis Arturo Soriano Avendaño

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo económico brindado a través del programa PIFI participando como becario en el proyecto SIP20100960 llamado Modelado y Control de brazos robóticos I. A la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco, por permitirme utilizar sus recursos e instalaciones.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada durante mi maestría.

A mis padres y familiares que siempre han creído en mí y han sido un apoyo constante que hace posible la culminación de esta etapa profesional.

A mis asesores Dr. José de Jesús Rubio Ávila y Dr. Salvador Antonio Rodríguez Paredes por su paciencia, su tiempo y apoyo brindado en todo momento en el desarrollo de este trabajo.

A los miembros del jurado: Dr. Jaime Pacheco Martínez, Dra. Maricela Guadalupe Figueroa García, M. en C. Gerardo Villegas Medina, y Dr. Carlos Adolfo Hernández Carreón por sus comentarios para la mejora del presente trabajo.

Ing. Luis Arturo Soriano Avendaño

México D.F., Mayo del 2011

RESUMEN

En la actualidad el estudio e investigación de robots manipuladores ha crecido, no solo por su naturaleza altamente no lineal, sino también por sus crecientes aplicaciones en diferentes áreas. El estudio de la robótica se ha convertido en un tema vigente para su investigación y su experimentación. Como herramienta para su cálculo y control de robots manipuladores se utiliza el modelado dinámico, el cual tiene una gran aportación en el campo del diseño y simulación, también beneficia para obtener resultados experimentales sin necesidad de llevar a la construcción un prototipo. Por otra parte con el creciente número de aplicaciones que requieren mayor exactitud en sus movimientos, trayectorias y control, se necesita que sus movimientos sean más exactos. Por lo que en el presente trabajo se desarrolla una nueva metodología para la obtención del modelo dinámico del robot, el cual es validado en simulación y experimentación, esto no solo beneficia en el costo computacional, sino también en el control de los robots manipuladores. La experimentación llevada a cabo se realizó con el modelo dinámico obtenido con el control proporcional derivativo, con el cual se obtuvieron los resultados.

ABSTRACT

At present the study and research of robot manipulators has grown, not only because of its highly nonlinear nature, but also by their increasing applications in different areas. The study of robotics has become a current issue for investigation and experimentation. As a tool for calculation and control of robot manipulators using dynamic modeling, which has a great contribution in the field of design and simulation, it also benefits for experimental results without need for building a prototype. Moreover with the increasing number of applications requiring greater accuracy in their movements, paths and control their movements need to be more accurate. So in this work a new methodology for obtaining the dynamic model of robot, which is validated in simulation and experimentation, this not only benefits the computational cost, but also in the control of robot manipulators. The experiment was carried out with the dynamic model obtained with the proportional derivative control, with which results were obtained.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

Los amplios y diferentes campos de aplicación de los robot manipuladores, su naturaleza altamente no lineal, su escasa fabricación mexicana y su costo elevado. Abren la puerta para el estudio de los sistemas que lo componen.

Los robots son máquinas en las que se integran componentes mecánicos, eléctricos, electrónicos y de comunicaciones, dotadas de un sistema informático para su control en tiempo real, percepción del entorno y programación.

En la robótica industrial se trata fundamentalmente de dotar de flexibilidad a los procesos productivos manteniendo al mismo tiempo la productividad que se consigue con una máquina automática especializada.

Para el desarrollo del robot manipulador se toma en cuenta, el sistema mecánico que integra al robot manipulador está compuesto por diversas articulaciones. Normalmente se distingue entre el brazo y el efector final que puede ser intercambiable, empleando pinzas o dispositivos específicos para distintas tareas. En este punto conviene indicar que las ecuaciones que describen el movimiento del brazo articulado son ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, para las que, en un caso general, resulta difícil obtener soluciones analíticas y métodos computacionales. De ahí la importancia de reducir el nivel de dificultad para el cálculo del mismo así como el costo computacional.

Por otra parte los actuadores son parte fundamental del robot, generan las fuerzas o pares necesarios para mover la estructura mecánica, pueden ser hidráulicos, neumáticos, eléctricos, etc. Para el prototipo propuesto se emplean motores eléctricos de corriente continua. Por último los sensores y el sistema de control, los sensores retroalimentan con señales como lo es la posición y velocidad del actuador para que el sistema de control pueda retroalimentarse y poder controlar al robot manipulador

En el presente trabajo se aborda el diseño, análisis y simulación del control de un brazo manipulador de 3 DOF el cual se compara con algunas funciones de control ya existentes. Esto no solo es fundamental para el área industrial como también para el área de investigación, por lo que se pueden validar los resultados obtenidos sin necesidad de comprar un equipo costoso para realizar pruebas de validación de resultados.

1.1. Objetivo

Obtener el modelo matemático y diseñar un control en tiempo continúo para un brazo robótico de 3 grados de libertad, probar el sistema de control en simulación y experimentación.

1.2. Objetivos particulares

- Diseño del modelo matemático de un brazo robótico articulado de tres grados de libertad.

- Diseño de una función de control para el primer grado de libertad de un brazo robótico articulado.

- Simulación y experimentación de la función de control propuesta.

1.3. Justificación

En la mayoría de las industrias automatizadas cuentan con robots manipuladores para complementar y en algunos casos sustituir al trabajador en los trabajos peligrosos o de alta dificultad. Un robot no necesita un sueldo, prestaciones, seguro médico, sindicato, etc., mientras que un trabajador si necesita de todos estos beneficios. Un brazo robótico sólo se necesita el mantenimiento preventivo y correctivo para su funcionamiento adecuado. Sin embargo esto acarrea algunos problemas ya que la mayoría de los brazos robóticos son importados, esto tiene dos adversidades. Primero al comprar un robot en el extranjero es dinero que sale del país produciendo un empeoramiento en la economía nacional; Segundo resulta difícil y costoso realizar el mantenimiento del robot, dado que por lo general al hacer un mantenimiento se necesita contratar a una persona especializada que por lo general viene del extranjero para solucionar los problemas del brazo robótico. Asi se tienen que pagar gastos por viáticos y sueldo al mismo. Para solucionar este problema es factible comprar los brazos robóticos aquí en México.

Por otro lado el control permite que el brazo robótico realice una tarea específica sin que tenga que estar un operador asistiéndolo. El control de robots manipuladores ha sido un tema de investigación desde hace años y se han desarrollado diversas estrategias de control. Debido a que los brazos manipuladores se componen de varias articulaciones unidas entre sí, poseen una dinámica altamente no lineal con un fuerte acoplamiento entre sus respectivas articulaciones, esto complica la tarea del control, sobre todo, con consignas a altas velocidades, aceleraciones o el incremento en la precisión. Cabe señalar que actualmente los manipuladores tienen un costo elevado además de su arquitectura y tecnología cerrada. Esto es una desventaja porque el usuario no puede modificar el esquema de control que estos robots traen de fábrica esto representa una limitante importante.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Introducción

El control de robots manipuladores ha sido un tema de investigación desde hace años [5], [12] y se han desarrollado diversas estrategias de control. En este capítulo se describen los momentos más significativos del desarrollo de los manipuladores así como de su control.

2.2. Breve historia de la robótica

La historia de la robótica envuelve fantasía que ha provisto la inspiración, para convertir la fantasía en realidad. Es una historia sustanciosa con creatividad cinematográfica, ingeniosidad científica, y vista empresarial. Muy sorprendentemente. En la cual no sólo se limita a los primeros mecanismos que tienen parecido al cuerpo humano, sino que también está totalmente ligada al control retroalimentado [3], del cual se presenta los hechos históricos más representativos a continuación.

Existen varios conceptos que desde hace tiempo se han mencionado [1], [2], [5], [12], [9], como por ejemplo el concepto de máquinas automatizadas, este se remonta a la antigüedad, con mitos de seres mecánicos vivientes. Los autómatas, o máquinas semejantes a personas, ya aparecían en los relojes de las iglesias medievales, y los relojeros del siglo XVIII eran famosos por sus ingeniosas criaturas mecánicas.

La palabra robot fue usada por primera vez en el año 1921, cuando el escritor checo Karel Capek (1890 – 1938) estrena en el teatro nacional de Praga su obra Rossum's Universal Robot (R.U.R).Su origen proviene de la palabra "robota", que se refiere al trabajo realizado de manera forzada. Algunos de los primeros robots empleaban mecanismos de realimentación para corregir errores, mecanismos que siguen empleándose actualmente.

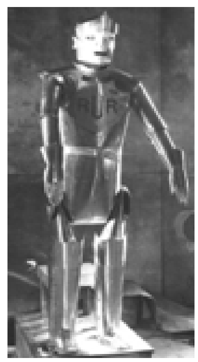


Figura 2.1: Robot de KAREL CAPEK (R.U.R).

El primer controlador retroalimentado fue el regulador de Watt, inventado en 1788 por el ingeniero británico James Watt [3], [17]. Este dispositivo constaba de dos bolas metálicas unidas al eje motor de una máquina de vapor y conectadas con una válvula que regulaba el flujo de vapor. A medida que aumentaba la velocidad de la máquina de vapor, las bolas se alejaban del eje debido a la fuerza centrífuga, con lo que cerraban la válvula. Esto hacía que disminuyera el flujo de vapor a la máquina y por tanto la velocidad.

El control por realimentación, el desarrollo de herramientas especializadas y la división del trabajo en tareas más pequeñas que pudieran realizar obreros o máquinas fueron ingredientes esenciales en la automatización de las fábricas en el siglo XVIII. A medida que mejoraba la tecnología se desarrollaron máquinas especializadas. Sin embargo, ninguna de estas máquinas tenía la versatilidad del brazo humano, y no podía alcanzar objetos alejados y colocarlos en la posición deseada.

El inventor estadounidense George Devol desarrolló en 1954 un brazo que se podía programar para realizar tareas específicas. En 1975, el ingeniero mecánico estadounidense Víctor Scheinman, cuando estudiaba la carrera en la Universidad de Stanford, en California, desarrolló un manipulador polivalente realmente flexible conocido como Brazo Manipulador Universal Programable (PUMA, siglas en inglés) [1], [5], [9]. El PUMA era capaz de mover un objeto y colocarlo en cualquier orientación en un lugar deseado que estuviera a su alcance. El concepto básico de brazo multiarticulado del PUMA mostrado en la Figura 2.2.es la base de la mayoría de los robots actuales.

Figura 2.2: Robot PUMA.

En la década de 1890 el científico Nikola Tesla, inventor, entre muchos otros dispositivos, de los motores de inducción, ya construía vehículos controlados a distancia por radio. Tesla fue un visionario que escribió sobre mecanismos inteligentes tan capaces como los humanos.

Los sistemas de control con realimentación se usan ampliamente en aplicaciones industriales En la actualidad se utilizan miles de robots industriales y de laboratorio. Estos pueden agarrar objetos que pesan cientos de libras y colocarlos con una precisión de una décima de pulgada o más. Equipo de manejo automático para el hogar, la escuela y la industria, resulta particularmente útil para tareas peligrosas, repetitivas, tediosas o sencillas. Máquinas que automáticamente cargan y descargan, cortan, sueldan, o moldean se emplean por la industria para obtener precisión, seguridad, economía y productividad. El uso de computadores integrados con máquinas que realizan tareas como trabajador humano ha sido preciso por algunos autores.

Los primeros robots industriales se introdujeron a principios de la década de los 1960. Los robots controlados por computadora se comercializaron una década después y el primer robot controlado por una microcomputadora apareció en 1974. Los robots industriales se utilizaron por primera vez en operaciones de riesgo (para el manejo de materiales tóxicos y radioactivos, por ejemplo) y la carga y descarga de piezas de trabajo calientes de hornos y fundidoras. Aplicaciones simples, empíricas de robots son las "tres D" (por sus siglas en inglés, dull, dirty and dangerous: tareas aburridas, sucias y peligrosas, incluyendo degradantes, pero necesarias) y las "tres H" (por sus siglas en inglés, hot, heavy and hazardous: calientes, pesadas y riesgosas) [7].

Los robots industriales se han convertido en componentes básicos en los procesos y sistemas de manufactura. Han ayudado a mejorar la productividad y la calidad de los productos y han reducido de manera significativa los costos de mano de obra [7].

2.2.1. Situación actual de la robótica

La Federación Internacional de Robótica (IFR) reportó un cargamento de 115.000 robots industriales que significa que el número de unidades vendidas en todo el mundo casi se duplicó en comparación con el año 2009 muy débil.

El IFR espera un futuro brillante para la robótica: Las perspectivas para 2011 y más allá son prometedores ya que los beneficios de la industria robótica de la creciente demanda para la automatización, especialmente en los mercados asiáticos cada vez mayor con China en la parte superior. En 2011 un nuevo aumento de las ventas de robots entre 10 % y 15 %, se espera que aportará un nuevo nivel máximo de alrededor de 130.000 unidades vendidas a su alcance. Entre 2012 y 2014 una tasa de crecimiento moderado del 5 % anual (en promedio) es más probable.

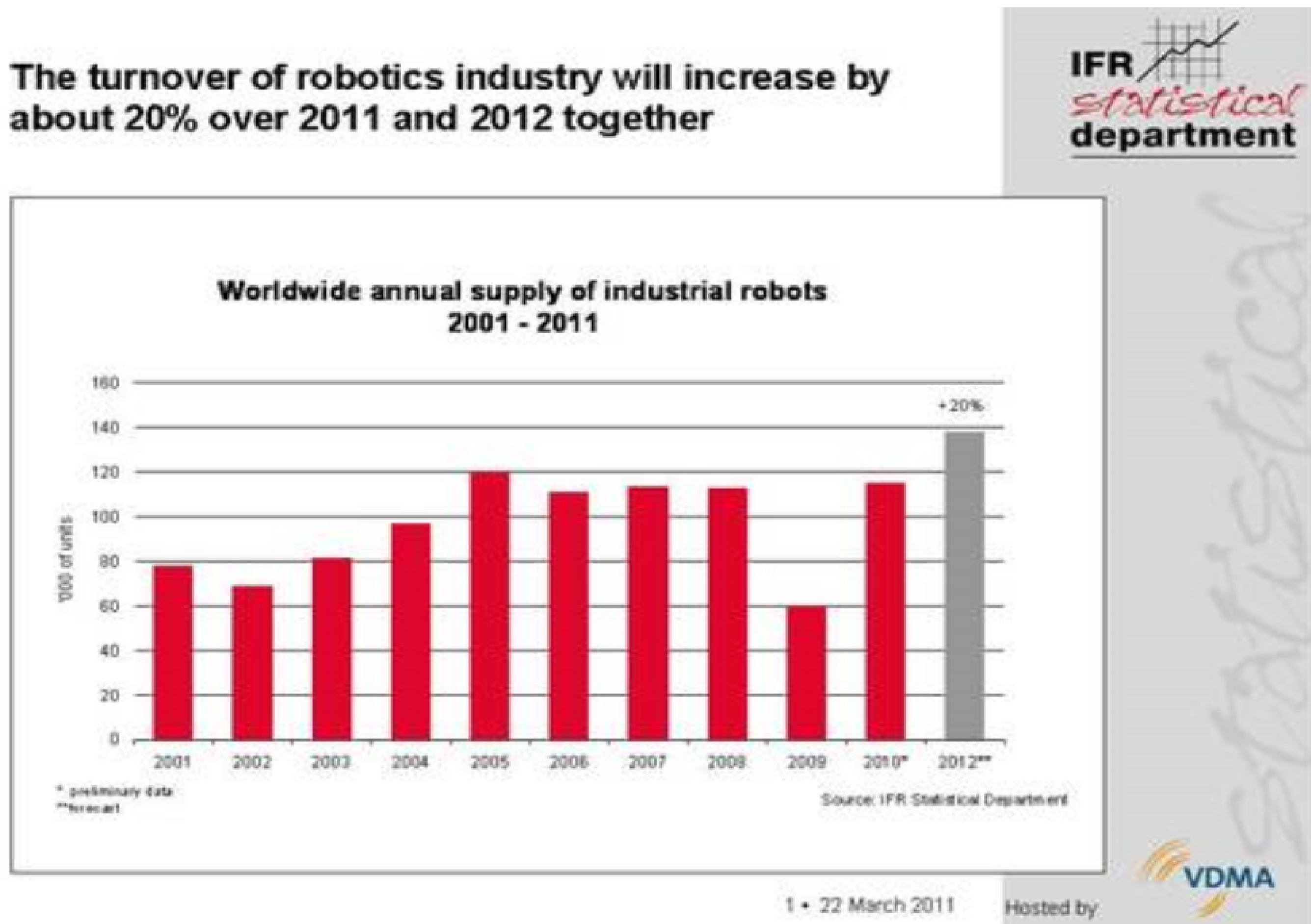


Figura 2.3: Robots industriales pronóstico 2011

Esta previsión ha sido creado por el IFR antes del reciente tsunami en Japón y sus efectos sustanciales sobre la economía japonesa. Durante el IFR Industrial Proveedores Robot Reunido el 24 de marzo en Chicago, un análisis de la amenaza fue realizada con el conocimiento de los proveedores de robots participantes de todo el mundo. Estos son los resultados:

- La fuerte demanda es constante. La entrada de pedidos se sigue aumentando considerablemente en el primer trimestre de 2011. La recuperación económica ya las causas ya los plazos de entrega para los componentes de robots y sistemas completos de robot.
- La mayoría de los proveedores de robots y componentes para los robots en Japón se sigue produciendo, de expedición y enviar sus productos. Pero la escasez de energía en el Japón y la destrucción de parte de los centros de producción en algunas zonas de Japón es muy probable que lleve a una escasez de componentes de los robots para el mercado japonés, sino también para los mercados de exportación. Esto conducirá a una nueva prórroga de plazos de entrega de los robots.
- Dependiendo de la duración de la escasez de componentes en el mercado mundial el aumento previsto del volumen de negocios en parte se pasó de 2011 a 2012. Un escenario probable es que la tasa de crecimiento para 2011 será inferior al 15 % y que la tasa de crecimiento para 2012 será superior al 5 %. El IFR considera que el volumen de negocios de la industria de la robótica se incrementará en un 20 % más de dos años juntos.

2.3. Sistemas de control

Se entiende como un sistema de control, como un conjunto que relaciona las funciones de entrada y salida de dicho conjunto. Las funciones de entradas se seleccionan de modo que, las funciones de salida del sistema se comporten de manera previamente asignada [3], en la figura (2.4) se describe el funcionamiento del sistema de control.

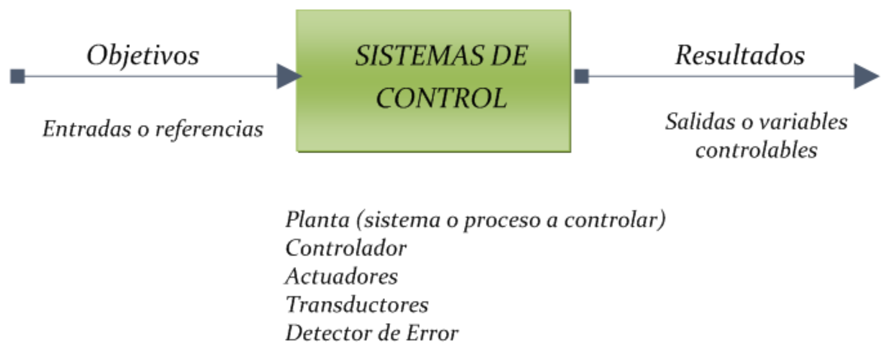


Figura 2.4: Diagrama de un sistema de control.

2.4. Sistemas en lazo abierto

En este tipo de sistemas, la salida no tiene efecto alguno sobre la acción de control, como se puede apreciar en el diagrama de la figura (2.5).

Figura 2.5: Diagrama de bloques de un sistema de control en lazo abierto.

En un sistema en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia, por ello cada entrada corresponderá a una operación prefijada sobre la señal de salida. Se puede asegurar entonces que la exactitud del sistema depende en gran manera de la calibración del mismo y, por tanto, la presencia de perturbaciones en la cadena (señales indeseadas) provocará que este no cumpla la función asignada.

2.5. Sistemas en lazo cerrado

En los sistemas de control en lazo cerrado, la señal de salida tiene efecto sobre la acción de control. A este efecto se le denomina realimentación, este sistema se representa en la figura (2.6).

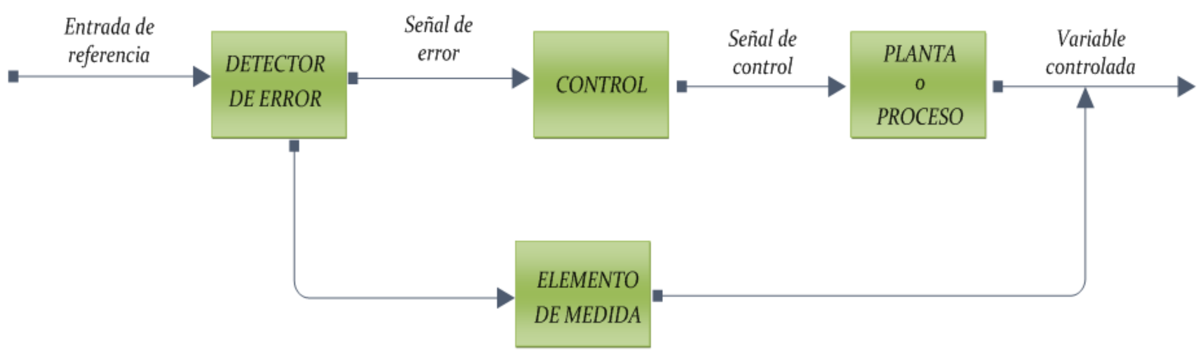


Figura 2.6: Diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado.

La señal controlada debe realimentarse y compararse con la entrada de referencia, tras lo cual se envía a través del sistema una señal de control, que será proporcional a la diferencia encontrada entre la señal de entrada y la señal medida a la salida, con el objetivo de corregir el error o desviación que pudiera existir.

La principal ventaja de los sistemas de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación hace al conjunto menos sensible a las perturbaciones externas y a las variaciones de los parámetros internos que los sistemas en lazo abierto.

2.6. Controladores

La función del controlador es comparar la salida real de la instalación con la orden de entrada para proporcionar una señal de control que reducirá el error a cero o tan cerca de cero como sea posible [6]. El controlador suele estar formado por una unión de suma donde se comparan las señales de entrada y salida.

Existen cuatro acciones básicas de control que se utilizan por separado, o en combinación, para proporcionar los seis tipos más comunes de controladores. Los seis tipos de control [6] son:

- "Todo o Nada".
- Proporcional.
- Integral.
- Proporcional más integral (PI).
- Proporcional más derivativo (PD).
- Proporcional más integral mas derivativo (PID).

2.6.1. Control todo o nada

En el controlador "Todo o Nada", el elemento de control sólo proporciona dos niveles de control: total o nulo. Un ejemplo de este tipo de controlador es el termostato doméstico. Si el error que se presenta a la entrada del controlador es u(t), entonces el controlador "Todo o Nada"se representa por:

$$u(t) = U_1 \text{ para todo } U_1 = 0 \tag{2.1}$$

$$u(t) = U_2 \text{ para todo } U_2 = 0 \tag{2.2}$$

En la mayoría de los controladores de tipo "Todo o Nada", ni U_1 ni U_2 es igual a cero. El uso práctico de un controlador de esta clase suele exigir que el error tenga un cierto rango antes de que la conmutación tenga lugar. Este rango se conoce como el intervalo diferencial.

2.6.2. Control proporcional

En los casos en que se requiera una acción de control más suave, puede utilizarse un controlador proporcional. El controlador proporcional desarrolla una señal de control proporcional al error. Esencialmente, actúa como un amplificador con una ganancia k_p. Su acción se representa por:

$$u(t) = k_p e(t) \tag{2.3}$$

2.6.3. Control integral

El control integral proporciona una señal de control que es función de la propia "historia" de la señal de error, permitiendo obtener una señal de control diferente de cero aunque la señal de error sea cero. Este control permite obtener error estacionario nulo en un sistema de control mediante la introducción de un elemento integrador en la función de transferencia en lazo abierto. Este proceso puede representarse por:

$$u(t) = k_i \int e(t)dr \tag{2.4}$$

Donde k_i es la ganancia del integrador. Sin embargo la acción de control integral empeora de un modo substancial la estabilidad relativa del sistema, aumentado el sobreimpulso de la respuesta transistoria, pudiéndose obtener, inclusive, un sistema inestable.

2.6.4. Control proporcional más integral

Algunas veces es necesario combinar acciones de control. Un controlador proporcional es incapaz de neutralizar una carga en el sistema sin ningún error. Un controlador integral puede proporcionar un error cero, pero suele suministrar una respuesta lenta. Para resolver este problema se utiliza el controlador PI. Se representa por:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int e(t)dr \tag{2.5}$$

Donde k_i regula la ganancia del integrador y k_p ajusta el integrador y la ganancia proporcional.

2.6.5. Control proporcional más derivativo

La acción de control derivativo proporciona una señal de control proporcional a la velocidad de cambio de la señal de error. Puesto que esta señal no genera ninguna salida a menos que el error sea cambiado, en raras ocasiones se utiliza sola. El controlador PD se representa por:

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \frac{d}{dt} e(t) \tag{2.6}$$

El efecto de la acción de control derivativo es anticipar cambios en el error y proporcionar una respuesta más rápida a los cambios.

2.6.6. Control proporcional más integral más derivativo

Tres de la acciones de control se pueden combinar para formar el controlador PID. El controlador PID se representa mediante:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int e(t) dr + k_d \frac{d}{dt} e(t) \tag{2.7}$$

El control PID es el tipo de control más general y, con toda probabilidad es el tipo de control más utilizado. Proporciona una respuesta rápida, un buen control de la estabilidad del sistema y un bajo error de régimen permanente.

2.7. Características del control de robots

Velocidad de Respuesta : Se refiere a la capacidad del robot para desplazarse a la siguiente posición en un breve periodo de tiempo.

Estabilidad: Se define como la medida de las oscilaciones que se producen en el brazo durante el movimiento desde una posición a la siguiente. Un robot con una buena estabilidad presentara poca o ninguna oscilación durante el movimiento o el fin de movimiento del brazo. Una estabilidad deficiente se indicara por una gran cantidad de oscilación.

Capítulo 3

Análisis y diseño del prototipo del robot.

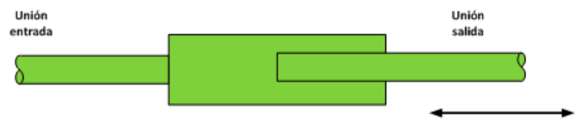
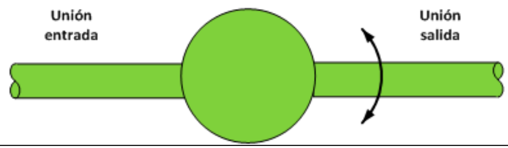
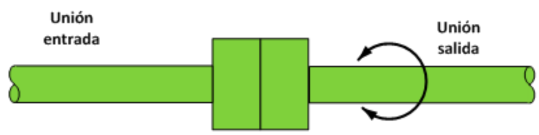
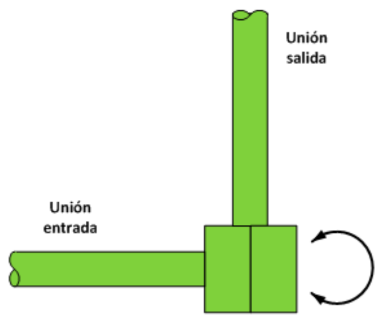
3.1. Definición robot industrial

Definición Robot industrial tal como se define en la norma ISO 8373. Un robot manipulador industrial es una máquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil para su empleo en aplicaciones industriales.

3.2. Tipos de articulaciones

Mecánicamente, un robot está formado por una serie de elementos o eslabones unidos mediante articulaciones que permiten el movimiento relativo entre cada dos eslabones consecutivos. Los movimientos del robot se realizan por medio de articulaciones accionadas. Los movimientos de articulaciones individuales están asociados al grado de libertad [6], aunque en la práctica los más empleados son la prismática y la rotacional. A continuación se muestran los tipos de articulaciones.

Tabla 3.1 Tipos de articulaciones.

Tipo	Nombre	Ilustración
L	Lineal	
R	Rotacional	
T	Torsión	
V	Revolución	

3.3. Tipo de configuraciones de los robots

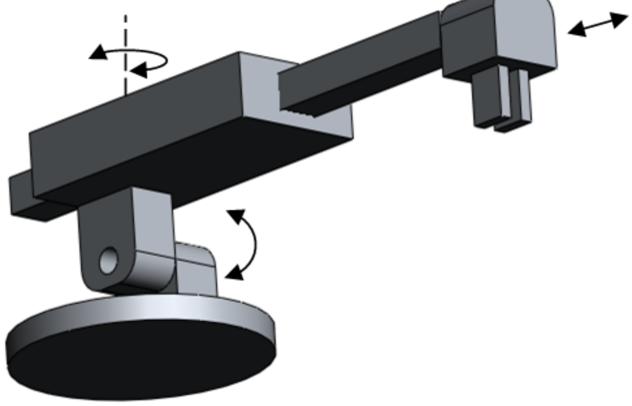
El empleo de diferentes combinaciones de articulaciones de un robot, da lugar a diferentes configuraciónes, con características a tener en cuenta tanto en el diseño y construcción del robot como en su aplicación [1]. Las combinaciones más frecuentes son las representadas en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2 Configuraciones de robots.	
Configuración de Robot (Brazo y Cuerpo)	**Símbolo**
Configuración Polar	TRL
Configuración Cilíndrica	TLL,LTL,LVL
Robot de Coordenadas Cartesianas	LLL
Configuración de Brazo Articulado	TRR,VVR
Configuración Scara	RRL

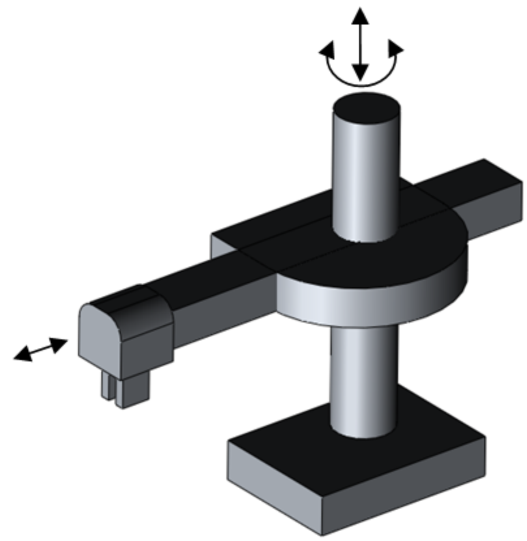
El número de grados de libertad que posee un manipulador es el número de variables de posición independientes que tendrían que especificarse para poder localizar todas las piezas del mecanismo [1]. Muchos robots industriales, que están disponibles comercialmente, se utilizan ampliamente en tareas de fabricación y de ensamblaje, tales como manejo de material, soldaduras por arco y de punto, montajes de piezas, pintura al spray, carga y descarga de máquinas controladas numéricamente, exploraciones espaciales y submarinas, investigación de brazos protésicos y en el manejo de materiales peligrosos [5].

Estos robots caen en una de las cinco categorías que definen movimientos básicos:

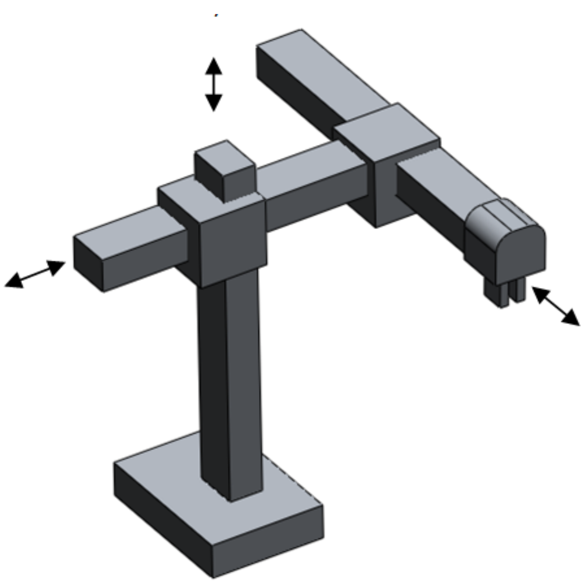
Tabla 3.2 Tipos de manipuladores.



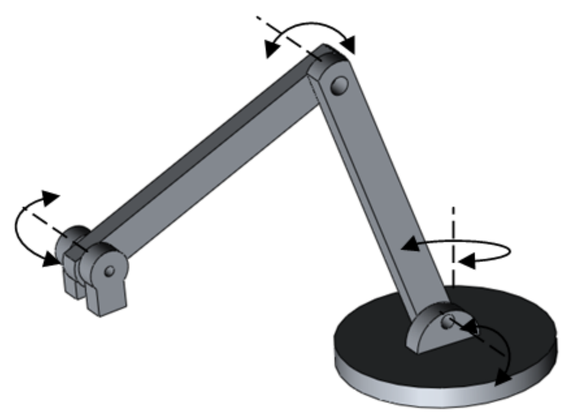
a) Configuración Polar (TRL)



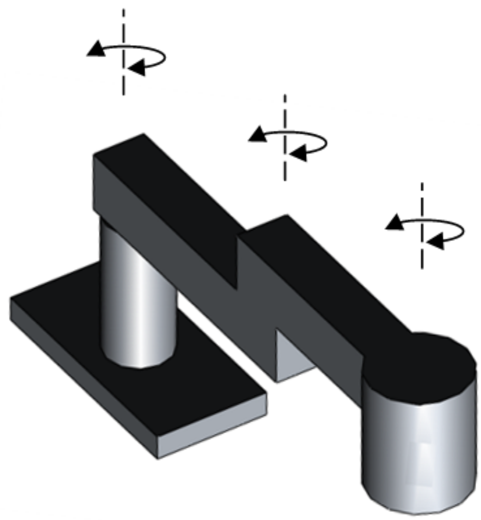
b) Configuración Cilíndrica (TLL)



c) Configuración Cartesiana (LLL)



d) Configuración Brazo Articulado (TRR)



e) Configuración Scara (RRL)

3.4. Diseño del prototipo

EL diseño en el cual se desarrollan las teorías de control y modelo dinámico se basa en la configuración articulada, está configuración a la vez esta formada por tres grados de libertad, una de tipo prismática y dos de tipo rotacional. El diseño del robot está comprendido por tres eslabones de aluminio, con magnitudes y dimensiones como se muestran en la Tabla 3.3:

Tabla 3.3 Descripción del material.			
Abreviatura	Valor	Magnitud	Descripción
m_1	210	g	Masa eslabón 1
m_2	90	g	Masa eslabón 2
m_3	90	g	Masa eslabón 3
ℓ_1	30	cm	Longitud del eslabón 1
ℓ_2	30	cm	Longitud del eslabón 2
ℓ_3	30	cm	Longitud del eslabón 3
M_1	250	g	Masa del motor 1
M_2	250	g	Masa del motor 2
M_3	250	g	Masa del motor 3

El diseño que se propone está basado en las siguientes aplicaciones en las cuales puede desempañar un trabajo repetitivo y de gran exactitud, para lo cual en el presente trabajo se presenta un control que satisface a las aplicaciones mostradas en la Tabla 3.4. Por otra parte no solo estas aplicaciones a nivel industrial si no que también se puede aplicar en [18], [19], [22], [20], [21] para comprobar resultados obtenidos en investigación y poderlos validar.

Tabla 3.4 Aplicaciones.		
Manipulación y carga/descarga	Embalado y expedición	Operaciones de manipulación
Soldadura	Pintura	Aplicación de pegamento
Otros tipos de revestimiento	Montaje	Fijación
Máquinas transformadoras de plásticos	Cargar, alimentar	Otras aplicaciones
Manipulación de otras máquinas	Medición, testado y control	

Este diseño se desarrollo en la plataforma SolidsWorks 2008, el diseño está conformado por tres eslabones unidos entre si los cuales simulan un brazo humano como se muestra en la siguiente figura.

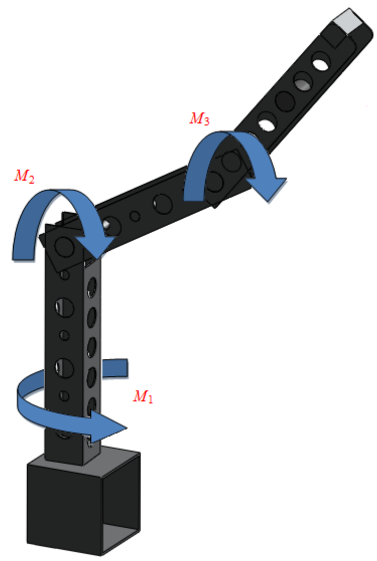


Figura 3.1: Diseño del robot articulado de 3 grados de libertad.

Se muestra imagen del material seleccionado para la construcción del prototipo en la siguiente figura.

3.5. Selección de motores

El cálculo de motores está basado en la fuerza que producen en el eje que se encuentra girando. Esta relación es definida como momento, por lo cual se obtienen a partir de la sumatoria de momentos en cada uno de los ejes cartesianos. Para el eje z en el nodo 1 se considera el peso total de la estructura y la distancia en la que gira; por lo que en la siguiente ecuación:

$$M_{N1_z} = (M_{E1} \times d_1) = 0$$

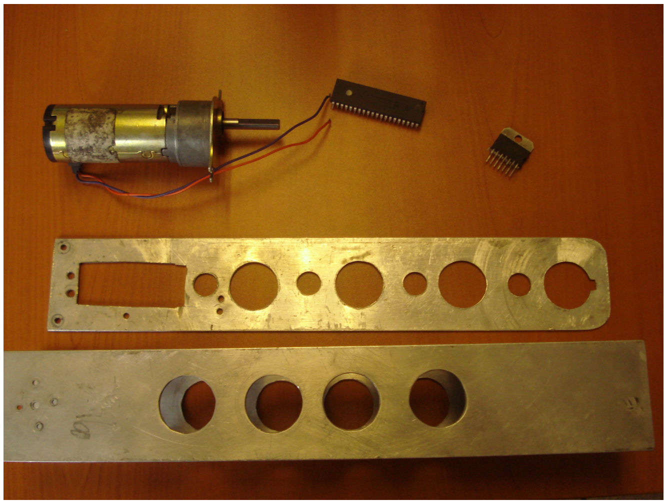


Figura 3.2: Material para la construcción del prototipo del robot de 3 grados de libertad.

sustituyendo los valores en la ecuación se tiene

$$M_{N1} = (680 \times 2{,}5) = 1{,}7\ kg \cdot cm = 0{,}017\ kg \cdot m$$

para el eje y en el nodo 2 se tiene:

$$M_{N2} = (M_{E2} \times d_2) + (M_3 \times d_3) + (M_{E3} \times d_4) = 0$$

sustituyendo valores en la ecuación anterior

$$M_{N2} = (90 \times 15) + (250 \times 30) + (90 \times 45) = 12{,}9\ kg \cdot cm = 0{,}129\ kg \cdot m$$

para el eje y en el nodo 3 se tiene:

$$M_{N3} = (M_{E3} \times d_3) = 0$$

sustituyendo valores en la ecuación anterior

$$M_{N3} = (90 \times 15) = 1{,}35\ kg \cdot cm = 0{,}0135\ kg \cdot m$$

Estos resultados reflejan el torque en $kg \cdot cm$ y $kg \cdot m$ necesario para mover cada una de las articulaciones.

3.6. Cinemática del manipulador

Con objeto de desarrollar un plan para controlar el movimiento de un manipulador, es necesario desarrollar técnicas para representar la posición del brazo, en puntos, en relación con el tiempo. En consecuencia el estudio de la cinemática de manipuladores se refiere a todas las propiedades geométricas y basadas en el tiempo del movimiento, [2], [5], [12]. Las relaciones entre estos movimientos, las fuerzas y momentos de torsión que los ocasionan constituyen el problema de la dinámica que se estudiara más adelante.

3.6.1. Cinemática directa

Cualquier robot puede describirse en forma cinemática proporcionando los valores de cuatro cantidades para cada vínculo. Dos describen el vínculo en sí, y los otros dos describen la conexión del vínculo adyacente. En el caso de una articulación angular, θ_i se llama variable de articulación y las otras tres cantidades son parámetros de vínculo fijos. Para las articulaciones prismáticas, d_i es la variable de articulación y las otras tres cantidades son parámetros de vínculos fijos. La definición de mecanismos y las otras tres cantidades son parámetros de vínculo fijos. La definición de mecanismos por medio de estas cantidades es una convención que generalmente se le conoce como notación Denavit-Hatenberg [2], [5], [12], [9].

Así la variable de una articulación i de rotación se representará mediante el ángulo θ_i y la de una prismática mediante el desplazamiento d_i. Los otros dos parámetros de la articulación son la distancia a_{i-1} entre el eje de la articulación $i-1$ y el eje de la articulación i, medida sobre la línea perpendicular común, y el ángulo α_{i-1} entre estos dos ejes medido como rotación alrededor de la perpendicular común hasta hacer coincidir las direcciones de los ejes [13].

Si se componen estas transformaciones aplicando las matrices de transformación elementales para las rotaciones y las traslaciones, se obtienen la siguiente forma general asociada a la articulación:

$$
{}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

donde s significa el seno y c el coseno.

La cinemática directa por medio de esta notación para el robot articulado es la siguiente

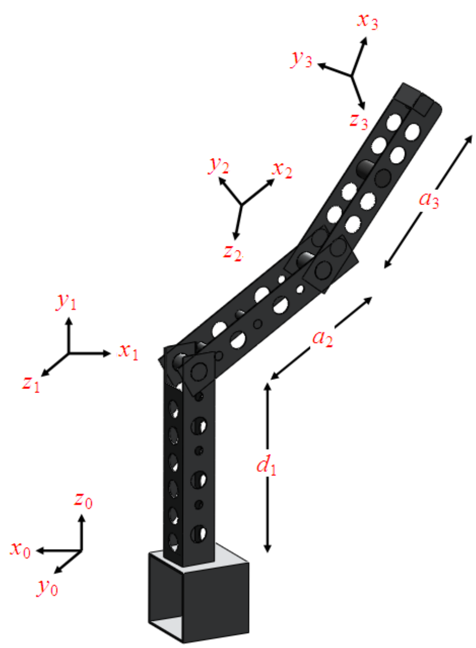


Figura 3.3: Cinematica directa del robot articulado.

Tabla 4.1 Valores Denavit-Hatenberg				
	a_i	d_i	α_i	θ_i
Junta 1	0	d_1	$-90°$	θ_1^*
Junta 2	a_1	0	0	θ_2^*
Junta 3	a_2	0	0	θ_3^*

*=Variable

Donde las matrices de transformación pertenecientes a cada articulación se describen a continuación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_1\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & a_2\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & a_2\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

3.6.2. Cinemática inversa

El objetivo del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix}^T$ parar que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial [2], [5], [12], [9].

Así cómo es posible abordar el problema cinemático directo de una manera sistemática a partir de la utilización de matrices de transformación homogéneas, e independientemente de la configuración del robot, no ocurre lo mismo con el problema cinemático inverso, siendo el procedimiento de obtención de las ecuaciones fuertemente dependiente de la configuración del robot.

Los métodos geométricos permiten obtener normalmente los valores de las primeras variables articulares, que son las que consiguen posición al el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo). Para ello utilizan relaciones trigonométricas y geométricas sobre los elementos del robot. Se suele recurrir a la resolución de triángulos formados por lo elementos y articulaciones del robot.

Resolución del problema cinemático inverso por método geométrico

El procedimiento en si se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas elementales, como se muestra en la siguiente figura (3.4).

Como se ve en la figura (3.4) el robot posee una estructura planar, quedando este plano definido por el ángulo de la primera variable articular θ_1 como se muestra en la figura (3.5) donde

$$r^2 = P_x^2 + P_y^2 \tag{3.4}$$

$$P_x = r\cos\theta_1 \tag{3.5}$$

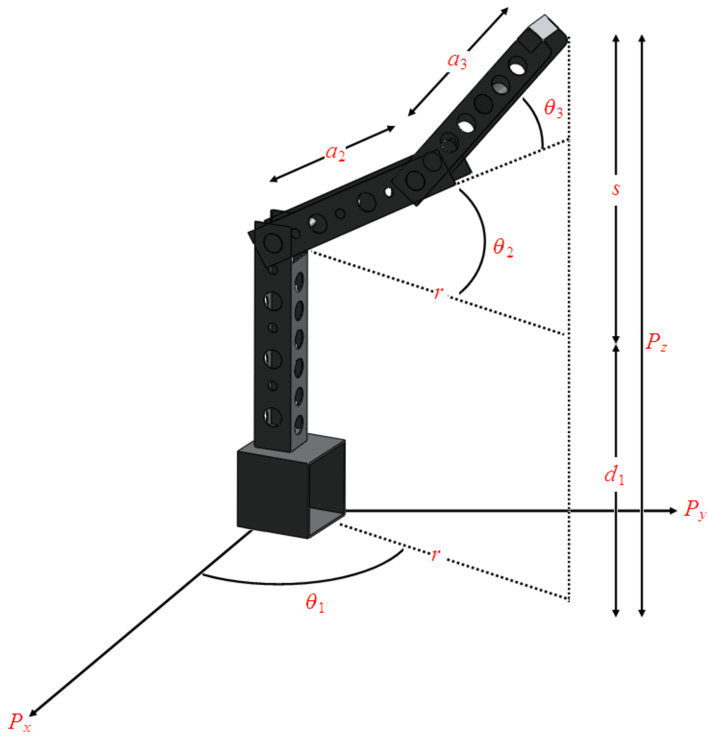


Figura 3.4: Cinemática inversa brazo articulado.

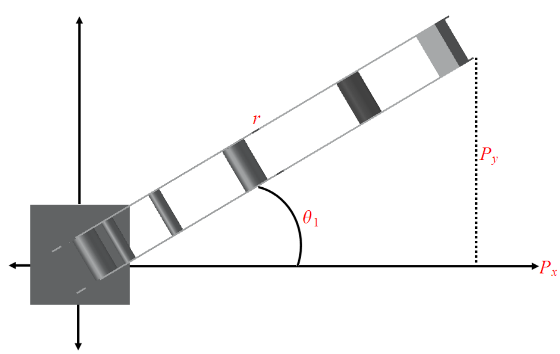


Figura 3.5: Diagrama para θ_1 cinemática inversa brazo articulado.

$$P_y = r \sin \theta_1 \tag{3.6}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \tan^{-1} \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \\ &= \tan^{-1} \frac{P_y}{P_x} \end{aligned} \tag{3.8}$$

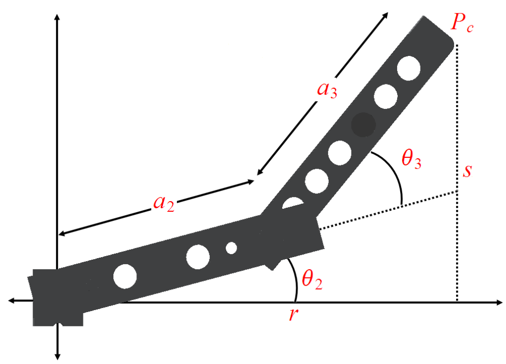


Figura 3.6: Diagrama para θ_3 cinemática inversa brazo articulado.

Utilizando las identidades trigonométricas para la figura (3.6)

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A + b) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Por ley de cosenos se pueden escribir las siguientes ecuaciones

$$r = a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - a_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \tag{3.9}$$

$$s = a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - a_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \tag{3.10}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y sumando las dos ecuaciones se obtiene:

$$\cos\theta_3 = \frac{s^2 + r^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \tag{3.11}$$

$$\sin\theta_3^2 + \cos\theta_3^2 = 1 \tag{3.12}$$

$$\sin\theta_3 = \pm\sqrt{1 - \cos\theta_3^2} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \tan^{-1}\frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_3} \\ &= \tan^{-1}\frac{\pm\sqrt{1-\cos\theta_3^2}}{\cos\theta_3} \end{aligned} \tag{3.14}$$

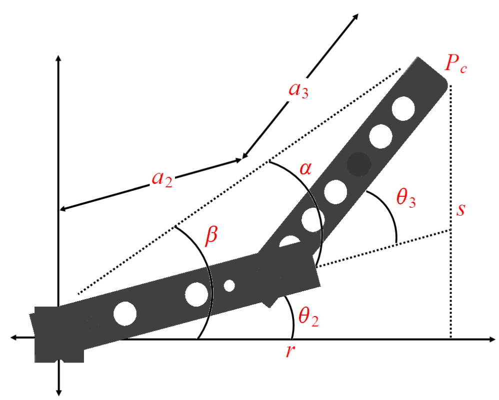


Figura 3.7: Diagrama para θ_2 cinemática inversa brazo articulado.

Definiendo a α y β como la figura anterior se tiene

$$\tan\alpha = \frac{a_3\sin\theta_3}{a_3\cos\theta_3 + a_2} \tag{3.15}$$

$$\tan\beta = \frac{s}{r} \tag{3.16}$$

utilizando la identidad trigonométrica

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \tag{3.17}$$

se obtiene θ_2 para la figura (3.7)

$$\tan\theta_2 = \frac{[s\,(a_2 + a_3\cos\theta_3) - ra_3\sin\theta_3]}{[r\,(a_2 + a_3\cos\theta_3) - sa_3\sin\theta_3]} \tag{3.18}$$

$$\theta_2 = \tan^1\left(\frac{[s\,(a_2 + a_3\cos\theta_3) - ra_3\sin\theta_3]}{[r\,(a_2 + a_3\cos\theta_3) - sa_3\sin\theta_3]}\right) \tag{3.19}$$

donde

$$s = (P_z - d_1) \tag{3.20}$$

y

$$r^2 = P_x^2 + P_y^2 \tag{3.21}$$

Capítulo 4

Modelo dinámico

4.1. Introducción

Actualmente existen distintos métodos para encontrar el modelo dinámico de los robots manipuladores [5], a continuación se presentan dos modelos dinámicos del robot de 3 DOF por el método de Euler-Lagrange, el modelo dinámico presentado por Fú en [5], es uno de los metodos mas comunes para encontrar las ecuaciones que describen al robot manipulador, este metodo es amplio y con un gran número de operaciones por otra parte se presenta un modelo propuesto que reduce el número de operaciones para obtener las ecuaciones que representan al robot manipulador.

4.2. Modelo dinámico Fú

El método se basa en el *Lagrangiano*

$$L = K - P \tag{4.1}$$

donde K es la energía cinética total del sistema y P es la energía potencial total del sistema. Para este caso en particular la variable θ_i se considera para las articulaciones rotatorias, d_i para articulaciones prismáticas y el símbolo τ_i para el momento o la fuerza aplicado a la articulación i. La ecuación de Lagrange-Euler es la siguiente

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \tag{4.2}$$

Para llegar a la forma (4.2) necesitamos hacer uso de las matrices homogéneas de transformación desarrolladas en el capítulo anterior.

4.2.1. Velocidades de las articulaciones de un robot.

La formulación de Lagrange-Euler requiere conocimiento de la energía cinética del sistema físico, que a su vez requiere un conocimiento de la velocidad de cada articulación.

Sea ${}^i r_i$ un punto fijo y en reposo en el elemento i y expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas del elemento *i-ésimo*.

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix}^T \tag{4.3}$$

Estas coordenadas del punto **"i"**con respecto al sistema $\{i\}$. Dicho punto (cualquier punto en el eslabón "i") está inmóvil con respeto al sistema $\{i\}$, pero no así, obviamente con respecto al sistema inercial de referencia,$\{0\}$. Con referencia a $\{0\}$ el punto es:

$${}^0 r_i = {}^0 A_i \; {}^i r_i \tag{4.4}$$

Al derivar ${}^0 r_i$ conrespecto del tiempo, se obtiene la velocidad de ese eslabón con respecto al sistema de coordenas base:

$${}^0 v_i = v_i = \frac{d}{dt}\left({}^0 r_i\right) = \frac{d}{dt}({}^0 A_i \; {}^i r_i) = \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \; {}^0 A_i}{q_j} \dot{q}_j\right) \; {}^i r_i \tag{4.5}$$

La forma compacta de la ecuación (4.5) se obtiene por que ${}^i \dot{r}_i = 0$. La derivada parcial de ${}^0 A_i$ con respecto de q_j se puede obtener fácilmente con la ayuda de una matriz D_i, que para el caso de la articulación de revolución se define como

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial\ {}^{i-1}A_i}{q_j} = D_i\ {}^{i-1}A_i \tag{4.7}$$

de modo que

$$\frac{\partial\ {}^{i-1}A_i}{q_j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ {}^{i-1}A_i \tag{4.8}$$

tendremos entonces para $i = 1, 2, ..., n$ y $j \leq i$

$$\frac{\partial\ {}^{0}A_i}{q_j} =\ {}^{0}A_1\ {}^{1}A_2 ...\ {}^{j-2}A_{j-1} D_j\ {}^{j-1}A_j ....\ {}^{i-1}A_i \tag{4.9}$$

Y para $j \geq i$, la deriva será igual a cero. Esta ecuación refleja el efecto del movimiento de la articulación $''j''$ en el eslabón $''i''$. Si un eslabón $j > i$ (o sea, más lejos de la base que el eslabón $''i''$ en la cadena de eslabones) su efecto en $''i''$ será cero, pues $''i''$ no se moverá debido al movimiento de $''j''$. Para simplificar la notación definamos $B_{ij} = \frac{\partial\ {}^{0}A_i}{q_j}$ de modo que para $j \leq i$:

$$B_{ij} =^0 A_{j-1} D_j\ {}^{j-1}A_i \tag{4.10}$$

y para $j > i$, $B_{ij} = 0$.

Usando la ecuación (4.5)

$$v_i = \left(\sum_{j=1}^{i} B_{ij} \dot{q}_j \right)\ {}^{i}r_i \tag{4.11}$$

para calcular la energía cinética del sistema, también necesitamos la derivada parcial de B_{ij} con respecto a "q_k":

$$\frac{\partial B_{ij}}{q_k} = B_{ijk} = \begin{cases} {}^0A_{j-1} D_j \, {}^{j-1}A_{k-1} D_k \, {}^{k-1}A_i & i \geq k \geq j \\ {}^0A_{k-1} D_k \, {}^{k-1}A_{j-1} D_j \, {}^{j-1}A_i & i \geq j \geq k \\ 0 & i < j \text{ o } i < k \end{cases} \tag{4.12}$$

y para $i < j$ o $i < k$ la derivada parcial es igual a cero. Estas relaciones reflejan el efecto de los movimientos de los eslabones $''j''$y $''k''$sobre el eslabón $''i''$.

De la ecuación (4.11) se obtienen las velocidades de los 3 eslabones del manipulador, por lo que las ecuaciones serán:

$$v_1 = (B_{11}\dot{q}_1) \, {}^1r_1 \tag{4.13}$$

$$v_2 = (B_{11}\dot{q}_1 + B_{12}\dot{q}_2 + B_{21}\dot{q}_1 + B_{22}\dot{q}_2) \, {}^2r_2 \tag{4.14}$$

$$\begin{gathered} v_3 = (B_{11}\dot{q}_1 + B_{12}\dot{q}_2 + B_{13}\dot{q}_3 + \\ B_{21}\dot{q}_1 + B_{22}\dot{q}_2 + B_{23}\dot{q}_3 + \\ B_{31}\dot{q}_1 + B_{32}\dot{q}_2 + B_{33}\dot{q}_3) \, {}^3r_3 \end{gathered} \tag{4.15}$$

4.2.2. Energía cinética

Según la segunda ley de Newton, la energía cinética de una partícula en movimiento está dada por $e = \frac{1}{2}mv^2$. En este caso, si K_i es la energía cinética del eslabón $''i''$. y dK_i la de una partícula con masa dm en dicho eslabón,

$$dK_i = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) dm = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(v_i v_i^T\right) dm \tag{4.16}$$

donde $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ en otras palabras es la suma de los elementos diagonales de la matriz A; por otra parte usando (4.11) en (4.16)

$$dK_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\sum_{l=1}^{i} B_{il}\dot{q}_l\ {}^{i}r_i\left(\sum_{r=1}^{i} B_{ir}\dot{q}_r\ {}^{i}r_i\right)^T\right)dm \tag{4.17}$$

$$dK_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{i} B_{il}\ {}^{i}r_i dm\ {}^{i}r_i^T B_{ir}^T \dot{q}_l\dot{q}_r\right) \tag{4.18}$$

Recordemos ahora que la matriz B_{ij} representa la razón del cambio de puntos ${}^{i}r_i$ (en el eslabón $''i''$) relativo a las coordenadas de base debido al cambio de q_j. Esto significa que dicha matriz es la misma para todos los puntos en el eslabón $''i''$(o sea, una constante para dichos puntos) independientemente de dm. Igualmente la velocidad $\frac{dq_i}{dt}$ es la misma para todos los puntos del eslabón $''i''$, de modo que para obtener la energía cinética total K_i del eslabón $''i''$por integración de dK_i, podemos dejar los factores correspondientes en (4.18) fuera de la integral y efectuar ésta dentro de la doble suma.

$$K_i = \int dK_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{i} B_{il}\left(\int\ {}^{i}r_i\ {}^{i}r_i^T dm\right) B_{ir}^T \dot{q}_l\dot{q}_r\right) \tag{4.19}$$

Para el término $\int\ {}^{i}r_i\ {}^{i}r_i^T dm$ de la ecuación (4.19), se tiene que ${}^{i}r_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix}^T$ de (4.3) entonces el producto de ${}^{i}r_i\ {}^{i}r_i^T$ es igual a:

$${}^{i}r_i\ {}^{i}r_i^T = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i & x_i \\ x_i y_i & y_i^2 & y_i z_i & y_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i^2 & z_i \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Cada uno de los elementos de (4.20) se multiplica por el escalar dm y de acuerdo con las reglas de integración en matrices, cada elemento de la matriz resultante debe de ser integrado.

$$J_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Donde J_i depende de ${}^i r_i$, por lo tanto es independiente del movimiento de los eslabones y es necesario calcularla sólo una vez. Y es llamada matriz de pseudoinercias del eslabón $"i"$.

Con (4.21) se calcula la matriz de pseudoinercias para cada eslabón.

Para el eslabón 1

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Donde la matriz J_1 se considera sólo el elemento J_{44} porque se supone que toda masa está concentrada en el origen $\{1\}$. y se calcula a continuación

$$\int dm = m_1$$

Para el segundo eslabón se tiene

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}L^2 m_2 & 0 & 0 & -\frac{m_2 L}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_2 L}{2} & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

donde

$$\int x_2^2 dm = \frac{m_2}{L} \int_{-L}^{0} x_2^2 dx_2 = \frac{m_2}{L} \frac{x_2^3}{3} \mid_{-L}^{0} = -\frac{m_2}{L} \frac{L^3}{3} = -\frac{m_2 L^2}{3}$$

$$\int x_2 dm = \frac{m_2}{L} \int_{-L}^{0} x_2 dx_2 = \frac{m_2}{L} \frac{x_2^2}{2} \mid_{-L}^{0} = -\frac{m_2}{L} \frac{L^2}{2} = -\frac{m_2 L}{2}$$

$$\int dm = m_2$$

de forma similar para el eslabón 3

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}L^2 m_3 & 0 & 0 & -\frac{m_3 L}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_3 L}{2} & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

así pues, la energía cinética total de manipulador K es:

$$K_i = \sum_{i=1}^{n} K_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}\left(\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{i}\left[\left(B_{il}J_iB_{ir}^T\right)\dot{q}_l\dot{q}_r\right]\right) \tag{4.25}$$

Desarrollando la ecuación (4.25), se tiene:

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{i} \operatorname{tr}\left(B_{il}J_iB_{ir}^T\right)\dot{q}_l\dot{q}_r \tag{4.26}$$

Para $n = 1, 2, 3$,$l = 1, 2, 3$ y $r = 1, 2, 3$

$$K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \operatorname{tr}\left(B_{11}J_1B_{11}^T\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + \operatorname{tr}\left(B_{21}J_2B_{21}^T\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + \\ \operatorname{tr}\left(B_{21}J_2B_{22}^T\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \operatorname{tr}\left(B_{22}J_2B_{21}^T\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \\ \operatorname{tr}\left(B_{22}J_2B_{22}^T\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 + \operatorname{tr}\left(B_{31}J_3B_{31}^T\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + \\ \operatorname{tr}\left(B_{31}J_3B_{32}^T\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \operatorname{tr}\left(B_{31}J_3B_{33}^T\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + \\ \operatorname{tr}\left(B_{32}J_3B_{31}^T\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \operatorname{tr}\left(B_{32}J_3B_{32}^T\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 + \\ \operatorname{tr}\left(B_{32}J_3B_{33}^T\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \operatorname{tr}\left(B_{33}J_3B_{31}^T\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + \\ \operatorname{tr}\left(B_{33}J_3B_{32}^T\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + \operatorname{tr}\left(B_{32}J_3B_{33}^T\right)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

4.2.3. Energía potencial

La energía potencial de un eslabón es de P_i y la total del manipulador P. Luego se tiene

$$P_i = -m_i g\ {}^0r_i = -m_i g\left({}^0A_i\ {}^ir_i\right) \tag{4.28}$$

En esta ecuación, g es el vector de gravedad, $g = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z & 0 \end{bmatrix}$ en el sistema de base. El valor especifico del vector g depende de cómo esté contando el robot. Si la base está montada sobre el suelo y el eje Z_0 es perpendicular a éste, $g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9{,}81 & 0 \end{bmatrix}$. La energía potencial total es la suma de las de cada eslabón:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} -m_i g \left({}^0A_i \, {}^ir_i \right) \tag{4.29}$$

La energía potencial de brazo para $n = 3$

$$P = -m_1 g \left({}^0A_1 \, {}^1r_1 \right) - m_2 g \left({}^0A_2 \, {}^2r_2 \right) - m_3 g \left({}^0A_3 \, {}^3r_3 \right) \tag{4.30}$$

4.2.4. El Lagrangiano y el modelo dinámico

Ahora se tienen los datos necesarios para obtener el lagrangiano, L, y la ecuación de Euler-Lagrange. Reemplazando (4.26) y (4.29) en (4.1) se obtiene

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{i} \sum_{r=1}^{i} \operatorname{tr}\left(B_{il} J_i B_{ir}^T \right) \dot{q}_l \dot{q}_r + \sum_{i=1}^{n} -m_i g \left({}^0A_i \, {}^ir_i \right) \tag{4.31}$$

Hay que recordar que si $l > i$, $B_{il} = 0$, de modo que el lagrangiano se simplifica considerablemente. Ahora debemos usar (4.31) en (4.2) recordando las definiciones de las "B". La derivada de L con respecto a $\dot{q}_x$ es

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} \operatorname{tr}\left(B_{ix} J_i B_{ik}^T \right) \dot{q}_x$$

Tomando en cuenta que $B_{il} = 0$ para $l > i$, y derivando con respecto a "t", tendremos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) = \sum_{l=i}^{n} \sum_{k=1}^{l} \operatorname{tr}\left(B_{ik} J_l B_{li}^T \right) \ddot{q}_k$$

El factor $\frac{1}{2}$ desaparece puesto que se tiene que derivar parcialmente con respecto a "i" y a "k". Mediante consideraciones similares para $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x}$ se llega finalmente a la expresión

$$\tau_i = \sum_{l=i}^{n} \left\{ \sum_{p=1}^{l} \operatorname{tr}\left(B_{ip} J_l B_{li}^T\right) \ddot{q}_p + \sum_{p=i}^{l}\sum_{q=1}^{l} \operatorname{tr}\left(B_{ipq} J_l B_{li}^T\right) \dot{q}_p \dot{q}_q - m_l g B_{li}\ {}^l r_l \right\} \tag{4.32}$$

Para el robot de tres grados de libertad se requiere 3 ecuaciones para los momentos; estas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial y en forma mas compacta usando las siguientes definiciones:

$\tau(t)$:Vector de 3×1 los momentos aplicados en las articulaciones

$q(t)$:Vector de 3×1 las variables de articulación; $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$, primera y segunda derivadas de la $q(t)$ con respecto del tiempo.

$M(q)$:Matriz simétrica de 3×3 que depende de las inercias y con elementos dados por

$$M_{ik} = \sum_{j=\text{máx}(i,k)}^{n} \operatorname{tr}\left(B_{jk} J_j B_{ji}^T\right) \tag{4.33}$$

$$i, k = 1, 2, 3, .., n$$

$C(q, \dot{q})$:Vector 3×1 no lineal que depende de la Coriolis y de la fuerza centrífuga, dado por

$$C_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} c_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \tag{4.34}$$

$$i = 1, 2, 3, .., n$$

donde

$$c_{ikm} = \sum_{j=\text{máx}(1,k,m)}^{n} \operatorname{tr}\left(B_{jkm} J_j B_{ji}^T\right) \tag{4.35}$$

$$i, k, m = 1, 2, 3, .., n$$

$G(q)$:Vector 3×1 que se debe a la fuerza de gravedad ejercida sobre el robot. Cada uno de sus elementos está dado por

$$G_i = \sum_{j=i}^{n} - m_j g \ B_{ji} \ {}^j r_j \tag{4.36}$$

$$i = 1, 2, 3, .., n$$

usando estas definiciones en (4.32) la fórmula para τ_i queda reducida a

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\ddot{q}_k + c_i(\dot{q}_k\dot{q}_m) + G_i(q_i) \tag{4.37}$$

o bien

$$\tau_i = M(q)\ddot{q}(t) + C(q, \dot{q}) + G(q) \tag{4.38}$$

desarrollando las ecuación (4.33) se obtiene

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

sustituyendo valores se tiene

$$\begin{aligned} M_{11} \quad = \quad & \frac{1}{6}L^2 \left(m_2 + 4m_3 + 3m_3 \cos\theta_3 + 3m_3 \cos\left(2\theta_2 + \theta_3\right)\right. \\ & \left. + m_2 \cos 2\theta_2 + 3m_3 \cos 2\theta_2 + m_3 \cos\left(2\theta_2 + 2\theta_3\right)\right) \end{aligned}$$

$$M_{12} = M_{13} = M_{21} = M_{31} = 0$$

$$M_{22} = \frac{1}{3}L^2 \left(m_2 + 4m_3 + 3m_3 \cos\theta_3\right)$$

$$M_{23} = M_{32} = \frac{1}{6}L^2 m_3 \left(3\cos\theta_3 + 2\right)$$

$$M_{33} = \frac{1}{3}L^2 m_3$$

por otra parte desarrollando la ecuación (4.34) se tiene

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

donde

$$C_1 = 0$$

$$\begin{aligned} C_2 \quad &= \quad -\frac{1}{6}L^2\left(6m_3 \sin\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + m_2 \sin 2\theta_2 + 6m_3 \sin 2\theta_2 \right. \\ &\quad \left. +2m_3 \sin\left(2\theta_2 + 2\theta_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 \quad &= \quad -\frac{1}{3}L^2 m_3\left(3\sin 2\theta_2 + \sin\left(2\theta_2 + 2\theta_3\right) + 3\sin\left(2\theta_2 + \theta_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ &\quad -\frac{1}{48}L^2 m_3\left(16\sin\left(2\theta_2 + 2\theta_3\right) + 24\sin\theta_3 + 24\sin\left(2\theta_2 + \theta_3\right)\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

Por ultimo desarrollando la ecuación (4.36) se tiene

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}$$

donde

$$G_1 = 0$$

$$G_2 = -\frac{1}{2}Lg\left(m_3 \cos\left(\theta_2 + \theta_3\right) + m_2 \cos\theta_2 + 2m_3 \cos\theta_2\right)$$

$$G_3 = -\frac{1}{2}Lg m_3 \cos\left(\theta_2 + \theta_3\right)$$

4.3. Modelo dinámico propuesto

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton [1], [2], [4], [8], [12]. El inconveniente que presenta este método es que el análisis se complica notablemente cuando aumentan el número de articulaciones del robot. En estos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Estas últimas reciben el nombre de Lagrange, debido a que fue el primero que las dio a conocer en 1788.

El *lagrangiano* de un robot manipulador de n grados de libertad es la diferencia entre su energía cinética K y su energía potencial V.

$$L = K - V \tag{4.39}$$

El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de manipuladores se reduce a cuatro etapas:

1. Cálculo de la energía cinética:K_i.

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} J_i \sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i^2 \tag{4.40}$$

2. Cálculo de la energía potencial:V.

$$V_i = m_i g h_i \tag{4.41}$$

3. Cálculo del lagrangiano:L.

$$L = \sum_{i=1}^{n} (K_i - V_i) \tag{4.42}$$

4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \tag{4.43}$$

El brazo manipulador está formado por 3 eslabones rígidos de longitudes ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 y las masas m_1, m_2 y m_3 respectivamente. La unión 1 es prismática y las 2 y 3 son rotacionales, el desplazamiento del robot depende de los ejes x, y y z como se muestran en la siguientes figuras (4.1), (4.2).

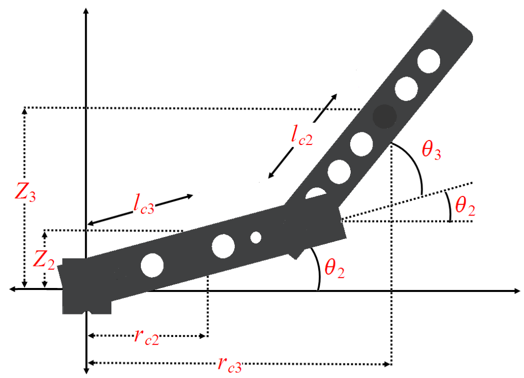


Figura 4.1: Vista lateral del brazo articulado propuesto

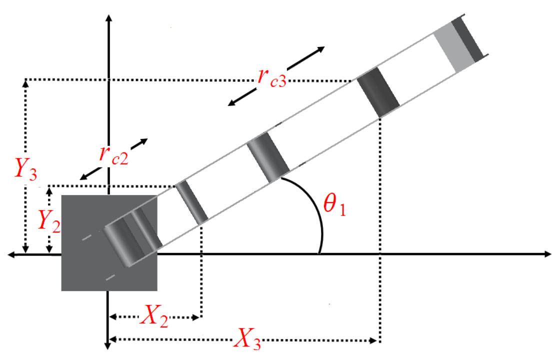


Figura 4.2: Vista superior del brazo articulado propuesto

La energía cinética K para este brazo manipulador puede descomponerse en la suma de tres partes $K = K_1 + K_2 + K_3$ donde K_1,K_2,K_3 son las energías cinéticas asociadas a las masas m_1, m_2 y m_3 respectivamente. A continuación se obtienen dichas expresiones.

Como el primer eslabón solamente rota alrededor del eje z sólo cuenta con energía cinética rotacional

$$K_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \tag{4.44}$$

Para el segundo eslabón, la energía cinética correspondiente al movimiento se obtiene como

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left[\ell_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 + \ell_{c2}^2 C_2^2 \dot{\theta}_1^2 \right] + \frac{1}{2} J_2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \ell_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_{c2}^2 C_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \ell_{c2}^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_{c2}^2 C_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Finalmente, la energía cinética correspondiente al movimiento del eslabón 3 se obtiene como

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{1}{2} m v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \\ &= \frac{1}{2} m_3 \left[\begin{array}{c} \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \ell_2^2 C_2^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 \ell_2 \ell_{c3} C_3 \dot{\theta}_2 \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \right) \\ + 2 \ell_2 \ell_{c3} C_2 C_{23} \dot{\theta}_1^2 + \ell_{c3}^2 \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \right)^2 + \ell_{c3}^2 C_{23}^2 \dot{\theta}_1^2 \end{array} \right] + \frac{1}{2} J_3 \left(\dot{\theta}_1^2 + \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_3 \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \ell_2^2 C_2^2 \dot{\theta}_1^2 + m_3 \ell_2 \ell_{c3} C_3 \dot{\theta}_2 \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \right) \\ &\quad + m_3 \ell_2 \ell_{c3} C_2 C_{23} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \ell_{c3}^2 \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \ell_{c3}^2 C_{23}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \left(\dot{\theta}_1^2 + \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \right)^2 \right) \\ &= m_3 \ell_2 \ell_{c3} C_2 C_{23} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \ell_2^2 C_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \ell_{c3}^2 C_{23}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \ell_{c3}^2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + m_3 \ell_{c3}^2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_3 \ell_{c3}^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 \ell_2 \ell_{c3} C_3 \dot{\theta}_2^2 + m_3 \ell_2 \ell_{c3} C_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_2^2 + J_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Por lo tanto sumando (4.44), (4.45) y (4.46) se obtiene la energía cinética correspondiente al sistema

$$\sum K = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_{c2}^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_{c2}^2C_2^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \\ \frac{1}{2}m_3\ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\ell_2^2C_2^2\dot{\theta}_1^2 + m_3\ell_2\ell_{c3}C_3\dot{\theta}_2^2 + m_3\ell_2\ell_{c3}C_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ +m_3\ell_2\ell_{c3}C_2C_{23}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_3\ell_{c3}^2\dot{\theta}_2^2 + m_3\ell_{c3}^2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{1}{2}m_3\ell_{c3}^2\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_3\ell_{c3}^2C_{23}^2\dot{\theta}_1^2 \\ +\frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_2^2 + J_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 \end{array}\right] \tag{4.47}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(J_1 + J_2 + J_3 + m_2\ell_{c2}^2C_2^2 + m_3\ell_2^2C_2^2 + m_3\ell_{c3}^2C_{23}^2 + 2m_3\ell_2\ell_{c3}C_2C_{23}\right)\dot{\theta}_1^2 \\ \frac{1}{2}\left(m_2\ell_{c2}^2 + m_3\ell_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 + 2m_3\ell_2\ell_{c3}C_3 + J_2 + J_3\right)\dot{\theta}_2^2 \\ +\left(m_3\ell_2\ell_{c3}C_3 + m_3\ell_{c3}^2 + J_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{1}{2}\left(m_3\ell_{c3}^2 + J_3\right)\dot{\theta}_3^2 \end{array}\right] \tag{4.48}$$

La energía potencial V para este brazo manipulador puede descomponerse en la suma de tres partes $\sum V = V_1 + V_2 + V_3$ donde V_1,V_2 y V_3 son las energías potenciales asociadas a las masas m_1, m_2 y m_3 respectivamente. Se tiene entonces que

$$V_1 = m_1 g\ell_{c1} \tag{4.49}$$

$$V_2 = m_2 g\left(\ell_1 + y_2\right) = m_2 g\left(\ell_1 + \ell_{c2}S_2\right) \tag{4.50}$$

$$V_3 = m_3 g\left(\ell_1 + y_3\right) = m_3 g\left(\ell_1 + \ell_2 S_2 + \ell_{c3}S_{23}\right) \tag{4.51}$$

Por lo tanto sumando (4.49), (4.50) y (4.51) se obtiene la energía potencial del sistema está dada por

$$\sum V = \left[m_1 g\ell_{c1} + m_2 g\left(\ell_1 + \ell_{c2}S_2\right) + m_3 g\left(\ell_1 + \ell_2 S_2 + \ell_{c3}S_{23}\right)\right]$$

A partir de la ecuación (4.42) puede obtenerse el lagrangiano

$$L = \sum K - \sum V$$

$$L = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(J_1 + J_2 + J_3 + m_2\ell_{c2}^2C_2^2 + m_3\ell_2^2C_2^2 + m_3\ell_{c3}^2C_{23}^2 + 2m_3\ell_2\ell_{c3}C_2C_{23}\right)\dot{\theta}_1^2 \\ \frac{1}{2}\left(m_2\ell_{c2}^2 + m_3\ell_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 + 2m_3\ell_2\ell_{c3}C_3 + J_2 + J_3\right)\dot{\theta}_2^2 \\ +\left(m_3\ell_2\ell_{c3}C_3 + m_3\ell_{c3}^2 + J_3\right)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{1}{2}\left(m_3\ell_{c3}^2 + J_3\right)\dot{\theta}_3^2 \\ -\left[m_1 g\ell_{c1} + m_2 g\left(\ell_1 + \ell_{c2}S_2\right) + m_3 g\left(\ell_1 + \ell_2 S_2 + \ell_{c3}S_{23}\right)\right] \end{array}\right] \tag{4.52}$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan el robot manipulador se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange (4.43).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau \qquad\qquad i = 1, 2, 3.$$

Para τ_1

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \qquad (4.53)\\ &= \left((J_1 + J_2 + J_3) + m_2\ell_{c2}^2 C_2^2 + m_3\ell_2^2 C_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 C_{23}^2 + 2m_3\ell_2\ell_{c3}C_2C_{23}\right)\ddot{\theta}_1 \\ &\quad -2\left(m_2\ell_{c2}^2 C_2S_2 + m_3\ell_2^2 C_2S_2 + m_3\ell_{c3}^2 C_{23}S_{23} + m_3\ell_2\ell_{c3}S_2C_{23} + m_3\ell_2\ell_{c3}C_2S_{23}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ &\quad -2\left(m_3\ell_{c3}^2 C_{23}S_{23} + m_3\ell_2\ell_{c3}C_2S_{23}\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

Para τ_2

$$\tau_2 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$$\tau_2 = \begin{array}{c} \left(m_2\ell_{c2}^2 + m_3\ell_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 + J_2 + J_3 + 2m_3\ell_2\ell_{c3}C_3\right)\ddot{\theta}_2 \\ -2m_3\ell_2\ell_{c3}S_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \left(m_3\ell_{c3}^2 + J_3 + m_3\ell_2\ell_{c3}C_3\right)\ddot{\theta}_3 \\ -m_3\ell_2\ell_{c3}S_3\dot{\theta}_3^2 + m_2g\ell_{c2}C_2 + m_3g\ell_2C_2 + m_3g\ell_{c3}C_{23} \end{array} \qquad (4.54)$$

Para τ_3

$$\tau_3 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} - \frac{\partial L}{\partial \theta_3}$$

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \left(m_3\ell_{c3}^2 + J_3\right)\ddot{\theta}_3 + \left(m_3\ell_{c3}^2 + J_3 + m_3\ell_2\ell_{c3}C_3\right)\ddot{\theta}_2 \qquad (4.55)\\ &\quad -m_3\ell_2\ell_{c3}S_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + m_3g\ell_{c3}C_{23} \end{aligned}$$

Siendo τ_1, τ_2 y τ_3 los pares de torsión que actúan en las uniones 1,2,3

Considerando las expresiones anteriores la ecuación de movimiento toma la forma

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) = \tau \qquad (4.56)$$

Donde

$M(\theta)\theta$:Matriz de inercia

$C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta}$:Vector de fuerzas de coriolis y centrifuga

$g(\theta)$:Vector de fuerzas gravitatorias

$\tau =$:Vector de par de torsión

Se tiene

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$C(\theta,\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{21} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \end{bmatrix}$$

Donde los componentes de la Matriz de Inercia son

$$M_{11} = J_1 + J_2 + J_3 + m_2\ell_{c2}^2C_2^2 + m_3\ell_2^2C_2^2 + m_3\ell_{c3}^2C_{23}^2 + 2m_3\ell_2\ell_{c3}C_2C_{23}$$

$$M_{12} = 0$$

$$M_{13} = 0$$

$$M_{21} = 0$$

$$M_{22} = m_2\ell_{c2}^2 + m_3\ell_2^2 + m_3\ell_{c3}^2 + J_2 + J_3 + 2m_3\ell_2\ell_{c3}C_3$$

$$M_{23} = m_3\ell_{c3}^2 + J_3 + m_3\ell_2\ell_{c3}C_3$$

$$M_{31} = 0$$

$$M_{32} = m_3\ell_{c3}^2 + J_3 + m_3\ell_2\ell_{c3}C_3$$

$$M_{33} = m_3\ell_{c3}^2 + J_3$$

Para el vector de Fuerzas de Coriolis y Centrifuga

$$C_{11} = 0$$

$$C_{12} = -2\left(m_2\ell_{c2}^2C_2S_2 + m_3\ell_2^2C_2S_2 + m_3\ell_{c3}^2C_{23}S_{23} + m_3\ell_2\ell_{c3}S_2C_{23} + m_3\ell_2\ell_{c3}C_2S_{23}\right)\dot{\theta}_1$$

$$C_{13} = -2\left(m_3\ell_{c3}^2C_{23}S_{23} + m_3\ell_2\ell_{c3}C_2S_{23}\right)\dot{\theta}_1$$

$$C_{21} = 0$$

$$C_{22} = -2m_3\ell_2\ell_{c3}S_3\dot{\theta}_3$$

$$C_{23} = -m_3\ell_2\ell_{c3}S_3\dot{\theta}_3$$

$$C_{31} = 0$$

$$C_{32} = 0$$

$$C_{33} = -m_3\ell_2\ell_{c3}S_3\dot{\theta}_2$$

Para el vector de fuerzas gravitatorias

$$g_{11} = 0$$

$$g_{21} = m_2g\ell_{c2}C_2 + m_3g\ell_2C_2 + m_3g\ell_{c3}C_{23}$$

$$g_{31} = m_3g\ell_{c3}C_{23}$$

4.3.1. Comparación entre el modelo Fú y el modelo propuesto

A continuación se muestra una tabla con el número de operaciones para el modelo dinámico desarrollado por Fú y por otra parte el número de operaciones encontrados en el modelo propuesto.

Tabla 4.1 Comparativa Modelo Dinámico.			
	Formulación Lagrange-Euler	Sumas	Multiplicaciones
Modelo Fú	$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) = \tau$	8125	10 672
Modelo Propuesto	$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) = \tau$	34	128

Estos datos fueron obtenidos de [5] y del presente trabajo

4.3.2. Simulación del modelo dinámico del robot de 3 DOF propuesto

Con las ecuaciones (4.38) y (4.56) obtenidas, se simulan y comparan en Matlab, a continuación se muestra los resultados obtenidos que describen el torque, posición y velocidad para cada uno de los eslabones del robot articulado propuesto en la posición home como se muestra en la figura (4.3), donde la posición home es el origen y marco de referencia para crear trayectorias o para realizar un movimiento desde un origen acotado, por decirlo de otra manera las condiciones iniciales del robot manipulador.

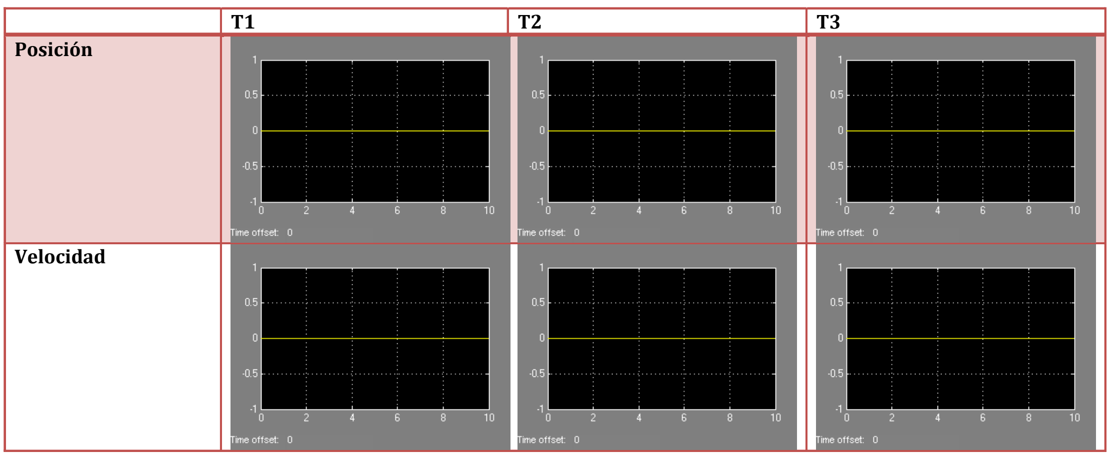


Figura 4.3: Simulación del modelo dinámico en la posición home.

y para la alguna posición deseada, en la figura (4.4) se muestra la posición y velocidad que se describen con los parámentros de entrada los cuales son una señal de tipo senoidal, para los tres eslabones, se puede apreciar que el movimiento en el primer eslabón T1 es muy diferente a los eslabones T2 y T3 debido a que su eje de movimiento no es tan influenciado por la gravedad como en el caso de los otros dos:

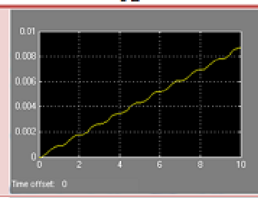
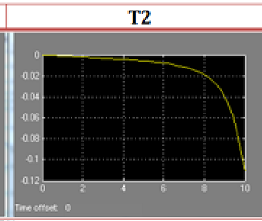
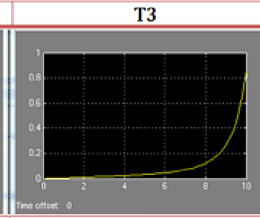
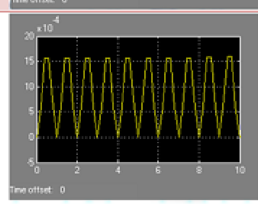
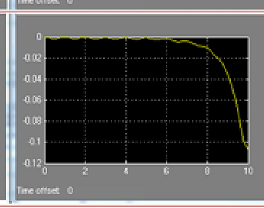
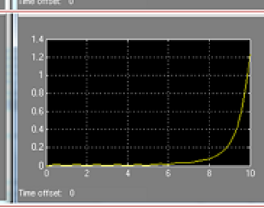
	T1	T2	T3
Posición			
Velocidad			

Figura 4.4: Simulación del modelo dinámico para la posición deseada.

Capítulo 5

Control

5.1. Introducción

Los robots manipuladores industriales pueden clasificarse según su aplicación en dos clases. La primera es aquella en la cual el robot se desplaza libremente en su espacio de trabajo realizando movimientos sin interaccionar con su medio ambiente. Tareas como el pintado y la soldadura pueden ser realizadas por esta clase de manipuladores. En la segunda categoría, se encuentran aquellos robots destinados a interactuar con su medio ambiente, por ejemplo, aplicando una fuerza sobre éste [20], [27], [26], [24]. Esta clase de manipuladores realiza tareas como el pulido y el ensamblado de precisión.

Considérese el modelo dinámico (4.56) del robot articulado propuesto en el presente trabajo, con eslabones rígidos, sin fricción es sus uniones y con actuadores ideales:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) = \tau$$

Los vectores $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta} \in \mathbb{R}^n$ denotan la posición, velocidad y aceleración articular, respectivamente. El problema del control posición de robots manipuladores pueden formularse en los siguientes términos. Considérese la ecuación dinámica (4.56) del robot articulado. Dada una posición articular deseada θ_d, que se supone constante, se trata de determinar una función vectorial τ, de tal forma que las posiciones θ asociadas a las coordenadas articulares del robot lleguen asintóticamente a θ_d.

En términos formales, el *objetivo del control* de posición pura, o simplemente *control de posición*, consiste en determinar τ de tal forma que:

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \theta_d$$

donde $\theta_d \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante.

El cálculo del vector τ involucra generalmente a una función vectorial no lineal de $\theta, \dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$. Esta función se denomina "Función de Control.º simplemente controlador. Es importante recordar que muchos robots manipuladores disponen de sensores de posición y velocidad para cada articulación, por lo que los vectores $\theta, \dot{\theta}$ son medibles y pueden ser empleados en los controladores. Algunos otros vienen equipados sólo con sensores posición articular, por lo que puede ser necesario estimar la velocidad a partir de la medición de posición- ya sea mediante filtrado o por medio de observadores-. Genéricamente, el controlador puede expresarse como:

$$\tau = (\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \theta_d, M(\theta), C(\theta, \dot{\theta}), g(\theta) \tag{5.1}$$

5.2. Control proporcional

El control Proporcional(P) es el controlador de malla cerrada más sencillo que puede emplearse en el control de robots manipuladores. La aplicación conceptual de esta estrategia de control es común en el control de la posición angular de motores de corriente continua. En dicha aplicación, también se le conoce con el nombre de control proporcional con retroalimentación tacométrica. La ecuación del nombre de control proporcional con retroalimentación de velocidad viene dada por:

$$\tau = K_p\widetilde{\theta} \tag{5.2}$$

donde $K_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz definida positiva seleccionada por el diseñador y denominada ganancia de Posición. El vector $\theta_d \in \mathbb{R}^n$ es la posición articular deseada, y el vector

$\widetilde{\theta} = \theta_d - \theta \in \mathbb{R}^n$ se denomina error de posición.

Para el modelo dinámico propuesto y la ley de control (5.2), se ha simulado en Matlab y los resultados se muestran en la figura (5.1) donde $K_p = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$:

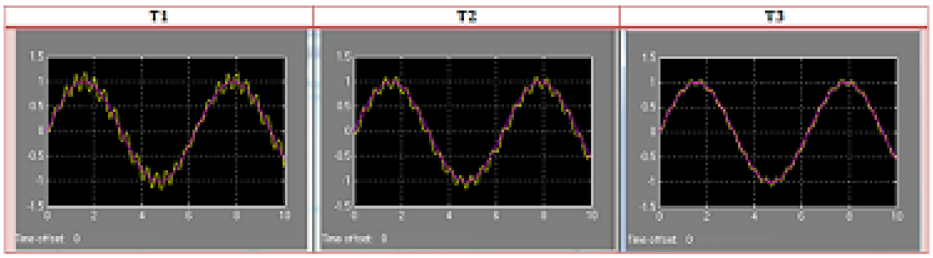


Figura 5.1: Simulación del control proporcional.

5.3. Control proporcional derivativo

El control Proporcional Derivativo (PD) es una extensión inmediata del control proporcional con retroalimentación de velocidad (5.1). Como su nombre lo indica, la función de control está formada no sólo por un término proporcional al error de posición $\widetilde{\theta}$ como el controlador proporcional con retroalimentación de velocidad, sino también por otro término proporcional a su derivada, i.e. al error de velocidad $\dot{\widetilde{\theta}}$ [23]. La ley de control PD viene dada por:

$$\tau = K_p\widetilde{\theta} + K_v\dot{\widetilde{\theta}} \tag{5.3}$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices simétricas definidas positivas seleccionadas por el diseñador y denominadas ganancia de posición y de velocidad.

Para el modelo dinámico propuesto y la ley de control (5.3), se ha simulado en Matlab y los resultados se muestran en la figura (5.2) donde $K_p = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$,$K_v = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$:

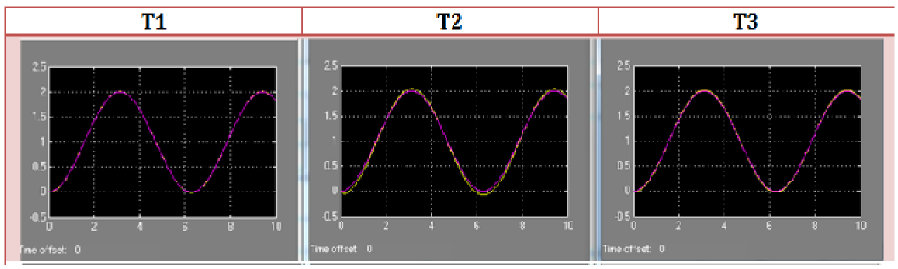


Figura 5.2: Simulación del control PD.

5.4. Diseño del control proporcional derivativo experimental

Para poder probar los algoritmos de control proporcional derivativo [23] del robot de tres grados de libertad propuesto se diseña un control tal que pueda satisfacer la necesidad de manejarlo desde una interfaz gráfica combinada con la exactitud de los algoritmos. La solución que se desarrolla es un diseño de Hardware y Software.

El Hardware está constituido por una etapa de control y una etapa de potencia y para el caso del Software se tiene una interfaz gráfica en la PC la cual ayuda a controlar los motores de cada una de las articulaciones del robot.

Este diseño encontró que el control proporcional derivativo con compensación de gravedad no puede ser aplicado físicamente por el término de gravedad y sólo se experimentó con el control proporcional derivativo.

5.4.1. Diseño de hardware y software

Con fines de validar el Modelo Dinámico propuesto con las leyes de control clásicas el diseño de la experimentación sólo se hizo para el primer grado de libertad del prototipo descrito en el Capítulo 3. Por lo que el material necesario para realizar la experimentación es el siguiente:

- 2 Capacitores cerámicos de 22 pF.
- 1 Crystal de 20 Mhz.
- 5 Capacitores Electrolíticos de 10 μf
- 1 Potenciómetro de precisión.
- 1 Resistencia de 4.7 $KOhms$.
- 1 Resistencia de 1 $KOhm$.
- 1 Conector DB9
- 1 Microcontrolador PIC16F877A
- 1 MAX232
- 1 LCD 16X2

Para la etapa de potencia los componentes principales son los siguientes:

- 1 LM298
- 4 Diodos 1N4007.
- 1 Motoreductor a 24 Volts con un Torque de 12 $Kg \cdot cm$.

Etapa de control

Para conectar la PC a un microcontrolador por el puerto serie se utilizan las señales Tx, Rx y GND. La PC utiliza la norma RS232, por lo que los niveles de tensión de los pines están comprendidos entre +15 y -15 voltios. Los microcontroladores normalmente trabajan con niveles TTL (0-5v). Es necesario por tanto intercalar un circuito que adapte los niveles, uno de estos circuitos, que se utiliza mucho, es el MAX232. El circuito de conexión entre la PC y el mircrontrolador se muestra en la figura (5.3), donde se puede apreciar la conexión básica de comunicación serial y que se establece por medio del circuito integrado MAX232:

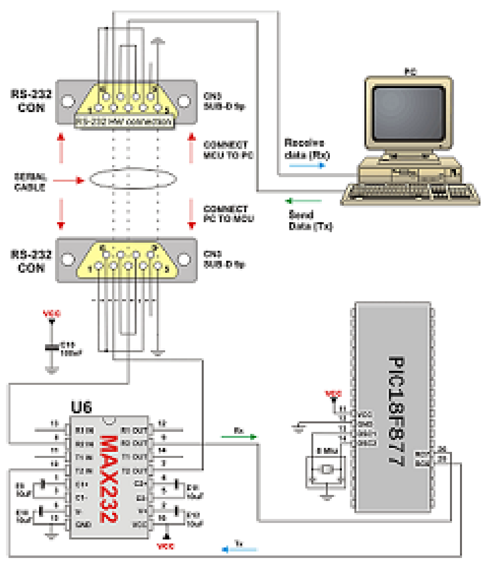


Figura 5.3: Interfaz de comunicación entre la PC y el PIC.

La programación del PIC se puede ver en el Apéndice A y su hoja de especificaciones en el Apéndice D. Por otra parte una vez establecida la comunicación con el Microcontrolador se procede a enviar la posición o trayectoria generada desde la PC.

Esta etapa también comprende una interfaz gráfica en la PC y un algoritmo que está integrado en la parte electrónica del microcontrolador. La interfaz gráfica está desarrollada en Visual Studio 2008, el objetivo de esto es para tener una estructura abierta; en la que la investigación sea beneficiada de tal manera que se pueden integrar otras variables a controlar, ya que utiliza un lenguaje universal de programación como lo es C y un entorno grafico básico para controlar la posición de cada uno de los motores desde la PC, esta interfaz gráfica se muestra en la siguiente figura 5.4:

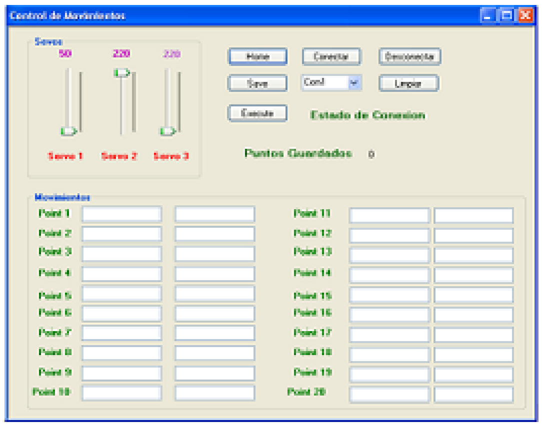


Figura 5.4: Interfaz de control del robot en la PC

El control no sólo envía señales, sino que también recibe la señal de posición de cada uno de los potenciómetros que están en relación con los motores en cada una de las articulaciones y con esto se obtiene la retroalimentación del sistema de control. El código del Software en Visual Studio se puede ver en el Apéndice B.

El microcontrolador se encarga de recibir las señales de mando y procesarlas mediante un algoritmo de control; el cual puede ser desde un control clásico hasta un control novedoso, el lenguaje del microncontrolador está abierto a cualquier cambio y se puede desarrollar un algoritmo de control a la medida. Esta programación se hace con ayuda del software MICROCODE.

Etapa de potencia

La etapa de potencia es alimentada por la etapa de control que está en un rango de 0 a 5 Volts en forma de PWM estas señales son las entradas para el circuito de potencia, para lo cual se emplea el L298 (véase Apéndice C), que es el que alimentan los motores del robot, a continuación se muestra en la figura (5.5) la conexión tradicional para este circuito y que se emplea para este trabajo.

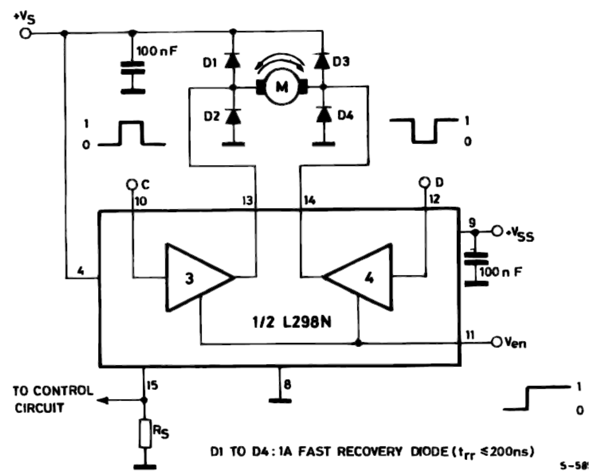


Figura 5.5: Conexión L298.

La conexión de la etapa de potencia con la etapa de control completa la interfaz de control para el robot propuesto. La ventaja de este tipo de desarrollo de interfaces, es que se tiene un sistema totalmente abierto para pruebas de controles experimentales o novedosos.

Simulación del control proporcional derivativo experimental

El circuito diseñado se valida en una plataforma virtual con ayuda de los siguientes programas computacionales:

- Proteus 7.6.
- Eltima Software.
- Control de Motores(Diseñado en Visual Studio 2008).

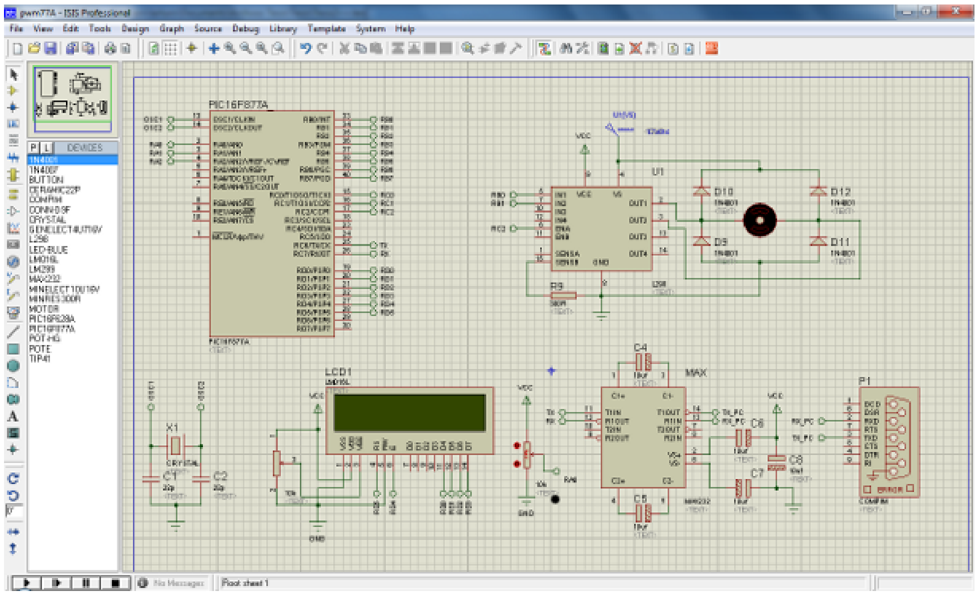


Figura 5.6: Circuito diseñado en Proteus.

Para simular circuito de control, se diseña el circuito en el programa Proteus el cual debe de tener la conexión básica del PIC16F877A, la conexión del MAX232 que será la interfaz de comunicación entre la PC y el PIC para el control del robot. Por otra parte se requiere el circuito integrado L298 el cual es utilizado en la etapa de potencia del circuito, es el que va estar conectado directamente con el motor del robot. EL circuito se muestra en la figura (5.6), por otra parte en el Apéndice E se describe el circuito a detalle.

Para simular la comunicación con el puerto serie se requiere utilizar el software ELTIMA el cual simula en la PC un puerto serial virtual el cual se muestra en la figura (5.7), el cual crea un puerto virtual para comunicar el circuito desarrollado en Proteus con Visual Basic, lo que permite simular todo el sistema sin llevarlo a la construcción física.

EL puerto virtual sirve para establecer la comunicación entre el Software de Control y el circuito electrónico atravez de la comunicación serial.

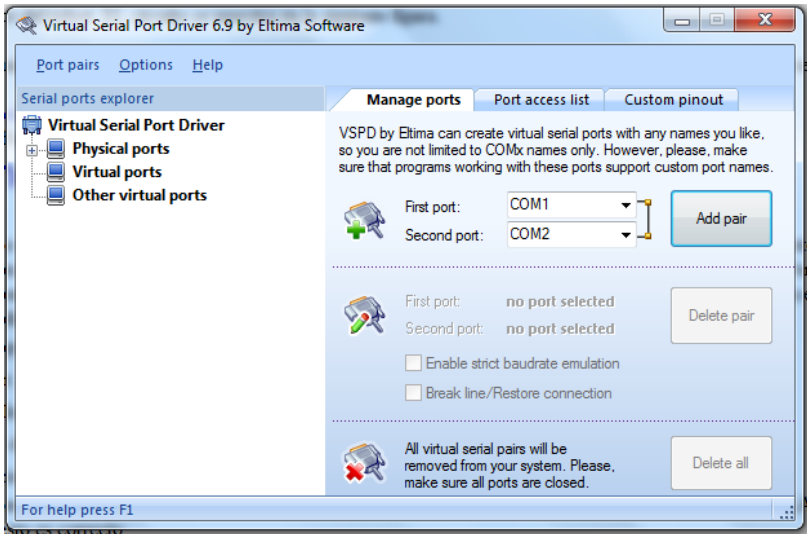


Figura 5.7: Eltima Software.

Experimentación física del control proporcinal derivativo

La experimentación física se realizó con ayuda de un robot articulado de 2 DOF y la construcción del circuito propuesto en la sección anterior a continuación se muestra la figura (5.8) del prototipo. En cual esta constituido por dos eslabones de aluminio y 2 motores eléctricos de corriente continua los cuales estan conectados por medio de una transmisión a los sensores, los cuales son potenciómentros de alta ganancia para obtener la posición de el eslabón.

Los resultados encontrados en el presente trabajo son apoyados con la construcción física del circuito de control y el desarrollo del software de control los cuales interactúan entre si para poder formar el control del primer grado de libertad con el cual se valida el modelo dinámico propuesto con un control clásico que está basado en el modelo dinámico.

La experimentación se realiza por medio de la interfaz de control en la PC en la cual se puede proporcionar la posición deseada del robot. Con esto se proponen tres casos de movimientos del robot los cuales son tomados arbitrariamente y se presentan a continuación:

El primer movimiento que se genera es cuando el robot se encuentra en la posición home y

Figura 5.8: Robot articulado 2 DOF.

se quiere posicionarlo a 90°. Este movimiento es representado con la figura (5.9), en la cual se puede observar la gráfica de movimiento y la señal de control la cual se obtiene directamente del circuito de control y del prototipo. También se puede observar el dezplazamiento del robot y como la señal de control estan activas hasta que llegan al punto deseado

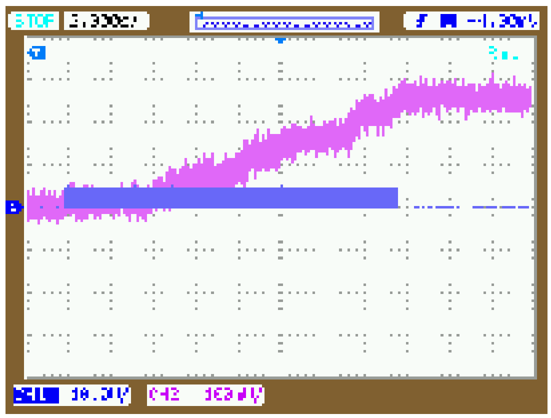


Figura 5.9: Señal de posición a 90° del punto Home.

En la cual se puede apreciar el momento en la que se activa la señal de control y por lo tanto la señal de movimiento comienza a desplazarse hasta llegar a la posición deseada. Una vez que el sistema lleva al robot a la posición deseada la señal de control hace que el sistema permanezca en la posición deseada.

Con efectos de prueba se traslada a el robot a el punto inicial que serían −90° con respecto a la posición Home, este movimiento es representado por la figura (5.10) en la cual también se puede apreciar el funcionamiento de las señales de control y las señales de posición, que describen el movimiento realizado por el manipulador para llegar a la posición.

En las figuras (5.9), (5.10) se puede apreciar las señales de posición las cuales indican el movimiento que es realizado por el robot, por otra parte tenemos las señales de control las cuales indican la velocidad con la que el robot llegara a su posición y las cuales se representan en las siguientes figuras.

En la figura (5.11) se puede apreciar que la señal de control PWM está en un nivel bajo

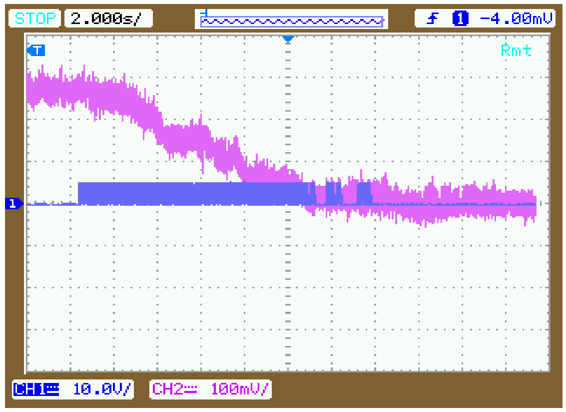


Figura 5.10: Señal de posición de 90° hacia la posición Home.

cuando el robot llega a una posición deseada.

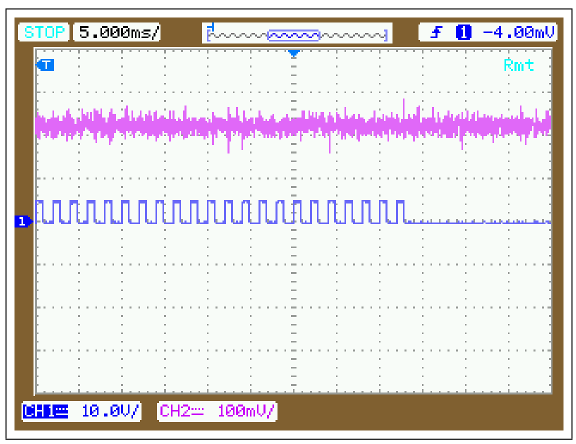


Figura 5.11: Generación de PWM hasta la posición deseada.

Por otra parte también se puede apreciar la diferencia de velocidad esto lo podemos observar en las figuras (5.12), (5.13) , para la figura (5.12) se observa cuando el robot está en una posición lejana a la posición deseada la velocidad con la que se desplaza en mayor que cuando está cercana a la posición deseada. Por lo contrario de la figura (5.13).

Por último se muestra la figura (5.14) de la señal de control y la señal de posición. Cuando

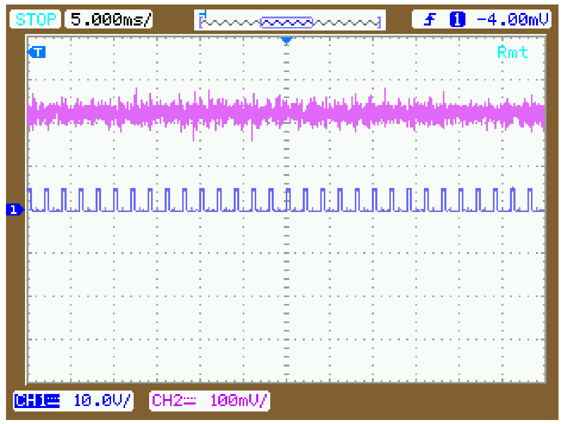


Figura 5.12: PWM generado para una posición lejana a la posición deseada.

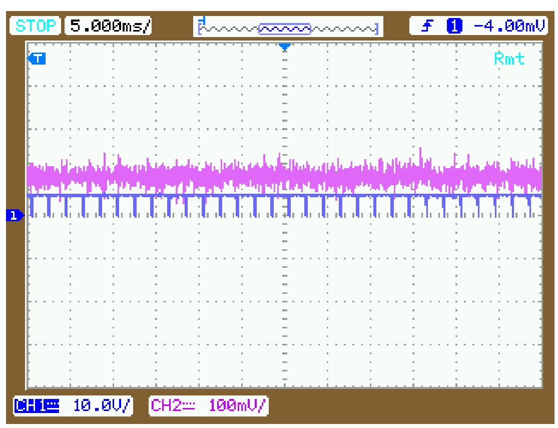


Figura 5.13: PWM generado para la posición cercana a la posición deseada.

el robot ha llegado a un punto deseado en el cual se requiere que la señal de control sea nula y la de posición se conserve. La figura (5.14) muestra la posición la cual se mantiene fija una vez que llega al punto deseado y el estado de la señal de control que se requiere para llegar al punto deseado.

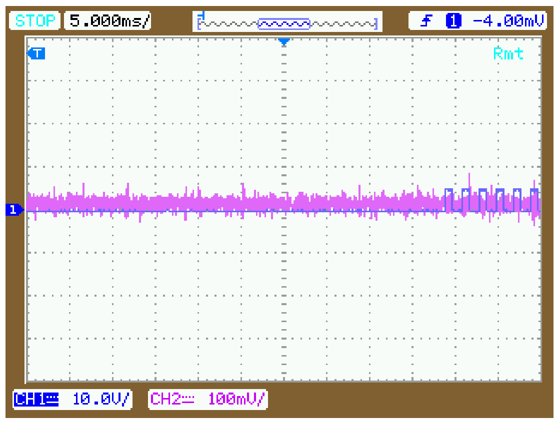


Figura 5.14: Señal de la posición de deseada.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

En el presente trabajo se realizó el desarrollo del modelo dinámico del robot manipulador de tres grados de libertad propuesto, mediante la técnica de Fú de la cual se deriva un artículo el cual tiene como principal aportación las ecuaciones del modelo para su simulación y comparación con otros modelos ya desarrollados. Por otra parte una de las aportaciones más significativas es el desarrollo de una nueva metodología para la obtención del modelo dinámico, la cual está basada en un método geométrico combinado con la ecuaciones de Lagrange.

Este método desarrollado tiene grandes ventajas sobre el modelo de Fú las cuales se mencionan a continuación:

- Menor número de operaciones matemáticas.
- Metodología reducida.
- Al crecer el número de grados de libertad no se hace tan extenso el cálculo.
- Obtención de ecuaciones simplificadas.

Una de las aportaciones es la comprobación del modelo dinámico obtenido mediante una simulación en el Software MATLAB en él se obtuvieron resultados satisfactorios los cuales indican que el modelo dinámico propuesto es correcto.

Con el modelo dinámico obtenido se probaron las funciones de control proporcional, proporcional derivativo y proporcional derivativo con compensación de gravedad, los resultados que se obtuvieron en simulación en MATLAB son satisfactorios. Con esto se puede validar que el modelo dinámico propuesto es correcto ya que este tipo de control está basado en el modelo dinámico del robot.

Por otra parte la experimentación que se realizó está basada en un sólo grado de libertad del prototipo construido; la ley de control que se aplica a el primer grado de libertad del prototipo construido es el control proporcional derivativo con el cual se obtuvieron resultados satisfactorios con los cuales se valida físicamente y en experimentación el modelo dinámico propuesto. Para efectos de experimentación y validación de resultados sólo se muestran experimentalmente los resultados del control proporcional derivativo debido a la captura de señales. El control proporcional derivativo con compensación de gravedad se probó satisfactoriamente pero no se pudieron adquirir las señales de posición y de control.

Por último el diseño de la arquitectura del robot de tres grados de libertad propuesto está abierta para que se continúe desarrollando temas relacionados a robots manipuladores tanto en la parte de diseño mecánico, electrónico y de control. Esto aportación sirve para que se desarrollen o prueben leyes de control tanto clásicas como novedosas.

6.2. Trabajo futuro

Se plantea como futuro trabajo probar todas las funciones de control clásico en el robot manipulador y la implementación de un nuevo control, así como la comparación de distintos tipos de control. En la cuestión al diseño del prototipo como se mencionó anteriormente se obtuvo una arquitectura totalmente abierta en la cual se pueden hacer grandes cambios como:

- Mejorar la estructura mecánica.

- Mejorar el algoritmo de control.
- El diseño electrónico.
- La comunicación entre la interfaz gráfica y el hardware.
- Diseños de nuevos algoritmos de control.
- Generación de trayectorias con el sistema de control de la PC.

Capítulo 7

Apéndices y artículos

7.1. Apéndice A.- Código PIC

Se presenta a continuación el algoritmo desarrollado para la programación del microntrolador, la cual está desarrollada en un lenguaje BASIC el cual puede ser manipulado con el programa MICROCODE Studio.

```
'****************************************************************
'* Name : Control PD para 1 DOF.BAS *
'* Author : Luis Arturo Soriano Avendaño *
'* Notice : Copyright (c) 2011 Luis Arturo Soriano Avendaño *
'* : All Rights Reserved *
'* Date : 29/03/2011 *
'* Version : 1.0 *
'* Notes : *
'* : *
'****************************************************************
include "modedefs.bas"
'Definición de Variables
```

```
DEFINE LCD_DREG PORTD
DEFINE LCD_DBIT 0
DEFINE LCD_RSREG PORTD
DEFINE LCD_RSBIT 5
DEFINE LCD_EREG PORTD
DEFINE LCD_EBIT 4
Define    ADC_BITS 8
Define    ADC_CLOCK 3
Define    ADC_SAMPLEUS 50
ERROR_INICIAL VAR BYTE
ERROR_ACTUAL VAR BYTE
PROPORCIONAL VAR BYTE
DERIVATIVO VAR BYTE
KP VAR BYTE
KD VAR BYTE
b0 var byte
b11 var byte
ERROR_INICIAL=0
KP=100
KD=1
TRISA =%11111111
ADCON1 =%00000000
pause 250
'Inicio del Programa Principal
start:
'Manejo del LCD
lcdout $FE,1,dec3 b11
    lcdout $FE,$C0,dec3 b0
pause 60
```

```
    Adcin     0, b0
SERIN2 portc.7,84,[wait(.A"),dec3 b11]'Comunicacion con la PC
ERROR_ACTUAL=b11-b0
PROPORCIONAL=-(ERROR_ACTUAL*KP)'Control Proporcional
IF b11>b0 THEN'Indica la posición hacia donde debe de ir
high portb.0
low portb.2
HPWM 1, PROPORCIONAL, 500
endif
iF b11<b0 THEN
low portb.0
high portb.2
HPWM 1, PROPORCIONAL, 500
endif
iF b11=b0 THEN'Se detiene el control proporcional
low portb.0
low portb.2
HPWM 1, 0, 0
endif
goto start
end
```

7.2. Apéndice B.- Código Microsoft Visual Studio

El desarrollo en Microsoft Visual Studio 2008 es un ambiente de desarrollo de aplicaciones orientada a objetos la cual está comprendida en dos partes las cuales son el diseñador y la parte de código, en este apartado se presenta la parte de código que corresponde a la parte del diseñador mostrado en el presente texto. Cabe mencionar que este diseño es adecuado para la experimentación de 2 variables, el código está abierto a crecer para poder controlar las variables que se deseen.

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Data;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Windows.Forms;
using System.IO.Ports;
namespace Proyecto
{
public partial class Form1 : Form
{
//Utilizaremos un string como buffer de recepcion
string Recibidos;
public Form1()
{
InitializeComponent();
// Abrir puerto mientras se ejecute la aplicación
if (!SerialPort1.IsOpen)
{
try
{
SerialPort1.Open();
}
catch (System.Exception ex)
{
```

```
MessageBox.Show(ex.ToString());
}
}
////ejecutar la funcion recepcion por disparo del evento 'DataReived'
//SerialPort1.DataReceived += Recepcion;
}
//Al recibir los datos
private void Recepcion(object sender, System.IO.Ports.SerialDataReceivedEventArgs e)
{
//timer2.Enabled = false;
Recibidos = string.Empty;
//Acumular los caracateres recibidos a nuestro buffer string
Recibidos = SerialPort1.ReadExisting();
//Invocar o llamar al proceso de tramas
this.Invoke(new EventHandler(Actualizar));
for (int i = 1; i <= 99999999; i++)
{
i += 1;
}
}
private void timer1_Tick(object sender, EventArgs e)
{
string s;
s = .A";
s += lblValue.Text;
SerialPort1.Write(s);
string s2;
s2 = "B";
s2 += lblValue2.Text;
```

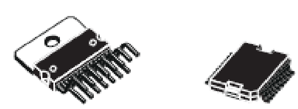
```
SerialPort1.Write(s2);
}
private void trackBar1_ValueChanged(object sender, EventArgs e)
{
lblValue.Text = trackBar1.Value.ToString();
}
private void trackBar2_ValueChanged(object sender, EventArgs e)
{
lblValue2.Text = trackBar2.Value.ToString();
} }}
```

7.3. Apéndice C.- Especificaciones técnicas L298

L298

DUAL FULL-BRIDGE DRIVER

- OPERATING SUPPLY VOLTAGE UP TO 46 V
- TOTAL DC CURRENT UP TO 4 A
- LOW SATURATION VOLTAGE
- OVERTEMPERATURE PROTECTION
- LOGICAL "0" INPUT VOLTAGE UP TO 1.5 V (HIGH NOISE IMMUNITY)



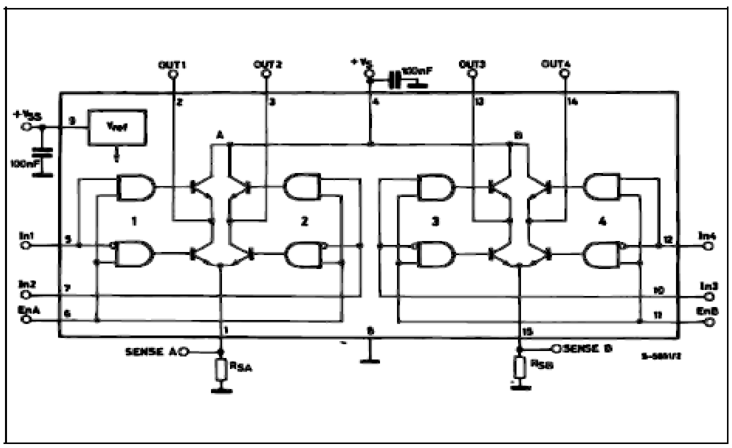
Multiwatt15 PowerSO20

ORDERING NUMBERS : L298N (Multiwatt Vert.)
L298HN (Multiwatt Horiz.)
L298P (PowerSO20)

DESCRIPTION

The L298 is an integrated monolithic circuit in a 15-lead Multiwatt and PowerSO20 packages. It is a high voltage, high current dual full-bridge driver designed to accept standard TTL logic levels and drive inductive loads such as relays, solenoids, DC and stepping motors. Two enable inputs are provided to enable or disable the device independently of the input signals. The emitters of the lower transistors of each bridge are connected together and the corresponding external terminal can be used for the connection of an external sensing resistor. An additional supply input is provided so that the logic works at a lower voltage.

BLOCK DIAGRAM



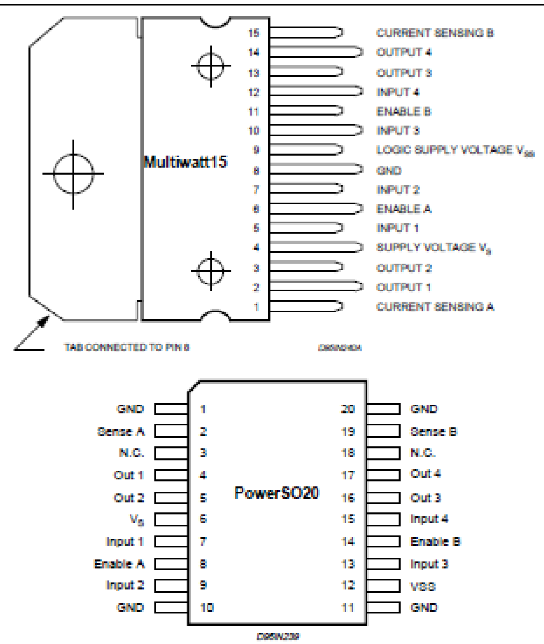
January 2000 1/13

L298

ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

Symbol	Parameter	Value	Unit
V_S	Power Supply	50	V
V_{SS}	Logic Supply Voltage	7	V
V_I, V_{en}	Input and Enable Voltage	–0.3 to 7	V
I_O	Peak Output Current (each Channel) – Non Repetitive (t = 100µs) –Repetitive (80% on –20% off; t_{on} = 10ms) –DC Operation	 3 2.5 2	 A A A
V_{sens}	Sensing Voltage	–1 to 2.3	V
P_{tot}	Total Power Dissipation (T_{case} = 75°C)	25	W
T_{op}	Junction Operating Temperature	–25 to 130	°C
T_{stg}, T_j	Storage and Junction Temperature	–40 to 150	°C

PIN CONNECTIONS (top view)



THERMAL DATA

Symbol	Parameter		PowerSO20	Multiwatt15	Unit
$R_{th\ j\text{-}case}$	Thermal Resistance Junction-case	Max.	–	3	°C/W
$R_{th\ j\text{-}amb}$	Thermal Resistance Junction-ambient	Max.	13 (*)	35	°C/W

(*) Mounted on aluminum substrate

Figure 5 : Sink Current Delay Times vs. Input 0 V Enable Switching.

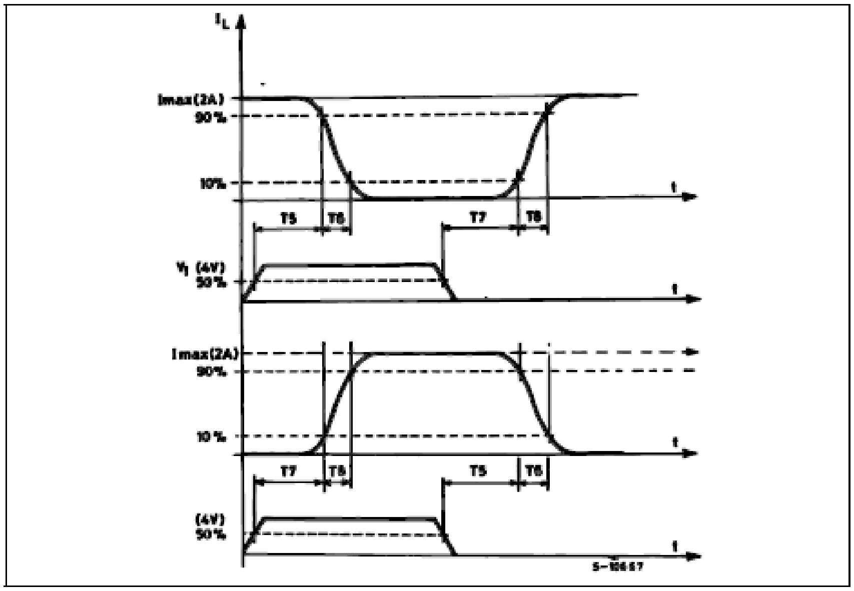
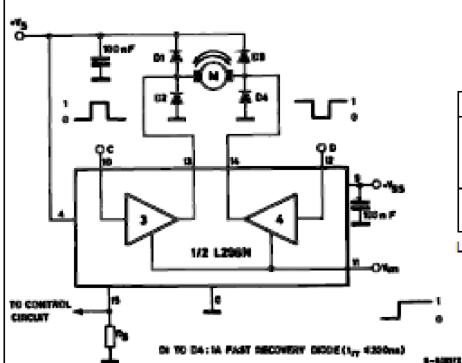


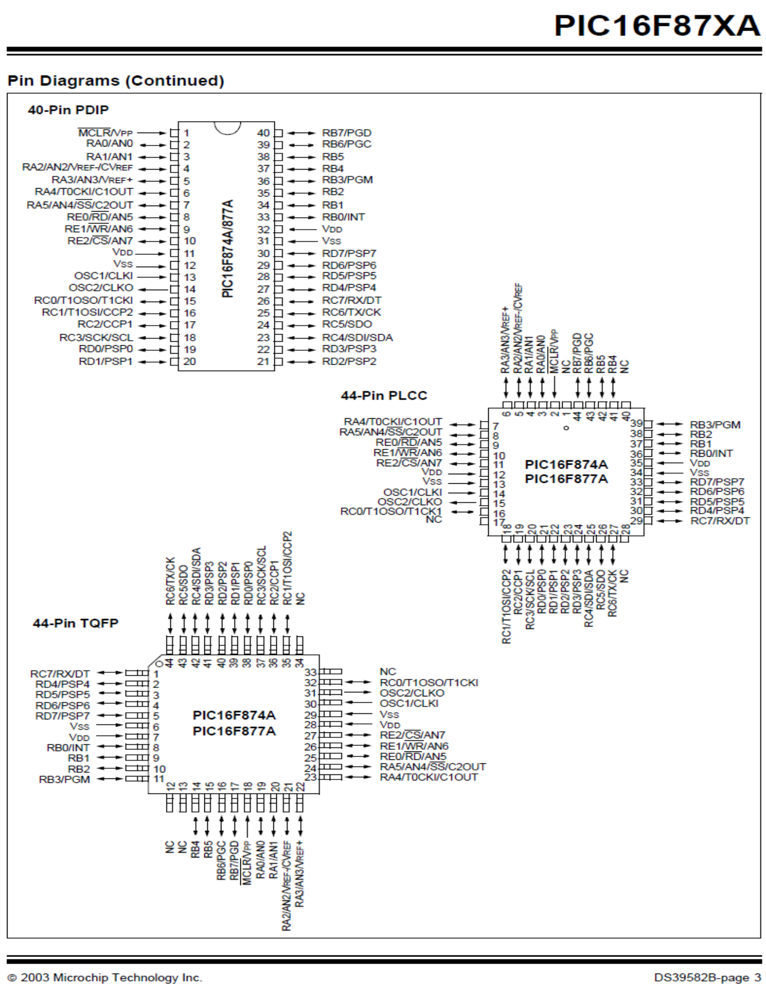
Figure 6 : Bidirectional DC Motor Control.



Inputs		Function
V_{en} = H	C = H ; D = L	Forward
	C = L ; D = H	Reverse
	C = D	Fast Motor Stop
V_{en} = L	C = X ; D = X	Free Running Motor Stop

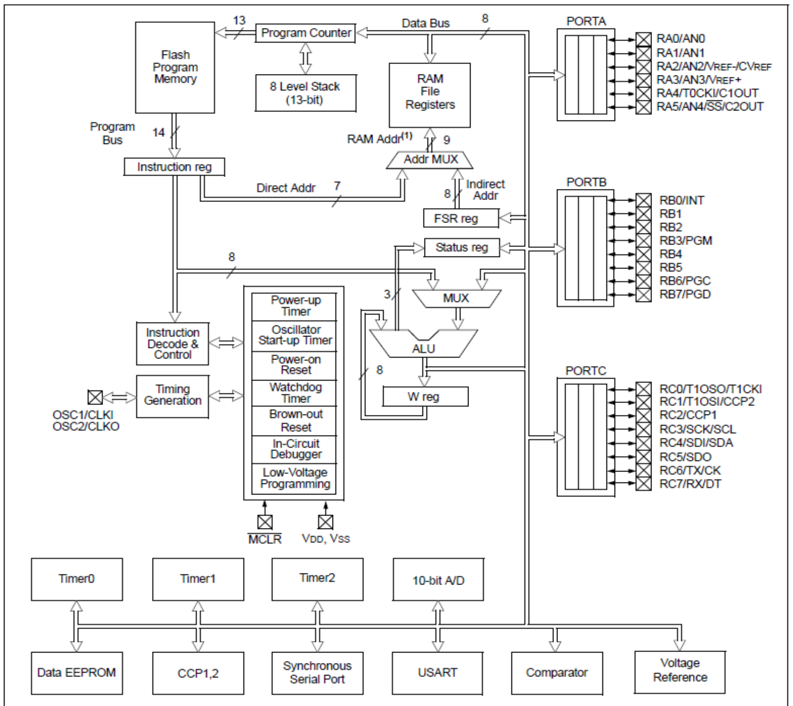
L = Low H = High X = Don't care

7.4. Apéndice D.- Especificaciones técnicas PIC16F877A



PIC16F87XA

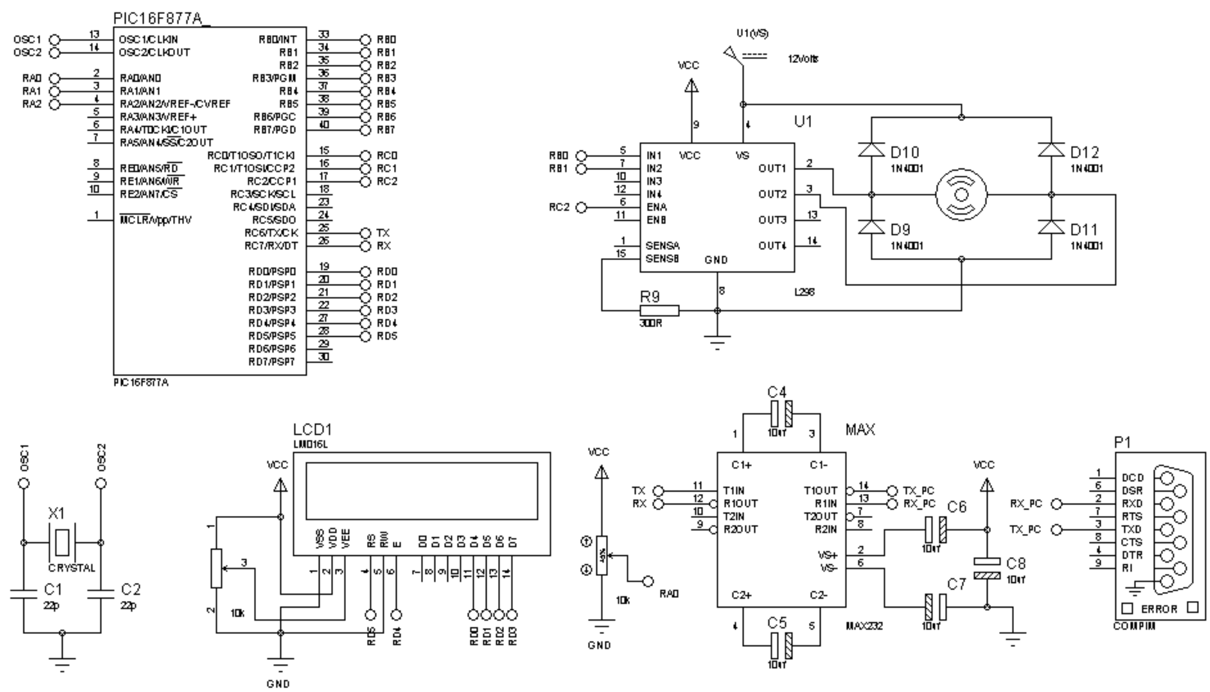
FIGURE 1-1: PIC16F873A/876A BLOCK DIAGRAM



Device	Program Flash	Data Memory	Data EEPROM
PIC16F873A	4K words	192 Bytes	128 Bytes
PIC16F876A	8K words	368 Bytes	256 Bytes

Note 1: Higher order bits are from the Status register.

7.5. Apéndice E.- Diagrama de conexión del circuito electrónico de control



7.6. Artículos

1. José de Jesús Rubio, Luis Arturo Soriano, An asymptotic stable proportional derivative control with sliding mode gravity compensation and with a high gain observer for robotic arms, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, ISSN: 1349-4198, Incluida en el JCR, Vol. 6, No. 11, 4513-4525, 2010.

2. Luis Arturo Soriano, José de Jesús Rubio, Salvador Rodriguez, Cesar Torres, Dynamic model for an articulated manipulator, ICIC Express Letters, Part B: Applications (ICIC-ELB), ISSN: 2185-2766, Incluida en Scopus, Vol. 2, No. 2, 415-420, 2011.

3. José de Jesús Rubio, Cesar Torres, Luis Armando Flores, Luis Arturo Soriano, Structural design of a platform Recents Patenst of Mechanics, en revisión.

4. José de Jesús Rubio, Luis Arturo Soriano, Experimental proportional derivative control for an articulated robotic arm Control Engineering Practice, en redacción.

En la siguientes imagenes se muestran los articulos escritos en durante el desarrollo del presente trabajo:

Publicación en la revista International journal of Innovative Computing Information and Control con título: An asymptotic stable proportional derivative control with sliding mode gravity compensation and with a high gain observer for robotic arms, la cual fue publicada en su Volumen 6 en su número 10 en Octubre de 2010.

International Journal of Innovative Computing, Information and Control
Volume **6**, Number **10**, October **2010**

ICIC International ©2010 ISSN 1349-4198
pp. 4413–4428

AN ASYMPTOTIC STABLE PROPORTIONAL DERIVATIVE CONTROL WITH SLIDING MODE GRAVITY COMPENSATION AND WITH A HIGH GAIN OBSERVER FOR ROBOTIC ARMS

Jose de Jesus Rubio[1], Luis Arturo Soriano[1]

[1]Instituto Politecnico Nacional - ESIME Azcapotzalco
Seccion de Estudios de Posgrado e Investigacion
Av. de las Granjas no.682, Col. Santa Catarina, Mexico D.F., 02250, Mexico
jrubioa@ipn.mx

Received June 2009; revised October 2009

Abstract. *The major contributions of this paper are as follows: 1) it is proposed a proportional derivative control with sliding mode for the gravity compensation for robotic arms. In the proposed control it is not necessary to know the dynamics of the robotic arms. It is proven that the closed loop system of the proportional derivative control with sliding mode gravity compensation applied to robotic arms is asymptotic stable. 2) a high gain observer is used to estimate the joint velocities to avoid the necessity of the velocity measures. It is proven that the high gain observer applied to the robotic arms is uniformly stable. 3) it is proposed a proportional derivative control with sliding mode gravity compensation that uses the high gain observer to estimate the joint velocities for robotic arms. It is proven the closed loop system of the proportional derivative control with sliding mode gravity compensation with the high gain observer applied to robotic arms is asymptotic stable. The simulations give the effectiveness of the suggested control.*

Keywords: Proportional derivative control, Sliding mode control, Asymptotic stability, Gravity compensation, Robotic arm.

1. **Introduction.** It is well known that most of industrial manipulators are equipped with the simplest proportional and derivative (PD) controller. Various modified PD control schemes and their successful experimental tests have been published [19] and [20]. But there exist two main weaknesses in the PD control: a) due to the existence of gravity forces, the PD control cannot guarantee that the steady state error becomes zero, i.e. the error of the PD control applied to robotic arms is not asymptotic stable [6], b) the PD controller requires measurements of both joint position and velocity. It is necessary to implement position and velocity sensors at each joint. The joint position measurement can be obtained by means of the encoder, which gives very accurate measurement, but the joint velocity is usually measured by the velocity tachometer, which is expensive and often contaminated by noise [10].

Since the friction and gravity of robot influence the steady and dynamics properties of the PD control. Global asymptotic stability PD control was realized by pulsing gravity compensation in [9]. If the gravity is unknown, the neural networks can be applied. In [11] the author used the neural networks to approximate the whole nonlinearity of robot dynamics with a neuro feedforward compensator and a PD control, they can guarantee good track performance. The approximation errors of the neural identification for the gravitational force and friction can be eliminated by a discontinuous switching control law [24]. When the parameters in gravitational torque vector are unknown, adaptive PD control with gravity compensation was introduced by [21]. The SP-ID controller can be

Publicación en la revista International journal of Innovative Computing Information and Control con título: Dynamic model for an artivulated manipulator, la cual fue publicada en su Volumen 2 en su número 2 en Abril de 2011.

ICIC Express Letters
Part B: Applications
Volume 2, Number 2, April 2011

ICIC International ©2011 ISSN 2185-2766
pp. 415–420

DYNAMIC MODEL FOR AN ARTICULATED MANIPULATOR

Luis Arturo Soriano, Jose de Jesus Rubio, Salvador Rodriguez and Cesar Torres

Seccion de Estudios de Posgrado e Investigacion
ESIME Azcapotzalco – Instituto Politecnico Nacional
Av. de las Granjas no. 682, Col. Santa Catarina, CP 02250, Mexico D.F., Mexico
larturo.soriano@gmail.com; jrubioa@ipn.mx

Received July 2010; accepted October 2010

Abstract. *The mathematical models of robotic arms describe the relationship between force or torque and motion. The equations of motion are important to consider in the design of robotic arms, in simulation and animation of robotic arm motion and in the design of control algorithms avoiding the necessity to build a prototype of a real robotic arm. The major contribution of this paper is to present an interesting method to obtain the dynamics of an articulated robotic arm.*

Keywords: Dynamic model, Articulated manipulator

1. Introduction. Now, the presition in the homeworks is required in robotics [2] which is applied in the manufacture and the education [12] and in other repetitive homeworks made by humans in the past [2]. These homeworks are frequently with a defined trajectory [5], that is way it is an open research in robotics [4, 5, 10, 13] which present interesting results.

The homeworks in the education [12] and in the medicine [2] are improved using a dynamic model [4, 5, 10, 13]. The mathematical model of robotic arms describes the relationship between force or torque and motion.

There are some books that present dynamic models as are [3, 8, 9, 11, 14], the method of [6] is interesting and is different to the others, however, in [6] they do not apply their method to an articulated robotic arm, in this paper, this method is applied to an articulated robotic arm.

In this paper, the method of [6] is applied to obtain the dynamics of an articulated robotic arm.

2. Dynamic Model. The method is based on the *Lagrangian*

$$L = K - P \tag{1}$$

where K is the total kinetic energy of the system and P is the total potential energy of the system. θ_i is considered for the rotatory joints and d_i for the prismatic joints and τ_i for the applied force moment of the joint i. The equation of Lagrange-Euler is the following:

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \tag{2}$$

To get to the form (2), we needed to make use of the homogeneous transformation matrix.

2.1. Velocity of the joints arm. The formulation of Lagrange-Euler knowledge needs the kinetic energy of the physical system, which in turn requires a knowledge of the velocity of every joint.

Bibliografía

[1] Antonio Barrietos, *Fundamentos de Robótica* McGraw-Hill

[2] Jhon J. Craig *Robótica* Prentice Hall

[3] Dorf, R.C.*Sistemas Modernos de Control.* 2da. Edición Washington Addison Wesley Prentice Hall

[4] Frank L.Lewis, Darren M.Dawson, Chaouki T.Abdallah *Robot Manipulator Control Theory and Practice* Second Edition, MARCEL DEKKER, INC.

[5] K. S. Fu,R. C. González,C. S. G. Lee *Robotica: control, detección, visión e inteligencia* McGraw-Hill

[6] P. Groover, *Robótica Industrial*, Mc Graw Hill, Madrid, España,1989

[7] Kalpakjian; *Manufactura Ingeniería y Tecnología*; México. Prentice may. 2002. 1152 pp.

[8] Rafael Kelly, Victor Santibañez *Control de Movimento de Robots Manipuladores,* Prentice Hall, PEARSON EDUCION S. A. Madrid 2003

[9] Thomas R. Kurfess Ph.D., P.E. *Robotics and Automation Handbook* CRC Press.

[10] J.M. Seling,*Introductory Robotics*, Prentice Hall

[11] B. Siciliano,L. Sciavicco,L. Villani , G, Oriolo ,*Robotics Modelling, Planning and Control*,Springer

[12] Mark W. Spong, M. Vidyasagar *Robot Dynamics and Control* JOHN WILEY & SONS

[13] Anibal Ollero, *Robótica Manipuladores y robots móviles*, Alfaomega

[14] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar *Robot Modeling and Control* First Edition JOHN WILEY & SONS, INC.

[15] Tadej Bajd,*Robotics*, Springer

[16] Richard M. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry *A MathematicRobot Modeling and Control*

[17] Roberto. Canales Ruiz Renato Barrera Rivera *Análisis de Sistemas Dinámicos y Control Automático* Ed. Limusa Mexico

[18] M.-K. Chang and T.-H. Yuan, *Experimental implementations of adaptive self-organizing fuzzy sliding mode control to 3-DOF rehabilitation robot*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol.5, no.10(B), pp.3391-3404, 2009.

[19] Y. Dai, M. Konishi and J. Imai, *Rnn-based cooperative motion control of 2-DOF robot arms*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol.3, no.4, pp.937-952, 2007.

[20] M. M. Fateh and M. R. Soltanpour, *Robust task-space control of robot manipulators under imperfect transformation of control space*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol.5, no.11(A), pp.3949-3960, 2009.

[21] K. Najim, E. Ikonen and E. Gomez-Ramirez, *Trajectory tracking control based on a general geological decision tree controller for robot manipulators*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol.4, no.1, pp.53-62, 2008.

[22] R. Radharamanan and H. E. Jenkins, *Laboratory learning modules on CAD/CAM and robotics engineering education*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol.4, no.2, pp.433-443, 2008.

[23] R. Kelly, *Global Position of Robot Manipulators via PD control plus a Class of Nonlinear Integral Actions*, IEEE Transactions on Automat. Control, vol.43, no.7, pp.934-938, 1998.

[24] R. Kelly, *A Tuning Procedure for Stable PID Control of Robot Manipulators*, Robotica, Vol.13, 141-148, 1995.

[25] Santibanez and R. Kelly, *Global Asymptotic Stability of the PD Control with Computed Feedforward in Closed Loop with Robot Manipulators*, Proc. 14th IFAC World Congress, pp.197-203, 1999.

[26] R. Ortega, M. W. Spong, *Adaptive Motion Control of Rigid Robot: A Tutorial*, Automatica, vol.25, no.6, pp.877-888, 1999.

[27] P. Tomei, *Adaptive PD Controller for Robot Manipulator*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.36, pp.556-570, 1992.