



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**  
**UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"**

**"ANÁLISIS DE CHUMACERAS INFINITAMENTE LARGAS CON  
PUERTOS LINEALES HORIZONTALES DE PRESURIZACIÓN"**

# **T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA MECÁNICA**

## **PRESENTA**

**ING. JOSÉ JUAN SÁNCHEZ REYES**

DIRECTOR DE TESIS

**DR. VALERY ROMANOVICH NOSSOV**

**MÉXICO, D.F.**

**2011**



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14

**ACTA DE REVISIÓN DE TESIS**

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 19:00 horas del día 29 del mes de Noviembre del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis titulada:

**“ANÁLISIS DE CHUMACERAS INFINITAMENTE LARGAS CON PUERTOS  
LINEALES HORIZONTALES DE PRESURIZACIÓN”.**

Presentada por el alumno:

**SÁNCHEZ**

Apellido paterno

**REYES**

Apellido materno

**JOSÉ JUAN**

Nombre(s)

Con registro: 

B	0	9	1	8	4	5
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

DR. VALERY ROMANOVICH NOSSOV

Presidente

DR. FERMÍN ALBERTO VINIEGRA HEBERLEIN

Segundo Vocal

DR. JOSÉ ÁNGEL LODEGARIO ORTEGA HERRERA

Tercer Vocal

DR. JESÚS ALBERTO MEDA CAMPAÑA

Secretario

DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. JAIME ROBLES GARCÍA



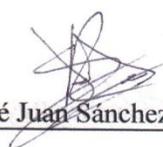


**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, Distrito Federal el día 30 del mes Noviembre del año 2011, el (la) que suscribe José Juan Sánchez Reyes alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica con número de registro B091845, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Zacatenco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Valery Romanovich Nossov y cede los derechos del trabajo intitulado Análisis De Chumaceras Infinitamente Largas Con Puertos Lineales Horizontales De Presurización, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección josejuansare@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

  
\_\_\_\_\_  
José Juan Sánchez Reyes

Nombre y firma

## AGRADECIMIENTOS

A mi familia por el apoyo que me ha brindado toda mi vida, permitiéndome y ayudándome a realizar todas mis metas.

Al Instituto Politécnico Nacional, por todos los conocimientos que me brindo a lo largo de toda mi formación académica.

Al CONACYT por el apoyo económico para que pudiera realizar mis estudios de posgrado

Al Dr. Valery Nossov por recibirme como estudiante y ayudarme en el desarrollo de este trabajo compartiendo su conocimiento y amistad.

Al Dr. Jesús Meda por todo el tiempo y conocimiento que me brindó.

Al Dr. Julio Gómez Mancilla por sus clases poco ortodoxas pero llenas de conocimiento.

Al Dr. Viniegra por enseñarme tantas cosas, siendo uno de mis profesores favoritos y sin duda uno de los mejores que he tenido a lo largo de mis estudios.

A la comisión revisora de la presente tesis al Dr. José Ángel Ortega, Dr. Orlando Susarrey por sus atenciones brindadas.

# “ANÁLISIS DE CHUMACERAS INFINITAMENTE LARGAS CON PUERTOS LINEALES HORIZONTALES DE PRESURIZACIÓN”

## ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS	IV
ÍNDICE DE TABLAS	VI
NOMENCLATURA	VII
RESUMEN	IX
ABSTRACT	XI
OBJETIVO	XIII
JUSTIFICACIÓN	XIV

### Capítulo I

#### Estado del Arte

1. Introducción	2
1.1 Chumaceras definición y clasificación	3
1.1.2 Tipos de chumaceras	3
1.2 Espesor de la película de lubricación	9
1.2.1 Chumaceras con presurización externa	10
1.3 Diseño de chumaceras hidrodinámicas con presurización externa	10
1.3.1 Investigación y trabajos analíticos/numéricos	11
1.3.2 Investigaciones experimentales realizadas por BENTLY-NEVADA	12
1.3.3 Investigaciones y trabajos experimentales realizados en México	13

## Capítulo II

### Modelos de presurización en chumaceras hidrodinámicas

2. Ecuaciones de Navier–Stokes	15
2.1 Ecuación de Reynolds	16
2.1.1 La ecuación de Reynolds en chumaceras de deslizamiento	18
2.2 Tipos de chumaceras de deslizamiento	20
2.2.1 Chumaceras cortas	21
2.2.2 Chumaceras largas	21
2.2.3 Rango de aplicación de chumaceras cortas y largas	22

## Capítulo III

### Campos de presión en chumaceras infinitamente largas con puertos de inyección lineales

3. Campos de presión	24
3.1 Solución del modelo no presurizado	24
3.1.1 Solución del modelo no presurizado basándose en libros especializados	25
3.1.2 Solución del modelo no presurizado basándose en el artículo de Sommerfeld	32
3.2 Solución del modelo presurizado	36
3.2.1 Solución analítica	36
3.3 Campos de presión total de una chumacera larga	41

## Capítulo IV

### Posición de equilibrio en chumaceras infinitamente largas con puertos de inyección lineales

4. Posición de equilibrio	47
4.1 Cálculo analítico de la posición de equilibrio en el caso no presurizado	47
4.2 Cálculo analítico de la posición de equilibrio en el caso con presurización	53
4.3 Cálculo de la posición de equilibrio analizando dos casos especiales	69
4.3.1 Presurización en la parte central derecha de la chumacera	69
4.3.2 Presurización en la parte central izquierda de la chumacera	78
4.4 Cálculo de la posición de equilibrio tomando en cuenta la cavitación en la parte no presurizada	84

4.4.1 Presurización en la parte central derecha de la chumacera	87
4.4.2 Presurización en la parte central izquierda de la chumacera	90
4.5 Gráficas del campo de presión total con $\varphi_{pres}$	93

## **Capítulo V**

### **Conclusiones y trabajos futuros**

5.1 Conclusiones	99
5.2 Trabajos futuros	100

## **Apéndices**

Apéndice A

Apéndice B

## Índice de figuras

Figura 2.1 Vista transversal de una chumacera hibrida	20
Figura 3.1 Campo de presión clásico para chumacera larga con $\varepsilon=0.3$	31
Figura 3.2 Campo de presión clásico para chumacera larga con $\varepsilon=0.5$	31
Figura 3.3 Campo de presión clásico para chumacera larga con $\varepsilon=0.3$	34
Figura 3.4 Campo de presión clásico para chumacera larga con $\varepsilon=0.5$	34
Figura 3.5 Campo de presión clásico para chumacera larga con $\varepsilon=0.5$ , utilizando fórmulas equivalentes	35
Figura 3.5' Superposición de los campos de presión para chumacera larga con $\varepsilon=0.5$ utilizando las fórmulas equivalentes	35
Figura 3.6 Sistema de coordenadas fijo (XYZ) de una chumacera y móvil (X'Y'Z') del muñón	36
Figura 3.7 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3, \bar{q}_{prt} = 10, \varphi=60^{\circ}$	41
Figura 3.8 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3, \bar{q}_{prt} = 50, \varphi=60^{\circ}$	42
Figura 3.9 Campo de presión total con $\varepsilon=0.3, \bar{q}_{prt} = 100, \varphi=60^{\circ}$	42
Figura 3.10 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5, \bar{q}_{prt} = 10, \varphi=60^{\circ}$	42
Figura 3.11 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5, \bar{q}_{prt} = 50, \varphi=60^{\circ}$	43
Figura 3.12 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5, \bar{q}_{prt} = 100, \varphi=60^{\circ}$	43
Figura 3.13 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3, \bar{q}_{prt} = 10, \varphi=60^{\circ}$	44
Figura 3.14 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3, \bar{q}_{prt} = 50, \varphi=60^{\circ}$	44
Figura 3.15 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3, \bar{q}_{prt} = 100, \varphi=60^{\circ}$	44
Figura 3.16 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5, \bar{q}_{prt} = 10, \varphi=60^{\circ}$	45
Figura 3.17 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5, \bar{q}_{prt} = 50, \varphi=60^{\circ}$	45
Figura 3.18 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5, \bar{q}_{prt} = 100, \varphi=60^{\circ}$	45
Figura 4.1 Componentes de la fuerza en la película de aceite en la dirección radial y tangencial	47
Figura 4.2 Chumacera en forma estirada	48
Figura 4.3 Locus de equilibrio utilizando diferentes presurizaciones para $\beta=\pi/2$	73

Figura 4.4 Locus de equilibrio utilizando diferentes presurizaciones para $\beta=\pi/2$	77
Figura 4.5 Locus de equilibrio utilizando diferentes presurizaciones para $\beta=\pi/2$	80
Figura 4.6 Locus de equilibrio utilizando diferentes presurizaciones para $\beta=\pi/2$	83
Figura 4.7 Locus de equilibrio utilizando diferentes presurizaciones para $\beta=\pi/2$	89
Figura 4.8 Locus de equilibrio utilizando diferentes presurizaciones para $\beta=\pi/2$	92
Figura 4.9 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3$ , $\bar{q}_{prt} = 10$ , $\phi_{pres}$	93
Figura 4.10 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3$ , $\bar{q}_{prt} = 50$ , $\phi_{pres}$	93
Figura 4.11 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3$ , $\bar{q}_{prt} = 70$ , $\phi_{pres}$	94
Figura 4.12 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5$ , $\bar{q}_{prt} = 10$ , $\phi_{pres}$	94
Figura 4.13 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5$ , $\bar{q}_{prt} = 50$ , $\phi_{pres}$	95
Figura 4.14 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5$ , $\bar{q}_{prt} = 70$ , $\phi_{pres}$	95
Figura 4.15 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3$ , $\bar{q}_{prt} = 10$ , $\phi_{pres}$	96
Figura 4.16 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3$ , $\bar{q}_{prt} = 50$ , $\phi_{pres}$	96
Figura 4.17 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.3$ , $\bar{q}_{prt} = 100$ , $\phi_{pres}$	96
Figura 4.18 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5$ , $\bar{q}_{prt} = 10$ , $\phi_{pres}$	97
Figura 4.19 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5$ , $\bar{q}_{prt} = 50$ , $\phi_{pres}$	97
Figura 4.20 Campo de presión total con, $\varepsilon=0.5$ , $\bar{q}_{prt} = 100$ , $\phi_{pres}$	97

## Índice de tablas

Tabla 4.1 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$	70
Tabla 4.2 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$	71
Tabla 4.3 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$	71
Tabla 4.4 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$	72
Tabla 4.5 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=\pi/2$	74
Tabla 4.6 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=\pi/2$	75
Tabla 4.7 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=\pi/2$	75
Tabla 4.8 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=\pi/2$	76
Tabla 4.9 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=-\pi/2$	78
Tabla 4.10 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=-\pi/2$	79
Tabla 4.11 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=-\pi/2$	79
Tabla 4.12 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=-\pi/2$	81
Tabla 4.13 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=-\pi/2$	82
Tabla 4.14 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=-\pi/2$	82
Tabla 4.15 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=\pi/2$	87
Tabla 4.16 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=\pi/2$	88
Tabla 4.17 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=\pi/2$	88
Tabla 4.18 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=\pi/2$	88
Tabla 4.19 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=-\pi/2$	90
Tabla 4.20 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=-\pi/2$	91
Tabla 4.21 Ángulo de attitud a diferentes $\bar{q}_{prt}$ y $\beta=-\pi/2$	91

## Nomenclatura

$u, v, w$ : Componentes de la velocidad en la dirección  $x, y, z$

$\rho$ : Densidad

$\mu$ : Viscosidad

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  : Componentes adimensionales de la velocidad en la dirección  $x, y, z$

$p$ : Presión

$U_1, U_2$ : velocidades de la superficie de la chumacera

$\theta$ : Coordenada circunferencial

$z$ : Coordenada axial de la chumacera

$h$ : Espesor adimensional de la película del fluido

$\bar{p}$  : Presión adimensional

$\bar{p}_{pres}$ : Presión adimensional en la película de aceite debida a la inyección de lubricante

$\bar{p}_{som}$ : Presión adimensional de la solución de Sommerfeld

$p_{fict}$ : Presión ficticia

$C_r$ : Claro radial

$R$ : radio de la chumacera

$N$ : Velocidad angular en revoluciones por segundo

$L$ : longitud axial de la chumacera

$\omega$ : Velocidad angular en radianes por segundo

$e$ : Excentricidad dimensional

$\varepsilon$ : Excentricidad adimensional

$\alpha$ : relación radio y excentricidad

$\bar{q}_{prt}$ : Presión adimensional en un puerto respecto a la fuerza ficticia característica

$\varphi$ : Ángulo de equilibrio

$\varphi_{pres}$ : Ángulo de equilibrio en chumacera presurizada

$W$ : Peso total del sistema

$\delta(x)$ : Función Delta de Dirac

$F_{dim}$ : Fuerza ficticia característica

$\Delta F_{pres}$ : Fuerza total de presurización

$\beta$ : Coordenada angular del puerto de inyección

S: Número de Sommerfeld

$\theta_{cav}$ : Posición angular del límite de cavitación

$F_R$ : Componente radial de la fuerza dimensional de presión total

$F_T$ : Componente tangencial de la fuerza dimensional de presión total

F: Resultante de la fuerza adimensional de presión total

$f_R$ : Componente radial de la fuerza adimensional de presión total

$f_T$ : Componente tangencial de la fuerza adimensional de presión total

$f_{R,pres}$ : Componente radial de la fuerza adimensional de presión total, debido a la presurización

$f_{T,pres}$ : Componente tangencial de la fuerza adimensional de presión total debido a la presurización

$f_{x,som}$ : Componente vertical de la fuerza en la película de aceite en la solución de Sommerfeld

$f_{y,som}$ : Componente horizontal de la fuerza en la película de aceite en la solución de Sommerfeld

$f_{x,pres}$ : Componente vertical de la fuerza en la película de aceite debido a la presurización

$f_{y,pres}$ : Componente horizontal de la fuerza en la película de aceite debido a la presurización

## RESUMEN

En el presente trabajo se desarrollará una teoría de chumaceras infinitamente largas con presurización, se retomará la teoría que ya ha sido desarrollada para la chumacera corta en trabajos anteriores. Esta teoría permitirá determinar en forma analítica las principales características rotodinámicas, las cuales son fundamentales para predecir el comportamiento de un sistema rotor-chumacera.

Se muestran los modelos analíticos a los cuales se pudo llegar gracias a la ayuda de la sustitución de Sommerfeld, la cual será parte vital en el desarrollo de este trabajo.

Es importante mencionar que el presente trabajo se centra en el análisis de una chumacera larga con puertos horizontales lineales de presurización; pero se han podido desarrollar modelos matemáticos que permitirán el análisis para puertos arbitrarios de presurización.

En el capítulo I se presenta una introducción sobre los conceptos básicos de chumacera, tipos y clasificación de las mismas; así como los tipos de lubricación que existen.

En el capítulo II se ve a detalle los modelos de presurización en chumaceras hidrodinámicas, se deduce la ecuación de Reynolds a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, tomando en cuenta las suposiciones pertinentes.

En el capítulo III se presentará la solución del modelo de una chumacera larga no presurizada, establecido en el capítulo anterior; así como se presentará el modelo y la solución para una chumacera larga presurizada externamente, obteniendo modelos analíticos. Con estas dos soluciones se obtendrán los campos de presión total.

En el capítulo IV se desarrolla el modelo matemático para poder determinar la posición de equilibrio que tomará el muñón dentro de la chumacera al ser presurizado desde dos puertos de inyección, el primero desde la parte central derecha y el segundo desde la parte central izquierda, este modelo tendrá en consideración dos soluciones posibles: la primera será con las condiciones de Gümbel y la segunda con las condiciones de Swift-Stieber, estas últimas toman en cuenta la cavitación que existe en el caso clásico.

Finalmente en el capítulo V se presentan las graficas de los campos de presión total, una vez obtenido el ángulo de actitud. También se enumeran las conclusiones que se lograron obtener con el desarrollo de este trabajo, así como los posibles trabajos futuros que se espera sean realizados para tener un seguimiento de la teoría que en este trabajo fue desarrollada.

## ABSTRACT

In this work we develop a theory for infinitely long bearings with pressurization, by extending the theory that has been developed for the short bearing in previous works. This theory will determine analytically the main rotodynamic features, which are essential to predict the behavior of rotor-bearing system.

They show analytical models which could be reached with the help of the Sommerfeld substitution, which will be a vital part in developing this work.

It is noteworthy that this work focuses on the analysis of a large bearing linear horizontal ports pressurizing, but have been able to develop mathematical models that allow the analysis to arbitrary ports pressurization.

Chapter I provides an introduction to the basics of bearing types and their classification, as well as the types of lubrication that exist.

Chapter II looks in detail models of hydrodynamic bearings pressurization; it follows the Reynolds' equation from Navier-Stokes equations, taking into account the relevant assumptions.

Chapter III presents the model solution of a non-pressurized bearing long established in the previous chapter, as well as introduce the model and the solution for a long bearing externally pressurized, obtaining analytical models. With these two solutions will yield the total pressure fields.

Chapter IV develops the mathematical model to determine the equilibrium position to take the stump in the bearing to be pressurized from two injection ports, the first since the middle right and the second from the left center, this model will consider two possible solutions: the first will be the conditions of Gumbel and the second with the Swift-Stieber conditions, the latter take into account the cavitations that exists in the classical case.

Finally in Chapter V presents the graphs of the total pressure fields, after obtaining the attitude angle. It also lists the conclusions that were achieved with the development of this work, as well as possible future work expected to be made to keep track of the theory in this paper was developed.

## OBJETIVO

El objetivo de este trabajo es el de presentar la derivación de un modelo matemático el cual permita desarrollar un análisis sobre el comportamiento de una chumacera híbrida infinitamente larga, en la cual se le inyectará lubricante mediante puertos lineales cuya ubicación será horizontal. Para lograr este objetivo se tomará como base la teoría desarrollada para la caracterización de chumaceras cortas con presurización externa.

Con este análisis se pretenden obtener fórmulas que permitan la caracterización de las chumaceras infinitamente largas con presurización externa; tomando en cuenta el espesor de la película de aceite y utilizando la ecuación de Reynolds se obtendrá un campo de presión que incluya presurización y con este podemos determinar las nuevas posiciones de equilibrio.

A su vez, se busca que este trabajo sirva como una herramienta para futuros diseños de chumacera, permitiendo al diseñador tomar decisiones más asertivas al utilizar chumaceras presurizadas.

## JUSTIFICACIÓN

Las chumaceras son un componente de suma importancia en los equipos rotativos, ya que es el apoyo o guía que ubica uno de los componentes de la máquina con respecto a otros y permite la libre rotación, estos soportes están expuestos a sufrir vibraciones, las cuales si son de gran amplitud pueden llegar a provocar daños considerables a los equipos. Se ha comprobado que al utilizar chumaceras que se presurizan externamente es posible modificar las propiedades dinámicas de la película de aceite.

A su vez, al lograr modificar las propiedades dinámicas de la película de aceite, uno obtiene como resultado que las amplitudes de vibraciones y las inestabilidades también cambien y con esto se pueden llegar a disminuir en forma considerable; para poder modificar de manera adecuada estas propiedades se debe estudiar el comportamiento de la película de aceite en el interior de la chumacera.

Hoy en día es difícil encontrar teoría sobre chumaceras infinitamente largas presurizadas, las cuales tiene una gran ventaja al poder modificar propiedades dinámicas, como ya se ha mencionado; es por ello que en esta tesis se desarrollada un análisis de este tipo de chumaceras, el cual arrojará una serie de resultados valiosos para el diseño de equipos.

# Capítulo I

## ESTADO DEL ARTE

# 1 INTRODUCCIÓN

Una chumacera es un apoyo o guía que ubica uno de los componentes de la máquina con respecto a otros de tal manera que el movimiento relativo prescrito puede ocurrir mientras las fuerzas asociadas con el funcionamiento de la máquina se transmiten sin problemas y eficientemente. La capacidad para soportar cargas se debe a la generación de un campo de presión en la película del lubricante debido al movimiento relativo entre el muñón y la chumacera; dicho campo a su vez se genera debido a la formación de una cuña de lubricante, el cual es arrastrado hacia el claro entre dos superficies convergentes. La cuña es generada debido a que el giro del muñón no es concéntrico con respecto a la chumacera, esto es conocido como excentricidad, esta excentricidad va disminuyendo hasta que la carga se equilibra con la presión generada por la parte convergente de la película del lubricante [3], [5].

Las primeras teorías del comportamiento de las chumaceras de película fluida, asumían erróneamente que la carga del eje de rotación únicamente se aplicaba directamente a la parte estacionaria de la chumacera, el papel que tenía el fluido lubricante era solamente para disminuir la fricción. Los primeros estudios de un muñón y chumacera operando bajo condiciones completamente hidrodinámicas fueron realizados por Von Pauli y 1849 y por Hirn en 1854. A finales del siglo XIX Beauchamp Tower desarrolló una serie de experimentos precisos para medir la presión del fluido (lubricante) en diferentes partes de la chumacera. En 1886, la teoría de Osborne Reynolds logró explicar los experimentos realizados por Beauchamp Tower, quien derivó la famosa Ecuación de Reynolds, la cual describe la distribución de presiones del lubricante en la chumacera [26], [27], [28].

Comúnmente se utilizan modelos simplificados, el análisis de la lubricación hidrodinámica se simplifica mucho si la chumacera se asume infinitamente corta o infinitamente larga. La solución de la ecuación de Reynolds es complicada, y en 1904 Arnold Sommerfeld desarrolló una integración directa que permitió el análisis de chumaceras de longitud infinita [2], [9].

## **1.1 Chumaceras definición y clasificación**

Una chumacera es un apoyo o guía que ubica uno de los componentes de la máquina con respecto a otros de tal manera que el movimiento relativo prescrito puede ocurrir mientras las fuerzas asociadas con el funcionamiento de la máquina se transmiten sin problemas y eficientemente.

### **1.1.2 Tipos de chumaceras**

La clasificación de hará de acuerdo con el modo básico de operación, con subdivisiones para dar cuenta de diferentes formas geométricas y condiciones de carga [5].

#### **1.-Chumaceras de fricción en seco**

En las chumaceras de fricción en seco las dos superficies de apoyo se rozan en el movimiento de giro o deslizamiento, o ambos, y se lubrican con la lubricación límite. Ejemplos de chumaceras de fricción seca son ejes sin lubricación hechos de materiales tales como nylon, politetrafluoroetileno, y soportes de carbono y diamante usados en instrumentos.

Las características de transporte de carga y de fricción de este tipo de chumaceras pueden estar relacionadas directamente a las propiedades básicas de contacto de los materiales de la chumacera.

## 2.- Chumaceras impregnadas

En este tipo de chumaceras un material poroso (generalmente metal) se impregna con un lubricante, dando así un efecto de auto-lubricantes. El metal poroso es generalmente hecho por sinterización (por ejemplo, el hierro sinterizado o bronce). Los poros sirven como reservorios para el lubricante. Las características de transporte de carga y de fricción de las chumaceras dependen de las propiedades de la matriz sólida y el lubricante en conjunto con la resistencia sólida. El lubricante puede ser un líquido o una grasa.

En general, la aplicación de las chumaceras impregnadas se limita a bajas velocidades de deslizamiento (normalmente menos de 1 o 1.5 m / s), pero puede soportar un alto valor de presiones (a menudo de 7 a 15 MPa). Una gran ventaja de estas chumaceras es que son simples y baratas, al igual que las chumaceras de fricción en seco, y éstas son con frecuencia utilizadas en baja velocidad o situaciones intermitentes de movimiento, tales como chasis para automóviles, levas y mecanismos oscilantes.

Separadores impregnados para chumaceras de bolas pequeñas como las utilizadas en instrumentos de precisión se utilizan a veces como reservorios de lubricante para los elementos giratorios, cuando una mínima cantidad de lubricante es requerida. En este caso, el material poroso es generalmente un plástico (por ejemplo, el nylon).

Por lo general, es poco probable que la chumacera impregnada funcione realmente de una manera hidrodinámica debido a la pequeña cantidad de lubricante que está presente.

El comportamiento puede ser descrito como la lubricación hidrodinámica parcial, por lo que implica lubricación parcial. Comportamiento hidrodinámico de la chumacera se puede analizar por el supuesto de que una película llena existe en el espacio libre y que flujo de lubricante en el material poroso está cubierto por la ley de Darcy. La fórmula simple de Darcy para chumaceras porosas se refiere el gradiente de presión para el flujo entre un material poroso mientras que omitimos los efectos de la inercia y suponiendo que no hay velocidad relativa de la superficie.

Una solución simultánea de las ecuaciones de Reynolds y la ecuación de flujo para una matriz porosa de los rendimientos de los patrones de flujo, las distribuciones de presión y de la capacidad de carga que pueden ser utilizados para la elaboración de gráficos de diseño. Satisfactorios procedimientos de diseño, sin embargo, por lo general representan una cantidad considerable de información de experimentación y experiencia operativa para complementar el análisis hidrodinámico. Dificultades en la clasificación de las acciones por separado que gobiernan el comportamiento de la chumacera reflejan la aplicación hidrodinámica parcial de operación de muchas chumaceras de esta clase.

### 3.- Chumaceras de película fluida

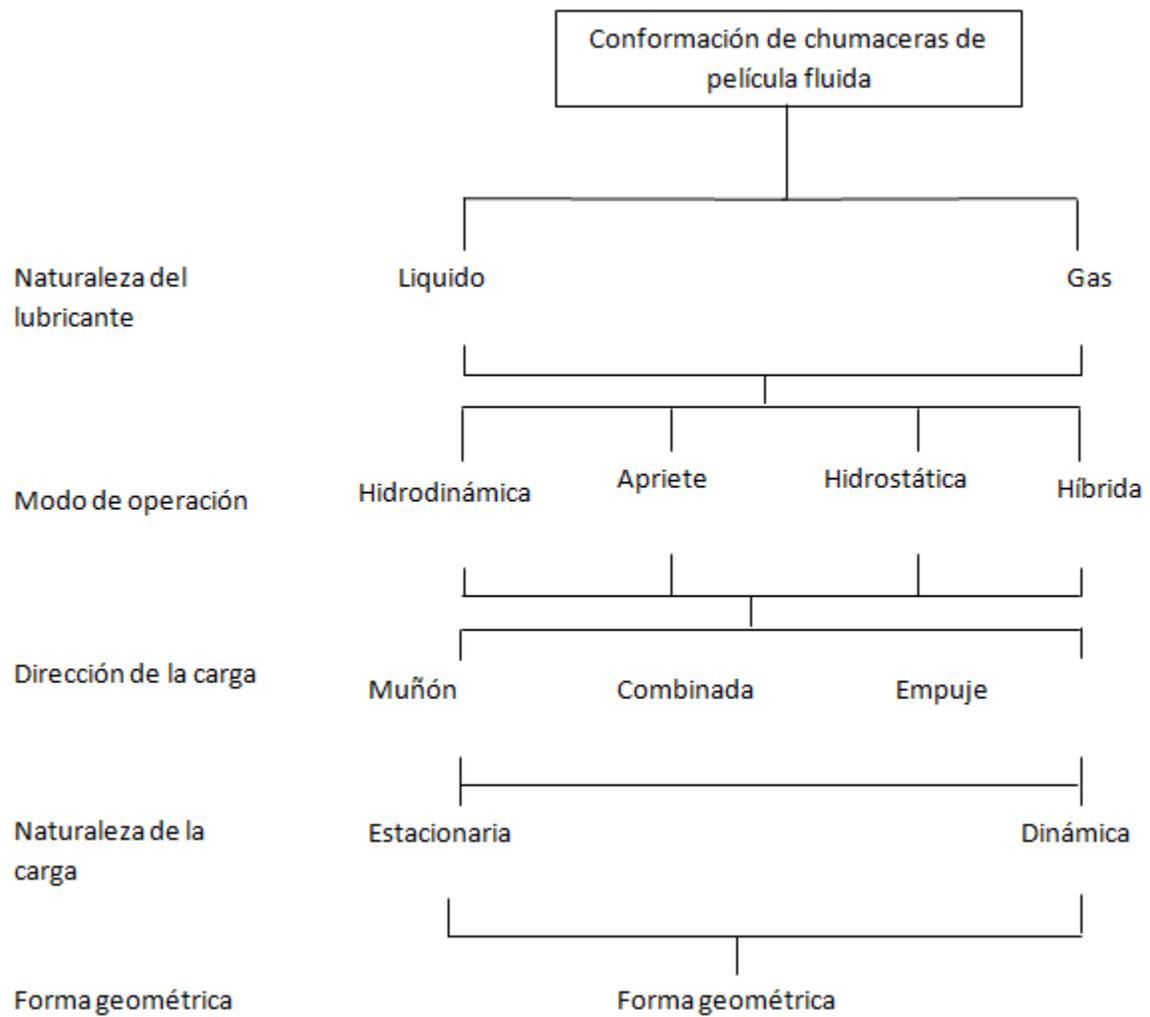
Las superficies opuestas de las chumaceras hidrodinámicas de película de fluido están completamente separadas por una película lubricante. El lubricante puede ser un líquido o un gas, y la capacidad de carga derivada de la presión dentro de la película del lubricante pueden ser generados por el movimiento de los elementos de la máquina (auto actuantes o chumaceras hidrodinámicas) o por la presurización externa (hidrostática) o movimientos hidrodinámicos de presión, o por una combinación de estas acciones. En todos los casos las características de fricción de las chumaceras se rigen por las leyes de flujos viscosos.

Las capacidades de carga son igualmente dictadas por la acción hidrodinámica, pero también hay que tener en cuenta las propiedades de los materiales (por ejemplo, la resistencia a la fatiga o propiedades de baja fricción) a una velocidad extremadamente baja.

Los métodos de alimentación de lubricante para una chumacera de película fluida varían considerablemente. A bajas velocidades y cargas modestas un simple anillo lubricador simple que derrame aceite hasta la chumacera desde un depósito por medio del levantamiento viscoso puede ser suficiente, pero en muchas máquinas modernas el aceite se suministra a la chumacera bajo presión para garantizar un llenado adecuado del espacio de separación. Presurización externa, o hidrostática, chumaceras requieren elaborados sistemas de suministro de lubricante, y el lubricante entra en la chumacera bajo presión del orden de un mega pascal.

Este tipo de chumaceras es particularmente útil a altas cargas y velocidades bajas o cuando la rigidez de la película perpendicular a la superficie de movimiento es trascendente.

Una subdivisión simple de chumaceras de película fluida que da cuenta de la naturaleza del lubricante, el modo de operación, la dirección del movimiento, la naturaleza de la carga, y la forma geométrica del cojinete se muestra a continuación [5].



#### 4.- Chumaceras de elementos giratorios

Los elementos de la máquina en las chumaceras de elementos giratorios están separados por elementos con movimiento giratorio predominante. Los elementos giratorios pueden ser bolas, rodillos o agujas (rodillos con grandes proporciones de anchura y diámetro). Movimiento relativo entre los elementos de la máquina se permite mediante la sustitución de la acción de deslizamiento con un movimiento que se debe principalmente giratorio. Normalmente algunos corrimientos, deslizamientos o giros también se llevan a cabo, y las características de fricción están determinadas por el movimiento relativo, las condiciones de carga y las propiedades del lubricante. Los elementos giratorios pueden ser lubricados por líquidos (aceites lubricantes minerales o sintéticos) o grasas. El lubricante (normalmente una grasa) a veces es sellado dentro del conjunto de chumaceras, o puede aplicarse en una bruma de gotas finas. Hay innumerables tipos de chumaceras de elementos giratorios diseñadas para cumplir las diversas condiciones de funcionamiento encontradas en la industria.

La capacidad de una chumacera para soportar cargas se debe a la generación de un campo de presión en la película del lubricante, debido al movimiento relativo entre el muñón y la chumacera. Este campo de presión se genera ya que a medida que aumenta el número de revoluciones, se forma una cuña de aceite lubricante que produce una película protectora entre la chumacera y el muñón.

## 1.2 Espesor de la película de lubricación

La lubricación de película fluida se divide en dos categorías.

### 1.- Lubricación de película delgada

Es usualmente conocida como un contacto contra forma, principalmente en los rodamientos y engranes.

El espesor de la película en estos contactos es del orden de  $1\mu\text{m}$  o menos, y las condiciones son tales que la presión depende de la viscosidad y la deformación elástica de las superficies de delimitación, ambos deben tenerse en cuenta.

### 2.- Lubricación de película gruesa

Se encuentra en chumaceras con presurización externa, también llamadas chumaceras hidrostáticas, y en las chumaceras de acción automática, llamadas chumaceras hidrodinámicas. De éstas hay dos tipos: chumaceras de deslizamiento y chumaceras de empuje. El espesor de la película en estas chumaceras de contacto conforme es por lo menos en el orden de magnitud mayor que en las chumaceras contra formales. En consecuencia, las presiones que prevalecen son de órdenes de magnitud pequeña, por lo que ni la dependencia de la presión respecto a la viscosidad ni a la deformación elástica de las superficies juega un papel importante. Si, además, el lubricante es linealmente viscoso y la reducción del número de Reynolds es pequeña, la teoría clásica de Reynolds, se aplicará.

Trataremos sobre los procesos isotérmicos solamente. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que las chumaceras no operan en condiciones verdaderamente isotérmicas, y en condiciones casi isotérmicas sólo en casos excepcionales. La disipación viscosa y el consiguiente calentamiento del lubricante siempre están presentes, y el cambio en la viscosidad debe tenerse en cuenta al analizar los problemas de lubricación de película gruesa.

### 1.2.1 Chumaceras con presurización externa

Chumaceras hidrostáticas de espesor no uniforme se discuten por Heller y Shapiro (1968) y por Szeri y Phillios (1974). El efecto de la inercia del líquido es considerado por Szeri y Adams (1978), y los efectos de acoplamiento de la viscosidad no uniforme y la inercia del fluido se puede encontrar en Gourley (1977) [22].

Aquí se deriva la teoría de los cojinetes a presión externa en los supuestos de carga constante, velocidad constante de deslizamiento y espesor uniforme.

### 1.3 Diseño de chumaceras hidrodinámicas con presurización externa

Las primeras teorías del comportamiento de las chumaceras de película fluida, asumían erróneamente que la carga del eje de rotación únicamente se aplicaba directamente a la parte estacionaria de la chumacera, el papel que tenía el fluido lubricante era solamente para disminuir la fricción. A finales del siglo XIX Beauchamp Tower desarrolló una serie de experimentos precisos para medir la presión del fluido (lubricante) en diferentes partes de la chumacera. Él llegó a la siguiente conclusión: la distribución de presiones dentro de la película de aceite ocurre de tal manera que la película de aceite ejerce fuerzas de carga; así fue como se consideró por primera vez las chumaceras de película fluida como un sistema dinámico con características de rigidez y esto se debió a la primer medición de presión de la película de aceite [26] [27].

En 1886, la teoría de Osborne Reynolds logró explicar los experimentos realizados por Beauchamp Tower, quien derivó la famosa Ecuación de Reynolds, la cual describe la distribución de presiones del lubricante en la chumacera [19].

A principios del siglo XX, los cálculos de la presión del aceite en las chumaceras, claramente distinguió entre lubricación parcial y completa (muñón completamente rodeado e inundado por la película del fluido).

En 1919, W. J. Harrison publicó un trabajo de investigación donde predecía que el comportamiento de la chumacera con lubricación completa sería inestable. El análisis de Harrison no fue completo y sólo resulta correcto para la operación bajo cierto tipo de condiciones. Esto indujo ampliamente a que en la práctica se adoptara deliberadamente las chumaceras con lubricación parcial por la creencia de que su comportamiento sería más estable [6], [7].

Esto también llevó a un uso casi universal de las chumaceras con inyección externa a bajas presiones, pues ciertos trabajos experimentales aseguraban que el presurizar una chumacera con lubricación completa lo haría más inestable. Investigaciones más recientes contradicen estas creencias, mostrando que una presión de inyección externa adecuada a una chumacera con lubricación completa es extraordinariamente estable. Con una adecuada presión de inyección quiere decir que el lubricante se fuerza a desplazarse a lo largo de la flecha (flujo axial, paralelo al eje de la flecha), en lugar de que fluya alrededor del árbol (flujo circunferencial).

### **1.3.1 Investigación y trabajos analítico/numérico**

El investigador J. V. Fedor (1906-1961), publicó un par de artículos en el Journal Of Basic Engineering [17], [24] en los cuales modifica la ecuación de la lubricación de Reynolds para incorporar un término de inyección de lubricante, con esto logra desarrollar una metodología que permite el cálculo del campo de presión en una chumacera presurizada en un puerto de inyección cuya ubicación es arbitraria. La desventaja que tiene esta solución es que esta dada en forma de una serie infinita, lo cual implica que para poder calcular los parámetros rotodinámicos restantes es necesario despreciar casi todos los términos de la solución.

Los investigadores Yong Tian y Marc Bonis (1995), presentan un trabajo que consiste en un método cuasi analítico que permite evaluar los coeficientes dinámicos de una chumacera con diversos puertos de inyección [29]. Estos investigadores utilizan la teoría de pequeñas perturbaciones junto con el método del elemento finito para obtener sus resultados.

Los investigadores I. F. Santos y F. Y. Watanabe (2003), publicaron en el Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, un trabajo en el cual estudian chumaceras presurizadas con puertos múltiples de inyección de lubricante, este análisis se realiza numéricamente mediante la dinámica de fluidos computacional y técnicas de control [30].

### **1.3.2 Investigación realizadas por BENTLY-NEVADA**

BENTLY-NEVADA es una compañía dedicada a la fabricación e investigación experimental de equipo rotatorio. Esta compañía ha realizado experimentos con rotores de laboratorio que consisten en presurizar externamente a una chumacera colocando puertos de inyección en forma simétrica [31]; los puertos de inyección eran cuatro, colocado en:  $0$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$  y  $3\pi/3$ . Esto era con el fin de que el muñón se mantuviese lo más cercano del centro geométrico de la chumacera.

En el año 2002 Donald Bently (fundador de la compañía) en colaboración con Hatch y Grisson publicaron el libro Fundamentals of rotating machinery diagnostics [32], el cual hacía énfasis en el diagnóstico de turbo maquinaria.

Entre las conclusiones más destacadas y que aparecen por primera vez en la literatura internacional son:

1. Al presurizar externamente, las rigideces de la chumacera se incrementan notablemente.
2. La presurización puede producir inestabilidad
3. Bajo ciertas condiciones la presurización externa puede modificar las velocidades de resonancia.
4. Si se ajustan adecuadamente los puertos de inyección, se puede modificar la excentricidad de equilibrio.
5. La variación de la presión puede permitir establecer un control adecuado de las rigideces en la chumacera, el control se puede efectuar en uno o más puertos de inyección.

### **1.3.3 Investigación y trabajos experimentales realizados en México**

Diversos centros de investigación e institutos como el CIATEQ, IIEE, IMP y el IPN realizan investigación en el área de la rotodinámica.

Específicamente en SEPI- ESIME Zacatenco se han realizado trabajos tanto teóricos como experimentales [10],[20], [33],[34],[35],[36], [37], [38]; con los cuales se han obtenido resultados muy interesantes, que han sido publicados en revistas nacionales e internacionales. Convirtiendo así al IPN en uno de los líderes nacionales en estos tópicos.

# Capítulo II

MODELOS DE

PRESURIZACIÓN EN

CHUMACERAS

HIDRODINÁMICAS

## 2 ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Son las ecuaciones fundamentales en mecánica de fluidos.

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.3)$$

Donde  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y la viscosidad absoluta del fluido respectivamente,  $p$  es la presión y  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las componentes de la velocidad del fluido en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Este modelo se completa con la ecuación de continuidad para fluido incompresible, la cual es [5].

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes reducidas y adimensionalizadas son:

$$Re^* \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.5)$$

$$Re^* \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.6)$$

Y la ecuación de continuidad adimensional es:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.7)$$

## 2.1 Ecuación De Reynolds

Es una simplificación especial de las ecuaciones de Navier–Stokes en la mecánica de fluidos, la cual permite determinar el campo de presión dentro de una chumacera como función de su movimiento.

La ecuación de Reynolds en presión del lubricante es el extracto matemático de la teoría clásica de lubricación, la cual fue formulada por Osborne Reynolds hace un siglo [8], [19].

La teoría de lubricación de Reynolds se obtiene a partir de las siguientes suposiciones.

- 1.- viscosidad constante, lubricante Newtoniano
- 2.- película delgada
- 3.- inercia despreciable
- 4.- fuerzas de cuerpo despreciables

Tomando en cuenta las suposiciones anteriores; de las ecuaciones de Navier–Stokes se obtendrá:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.8)$$

$$\frac{dp}{dz} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

El modelo campo–fluido se completa con la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

Integrando 2 veces a (2.8) y (2.9) respecto de  $y$ , suponiendo que la película es delgada y que ni la variable  $\frac{\partial p}{\partial x}$  ni  $\frac{\partial p}{\partial z}$  cruzan el fluido, se tendrá:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + Ay + B \quad (2.11)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + Cy + D \quad (2.12)$$

Donde A, B, C y D son constantes, la mayoría funciones de  $x$  y  $z$ . Sus valores deberán ser elegidos tal que  $u$  y  $w$  satisfagan las condiciones de contorno de  $y$ .

Las condiciones de contorno de  $u$  y  $w$  serán:

$$u = U_1 \quad w = 0 \quad \text{con } y = 0$$

$$u = U_2 \quad w = 0 \quad \text{con } y = h$$

Donde  $U_1$  y  $U_2$  representan la velocidad de las superficies de la chumacera.

Sustituyendo las velocidades en ecuaciones (2.11) y (2.2), y evaluando las constantes de integración, se obtendrá la distribución de velocidad.

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) + \left(1 - \frac{y}{h}\right) U_1 + \frac{y}{h} U_2 \quad (2.13)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - yh) \quad (2.14)$$

El gradiente de presión aun no se ha determinado.

Integrando la ecuación de continuidad a lo ancho de la película, resulta.

$$[v]_0^{h(x,t)} = - \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial w}{\partial z} dy \quad (2.15)$$

Ahora bien, se intercambiara integración y diferenciación en la ecuación (2.15); a su vez se sustituirá para  $u$  y  $w$  en la ecuación de distribución de velocidades, se obtendrá:

$$[v]_0^{h(x,t)} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} (y^2 - yh) dy \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} (y^2 - yh) dy \right] - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} \left[ \left(1 - \frac{y}{h}\right) U_1 + \frac{y}{h} U_2 \right] dy + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.16)$$

Evaluando las integrales, se tendrá:

$$[v]_{y=0}^{h(x,t)} = -(V_1 - V_2) = \frac{dh}{dt} \quad (2.17)$$

Donde  $V_1$ - $V_2$  es la velocidad de aproximación de las superficies. Con esto es posible obtener la ecuación de Reynolds para la presión del lubricante.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6h \frac{\partial(U_1 - U_2)}{\partial x} + 12(V_2 - V_1) \quad (2.18)$$

### 2.1.1 La Ecuación De Reynolds En Chumaceras De Deslizamiento

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \frac{\partial}{\partial x} [h(U_1 - U_2)] + 12(V_{2,t} - V_1) \quad (2.19)$$

O bien:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U_0 \frac{\partial h}{\partial x} + 6h \frac{\partial U_0}{\partial x} + 12V_0 \quad (2.20)$$

Para facilitar el cálculo, tenemos

$$V_0 = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{de}{dt} \cos[\Xi - (\psi + \phi)] + e \frac{d(\psi + \phi)}{dt} \text{sen}[\Xi - (\psi + \phi)] \quad (2.21)$$

$$V_0 = \dot{e} \cos\theta + e(\dot{\phi} + \omega_w) \text{sen}\theta \quad (2.22)$$

Y

$$6U_0 \frac{\partial h}{\partial x} + 6h \frac{\partial U_0}{\partial x} = 6 \frac{\partial}{\partial x} \left[ hU_{2,r} \left( 1 + \frac{U_{2,t}}{U_{2,r}} \right) \right] = 6 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ hR\omega \left[ 1 + \frac{C}{R} \left( \frac{\dot{\epsilon}}{R} \text{sen}\theta - \epsilon \frac{\dot{\phi} + \dot{\psi}}{\omega} \text{cos}\theta \right) \right] \right\} \quad (2.23)$$

$$6U_0 \frac{\partial h}{\partial x} + 6h \frac{\partial U_0}{\partial x} \approx 6R\omega \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.24)$$

Esta aproximación será buena del orden  $\frac{C}{R}$ , siempre que  $\epsilon$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  sean todas del orden de  $\omega$  o más pequeñas.

Finalmente la ecuación que rige el comportamiento de una chumacera estacionaria, será:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6R\omega \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \left[ \dot{\epsilon} \text{cos}\theta + e(\dot{\phi} + \omega_w) \text{sen}\theta \right] \quad (2.25)$$

Usando las siguientes variables adimensionales:

$$x = R\theta \quad z = \frac{L}{2} \bar{z} \quad (2.26)$$

$$h = CH = C(1 + \epsilon \text{cos}\theta) \quad p = \mu N \left( \frac{R}{C} \right)^2 \bar{p} \quad (2.27)$$

Donde  $\theta$ ,  $\bar{z}$ ,  $H$  y  $\bar{p}$  son las coordenadas circunferenciales adimensionales, las coordenadas axiales adimensionales, el espesor de la película adimensional y la presión adimensional [2].

Asumiendo que la viscosidad es constante, finalmente se obtendrá la ecuación adimensional que rige el comportamiento de una chumacera estacionaria.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (2.28)$$

## 2.2 Tipos De Chumaceras De Deslizamiento

Una chumacera se puede clasificar de acuerdo a la relación que existe entre su longitud axial y su diámetro, esta relación es fundamental para considerarla como corta, intermedia o larga, ya que esto proporciona simplificaciones en la ecuación de Reynolds que caracteriza a dicha chumacera.

Antes de disponer de las computadoras, las aproximaciones obtenidas de la chumacera corta y la chumacera larga representaban el único método práctico para obtener soluciones a problemas con chumaceras [10], [11].

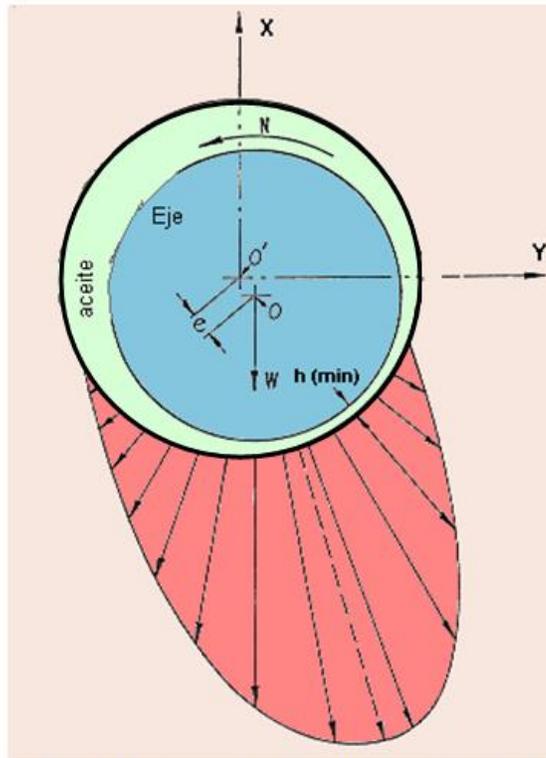


Figura 2.1 Vista transversal de una chumacera hidrodinámica

### 2.2.1 Chumaceras Cortas

Una chumacera será corta si la longitud  $L$  es muy pequeña en comparación con su diámetro  $D$ , o sea que se deberá cumplir  $L \ll D$ , en términos numéricos se considera corta si  $L/D \leq 1/4$ .

La chumacera corta ha sido estudiada y analizada por Dubois y Ocvirk, quienes asumieron que el gradiente de presión alrededor de la chumacera es pequeño y se puede despreciar en comparación con los gradientes de presión en la dirección axial [10], [16], [25].

Recordando la ecuación (2.28) y despreciando el término del gradiente de presión alrededor de la chumacera, se tendrá el modelo clásico de una chumacera corta:

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (2.29)$$

### 2.2.2 Chumaceras Largas

Una chumacera será larga si la longitud axial  $L$  es muy grande en comparación con su diámetro  $D$ , o sea que  $L \gg D$ , en términos numéricos se considera larga si:  $L/D \geq 2$ .

En la chumacera larga se asume que el gradiente de presión en la dirección axial de la chumacera es pequeño y se desprecia en comparación con los gradientes de presión alrededor de la chumacera, esto es porque la distribución de presión no depende de los valores en la frontera [10], [25].

Recordando la ecuación (2.28) y despreciando el término del gradiente de presión en la dirección axial de la chumacera, se tendrá el modelo clásico de una chumacera larga:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = 12\pi \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (2.30)$$

### **2.2.3 Rango de aplicación de chumaceras cortas y largas**

En la literatura se menciona que una chumacera será corta, intermedia o larga dependiendo de la relación entre la longitud y su diámetro. El valor que tiene  $L/D$  para poder determinar si una chumacera es corta o larga tiene un origen físico como ya se mencionó en el punto anterior. Pero es importante resaltar que no existían resultados cuantitativos del por qué un gradiente de presión es más grande que otro. Pero el Dr. V. Nossov, el Dr. J. C. Gómez Mancilla y el Dr. I. Ramírez Vargas [12], [13] logran obtener expresiones analíticas que permiten determinar las condiciones para que una chumacera hidrodinámica se considerara corta, intermedia o larga.

Sus criterios tomados fueron: comparación puntual, comparación de las integrales de los módulos y comparación de las integrales de los cuadrados de los módulos.

Con los resultados obtenidos por los doctores se llega a la conclusión de que poder determinar cuándo una chumacera se considerara corta, intermedia o larga además de los parámetros longitud y diámetro, son necesarios los parámetros:  $e$ , criterio de comparación de los gradientes de presión axial y circunferencial y exactitud de la aproximación.

# Capítulo III

## CAMPOS DE PRESIÓN EN CHUMACERAS INFINITAMENTE LARGAS CON PUERTOS DE INYECCIÓN LINEALES

### 3 CAMPOS DE PRESIÓN

Como ya se mencionó en la introducción, la capacidad de soportar cargas se debe a la generación de un campo de presión en la película de aceite, debido al movimiento relativo entre el muñón y la chumacera. Por ello poder determinar el campo de presión es de suma importancia.

Una vez que se ha logrado establecer el modelo matemático que describe el comportamiento de una chumacera infinitamente larga, al resolverlo se pueden determinar los campos de presión; los cuales permitirán caracterizar a la chumacera, es decir, se encontrara el lugar donde la presión tiene su valor máximo y también permitirá encontrar las regiones donde la película de lubricante puede romperse [17], [23].

La solución del modelo es muy complicada, pues las integrales que aparecen son de difícil solución; sin embargo Arnold Sommerfeld venció estas dificultades introduciendo su sustitución universal, la cual permite determinar el campo de presión en la película de lubricante.

#### 3.1 Solución Del Modelo No Presurizado

En esta sección se resolverá el modelo clásico, es decir, el modelo no presurizado externamente, esta solución es conocida como solución de Sommerfeld.

Dicho modelo se desarrollará y resolverá de 2 formas, la primera será tomando como base la teoría desarrollada en la mayoría de los libros que tratan estos tópicos y la segunda será desarrollada basándose directamente en el artículo de Arnold Sommerfeld.

### 3.1.1 Solución Del Modelo No Presurizado basándose en libros especializados

Recordando la ecuación (2.30), la cual es el modelo clásico de una chumacera larga:

$$\frac{d}{d\theta} \left( h^3 \frac{d\bar{p}}{d\theta} \right) = 12\pi \frac{dH}{d\theta} \quad (3.1)$$

Las integrales que aparecen en la ecuación (3.1) son integrales complicadas, pero como ya se mencionó en la sección anterior Arnold Sommerfeld en 1904 introdujo su sustitución universal, la cual permite determinar el campo de presión en la película del lubricante [1], [2], [4], [24].

La sustitución de Sommerfeld es la siguiente:

$$h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos\theta = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos\gamma} \quad (3.2)$$

De la ecuación anterior es posible obtener las siguientes relaciones:

$$\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{sen}\gamma}{1 - \varepsilon \cos\gamma} \quad (3.3)$$

$$\text{cos}\theta = \frac{\text{cos}\gamma - \varepsilon}{1 - \varepsilon \text{cos}\gamma} \quad (3.4)$$

$$d\theta = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \text{cos}\gamma} d\gamma \quad (3.5)$$

$$\text{sen}\gamma = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{sen}\theta}{1 + \varepsilon \text{cos}\theta} \quad (3.6)$$

$$\text{cos}\gamma = \frac{\varepsilon + \text{cos}\theta}{1 + \varepsilon \text{cos}\theta} \quad (3.7)$$

Integrando por primera vez la ecuación (3.1), se tendrá:

$$\frac{d\bar{p}}{d\theta} = 12\pi \frac{h(\theta') - h_0}{h^3(\theta')} \quad (3.8)$$

Integrando por segunda vez:

$$\bar{p}(\theta) = 12\pi \int_0^\theta \frac{h(\theta') - h_0}{h^3(\theta')} d\theta' + k \quad (3.9)$$

Ahora con ayuda de la sustitución de Sommerfeld, se tendrá:

$$\bar{p}(\theta) = 12 \left\{ \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - h_0 \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right\} + k \quad (3.10)$$

Utilizando las condiciones de contorno de Sommerfeld, las cuales son:

$$\bar{p}(0) = \bar{p}(2\pi) \quad (3.11)$$

$$\bar{p}_0 = \bar{p}(0) \quad (3.12)$$

Finalmente se obtiene la distribución de presión:

$$\bar{p}(2\pi) - \bar{p}(0) = 12\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - h_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right\} + \bar{p}_0 \quad (3.13)$$

Ahora bien, se prosigue a evaluar las constantes  $h_0$  y  $k$

De la ecuación (3.13), se obtiene el valor de  $k$

$$k = \bar{p}_0 \quad (3.14)$$

Para obtener el valor de  $h_0$ , se escribe:

$$H_0 = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}} \quad (3.15)$$

Calculando las integrales, primero se realizará el cálculo de la integral que se encuentra en el dividendo.

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \quad (3.16)$$

Utilizando las ecuaciones, (3.2) y (3.5), se escribe:

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}d\gamma}{1-\varepsilon\cos\gamma}}{\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\gamma}\right)^2} &= \int \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\gamma\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\gamma}\right)^2}d\gamma = \int \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\gamma\left(\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{(1-\varepsilon\cos\gamma)^2}\right)}d\gamma \\ &= \int \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon\cos\gamma)^2}{(1-\varepsilon^2)^2(1-\varepsilon\cos\gamma)}d\gamma = \int \frac{1-\varepsilon\cos\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}d\gamma = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\int(1-\varepsilon\cos\gamma)d\gamma \\ &= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}[\int d\gamma - \int \varepsilon\cos\gamma d\gamma] = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}(\gamma - \varepsilon\sin\gamma) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se prosigue a calcular la integral que se encuentra en el divisor de la ecuación (3.15):

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \quad (3.18)$$

Utilizando las ecuaciones, (3.2) y (3.5), se tendrá:

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}d\gamma}{1-\varepsilon\cos\gamma}}{\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\gamma}\right)^3} &= \int \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\gamma\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\gamma}\right)^3} d\gamma = \int \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\gamma\left(\frac{(1-\varepsilon^2)^3}{(1-\varepsilon\cos\gamma)^3}\right)} d\gamma \\ &= \int \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon\cos\gamma)^3}{(1-\varepsilon^2)^3(1-\varepsilon\cos\gamma)} d\gamma = \int \frac{(1-\varepsilon\cos\gamma)^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} d\gamma = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int (1-\varepsilon\cos\gamma)^2 d\gamma \\ &= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int (1-2\varepsilon\cos\gamma + \varepsilon^2\cos^2\gamma) d\gamma \\ &= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left[ \int d\gamma - \int 2\varepsilon\cos\gamma d\gamma + \int \varepsilon^2\cos^2\gamma d\gamma \right] \\ &= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \gamma - 2\varepsilon\text{sen}\gamma + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{2}\cos\gamma\text{sen}\gamma + \frac{1}{2}\gamma \right) \right) \\ &= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \gamma - 2\varepsilon\text{sen}\gamma + \frac{\varepsilon^2\gamma}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4}\text{sen}2\gamma \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para las condiciones de contorno de Sommerfeld se tendrán los límites siguientes:

$$\theta = 0, 2\pi \text{ que corresponden a } \gamma = 0, 2\pi$$

Sustituyendo dichas condiciones en las ecuaciones (3.17) y (3.19), se obtendrá:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - \varepsilon \operatorname{sen}\gamma)_0^{2\pi} = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} (2\pi - \varepsilon \operatorname{sen}2\pi) \\ &= \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \gamma - 2\varepsilon \operatorname{sen}\gamma + \frac{\varepsilon^2 \gamma}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \operatorname{sen}2\gamma \right)_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( 2\pi - 2\varepsilon \operatorname{sen}2\pi + \frac{\varepsilon^2 2\pi}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \operatorname{sen}4\pi \right) \\ &= \frac{2\pi + \frac{\varepsilon^2 2\pi}{2}}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.20) y (3.21) en (3.15) será posible obtener el valor de  $h_0$ :

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{\frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{2\pi + \frac{\varepsilon^2 2\pi}{2}}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}} = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}(2\pi)}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} \left( 2\pi + \frac{\varepsilon^2 2\pi}{2} \right)} = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}(2\pi)}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} 2\pi \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}} \\ h_0 &= \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{2 + \varepsilon^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.22) y (3.14) en (3.13) se tendrá la distribución de presión:

$$\bar{p}(\theta) = 12\pi \left[ \frac{\gamma - \varepsilon \operatorname{sen} \gamma}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2\left(\gamma - 2\varepsilon \operatorname{sen} \gamma + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \gamma + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \operatorname{sen} 2\gamma\right)}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}(2 + \varepsilon^2)} \right] + \bar{p}_0 \quad (3.23)$$

$$\bar{p}(\theta) = 12\pi \left[ -\frac{\varepsilon(-2 + \varepsilon^2 + \varepsilon \cos \gamma)(\operatorname{sen} \gamma)}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}(2 + \varepsilon^2)} \right] + \bar{p}_0 \quad (3.24)$$

Finalmente, la expresión de la distribución de presión, expresada en términos de  $\gamma$ , se escribe:

$$\bar{p}(\theta) = \frac{12\pi \varepsilon \operatorname{sen} \gamma}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} (2 - \varepsilon^2 - \varepsilon \cos \gamma) + \bar{p}_0 \quad (3.25)$$

Ahora bien, utilizando nuevamente las relaciones encontradas de la sustitución de Sommerfeld, la distribución de presión en términos de  $\Theta$  será:

$$\bar{p}_0 = \frac{12\pi \varepsilon \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left( 2 - \varepsilon^2 - \varepsilon \left( \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \right) + \bar{p}_0 \quad (3.26)$$

$$\bar{p}_{\text{som}}(\theta) = \frac{12\pi \varepsilon \operatorname{sen} \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \bar{p}_0 \quad (3.27)$$

Las siguientes figuras muestran el campo de presión de una chumacera infinitamente larga, para distintos valores de excentricidad

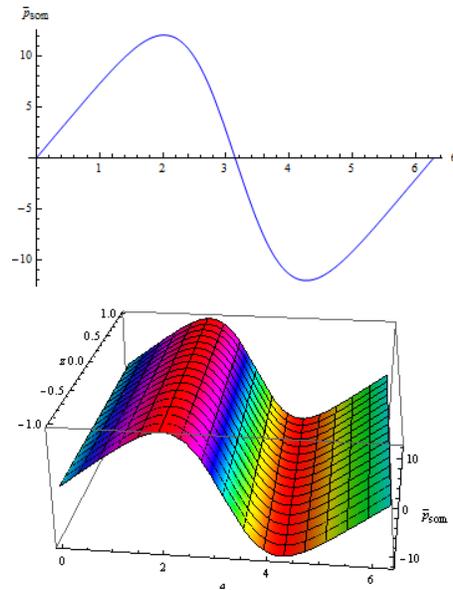


Figura 3.1 Campo de presión clásico para chumacera larga con excentricidad de  $\varepsilon=0.3$

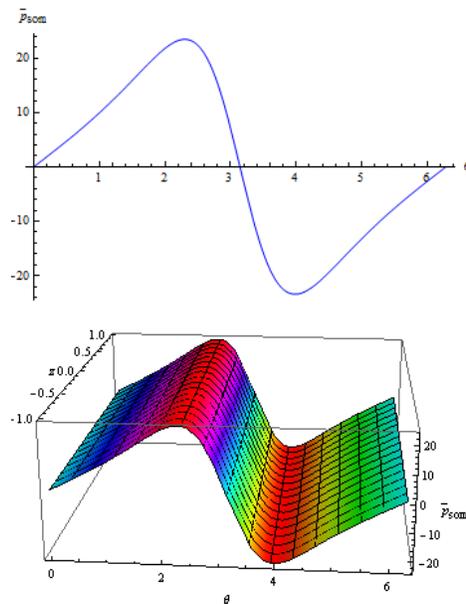


Figura 3.2 Campo de presión clásico para chumacera larga con excentricidad de  $\varepsilon=0.5$

### 3.1.2 Solución Del Modelo No Presurizado basándose en el artículo de Sommerfeld

$$p_0 = p(0) = p(\pi) \quad (3.28)$$

Para calcular p en función de  $\varphi$  se integra la ecuación siguiente [9].

$$\frac{dp}{d\theta} = 6\lambda r U \frac{h-h_0}{h^3} \quad (3.29)$$

Tomando en cuenta, las siguientes relaciones:

$$r + h = e \cos \theta + R \quad \text{o} \quad h = \delta + e \cos \theta \quad (3.30)$$

$$\alpha = \frac{\delta}{e} \quad 1 \leq \alpha \leq \infty \quad (3.31)$$

Se tendrá:

$$p(\theta) - p_0 = \frac{6\lambda r \alpha^2 U}{\delta^2} \left\{ \int_0^\theta \frac{d\theta}{(\alpha + \cos \theta)^2} - \frac{h_0}{e} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(\alpha + \cos \theta)^3} \right\} \quad (3.32)$$

Las integrales serán designadas por  $J_2(\varphi)$  y  $J_3(\varphi)$ , tomando en cuenta la siguiente fórmula integral:

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\alpha + \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \arctg \left( \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.33)$$

Entonces

$$J_2(\theta) = -\frac{\partial}{\partial x} J_1(\theta) \quad J_3(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} J_2(\theta) \quad (3.34)$$

Resolviendo se obtiene:

$$J_2(\theta) = \frac{2\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \arctg(\cdot) - \frac{1}{\alpha^2 - 1} \frac{\sin \theta}{\alpha + \cos \theta} \quad (3.35)$$

$$J_3(\theta) = \frac{2\alpha^2 + 1}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{5}{2}}} \arctg(\cdot) - \frac{3}{2} \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^2} \frac{\sin \theta}{\alpha + \cos \theta} - \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2 - 1} \frac{\sin \theta}{(\alpha + \cos \theta)^2} \quad (3.36)$$

Finalmente la ecuación de la presión estará dada por:

$$p(\theta) = p_0 + \frac{6\lambda y U}{\delta^2} \frac{\alpha^2}{2\alpha^2+1} \frac{\sin \theta}{\alpha+\cos \theta} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha+\cos \theta}\right) \quad (3.37)$$

O bien con U expresada en términos de P y  $\alpha$ , se tendrá:

$$p(\theta) = p_0 + \frac{P}{2\pi r} \sqrt{\alpha^2 - 1} \frac{\sin \theta}{\alpha+\cos \theta} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha+\cos \theta}\right) \quad (3.38)$$

Se sabe que:

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.39)$$

Sustituyendo (3.39), resulta:

$$p(\theta) = p_0 + \frac{P}{2\pi r} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} \frac{\sin \theta}{\frac{1}{\varepsilon}+\cos \theta} \left(1 + \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon}+\cos \theta}\right) \quad (3.40)$$

Las siguientes figuras muestran el campo de presión de una chumacera infinitamente larga, para distintos valores de excentricidad

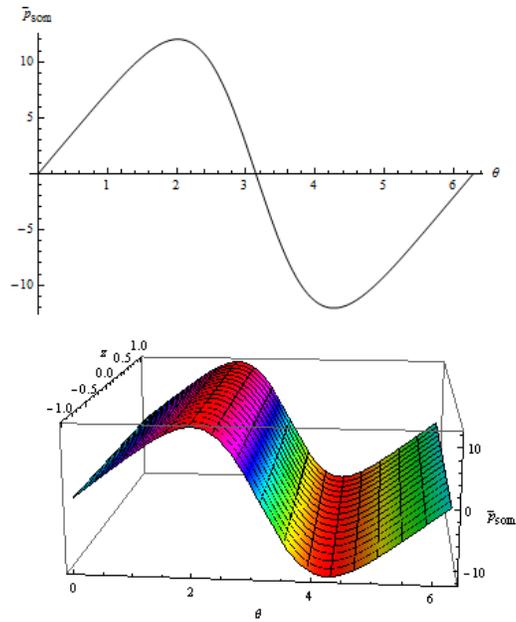


Figura 3.3 Campo de presión clásico para chumacera larga con excentricidad de  $\varepsilon=0.3$

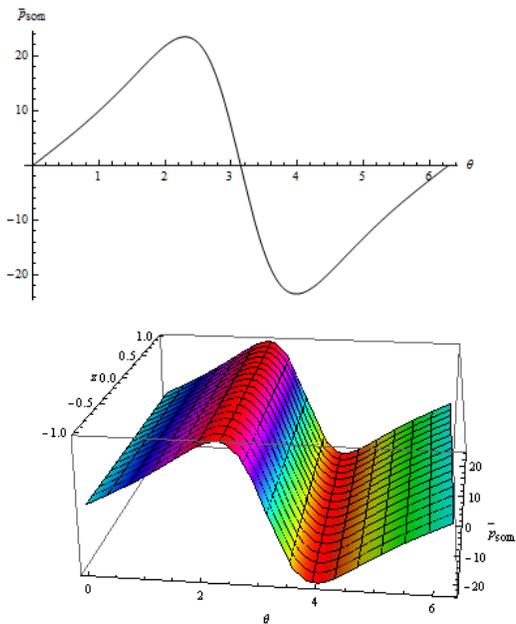


Figura 3.4 Campo de presión clásico para chumacera larga con excentricidad de  $\varepsilon=0.5$

Con esto es posible observar que las fórmulas son equivalentes.

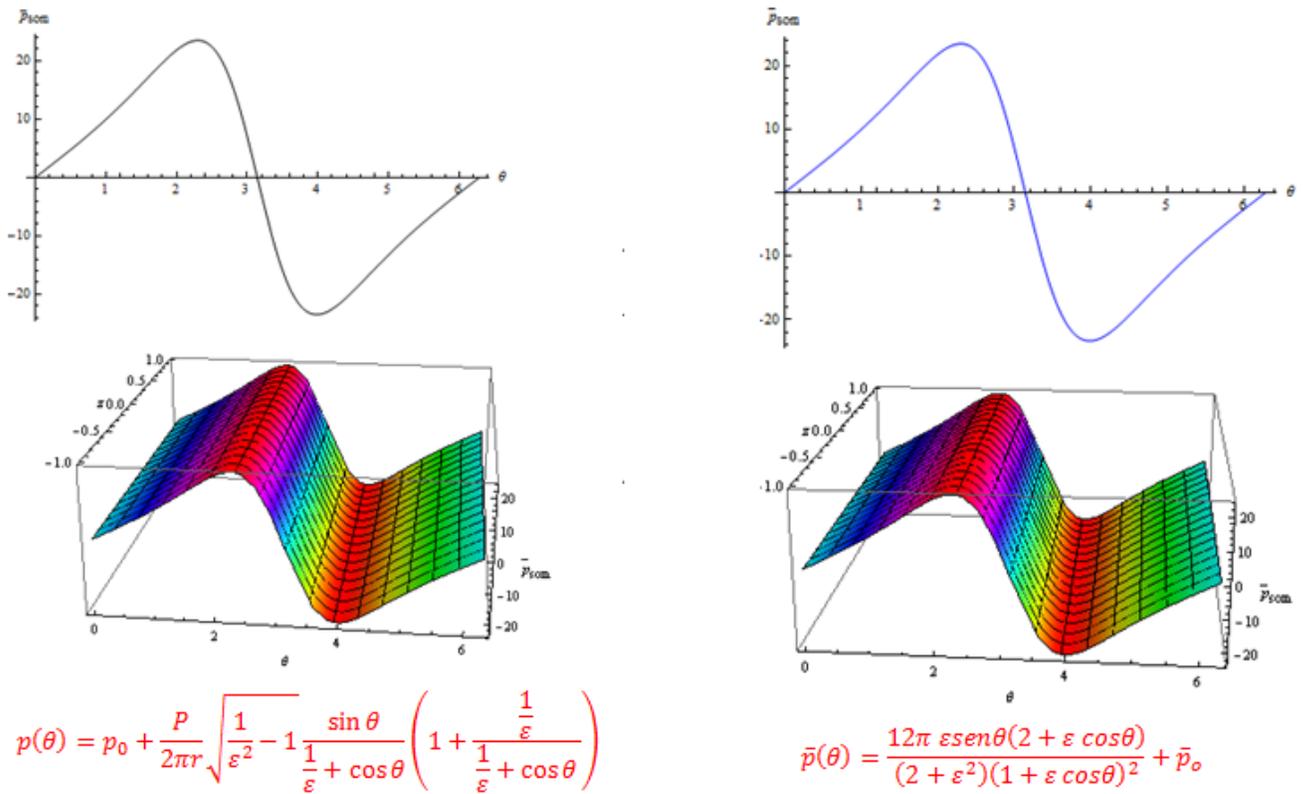


Figura 3.5 Campo de presión clásico para chumacera larga con excentricidad de  $\varepsilon=0.5$ , utilizando 2 fórmulas equivalentes

Superponiendo las graficas, se tendrá:

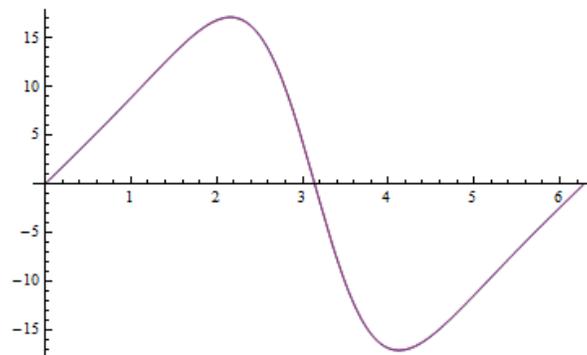


Figura 3.5' Superposición de los campos de presión utilizando las 2 fórmulas equivalentes

## 3.2 Solución Del Modelo Presurizado

### 3.2.1 Solución Analítica

En esta sección se presentará el nuevo modelo de presurización, que incluye la función generalizada Delta de Dirac, con esto será posible determinar además del campo de presión, las características dinámicas en la película de aceite [10], [12], [13], [18].

En la siguiente figura aparecen dos sistemas de coordenadas, uno el sistema fijo OXY en el cual el punto O representa el centro de la chumacera, y el sistema móvil X'Y'J' en el cual el punto J es el centro del muñón; esto para facilitar la ubicación del puerto de inyección. El ángulo entre los sistemas de coordenadas es llamado ángulo de equilibrio  $\phi$ , la posición angular del puerto de inyección está dada por el ángulo  $\beta$  en el sistema fijo y  $\theta_\beta = \pi - \phi + \beta$  en el sistema móvil; los vectores  $U_R$  y  $U_T$  son vectores unitarios en la dirección radial y tangencial. Esta es la misma nomenclatura utilizada por el Dr. Ignacio Ramírez Vargas en su trabajo de tesis doctoral.

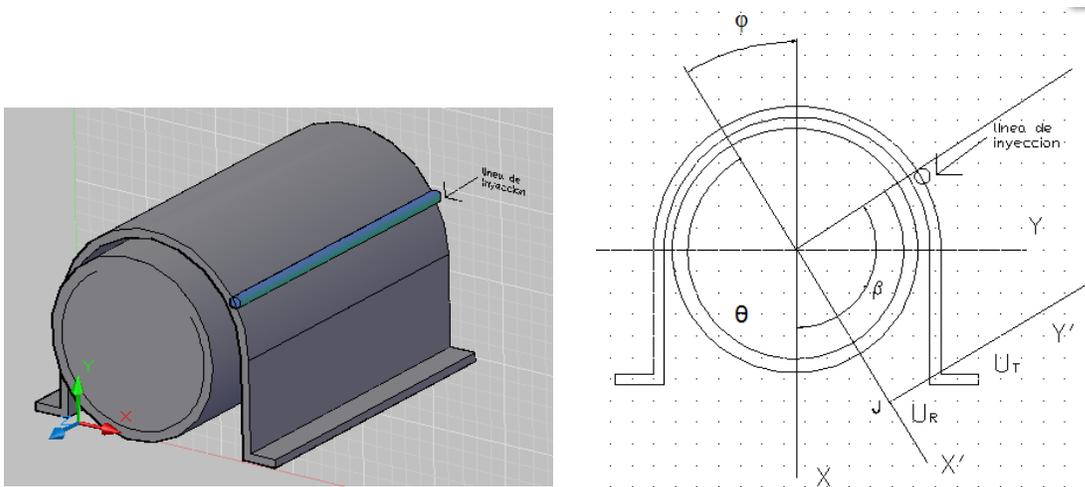


Figura 3.6 Sistema de coordenadas fijo (XYZ) de una chumacera y móvil (X'Y'Z') del muñón

Esto muestra que la posición del centro del muñón J está en función del ángulo de equilibrio  $\varphi$  y de la distancia formada por OJ llamada excentricidad, estas variables se verán modificadas con la presurización de tal modo que el centro del muñón puede tomar cualquier posición dentro de algún cuadrante.

Ahora bien, se supondrá que el área del puerto de inyección es  $\Delta s$ , la cual es una superficie establecida y donde la presión de inyección será  $\Delta p$ , la fuerza total de presión será:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p \cdot \Delta s \quad (3.41)$$

Notar que si  $\Delta s$  tiende al 0, habrá una  $\Delta p$  que tiende al infinito, por lo tanto:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p \cdot \Delta s = q = \text{constante} \quad (3.42)$$

Con esto y la Delta de Dirac es posible proponer un modelo de presurización lineal adimensional, el cual será:

$$\Delta \bar{p}_{prt} = \bar{q}_{prt} \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \quad (3.44)$$

Donde:

$$\bar{q}_{prt} = \frac{P_{fict}}{P_{dim}} \quad P_{fict} = \frac{\Delta F_{pres}}{DL} \quad P_{dim} = \mu N \left( \frac{R}{Cr} \right)^2 \quad (3.45)$$

$\bar{q}_{prt}$  Es la intensidad de presión adimensional, la ecuación anterior se define como un impulso lineal siendo esta fuerza finita e igual a una constante

El modelo presurizado linealmente es [14], [15]:

$$\frac{d}{d\theta} \left( h^3(\theta) \frac{d\bar{p}}{d\theta} \right) = \bar{q}_{prt} \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})] \quad (3.46)$$

Teniendo en cuenta

$$h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.47)$$

Como el modelo contiene Delta de Dirac, la solución se podrá obtener gracias a algunas propiedades de la Delta de Dirac y la función de Heaviside.

$$\bar{H}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

Entonces:

$$\bar{H}'(x) = 2\delta(x) \quad (3.49)$$

Y bien

$$2 \int \delta(x) dx = \bar{H}(x) \quad (3.50)$$

Al integrar por primera vez y teniendo en cuenta la función de Heaviside, se escribe [21].

$$h^3(\theta) \frac{d\bar{p}}{d\theta} = \bar{q}_{prt} \frac{\bar{H}(\theta)}{2} \quad (3.51)$$

$$\frac{d\bar{p}}{d\theta} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \bar{q}_{prt} \frac{1}{h^3(\theta)} & \theta < (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \\ \frac{1}{2} \bar{q}_{prt} \frac{1}{h^3(\theta)} & \theta > (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \end{cases} \quad (3.52)$$

Integrando por segunda vez, se tendrá:

$$\bar{p}_{pres}(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \bar{q}_{prt} \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos\theta)^3} & \theta < (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \\ \frac{1}{2} \bar{q}_{prt} \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos\theta)^3} & \theta > (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \end{cases} \quad (3.53)$$

La integral que aparece en (3.53), se logrará resolver con ayuda de la sustitución de Sommerfeld, ya que de otra manera sería muy complicada su solución.

$$\bar{p}_{pres}(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \gamma - 2\varepsilon \text{sen}\gamma + \frac{\varepsilon^2\gamma}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \text{sen}2\gamma \right) \right] & \theta < (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \\ \frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \gamma - 2\varepsilon \text{sen}\gamma + \frac{\varepsilon^2\gamma}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \text{sen}2\gamma \right) \right] & \theta > (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \end{cases} \quad (3.54)$$

Esta será la ecuación que describa el campo de presión de una chumacera infinitamente larga con puertos lineales de presurización, expresada en términos de  $\gamma$

Para obtener el campo de presión en función de la variable original  $\theta$ , de (3.7), se puede despejar  $\gamma$ , se escribe:

$$\gamma = \arccos \left( \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) \quad (3.55)$$

Con (3.55) y apoyándose nuevamente en las relaciones obtenidas gracias a la sustitución de Sommerfeld, el campo de presión en función de su variable original  $\theta$ , será.

$$\bar{p}_{pres}(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \left[ \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right) - 2\varepsilon\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta(\varepsilon+\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \left. \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)\right)\right) \right] + C \right] \quad \theta < (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \\ \\ -\bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)}\right) - 2\varepsilon\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin(\pi+\beta-\varphi)(\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi))}{(1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi))^2} + \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)}\right)\right) \right] \\ \\ +\frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right) - 2\varepsilon\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta(\varepsilon+\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \left. \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)\right)\right) \right] + C \quad \theta > (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \end{array} \right. \quad (3.56)$$

Esta expresión (3.56), es la solución cerrada del modelo propuesto en este trabajo.

### 3.3 Campos de presión total de una chumacera larga

Teniendo ya las soluciones cerradas tanto para el campo de presión del caso clásico, ecuación (3.27); como para el caso presurizado, ecuación (3.56), ahora se podrá obtener el campo de presión resultante, el cual estará dado por la suma de estos dos.

$$\bar{p}_{total} = \bar{p}_{som} + \bar{p}_{pres} \quad (3.57)$$

En las siguientes figuras se muestran los campos de presión resultantes para diversos valores de  $\varepsilon$  y  $\bar{q}_{prt}$ , para puertos lineales horizontales. Es importante mencionar que el ángulo de presurización aún no se conoce por lo que tomaremos como referencia el ángulo de las tablas de Khonsari [4].

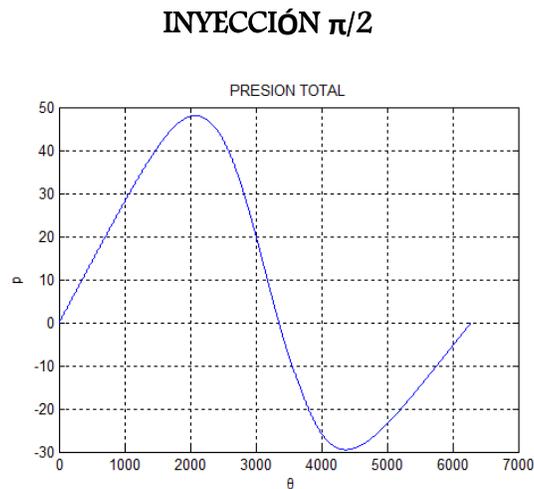


Figura 3.7 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 10$ ,  $\varphi=60^\circ$

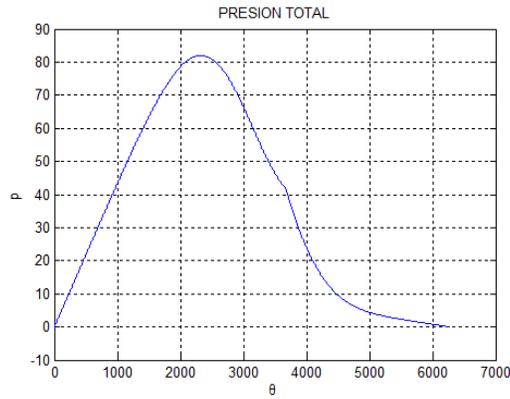


Figura 3.8 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 50$ ,  $\varphi=60^\circ$

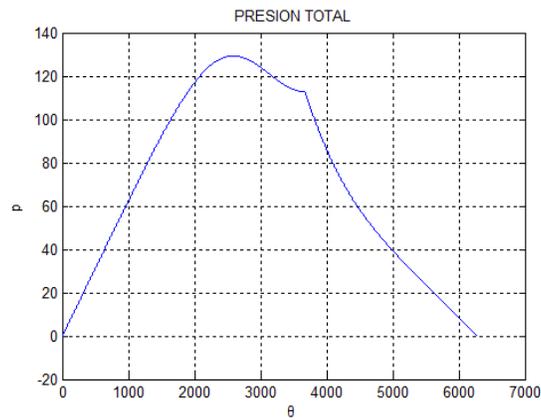


Figura 3.9 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 100$ ,  $\varphi=60^\circ$

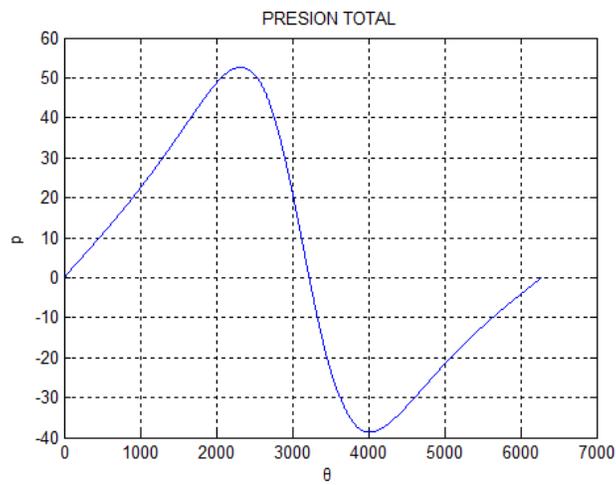


Figura 3.10 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} 10$ ,  $\varphi=60^\circ$

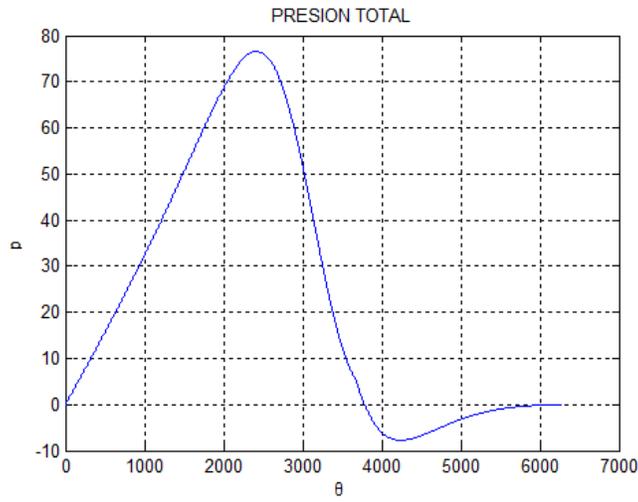


Figura 3.11 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 50$ ,  $\varphi=60^\circ$

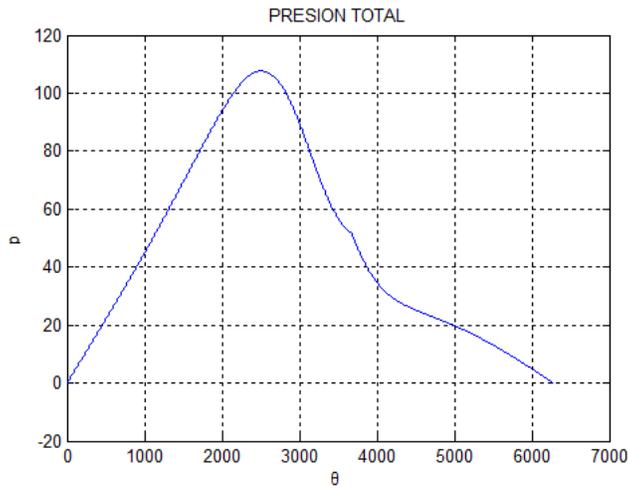


Figura 3.12 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 100$ ,  $\varphi=60^\circ$

### INYECCIÓN $3\pi/2$

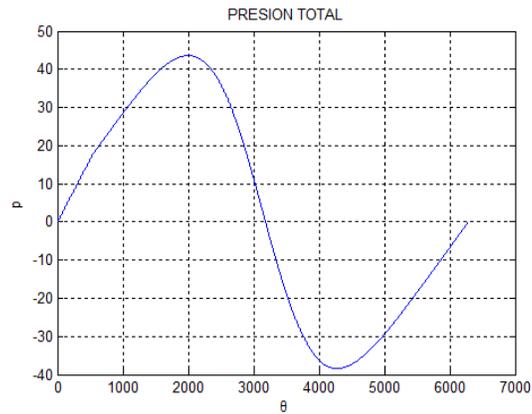


Figura 3.13 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 10$ ,  $\varphi=60^\circ$

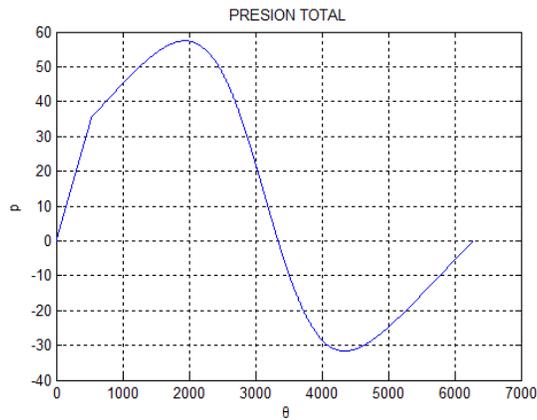


Figura 3.14 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 50$ ,  $\varphi=60^\circ$

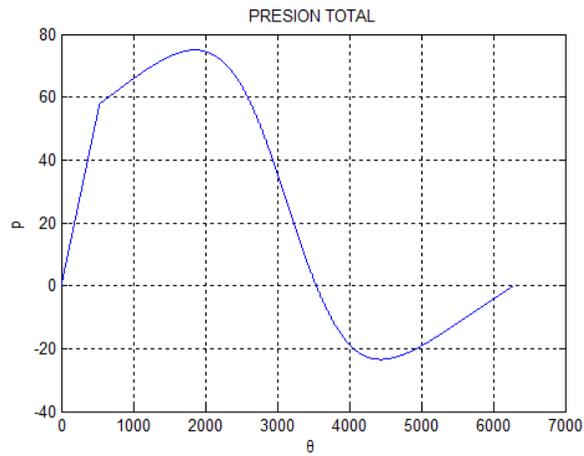


Figura 3.15 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 100$ ,  $\varphi=60^\circ$

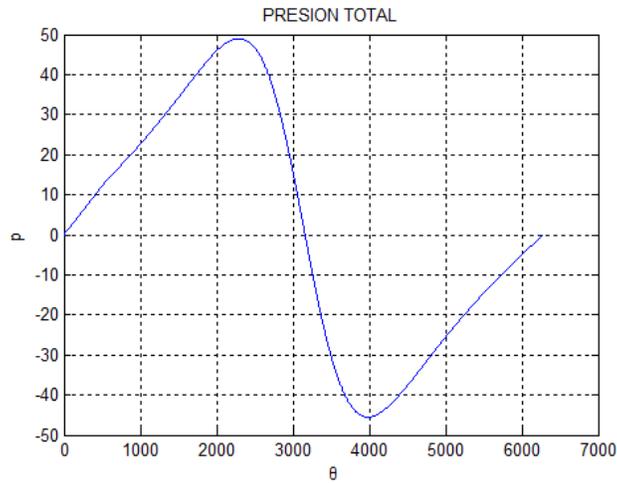


Figura 3.16 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\epsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 10$ ,  $\phi=60^\circ$

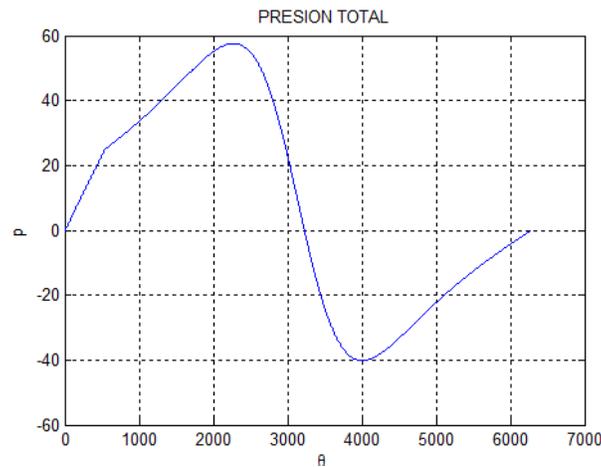


Figura 3.17 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\epsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 50$ ,  $\phi=60^\circ$

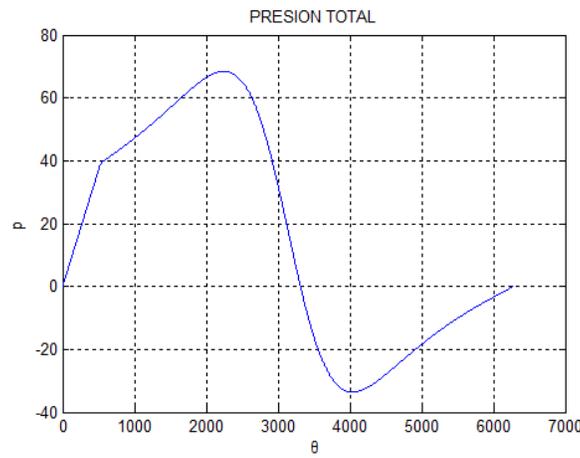


Figura 3.18 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\epsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 100$ ,  $\phi=60^\circ$

# Capítulo IV

POSICIÓN DE EQUILIBRIO

EN CHUMACERAS

INFINITAMENTE LARGAS

CON PUERTOS DE

INYECCIÓN LINEALES

## 4 POSICIÓN DE EQUILIBRIO

En este capítulo se determinará la posición de equilibrio, es decir, la posición que tomará el muñón dentro de la chumacera; ésta se determina a partir de una sumatoria de fuerzas, tales fuerzas son debidas al peso del sistema y a la película de aceite.

La posición de equilibrio es muy importante, ya que es la referencia desde la cual se realizan todas las mediciones vibratorias.

### 4.1 Cálculo analítico de la posición de equilibrio en el caso no presurización

La carga total que la chumacera puede soportar se encuentra integrando el campo de presión sobre el área total de la chumacera. La carga se calcula usualmente a partir de dos componentes, una que actúa a lo largo de la línea de centros que es la componente radial y otra componente que es perpendicular a la primera, llamada la componente tangencial.

Este método permite el cálculo del ángulo que se forma entre la línea de centros y la línea de carga. El eje no se desvía en la misma dirección en la que se aplica la carga, sino que se mueve a cierto ángulo de la línea de carga; este ángulo es conocido como el ángulo de actitud, el cual ubica la posición de mínimo espesor de película a partir de donde la línea de carga intercepta al centro del eje.

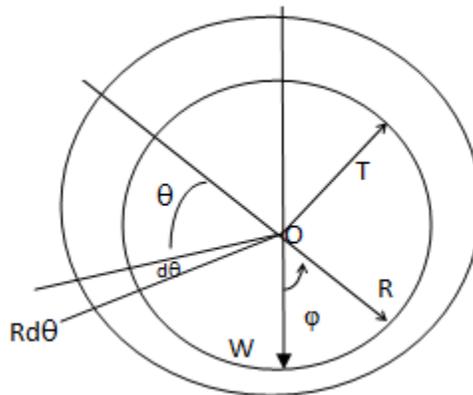


Figura 4.1 Componentes de la fuerza en la película de aceite en la dirección radial y tangencial

Para analizar y obtener las expresiones de las fuerzas  $F_R$  y  $F_T$ , se considerará un pequeño elemento de área  $Rd\theta dz$  donde el ejes es normal al plano de la figura anterior [11].

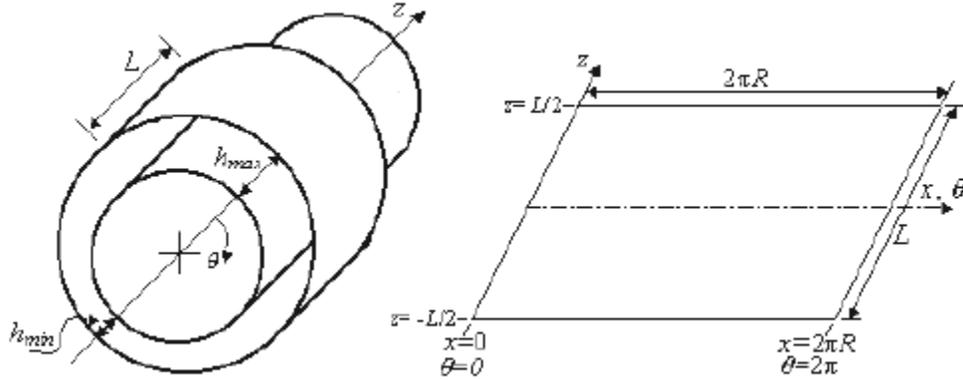


Figura 4.2 Chumacera en forma estirada

El incremento de la fuerza ejercida por la presión hidrodinámica sobre el elemento de área es  $pRd\theta dz$  que tiene como componentes  $pR\cos\theta d\theta dz$  que actúa a lo largo de la línea de centros y  $pR\sin\theta d\theta dz$  que actúa en la dirección normal a la línea de centros. Por lo que las componentes  $F_R$  y  $F_T$  están dadas por:

$$F_R = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{\theta_2} pR\cos\theta d\theta dz \quad (4.1)$$

$$F_T = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{\theta_2} pR\sin\theta d\theta dz \quad (4.2)$$

El ángulo  $\theta_2$  indica la posición angular del margen de arrastre de la película del lubricante. El centro del muñón permanece en la posición de equilibrio estático siempre que la carga externa  $W$  se iguale con la fuerza resultante de presión  $F$ , es decir:

$$W + F = 0 \quad (4.3)$$

De donde

$$W = WR\cos\varphi - WR\sin\varphi \quad (4.4)$$

$$F = F_R R + F_T T \quad (4.5)$$

Donde R y T son vectores unitarios dirigidos a lo largo de la línea de centros y perpendicular a ella, respectivamente.

Entonces resulta:

$$W \cos \varphi + F_R = 0 \quad (4.6)$$

$$-W \sin \varphi + F_T = 0 \quad (4.7)$$

Recordando que:

$$x = R\theta \quad dx = R d\theta \quad z = \frac{L}{2} \bar{z} \quad dz = \frac{L}{2} d\bar{z} \quad p = \mu N \left( \frac{R}{C_r} \right)^2 \bar{p} \quad (4.8)$$

Si  $f_R$  y  $f_T$  son las componentes adimensionales de las fuerzas radial y tangencial, respectivamente, se tendrá [2], [11]:

$$f_R \equiv \frac{F_R/LD}{\mu N(R/C_r)^2} = -2\pi \left( \frac{L}{D} \right)^2 \int_0^\pi \cos \theta \frac{\partial H/\partial \theta}{H^3} d\theta \quad (4.9)$$

$$f_T \equiv \frac{F_T/LD}{\mu N(R/C_r)^2} = -2\pi \left( \frac{L}{D} \right)^2 \int_0^\pi \sin \theta \frac{\partial H/\partial \theta}{H^3} d\theta \quad (4.10)$$

Ahora bien, para la chumacera larga las componentes de la fuerza de la película de aceite se obtendrán cuando la ecuación (3.27) que determina el campo de presión clásico es sustituida en las ecuaciones (4.9) y (4.10). En forma adimensional se obtiene [2]:

$$f_R = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_2} \bar{p} \cos \theta d\theta \quad (4.11)$$

$$f_T = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_2} \bar{p} \sin \theta d\theta \quad (4.12)$$

Para poder evaluar la ecuación (4.11), es necesario conocer la siguiente integral.

$$\int_0^{\theta_2} \bar{p} \cos\theta d\theta \quad (4.13)$$

Esta es una integral por partes  $uv - \int vdu$  donde:

$$u = \bar{p}(\theta) \quad dv = \cos\theta d\theta \quad (4.14)$$

$$du = \frac{d\bar{p}(\theta)}{d\theta} d\theta \quad v = \text{sen}\theta \quad (4.15)$$

Por lo tanto resulta.

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_2} \bar{p} \cos\theta d\theta &= (\bar{p}\text{sen}\theta)_0^{\theta_2} - \int_0^{\theta_2} \text{sen}\theta \frac{d\bar{p}}{d\theta} d\theta = - \int_0^{\theta_2} \text{sen}\theta \frac{d\bar{p}}{d\theta} d\theta \\ &= -12\pi \int_0^{\theta_2} \text{sen}\theta \left[ \frac{H(\theta)-H_0}{H^3(\theta)} \right] d\theta \end{aligned} \quad (4.16)$$

Con ayuda de la sustitución de Sommerfeld se resuelve la integral, quedando.

$$= \frac{12\pi}{1-\varepsilon^2} \left[ \cos\gamma + \frac{A}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon}{4} \cos 2\gamma - \cos\gamma \right) \right]_0^{\gamma_2} \quad (4.17)$$

Ahora para evaluar la ecuación (4.12), se necesita conocer la integral.

$$\int_0^{\theta_2} \bar{p} \text{sen}\theta d\theta \quad (4.18)$$

Esta es una integral por partes  $uv - \int vdu$  donde:

$$u = \bar{p}(\theta) \quad dv = \text{sen}\theta d\theta \quad (4.19)$$

$$du = \frac{d\bar{p}(\theta)}{d\theta} d\theta \quad v = -\cos\theta \quad (4.20)$$

Por lo tanto resulta.

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_2} \bar{p} \text{sen}\theta d\theta &= (-\bar{p}\cos\theta)_0^{\theta_2} + \int_0^{\theta_2} \cos\theta \frac{d\bar{p}}{d\theta} d\theta = \int_0^{\theta_2} \cos\theta \frac{d\bar{p}}{d\theta} d\theta \\ &= -12\pi \int_0^{\theta_2} \cos\theta \left[ \frac{H(\theta)-H_0}{H^3(\theta)} \right] d\theta \end{aligned} \quad (4.21)$$

Con ayuda de la sustitución de Sommerfeld se resuelve la integral, quedando:

$$= \frac{12\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left[ \text{sen}\gamma - \varepsilon\gamma - \frac{H_0}{1-\varepsilon^2} \left( (1-\varepsilon^2)\text{sen}\gamma - \varepsilon \left( \frac{\varepsilon\gamma}{2} + \frac{\text{sen}2\gamma}{4} \right) \right) \right]_0^{\gamma_2} \quad (4.22)$$

Para las condiciones de Sommerfeld, se escribe:

$$\theta_2 = \gamma_2 = 2\pi \quad h_0 = \frac{2(1-\varepsilon^2)}{2+\varepsilon^2} \quad (4.23)$$

Por lo tanto  $f_R$  y  $f_T$  serán:

$$f_R = 0 \quad (4.24)$$

$$f_T = \frac{12\pi^2\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \equiv \frac{1}{S} \quad (4.25)$$

Esta ecuación muestra que bajo condiciones de Sommerfeld el desplazamiento del muñón es siempre perpendicular a la carga aplicada,  $\varphi=\pi/2$ . Esto demuestra que las condiciones de Sommerfeld son incorrectas cuando aplicamos a fluidos cavitados. Además las condiciones de Sommerfeld conducen a un campo de presiones que da presiones negativas en la parte divergente lo que raramente se encuentra en chumaceras reales.

Considerar esta parte negativa para la evaluación de las componentes de la fuerza reduce la capacidad de carga de la chumacera, Por tal motivo, para evaluar las componentes de la fuerza solo se consideran valores positivos del campo de presión [2], [21].

Ahora bien ocupando las condiciones de Gumbel:

$$\theta_2 = \gamma_2 = \pi \quad (4.26)$$

Sustituyendo en ecuaciones (4.11) y (4.12), resulta:

$$f_R = -\frac{12\pi\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} \quad (4.27)$$

$$f_T = \frac{6\pi^2\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \quad (4.28)$$

Para el ángulo de equilibrio se sabe:

$$\tan\varphi = \left| \frac{f_T}{f_R} \right| \quad (4.29)$$

Sustituyendo ecuaciones (4.27) y (4.28) en ecuación (4.29), se podrá obtener el ángulo de equilibrio:

$$\varphi = \arctan \frac{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \quad (4.30)$$

La ecuación (4.30) permite determinar que para un valor dado de excentricidad, la posición angular de equilibrio está perfectamente determinada, a esta trayectoria generada se le conoce en la literatura como locus de equilibrio.

Y el número de Sommerfeld será:

$$S = \frac{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}{6\pi\varepsilon\sqrt{4\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}} \quad (4.31)$$

Teniendo ya las componentes de la fuerza de la película de aceite (4.27) y (4.28), puede escribirse en el sistema coordenado xy, con la ayuda de la matriz de rotación, la cual es:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_R \\ f_T \end{pmatrix}$$

Resultando:

$$f_{x,g\ddot{u}m} = -\frac{12\pi\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} \cos\varphi - \frac{6\pi^2\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \operatorname{sen}\varphi \quad (4.32)$$

$$f_{y,g\ddot{u}m} = -\frac{12\pi\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} \operatorname{sen}\varphi + \frac{6\pi^2\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \cos\varphi \quad (4.33)$$

## 4.2 Cálculo analítico de la posición de equilibrio en el caso con presurización

En esta sección se obtendrá un modelo matemático que describirá la posición de equilibrio que adopte el muñón, pero ahora como la chumacera se presuriza externamente, además de depender de la fuerza ejercida en la película de aceite, también dependerá del tamaño de la presurización, así como del lugar donde se realice la misma.

Recordando la ecuación para el campo de presión, obtenido en ecuación (3.56):

$$\bar{p}_{pres}(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right) - 2\varepsilon \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta(\varepsilon+\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)\right) \right) \right] & \theta < (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \\ \bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)}\right) - 2\varepsilon \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin(\pi+\beta-\varphi)(\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi))}{(1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi))^2} + \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)}\right)\right) \right) \right] \\ +\frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right) - 2\varepsilon \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\theta(\varepsilon+\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + \arccos\left(\frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)\right) \right) \right] & \theta > (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \end{cases} \quad (4.34)$$

A su vez se sabe que (3.56), viene de (3.54):

$$\frac{d\bar{p}}{d\theta} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \frac{1}{h^3(\theta)} & \theta < (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \\ \frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \frac{1}{h^3(\theta)} & \theta > (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \end{cases} \quad (4.35)$$

Para reducir un poco la ecuación, se llamara P1 a:

$$-\frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) - 2\varepsilon \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin\theta (\varepsilon + \cos\theta)}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} + \arccos \left( \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) \right) \right) \right] \quad (4.36)$$

y P2 a:

$$-\bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon + \cos(\pi + \beta - \varphi)}{1 + \varepsilon \cos(\pi + \beta - \varphi)} \right) - 2\varepsilon \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin(\pi + \beta - \varphi)}{1 + \varepsilon \cos(\pi + \beta - \varphi)} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin(\pi + \beta - \varphi) (\varepsilon + \cos(\pi + \beta - \varphi))}{(1 + \varepsilon \cos(\pi + \beta - \varphi))^2} + \arccos \left( \frac{\varepsilon + \cos(\pi + \beta - \varphi)}{1 + \varepsilon \cos(\pi + \beta - \varphi)} \right) \right) \right) \right] \quad (4.37)$$

$$+\frac{1}{2}\bar{q}_{prt} \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) - 2\varepsilon \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin\theta (\varepsilon + \cos\theta)}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} + \arccos \left( \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) \right) \right) \right]$$

Y sabiendo que las componentes de las fuerzas son:

$$f_R = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_2} \bar{p} \cos\theta d\theta \quad (4.38)$$

$$f_T = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_2} \bar{p} \sin\theta d\theta \quad (4.39)$$

Sustituyendo P1 y P2 en ecuaciones (4.38) y (4.39), resulta:

$$f_R = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{p}_{pres} \cos\theta d\theta = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi + \beta - \varphi} P1 \cos\theta + \int_{\pi + \beta - \varphi}^{2\pi} P2 \cos\theta \right) \quad (4.40)$$

Y

$$f_T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{p}_{pres} \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi + \beta - \varphi} P1 \sin\theta + \int_{\pi + \beta - \varphi}^{2\pi} P2 \sin\theta \right) \quad (4.41)$$

Resolviendo la ecuación (4.40), se tiene:

$$f_R = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{p}_{pres} \cos\theta d\theta = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi+\beta-\varphi} P1 \cos\theta + \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} P2 \cos\theta \right) \quad (4.42)$$

$$f_R = \frac{1}{2} \left( (P1 \text{sen}\theta)_0^{\pi+\beta-\varphi} - \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \text{sen}\theta \frac{dP1}{d\theta} d\theta + (P2 \text{sen}\theta)_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} - \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \text{sen}\theta \frac{dP2}{d\theta} d\theta \right) \quad (4.43)$$

$$f_R = \frac{1}{2} \left( P1_{\pi+\beta-\varphi} \text{sen}(\pi + \beta - \varphi) + \frac{1}{2} q_{prt} \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{\text{sen}\theta}{H^3} d\theta - P2_{\pi+\beta-\varphi} \text{sen}(\pi + \beta - \varphi) - \frac{1}{2} q_{prt} \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{\text{sen}\theta}{H^3} d\theta \right) \quad (4.44)$$

Recordando que:

$$h(\theta) = (1 + \varepsilon \cos\theta) \quad (4.45)$$

Resulta:

$$f_R = \frac{1}{2} \left( P1_{\pi+\beta-\varphi} \text{sen}(\pi + \beta - \varphi) + \frac{1}{2} q_{prt} \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{\text{sen}\theta}{(1+\varepsilon \cos\theta)^3} d\theta - P2_{\pi+\beta-\varphi} \text{sen}(\pi + \beta - \varphi) - \frac{1}{2} q_{prt} \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{\text{sen}\theta}{(1+\varepsilon \cos\theta)^3} d\theta \right) \quad (4.46)$$

$$f_R = \frac{\text{sen}(\pi+\beta-\varphi)}{2} (P1_{\pi+\beta-\varphi} - P2_{\pi+\beta-\varphi}) + \frac{1}{4} q_{prt} \left( \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{\text{sen}\theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos\theta)^3} - \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{\text{sen}\theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos\theta)^3} \right) \quad (4.47)$$

Utilizando la sustitución de Sommerfeld se escribe:

$$f_R = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{(1-\varepsilon \cos\gamma)^2 d\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} * \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2} \text{sen}\gamma}{1-\varepsilon \cos\gamma} - \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon \cos\gamma)^2 d\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} * \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2} \text{sen}\gamma}{1-\varepsilon \cos\gamma} \right] \quad (4.48)$$

$$f_R = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ - \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{(1-\varepsilon \cos\gamma) \text{sen}\gamma d\gamma}{(1-\varepsilon^2)^2} + \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon \cos\gamma) \text{sen}\gamma d\gamma}{(1-\varepsilon^2)^2} \right] \quad (4.49)$$

$$f_R = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{\varepsilon}{2} \cos\gamma^2 - \cos\gamma \right) \right]_0^{\pi+\beta-\varphi} - \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{\varepsilon}{2} \cos\gamma^2 - \cos\gamma \right) \right]_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \right] \quad (4.50)$$

Aplicando nuevamente sustitución de Sommerfeld, para regresar a la variable  $\theta$

$$f_R = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right)^2 - \left( \frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right) \right) \right]_0^{\pi+\beta-\varphi} - \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right)^2 - \left( \frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right) \right) \right]_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \right] \quad (451)$$

Una vez que se ha regresado a la variable  $\theta$ , resta resolver  $f_R$  para los límites:

$$0 \text{ a } \pi+\beta-\varphi \quad \text{y} \quad \pi+\beta-\varphi \text{ a } 2\pi \quad (4.52)$$

Finalmente resulta:

$$f_R = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)} \right)^2 - \frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)} \right) - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \left( \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon+1}{1+\varepsilon} \right)^2 \right) - \frac{\varepsilon+1}{1+\varepsilon} \right) \right] - \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \left( \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon+1}{1+\varepsilon} \right)^2 \right) - \frac{\varepsilon+1}{1+\varepsilon} \right) - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)} \right)^2 - \frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi)} \right) \right] \right] \quad (4.53)$$

Sabiendo que  $\cos(\pi + \beta - \varphi) = -\cos(\beta - \varphi)$  se tendrá:

$$f_{R,pres} = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ -\frac{(-\varepsilon+\cos(\beta-\varphi))(\varepsilon^2+\varepsilon\cos(\beta-\varphi)-2)}{(1-\varepsilon\cos(\beta-\varphi))^2(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon-2}{(1-\varepsilon^2)^2} \right] \quad (4.54)$$

Ahora se prosigue a resolver la ecuación (4.41), se escribe:

$$f_T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{p}_{pres} \text{sen}\theta d\theta = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi+\beta-\varphi} P1 \text{sen}\theta + \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} P2 \text{sen}\theta \right) \quad (4.55)$$

$$f_T = \frac{1}{2} \left( (-P1 \cos\theta)_0^{\pi+\beta-\varphi} + \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \cos\theta \frac{dP1}{d\theta} d\theta - (P2 \cos\theta)_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} + \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \cos\theta \frac{dP2}{d\theta} d\theta \right) \quad (4.56)$$

$$f_T = \frac{1}{2} \left( (-P1_{\pi+\beta-\varphi} \cos(\pi + \beta - \varphi) + P1_0) - \frac{1}{2} q_{prt} \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{\cos\theta}{H^3} d\theta - (P2_0 - P2_{\pi+\beta-\varphi} \cos(\pi + \beta - \varphi)) + \frac{1}{2} q_{prt} \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{\cos\theta}{H^3} d\theta \right) \quad (4.57)$$

Recordando que:

$$h(\theta) = (1 + \varepsilon \cos\theta) \quad (4.45)$$

Resulta:

$$f_T = \frac{1}{2} \left( (-P1_{\pi+\beta-\varphi} \cos(\pi + \beta - \varphi) + P1_0) - \frac{1}{2} q_{prt} \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} d\theta - (P2_0 - P2_{\pi+\beta-\varphi} \cos(\pi + \beta - \varphi)) + \frac{1}{2} q_{prt} \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} d\theta \right) \quad (4.58)$$

$$f_T = \frac{1}{2} (P1_0 - P2_0) + \frac{\cos(\pi+\beta-\varphi)}{2} (-P1_{\pi+\beta-\varphi} + P2_{\pi+\beta-\varphi}) + \frac{1}{4} q_{prt} \left( - \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} + \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right) \quad (459)$$

Utilizando la sustitución de Sommerfeld se obtiene:

$$f_T = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ - \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{(1-\varepsilon\cos\gamma)^2 d\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} * \frac{\cos\gamma-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\gamma} + \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon\cos\gamma)^2 d\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} * \frac{\cos\gamma-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\gamma} \right] \quad (4.60)$$

$$f_T = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ - \int_0^{\pi+\beta-\varphi} \frac{(1-\varepsilon\cos\gamma)(\cos\gamma-\varepsilon) d\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} + \int_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon\cos\gamma)(\cos\gamma-\varepsilon) d\gamma}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \right] \quad (4.61)$$

$$f_T = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ - \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left( \text{sen}\gamma - \varepsilon\gamma - \frac{\varepsilon}{2} (\cos\gamma\text{sen}\gamma + \gamma) + \varepsilon^2 \text{sen}\gamma \right) \right]_0^{\pi+\beta-\varphi} + \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left( \text{sen}\gamma - \varepsilon\gamma - \frac{\varepsilon}{2} (\cos\gamma\text{sen}\gamma + \gamma) + \varepsilon^2 \text{sen}\gamma \right) \right]_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \right] \quad (4.62)$$

Aplicando nuevamente la sustitución de Sommerfeld, para regresar a la variable  $\theta$

$$f_T = \frac{1}{4} q_{prt} \left[ \left[ - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \text{sen}\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} - \varepsilon \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \text{sen}\theta(\varepsilon+\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + \arccos \left( \frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right) \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \text{sen}\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right) \right]_0^{\pi+\beta-\varphi} + \left[ \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \text{sen}\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} - \varepsilon \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \text{sen}\theta(\varepsilon+\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + \arccos \left( \frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right) \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \text{sen}\theta}{1+\varepsilon \cos\theta} \right) \right]_{\pi+\beta-\varphi}^{2\pi} \right] \quad (4.63)$$

Una vez que se ha regresado a la variable  $\theta$ , resta resolver  $f_R$  para los límites:

$$0 \text{ a } \pi+\beta-\varphi \quad \text{y} \quad \pi+\beta-\varphi \text{ a } 2\pi \quad (4.64)$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned}
f_T = & \\
\frac{1}{4}q_{prt} & \left[ -\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon \cos(\pi+\beta-\varphi)} - \varepsilon \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon \cos(\pi+\beta-\varphi)} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\pi+\beta-\varphi)(\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi))}{(1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi))^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \arccos \left( \frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon \cos(\pi+\beta-\varphi)} \right) \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon \cos(\pi+\beta-\varphi)} \right) \right] - \\
\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} & \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon \cos(\pi+\beta-\varphi)} - \varepsilon \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon \cos(\pi+\beta-\varphi)} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\pi+\beta-\varphi)(\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi))}{(1+\varepsilon\cos(\pi+\beta-\varphi))^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \arccos \left( \frac{\varepsilon+\cos(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon \cos(\pi+\beta-\varphi)} \right) \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\pi+\beta-\varphi)}{1+\varepsilon \cos(\pi+\beta-\varphi)} \right) \right] \quad (4.65)
\end{aligned}$$

Sabiendo que  $\cos(\pi + \beta - \varphi) = -\cos(\beta - \varphi)$  ,  $\text{sen}(\pi + \beta - \varphi) = -\text{sen}(\beta - \varphi)$  se tendrá:

$$\begin{aligned}
f_{T,pres} = & \\
\frac{1}{4}q_{prt} & \left[ -\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)} - \varepsilon \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon-\cos(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\beta-\varphi)(\varepsilon-\cos(\beta-\varphi))}{(1-\varepsilon\cos(\beta-\varphi))^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \arccos \left( \frac{\varepsilon-\cos(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)} \right) \right) - \varepsilon^2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)} \right) \right] \quad (4.66)
\end{aligned}$$

Teniendo  $f_R$  y  $f_T$  presurizados, se reescriben en el sistema coordenado  $xy$ , mediante la matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{pres} & -\text{sen}\varphi_{pres} \\ \text{sen}\varphi_{pres} & \cos\varphi_{pres} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_R \\ f_T \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Resultando:

$$\begin{aligned}
f_{x,pres} = & \\
\frac{1}{4}q_{prt} & \left[ \left( -\frac{(-\varepsilon+\cos(\beta-\varphi))(\varepsilon^2+\varepsilon\cos(\beta-\varphi)-2)}{(1-\varepsilon\cos(\beta-\varphi))^2(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon-2}{(1-\varepsilon^2)^2} \right) \cos\varphi_{pres} + \left( \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \varepsilon \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon-\cos(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\beta-\varphi)(\varepsilon-\cos(\beta-\varphi))}{(1-\varepsilon\cos(\beta-\varphi))^2} + \arccos \left( \frac{\varepsilon-\cos(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)} \right) \right) - \right. \\
& \left. \left. \varepsilon^2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon \cos(\beta-\varphi)} \right) \right) \right] \text{sen}\varphi_{pres} \quad (4.68)
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
f_{y,pres} = & \\
\frac{1}{4} q_{prt} & \left[ \left( -\frac{(-\varepsilon + \cos(\beta - \varphi))(\varepsilon^2 + \varepsilon \cos(\beta - \varphi) - 2)}{(1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi))^2 (1 - \varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon - 2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right) \text{sen} \varphi_{pres} - \left( \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{sen}(\beta - \varphi)}{1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)} - \right. \right. \right. \\
\varepsilon & \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon - \cos(\beta - \varphi)}{1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{sen}(\beta - \varphi)(\varepsilon - \cos(\beta - \varphi))}{(1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi))^2} + \arccos \left( \frac{\varepsilon - \cos(\beta - \varphi)}{1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)} \right) \right) - \\
\varepsilon^2 & \left. \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{sen}(\beta - \varphi)}{1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)} \right) \right) \right] \text{cos} \varphi_{pres} \quad (4.69)
\end{aligned}$$

Con estas dos ecuaciones (4.68) y (4.69) y las ecuaciones para el modelo no presurizado (4.32) y (4.33); se podrá llevar a cabo una sumatoria de fuerzas total en el sistema coordinado xy:

$$W + F_{x,res} = 0 \quad (4.70)$$

$$F_{y,res} = 0 \quad (4.71)$$

De donde:

$$F_{x,res} = F_{x,gum} + F_{x,pres} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned}
F_{x,res} = & \\
F_{dim} & \left[ -\frac{12\pi\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} \text{cos} \varphi - \frac{6\pi^2\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \text{sen} \varphi \right] + \\
\Delta F_{pres} & \left[ \frac{1}{4} \left( \left( -\frac{(-\varepsilon + \cos(\beta - \varphi))(\varepsilon^2 + \varepsilon \cos(\beta - \varphi) - 2)}{(1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi))^2 (1 - \varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon - 2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right) \text{cos} \varphi_{pres} + \left( \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{sen}(\beta - \varphi)}{1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)} - \right. \right. \right. \right. \\
\varepsilon & \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon - \cos(\beta - \varphi)}{1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{sen}(\beta - \varphi)(\varepsilon - \cos(\beta - \varphi))}{(1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi))^2} + \arccos \left( \frac{\varepsilon - \cos(\beta - \varphi)}{1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)} \right) \right) - \\
\varepsilon^2 & \left. \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \text{sen}(\beta - \varphi)}{1 - \varepsilon \cos(\beta - \varphi)} \right) \right) \right] \text{sen} \varphi_{pres} \quad (4.73)
\end{aligned}$$

Al igual que:

$$F_{y,res} = F_{y,g\ddot{u}m} + F_{y,pres} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned}
F_{y,res} = & \\
& F_{dim} \left[ -\frac{12\pi\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} \text{sen}\varphi + \frac{6\pi^2\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \text{cos}\varphi \right] + \\
& \Delta F_{pres} \left[ \frac{1}{4} \left( \left( -\frac{(-\varepsilon+\text{cos}(\beta-\varphi))(\varepsilon^2+\varepsilon\text{cos}(\beta-\varphi)-2)}{(1-\varepsilon\text{cos}(\beta-\varphi))^2(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon-2}{(1-\varepsilon^2)^2} \right) \text{sen}\varphi_{pres} - \left( \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon\text{cos}(\beta-\varphi)} - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \varepsilon \left( \arccos\left( \frac{\varepsilon-\text{cos}(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon\text{cos}(\beta-\varphi)} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{-\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\beta-\varphi)(\varepsilon-\text{cos}(\beta-\varphi))}{(1-\varepsilon\text{cos}(\beta-\varphi))^2} + \arccos\left( \frac{\varepsilon-\text{cos}(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon\text{cos}(\beta-\varphi)} \right) \right) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \varepsilon^2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\text{sen}(\beta-\varphi)}{1-\varepsilon\text{cos}(\beta-\varphi)} \right) \right) \right) \right) \text{cos}\varphi_{pres} \right] \quad (4.75)
\end{aligned}$$

Donde:

$$\bar{q}_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{F_{dim}} \quad (4.76)$$

Notar que ahora tanto la excentricidad como el ángulo de equilibrio cambiarán a medida que la presurización externa cambie, por ello, ahora todas las  $\varepsilon$  y  $\varphi$  tendrán el subíndice “pres”, escribiendo:



$$F_{y,res} =$$

$$\begin{aligned}
& F_{dim} \left[ -\frac{12\pi\varepsilon_{pres}^2}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)} \text{sen}\varphi_{pres} + \frac{6\pi^2\varepsilon_{pres}}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)^{1/2}} \text{cos}\varphi_{pres} \right] + \\
& \Delta F_{pres} \left[ \frac{1}{4} \left( \left( -\frac{(-\varepsilon_{pres} + \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}))(\varepsilon_{pres}^2 + \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}) - 2)}{(1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}))^2 (1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} - \frac{\varepsilon_{pres} - 2}{(1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} \right) \text{sen}\varphi_{pres} - \right. \right. \\
& \left( \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \text{sen}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})} - \varepsilon_{pres} \left( \text{arccos} \left( \frac{\varepsilon_{pres} - \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \right) - \right. \\
& \left. \left. \frac{\varepsilon_{pres}}{2} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \text{sen}(\beta - \varphi_{pres})(\varepsilon_{pres} - \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}))}{(1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}))^2} + \text{arccos} \left( \frac{\varepsilon_{pres} - \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \right) - \right. \\
& \left. \left. \varepsilon_{pres}^2 \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \text{sen}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \right) \text{cos}\varphi_{pres} \left. \right] \quad (4.78)
\end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo ecuaciones (4.77) y (4.78) en (4.70) y (4.71), tenemos:

$$\begin{aligned}
& W + F_{dim} \left[ -\frac{12\pi\varepsilon_{pres}^2}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)} \cos\varphi_{pres} - \frac{6\pi^2\varepsilon_{pres}}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)^{1/2}} \operatorname{sen}\varphi_{pres} \right] + \\
& \Delta F_{pres} \left[ \frac{1}{4} \left( -\frac{(-\varepsilon_{pres} + \cos(\beta - \varphi_{pres}))(\varepsilon_{pres}^2 + \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres}) - 2)}{(1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres}))^2(1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} - \frac{\varepsilon_{pres} - 2}{(1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} \right) \cos\varphi_{pres} + \right. \\
& \left( \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \operatorname{sen}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres})} - \varepsilon_{pres} \left( \arccos\left( \frac{\varepsilon_{pres} - \cos(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \right) - \right. \\
& \left. \frac{\varepsilon_{pres}}{2} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \operatorname{sen}(\beta - \varphi_{pres})(\varepsilon_{pres} - \cos(\beta - \varphi_{pres}))}{(1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres}))^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \arccos\left( \frac{\varepsilon_{pres} - \cos(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \varepsilon_{pres}^2 \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \operatorname{sen}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \operatorname{sen}\varphi_{pres} \left. \right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
& F_{dim} \left[ -\frac{12\pi\varepsilon_{pres}^2}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)} \text{sen}\varphi_{pres} + \frac{6\pi^2\varepsilon_{pres}}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)^{1/2}} \text{cos}\varphi_{pres} \right] + \\
& \Delta F_{pres} \left[ \frac{1}{4} \left( -\frac{(-\varepsilon_{pres} + \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}))(\varepsilon_{pres}^2 + \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}) - 2)}{(1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}))^2 (1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\varepsilon_{pres} - 2}{(1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} \right) \text{sen}\varphi_{pres} - \right. \\
& \left( \frac{2}{(1 - \varepsilon_{pres}^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \text{sen}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})} - \varepsilon_{pres} \left( \text{arccos} \left( \frac{\varepsilon_{pres} - \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \right) - \right. \\
& \left. \frac{\varepsilon_{pres}}{2} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \text{sen}(\beta - \varphi_{pres})(\varepsilon_{pres} - \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}))}{(1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres}))^2} + \text{arccos} \left( \frac{\varepsilon_{pres} - \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) - \right. \\
& \left. \left. \varepsilon_{pres}^2 \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \text{sen}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \text{cos}(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \right) \text{cos}\varphi_{pres} \left. \right] = 0 \tag{4.80}
\end{aligned}$$

Con las ecuaciones (4.79) y (4.80) se podrá determinar la posición de equilibrio en una chumacera larga que presenta un puerto de inyección lineal con ubicación axial y angular arbitraria. Cuando la posición del puerto de inyección lineal es conocida, las ecuaciones se simplificarán y podrá llegarse a una solución analítica.

Ahora bien, eligiendo la ecuación (4.80), pasando el segundo miembro del lado izquierdo al aparte derecha, resulta:

$$\begin{aligned}
& F_{dim} \left[ -\frac{12\pi\varepsilon_{pres}^2}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)} \text{sen}\varphi_{pres} + \frac{6\pi^2\varepsilon_{pres}}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)^{1/2}} \text{cos}\varphi_{pres} \right] = \\
& -\Delta F_{pres} \left[ \frac{1}{4} \left( -\frac{(-\varepsilon_{pres}+\text{cos}(\beta-\varphi_{pres}))(\varepsilon_{pres}^2+\varepsilon_{pres}\text{cos}(\beta-\varphi_{pres})-2)}{(1-\varepsilon_{pres}\text{cos}(\beta-\varphi_{pres}))^2(1-\varepsilon_{pres}^2)^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\varepsilon_{pres}-2}{(1-\varepsilon_{pres}^2)^2} \right) \text{sen}\varphi_{pres} - \right. \\
& \left. \left( \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1-\varepsilon_{pres}^2}\text{sen}(\beta-\varphi_{pres})}{1-\varepsilon_{pres}\text{cos}(\beta-\varphi_{pres})} - \varepsilon_{pres} \left( \text{arccos} \left( \frac{\varepsilon_{pres}-\text{cos}(\beta-\varphi_{pres})}{1-\varepsilon_{pres}\text{cos}(\beta-\varphi_{pres})} \right) \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\varepsilon_{pres}}{2} \left( \frac{-\sqrt{1-\varepsilon_{pres}^2}\text{sen}(\beta-\varphi_{pres})(\varepsilon_{pres}-\text{cos}(\beta-\varphi_{pres}))}{(1-\varepsilon_{pres}\text{cos}(\beta-\varphi_{pres}))^2} + \text{arccos} \left( \frac{\varepsilon_{pres}-\text{cos}(\beta-\varphi_{pres})}{1-\varepsilon_{pres}\text{cos}(\beta-\varphi_{pres})} \right) \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \varepsilon_{pres}^2 \left( \frac{\sqrt{1-\varepsilon_{pres}^2}\text{sen}(\beta-\varphi_{pres})}{1-\varepsilon_{pres}\text{cos}(\beta-\varphi_{pres})} \right) \right) \right) \text{cos}\varphi_{pres} \right] \quad (4.81)
\end{aligned}$$

Para reducir la ecuación se tomaran los siguientes términos:

$$a = \frac{12\pi\varepsilon_{pres}^2}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)} \quad \text{y} \quad b = \frac{6\pi^2\varepsilon_{pres}}{(2+\varepsilon_{pres}^2)(1-\varepsilon_{pres}^2)^{1/2}} \quad (4.82)$$

Recordando ecuación (4.76)

$$\bar{q}_{prt} = \frac{\Delta F_{pres}}{F_{dim}}$$

De aquí se tomará:

$$C = \frac{\bar{q}_{prt}}{4} \quad (4.83)$$

Sustituyendo (4.82), (4.83) en (4.81), se tiene:

$$\begin{aligned}
& F_{aim}[-a \operatorname{sen} \varphi_{pres} + b \operatorname{cos} \varphi_{pres}] = \\
& -C \left[ \left( \left( -\frac{(-\varepsilon_{pres} + \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres}))(\varepsilon_{pres}^2 + \varepsilon_{pres} \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres}) - 2)}{(1 - \varepsilon_{pres} \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres}))^2 (1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} - \frac{\varepsilon_{pres} - 2}{(1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} \right) \operatorname{sen} \varphi_{pres} - \right. \\
& \left( \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \operatorname{sen}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres})} - \varepsilon_{pres} \left( \operatorname{arccos} \left( \frac{\varepsilon_{pres} - \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \right) - \right. \\
& \left. \frac{\varepsilon_{pres}}{2} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \operatorname{sen}(\beta - \varphi_{pres})(\varepsilon_{pres} - \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres}))}{(1 - \varepsilon_{pres} \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres}))^2} + \operatorname{arccos} \left( \frac{\varepsilon_{pres} - \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) - \right. \\
& \left. \left. \varepsilon_{pres}^2 \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \operatorname{sen}(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres} \operatorname{cos}(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right) \right) \operatorname{cos} \varphi_{pres} \left. \right] \quad (4.84)
\end{aligned}$$



El método que se utilizará para la solución de la ecuación (4.85), será el método iterativo, el cual es un método que trata de resolver la ecuación mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial; por lo tanto la solución será:

$$\begin{aligned}
\varphi_{pres}^{k+1} = & \\
& \arctan \left[ -c \left[ \left( \left( -\frac{(-\varepsilon_{pres} + \cos(\beta - \varphi^k))(\varepsilon_{pres}^2 + \varepsilon_{pres} \cos(\beta - \varphi^k) - 2)}{(1 - \varepsilon_{pres} \cos(\beta - \varphi^k))^2 (1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} - \frac{\varepsilon_{pres} - 2}{(1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} \right) \tan \varphi^k - \right. \right. \right. \\
& \left. \left( \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \sin(\beta - \varphi^k)}{1 - \varepsilon_{pres} \cos(\beta - \varphi^k)} - \varepsilon_{pres} \left( \arccos \left( \frac{\varepsilon_{pres} - \cos(\beta - \varphi^k)}{1 - \varepsilon_{pres} \cos(\beta - \varphi^k)} \right) \right) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\varepsilon_{pres}}{2} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \sin(\beta - \varphi^k) (\varepsilon_{pres} - \cos(\beta - \varphi^k))}{(1 - \varepsilon_{pres} \cos(\beta - \varphi^k))^2} + \arccos \left( \frac{\varepsilon_{pres} - \cos(\beta - \varphi^k)}{1 - \varepsilon_{pres} \cos(\beta - \varphi^k)} \right) \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \varepsilon_{pres}^2 \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \sin(\beta - \varphi^k)}{1 - \varepsilon_{pres} \cos(\beta - \varphi^k)} \right) \right) \right] - b \right] \left( -\frac{1}{a} \right) \quad (4.86)
\end{aligned}$$

Es importante mencionar que se tomará como  $\varphi^k$  inicial la obtenida a partir de la ecuación (4.30); es decir, el ángulo de equilibrio que se obtiene de las condiciones de Gumbel será la estimación inicial.

### 4.3 Cálculo analítico de la posición de equilibrio analizando dos casos especiales

En este trabajo serán analizados 2 casos especiales, con el fin de obtener resultados tangibles; los casos serán:

Inyección en la parte central derecha, es decir en  $\frac{\pi}{2}$

Inyección en la parte central izquierda  $3\frac{\pi}{2}$

#### 4.3.1 Presurización en la parte central derecha de la chumacera

Realizando de esta manera la inyección, el ángulo beta, será:  $\beta = \frac{\pi}{2}$

Sustituyendo el valor de  $\beta$  en ecuación (4.86), se obtendrá la solución. Se realizará un programa en Mathematica 7, para obtener dichos valores.

A continuación se presentan las tablas obtenidas donde se muestra el valor de  $\phi_{pres}$ , a partir de una excentricidad y una fuerza de presurización adimensional dadas. Dichas tablas fueron el resultado de iterar una sola vez.

Para  $\beta = \pi/2$

Tabla 4.1 Valores del ángulo de actitud a diferentes fuerzas de presurización adimensional

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 0$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 1$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 5$ $\varphi_{pres}$
0.05	88.1746°	88.1662°	88.1321°
0.1	86.3391°	86.3241°	86.2635°
0.15	84.4832°	84.4635°	84.3836°
0.20	82.5959°	82.5727°	82.4784°
0.25	80.6655°	80.6395°	80.5343°
0.30	78.6786°	78.6506°	78.537°
0.35	76.6202°	76.5905°	76.4705°
0.40	74.4724°	74.4415°	74.3166°
0.45	72.214°	72.1822°	72.0536°
0.50	69.819°	69.7864°	69.6551°
0.55	67.2542°	67.2212°	67.0879°
0.60	64.4762°	64.4438°	64.3094°
0.65	61.4306°	61.3971°	61.2625°
0.70	58.0353°	58.002°	57.8682°
0.75	54.176°	54.1433°	54.0119°
0.80	49.6745°	49.6429°	49.5162°
0.85	44.2305°	44.201°	44.0827°
0.90	37.2628°	37.2371°	37.1341°
0.95	27.3071°	27.2887°	27.2149°

Tabla 4.2 Valores del ángulo de actitud a diferentes fuerzas de presurización adimensional

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 10$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 20$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 50$ $\varphi_{pres}$
0.05	88.0856°	87.9876°	87.6224°
0.1	86.1848°	86.0169°	85.4116°
0.15	84.2804°	84.0623°	83.2957°
0.20	82.357°	82.1022°	82.2256°
0.25	80.3993°	80.1177°	79.1653°
0.30	78.3918°	78.0903°	77.0854°
0.35	76.3176°	76.0013°	74.9603°
0.40	74.1578°	73.8306°	72.7651°
0.45	71.8904°	71.5551°	70.4737°
0.50	69.4886°	69.1477°	68.057°
0.55	66.9192°	66.5747°	65.4806°
0.60	64.1395°	63.7934°	62.7015°
0.65	61.0925°	60.747°	59.6639°
0.70	57.6995°	57.3574°	56.2913°
0.75	53.8464°	53.5115°	52.474°
0.80	49.3568°	49.035°	48.0439°
0.85	43.9342°	43.635°	42.88°
0.90	37.005°	36.7453°	35.9558°
0.95	27.1225°	26.9373°	26.3779°

Tabla 4.3 Valores del ángulo de actitud a diferentes fuerzas de presurización adimensional

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 100$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 220$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 300$ $\varphi_{pres}$
0.05	86.5921°	35.3005°	-85.3802°
0.1	83.8573°	59.3363°	-73.5344°
0.15	81.4615°	65.8376°	-35.9552°
0.20	79.2401°	66.8823°	21.6022°
0.25	77.1001°	66.5504°	42.9678°
0.30	74.9824°	65.621°	50.0236°
0.35	72.8444°	64.3411°	52.6404°
0.40	70.652°	62.8073°	53.3776°
0.45	68.3737°	61.0586°	53.1121°
0.50	65.9777°	59.1058°	52.2099°
0.55	63.4285°	56.9426°	50.8398°
0.60	60.6837°	54.5485°	49.079°
0.65	57.6891°	51.8888°	46.953°
0.70	54.3722°	48.9102°	44.4502°
0.75	50.6293°	45.532°	41.5233°
0.80	46.3031°	41.6275°	38.0775°
0.85	41.1304°	36.9814°	33.936°
0.90	34.604°	31.173°	28.737°
0.95	25.4335°	23.1059°	21.5075°

Tabla 4.4 Valores del ángulo de actitud a diferentes fuerzas de presurización adimensional

$\epsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 500$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 700$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 1000$ $\varphi_{pres}$
0.05	-88.6211°	-88.1898°	-89.4995°
0.1	-86.8367°	-88.0068°	-88.8002°
0.15	-82.9717°	-86.3079°	-87.8451°
0.20	-77.3905°	-83.8865°	-86.56°
0.25	-68.2249°	-80.4409°	-84.8477°
0.30	-53.3073°	-75.5357°	-82.5801°
0.35	-31.7844°	-68.5806°	-79.5904°
0.40	-8.9280°	-58.9287°	-75.6656°
0.45	8.1154°	-46.3227°	-70.5519°
0.50	18.5526°	-31.7333°	-63.9908°
0.55	24.5264°	-17.4997°	-55.8218°
0.60	27.7607°	-5.7587°	-46.1692°
0.65	29.2503°	2.8316°	-35.6177°
0.70	29.5372°	8.6577°	-25.1395°
0.75	28.9078°	12.3509°	-15.6898°
0.80	27.4914°	14.4285°	-7.8202°
0.85	25.2897°	15.2202°	-1.6344°
0.90	22.1312°	14.8455°	3.0118°
0.95	17.3578°	13.0116°	6.2120°

En la siguiente figura se presentan las diversas posiciones del rotor con varias fuerzas de presión, en

$$\beta = \pi/2$$

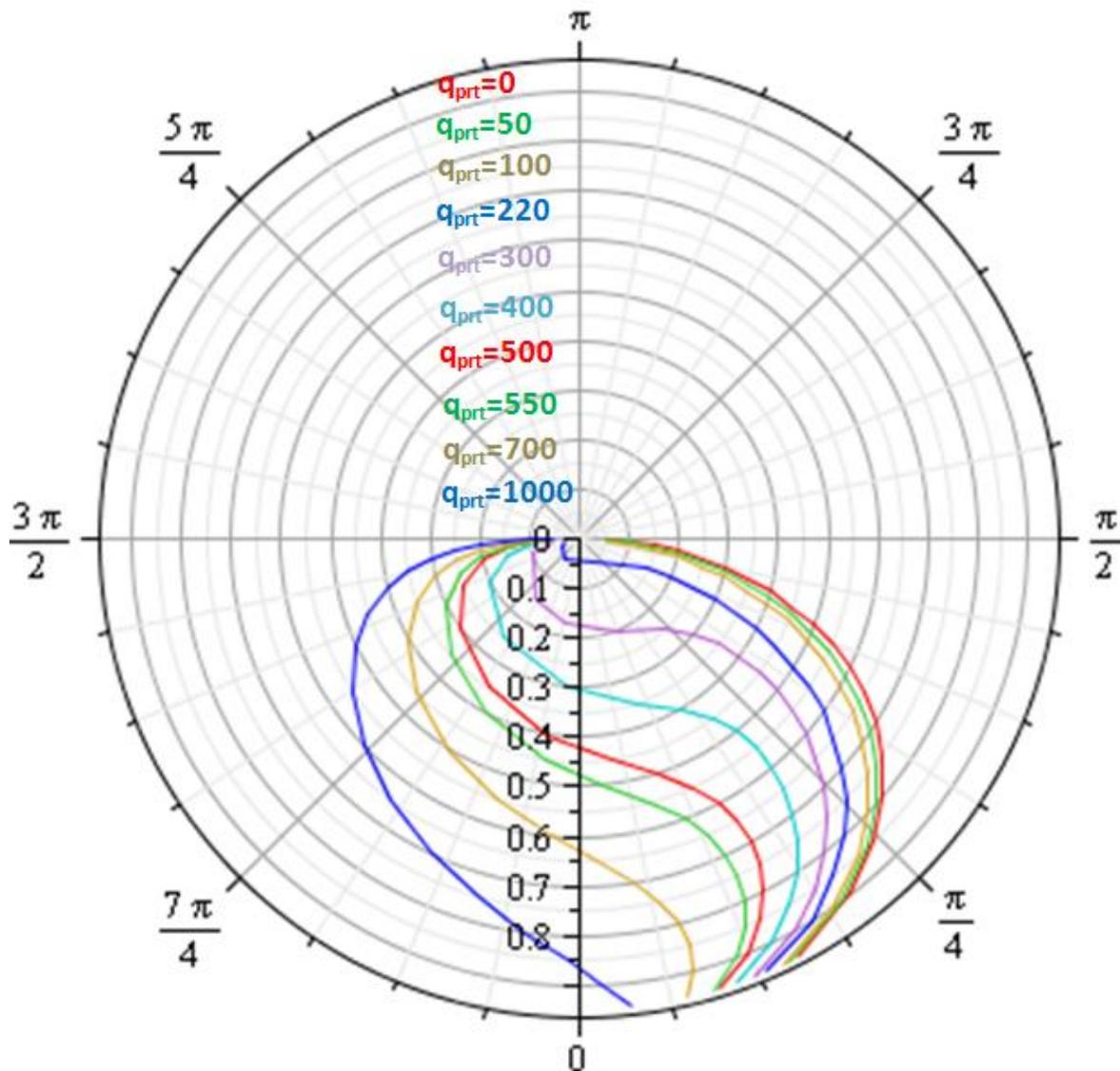


Figura 4.3 Locus de equilibrio del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = \pi/2$

A continuación se muestran las tablas obtenidas donde se muestra el valor de  $\varphi_{pres}$ , a partir de una excentricidad y una fuerza de presurización adimensional dadas. Dichas tablas fueron el resultado de realizar todas las iteraciones pertinentes, para un margen de error no mayor de  $1^\circ$ .

### Para $\beta = \pi/2$

Tabla 4.5 Valores del ángulo de actitud a diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta = \pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 0$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 1$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 5$ $\varphi_{pres}$
0.05	88.1746° $n_{iter=1}$	88.1662° $n_{iter=1}$	88.1321° $n_{iter=1}$
0.1	86.3391° $n_{iter=1}$	86.3241° $n_{iter=1}$	86.2635° $n_{iter=1}$
0.15	84.4832° $n_{iter=1}$	84.4635° $n_{iter=1}$	84.3836° $n_{iter=1}$
0.20	82.5959° $n_{iter=1}$	82.5727° $n_{iter=1}$	82.4784° $n_{iter=1}$
0.25	80.6655° $n_{iter=1}$	80.6395° $n_{iter=1}$	80.5343° $n_{iter=1}$
0.30	78.6786° $n_{iter=1}$	78.6506° $n_{iter=1}$	78.537° $n_{iter=1}$
0.35	76.6202° $n_{iter=1}$	76.5905° $n_{iter=1}$	76.4705° $n_{iter=1}$
0.40	74.4724° $n_{iter=1}$	74.4415° $n_{iter=1}$	74.3166° $n_{iter=1}$
0.45	72.214° $n_{iter=1}$	72.1822° $n_{iter=1}$	72.0536° $n_{iter=1}$
0.50	69.819° $n_{iter=1}$	69.7864° $n_{iter=1}$	69.6551° $n_{iter=1}$
0.55	67.2542° $n_{iter=1}$	67.2212° $n_{iter=1}$	67.0879° $n_{iter=1}$
0.60	64.4762° $n_{iter=1}$	64.4438° $n_{iter=1}$	64.3994° $n_{iter=1}$
0.65	61.4306° $n_{iter=1}$	61.3971° $n_{iter=1}$	61.2625° $n_{iter=1}$
0.70	58.0353° $n_{iter=1}$	58.002° $n_{iter=1}$	57.8682° $n_{iter=1}$
0.75	54.176° $n_{iter=1}$	54.1433° $n_{iter=1}$	54.0119° $n_{iter=1}$
0.80	49.6745° $n_{iter=1}$	49.6429° $n_{iter=1}$	49.5162° $n_{iter=1}$
0.85	44.2305° $n_{iter=1}$	44.201° $n_{iter=1}$	44.0827° $n_{iter=1}$
0.90	37.2628° $n_{iter=1}$	37.2371° $n_{iter=1}$	37.1341° $n_{iter=1}$
0.95	27.3071° $n_{iter=1}$	27.2887° $n_{iter=1}$	27.2149° $n_{iter=1}$

Tabla 4.6 Valores del ángulo de actitud a diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 10$	$\bar{q}_{prt} = 20$	$\bar{q}_{prt} = 50$
	$\varphi_{pres}$	$\varphi_{pres}$	$\varphi_{pres}$
0.05	88.0856° $n_{iter}=1$	87.9876° $n_{iter}=1$	87.6224° $n_{iter}=1$
0.1	86.1848° $n_{iter}=1$	86.0169° $n_{iter}=1$	85.4116° $n_{iter}=1$
0.15	84.2804° $n_{iter}=1$	84.0623° $n_{iter}=1$	82.9692° $n_{iter}=2$
0.20	82.357° $n_{iter}=1$	82.1022° $n_{iter}=1$	80.913° $n_{iter}=2$
0.25	80.3993° $n_{iter}=1$	80.1177° $n_{iter}=1$	78.8759° $n_{iter}=2$
0.30	78.3918° $n_{iter}=1$	78.0903° $n_{iter}=1$	76.8215° $n_{iter}=2$
0.35	76.3176° $n_{iter}=1$	76.0013° $n_{iter}=1$	74.7213° $n_{iter}=2$
0.40	74.1578° $n_{iter}=1$	73.8306° $n_{iter}=1$	72.5491° $n_{iter}=2$
0.45	71.8904° $n_{iter}=1$	71.5551° $n_{iter}=1$	70.2787° $n_{iter}=2$
0.50	69.4886° $n_{iter}=1$	69.1477° $n_{iter}=1$	67.881° $n_{iter}=2$
0.55	66.9192° $n_{iter}=1$	66.5747° $n_{iter}=1$	65.3219° $n_{iter}=2$
0.60	64.1395° $n_{iter}=1$	63.7934° $n_{iter}=1$	62.5587° $n_{iter}=2$
0.65	61.0925° $n_{iter}=1$	60.747° $n_{iter}=1$	59.536° $n_{iter}=2$
0.70	57.6995° $n_{iter}=1$	57.3574° $n_{iter}=1$	56.1778° $n_{iter}=2$
0.75	53.8464° $n_{iter}=1$	53.5115° $n_{iter}=1$	52.3749° $n_{iter}=1$
0.80	49.3568° $n_{iter}=1$	49.035° $n_{iter}=1$	47.96° $n_{iter}=2$
0.85	43.9342° $n_{iter}=1$	43.635° $n_{iter}=1$	42.6593° $n_{iter}=2$
0.90	37.005° $n_{iter}=1$	36.7453° $n_{iter}=1$	35.9084° $n_{iter}=2$
0.95	27.1225° $n_{iter}=1$	26.9373° $n_{iter}=1$	26.3779° $n_{iter}=2$

Tabla 4.7 Valores del ángulo de actitud a diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 60$	$\bar{q}_{prt} = 70$	$\bar{q}_{prt} = 80$
	$\varphi_{pres}$	$\varphi_{pres}$	$\varphi_{pres}$
0.05	87.1346° $n_{iter}=1$	87.2953° $n_{iter}=1$	-90° $n_{iter}=5$
0.1	82.° $n_{iter}=2$	83.9531° $n_{iter}=2$	-90° $n_{iter}=7$
0.15	82.443° $n_{iter}=2$	81.7695° $n_{iter}=2$	-89.9966° $n_{iter}=9$
0.20	80.3754° $n_{iter}=2$	79.7187° $n_{iter}=2$	78.1585° $n_{iter}=4$
0.25	78.3405° $n_{iter}=2$	77.7089° $n_{iter}=2$	76.9527° $n_{iter}=2$
0.30	76.2945° $n_{iter}=2$	75.6886° $n_{iter}=2$	74.985° $n_{iter}=2$
0.35	74.2053° $n_{iter}=2$	73.6238° $n_{iter}=2$	72.964° $n_{iter}=2$
0.40	72.0477° $n_{iter}=2$	71.4861° $n_{iter}=2$	70.8631° $n_{iter}=2$
0.45	69.7867° $n_{iter}=2$	69.2484° $n_{iter}=2$	68.657° $n_{iter}=2$
0.50	67.4013° $n_{iter}=2$	66.882° $n_{iter}=2$	66.3185° $n_{iter}=2$
0.55	64.8544° $n_{iter}=2$	64.3533° $n_{iter}=2$	63.8149° $n_{iter}=2$
0.60	62.1041° $n_{iter}=2$	61.0208° $n_{iter}=2$	61.106° $n_{iter}=2$
0.65	59.0954° $n_{iter}=2$	58.6304° $n_{iter}=2$	58.139° $n_{iter}=2$
0.70	55.7534° $n_{iter}=2$	55.3084° $n_{iter}=2$	54.8415° $n_{iter}=2$
0.75	51.9703° $n_{iter}=2$	51.5488° $n_{iter}=2$	51.1094° $n_{iter}=2$
0.80	47.5812° $n_{iter}=2$	47.1891° $n_{iter}=2$	46.7829° $n_{iter}=2$
0.85	42.3093° $n_{iter}=2$	41.9568° $n_{iter}=2$	41.594° $n_{iter}=2$
0.90	35.62° $n_{iter}=1$	35.3252° $n_{iter}=1$	35.0241° $n_{iter}=2$
0.95	26.1902° $n_{iter}=1$	25.9557° $n_{iter}=2$	25.7522° $n_{iter}=2$

Tabla 4.8 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 90$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 100$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 150$ $\varphi_{pres}$
0.05	-90° n <sub>iter</sub> =5	-90° n <sub>iter</sub> =4	-90° n <sub>iter</sub> =3
0.1	-90° n <sub>iter</sub> =6	-90° n <sub>iter</sub> =5	-90° n <sub>iter</sub> =4
0.15	-89.9998° n <sub>iter</sub> =7	-90° n <sub>iter</sub> =6	-90° n <sub>iter</sub> =4
0.20	-89.9998° n <sub>iter</sub> =10	-89.99° n <sub>iter</sub> =7	-90° n <sub>iter</sub> =5
0.25	75.1083° n <sub>iter</sub> =3	-89.9983° n <sub>iter</sub> =10	-90° n <sub>iter</sub> =5
0.30	73.566° n <sub>iter</sub> =3	71.8051° n <sub>iter</sub> =3	-90° n <sub>iter</sub> =6
0.35	72.2089° n <sub>iter</sub> =2	71.0144° n <sub>iter</sub> =2	-90° n <sub>iter</sub> =7
0.40	70.1645° n <sub>iter</sub> =2	69.151° n <sub>iter</sub> =2	-90° n <sub>iter</sub> =8
0.45	68.0046° n <sub>iter</sub> =2	67.1185° n <sub>iter</sub> =2	-89.9953° n <sub>iter</sub> =8
0.50	65.7047° n <sub>iter</sub> =2	64.9124° n <sub>iter</sub> =2	57.6591° n <sub>iter</sub> =3
0.55	63.235° n <sub>iter</sub> =2	62.5176° n <sub>iter</sub> =2	57.4115° n <sub>iter</sub> =3
0.60	60.5568° n <sub>iter</sub> =2	59.9001° n <sub>iter</sub> =2	55.5215° n <sub>iter</sub> =3
0.65	57.6191° n <sub>iter</sub> =2	57.0147° n <sub>iter</sub> =2	53.1845° n <sub>iter</sub> =2
0.70	54.3511° n <sub>iter</sub> =2	53.7948° n <sub>iter</sub> =2	50.4113° n <sub>iter</sub> =3
0.75	50.6511° n <sub>iter</sub> =2	50.1422° n <sub>iter</sub> =2	47.1527° n <sub>iter</sub> =4
0.80	46.3621° n <sub>iter</sub> =2	45.9039° n <sub>iter</sub> =2	43.483° n <sub>iter</sub> =2
0.85	41.2206° n <sub>iter</sub> =2	40.8217° n <sub>iter</sub> =2	38.7315° n <sub>iter</sub> =2
0.90	34.7163° n <sub>iter</sub> =2	34.3937° n <sub>iter</sub> =2	32.7192° n <sub>iter</sub> =2
0.95	25.5459° n <sub>iter</sub> =2	25.3245° n <sub>iter</sub> =2	24.2483° n <sub>iter</sub> =2

Dividimos aún más los valores de la excentricidad para ver si el salto del ángulo disminuye

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 80$ $\varphi_{pres}$
0.151	-89.9999° n <sub>iter</sub> =9
0.152	-89.9999° n <sub>iter</sub> =9
0.155	-89.9999° n <sub>iter</sub> =9
0.156	-89.9996° n <sub>iter</sub> =9
0.157	-89.9993° n <sub>iter</sub> =10
0.158	79.41° n <sub>iter</sub> =3
0.159	79.3829° n <sub>iter</sub> =4
0.16	79.9966° n <sub>iter</sub> =4
0.17	79.0749° n <sub>iter</sub> =4
0.18	78.7802° n <sub>iter</sub> =3
0.19	78.4741° n <sub>iter</sub> =3

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 90$ $\varphi_{pres}$
0.21	-89.9998° n <sub>iter</sub> =13
0.22	-89.9999° n <sub>iter</sub> =13
0.221	74.7757° n <sub>iter</sub> =4
0.222	74.7751° n <sub>iter</sub> =4
0.23	75.6338° n <sub>iter</sub> =3
0.24	75.3794° n <sub>iter</sub> =3

Como se puede observar el salto no disminuye, por lo que se generan inestabilidades al inyectar lubricante con una fuerza de presurización grande.

En la siguiente figura se presentan las diversas posiciones del rotor con varias fuerzas de presión, en

$$\beta = \pi/2$$

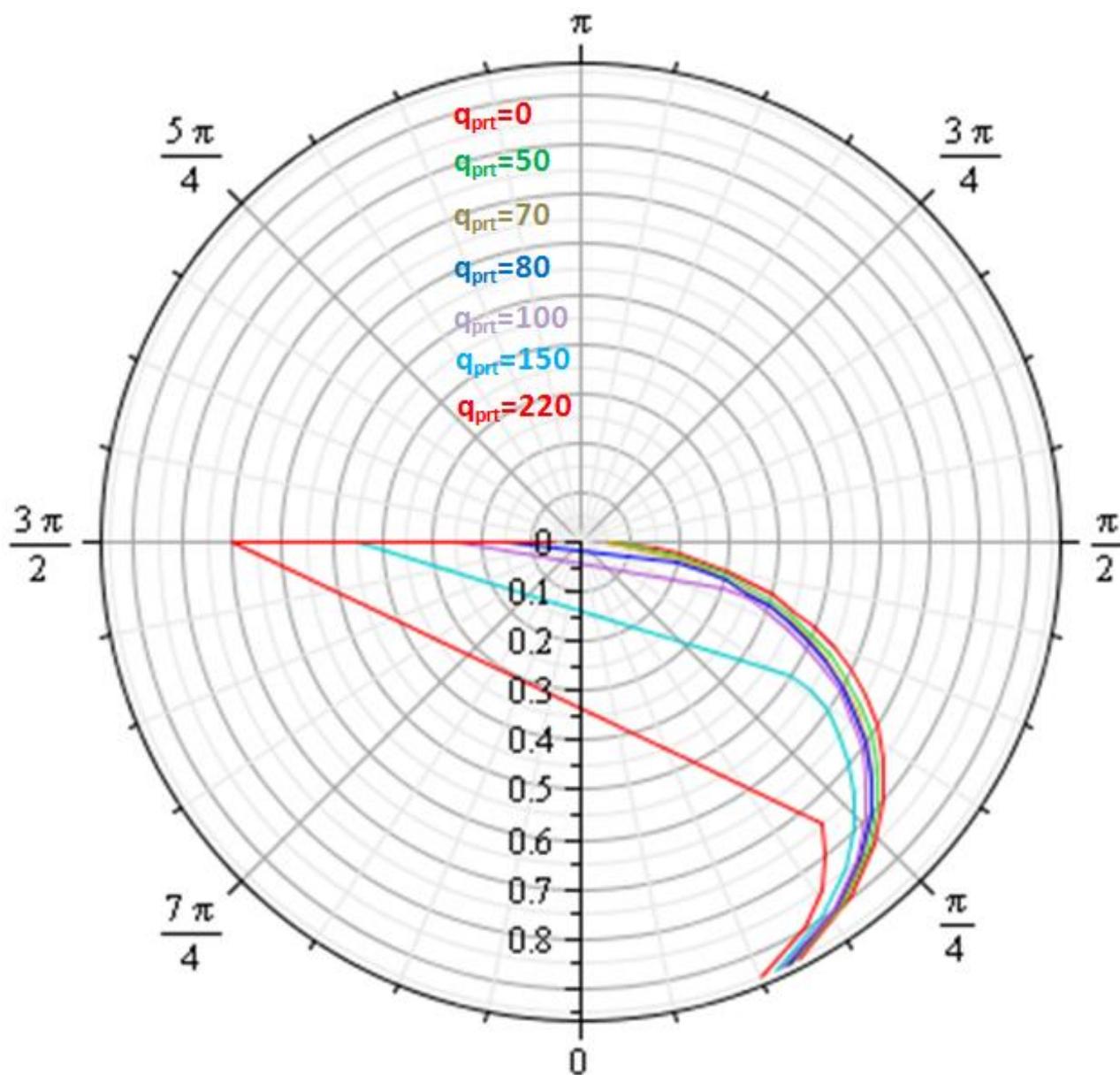


Figura 4.4 Locus de equilibrio del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = \pi/2$

### 4.3.2 Presurización en la parte central izquierda de la chumacera

Realizando de esta manera la inyección, el ángulo beta, será:  $\beta = 3\frac{\pi}{2}$

Sustituyendo el valor de  $\beta$  en ecuación (4.86), se obtendrá la solución. Se realizará un programa en Mathematica 7, para obtener dichos valores.

A continuación se muestran las tablas obtenidas donde se muestra el valor de  $\varphi_{pres}$ , a partir de una excentricidad y una fuerza de presurización adimensional dadas. Dichas tablas fueron el resultado de iterar una sola vez.

$$\beta=3\pi/2$$

Tabla 4.9 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=3\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 0$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 1$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 5$ $\varphi_{pres}$
0.05	88.1746°	88.183°	88.216°
0.1	86.3391°	86.3539°	86.4116°
0.15	84.4832°	84.5029°	84.5792°
0.20	82.5959°	82.619°	82.7099°
0.25	80.6655°	80.6913°	80.7932°
0.30	78.6786°	78.7065°	78.8169°
0.35	76.6202°	76.6497°	76.7666°
0.40	74.4724°	74.5032°	74.6251°
0.45	72.214°	72.2458°	72.3717°
0.50	69.819°	69.8514°	69.9804°
0.55	67.2542°	67.2872°	67.4183°
0.60	64.4762°	64.5105°	64.6429°
0.65	61.4306°	61.464°	61.597°
0.70	58.0353°	58.0686°	58.2009°
0.75	54.176°	54.2087°	54.3389°
0.80	49.6745°	49.7061°	49.8318°
0.85	44.2305°	44.2599°	44.3775°
0.90	37.2628°	37.2885°	37.3911°
0.95	27.3071°	27.3255°	27.3992°

Tabla 4.10 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=3\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 10$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 20$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 50$ $\varphi_{pres}$
0.05	88.2556°	88.3297°	88.5186°
0.1	86.4814°	86.613°	86.9549°
0.15	84.672°	84.8485°	85.3141°
0.20	82.8205°	83.0318°	83.5976°
0.25	80.9175°	81.1563°	81.8033°
0.30	78.9518°	79.2123°	79.9255°
0.35	76.9099°	77.1875°	77.9549°
0.40	74.775°	75.0663°	75.8782°
0.45	72.5267°	72.8288°	73.6774°
0.50	70.1393°	70.45°	71.3284°
0.55	67.5802°	67.8974°	68.7997°
0.60	64.8067°	65.1284°	66.0488°
0.65	61.7616°	62.0856°	63.0177°
0.70	58.3649°	58.6885°	59.6244°
0.75	54.5005°	54.8199°	55.7487°
0.80	49.9881°	50.2977°	51.2027°
0.85	44.5237	44.8141°	45.668°
0.90	37.519°	37.7733°	38.5261°
0.95	27.4911°	27.6745°	28.221°

Tabla 4.11 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=3\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 100$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 220$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 500$ $\varphi_{pres}$
0.05	88.7536°	89.0972°	89.4507°
0.1	87.3935°	88.0632°	88.7893
0.15	85.9278°	86.9023°	88.0126
0.20	84.3613°	85.6175°	87.1176
0.25	82.6952°	84.21°	86.1006
0.30	80.9271°	82.6784°	84.9568
0.35	79.0505°	81.018°	83.6792
0.40	77.0546°	79.2195°	82.2578
0.45	74.9234°	77.2688°	80.6779
0.50	72.6343°	75.1478°	78.9185
0.55	70.1566°	72.8174°	76.9496
0.60	67.4478°	70.2441°	74.728
0.65	64.449°	67.364°	72.1907
0.70	61.0761°	64.0881°	69.2427
0.75	57.204°	60.2816°	65.7355
0.80	52.6358°	55.7282°	61.4221
0.85	47.0353°	50.0517°	55.8551
0.90	39.7465°	42.5073°	48.1085
0.95	29.1196°	31.2131°	35.7546

En la siguiente figura se presentan las diversas posiciones del rotor con varias fuerzas de presión, en

$$\beta = 3\pi/2$$

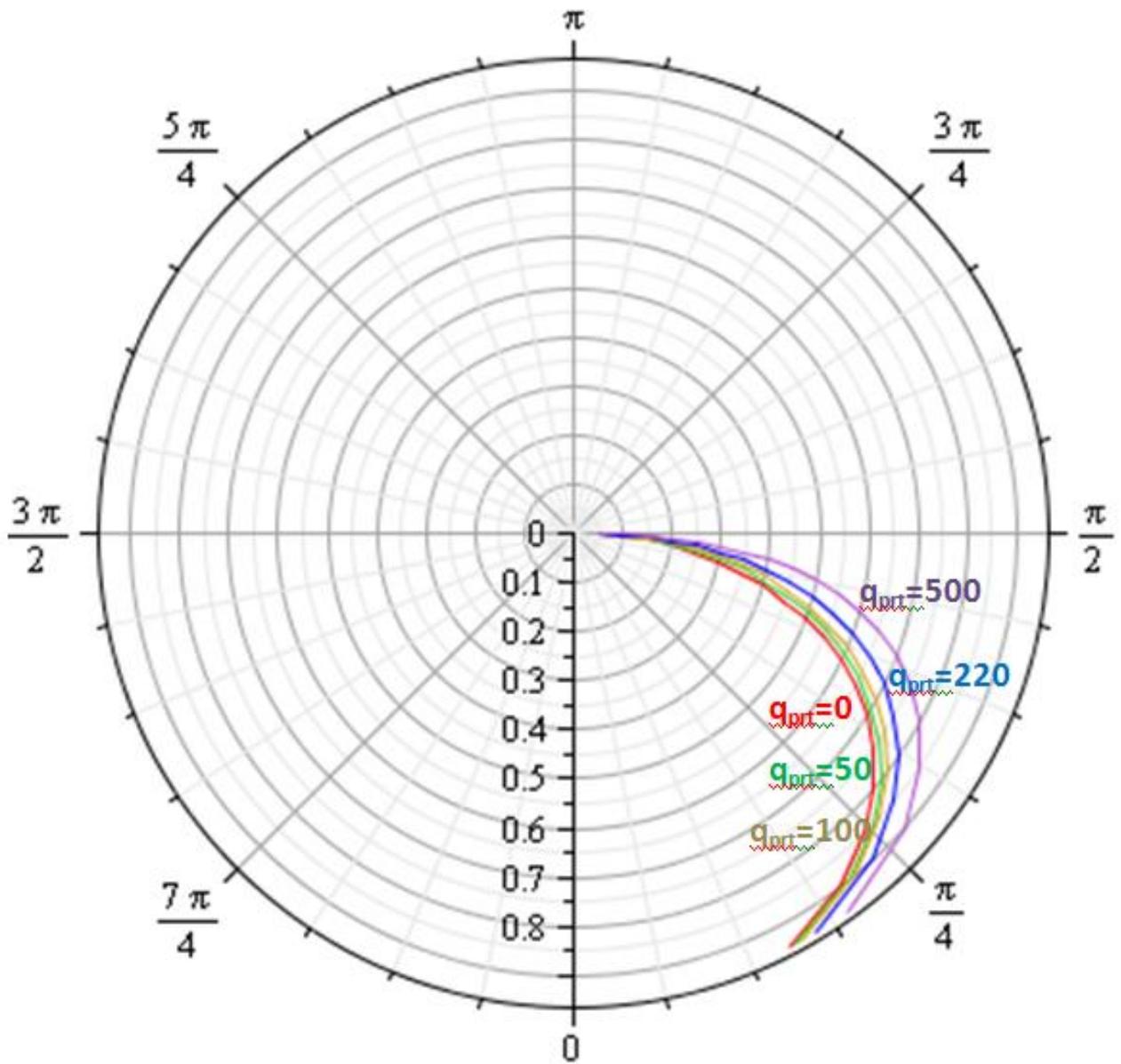


Figura 4.5 Locus de equilibrio del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 3\pi/2$

A continuación se muestran las tablas obtenidas donde se muestra el valor de  $\varphi_{pres}$ , a partir de una excentricidad y una fuerza de presurización adimensional dadas. Dichas tablas fueron el resultado de realizar todas las iteraciones pertinentes, para un margen de error no mayor de  $1^\circ$

**Para  $\beta=3\pi/2$**

Tabla 4.12 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=3\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 0$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 1$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 5$ $\varphi_{pres}$
0.05	88.1746° $n_{iter=1}$	88.183° $n_{iter=1}$	88.216° $n_{iter=1}$
0.1	86.3391° $n_{iter=1}$	86.3539° $n_{iter=1}$	86.4116° $n_{iter=1}$
0.15	84.4832° $n_{iter=1}$	84.5029° $n_{iter=1}$	84.5792° $n_{iter=1}$
0.20	82.5959° $n_{iter=1}$	82.619° $n_{iter=1}$	82.7099° $n_{iter=1}$
0.25	80.6655° $n_{iter=1}$	80.6913° $n_{iter=1}$	80.7932° $n_{iter=1}$
0.30	78.6786° $n_{iter=1}$	78.7065° $n_{iter=1}$	78.8169° $n_{iter=1}$
0.35	76.6202° $n_{iter=1}$	76.6497° $n_{iter=1}$	76.7666° $n_{iter=1}$
0.40	74.4724° $n_{iter=1}$	74.5032° $n_{iter=1}$	74.6251° $n_{iter=1}$
0.45	72.214° $n_{iter=1}$	72.2458° $n_{iter=1}$	72.3717° $n_{iter=1}$
0.50	69.819° $n_{iter=1}$	69.8514° $n_{iter=1}$	69.9804° $n_{iter=1}$
0.55	67.2542° $n_{iter=1}$	67.2872° $n_{iter=1}$	67.4183° $n_{iter=1}$
0.60	64.4762° $n_{iter=1}$	64.5105° $n_{iter=1}$	64.6429° $n_{iter=1}$
0.65	61.4306° $n_{iter=1}$	61.464° $n_{iter=1}$	61.597° $n_{iter=1}$
0.70	58.0353° $n_{iter=1}$	58.0686° $n_{iter=1}$	58.2009° $n_{iter=1}$
0.75	54.176° $n_{iter=1}$	54.2087° $n_{iter=1}$	54.3389° $n_{iter=1}$
0.80	49.6745° $n_{iter=1}$	49.7061° $n_{iter=1}$	49.8318° $n_{iter=1}$
0.85	44.2305° $n_{iter=1}$	44.2599° $n_{iter=1}$	44.3775° $n_{iter=1}$
0.90	37.2628° $n_{iter=1}$	37.2885° $n_{iter=1}$	37.3911° $n_{iter=1}$
0.95	27.3071° $n_{iter=1}$	27.3255° $n_{iter=1}$	27.3992° $n_{iter=1}$

Tabla 4.13 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=3\pi/2$

$\epsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 10$	$\bar{q}_{prt} = 20$	$\bar{q}_{prt} = 50$
	$\varphi_{pres}$	$\varphi_{pres}$	$\varphi_{pres}$
0.05	88.2556° n <sub>iter=1</sub>	88.3297° n <sub>iter=1</sub>	88.5186° n <sub>iter=1</sub>
0.1	86.4814° n <sub>iter=1</sub>	86.613° n <sub>iter=1</sub>	86.9549° n <sub>iter=1</sub>
0.15	84.672° n <sub>iter=1</sub>	84.8485° n <sub>iter=1</sub>	85.3141° n <sub>iter=1</sub>
0.20	82.8205° n <sub>iter=1</sub>	83.0318° n <sub>iter=1</sub>	83.5976° n <sub>iter=1</sub>
0.25	80.9175° n <sub>iter=1</sub>	81.1563° n <sub>iter=1</sub>	81.8033° n <sub>iter=1</sub>
0.30	78.9518° n <sub>iter=1</sub>	79.2123° n <sub>iter=1</sub>	79.8005° n <sub>iter=2</sub>
0.35	76.9099° n <sub>iter=1</sub>	77.1875° n <sub>iter=1</sub>	77.832° n <sub>iter=2</sub>
0.40	74.775° n <sub>iter=1</sub>	75.0663° n <sub>iter=1</sub>	75.759° n <sub>iter=2</sub>
0.45	72.5267° n <sub>iter=1</sub>	72.8288° n <sub>iter=1</sub>	73.5628° n <sub>iter=2</sub>
0.50	70.1393° n <sub>iter=1</sub>	70.45° n <sub>iter=1</sub>	71.2191° n <sub>iter=2</sub>
0.55	67.5802° n <sub>iter=1</sub>	67.8974° n <sub>iter=1</sub>	68.7997° n <sub>iter=2</sub>
0.60	64.8067° n <sub>iter=1</sub>	65.1284° n <sub>iter=1</sub>	65.9513° n <sub>iter=2</sub>
0.65	61.7616° n <sub>iter=1</sub>	62.0856° n <sub>iter=1</sub>	62.9265° n <sub>iter=2</sub>
0.70	58.3649° n <sub>iter=1</sub>	58.6885° n <sub>iter=1</sub>	59.5402° n <sub>iter=2</sub>
0.75	54.5005° n <sub>iter=1</sub>	54.8199° n <sub>iter=1</sub>	55.6722° n <sub>iter=2</sub>
0.80	49.9881° n <sub>iter=1</sub>	50.2977° n <sub>iter=1</sub>	51.1353° n <sub>iter=2</sub>
0.85	44.5237° n <sub>iter=1</sub>	44.8141° n <sub>iter=1</sub>	45.6118° n <sub>iter=2</sub>
0.90	37.519° n <sub>iter=1</sub>	37.7733° n <sub>iter=1</sub>	38.4845° n <sub>iter=2</sub>
0.95	27.4911° n <sub>iter=1</sub>	27.6745° n <sub>iter=1</sub>	28.221° n <sub>iter=1</sub>

Tabla 4.14 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=3\pi/2$

$\epsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 100$	$\bar{q}_{prt} = 220$	$\bar{q}_{prt} = 500$
	$\varphi_{pres}$	$\varphi_{pres}$	$\varphi_{pres}$
0.05	88.7536° n <sub>iter=1</sub>	89.0972° n <sub>iter=1</sub>	88.9255° n <sub>iter=2</sub>
0.1	87.3935° n <sub>iter=1</sub>	87.5109° n <sub>iter=2</sub>	87.806° n <sub>iter=2</sub>
0.15	85.6275° n <sub>iter=2</sub>	86.1635° n <sub>iter=2</sub>	87.351° n <sub>iter=3</sub>
0.20	84.0202° n <sub>iter=2</sub>	84.7386° n <sub>iter=2</sub>	86.2477° n <sub>iter=3</sub>
0.25	82.3304° n <sub>iter=2</sub>	83.2287° n <sub>iter=2</sub>	85.034° n <sub>iter=3</sub>
0.30	80.5508° n <sub>iter=2</sub>	81.6246° n <sub>iter=2</sub>	83.7071° n <sub>iter=3</sub>
0.35	78.6714° n <sub>iter=2</sub>	79.9152° n <sub>iter=2</sub>	82.2603° n <sub>iter=3</sub>
0.40	76.6786° n <sub>iter=2</sub>	78.0866° n <sub>iter=2</sub>	80.6838° n <sub>iter=3</sub>
0.45	74.5549° n <sub>iter=2</sub>	76.3965° n <sub>iter=3</sub>	78.9622° n <sub>iter=3</sub>
0.50	72.2762° n <sub>iter=2</sub>	74.2537° n <sub>iter=3</sub>	77.074° n <sub>iter=3</sub>
0.55	69.8112° n <sub>iter=2</sub>	71.6722° n <sub>iter=2</sub>	74.989° n <sub>iter=3</sub>
0.60	67.1171° n <sub>iter=2</sub>	69.1146° n <sub>iter=2</sub>	72.6642° n <sub>iter=3</sub>
0.65	64.1351° n <sub>iter=2</sub>	66.2599° n <sub>iter=2</sub>	70.0377° n <sub>iter=3</sub>
0.70	60.7815° n <sub>iter=2</sub>	63.0208° n <sub>iter=2</sub>	67.0189° n <sub>iter=3</sub>
0.75	56.9322° n <sub>iter=2</sub>	59.2664° n <sub>iter=2</sub>	63.4673° n <sub>iter=3</sub>
0.80	52.3923° n <sub>iter=2</sub>	54.7879° n <sub>iter=2</sub>	59.1533° n <sub>iter=3</sub>
0.85	46.8285° n <sub>iter=2</sub>	49.223° n <sub>iter=2</sub>	53.667° n <sub>iter=3</sub>
0.90	39.5904° n <sub>iter=2</sub>	41.8533° n <sub>iter=2</sub>	46.1698° n <sub>iter=3</sub>
0.95	28.0364° n <sub>iter=2</sub>	30.8438° n <sub>iter=2</sub>	34.4558° n <sub>iter=3</sub>

En la siguiente figura se presentan las diversas posiciones del rotor con varias fuerzas de presión, en

$$\beta = 3\pi/2$$

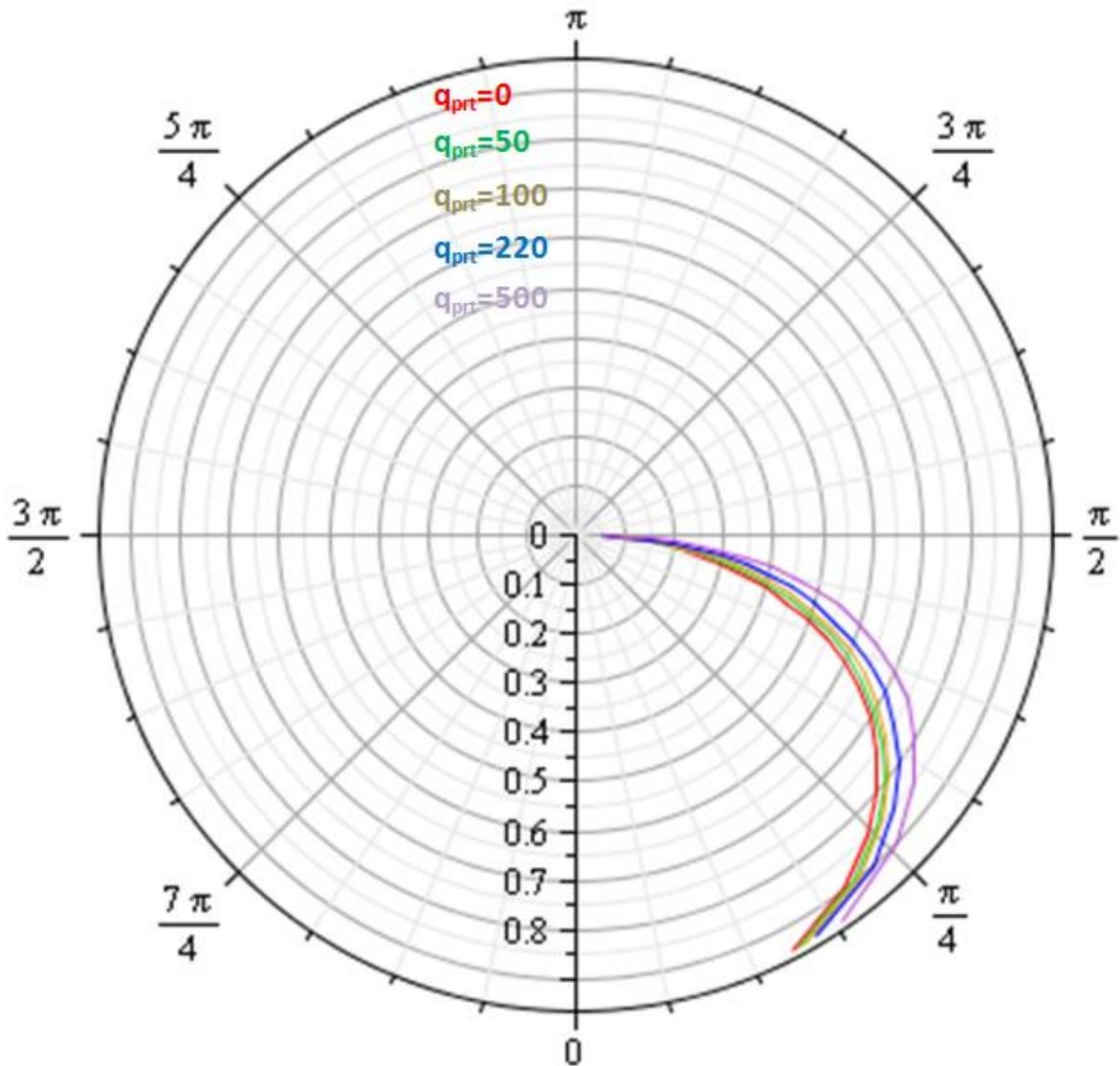


Figura 4.6 Locus de equilibrio del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = 3\pi/2$

#### 4.4 Cálculo analítico de la posición de equilibrio tomando en cuenta cavitación en la parte no presurizada

En esta sección se analizará como obtener la posición de equilibrio, tomando en cuenta la cavitación, en el modelo clásico (condiciones de Swift-Stieber) y luego se le sumará a la presión total, esto con el fin de reducir un tanto el margen de error, es importante hacer hincapié en que la cavitación sólo será tomada para el caso clásico [2].

Utilizando las condiciones de Swift–Stieber:

$$\bar{p}_{(\theta_{cav})} = 0 \quad (4.86)$$

$$\left. \frac{d\bar{p}}{d\theta} \right|_{\theta_{cav}} = 0 \quad (4.87)$$

Sustituyendo  $\bar{p}_{(\theta)}$  de ecuación (3.9) en ecuación (4.87), se tendrá

$$h_0 = h_{(\theta_{cav})} \quad (4.88)$$

Por lo tanto ecuación (3.9) queda:

$$\bar{p}(\theta) = 12\pi \int_0^\theta \frac{h(\theta') - h_{(\theta_{cav})}}{h^3(\theta')} d\theta \quad (4.89)$$

El valor de  $\theta_{cav}$  será determinado por la condición de contorno de ecuación (4.86), obteniendo:

$$\int_0^\theta \frac{h(\theta') - h_{(\theta_{cav})}}{h^3(\theta')} d\theta = 0 \quad (4.90)$$

Aquí  $\gamma_{cav}$  corresponde a  $\theta_{cav}$ , haciendo uso de:

$$h_{(\theta_{cav})} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \gamma_{cav}} \quad (4.91)$$

Se tendrá:

$$\varepsilon(\sin \gamma_{cav} \cos \gamma_{cav} - \gamma_{cav}) + 2(\sin \gamma_{cav} - \gamma_{cav} \cos \gamma_{cav}) = 0 \quad (4.92)$$

Las componentes adimensionales de las fuerzas se obtienen de ecuaciones (4.11), (4.12), (4.89) y (4.91):

$$f_R = -\frac{3\pi\varepsilon(1-\cos\gamma_{cav})^2}{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon\cos\gamma_{cav})} \quad \text{y} \quad f_T = -\frac{6\pi(\gamma_{cav}\cos\gamma_{cav}-\sin\gamma_{cav})}{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon\cos\gamma_{cav})} \quad (4.93)$$

El número de Sommerfeld será:

$$\frac{1}{S} = \frac{3\pi}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}(1-\varepsilon\cos\gamma_{cav})} \left[ \frac{\varepsilon^2(1-\cos\gamma_{cav})^4}{1-\varepsilon^2} + 4(\gamma_{cav}\cos\gamma_{cav} - \sin\gamma_{cav})^2 \right]^{1/2} \quad (4.94)$$

Y el ángulo de actitud, será:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2(\sin\gamma_{cav}-\gamma_{cav}\cos\gamma_{cav})\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1-\varepsilon\cos\gamma_{cav})^2 \varepsilon}\right) \quad (4.95)$$

Los valores de  $\gamma_{cav}$  y  $\theta_{cav}$ , se muestran en la siguiente tabla (Szeri y Powers, 1967); estos datos representan la solución exacta de la ecuación (4.92):

$\varepsilon$	$\gamma_{cav} (rad)$	$\theta_{cav}(rad)$
0.1	4.44510	4.34974
0.2	4.39769	4.21195
0.3	4.35099	4.08021
0.4	4.30484	3.95451
0.5	4.25905	3.83438
0.6	4.212203	3.71892
0.7	4.16785	3.60645
0.8	4.12203	3.49369
0.9	4.07574	3.37195

Posición de los límites de cavitación en chumaceras largas

Ahora tomando:

$$a = \frac{3\pi\varepsilon(1-\cos\gamma_{cav})^2}{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon\cos\gamma_{cav})} \quad y \quad b = \frac{6\pi(\gamma_{cav}\cos\gamma_{cav}-\sin\gamma_{cav})}{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon\cos\gamma_{cav})} \quad (4.96)$$

Los valores de a y b dependen de  $\gamma_{cav}$  por lo que se obtendrán con ayuda de la tabla.

Considerando lo dicho en el renglón anterior, basta con sustituir los valores encontrados de a y b, en ecuación (4.86) y se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_{pres}^{k+1} = & \\ & \arctan \left[ -c \left[ \left( -\frac{(-\varepsilon_{pres} + \cos(\beta - \varphi_{pres}))(\varepsilon_{pres}^2 + \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres}) - 2)}{(1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres}))^2 (1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} - \frac{\varepsilon_{pres} - 2}{(1 - \varepsilon_{pres}^2)^2} \right) \tan\varphi^k - \right. \right. \\ & \left( \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \sin(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres})} - \varepsilon_{pres} \left( \arccos\left(\frac{\varepsilon_{pres} - \cos(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres})}\right) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\varepsilon_{pres}}{2} \left( \frac{-\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \sin(\beta - \varphi_{pres})(\varepsilon_{pres} - \cos(\beta - \varphi_{pres}))}{(1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres}))^2} + \arccos\left(\frac{\varepsilon_{pres} - \cos(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres})}\right) \right) \right) - \right. \\ & \left. \left. \varepsilon_{pres}^2 \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_{pres}^2} \sin(\beta - \varphi_{pres})}{1 - \varepsilon_{pres}\cos(\beta - \varphi_{pres})} \right) \right] \right] + b \left[ \left( -\frac{1}{a} \right) \right] \quad (4.97) \end{aligned}$$

Esta es la ecuación final con la cual se logrará obtener los valores de  $\varphi_{pres}$ , tomando en cuenta el fenómeno de cavitación en la parte no presurizada. Es importante mencionar que se resolverá mediante el método iterativo y tomaremos como  $\varphi^k$  inicial la obtenida a partir de la ecuación (4.95). Con esto se espera disminuir el error que genera la cavitación.

#### 4.4.1 Presurización en la parte central derecha de la chumacera

Realizando de esta manera la inyección, el ángulo beta, será:  $\beta = \frac{\pi}{2}$

Sustituyendo el valor de  $\beta$  en ecuación (4.97), se realizará un programa en Mathematica 7, para obtener dichos valores.

A continuación se presentan las tablas obtenidas donde se muestra el valor de  $\varphi_{pres}$ , a partir de una excentricidad y una fuerza de presurización adimensional dadas. Dichas tablas fueron el resultado de realizar todas las iteraciones pertinentes, para un margen de error no mayor de  $1^\circ$ .

**Para  $\beta = \pi/2$**

Tabla 4.15 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta = \pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 0$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 1$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 5$ $\varphi_{pres}$
0.1	69.0315° $n_{iter=1}$	68.6801° $n_{iter=1}$	66.9702° $n_{iter=2}$
0.20	66.8996° $n_{iter=1}$	66.7329° $n_{iter=1}$	66.0426° $n_{iter=1}$
0.30	64.464° $n_{iter=1}$	64.3556° $n_{iter=1}$	63.9134° $n_{iter=1}$
0.40	61.6381° $n_{iter=1}$	61.5577° $n_{iter=1}$	61.2316° $n_{iter=1}$
0.50	58.2964° $n_{iter=1}$	58.2322° $n_{iter=1}$	57.9729° $n_{iter=1}$
0.60	54.2338° $n_{iter=1}$	54.1803° $n_{iter=1}$	53.9652° $n_{iter=1}$
0.70	49.0975° $n_{iter=1}$	49.0524° $n_{iter=1}$	48.8712° $n_{iter=1}$
0.80	42.1809° $n_{iter=1}$	42.1437° $n_{iter=1}$	41.9948° $n_{iter=1}$
0.90	31.6664° $n_{iter=1}$	31.6401° $n_{iter=1}$	31.5344° $n_{iter=1}$

Tabla 4.16 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 10$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 15$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 25$ $\varphi_{pres}$
0.1	63.9268° $n_{iter}=2$	55.1495° $n_{iter}=5$	-89.9878° $n_{iter}=7$
0.20	64.9697° $n_{iter}=2$	63.7456° $n_{iter}=2$	60.0743° $n_{iter}=3$
0.30	63.3404° $n_{iter}=1$	62.6121° $n_{iter}=2$	61.0531° $n_{iter}=2$
0.40	60.8144° $n_{iter}=1$	60.3235° $n_{iter}=2$	59.3045° $n_{iter}=2$
0.50	57.6434° $n_{iter}=1$	57.3078° $n_{iter}=1$	56.5136° $n_{iter}=2$
0.60	53.693° $n_{iter}=1$	53.4173° $n_{iter}=1$	52.7913° $n_{iter}=2$
0.70	48.6427° $n_{iter}=1$	48.4121° $n_{iter}=1$	47.9041° $n_{iter}=2$
0.80	41.8077° $n_{iter}=1$	41.6195° $n_{iter}=1$	41.2398° $n_{iter}=1$
0.90	31.402° $n_{iter}=1$	31.2692° $n_{iter}=1$	31.0025° $n_{iter}=1$

Tabla 4.17 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 35$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 50$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 70$ $\varphi_{pres}$
0.1	-89.9963° $n_{iter}=5$	-89.9934° $n_{iter}=4$	-89.9993° $n_{iter}=4$
0.20	49.5721° $n_{iter}=6$	-89.9917° $n_{iter}=7$	-89.9867° $n_{iter}=5$
0.30	59.1331° $n_{iter}=2$	54.1979° $n_{iter}=3$	-89.9743° $n_{iter}=9$
0.40	58.1448° $n_{iter}=2$	56.0746° $n_{iter}=2$	51.563° $n_{iter}=3$
0.50	55.6841° $n_{iter}=2$	54.2858° $n_{iter}=2$	52.0678° $n_{iter}=2$
0.60	52.1472° $n_{iter}=2$	51.0973° $n_{iter}=2$	49.5173° $n_{iter}=2$
0.70	47.3875° $n_{iter}=2$	46.5621° $n_{iter}=2$	45.3636° $n_{iter}=2$
0.80	40.8057° $n_{iter}=1$	40.1656° $n_{iter}=2$	39.2596° $n_{iter}=2$
0.90	30.7343° $n_{iter}=1$	30.2809° $n_{iter}=2$	29.6867° $n_{iter}=2$

Tabla 4.18 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 100$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 150$ $\varphi_{pres}$
0.1	-89.9939° $n_{iter}=3$	-89.9987° $n_{iter}=3$
0.20	-89.9855° $n_{iter}=4$	-89.9991° $n_{iter}=4$
0.30	-89.9958° $n_{iter}=6$	-89.9688° $n_{iter}=4$
0.40	-89.9884° $n_{iter}=10$	-89.9974° $n_{iter}=6$
0.50	46.0017° $n_{iter}=4$	-89.9835° $n_{iter}=8$
0.60	46.2873° $n_{iter}=3$	-89.9941° $n_{iter}=10$
0.70	43.3186° $n_{iter}=2$	-89.9979° $n_{iter}=20$
0.80	37.7759° $n_{iter}=2$	34.6594° $n_{iter}=3$
0.90	28.7491° $n_{iter}=2$	27.0511° $n_{iter}=2$

En la siguiente figura se presentan las diversas posiciones del rotor con varias fuerzas de presión, en

$$\beta = \pi/2$$

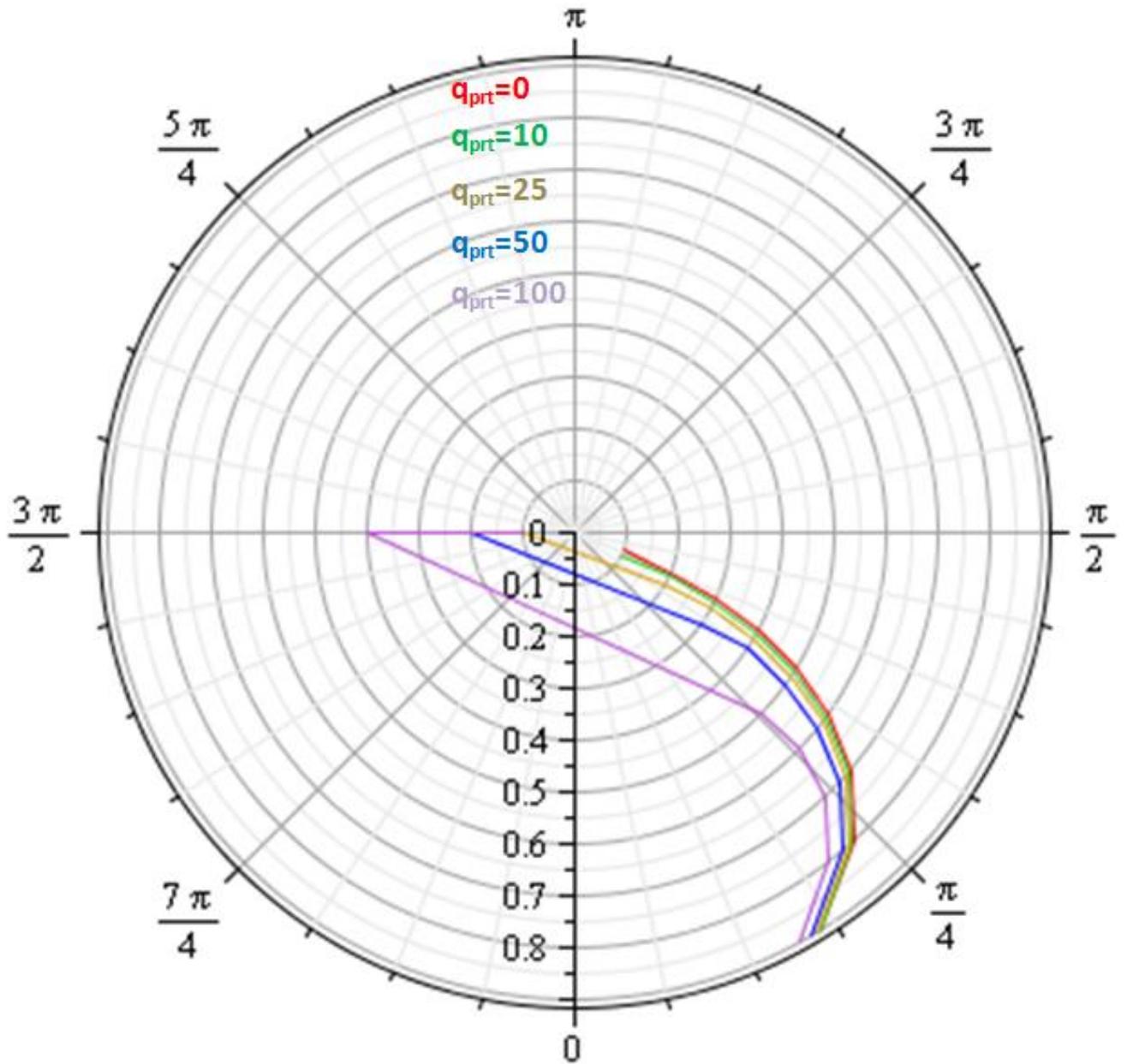


Figura 4.7 Locus de equilibrio del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta = \pi/2$

#### 4.4.2 Presurización en la parte central izquierda de la chumacera

Realizando de esta manera la inyección, el ángulo beta, será:  $\beta = 3\frac{\pi}{2}$

Sustituyendo el valor de  $\beta$  en ecuación (4.97), se realizará un programa en Mathematica 7, para obtener dichos valores.

A continuación se presentan las tablas obtenidas donde se muestra el valor de  $\varphi_{pres}$ , a partir de una excentricidad y una fuerza de presurización adimensional dadas. Dichas tablas fueron el resultado de realizar todas las iteraciones pertinentes, para un margen de error no mayor de  $1^\circ$ .

**Para  $\beta=3\pi/2$**

Tabla 4.19 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=3\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 0$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 1$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 5$ $\varphi_{pres}$
0.1	69.0315° $n_{iter}=1$	69.3714° $n_{iter}=1$	70.5146° $n_{iter}=2$
0.20	66.8996° $n_{iter}=1$	67.0641° $n_{iter}=1$	67.7005° $n_{iter}=1$
0.30	64.464° $n_{iter}=1$	64.5715° $n_{iter}=1$	64.9932° $n_{iter}=1$
0.40	61.6381° $n_{iter}=1$	61.7181° $n_{iter}=1$	62.0342° $n_{iter}=1$
0.50	58.2964° $n_{iter}=1$	58.3604° $n_{iter}=1$	58.6142° $n_{iter}=1$
0.60	54.2338° $n_{iter}=1$	54.2871° $n_{iter}=1$	54.499° $n_{iter}=1$
0.70	49.0975° $n_{iter}=1$	49.1426° $n_{iter}=1$	49.3219° $n_{iter}=1$
0.80	42.1809° $n_{iter}=1$	42.2179° $n_{iter}=1$	42.3658° $n_{iter}=1$
0.90	31.6664° $n_{iter}=1$	31.6928° $n_{iter}=1$	31.7981° $n_{iter}=1$

Tabla 4.20 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=3\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 10$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 20$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 50$ $\varphi_{pres}$
0.1	71.6305° $n_{iter=2}$	73.1938° $n_{iter=2}$	76.6707° $n_{iter=3}$
0.20	68.3487° $n_{iter=2}$	69.4745° $n_{iter=2}$	72.0229° $n_{iter=3}$
0.30	65.5023° $n_{iter=1}$	66.3107° $n_{iter=2}$	68.253° $n_{iter=2}$
0.40	62.4202° $n_{iter=1}$	63.0796° $n_{iter=2}$	64.7616° $n_{iter=2}$
0.50	58.9262° $n_{iter=1}$	59.4825° $n_{iter=2}$	60.9593° $n_{iter=2}$
0.60	54.7608° $n_{iter=1}$	55.2744° $n_{iter=1}$	56.5519° $n_{iter=2}$
0.70	49.5442° $n_{iter=1}$	49.9829° $n_{iter=1}$	51.1227° $n_{iter=2}$
0.80	42.5496° $n_{iter=1}$	42.9141° $n_{iter=1}$	43.8968° $n_{iter=2}$
0.90	31.9294° $n_{iter=1}$	32.1908° $n_{iter=1}$	32.9232° $n_{iter=2}$

Tabla 4.21 Valores del ángulo de actitud diferentes fuerzas de presurización adimensional y  $\beta=3\pi/2$

$\varepsilon_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 100$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 220$ $\varphi_{pres}$	$\bar{q}_{prt} = 500$ $\varphi_{pres}$
0.1	79.0591° $n_{iter=5}$	81.1404° $n_{iter=6}$	84.2665° $n_{iter=9}$
0.20	74.7116° $n_{iter=3}$	77.7674° $n_{iter=5}$	8.9256° $n_{iter=7}$
0.30	70.7694° $n_{iter=3}$	73.7512° $n_{iter=4}$	77.3084° $n_{iter=6}$
0.40	66.9911° $n_{iter=3}$	70.5066° $n_{iter=3}$	74.4222° $n_{iter=5}$
0.50	62.8432° $n_{iter=2}$	66.3916° $n_{iter=3}$	70.2009° $n_{iter=4}$
0.60	58.3259° $n_{iter=2}$	61.7157° $n_{iter=3}$	65.9528° $n_{iter=3}$
0.70	52.7709° $n_{iter=2}$	56.0036° $n_{iter=3}$	60.5526° $n_{iter=4}$
0.80	45.3711° $n_{iter=2}$	48.1705° $n_{iter=2}$	53.3762° $n_{iter=3}$
0.90	34.0661° $n_{iter=2}$	36.4202° $n_{iter=2}$	40.9743° $n_{iter=3}$

En la siguiente figura se presentan las diversas posiciones del rotor con varias fuerzas de presión, en

$$\beta = -\pi/2$$

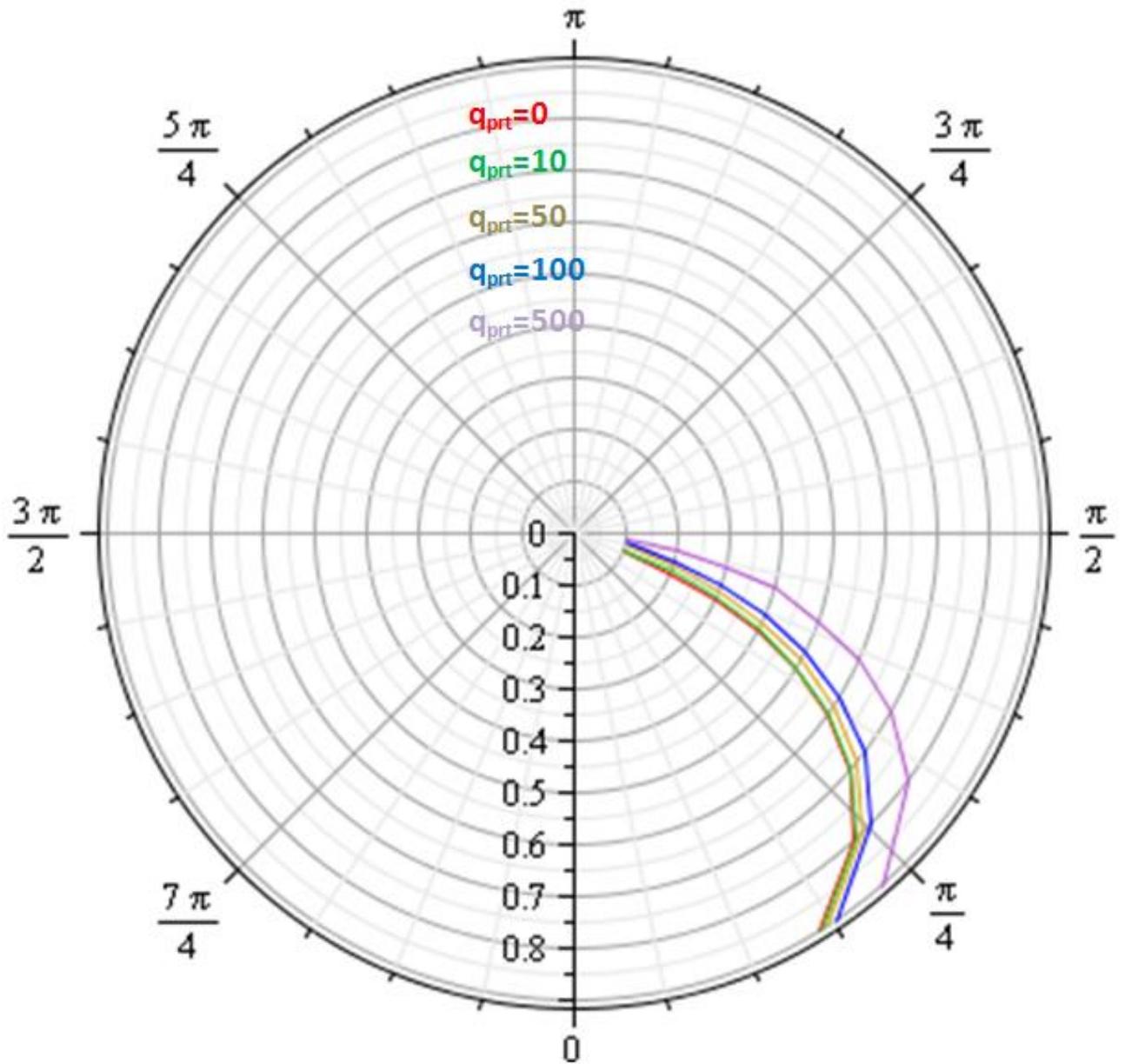


Figura 4.8 Locus de equilibrio del rotor utilizando diferentes presurizaciones para  $\beta=3\pi/2$

#### 4.5 Graficas del campo de presión total con $\phi_{pres}$

En esta sección se graficarán los campos de presión total. En el capítulo III, se graficaron algunos campos pero aún no se conocía el ángulo  $\phi_{pres}$ , por lo que se tomó uno de las tablas de Khonsari; ahora ya se ha logrado calcular el ángulo  $\phi_{pres}$ :

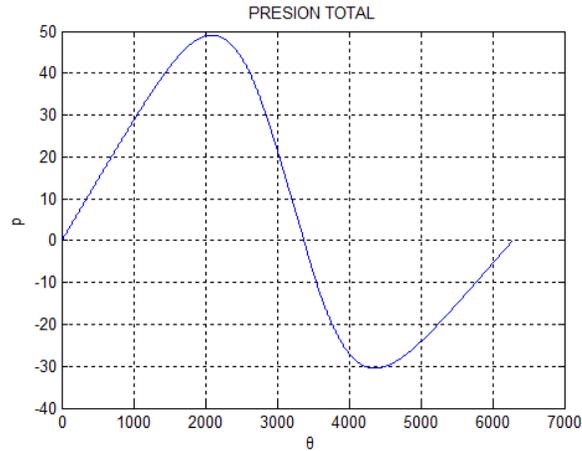


Figura 4.9 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 10$ ,  $\phi_{pres}$

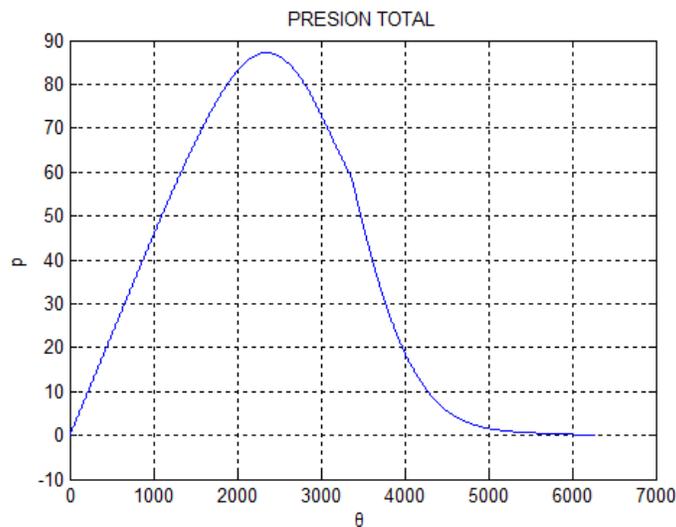


Figura 4.10 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 50$ ,  $\phi_{pres}$

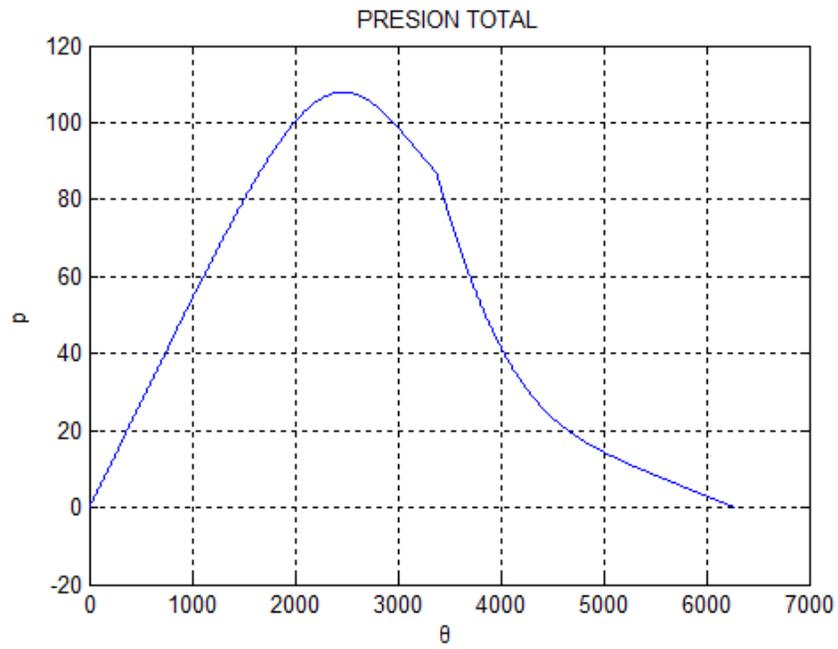


Figura 4.11 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 70$ ,  $\varphi_{pres}$

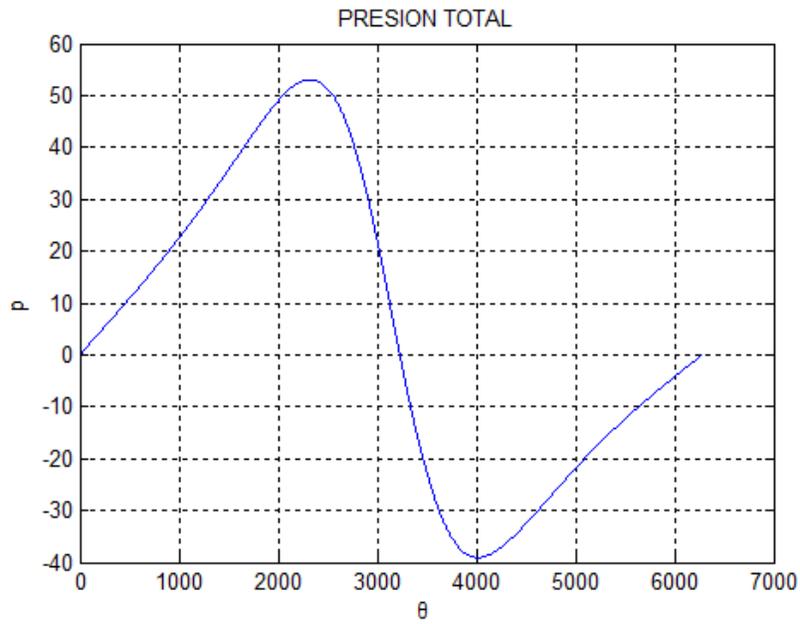


Figura 4.12 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 10$ ,  $\varphi_{pres}$

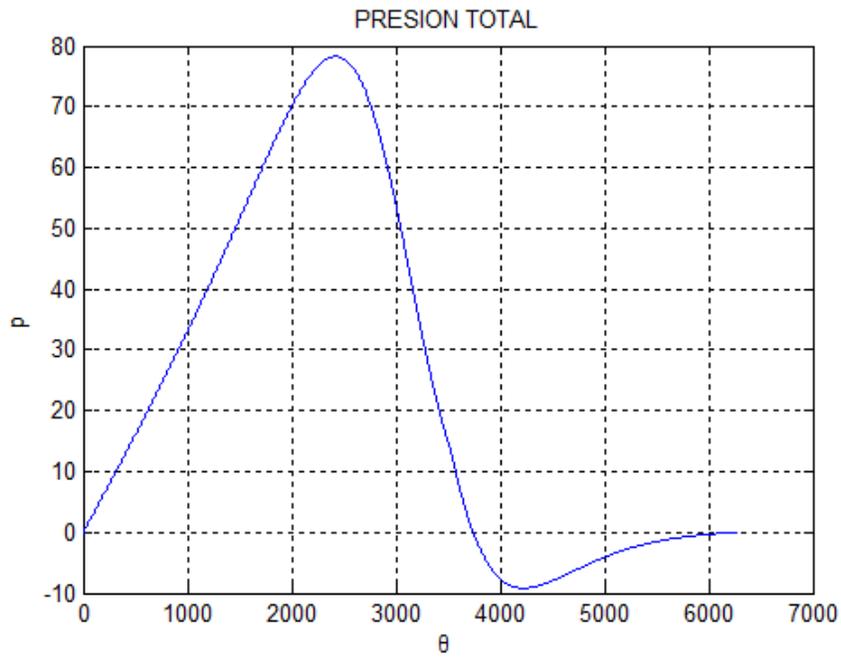


Figura 4.13 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 50$ ,  $\varphi_{pres}$

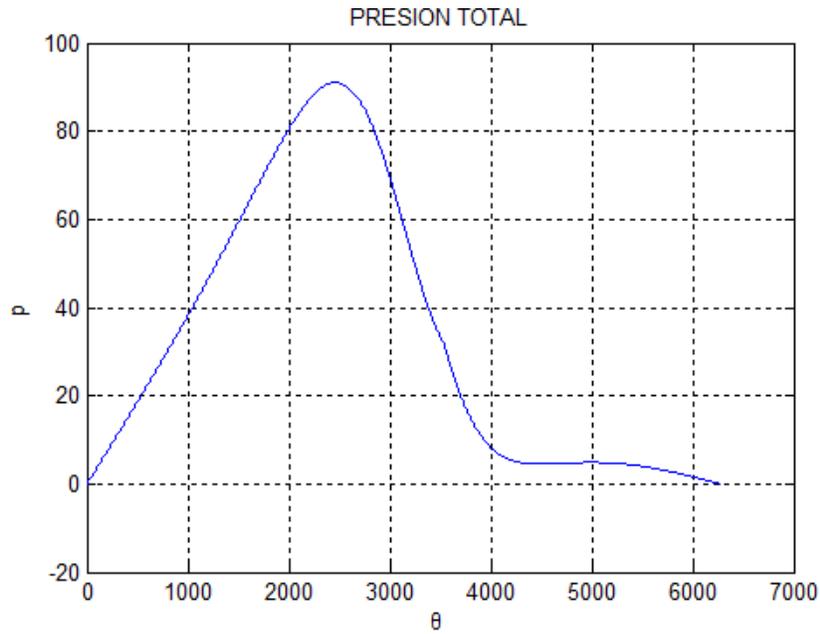


Figura 4.14 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 70$ ,  $\varphi_{pres}$

### INYECCIÓN $3\pi/2$

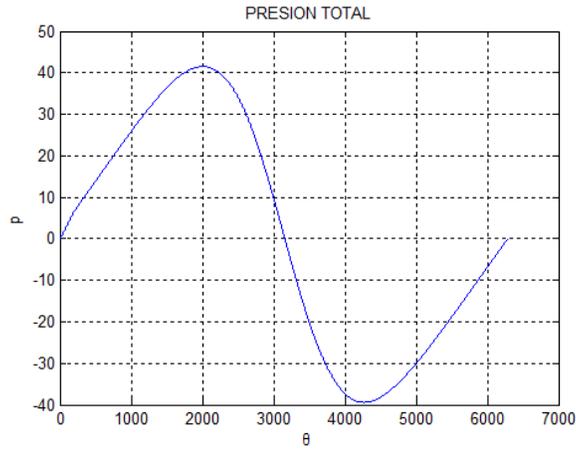


Figura 4.15 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 10$ ,  $\varphi_{pres}$

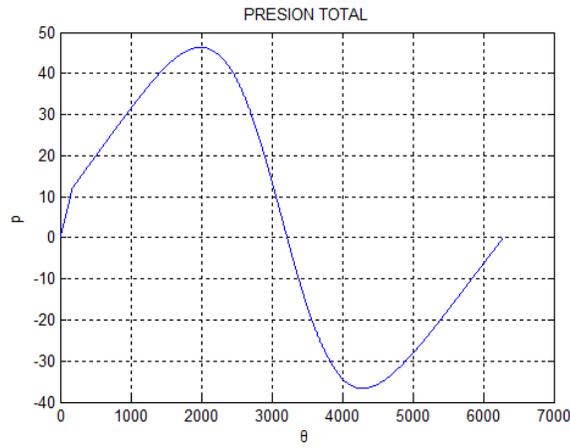


Figura 4.16 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 50$ ,  $\varphi_{pres}$

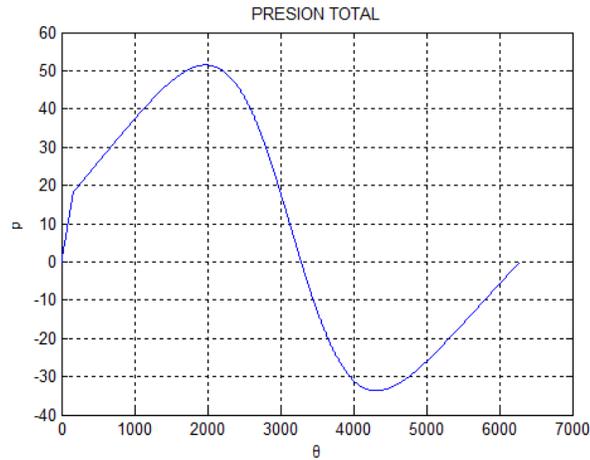


Figura 4.17 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.3$ ,  $\bar{q}_{prt} = 100$ ,  $\varphi_{pres}$

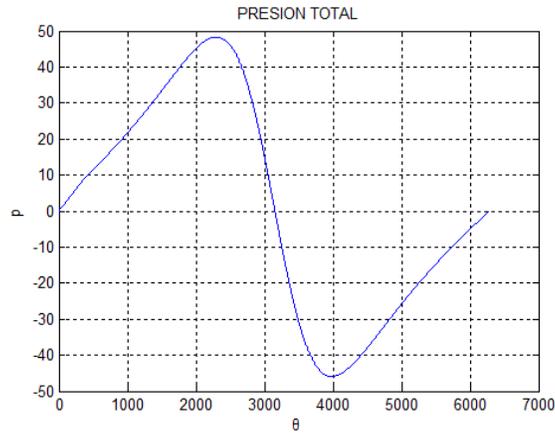


Figura4.18 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 10$ ,  $\varphi_{pres}$

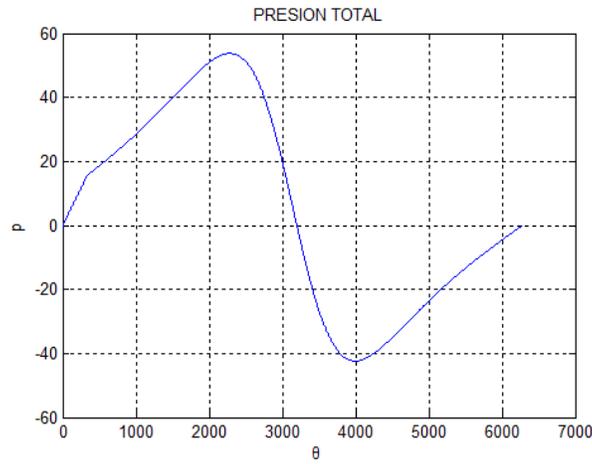


Figura 4.19 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 50$ ,  $\varphi_{pres}$

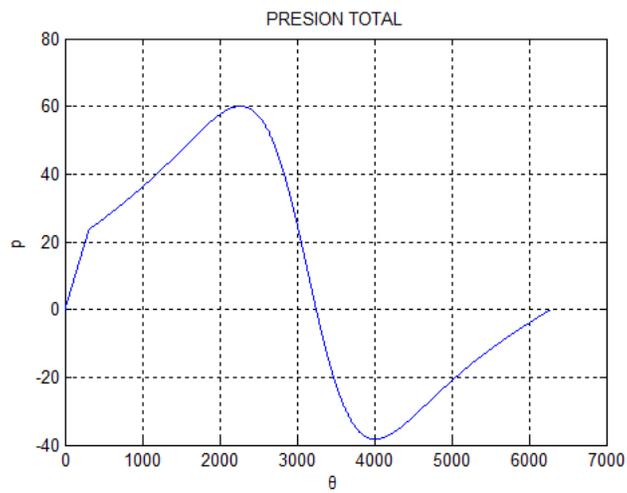


Figura 4.20 Campo de presión total en chumacera híbrida larga,  $\varepsilon=0.5$ ,  $\bar{q}_{prt} = 100$ ,  $\varphi_{pres}$

# Capítulo V

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS

## FUTUROS

## 5.1 Conclusiones

1. En el presente trabajo se ha logrado llegar a un modelo analítico para la determinación del campo de presión en una chumacera larga presurizada.
2. El modelo matemático es elegante y permite determinar todas las características rotodinámicas de una chumacera.
3. El modelo obtenido se ha comparado con los resultados numéricos, mostrando así la validez del mismo.
4. Se pudo obtener un modelo analítico para la obtención de la posición de equilibrio en una chumacera infinitamente larga presurizada.
5. De los resultados se puede observar que al inyectar por la parte central derecha a medida que aumenta la fuerza de presurización el ángulo de actitud disminuye, pero llega un límite en el que si la fuerza de presurización es muy grande y la excentricidad pequeña comienzan a aparecer saltos.

## 5.2 Trabajos futuros

1. Validar el modelo analítico obtenido, mediante el análisis experimental.
2. Realizar el cálculo de los coeficientes rotodinámicos para poder obtener la relación entre el incremento de las fuerzas en la película de aceite y los desplazamientos y velocidades que las causan.
3. Obtener la posición de equilibrio para distintos puertos lineales de presurización con el fin de obtener sus locus de equilibrio y analizar su comportamiento.
4. Con ayuda de los resultados obtenidos desarrollar un sistema de control para chumaceras infinitamente largas.
5. Comparar los resultados obtenidos con los presentados en la chumacera infinitamente corta y analizar cuáles son las diferencias importantes de uno y otro trabajo.

## Referencias

- [1] Hamrock Bernard J., Schmid Steven R., Jacobson Bo O. (2004) "Fundamentals of fluid film lubrication". M. Dekker.
- [2] Szeri Andras Z. (1998) "Fluid film lubrication. Theory and design". Cambridge University Press.
- [3] Frene Jane. (1997) "Hydrodynamic lubrication. Bearing and thrust Bearing". Elsevier
- [4] Khonsari Michael M., Booser E. Richard (2001) "Applied tribology. Bearing design und lubrication". J. Wiley.
- [5] Gohar R. (2008) "Fundamentals of tribology". Imperial College Press.
- [6] Stachowiak Gwidon W., Batchelor Andrew W. (2001) "Engineering tribology". Butterworth-Heinemann.
- [7] Harnoy Avraham. (2003) "Bearing design in machinery. Engineering tribology and lubrication". M. Dekker.
- [8] Williams John A. (1994) "Enggineering tribology". Oxford University Press.
- [9] Sommerfeld Arnold. (1904) "Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung". Zeitschrift für Mathematik und Physik., 50, 97-155.
- [10] Ramirez Vargas Ignacio. (2007) "Teoria de chumaceras presurizadas con puertos puntuales. Caso de la chumacera corta". Tesis de doctorado, SEPI-ESIME, IPN.
- [11] Antonio Garcia Alberto. (2006) " Investigación analitica y numerica de las propiedades dinamicas de chumaceras hidrodinamicas con y sin desalineamiento". Tesis de doctorado, SEPI-ESIME, IPN.

- [12] Nossov Valery, Ramirez Vargas I., Gomez Mancilla J. C. (2004) "Modelos matemáticos de presurización de lubricante en sistemas rotatorios usando la duncion Delta de Dirac". III Congreso Internacional de la INgenieria Fisica, UAM Azcapotzalco.
- [13] Nossov Valery, Ramirez Vargas I., Gomez Mancilla J. C. (2005) "Uso de funciones Generalizadas Espaciales en modelos rotodinamicos presurizados". I Congreso Internacional de Ingenieria Fisica, UAM Azcapotzalco.
- [14] Arfken George. (1981) "Mathematical Methods for physics". Diana.
- [15] Schwartz Laurent. (1950-1951) "Theorie des distributions". Hermann.
- [16] Ocvirk F. (1952) „Short Bearing Approximation for full Journal Bearings“. NACA TN 20808.
- [17] Fedor J. V. (1961) "Journal bearings with arbitrary position of source". ASME Trans, Journal of basic engineering.
- [18] Ramirez Vargar I., Nossov V., Gomez Mancilla J. C. (2004) "Campos de presion de lubricante en chumacera hibrida presurizada con anillo y/o linea unidimensional de presurizacion". VIII Congreso Nacional de Ingenieria Electromecanica y de Sistemas, IPN.
- [19] Reynolds O. (1886) "On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil". NACA
- [ 20] Rivera Arreola D. E. (2009) "Analisis de chumaceras hibridas con puertos horizontales de presurizacion puntal". Tesis de maestria, SEPI-ESIME, IPN.
- [21] Dominguez Vazquez A. C. (2011) "Investigacion de chumaceras hibridas largas con puertos lineales de presurizacion". Tesis de maestria, SEPI-ESIME, IPN.
- [22] Szeri Andras Z. and Powers D. (1967) "Full journal bearings in laminar and turbulent regimes". J. Mech. Eng., 1116-122.

- [23] Gomes Mancilla J. C., Nossov V., Silva Navarrol G. (2005) "Rotor-bearing system stability performance comparing hybrid versus conventional bearing". Rotating Machinery, Vol. 1, pg. 17.
- [24] Fedor J. V. (1960) "A Sommerfeld solution for finite bearings with circumferential grooves". ASME Trans, Journal of basic engineering.
- [25] Ocvirk F. W. (1952) "Short bearing approximation for full journal bearings". National advisory committee for aeronautics (NACA) TN 2808.
- [26] Tower B. (1884) "First report of friction experiments". Proc. Inst. Mech Engrs. pp. 632-659 und pp. 29-35.
- [27] Tower B. (1885) "Second report of friction experiments". Proc. Inst. Mech Engrs. pp. 58-70.
- [28] Ordoñez Pantoja A. (2003) "Diseño preliminar y análisis de chumaceras innovadora utilizando inyección presurizada del lubricante". Tesis de maestría, SEPI-ESIME, IPN.
- [29] Tian Y, Bonis M. (1995) "Analytical approach for the determination of the dynamic coefficients of hybrid bearings". Elsevier, pp 66-76.
- [30] Santos I. F. y Watanabe F. Y. (2003) "feasibility of influencing the dynamic fluid film coefficients of multirecess journal by means of active hybrid lubrication". Journal of The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.
- [31] Bently D., Petchnev. (2000) "Dynamic stiffness and advantages of externally pressurized fluid film bearings". Orbit, first quarter.
- [32] Bently D., Hatch, Grissom (2002) "Fundamentals of rotatoring machinery diagnostics".
- [33] Torres Cedillo S. (2010) "Experimentación en laboratorio y análisis del comportamiento del sistema chumacera híbrida presurizada con control activo". Tesis de maestría, SEPI-Esime, IPN

- [34] Kucherenko V, Gomez Mancilla J.C. (2000) “ Bifurcation of an exactl solvable model of rotodynamic”, DOI: 10.1142/So218127400001730, Vol. 10, pp- 2689-2699.
- [35] Garcia A., Nossov V., Gomez Mancilla J. C. (2005) “ Cálculo de los coeficientes rotodinámicos de chumaceras hidrodinamicas por medio de los gradientes del campo de presión”. 4to. Congreso Internacional de Ingenieria Electromecánica y de Sistemas.
- [36] Gomes Mancilla J. C., Nossov V. (2002) “Perturbed pressure field solution for misaligned short journal bearing”. 9<sup>th</sup>. International Sumposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery.
- [37] Gomes Mancilla J. C., Meda Campaña J. A., Salazar Silva G. H. (2007) “Pressurized bearing design using nonlinear active control attenuating vibrations”. 10mo Congreso nacional de la ESIME.
- [38] Meda Campaña J. A. “Validación numérica y experimental del rotor-chumacera del eje rígido con pivote”. 10mo Congreso nacional de Ingenieria Electromecanica y de Sistemas.

## Apéndice A

### Función Delta de Dirac

En varias ramas de la física, se encuentran fuentes que aparecen en forma instantánea (si el tiempo es la variable independiente) o aparecen en forma localizada (si una coordenada espacial es la variable independiente). Para estudiar con detalle, se debe reemplazar por fuentes idealizadas, las cuales son verdaderamente instantáneas o localizadas. Las fuentes pueden ser: fuerzas concentradas y momentos en mecánica de sólidos, puntos masa en la teoría del potencial gravitacional, cargas puntuales y dipolos en electrostática, etc.

El físico inglés Paul A. M. Dirac (1902-1984) sugirió una manera de representar matemáticamente las fuentes puntuales como:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Esta es conocida como la función Delta de Dirac; aunque no es realmente una función en el sentido estricto, fue muy utilizada con éxito durante varios años para resolver varios problemas de física e ingeniería antes de que Laurent Schwarz justificara matemáticamente su uso.

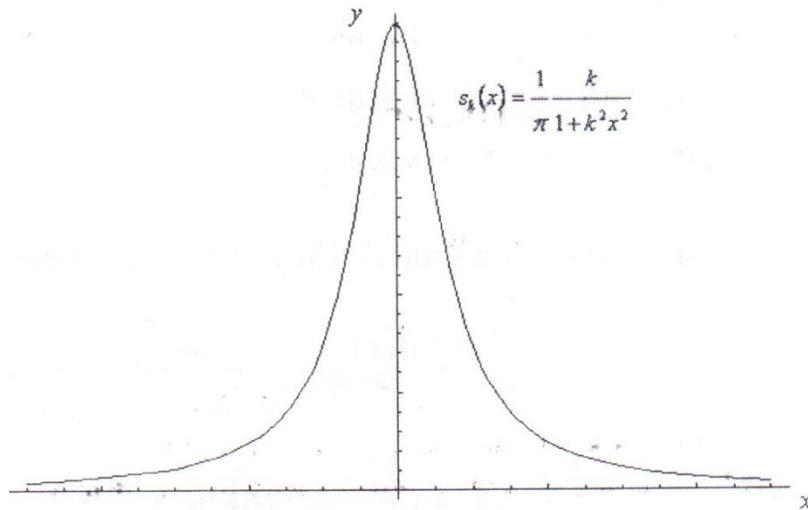
### La función Delta como límite de funciones continuas

Es natural tratar de especificar a una fuente puntual como un límite de distribuciones continuas de fuentes; tal aproximación evita rápidamente las dificultades matemáticas. A continuación se mostrará como puede realizarse la aproximación usando una función continua.

Sea una línea presurizada, suponga que la presión se distribuye continuamente sobre el eje  $x$  con una densidad:

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{1+k^2x^2} \quad (\text{A.2})$$

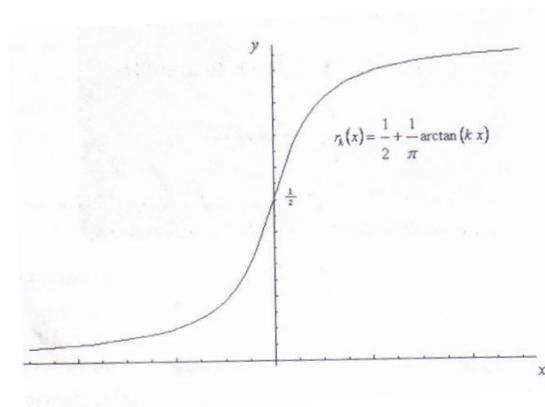
Donde  $k$  es un entero positivo, para grandes  $k$ ,  $s_k(x)$  será muy pequeño.



La presión total a la izquierda de  $x$  será:

$$r_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(u) du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(kx) \quad (\text{A.3})$$

Donde  $r_k(x)$  será la presión acumulada. En la siguiente figura se aprecia el comportamiento de (A.2)



Es importante notar que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(u) du = 1 \quad \text{para todo } k \quad (\text{A.4})$$

Por lo tanto, la presión total es siempre 1, independientemente del índice  $k$ . Es claro que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Además:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Tomando (A.4), así como comparando (A.1) y (A.5), se puede escribir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \delta(x) \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{A.8})$$

La función simbólica  $\delta(x)$  representa la presión, una fuente puntual ubicada en  $x=0$ , y la correspondiente presión acumulada es conocida con la función de Heaviside, denotada por  $H(x)$ .

## Apéndice B

Extractos del artículo original que Sommerfeld publicó en 1904, los cuales fueron de gran ayuda para el desarrollo de esta tesis. Cabe mencionar que la traducción que se realizó es un poco deficiente por lo que se anexará el original en alemán, para que los interesados en este artículo puedan realizar su propia traducción.

### Para la teoría hidrodinámica de la fricción de lubricación Por A. Sommerfeld en Aachen.

#### **\*\* 1 Observaciones preliminares por la fricción del cojinete. La fricción en seco y la fricción del fluido. Información general sobre los resultados del examen y la literatura.**

En el tratamiento de los fenómenos de fricción que hemos hecho dos enfoques diametralmente opuestos. Uno de ellos se debe a Coulomb y en la actualidad prevalece en las áreas generales de la mecánica de la ingeniería. Se refiere a la fricción original deslizamiento entre dos cuerpos sólidos, las superficies en contacto. Si  $P$  es la presión total, los dos interactúan con el cuerpo perpendicular a su superficie de contacto entre sí, el enfoque de Coulomb a los asuntos dentro de la zona de fricción de contacto que se conoce

$$(1) \quad W = \mu P,$$

donde  $\mu$  "coeficiente de fricción", es decir,  $\mu$  es aquí la presión  $P$  y el tamaño de la superficie de contacto y de forma sustancial en el tamaño de la velocidad relativa independientes. Un enfoque diferente es la página física (Newton, de Poisson, de Navier Stokes) ausgebildet<sup>1</sup>) y afecta a la fricción interna de fluidos. Muy a menudo la fricción físico o fenómenos de amortiguación tiene que lidiar con ella se cierra en función de las circunstancias, más o menos cerca de este último enfoque. Piensa en el flujo de fluido a través de sus líneas juntas en una sola capa.  $u$  es la velocidad del flujo,  $n$  es una longitud que se mide perpendicular a la interfaz de las dos capas en cuenta. Entonces, el área de contacto por la fricción  $f$ -carga

$$(2) \quad W = \lambda f \frac{\partial u}{\partial n},$$

donde  $\lambda$  es una constante de la viscosidad del líquido --- que puede ser constante nombre ---- que está disponible desde la presión  $p$  en el que se considera el líquido desde el punto y la velocidad del flujo es independiente y sólo una (muy) de la temperatura.

# Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung

Von A. SOMMERFELD in Aachen.

## \*\*1 Einleitende Bemerkungen über Lagerreibung. Trockene Reibung und Flüssigkeitsreibung. Allgemeines über Versuchsergebnisse und Literatur.

Bei der Behandlung der Reibungserscheinungen hat man zwei diametral entgegengesetzte Ansätze gemacht. Der eine derselben rührt von Coulomb her und herrscht zur Zeit in dem Gesamtgebiete der technischen Mechanik. Er betrifft ursprünglich die gleitende Reibung zwischen zwei festen Körpern, deren Oberflächen in Berührung sind. Wenn  $P$  der Gesamtdruck ist, mit dem die beiden Körper senkrecht gegen ihre Berührungsfläche aufeinander wirken, so lautet der Coulombsche Ansatz für den in die Berührungsfläche fallenden Reibungswiderstand bekanntlich

$$(1) \quad W = \mu P,$$

wo  $\mu$  "Reibungskoeffizient" heißt;  $\mu$  soll dabei dem Drucke  $P$  sowie von der Größe der Berührungsfläche und im wesentlichen auch von der Größe der relativen Geschwindigkeit unabhängig sein.

Ein anderer Ansatz ist von physikalischer Seite (Newton, Poisson, Navier, Stokes) ausgebildet<sup>1)</sup> und betrifft die innere Reibung der Flüssigkeiten. So oft der Physiker Reibungs- oder Dämpfungserscheinungen zu behandeln hat, schließt er sich je nach den Umständen mehr oder minder eng diesem zweiten Ansatz an. Man denke sich die Flüssigkeit durch ihre Strömungslinien in einzelne Schichten aufeinander.  $u$  sei die Geschwindigkeit der Strömung,  $n$  eine Länge, die senkrecht gegen die Berührungsfläche der beiden betrachteten Schichten gemessen wird. Dann beträgt die durch die Berührungsfläche  $f$  übertragene Reibung

$$(2) \quad W = \lambda f \frac{\partial u}{\partial n},$$

wo  $\lambda$  eine Konstante der Flüssigkeit ist--- man kann sie Viskositätskonstante nennen----, die von dem Drucke  $p$ , unter dem die Flüssigkeit an der betrachteten Stelle steht, sowie von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängig ist und nur (in hohem Grade) von der Temperatur abhängt.

Enfoques (1) y (2) son tan diferentes como sea posible. De acuerdo con (1), la fricción de la velocidad independiente y proporcional a la presión total P, por (2), sin embargo, la fricción independiente de la presión p y el gradiente de velocidad proporcional.

Asimismo, debería ser que en el límite de movimiento de fuga, la fricción de (1) no es y desaparece, pero (debido a la peculiar comportamiento del coeficiente de fricción a baja velocidad) hasta un máximo enfoque  $\mu_0 P$  ( $\mu_0$  es "coeficiente de fricción de la paz"), mientras que el la fricción del descanso después de (2) es igual a cero.

El enfoque (2) encuentra su plena confirmación en las observaciones de Poiseville de tubos capilares. El enfoque (1) demostró estar en todas partes donde existe la directa deslizamiento de los cuerpos sólidos uno contra el otro.

En la mayor contraste las dos concepciones diferentes se producen en el problema de la fricción del cojinete. Aunque indispensables en las operaciones del campo, un lubricante, se transmite en la literatura más antigua del enfoque técnico (1) en este caso sin previo aviso. Por el momento, la resistencia a la fricción con el eje del pasador que son habitualmente de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$(I) \quad M = \mu r P,$$

donde r es el radio revista, P, la presión de dispensación,  $\mu$  también se conoce aquí como coeficiente de fricción, sino que se convierte añadido a la regla de que  $\mu$  no es idéntico con el coeficiente de fricción de deslizamiento en seco del material pin con el material del cojinete, sino por el intento determinar si cada uno en particular.

En contraste con esto fue el primero Petroff1 resaltado), que los fenómenos de fricción rodamiento por las leyes de la fricción interna del lubricante debe ser controlada y ha basado su punto de vista de la teoría y la experimentación. Si uno asume que la responsabilidad del lubricante tanto en la vuelta conos como el rodamiento de descanso y que el pasador en el rodamiento es concéntrico, el gradiente de velocidad puede en el lubricante es igual a  $U / \delta$  se establecen, donde U es la velocidad periférica de la clavija y  $\delta$  la medios (como se supone uniforme) de espesor de la capa de barrillo o la diferencia entre el radio del perno y el radio de la copa. Siguiendo el enfoque (2) entonces, el momento de trasladarse a la fricción perno.

$$(II) \quad M = \lambda r F \frac{U}{\delta},$$

Die Ansätze (1) und (2) sind so verschieden wie möglich. Nach (1) ist die Reibung von der Geschwindigkeit unabhängig und dem Gesamtdrucke  $P$  proportional; nach (2) dagegen ist die Reibung von dem Drucke  $p$  unabhängig und dem Geschwindigkeitsgefälle proportional.

Hervorgehoben sei noch, daß in der Grenze für verschwindende Bewegung die Reibung nach (1) nicht selbst verschwindet, vielmehr (wegen des eigentümlichen Verhaltens des Reibungskoeffizienten bei kleinen Geschwindigkeiten) sich einem Maximum  $\mu_0 P$  nähert ( $\mu_0$  gleich "Reibungskoeffizient der Ruhe"), während die Reibung der Ruhe nach (2) gleich Null wird.

Der Ansatz (2) findet seine vollste Bestätigung in den Beobachtungen von Poiseville an Kapillarröhren. Der Ansatz (1) bewährt sich überall da, wo es sich um das direkte Gleiten von festen Körpern gegen einander handelt.

In den schärfsten Gegensatz treten die beiden verschiedenen Auffassungen bei dem Problem der Lagerreibung. Obwohl im Betriebe der Lager ein Schmiermittel unentbehrlich ist, wird in der älteren technischen Literatur der Ansatz (1) auch auf diesen Fall ohne weiteres übertragen. Für das Moment des Reibungswiderstandes um die Achse des Zapfens gibt man dementsprechend gewohnheitsmäßig die folgende Formel an:

$$(I) \quad M = \mu r P,$$

wo  $r$  den Zapfenradius,  $P$  den Zapfendruck bedeutet;  $\mu$  wird auch hier als Reibungskoeffizient bezeichnet, zugleich wird aber in der Regel hinzugefügt, daß  $\mu$  nicht identisch ist mit dem Reibungskoeffizienten für die trockene Gleitung des Zapfenmaterials auf dem Material der Lagerschale, sondern durch den Versuch jedesmal besonders zu bestimmen sei.

Im Gegensatz hierzu hat zuerst Petroff<sup>1)</sup> hervorgehoben, daß die Erscheinungen der Lagerreibung durch die Gesetze der inneren Reibung des Schmiermittels beherrscht werden und hat seine Auffassung durch Theorie und Experiment gestützt. Nimmt man an, daß das Schmiermittel sowohl an dem sich umdrehenden Zapfen wie an der ruhenden Lagerschale haftet und daß der Zapfen im Lager konzentrisch liegt, so kann das Geschwindigkeitsgefälle im Schmiermittel gleich  $U/\delta$  gesetzt werden, wo  $U$  die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens und  $\delta$  die (als gleichmäßig vorausgesetzte) Dicke der Schmierschicht oder die Differenz zwischen dem Zapfenradius und dem Radius der Lagerschale bedeutet. Nach dem Ansatz (2) wird alsdann das Moment der auf den Zapfen übertragenen Reibung.

$$(II) \quad M = \lambda r F \frac{U}{\delta},$$

Donde  $F$  denota la superficie mojada del lubricante de la circunferencia alfiler. Mientras que su proporción Así que después de (I), el efecto de fricción de la toma de presión  $P$  es, deben, por (II) de la revista impresiones  $P$  y el  $p$  relacionados con la presión específica en el lubricante a ser independiente, mientras que para (II), el efecto de fricción de la velocidad  $U$  debe ser proporcional sería independiente bajo la redacción de un (1), si desea buscar en el coeficiente de fricción  $\mu$  como una constante real en  $U$ .

En cuanto a la experiencia dice que estos enfoques en conflicto

En general, ha estado en funcionamiento del lento movimiento las máquinas de vapor de edad en el enfoque (I) resultó: gobernar el tamaño de la experiencia del efecto de fricción demostrado a cabo en la rápida nuevos en circulación, incluyendo las máquinas eléctricas a un comportamiento que es la ley (II) enfoques: la fricción estará aquí dentro de ciertos límites, con la velocidad y el ancho es independiente de la presión.

Si desea que estas experiencias más recientes en el sentido de la fórmula (I) sugieren, se diría que los aumentos de coeficiente de fricción  $\mu$  con el volumen y la velocidad  $U$  impresiones es el eje  $P$  es inversamente proporcional. Al parecer, esta forma peculiar de los hechos que en la expresión del par de fricción de las escuchas presión  $P$  por la fórmula (I) se introdujo por primera vez, que se ve obligado, sino por la experiencia que más tarde por disposición adecuada de la  $\mu$  coeficiente de fricción crear la fórmula a cabo. Aunque en esta fórmula de forma (I) con las observaciones de hecho pueden ser reconciliados, seremos esta fórmula para el caso de altas velocidades, pero difícilmente se puede describir según proceda. Sin embargo, es común en todos los que más tarde sería llamado el trabajo de interpretar los resultados del examen en la forma de vestir (i), por lo que  $\mu$  el coeficiente de fricción de alguna manera forzada, en función de tener la velocidad y la energía-apagado de presión. Este hecho muestra claramente cómo el punto de vista de la exclusiva dei fricción de Coulomb está presente en las áreas técnicas.

Vamos a distinguir las siguientes fórmulas (I) y (II) como las leyes de la fricción en seco y líquidos, y poder decir, en consecuencia, que la experiencia ha demostrado que a bajas velocidades de dosificación, la ley es la fricción seca, mientras que la experiencia con la velocidad de revista de alta mejor en el sentido de la ley la fricción del fluido puede ser interpretado.

El objeto de la investigación que sigue es ahora para mostrar que siguen el de la teoría Petroff hidrodinámica de la lubricación en el diseño lógico de la diferencia entre las leyes de la fricción en seco y el líquido es capaz de resolver, a saber, que esta teoría, la fórmula (II) como una expresión del par de fricción con suficiente velocidad de gran revista, la fórmula (I) como el límite de esa expresión a una velocidad lo suficientemente pequeño. En (I) coeficiente de fricción que ocurre con ello dará lugar a una cierta manera como una de las dimensiones del campo que se calculó la razón. La constante real y física sólo es, sin embargo por debajo de la  $\lambda$  constante a la fricción interna del lubricante.

Wo  $F$  die von dem Schmiermittel benetzte Fläche des Zapfenumfanges bedeutet.

Während also nach (I) die Reibungswirkung dem Zapfendrucke  $P$  proportional sein soll, soll sie nach (II) von dem Zapfendrucke  $P$  und dem damit zusammenhängenden spezifischen Drucke  $p$  im Schmiermittel unabhängig sein; während nach (II) die Reibungswirkung der Geschwindigkeit  $U$  proportional sein soll, würde sie nach dem Wortlaute von (1), sofern man den Reibungskoeffizienten  $\mu$  als wirkliche Konstante ansehen will, von  $U$  unabhängig sein.

Was sagt nun die Erfahrung zu diesen widerstreitenden Ansätzen?

Im großen und ganzen hat sich im Betriebe der langsam laufenden älteren Dampfmaschinen der Ansatz (I) bewährt: maßgebend für die Größe der Reibungswirkung erwiesen die Erfahrungen bei den neueren schnell umlaufenden, namentlich den elektrischen Maschinen auf ein Verhalten hin, welches sich dem Gesetze (II) nähert: die Reibung nimmt hier innerhalb gewisser Grenzen mit der Geschwindigkeit zu und wird con dem Drucke Unabhängig.

Will man diese neueren Erfahrungen im Sinne der Formel (I) deuten, so müßte man sagen: der Reibungskoeffizient  $\mu$  wächst mit der Umfangsgeschwindigkeit  $U$  und ist dem Zapfendrucke  $P$  umgekehrt proportional. Es ergibt sich auf diese Weise der eigentümliche Sachverhalt, daß man in den Ausdruck des Reibungsmomentes den Zapfendruck  $P$  durch die Formel (I) zunächst einführt, daß man sich aber auf Grund der Erfahrung gezwungen sieht, ihn nachträglich durch geeignete Verfügung über den Reibungskoeffizienten  $\mu$  wieder aus der Formel heraus zu schaffen. Wenngleich sich auf solche Weise Formel (I) mit den Beobachtungen zwar in Einklang bringen läßt, so wird man diese Formel für den Fall hoher Geschwindigkeiten doch kaum als zweckmäßig bezeichnen können. Nichtsdestoweniger ist es in allen später zu nennenden Arbeiten üblich, die Versuchsergebnisse in die Form (i) einzukleiden, also den Reibungskoeffizienten  $\mu$  in etwas gezwungener Weise als Funktion von Geschwindigkeit und Zapfendruck aufzufassen. Dieser Umstand zeigt recht deutlich, wie ausschließlich die Coulombsche Auffassung der Reibung auf technischem Gebiete herrscht.

Wir werden im folgenden die Formeln (I) und (II) als Gesetze der trockenen und der Flüssigkeitsreibung unterscheiden und werden dementsprechend sagen können, daß erfahrungsgemäß bei geringer Zapfengeschwindigkeit das Gesetz der trockenen Reibung gilt, während die Erfahrungen bei hoher Zapfengeschwindigkeit besser im Sinne des Gesetzes der Flüssigkeitsreibung gedeutet werden.

Aufgabe der folgenden Untersuchung ist es nun, zu zeigen, daß die von Petroff angebahnte hydrodynamische Theorie der Schmiermittel bei folgerichtiger Ausgestaltung den Gegensatz zwischen den Gesetzen der trockenen und Flüssigkeitsreibung aufzulösen vermag, daß nämlich diese Theorie die Formel (II) als Ausdruck des Reibungsmomentes bei hinreichend großer Zapfengeschwindigkeit, die Formel (I) als Grenzwert desselben Ausdrucks bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit liefert. Der in (I) vorkommende Reibungskoeffizient wird sich dabei in bestimmter Weise als eine aus den Abmessungen des Lagers zu berechnende Verhältniszahl ergeben. Die eigentliche und einzige physikalische Konstante wird dagegen im folgenden die Konstante  $\lambda$  der inneren Reibung des Schmiermittels sein.

Nuestra investigación también muestra que hay una cierta velocidad a la que el efecto de fricción a un mínimo, por debajo de esta velocidad, con aproximación razonable la fórmula (I), justo encima de la misma más o menos la fórmula (II). El tamaño de la velocidad del cono menor fricción, lo que puede llamarse una tasa de transición depende del tamaño de la presión del grifo, las dimensiones de los rodamientos y la naturaleza del lubricante fuera, crece con el aumento de toma de presión y con fluidez cada vez mayor de que el lubricante.

Velocidades por debajo de la velocidad de transición puede ser descrita como alta velocidad como a baja velocidad, las velocidades, por encima de ella, ¿dónde está la diferencia entre las velocidades pequeñas y grandes después acaba de decir en el tamaño de la presión del grifo, etc, depende. En las máquinas eléctricas de alta velocidad, uno siempre está por encima de la velocidad de transición durante el funcionamiento de las máquinas de vapor en su mayoría muy por debajo.

Antes de que podamos determinar el tamaño del momento de fricción, que son la ubicación de la espiga en el interior del cojinete y la distribución de la presión hidrodinámica se observan a lo largo de la circunferencia de la espiga. En cuanto a la situación de la revista, veremos que esto se debe generalmente excéntrico en el cojinete y el tanto más, cuanto menor sea la velocidad, y que puede estar centrado exactamente sólo en el límite de velocidad infinita. Resulta que el cuerpo es la distancia más corta entre la revista y el tamaño del buje, calculado sobre la dirección de la toma de la presión, se trasladó en la rotación del grifo. Transferencia Por otra parte, la ley de fricción de Coulomb directamente al caso de la fricción del cojinete, es evidente que el cuerpo difieren distancia más corta entre el eje y el cojinete de la dirección de la toma de la presión en la dirección opuesta a la rotación solte.1)

En cuanto a la distribución de la presión hidrodinámica en los grifos, por ejemplo en la literatura técnica, dos supuestos son comunes. Después de la una (Weisbach), la presión por unidad de longitud de la circunferencia pin es constante, a los demás (de Reye) es por unidad de longitud de la proyección de la clavija de la posibilidad de aprovechar la presión de la dirección vertical. Estas dos leyes de distribución también se muestran como casos límite, el segundo como límite en la velocidad, la primera en cierto sentido como un caso límite a la velocidad lo suficientemente baja. Ambos límites se han depositado en nosotros por una secuencia continua de las leyes de distribución de presión intermedia a la velocidad media entre sí.

En los últimos tiempos ha experimentado el problema de la fricción del cojinete de los observadores más atención. específicamente menciona una obra completa de R. Stribeck había uno), un estudio de O. Lasche2) para el caso de altas velocidades de rotación y ensayos de G. Dettmar 3). existe entre las observaciones de Stribeck y la siguiente teoría, al menos en líneas generales un acuerdo notable que, en particular la presencia de un mínimo de bez fricción o por impacto se refiere a la descripción anterior, la presencia de un tipo de transición y la dependencia de este mínimo. Este tipo de transición de la presión de dosificación. En el otro sentido hay discrepancias significativas entre la teoría y la experiencia, que todavía requieren la atención informada y sensible a las lagunas en nuestra teoría.

Unsere Untersuchung wird ferner zeigen, daß es eine bestimmte Geschwindigkeit gibt, bei welcher die Reibungswirkung zu einem Minimum wird; unterhalb dieser Geschwindigkeit gilt mit hinreichender Näherung die Formel (I), oberhalb derselben mehr oder minder genau die Formel (II). Die Größe dieser Geschwindigkeit kleinster Zapfenreibung, welche als Übergangsgeschwindigkeit bezeichnet werden kann, hängt von der Größe des Zapfendruckes, den Dimensionen des Lagers und der Beschaffenheit des Schmiermittels ab; sie wächst mit wachsendem Zapfendruck und mit zunehmender Dünnschmiermittels.

Geschwindigkeiten unterhalb dieser Übergangsgeschwindigkeit können als kleine Geschwindigkeiten, Geschwindigkeiten, oberhalb derselben als große Geschwindigkeiten bezeichnet werden, wobei die Unterscheidung zwischen kleinen und großen Geschwindigkeiten nach dem eben Gesagten auch von der Größe Zapfendruckes usw. abhängig ist. Bei den schnell laufenden elektrischen Maschinen befindet man sich stets oberhalb der Übergangsgeschwindigkeit, im Betriebe der Dampfmaschinen wohl meistens unterhalb derselben.

Bevor wir die Größe des Reibungsmomentes bestimmen können, werden wir die Lage des Zapfens innerhalb der Lagerschale sowie die Verteilung des hydrodynamischen Druckes längs des Zapfenumfanges festzustellen haben. Was die Lage des Zapfens betrifft, so werden wir finden, daß dieser im allgemeinen exzentrisch in der Lagerschale liegen muß und zwar um so mehr, je kleiner die Geschwindigkeit ist, und daß er sich nur in der Grenze für unendlich große Geschwindigkeit genau zentrieren kann. Dabei zeigt sich, daß die Stelle kürzesten Abstandes zwischen Zapfenumfang und Lagerschale, von der Richtung des Zapfendruckes aus gerechnet, im Sinne der Zapfenumdrehung verschoben ist. Überträgt man dagegen das Coulombsche Reibungsgesetz unmittelbar auf den Fall der Lagerreibung, so ergibt sich, daß die Stelle kürzesten Abstandes zwischen Zapfen und Lager von der Richtung des Zapfendruckes aus im entgegengesetzten Sinne der Umdrehung abweichen sollte.<sup>1)</sup>

Was die Verteilung des hydrodynamischen Druckes über den Zapfenumfang betrifft, so sind in der technischen Literatur zwei Annahmen üblich. Nach der einen (Weisbach) ist der Druck pro Längeneinheit des Zapfenumfanges konstant, nach der anderen (Reye) ist er es pro Längeneinheit der Projektion des Zapfenumfanges auf die zum Zapfendruck senkrechte Richtung. Diese beiden Verteilungsgesetze werden sich hier ebenfalls als Grenzfälle ergeben, das zweite als Grenzfall bei hoher Geschwindigkeit, das erste in gewissem Sinne als Grenzfall bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit. Beide Grenzfälle werden bei uns durch eine kontinuierliche Folge von dazwischenliegenden Druckverteilungsgesetzen bei mittleren Geschwindigkeiten ineinander übergeführt.

In jüngster Zeit hat die Frage der Lagerreibung seitens der Beobachter eine erhöhte Aufmerksamkeit erfahren. Erwähnt sei namentlich eine umfassende Arbeit von R. Stribeck<sup>1)</sup>, eine Untersuchung von O. Lasche<sup>2)</sup> für den Fall hoher Umdrehungsgeschwindigkeiten und Aufsätze von G. Dettmar<sup>3)</sup>. Zwischen den Beobachtungen von Stribeck und der folgenden Theorie herrscht wenigstens in großen Zügen eine bemerkenswerte Übereinstimmung; diese betrifft namentlich das Vorhandensein eines Minimums der Reibungswirkung oder nach der obigen Bezeichnung das Vorhandensein einer Übergangsgeschwindigkeit und die Abhängigkeit dieses Minimums bez. dieser Übergangsgeschwindigkeit vom Zapfendruck. In anderer Richtung bestehen bedeutende Abweichungen zwischen Theorie und Erfahrung, die noch der Aufklärung bedürfen und die auf empfindliche Lücken unserer Theorie hinweisen.

El siguiente análisis se basa en términos de la aproximación matemática al problema de una importante obra de Osborne Reynolds<sup>4</sup> cuya aplicación, sin embargo, difieren de Reynolds, como evitar la expansión de la serie confuso y engorroso de Reynolds y en parte por la integración en cerrada forma, sustituye en parte por cálculo numérico directo.

Espero haber hecho de esta manera la teoría hidrodinámica de los cojinetes de fricción mucho más fácil y más accesible.

Mucho más cerca se cierra N. Petroff<sup>1</sup> a) en un trabajo reciente sobre la evolución de Reynolds, que señala en cada uno de reforzar y complementar en el principal, sin embargo, refleja sin cambios.

Sobre todo en comparación con esta obra se espera que Petroffschen simplificación sustancial surgen, lo que se consigue por el método seguido por mí.

Por fin tengo la valiosa recopilación de toda la literatura anterior (cerebro, Thurston, Torre, etc) señala que N. Masi<sup>2</sup>) devuelve, así como sobre sus propios resultados teóricos y experimentales de la investigadora.

En los próximos \*\* 2, que son los fundamentos de la teoría de la fricción hidrodinámica para explicar las formas posibles elemental e intuitiva. En \*\* 3 que obtenemos de las ecuaciones hidrodinámicas en algo más de forma rigurosa a los mismos resultados, porque de la sección es por tanto, sólo el método, no en el contenido de más de 2 \*\* va, puede ser vencido en la primera orientación. \*\* 4 en la posición del pasador en el cojinete debido a las condiciones de equilibrio mecánico habitual se determina. \*\* 5 trae los principales resultados de la teoría, que ya se ha indicado anteriormente, en parte, y compara la teoría con la experiencia. \*\* 6 en la distribución de la presión hidrodinámica se estudia en el lubricante. En Allende, a condición de que el pasador está rodeada por el lubricante. Por el contrario, nos ocupamos en \*\* 7 notas, el caso de un álbum de cierre cojinete para que el proyecto de ley es desproporcionadamente complicados, los resultados del cálculo, pero no muy lejos del caso previamente tratados simple difieren.

Las observaciones finales en \*\* 8 mirando por encima de los dos casos mencionados, en particular, vamos a presentar una pequeña colección de estática en la población de los álbumes de cierre de ejes de ferrocarril.

Die folgende Untersuchung knüpft, was den mathematischen Ansatz des Problems betrifft, an eine wichtige Arbeit von Osborne Reynolds<sup>4)</sup> an; in der Durchführung aber weiche ich von Reynolds ab, indem ich die unübersichtlichen und mühsamen Reihenentwicklungen von Reynolds vermeide und zum Teil durch Integrationen in geschlossener Form, zum Teil durch direkte Zahlenrechnung ersetze.

Ich hoffe, auf diese Weise die hydrodynamische Theorie der Lagerreibung wesentlich einfacher und zugänglicher gemacht zu haben.

Sehr viel enger schließt sich N. Petroff<sup>1)</sup> in einer neueren Arbeit an die Entwicklungen von Reynolds an, die er in einzelnen Punkten verbessert und ergänzt, in der Hauptsache aber ungeändert wiedergibt.

Gerade im Vergleich mit dieser Petroffschen Arbeit dürfte die wesentliche Vereinfachung hervortreten, die durch das von mir eingeschlagene Verfahren erzielt wird.

Endlich habe ich noch auf die wertvoll Zusammenstellung der gesamten älteren Literatur (Hirn, Thurston, Tower, etc.) hinzuweisen, die N. Masi<sup>2)</sup> gibt, sowie auch auf die eigenen theoretischen und experimentellen Ergebnisse dieses Forschers.

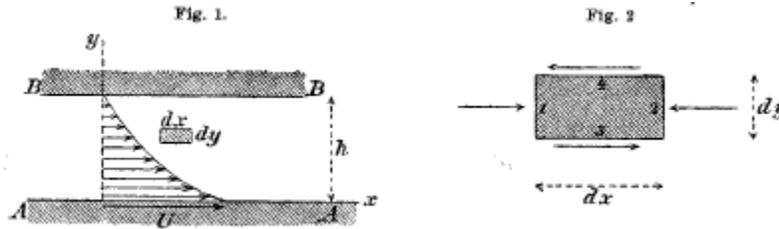
In dem nächstfolgenden \*\*2 werden wir die Grundlagen der hydrodynamischen Reibungstheorie auf möglichst elementarem und anschaulichem Wege darlegen. In \*\*3 gelangen wir von den hydrodynamischen Differentialgleichungen aus in etwas strengerer Weise zu denselben Ergebnissen; da dieser Paragraph somit nur der Methode, nicht dem Inhalte nach über \*\*2 hinausgeht, kann er bei der ersten Orientierung überschlagen werden. In \*\*4 wird die Lage des Zapfens in der Lagerschale auf Grund der gewöhnlichen mechanischen Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. \*\*5 bringt die Hauptresultate der Theorie, die im Vorstehenden bereits teilweise angedeutet sind, und vergleicht die Theorie mit der Erfahrung. In \*\*6 wird die Verteilung des hydrodynamischen Druckes in Schmiermittel untersucht. Bei alledem wird vorausgesetzt, daß der Zapfen ringsum vom Schmiermittel umschlossen ist. Dem gegenüber behandeln wir in \*\*7 anhangsweise den Fall einer albumschließenden Lagerschale, für den die Rechnung unverhältnismäßig komplizierter wird, die Ergebnisse der Rechnung aber nicht weit von dem vorher behandelten einfacheren Falle abweichen.

Die Schlußbemerkungen in \*\*8 beziehen sich auf die beiden genannten Fälle; insbesondere teilen wir hier eine kleine statische Erhebung über die albumschließenden Lager der Eisenbahnachsen mit.

**\*\* 2 Establecimiento del problema hidrodinámico de la forma más simple.**

Comenzamos con las ecuaciones hidrodinámicas de base, a menos que estén en necesidad como sea posible después de la tecnología para desarrollar en las ideas actuales y lo están haciendo por etapas.

Consideramos que una capa líquida (capa suave) de espesor  $h$  entre dos planos paralelos paredes A y B. B se mueve sola, una sería en la velocidad constante  $U$ . El líquido-como en las paredes. Paralelo a la línea U, medimos un coordenadas  $x$ ,



Perpendicular a una coordenada  $y$ . El flujo se llevará a cabo en paralelo a la línea U, y su velocidad es de  $u$ ,  $u$  es independiente de  $x$ , que es sólo una función de  $y$ .  $Dx dy$  sobre una partícula, que puede tener perpendicular al plano de la extensión 1, actuando en la dirección  $x$  las siguientes fuerzas (véase la figura 1 ind el dibujado en una escala ampliada, en la Figura 2):

a) El  $p$  presión hidrodinámica es para el lado de las superficies 1 y 2

$$p dy \text{ bez. } - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy;$$

el exceso de presión en la dirección  $x$  es por lo tanto

$$- \frac{\partial p}{\partial x} dx dy.$$

b) La fricción del fluido, que después de G1. (2) de la anterior \*\* tiene que establecerse es el de las caras laterales 3 y 4

$$- \lambda \frac{du}{dy} dx \text{ bez. } + \lambda \left( \frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2} dy \right) dx;$$

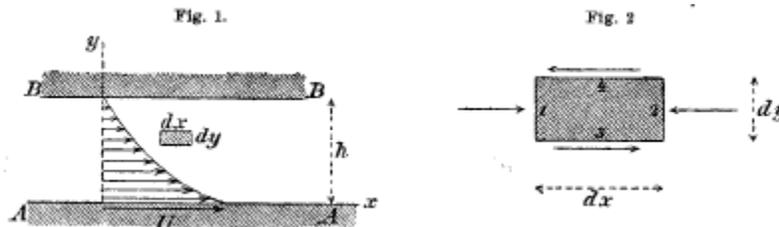
El efecto global de la fricción en la dirección  $x$  es por lo tanto

$$\lambda \frac{d^2u}{dy^2} dx dy.$$

## \*\*2. Aufstellung des hydrodynamischen Problems in einfachster Form.

Wir beginnen damit, die hydrodynamischen Grundgleichungen, soweit wir sie nötig haben werden, möglichst im Anschluß an die in der Technik geläufigen Vorstellungen zu entwickeln und gehen dabei schrittweise vor.

Wir betrachten eine Flüssigkeitsschicht (Schmierschicht) von der Dicke  $h$  zwischen zwei ebenen parallelen Wänden  $A$  und  $B$ .  $B$  sei in Ruhe,  $A$  werde mit der konstanten Geschwindigkeit  $U$  bewegt. Die Flüssigkeit haften an beiden Wänden. Parallel zu  $U$  messen wir eine Koordinate  $x$ ,



senkrecht dazu eine Koordinate  $y$ . Die Strömung finde parallel zu  $U$  statt; ihre Geschwindigkeit sei  $u$ ;  $u$  ist von  $x$  unabhängig, also nur Funktion von  $y$ . Auf ein Teilchen  $dx dy$ , welches senkrecht zur Zeichenebene die Erstreckung 1 haben möge, wirken in der  $x$ -Richtung folgende Kräfte (vgl. Fig. 1 und die in vergrößertem Maßstabe gezeichnete Fig. 2):

a) Der hydrodynamische Druck  $p$  beträgt für die Seitenflächen 1 und 2

$$p dy \quad \text{bez.} \quad - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy;$$

der Drucküberschuß in der  $x$ -Richtung wird daher

$$- \frac{\partial p}{\partial x} dx dy.$$

b) Die Flüssigkeitsreibung, die wir nach G1. (2) des vorigen \*\* anzusetzen haben, wird für die Seitenflächen 3 und 4

$$- \lambda \frac{du}{dy} dx \quad \text{bez.} \quad + \lambda \left( \frac{du}{dy} + \frac{d^2 u}{dy^2} dy \right) dx;$$

Die gesamte Reibungswirkung in der  $x$ -Richtung wird daher

$$\lambda \frac{d^2 u}{dy^2} dx dy.$$

El flujo es constante, las aceleraciones son excluidas por la naturaleza de esta cuestión. Debe, por tanto, la suma de desaparecer bajo a) y b) por encima de las fuerzas. Por lo tanto es

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Desde nuestro líquido también experiencias en la dirección y sin aceleración, la suma de las fuerzas en esta dirección también desaparecen y estas fuerzas se determinan a partir de las superficies laterales 1 y 2, y la fricción que actúan sobre 3 y 4 de presión. La fricción dijo es cero, lo que conduce la condición de equilibrio para la dirección y, si pasamos por alto el cambio de presión por el peso, fácil de

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y}$$

La presión  $p$  es independiente de  $y$ , por lo que en lugar de  $\partial p / \partial x$   $dp/dx$  escribimos  $dp/dx$ . Ahora determinar  $u$  de G!. (3) mediante la integración en  $y$ , esto es después acaba de decir  $dp/dx$  a ser tratado como una constante. Es evidente

$$u = \frac{1}{2\lambda} \frac{dp}{dx} y^2 + ay + b,$$

Donde  $a$  y  $b$  son constantes de integración. Para el cálculo de ellos tenemos las condiciones de contorno que el líquido debe apegarse a las dos paredes, y que por tanto se debe:

$$\begin{aligned} u &= U \quad \text{für } y = 0, \\ u &= 0 \quad \text{„ } y = h. \end{aligned}$$

De ello se deduce

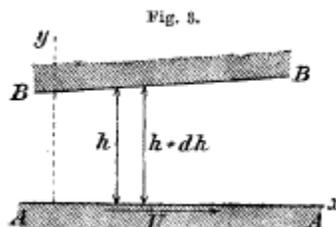
$$b = U, \quad a = -\frac{1}{2\lambda} \frac{dp}{dx} h - \frac{U}{h}$$

Y

$$(4) \quad u = U \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{1}{2\lambda} \frac{dp}{dx} y h \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

La distribución resultante específico de la  $u$  la velocidad del flujo sobre la sección transversal de nuestra capa de líquido es de  $1/h$  se muestra esquemáticamente.

2. En lugar del paralelo Un paredes y B, se consideran dos paredes ligeramente inclinadas opuesto (Fig. 3).



Die Strömung ist stationär; Beschleunigungen sind nach der Art der vorliegenden Frage ausgeschlossen. Es muß daher die Summe der unter a) und b) bezeichneten Kräfte verschwinden. Somit gilt

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Da unser Flüssigkeitsteilchen auch in der  $y$ -Richtung keine Beschleunigung erfährt, muß die Summe der Kräfte nach dieser Richtung ebenfalls verschwinden; diese Kräfte bestimmen sich aus der auf die Seitenflächen 1 und 2 übertragenen Reibung und dem auf 3 und 4 wirkenden Druck. Die genannte Reibung ist aber Null; mithin führt die Gleichgewichtsbedingung für die  $y$ -Richtung, wenn wir von der Änderung des Druckes durch die Schwere absehen, einfach auf

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y}$$

Der Druck  $p$  ist also von  $y$  unabhängig, so daß wir statt  $\partial p / \partial x$  lieber  $dp/dx$  schreiben wollen. Wir bestimmen jetzt  $u$  aus G! (3) durch Integration nach  $y$ ; hierbei ist nach dem eben Gesagten  $dp/dx$  als KONstante zu behandeln. Es ergibt sich

$$u = \frac{1}{2\lambda} \frac{dp}{dx} y^2 + ay + b,$$

Wo  $a$  und  $b$  Integrationskonstante sind. Zur Berechnung derselben haben wir die Grenzbedingungen, daß die Flüssigkeit an den beiden Wänden haften soll, daß also sein muß:

$$\begin{aligned} u &= U \quad \text{für} \quad y = 0, \\ u &= 0 \quad \text{„} \quad y = h. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

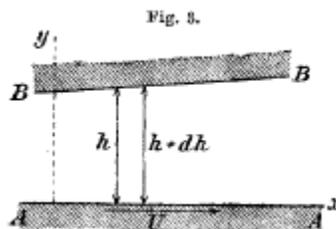
$$b = U, \quad a = -\frac{1}{2\lambda} \frac{dp}{dx} h - \frac{U}{h}$$

Und

$$(4) \quad u = U \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{1}{2\lambda} \frac{dp}{dx} y h \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Die hierdurch bestimmte Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit  $u$  über den Querschnitt  $h$  unserer Flüssigkeitsschicht ist in Fig. 1 schematisch dargestellt.

2. Statt der parallelen Wände A und B betrachten wir zwei wenig gegeneinander geneigte Wände (Fig. 3).



Las coordenadas  $x$  e  $y$  se miden en paralelo y perpendicular a  $A$ . También aceptamos ahora que el flujo se lleva a cabo sólo en la dirección  $x$ , es decir, que la negligencia y la componente  $y$  y asumir que la distribución que se encuentran arriba de la velocidad del flujo, incluso ahora sigue siendo válida, este último viene a decir que nosotros, la inercia de líquido en relación con el abandono de los efectos de la fricción. En la base inclinada en contra de las limitaciones individuales del líquido fluido único debe ser acelerado, sin embargo, una parte de los excedentes disponibles por lo tanto la presión ahora para producir esta aceleración y superar la inercia consumido. En lugar de las condiciones de equilibrio entre la presión y la fricción Solten ahora por lo tanto, estrictamente hablando, las ecuaciones de la aceleración se establecen para la partícula. Estos son consistentes con las condiciones de equilibrio anterior acuerdo sólo si descuidamos la inercia, que estará permitida cuando las aceleraciones son lo suficientemente pequeñas, por ejemplo, en el caso del pequeño paredes inclinadas o de alta viscosidad del lubricante. En este caso, las condiciones de equilibrio en la distribución de la velocidad del flujo es lo suficientemente precisa para el ahora acelerado para ser considerados para obtener un poco de ejercicio.

Vamos a asumir nuestra líquido incompresible, entonces debe hacerse a través de diferentes secciones en el tiempo de la unidad de fluido bombeado es el mismo. La cantidad de líquido es, por (4):

$$(5) \quad Q = \int_0^h u dy = U \frac{h}{2} - \frac{dp}{dx} \frac{h^3}{12\lambda}$$

Tenga en cuenta, en particular, dos uno al lado del  $dx$  otras secciones y que resalta  $h$   $h +$  es decir, es  $dQ / dx = 0$  Esto lleva a (5) a la ecuación

$$U \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dp}{dx} \frac{h^3}{6\lambda} \right);$$

Lo mismo se puede integrar directamente y los suministros, si se entiende por una constante de integración  $h_0$ :

$$U(h - h_0) = \frac{dp}{dx} \frac{h^3}{6\lambda}$$

A continuación, calcular

$$(6) \quad \frac{dp}{dx} = 6\lambda U \frac{h - h_0}{h^3}$$

Si bien el examen de acuerdo con un flujo constante, el gradiente de presión debe ser constante, que es ahora, de acuerdo con la  $h$  espesor variable, en función de  $x$ .

Calculamos la longitud del líquido en la pared de una unidad de fricción de transmisión  $q$ . Esto es de acuerdo al enfoque (2) y el G1. (4) para  $y = 0$ :

$$q = \lambda \frac{du}{dy} = -\frac{\lambda U}{h} - \frac{dp}{dx} \frac{h}{2},$$

Así, con respecto a (6):

$$(7) \quad q = -\lambda U \frac{4h - 3h_0}{h^2}$$

Die Koordinaten  $x$  und  $y$  werden parallel und senkrecht zu A gemessen. Wir nehmen auch jetzt an, daß die Strömung lediglich in der  $x$ -Richtung erfolgt, d. h. wir vernachlässigen ihre  $y$ -Komponente und setzen voraus, daß die oben gefundene Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit auch jetzt gültig bleibt; letzteres kommt darauf hinaus, daß wir die Trägheit der Flüssigkeit im Verhältnis zu den Reibungswirkungen vernachlässigen. Bei den gegen einander geneigten Begrenzungen der Flüssigkeit muß das einzelne Flüssigkeitsteilchen allerdings beschleunigt werden; Ein Teil des zur Verfügung stehenden Drucküberschusses wird daher jetzt zur Erzeugung dieser beschleunigung oder zur Überwindung der Trägheit verbraucht. Statt der Gleichgewichtsbedingungen zwischen Druck und Reibung sollten daher jetzt genau genommen die Beschleunigungsgleichungen für das Teilchen angesetzt werden. Diese stimmen mit den früheren Gleichgewichtsbedingungen nur dann überein, wenn wir die Trägheit vernachlässigen, was gestattet sein wird, wenn die Beschleunigungen hinreichend klein sind, also z. B. im Falle wenig geneigter Wände oder starker Zähigkeit des Schmiermittels. In diesem Falle gilt die aus den Gleichgewichtsbedingungen gefundene Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit hinreichend genau auch für die jetzt zu betrachtende wenig beschleunigte Bewegung.

Wir werden unsere Flüssigkeit als inkompressibel voraussetzen; dann muß die durch verschiedene Querschnitte in der Zeiteinheit geförderte Flüssigkeitsmenge dieselbe sein. Die Flüssigkeitsmenge beträgt nach (4):

$$(5) \quad Q = \int_0^h u dy = U \frac{h}{2} - \frac{dp}{dx} \frac{h^3}{12\lambda}.$$

Betrachten wir insbesondere zwei benachbarte, um  $dx$  voneinander abstehende Querschnitte  $h$  und  $h+dh$ , so wird  $dQ/dx=0$ . Dies führt nach (5) auf die Gleichung

$$U \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dp}{dx} \frac{h^3}{6\lambda} \right);$$

Dieselbe läßt sich unmittelbar integrieren und liefert, wenn wir unter  $h_0$  eine Integrationskonstante verstehen:

$$U(h - h_0) = \frac{dp}{dx} \frac{h^3}{6\lambda}.$$

Wir berechnen daraus

$$(6) \quad \frac{dp}{dx} = 6\lambda U \frac{h - h_0}{h^3}.$$

Während bei der unter 1 betrachteten stationären Strömung das Druckgefälle konstant sein muß, wird es jetzt, nach Maßgabe der veränderlichen Schichtdicke  $h$ , eine Funktion von  $x$ .

Wir berechnen noch die von der Flüssigkeit auf die Längeneinheit der Wandung A übertragene Reibung  $q$ . Diese beträgt nach dem Ansatz (2) und der Gl. (4) für  $y=0$ :

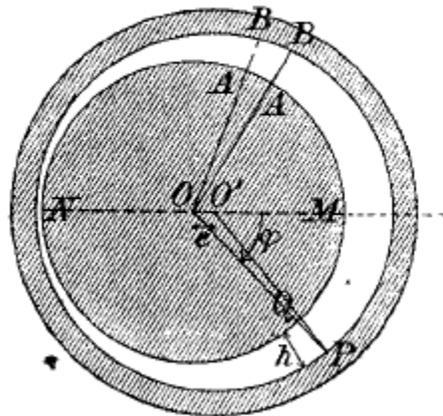
$$q = \lambda \frac{du}{dy} = -\frac{\lambda U}{h} - \frac{dp}{dx} \frac{h}{2},$$

Also mit Rücksicht auf (6):

$$(7) \quad q = -\lambda U \frac{4h - 3h_0}{h^2}.$$

3. Vamos a proceder con el caso de un cojinete de diario para la vuelta. La superficie del perno y la superficie límite interior del cojinete se supone que son cilindros circulares. Consideramos una sección transversal del eje y el cojinete (Fig. 4) y asumir que el flujo del lubricante sólo en el plano de la sección transversal individuo.  $U$  es la velocidad periférica de la clavija. De generalidad, sacamos el pasador excéntrico,  $e$  igual a la distancia de los pines o punto central desde el centro del cojinete  $O$  "o la" excentricidad ". La dirección  $OO'$ , se trasladó a la clavija de la posición central, se puede elegir arbitrariamente, siempre y cuando la dirección de la presión no toque  $P$  se ha dicho, que elegimos para  $OO'$  por razones que se exponen más adelante, la dirección horizontal.

Fig. 4.



En la línea de  $OO'$  está rodeado por mayor y menor y lubricantes  $M$  del cuerpo espesor de la película y  $N$ .  $A$   $O$  en todo estamos en el sentido de rotación del perno, la  $R$  del rodamiento, por lo que, por ejemplo,  $OQ = r = R - O'P$ .  $R - R$  son igual a  $\delta$ . Nosotros determinamos el propósito de la  $PQO$   $OO'$  polilínea. La proyección de  $OO'P$   $OPQ$ , por un lado es igual a  $r + h$ , sino también la igualdad de  $e \cos \varphi + R$ , el ángulo en  $P$  tratado como un pequeño ángulo, por lo tanto su coseno es igual a 1. Así se ha

$$r + h = e \cos \varphi + R$$

O

$$(8) \quad h = \delta + e \cos \varphi.$$

En particular, como el grosor mayor y el menor en  $M$  y  $N$

$$\text{für } \varphi = 0 \dots h_{\max} = \delta + e, \quad \text{für } \varphi = \pi \dots h_{\min} = \delta - e.$$

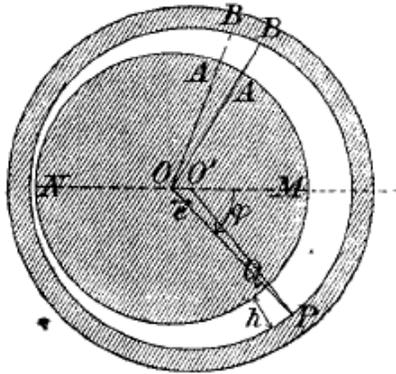
Ahora se aplican las consideraciones de 2 en el caso de nuestra capa de barrillo, nos movemos de  $O$  de dos radios adyacentes  $OAB$  (ver Figura 4). Entre  $AA$  y  $BB$  es de aproximadamente considerarse como una línea recta limitada. Se incluye la variable  $x$  como antes, en la dirección de  $AA$ , por lo que  $dx = r d\varphi$ , y es dada por (6)

$$(9) \quad \frac{dp}{d\varphi} = 6\lambda r U \frac{h - h_0}{h^3}.$$

3. Wir gehen jetzt zu dem Fall eines in einer Lagerschale sich umdrehenden Zapfens über. Die Oberfläche des Zapfens und die innere Grenzfläche der Lagerschale werden als Kreiszyylinder vorausgesetzt.

Wir betrachten einen Querschnitt durch Zapfen und Lagerschale (Fig. 4) und nehmen an, daß die Strömung des Schmiermittels lediglich in der Ebene des einzelnen Querschnittes erfolgt.  $U$  sei die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens. Der Allgemeinheit wegen zeichnen wir den Zapfen exzentrisch;  $e$  sei der Abstand des Zapfenmittelpunktes  $o$  vom Mittelpunkt der Lagerschale  $O'$  oder die "Exzentrizität". Die Richtung  $OO'$ , in der Zapfen aus der zentrischen Lage verschoben ist, kann beliebig gewählt werden, solange über die Richtung des Zapfendruckes  $P$  noch nichts ausgesagt ist; wir wählen für  $OO'$  aus Gründen, die später darzulegen sind, die horizontale Richtung.

Fig. 4.



Auf der Geraden  $OO'$  befindet sich die Stelle größter und kleinster Schmierschichtdicke  $M$  und  $N$ . Um  $O$  herum zählen wir im Sinne der Umdrehung des Zapfens,  $R$  der der Lagerschale, so daß z. B.  $OQ=r$ ,  $O'P=R$  ist.  $R-r$  werde gleich  $\delta$  gesetzt. Wir bestimmen die Zwecke den Linienzug  $OO'PQO$ . Die Projektion von  $OO'P$  auf  $OPQ$  ist einerseits gleich  $r+h$ , andererseits gleich  $e \cos \varphi + R$ , wobei der Winkel bei  $P$  als kleiner Winkel behandelt, sein Kosinus also gleich 1 gesetzt ist. Man hat also

$$r + h = e \cos \varphi + R$$

Oder

$$(8) \quad h = \delta + e \cos \varphi.$$

Hieraus folgt insbesondere als größte und kleinste Schichtdicke bei  $M$  und  $N$

$$\text{für } \varphi = 0 \dots h_{\max} = \delta + e, \quad \text{für } \varphi = \pi \dots h_{\min} = \delta - e.$$

Um nun die Betrachtungen unter 2 auf den Fall unserer Schmierschicht anwenden zu können, ziehen wir von  $O$  aus zwei benachbarte Radien  $OAB$  (vgl. Fig. 4). Die zwischen  $AA$  und  $BB$  ist, annähernd als geradlinig begrenzt angesehen werden.

Zählen wir die Variable  $x$  wie früher in der Richtung von  $AA$ , so wird  $dx=r d\varphi$ , und es ergibt sich nach (6)

$$(9) \quad \frac{dp}{d\varphi} = 6\lambda r U \frac{h-h_0}{h^3}.$$

Considerado con R'' (8) por lo que el gradiente de presión  $dp / d\varphi$  es una función conocida de  $\varphi$ , en el que sólo entra en la constante de integración no es seguro  $h_0$ .

La importancia de esta integración constante es directamente de (9) muestra:  $H_0$ : el espesor de la capa, para los que  $dp / d\varphi = 0$ , es decir, el espesor en los puntos de la periferia del cono, donde  $p$  toma su valor máximo o mínimo.

Supongo que ahora que el lubricante todo el espacio entre el perno y el buje se llena todos los lados. Esta condición es crucial para la simplicidad de los siguientes proyectos de ley y debe ser tratado primero. Si se corresponde con la realidad, más tarde (\*\* 6) para ser superior.

Cuando la capa de barrillo continuamente el corredor y en sí, así es necesario que  $p$  es una constante  $\varphi$ , son en la función de corredor del ángulo. Por lo tanto,

$$p(\varphi + 2\pi) = p(\varphi)$$

Y sobre todo

$$(10) \quad p(2\pi) = p(0).$$

Esta condición debe servir a determinar el  $h_0$  constantes de integración. Integramos (9) para  $\varphi$  para salir adelante =  $2\pi$  y

$$p(2\pi) - p(0) = 6\lambda r U \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3} - h_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3} \right\},$$

Así, por (8) y (10)

$$(11) \quad h_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + \varepsilon \cos \varphi)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + \varepsilon \cos \varphi)^3}.$$

Es conveniente para la relación

$$(12) \quad \alpha = \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad 1 \leq \alpha \leq \infty$$

Introducir, en la posición precisamente centrada de la espiga en el campo es de  $e = 0$  y  $\alpha = \infty$ : en lo que la posición excéntrica, es decir, cuando el pasador linda directamente con un punto de la circunferencia del cojinete es, por el otro  $e = \delta$  y  $\alpha = 1$ .

Mit Rücksicht auf (8) ist also das Druckgefälle  $dp/d\varphi$  eine bekannte Funktion von  $\varphi$ , in die nur die noch nicht bestimmte Integrationskonstante  $h_0$  eingeht.

Die Bedeutung dieser Integrationskonstanten geht unmittelbar aus (9) hervor:  $h_0$  bedeutet die Schichtdicke, für welche  $dp/d\varphi=0$  wird, also die Dicke an denjenigen Stellen des Zapfenumfanges, wo  $p$  seinen größten oder kleinsten Wert annimmt.

Ich werde jetzt voraussetzen, daß das Schmiermittel den ganzen Zwischenraum zwischen Zapfen und Lagerschale allseitig ausfüllt. Diese Voraussetzung ist für die Einfachheit der folgenden Rechnungen entscheidend und muß daher an erster Stelle behandelt werden. Ob sie der Wirklichkeit entspricht, wird später (\*\*6) zu überlegen sein.

Wenn die Schmierschicht ununterbrochen und in sich zurücklaufend ist, so muß  $p$  eine stetige, in sich zurücklaufende Funktion des Winkels  $\varphi$  werden. Es gilt daher

$$p(\varphi + 2\pi) = p(\varphi)$$

Und speziell

$$(10) \quad p(2\pi) = p(0).$$

Diese Bedingung soll uns Bestimmung der Integrationskonstanten  $h_0$  dienen. Wir integrieren (9) nach  $\varphi$  von = bis  $2\pi$  und erhalten

$$p(2\pi) - p(0) = 6\lambda r U \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3} - h_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3} \right\},$$

Also wegen (8) und (10)

$$(11) \quad h_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + e \cos \varphi)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + e \cos \varphi)^3}.$$

Es ist bequem, die Verhältniszahl

$$(12) \quad \alpha = \frac{\delta}{e}, \quad 1 \leq \alpha \leq \infty$$

Einzuführen; bei genau zentrischer Lage des Zapfens im Lager wird  $e=0$  und  $\alpha=\infty$ : bei möglichst exzentrischer Lage, d. H. Wenn der Zapfen mit einer Stelle seines Umfanges unmittelbar an die Lagerschale anstößt, wird andererseits  $e=\delta$  und  $\alpha=1$ .

Todavía usamos las abreviaturas:

$$(13) \quad J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + \cos \varphi}, \quad J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^2}, \quad J_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^3},$$

Así escribe el G1. (11) de la siguiente manera:

$$(14) \quad \frac{h_0}{e} = \frac{J_2}{J_3}.$$

Los valores de J1, J2, J3 indicar que tenga en cuenta que puede

$$(15) \quad J_2 = -\frac{dJ_1}{d\alpha}, \quad J_3 = -\frac{1}{2} \frac{dJ_2}{d\alpha};$$

Además, nos convencemos de la diferenciación de la exactitud de las siguientes (se sabe) formal integral, siempre en el que  $\alpha > 1$ :

$$(16) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\alpha + \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \arctg \left( \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right).$$

Si reemplazamos los resultados en un (16), el límite superior de la integral de  $2\pi$ , por lo que el valor de J1, por (15) también siguen los valores de la J2 y J3 encontramos esto:

$$(17) \quad J_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \quad J_2 = \frac{2\pi\alpha}{(\sqrt{\alpha^2 - 1})^3}, \quad J_3 = \pi \frac{2\alpha^2 + 1}{(\sqrt{\alpha^2 - 1})^5}.$$

De acuerdo con (14) llegamos a la conclusión de que

$$(18) \quad \frac{h_0}{e} = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1}.$$

Si escribimos la analogía de (8)

$$(18') \quad h_0 = \delta + e \cos \varphi_0, \quad \frac{h_0}{e} = \alpha + \cos \varphi_0,$$

El resultado es determinar el máximo o el mínimo de puntos de presión, la ecuación:

$$(19) \quad \cos \varphi_0 = -\frac{3\alpha}{2\alpha^2 + 1}.$$

Benutzen wir noch die Abkürzungen:

$$(13) \quad J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + \cos \varphi}, \quad J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^2}, \quad J_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos \varphi)^3},$$

So schreibt sich Gl. (11) wie folgt:

$$(14) \quad \frac{h_0}{e} = \frac{J_2}{J_3}.$$

Um die Werte von  $J_1, J_2, J_3$  anzugeben, bemerken wir, daß ersichtlich

$$(15) \quad J_2 = -\frac{dJ_1}{d\alpha}, \quad J_3 = -\frac{1}{2} \frac{dJ_2}{d\alpha};$$

Ferner überzeugen wir uns durch Differenzieren von der Richtigkeit der folgenden (bekannten) Integralformal, bei welcher  $\alpha > 1$  vorausgesetzt wird:

$$(16) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\alpha + \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right).$$

Ersetzen wir in (16) die obere Grenze des Integrals durch  $2\pi$ , so ergibt sich der Wert von  $J_1$ ; nach (15) folgen zugleich die Werte  $J_2$  und  $J_3$ . Man findet so:

$$(17) \quad J_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \quad J_2 = \frac{2\pi\alpha}{(\sqrt{\alpha^2 - 1})^3}, \quad J_3 = \pi \frac{2\alpha^2 + 1}{(\sqrt{\alpha^2 - 1})^5}.$$

Nach (14) schließen wir hieraus, daß

$$(18) \quad \frac{h_0}{e} = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1}.$$

Schreiben wir nach Analogie von (8)

$$(18') \quad h_0 = \delta + e \cos \varphi_0, \quad \frac{h_0}{e} = \alpha + \cos \varphi_0,$$

So ergibt sich zur Bestimmung der Stellen größten oder kleinsten Druckes die Gleichung:

$$(19) \quad \cos \varphi_0 = -\frac{3\alpha}{2\alpha^2 + 1}.$$

Estos actores son tan a cero excentricidad ( $\alpha = \text{infinito}$ ) diametralmente opuestos entre sí por  $\varphi_0 = \pm \pi / 2$ , con la excentricidad máxima ( $\alpha = 1$ ) se encuentran entre sí y con el aparcamiento existente en ese momento en contacto directo entre el eje y el cojinete  $\varphi_0 = \pm \pi$  juntos.

Die genannten Stellen liegen also bei verschwindender Exzentrizität ( $\alpha = \text{infinito}$ ) einander diametral gegenüber, indem  $\varphi_0 = \pm \pi / 2$  wird, bei größtmöglicher Exzentrizität ( $\alpha = 1$ ) fallen sie unter sich und mit der alsdann vorhandenen Stelle unmittelbarer Berührung zwischen Zapfen und Lager  $\varphi_0 = \pm \pi$  zusammen.