

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
UNIDAD PROFESIONAL ADOLFO LÓPEZ MATEOS

**“INVESTIGACIÓN DE CHUMACERAS HÍBRIDAS
LARGAS CON PUERTOS LINEALES DE
PRESURIZACIÓN”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN
INGENIERÍA MECÁNICA

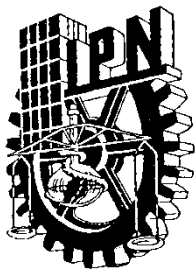
PRESENTA:

ALAN CHRISTIAN DOMÍNGUEZ VÁZQUEZ

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. VALERY R. NOSOV**

MÉXICO, D. F.

2011



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, Distrito Federal el día 20 del mes Junio del año 2011, el (la) que suscribe Alan Christian Domínguez Vázquez alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica con número de registro A090318, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Zacatenco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Valery Romanovich Nossov y cede los derechos del trabajo intitulado Investigación de Chumaceras Híbridas Largas con Puertos Lineales de Presurización, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección adominguezv0800@alumno.ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Alan Christian Domínguez Vázquez

Nombre y firma



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

SIP-14

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 14:00 horas del día 17 del mes de Junio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.M.E. para examinar la tesis titulada:

**"INVESTIGACIÓN DE CHUMACERAS HÍBRIDAS LARGAS CON
PUERTOS LINEALES DE PRESURIZACIÓN".**

Presentada por el alumno:

DOMÍNGUEZ

Apellido paterno

VÁZQUEZ

Apellido materno

ALAN CHRISTIAN

Nombre(s)

Con registro:

A	0	9	0	3	1	8
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

DR. VALERY ROMANOVICH NOSSOV

Presidente

DR. JOSÉ ÁNGEL LODEGARÍO ORTEGA HERRERA

Tercer Vocal

DR. JESÚS ALBERTO MEDA CAMPAÑA

Segundo Vocal

DR. IGNACIO RAMÍREZ VARGAS

Secretario

DR. JULIO CÉSAR GÓMEZ MANCILLA

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

DR. JAIME ROBLES GARCÍA

SECCION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACION



“Investigación de Chumaceras Híbridas Largas con Puertos Lineales de Presurización”

CONTENIDO	I
ÍNDICE DE FIGURAS	III
ÍNDICE DE TABLAS	VIII
NOMENCLATURA	IX
RESUMEN	XI
ABSTRACT	XIII
OBJETIVO	XV
JUSTIFICACION	XVI

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN.

1.1 General.	2
1.2 Investigación de la Rotodinámica.	4
1.3 Desarrollo en el Diseño de Cojinetes.	5
1.4 Chumacera Hidrodinámica.	5
1.5 Chumaceras de Presión Externa.	6
1.5.1 Chumaceras Hidrostáticas.	6
1.5.2 Chumaceras Híbridas.	7
1.6 Estado del Arte en el Diseño de Chumaceras con Presurización Externa.	8
1.6.1 Investigación Analítica-Numérica.	9
1.6.1.1 Estudio Realizados por BENTLY-NEVADA.	10

CAPÍTULO 2: MODELO DE PRESURIZACIÓN CON PUERTO LINEAL EN CHUMACERAS LARGAS.

2.1 Ecuación de Reynolds, deducción.	13
2.2 Ecuación de Reynolds, coordenadas cilíndricas.	22
2.3 Ecuación de Lubricación de Reynolds.	31
2.4 Modelo Clásico de Chumacera.	34
2.4.1 Modelo, Chumacera Corta.	34
2.4.2 Modelo, Chumacera Infinitamente Larga.	35
2.5 Modelo Matemático para una Chumacera Larga con Puerto Lineal de Presurización.	35
2.4.1 Delta de Dirac.	36
2.4.2 Modelo para una Chumacera Larga con Línea de Presurización.	37





CAPÍTULO 3: CAMPOS DE PRESIÓN EN CHUMACERAS HÍBRIDAS LARGAS CON PUERTOS LINEALES DE INYECCIÓN.

41

3.1 Solución Modelo Clásico para una Chumacera Larga (Sin Presurización).	42
3.1.1 (Primer Caso) Solución del Modelo utilizando las Condiciones de Frontera de Sommerfeld.	42
3.1.2 (Segundo Caso) Solución del Modelo utilizando las Condiciones de Frontera de Gumbel.	44
3.1.3 (Tercer Caso) Solución del Modelo utilizando la Teoría de Warner.	46
3.2 Solución Cerrada Modelo Presurizado de Chumacera Infinitamente Larga.	47
3.3 Solución Numérica Modelo Presurizado de Chumacera Infinitamente Larga.	53
3.3.1 Método de Integración de Euler.	54
3.4 Campos de presión en una Chumacera Híbrida Larga.	55
3.4.1 Campos de Presión Adimensional con Presurización en la Parte Superior de la Chumacera.	56
3.4.2 Campos de Presión Adimensional con Presurización en la Parte Inferior de la Chumacera.	67

CAPÍTULO 4: CARACTERIZACIÓN DE CHUMACERAS HÍBRIDAS LARGAS CON PUERTOS LINEALES DE INYECCIÓN.

78

4.1 Caracterización de una Chumacera Larga; “Número de Sommerfeld”.	79
4.2 Relación Número de Sommerfeld contra la excentricidad.	84
4.2.1 Presurización en la Parte Central Superior de una Chumacera Híbrida Larga.	84
4.2.1.1 (Primer Caso) Utilizando las Condiciones de Frontera de Sommerfeld.	85
4.2.1.2 (Segundo Caso) Utilizando las Condiciones de Frontera de Gumbel.	85
4.2.1.3 (Tercer Caso) Utilizando Teoría de Warner.	86
4.2.2 Presurización en la Parte Central Inferior de una Chumacera Híbrida Larga.	87
4.2.2.1 (Primer Caso) Utilizando Condiciones de Frontera de Sommerfeld.	87
4.2.2.2 (Segundo Caso) Utilizando Condiciones de Frontera de Gumbel.	88
4.2.2.3 (Tercer Caso) Utilizando Teoría de Warner.	88

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.

98

Apéndice A	103
Apéndice B	105
Apéndice C	110





CAPÍTULO 1

Figura 1. 1 Turbina de vapor Mitsubishi para una planta nuclear.

Figura 1. 2 Presión en una Chumacera Hidrodinámica, se Distribuye de Manera Tangencial, el Color más Oscuro Muestra la Zona de Mayor Presión.

Figura 1. 3 Esquema que Muestra el Suministro de Aceite de una Chumacera Hidrostática.

Figura 1. 4 Configuración de una Chumacera Híbrida.

Figura 1. 5 Configuración Utilizada por BENTLY-NEVADA para una Chumacera Presurizada.

CAPÍTULO 2

Figura 2. 1 Nomenclatura Utilizada en una Chumacera Hidrodinámica en Reposo.

Figura 2. 2 Frontera, Chumacera Hidrodinámica.

Figura 2. 3 Espesor de la Película de Lubricante en la Chumacera.

Figura 2. 4 Posición Arbitraria del Muñón en una Chumacera.

Figura 2. 5 Variación del Espesor de la Película de Aceite.

Figura 2. 6 Vectores Unitarios en las Direcciones Radiales y Transversales del Punto S para una Posición Arbitraria, de la Película de Aceite.

Figura 2. 7 Trazos necesarios para determinar el vector R .

Figura 2.8 Vista de una Chumacera, Resaltando los Valores “D” y “L”; Sumamente Importante para su Clasificación.

Figura 2. 9 Sistema de Coordenadas Fijo dado por (XYZ) de una Chumacera Móvil (X' , Y' , Z') del Muñón.

CAPÍTULO 3

Figura 3. 1 Campo de presión condición de frontera de Sommerfeld, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.3$.

Figura 3. 2 Campo de presión condición de frontera de Sommerfeld, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.7$.

Figura 3. 3 Campo de presión condición de frontera de Gümbel, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.3$.

Figura 3. 4 Campo de presión condición de frontera de Gümbel, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.7$.

Figura 3. 5 Campo de presión utilizando teoría de Warner, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.3$.

Figura 3. 6 Campo de presión utilizando teoría de Warner, chumacera larga, para una





excentricidad $\varepsilon = 0.7$.

Figura 3. 7 Función Arco tangente.

Figura 3. 8 Solución cerrada viéndose reflejado los saltos debido a la función Arco tangente.

Figura 3. 9 Campo de Presión Hidrostática en Chumacera Híbrida Larga.

Figura 3. 10 Ubicación de la Línea de Presurización en la Chumacera.

Figura 3. 11a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 11b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 11c Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 12a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 12b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 13a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 13b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 14a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 14b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 14c Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 15a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 15b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 16a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 16b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 17a Campo de Presión Total-Teoría Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.1$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 17b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 17c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.7$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 18a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 18b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.



Figura 3. 19a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 19b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 20a Campo de Presión Total-Teoría Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.1$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 20b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 20c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.7$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 21a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 21b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 21c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 22a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 22b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 23 Ubicación de la Línea de Presurización en la Chumacera.

Figura 3. 24a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 24b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 24c Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 25a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 25b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 26a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 26b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 27a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 27b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 27c Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 28a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 28b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.





Figura 3. 29a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 29b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 30a Campo de Presión Total-Teoría Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 30b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 30c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 31a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 31b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 32a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 32b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.7$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 33a Campo de Presión Total-Teoría Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 33b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 33c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

Figura 3. 34a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 34b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

Figura 3. 35a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

Figura 3. 35b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

CAPÍTULO 4

Figura 4. 1 Componentes en la Dirección radial y Transversal de la Fuerza en la Película de Aceite.

Figura 4. 2 Utilizando Solución de Sommerfeld- $\beta = \pi$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Figura 4. 3 Utilizando Solución de Gumbel- $\beta = \pi$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.



Figura 4. 4 Utilizando Teoría de Warner, $L/D = 2$ - $\beta = \pi$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Figura 4. 5 Utilizando Teoría de Warner, $L/D = 8$ - $\beta = \pi$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Figura 4. 6 Utilizando Solución de Sommerfeld- $\beta = 0$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Figura 4. 7 Utilizando Solución de Gümbel- $\beta = 0$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Figura 4. 8 Utilizando Teoría de Warner, $L/D = 2$ - $\beta = 0$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Figura 4. 9 Utilizando Teoría de Warner, $L/D = 8$ - $\beta = 0$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.



TABLAS

Tabla 1 Utilizando Solución de Sommerfeld- Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Tabla 2 Utilizando Solución de Gümbel- Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Tabla 3 Utilizando Teoría de Warner, $L/D=2$ - Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Tabla 4 Utilizando Teoría de Warner, $L/D=8$ - Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Tabla 5 Utilizando Solución de Sommerfeld- Puerto de Inyección Inferior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Tabla 6 Utilizando Solución de Gümbel- Puerto de Inyección Inferior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Tabla 7 Utilizando Teoría de Warner, $L/D=2$ - Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

Tabla 8 Utilizando Teoría de Warner, $L/D=8$ - Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.



NOMENCLATURA

p :	Presión.
R_m :	Radio del muñón.
R :	Radio de la chumacera.
C_r :	Claro radial.
e :	Excentricidad dimensional.
ε :	Excentricidad adimensional.
H :	Espesor dimensional de la película de fluido lubricante.
h :	Espesor adimensional de la película de fluido lubricante.
ρ :	Densidad.
μ :	Viscosidad absoluta del fluido.
θ :	Coordenada angular.
\bar{p} :	Presión adimensional.
ω :	Velocidad angular (radianes por segundo).
N :	Velocidad angular (revoluciones por segundo).
Re :	Número de Reynolds.
Re_* :	Número de Reynolds modificado.
φ :	Ángulo de equilibrio.
L :	Longitud de la chumacera.
L_{lim} :	Longitud de la chumacera.
D :	Diámetro de la chumacera.
$\delta(x)$:	Función Delta de Dirac.
$H(x)$:	Función de Heaviside.
β :	Coordenada angular del puerto de presión.
ΔF_{pres} :	Fuerza total de presurización.
Δs :	Área del puerto de inyección.
Δp :	Presión de inyección.
φ_{pres} :	Ángulo de equilibrio (attitud) en una chumacera presurizada.
\bar{q}_{prt} :	Presión adimensional en un puerto respecto a la fuerza ficticia característica.
P_{fict} :	Presión ficticia.





$p(\theta)_{Som}$: Presión adimensional de la solución de Sommerfeld.

$p(\theta)_{Güm}$: Presión adimensional de la solución de Gumbel.

z : Coordenada axial de la chumacera.

$p(\theta, z)_{Warner}$: Presión adimensional de la teoría de Gumbel.

λ : Constante la cual evaluada en la posición de equilibrio.

$p(\theta, \varepsilon)$: Presión adimensional externa por un puerto de inyección.

W : Peso total del sistema.

F_{PT} : Fuerza de presión total.

F_R : Componente radial de la fuerza dimensional de presión total.

F_T : Componente tangencial de la fuerza dimensional de presión total.

F_R : Componente radial de la fuerza de presión total aplicada a una unidad de longitud.

F_T : Componente tangencial de la fuerza de presión total aplicada a una unidad de longitud.

P_{Total} : Presión total dimensional.

\bar{P}_{Total} : Presión total adimensional.

f_R : Componente radial de la fuerza adimensional de presión total.

f_T : Componente tangencial de la fuerza adimensional de presión total.

f : Resultante de la fuerza adimensional de presión total.

\bar{W}_{lim} : Peso con respecto a la unidad de longitud.

S : Número de Sommerfeld.





RESUMEN

En este trabajo se pretende retomar la teoría de chumaceras presurizadas, en el que su objetivo principal será determinar en forma analítica-numérica las principales características de chumaceras que a su vez serán de gran importancia para poder predecir el comportamiento de un sistema rotor con chumaceras presurizadas externamente como soportes; hay que recalcar que este trabajo se centra en el análisis de chumaceras largas debido que las chumaceras cortas ya fueron analizadas en trabajos anteriores.

Se sabe que la presurización externa es una manera artificial de cambiar las propiedades de rigidez y amortiguamiento pero para poder entender esto es necesario saber el comportamiento interno de la chumacera he ahí la importancia de este trabajo.

En el capítulo I se muestra la introducción y un pasaje histórico de la rotodinámica así como todos los avances que hasta el día de hoy se comparten, en la investigación de chumaceras presurizadas.

En el capítulo II se presenta el modelo de presurización con puertos lineales de inyección, comenzando desde la deducción de Reynolds, que nos permite determinar el campo de presión $p(\theta, z)$ dentro de una chumacera como función de su movimiento a su vez la transformación a coordenadas cilíndricas que para este caso en particular se vuelve fundamental. Se enmarcan también los modelos clásicos de chumaceras y se muestra la forma en que se llega a la resolución del modelo propuesto con ayuda de la función Delta de Dirac, teniendo al final el modelo para una chumacera larga con línea de presurización.

El capítulo III presenta la solución al modelo que se establece en el capítulo anterior dando paso primero a la forma de solución del modelo clásico (presurización en una chumacera hidrodinámica), teniendo en consideración las tres posibles soluciones: solución de Sommerfeld, solución de Gümbel y la teoría de Warner; seguida de la solución con presurización externa siendo propuestas en este trabajo; la presurización es suministrada en la parte superior o inferior de la chumacera, teniendo estas dos soluciones se presenta los campos de presión total (suma de las dos presiones: externa e hidrodinámica) de una chumacera híbrida larga.





En capítulo IV enmarca la forma de caracterizar una chumacera híbrida larga a través del llamado número de Sommerfeld o carga adimensional que es utilizado para el diseño de chumaceras y se dice que si el número de Sommerfeld aumenta, la capacidad de soportar carga disminuye y viceversa, aquí también se presenta la relación que existe entre el número de Sommerfeld con respecto a una excentricidad a una presión dada, llegando así a los resultados finales dependiendo de la solución de presión hidrodinámica tomada. Estas soluciones presentadas pretenden dar un mejor entendimiento del funcionamiento de las chumaceras largas para ayuda al diseño de las mismas.

Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo así como los trabajos futuros que se espera como un seguimiento a este trabajo, así como a los anteriores, remarcando los puntos a mejorar así como aquello que es necesario para poder plantear una afirmación de lo propuesto.





ABSTRACT

In this work we attempt to retake the theory of pressurized bearings, which main objective is to determine in an analytical-numerical way the key features of bearings which in turn will be important to predict the behavior of a rotor system with externally pressurized bearings like supports; we must stress that this work focuses on the analysis of long bearings because the short bearings was analyzed in previous works.

Is known that external pressurization is a artificially way change properties stiffness and damping but to understand this requires know internal behavior the rowlock hence the importance this work.

In chapter I It contains the introduction and historical passage of the rotodynamic and all progress today are shared, of the researching about pressurized bearings.

In chapter II presents the model of pressurization linear injection ports, starting from the deduction of Reynolds, which allows us to determine the pressure field within a journal bearing as a function of their movement, in turn the transformation to cylindrical coordinates that for this particular case it becomes essential. Also we stress the classic models of journal bearings and shows the way to solving the proposed model using the Dirac spatial delta function, for the final shows the model for a long journal bearing with a pressurization line.

Chapter III presents the solution to the model that was set in the previous chapter, giving way first to a solution of the classical model (pressurization in a hydrodynamic bearing), taking into consideration the three possible solutions, Sommerfeld solution, solution Gumbel and Warner's theory, followed by external pressurization solution being proposed in this work, the pressurization is provided in the top or bottom of the bearing, taking these two solutions we can shows the total pressure fields (sum of two pressures: external and hydrodynamic) of a long hybrid bearing.

In Chapter IV frames the way to characterize a long hybrid bearing through the called Sommerfeld number or dimensionless load is used for the design of bearings and said that if the Sommerfeld number increases, the load carrying capacity decreases and vice versa, here also shows the relationship between the





number of Sommerfeld with respect to an eccentricity at a given pressure, reaching if the final results depending on the solution of hydrodynamic pressure taken. These proposed solutions are intended to give a better understanding of operation to long bearings and help to design it.

Finally, we present the conclusions of the work and future work is expected as a follow up to this study and previous ones, highlighting areas for improvement and what is needed to raise a claim as proposed.





OBJETIVO

El objetivo del trabajo es el desarrollo del modelo propuesto para una chumacera híbrida larga con puertos lineales de presurización, en la cual permita inyectar un lubricante en puertos cuya posición sea arbitraria. Teniendo como soporte el análisis de chumaceras cortas y por ende retomándolo para chumaceras largas, y la caracterización de las mismas.

Al término de este trabajo se pretende presentar los campos de presión producidos en una chumacera híbrida larga, donde en los campos se presenta el efecto de la presión total, siendo el paso para poder determinar la carga y finalmente poder caracterizar las chumaceras largas. A su vez pretendiendo que con estos resultados puedan servir como una guía al diseñador de maquinaria rotatoria y le permita tomar decisiones acertadas y necesarias al utilizar una chumacera híbrida, es decir tomando en cuenta los resultados obtenidos.



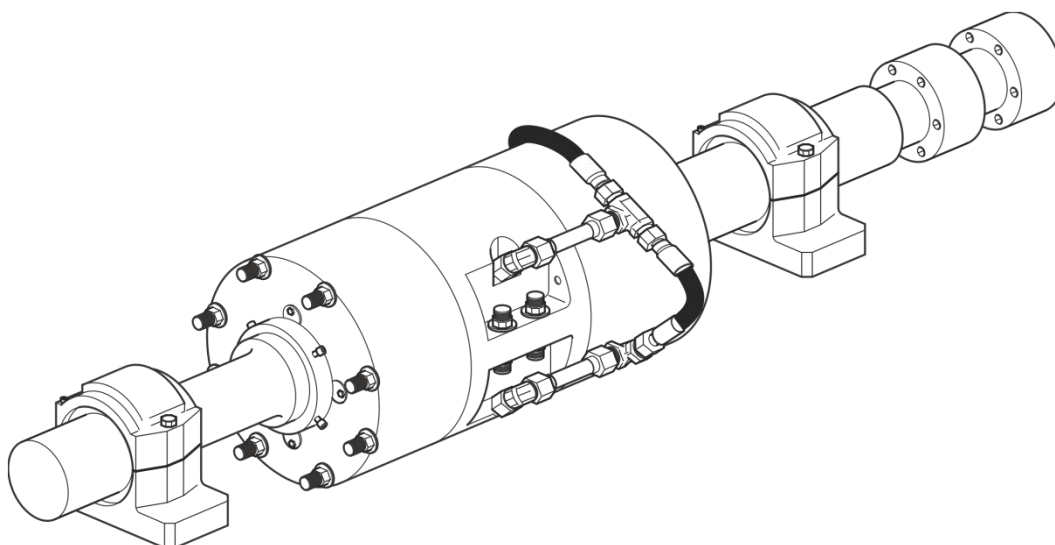
JUSTIFICACIÓN

Todo equipo rotatorio necesita soportes que permitan la libre rotación y una gama de estos equipos se encuentran soportados por chumaceras hidrodinámicas, que como cualquier sistema está expuesto a sufrir vibraciones, las cuales son capaces de causar daños severos.

Se tiene estudiado que una chumacera si se presuriza externamente es posible modificar las propiedades dinámicas de la película de aceite, provocando que las inestabilidades y amplitudes de las vibraciones puedan disminuirse en forma marcada. Pero para poder marcar esto es necesario estudiar el comportamiento de esta película de aceite en el interior de la chumacera, siendo así una forma de poder predecir en gran eficiencia el comportamiento que se desea partiendo del diseño al problema que se tiene.

Actualmente existen compañías que se dedican al estudio experimental de rotores, se interesan en el diagnóstico de equipos que presentan cambios en las propiedades dinámicas y campos de presión de la película de lubricante, estos cambios son producidos por la presurización externa. El incremento de la rigidez en las chumaceras puede producir cambios en las frecuencias de resonancia y de esta manera el diagnóstico realizado será diferente. Es por esta razón que en esta tesis se desarrolla una teoría de chumaceras presurizadas en la cual se presenta una serie de resultados que deben ser tomados en cuenta en el diseño y al realizar diagnósticos de maquinaria rotatoria.





CAPÍTULO UNO

INTRODUCCIÓN





1.1 General.

En general la humanidad siempre busca los métodos que le resulten más útiles en el desempeño de sus actividades de todo tipo, por lo consiguiente hoy en día una parte muy importante es el desarrollo industrial ya que cumple con una parte trascendental en la innovación tecnológica, toda investigación y actividad que satisfaga una necesidad son ejes centrales para el avance económico y social de una sociedad.

En todo el mundo, no siendo la excepción México, el desarrollo en particular de la industria está sujeto más que nada en la extracción de petróleo y la generación de fuentes eléctricas y por ende ha sido un foco de importancia a través de las últimas décadas, siendo el principal requerimiento de los servicios solicitados por la sociedad. Es por eso que la demanda de maquinaria rotatoria de alto desempeño y eficiencia en las velocidades de operación de éstas es en cierta forma inevitable. Es por ello que la industria requiere de métodos eficaces para la explicación en rotores, ya que un accidente derivado de la ruptura de un rotor es de una magnitud inimaginable. Por dar un ejemplo, una turbina de vapor puede llegar a pesar alrededor de 40 toneladas (Figura 1.1) y tener una velocidad de giro entre las 3000 y 3600 rpm, lo cual si algún elemento de dicha turbina saliera expulsado, la energía contenida en este elemento sería suficientemente grande para causar una daño irreversible, así teniendo en cuenta estas importancias han surgido nuevas especialidades que buscan la invención en esta área, una de ellas es la Rotodinámica.

Si se entiende la rotodinámica como la disciplina que analiza el comportamiento y diagnóstico dinámico de maquinaria rotativa o turbo-maquinaria la cual que se ayuda de una combinación de áreas tales como: vibraciones, estructura dinámica e hidrodinámica. Entonces tomando este concepto en el que un punto importante implica el análisis de los sistemas, hay un elemento que influencia fuertemente en esto, estos son los soportes mecánicos ya que dicha maquinaria necesita ser montada sobre dispositivos, que además de soportar peso también permitan el libre giro del eje; estos elementos o soportes mecánicos son comúnmente llamados cojinetes o chumaceras y realmente si representan una gran influencia en la composición del comportamiento a analizar.





Figura 1. 1 Turbina de vapor Mitsubishi para una planta nuclear.

Se puede definir chumacera como un elemento mecánico que permite el libre movimiento entre piezas; pero a su vez existen clasificaciones de estos elementos siendo por ejemplo una chumacera común (también llamada cojinete) un dispositivo mecánico que está soportado por esferas o cilindros macizos, los cuales funcionan como apoyo para un eje el cual facilita su giro y a su vez reduce fricción y esfuerzos además de sostener el peso del éste.

Según el tipo de contacto entre las piezas, los cojinetes de elementos rodantes pueden ser considerados de deslizamiento o de rotación y según el elemento de rotación que llevan en su interior, estos se pueden clasificar de bolas, rodillos o de agujas; los rodamientos de movimientos rotatorios, según el sentido del esfuerzo que soportan los hay axiales, radiales o axiales-radiales. Un cojinete radial como su nombre lo dice, es el que soporta esfuerzos radiales, que son esfuerzos de dirección normal a la dirección que pasa por el centro de su eje, por ejemplo una rueda; se dice que es axial si soporta esfuerzos en la dirección de su eje y axial – radial si pueden soportar ambos de forma alternativa o combinada.

Claro está que con el aumento en tamaño de la turbomaquinaria, debido a las necesidades de consumo de los últimos años; se ha incrementado considerablemente el peso del sistema y por supuesto el aumento proporcional en



las velocidades, ha producido que el diseño de las chumaceras ya no fueran adecuados, produciendo algunos problemas, siendo uno de los más comunes el calentamiento excesivo; lo que se refleja en el debilitamiento de las propiedades físicas y mecánicas del metal llegando así al perentorio fractura del sistema; provocando excesivos costos y peor aún accidentes fatales. Teniendo en cuenta la necesidad presentada era ineludible que se desplegarían nuevos métodos para atenuar el desgaste prematuro y el calentamiento de los diversos cojinetes, uno de ellos son los cojinetes de película de aceite; con esta idea en la mente y el respaldo de la investigación en los años siguientes, se tienen conclusiones en donde esta tesis se basa para el seguimiento de una constate mejora.

1.2 Investigación de la Rotodinámica.

Mencionado antes la rotodinámica estudia el comportamiento de los rotores, pero al igual que toda investigación ha pasado por un proceso para alcanzar un mejor conocimiento de los fenómenos que se presentan al trabajar con turbomaquinaria.

Diversos investigadores han publicado análisis y conclusiones con relación a la rotodinámica siendo así; La publicación, *On the centrifugal force on rotating shafts*, publicado en *The Engineer* en 1869 por Rankin [1] es considerado la primera publicación completamente dedicada a la rotodinámica. La explicación de la teoría de velocidades críticas fueron dadas primero por Föppl (1895) [2], Belluzo (1905) [3], Stodola (1905) [4], Un avance significativo fue a finales del siglo XIX con las contribuciones de Laval y otros investigadores. En 1883 De Laval construyó la primera etapa de una turbina de vapor de reacción. Él fue el primero en utilizar un rotor rígido y posteriormente usó un rotor flexible y observó que era posible operar por encima de la velocidad crítica, operando a una velocidad de siete veces la velocidad crítica [4].

Henry Homan Jeffcott (1877-1937) publica un artículo relacionado con la teoría fundamental en rotodinámica en el año de 1919 [5], es acreditado como el desarrollador de las ecuaciones modernas en un rotor dinámico, que es mejor conocido como “Modelo de Jeffcott” en un modelo idealizado usado en el análisis de vibraciones de ejes rotatorios. El modelo consiste de un eje uniforme y simétrico soportado por chumaceras rígidas en cada extremo, con una masa concentrada en el centro [6].





1.3 Desarrollo en el Diseño de Cojinetes.

Los soportes que son utilizados en maquinaria rotatoria se dividen en 2 grupos estos son: cojinetes de elementos rodantes y cojinetes de película de aceite (este tipo también se conoce comúnmente como chumaceras); los cojinetes de elementos rodantes como se mencionó, pueden ser considerados de deslizamiento o de rotación según el elemento de rotación que llevan en su interior, por su parte las chumaceras de película de aceite se subdividen en chumaceras hidrodinámicas y chumaceras de presión externa; a su vez las de presión externa se dividen en chumaceras hidrostática e híbrida [7].

Los cojinetes de elementos rodantes son mayormente aplicadas es en maquinaria rotativa pequeña con velocidades de operación bajas o simplemente donde no sea factible la utilización de chumaceras de película de aceite, estas últimas son usadas en diversas maquinarias donde la característica es la delgada película de aceite que separa el eje de la chumacera, teniendo en cuenta que el espesor de la película es típicamente del orden de micras. El lubricante más utilizado es el aceite, también se puede utilizar como fluido de trabajo el gas o agua.

1.4 Chumaceras Hidrodinámicas.

Una chumacera hidrodinámica es el término más común para una chumacera de presión interna, siendo ésta en el que el eje de rotación “arrastra” el fluido en la dirección de giro para producir una película fluida. Este tipo de chumaceras a menudo tiene un sistema de suministro del lubricante a baja presión que no sobre pasa de 15 a 20 psi (103-138 KPa). La presión de suministro no está diseñada para contribuir a las propiedades roto-dinámicas de la chumacera de ninguna forma; si no que simplemente para un adecuado flujo a través de la ella que el provee una película de refrigerante [7], y también es utilizado en gran parte, de maquinaria rotativa para soportar cargas axiales ó simplemente una guía de transmisión de torque con un mínimo de pérdida de energía y desgaste entre las superficies de contacto.

La capacidad de carga es obtenida a través del campo de presión del lubricante dentro de la chumacera (Figura 1.2). El campo de presión es generado por la formación de una zona de presión del lubricante comúnmente llamada cuña, el cual es arrastrado hacia un claro de superficies convergentes. Esta zona se crea





por que el muñón no gira concéntricamente (excentricidad) con respecto al centro de la chumacera, debido al transitorio se llega a un auto-ajuste cuando la carga del rotor se iguala a la fuerza causada por la cuña generada por el campo de presión del fluido [8].

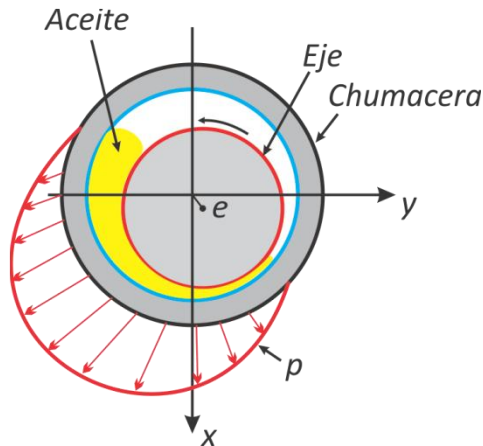


Figura 1. 2 Presión en una Chumacera Hidrodinámica, se Distribuye de Manera Tangencial, el Color más Oscuro Muestra la Zona de Mayor Presión.

1.5 Chumaceras de Presión Externa.

Las chumaceras donde el lubricantes se suministra en forma externa a una presión lo suficientemente alta para contribuir a, o regular las propiedades roto-dinámicas de la chumacera. Esta clase de chumaceras pueden ser categorizadas como: chumaceras hidrostáticas y chumaceras híbridas [7][9].

1.5.1 Chumaceras Hidrostática.

En chumaceras hidrodinámicas la presurización es externa; es decir que el lubricante es proporcionado por una fuente exterior usualmente bombas (Figura 1.3). Se asume que si la presurización es continua entonces el espesor de película del lubricante es adecuado para que la chumacera y el muñón se mantenga, incluso sin rotación. En consecuencia, es posible obtener coeficientes de fricción despreciables, permitiendo cargas altas de operación con el menor esfuerzo posible.

El término hidrostático fue introducido para diferenciar el mecanismo de operación de la lubricación hidrodinámica donde la velocidad y el efecto de la cuña del campo de presión son los principales requisitos [9]. Las chumaceras hidrostáticas





incluyen sistemas más complejos de lubricación y requieren de diseños especializados y aplicaciones prácticas. Sin embargo son utilizadas desde pequeñas herramientas de precisión, hasta grandes y pesados equipos rotativos.

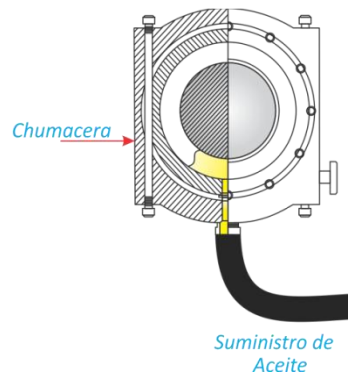


Figura 1. 3 Esquema que Muestra el Suministro de Aceite de una Chumacera Hidrostática.

1.5.2 Chumaceras Híbridas.

Chumacera diseñada teniendo en cuenta las características de una chumacera hidrostática y dinámica para soportar la carga de superficie de movimiento (Figura 1.4). El grado en el cual la chumacera híbrida exhibe una predominación entre características hidrostáticas o hidrodinámicas depende de la velocidad de rotación y de la excentricidad en la cual está operando.

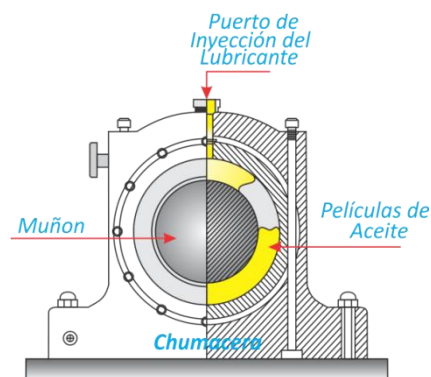


Figura 1. 4 Configuración de una Chumacera Híbrida.



1.6 Estado del Arte en el Diseño de Chumaceras con Presurización Externa.

Las primeras teorías del comportamiento de las chumaceras de película fluida, asumían erróneamente que la carga del eje de rotación únicamente se aplicaba directamente a la parte estacionaria de la chumacera, el papel que tenía el fluido lubricante era solamente para disminuir la fricción. A finales del siglo XIX Beauchamp Tower desarrolló una serie de experimentos precisos para medir la presión del fluido (lubricante) en diferentes partes de la chumacera [10][11]. Él llegó a la siguiente conclusión: “La distribución de presiones dentro de la película de aceite ocurre de tal manera que la película de aceite ejerce fuerzas de carga”; así fue como se consideró por primera vez a las chumaceras de película fluida como un sistema dinámico con características de rigidez y esto se debió a la primer medición de presión de la película de aceite.

En 1886, la teoría de Osborne Reynolds [12] logró explicar los experimentos realizados por Beauchamp Tower, quien derivó la famosa Ecuación de Reynolds, la cual describe la distribución de presiones del lubricante en la chumacera. El primer uso práctico de la teoría de Reynolds fue una solución aproximada para un caso específico. Esta fue obtenida por Fred Ocvirk [13] en 1952 (también llamada solución de Ocvirk para una chumacera infinitamente corta). A principios del siglo XX, los cálculos de la presión del aceite en las chumaceras, claramente distinguió entre lubricación parcial y completa (muñón completamente rodeado e inundado por la película del fluido). En 1919, W. J. Harrison [14] publicó un trabajo de investigación donde predecía que el comportamiento de la chumacera con lubricación completa sería inestable. El análisis de Harrison no fue completo y sólo resulta correcto para la operación bajo cierto tipo de condiciones. Esto indujo ampliamente a que en la práctica se adoptara deliberadamente a las chumaceras con lubricación parcial por la creencia de que su comportamiento sería más estable. Esto también llevó a un uso casi universal de las chumaceras con inyección externa a bajas presiones, pues ciertos trabajos experimentales aseguraban que el presurizar una chumacera con lubricación completa lo haría más inestable. Investigaciones más recientes contradicen estas creencias, mostrando que una presión de inyección externa adecuada a una chumacera con lubricación completa es extraordinariamente estable. Con una adecuada presión de inyección quiere decir que el lubricante se fuerza a desplazarse a lo largo de





la flecha (flujo axial, paralelo al eje de la flecha), en lugar de que fluya alrededor del árbol (flujo circunferencial).

1.6.1 Investigación Analítica-Numérica.

Durante los años 1960 y 1961, el investigador ruso J. V. Fedor [15] [16] publica un par [16] de artículos en el *Journal of Basic Engineering*, en donde desarrolla una metodología para el cálculo del campo de presión en una chumacera presurizada en un puerto cuya ubicación es arbitraria, en estos trabajos Fedor modifica la ecuación de la lubricación de Reynolds para incorporar un término de inyección de lubricante.

En 1995 Yong Tian y Marc Bonis [17] presentan en la revista de *Elsevier*, su investigación que consiste en un método cuasi-analítico para evaluar los coeficientes dinámicos de una chumacera con diversos puertos de presurización. Se utiliza la teoría de pequeñas perturbaciones junto con el método del elemento finito para la solución de la investigación.

Los investigadores brasileños I. F. Santos y F. Y. Watanabe [18] publicaron en el *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, un trabajo en el cual se estudian chumaceras presurizadas con puertos múltiples de inyección de lubricante, este análisis se realiza numéricamente mediante la dinámica de fluidos computacional y técnicas de control. Mediante el control del flujo y la presión se obtienen cambios importantes en las fuerzas de la película de aceite, las cuales afectarán los valores de las rigideces de la chumacera.

El estudio de chumaceras de película de aceite realizadas en México específicamente en ESIME –SEPI Zacatenco ha producido muchos resultados y avances que se han publicado y presentado en diversas publicaciones y revistas nacionales así como internacionales.

Kucherenko V. y Gómez Mancilla J. C.[19], derivaron el modelo de un sistema Rotor-Chumacera donde fueron considerados los efectos no lineales relacionados con las fuerzas en las chumaceras.

Antonio García, Nossov V. y Gómez Mancilla J. C. [20], obtiene expresiones exactas de velocidad umbral de estabilidad en función de la excentricidad para





rotores tipo Jeffcott o de Laval, con ejes rígidos o flexibles.

Gómez Mancilla J. C. y Nossov V. [21], muestra la influencia que provoca el desalineamiento angular en el comportamiento de las máquinas rotatorias soportada en chumaceras hidrodinámicas.

Con el fin de mejorar los diseños de chumaceras existentes, Ordoñez Pantoja [22] propone un diseño innovador de chumacera con presurización externa que presenta características semejantes a la chumacera de levitación magnética, pero con varias ventajas adicionales.

Santana Mora R. et al, [23], utilizando chumaceras híbridas controlables, presentan resultados en donde logra reducir amplitudes de vibraciones provocadas por desbalance o desalineamiento y propone que es posible atenuar las vibraciones durante las resonancias en rotores.

Ramírez Vargas Ignacio. [24] presenta en la tesis de doctorado el desarrollo de la teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales: caso de la chumacera corta; obteniendo resultados muy favorables.

Torres Cedillo Sergio [8] en su tesis de maestría propone un modelo matemático desarrollado en conjunción con los investigadores Gómez Mancilla J. C y Nossov V. y Meda Campaña J.

1.6.1.1 Estudios Realizados por BENTLY-NEVADA.

Actualmente existen compañías dedicadas a la fabricación e investigación experimental del equipo rotatorio, una de ellas es BENTLY-NEVADA en EUA; compañía que fue fundada por Donald E. Bently y soportada como dueño hasta el año 2002, año que fue vendida. De gran importancia ha sido este trabajo ya que ha realizado experimentos con rotores de laboratorio que consisten en presurizar externamente a una chumacera colocando los puertos de inyección en forma simétrica [7]. En la (figura 1.5) se muestra una chumacera presurizada con cuatro puertos de inyección, esta configuración es la que BENTLY usa para realizar sus experimentos.





El objetivo inicial de Donald Bently (quien es el responsable de esta compañía) al usar este arreglo es tratar de que la presurización externa haga que el muñón se mantenga lo más cerca del centro geométrico de la chumacera y de esta manera el eje no tenga oscilaciones importantes.

En el año 2002 Bently junto con Hatch y Grissom publicaron el libro: *Fundamentals of Rotating Machinery Diagnostics* [7], el cual tiene por objetivo mostrar los aspectos prácticos más relevantes de la rotodinámica, haciendo énfasis en el diagnóstico de turbomáquinas.

En este libro hay un capítulo que por primera vez aparece como tal en la literatura internacional, el cual lleva por título: *Externally Pressurized and Machinery Diagnostic*; entre las conclusiones más destacadas que aparecen, se pueden citar:

- 1.- Al presurizar externamente, las rigideces de las chumaceras se incrementan notablemente.
- 2.- La presurización puede producir inestabilidad.
- 3.- Bajo ciertas condiciones la presurización externa puede modificar las velocidades de resonancia.
- 4.- Si se ajustan adecuadamente los puertos de inyección, se puede modificar la excentricidad de equilibrio.
- 5.- La variación de la presión puede permitir establecer un control adecuado de las rigideces en la chumacera, el control se puede hacer en uno más puertos de inyección.

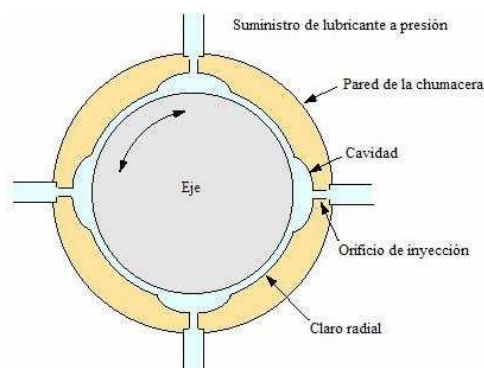
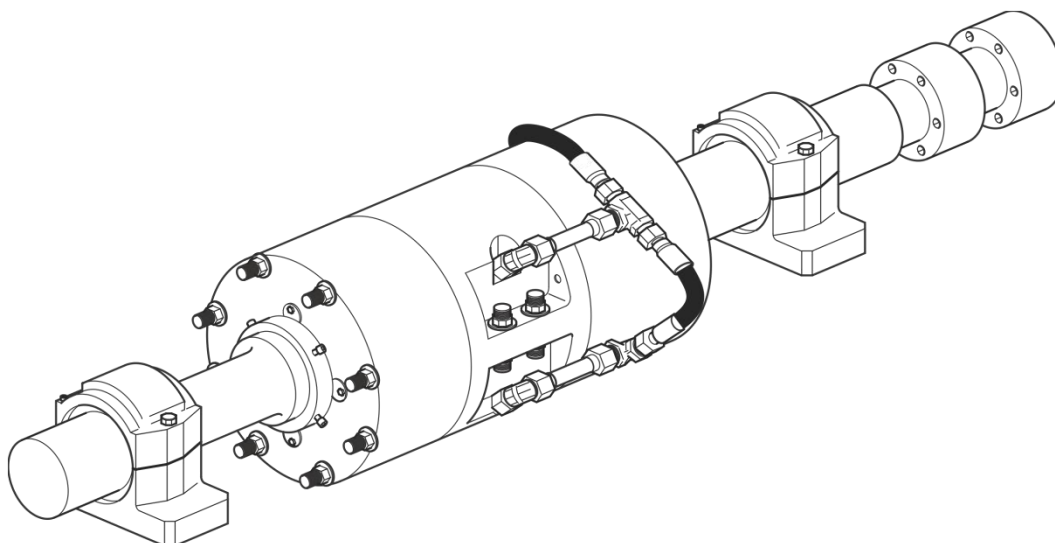


Figura 1. 5 Configuración Utilizada por BENTLY-NEVADA para una Chumacera Presurizada.



CAPÍTULO DOS

MODELO DE PRESURIZACIÓN CON PUERTO LINEAL EN CHUMACERAS LARGAS





2.1 Ecuación de Reynolds, deducción.

Para tener en cuenta los términos que contiene la ecuación de Reynolds es de suma importancia mostrar las variables que intervienen en una chumacera hidrodinámica así sabremos la relación y porqué es necesario la deducción de la ecuación, en la siguiente figura se muestra una chumacera con el muñón en reposo [24][31].

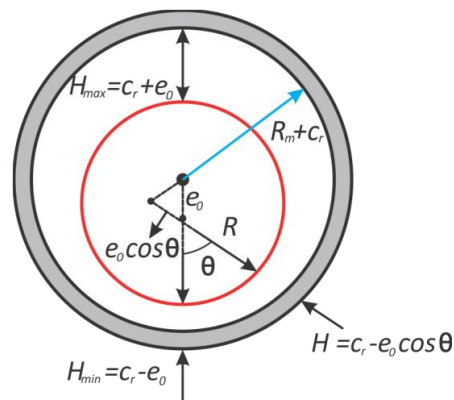


Figura 2. 1 Nomenclatura Utilizada en una Chumacera Hidrodinámica en Reposo.

En donde los términos son: R_m radios del muñón; C_r claro radial (diferencia radio de la chumacera y el muñón); e_0 excentricidad (es la distancia medida del centro de la chumacera al centro del muñón) H espesor del lubricante.

La ecuación de Reynolds da su nombre gracias a Osborne Reynolds (1842-1912), Ingeniero y físico irlandés que realizó contribuciones de suma importancia en la hidrodinámica y dinámica de fluidos en donde en el año de 1886 publicó su teoría de la ecuación en el *Proceeding of the Royald Society* de Londres, en ella se expone la primera prueba analítica de que un líquido viscoso podía separar físicamente dos superficies en movimiento debido a la presión hidrodinámica evitando así el contacto; esta ecuación es una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes en la mecánica de fluidos, y permite determinar el campo de presión $p(\theta, z)$ dentro de una chumacera como función de su movimiento.



A continuación la deducción de la ecuación de Reynold partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

(Ec. 2. 1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

(Ec. 2. 2)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

(Ec. 2. 3)

Donde; p es la presión, ρ y μ son la densidad y la viscosidad absoluta del fluido, u, v , y w las componentes de velocidad del fluido en las direcciones x, y y z .

El siguiente paso es adimensionalizar las anteriores ecuaciones, introduciendo parámetros adimensionales tales como:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{C_r}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R}$$

(Ec. 2. 4)

$$\bar{u} = \frac{u}{\omega R}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\omega C_r}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\omega R}, \quad \tau = \omega t$$

(Ec. 2. 5)

Sustituyendo los parámetros de (Ec. 2. 4) (Ec. 2. 5) en las ecuaciones de Navier-Stokes, lo dividimos en dos miembros parte derecha e izquierda como se muestra a continuación:

Primer miembro (parte izquierda, (Ec. 2. 1))





$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial\left(\frac{\tau}{\omega}\right)} = \omega^2 R \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau}$$

(Ec. 2. 6)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{x})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$$

(Ec. 2. 7)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \omega^2 R \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$$

(Ec. 2. 8)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(C_r \bar{y})} = \omega \left(\frac{R}{C_r}\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

(Ec. 2. 9)

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2 R \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$

(Ec. 2. 10)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{z})} = \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}$$

(Ec. 2. 11)

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = \omega^2 R \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}$$

(Ec. 2. 12)

Segundo miembro (parte derecha, (Ec. 2. 1))

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\omega R \bar{u})}{\partial(R \bar{x})^2} = \frac{\omega}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}$$

(Ec. 2. 13)





$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\omega R \bar{u})}{\partial (C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

(Ec. 2. 14)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (\omega R \bar{u})}{\partial (R \bar{z})^2} = \frac{\omega}{R} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}$$

(Ec. 2. 15)

Tomando en cuenta que:

$$\bar{p} = \frac{p}{p_{\text{dim}}}, \quad \text{en donde: } p_{\text{dim}} = \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{1}{\rho} \right) \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial (R \bar{x})} = \gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$$

(Ec. 2. 16)

Ahora sustituyendo todos los miembros en la ecuación de Navier-Stokes (Ec. 2. 1) se tiene:

$$\omega^2 R \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \gamma \frac{\omega}{R} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right]$$

(Ec. 2. 17)

Se procede de igual forma para (Ec. 2. 2), teniendo en cuenta los dos miembros;

Primer miembro (parte izquierda, (Ec. 2. 2))

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial (\omega C_r \bar{v})}{\partial \left(\frac{\tau}{\omega} \right)} = \omega^2 C_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau}$$

(Ec. 2. 18)





$$u \frac{\partial v}{\partial x} = \omega^2 C_r \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}$$

(Ec. 2. 19)

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = \omega^2 C_r \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}$$

(Ec. 2. 20)

$$w \frac{\partial v}{\partial z} = \omega^2 C_r \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}$$

(Ec. 2. 21)

Segundo miembro (parte derecha, (Ec. 2. 2))

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (\omega C_r \bar{v})}{\partial (R \bar{x})^2} = \frac{C_r \omega}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}$$

(Ec. 2. 22)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\omega C_r \bar{v})}{\partial (C_r \bar{y})^2} = \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}$$

(Ec. 2. 23)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (\omega C_r \bar{v})}{\partial (R \bar{z})^2} = \frac{C_r \omega}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}$$

(Ec. 2. 24)

Tomando en cuenta que:

$$\bar{p} = \frac{p}{p_{\text{dim}}}, \quad \text{en donde: } p_{\text{dim}} = \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \left(\frac{1}{\rho} \right) \rho \gamma \omega \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial (R \bar{y})} = \gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

(Ec. 2. 25)





Sustituyendo todos los miembros en la (Ec. 2. 2) se tiene:

$$\omega^2 C_r \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\gamma \frac{\omega}{C_r} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \gamma \frac{C_r \omega}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] + \gamma \frac{\omega}{C_r} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}$$

(Ec. 2. 26)

Teniendo en cuenta todos los anteriores pasos, para la tercera (Ec. 2. 3) se tiene:

$$\omega^2 R \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\gamma \frac{\omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \gamma \frac{\omega}{R} \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right]$$

(Ec. 2. 27)

Conociendo las ecuaciones resultantes multiplicamos por el factor:

$$\frac{1}{\frac{\gamma \omega}{R} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2}, \text{ tomando que } \text{Re} = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{\omega}{\gamma} \quad \text{y además } \text{Re}_* = \text{Re} \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 R^2$$

Donde:

Re: Número de Reynolds.

Re_{*}: Número de Reynolds modificado.

Ver más información acerca del número de Reynolds en el (apéndice A) .Por lo consiguiente se puede escribir:

$$\text{Re}_* \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$$

(Ec. 2. 28)

$$\text{Re}_* \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] + \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}$$

(Ec. 2. 29)





$$\text{Re}_* \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}$$

(Ec. 2. 30)

Teniendo en cuenta que para una chumacera debe de cumplir los siguientes parámetros se tiene que:

$$\frac{C_r}{R} \cong 10^{-3} , \quad \text{Re}_* < 1$$

Por lo tanto las ecuaciones (Ec. 2. 28), (Ec. 2. 29) y (Ec. 2. 30) toman la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

(Ec. 2. 31)

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0$$

(Ec. 2. 32)

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}$$

(Ec. 2. 33)

De la (Ec. 2. 32) se puede observar que: $\bar{p}(\bar{y}) = \text{Constante}$, o bien $\bar{p} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{z})$

Regresando a las variables adimensionales de las ecuaciones (Ec. 2. 31) y (Ec. 2. 33) se tendrá:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(Ec. 2. 34)

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

(Ec. 2. 35)



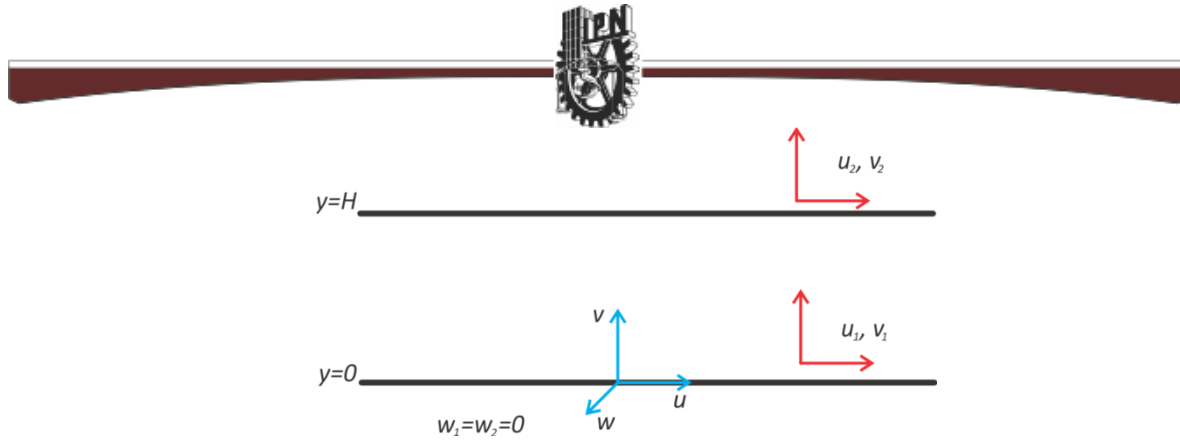


Figura 2. 2 Frontera, Chumacera Hidrodinámica.

Integrando 2 veces la ecuación (Ec. 2. 34) y tomando los valores de la frontera de la chumacera (Figura 2.2) se puede escribir:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} y(y-H) + C_1 y + C_2, \quad u(0) = u_1, \quad u(H) = u_2$$

(Ec. 2. 36)

Donde:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1$$

(Ec. 2. 37)

Integrando 2 veces a la ecuación (Ec. 2. 37) y tomando los valores de la frontera de la chumacera (Figura 2.2) se tendrá:

$$w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x, z)}{\partial z} y(y-H), \quad w(0) = w(H) = 0, \quad C_1 = C_2 = 0$$

(Ec. 2. 38)

Tomando como ecuación de continuidad:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

(Ec. 2. 39)

O bien:





$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

(Ec. 2. 40)

Ver que:

$$u_1 = u_1(x, z)$$

$$u_2 = u_2(x, z)$$

$$H = H(x, z)$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad a $u(y)$ y $w(y)$.

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x, z)}{\partial z} y(y-H) \right]$$

(Ec. 2. 41)

Integrando la anterior ecuación con respecto a “y”.

$$-\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{H(x, z)} \frac{\partial}{\partial x} [u(y)] dy + \int_0^{H(x, z)} \frac{\partial}{\partial z} [w(y)] dy$$

(Ec. 2. 42)

Usando la regla de Leibniz o también llamada regla del punto:

$$\int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{r(\alpha)} f(x, \alpha) dx - f(r(\alpha), \alpha) \frac{\partial r}{\partial \alpha}$$

(Ec. 2. 43)

Identificando las variables:

$$x \rightarrow y$$

$$r(\alpha) \rightarrow H(x, z)$$

$$\alpha \rightarrow x, z$$

Aplicando el concepto (Ec. 2. 43) al primer término del segundo miembro de la ecuación (Ec. 2. 42):





$$\begin{aligned} & \int_0^H \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p(x,z)}{\partial x} y(y-H) + \frac{u_2 - u_1}{H} y + u_1 \right] dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{H(x,z)} y(y-H) dy + \frac{u_2 - u_1}{H} \int_0^{H(x,z)} y dy + u_1 \int_0^{H(x,z)} dy \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{H^3}{6} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_1 + u_2}{2} H \right] - u_2 \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

(Ec. 2. 44)

De la misma forma aplicando el concepto (Ec. 2. 43) al segundo término del segundo miembro de la (Ec. 2. 42):

$$\int_0^{H(x,z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-H) \right] dy = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{H^3}{6} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right]$$

(Ec. 2. 45)

Finalmente, juntando los términos y sustituyéndolos en (Ec. 2. 42) se tiene:

$$v_1 - v_2 = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[H^3(x,z) \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[H^3(x,z) \frac{\partial p}{\partial z} \right] + H \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_1 + u_2}{2} \right] \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{\partial H}{\partial x} - u_2 \frac{\partial H}{\partial x}$$

(Ec. 2. 46)

Reordenando los términos se obtiene la “Ecuación de Reynolds”.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right)}_{\text{Ecuación de Reynolds}} = \underbrace{12\mu(v_2 - v_1)}_{\text{Estrechamiento (squeeze)}} + \underbrace{6\mu(u_1 - u_2)}_{\text{Cuña (wedge)}} \frac{\partial H}{\partial x} + \underbrace{6\mu H \frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2)}_{\text{Extensión (stretch)}}$$

Ecuación de Reynolds

(Ec. 2. 47)

2.2 Ecuación de Reynolds, coordenadas cilíndricas.

La ecuación de Reynolds deducida en el anterior apartado esta en coordenadas cartesiano pero si se recuerda la chumacera tiene la forma cilíndrica es por eso que es necesario cambiar las coordenadas a cilíndricas esto hará el análisis y posterior desarrollo mucho más fácil de realizar y entender.





En la (Figura 2.3) se muestra el espesor de la película de lubricante H en el sistema de coordenadas cartesiano, el eje y coincide con la superficie en reposo de la chumacera, por lo que se tienen velocidades igual a cero.

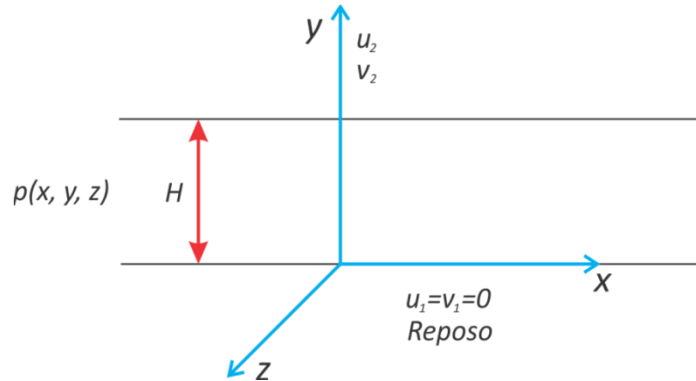


Figura 2. 3 Espesor de la Película de Lubricante en la Chumacera.

Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación de Reynolds toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12v_2 - 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

(Ec. 2. 48)

El espesor de la película del lubricante H va cambiando a través de la circunferencia de la chumacera, por lo consiguiente las posiciones contienen un máximo y un mínimo de espesor. En la (Figura 2.4) se presenta una chumacera en donde el muñón está en una posición arbitraria, en donde O representa el centro de la chumacera y J es el centro del muñón, s es un punto arbitrario en la película de lubricante y φ es el ángulo de equilibrio.

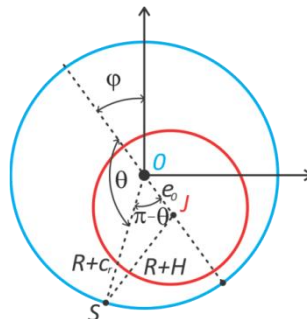


Figura 2. 4 Posición Arbitraria del Muñón en una Chumacera.



Antes que nada es necesario encontrar una expresión para el espesor del lubricante a partir de un análisis geométrico como se muestra a continuación.

Teniendo en cuenta el triángulo que se forma en la (Figura 2.4) con los puntos SOJ y aplicando el teorema de cosenos se tiene:

$$(R + H)^2 = (R + C_r)^2 + e_0^2 - 2(R + C_r)e_0^2 \cos(\pi - \theta)$$

(Ec. 2. 49)

Simplificando y notando que algunos términos con relación a otros son muy inferiores se tiene que:

$$R^2 + 2RH + H^2 = R^2 + 2RC_r + C_r^2 + e_0^2 + 2e_0 R \cos \theta + 2e_0 C_r \cos \theta$$

(Ec. 2. 50)

Despejando a H se tiene que:

$$H = C_r + e_0 \cos \theta$$

(Ec. 2. 51)

Realizando la adimensionalización: $\varepsilon = \frac{e_0}{C_r}$, $h = \frac{H}{C_r}$

(Ec. 2. 52)

Por lo tanto el espesor de la película de aceite en forma adimensional es:

$$h(\theta) = 1 + \varepsilon_0 \cos \theta$$

(Ec. 2. 53)

En la (Figura 2.5) se muestra una gráfica en donde se aprecia la variación del espesor que corresponde a (Ec. 2. 53) .



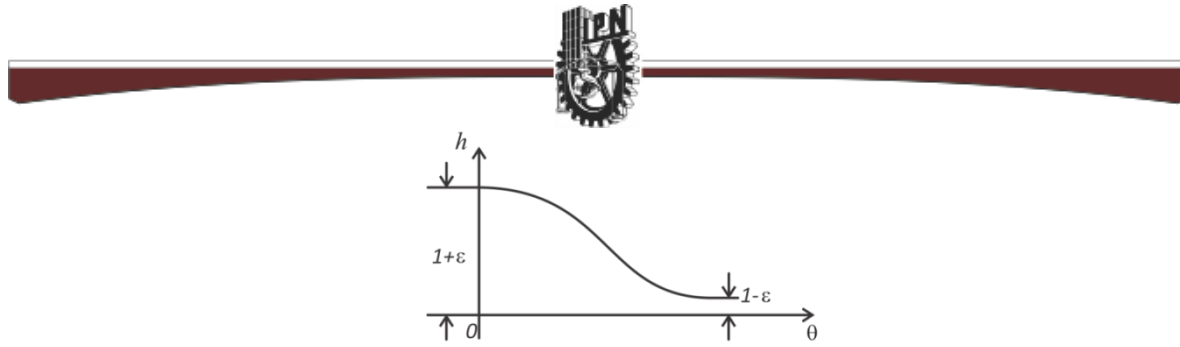


Figura 2. 5 Variación del Espesor de la Película de Aceite.

Notar que:

$$0 < \varepsilon < 1, \quad h_{\min}(\theta = \pi) \leq h(\theta) \leq h_{\max}(\theta = 0)$$

Para ver transformada la ecuación de Reynolds, es necesario calcular cada término de la ecuación (Ec. 2. 48), tener en cuenta que aparecen componentes de velocidad en la película de lubricante u_2, v_2 ; para su desarrollo se parte teniendo en cuenta la velocidad del muñón en el punto J .

En la (Figura 2.6) aparecen los vectores unitarios en las direcciones radiales y transversales del punto S para una posición arbitraria, así como los vectores en el centro del muñón (medidos desde la línea de carga).

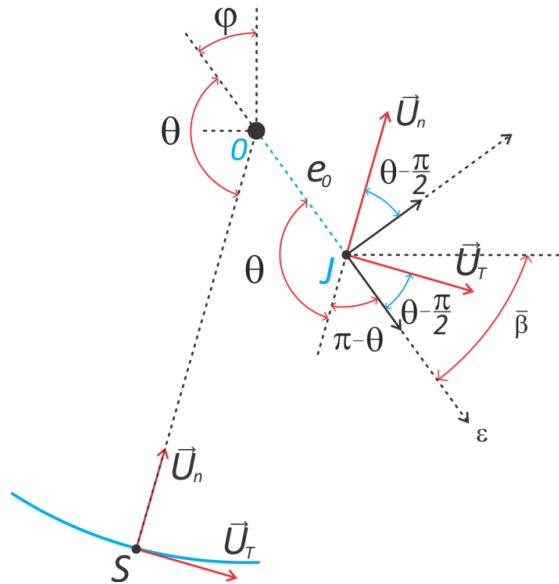


Figura 2. 6 Vectores Unitarios en las Direcciones Radiales y Transversales del Punto S para una Posición Arbitraria, de la Película de Aceite.



De la anterior figura se puede observar que la relación que existe entre los vectores unitarios en el centro del muñón y el punto S está dada por:

$$\vec{U}_{\beta} = \vec{U}_n \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \vec{U}_T \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

(Ec. 2. 54)

$$\vec{U}_{\varepsilon} = -\vec{U}_n \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \vec{U}_T \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

(Ec. 2. 55)

O bien:

$$\vec{U}_{\beta} = \vec{U}_n \sin \theta - \vec{U}_T \cos \theta$$

(Ec. 2. 56)

$$\vec{U}_{\varepsilon} = -\vec{U}_n \cos \theta + \vec{U}_T \sin \theta$$

(Ec. 2. 57)

Notar que: $\varphi + \beta = \frac{\pi}{2}$

Siendo así entonces la velocidad del punto J se puede escribir como:

$$\vec{v}_J = C_r \dot{\varepsilon} \vec{U}_{\varepsilon} + C_r \varepsilon \dot{\beta} \vec{U}_{\beta}$$

(Ec. 2. 58)

También utilizando (Ec. 2. 56) y (Ec. 2. 57), en las direcciones transversales y normal.

$$\vec{v}_J = \vec{U}_n \left(-C_r \dot{\varepsilon} \cos \theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \sin \theta \right) + \vec{U}_T \left(C_r \dot{\varepsilon} \sin \theta - C_r \varepsilon \dot{\beta} \cos \theta \right)$$

(Ec. 2. 59)

La velocidad del punto móvil S se encuentra a partir de las velocidades relativas:





$$\vec{v}_{S/J} = \vec{v}_S - \vec{v}_J$$

Despejando a \vec{v}_S se tiene:

$$\vec{v}_S = \vec{v}_J + \vec{v}_{S/J}$$

(Ec. 2. 60)

Sabiendo que: $\vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS}$

Observar que la igualdad anterior se requiere encontrar el vector \vec{r}_{JS} para poder realizar el producto vectorial. En la (Figura 2.7) se muestra este vector junto con los trazos necesarios para determinarlo.

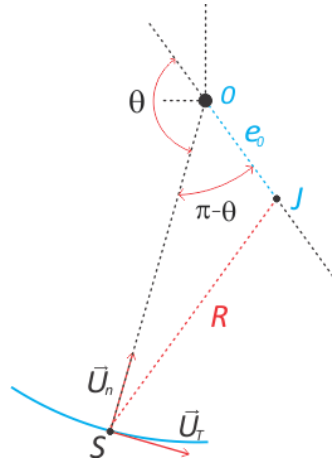


Figura 2. 7 Trazos necesarios para determinar el vector \vec{r}_{JS} .

De la figura anterior se puede determinar qué:

$$\vec{r}_{JS} = -[r_{OS} - e_0 \cos(\pi - \theta)]\vec{U}_n - [e_0 \sin(\pi - \theta)]\vec{U}_T$$

(Ec. 2. 61)

O bien:

$$\vec{r}_{JS} = -(r_{OS} + e_0 \cos \theta)\vec{U}_n - (e_0 \sin \theta)\vec{U}_T$$

(Ec. 2. 62)





Aplicando el teorema de cosenos al triángulo formado SOJ .

$$R^2 = r_{OJ}^2 + e_0^2 - 2r_{OS}e_0 \cos(\pi - \theta)$$

(Ec. 2. 63)

$$R^2 = r_{OJ}^2 + (C_r \varepsilon)^2 + 2r_{OS}C_r \varepsilon \cos \theta$$

(Ec. 2. 64)

Teniendo en cuenta $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \approx r_{OS}$. Por lo consiguiente se tiene:

$$\vec{r}_{JS} = -R\vec{U}_n - C_r \varepsilon \sin \theta \vec{U}_T$$

(Ec. 2. 65)

Recordando $\vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS}$ por tanto el producto vectorial será:

$$\vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -C_r \varepsilon \sin \theta & -R & 0 \end{vmatrix}$$

Notar que: $\vec{U}_n = \hat{j}$ y $\vec{U}_T = \hat{i}$ después de desarrollar el determinante se tiene:

$$\vec{v}_{S/J} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{JS} = R\omega \vec{U}_T - C_r \varepsilon \omega \sin \theta \vec{U}_n$$

(Ec. 2. 66)

Sustituyendo las ecuaciones (Ec. 2. 59) y (Ec. 2. 66) en (Ec. 2. 60) se obtiene la velocidad del punto móvil S :

$$\vec{v}_S = (C_r \varepsilon \cos \theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \sin \theta - C_r \varepsilon \omega \sin \theta) \vec{U}_n + (C_r \varepsilon \sin \theta + R\omega - C_r \varepsilon \dot{\beta} \cos \theta) \vec{U}_T$$

(Ec. 2. 67)

De la ecuación anterior se puede reconocer que:

$$v_2 = C_r \varepsilon \cos \theta + C_r \varepsilon \dot{\beta} \sin \theta - C_r \varepsilon \omega_j \sin \theta$$

(Ec. 2. 68)





$$u_2 = C_r \varepsilon \sin \theta + R\omega - C_r \varepsilon \beta \cos \theta$$

(Ec. 2. 69)

Los términos encontrados serán sustituidos en la ecuación de Reynolds que se muestra nuevamente a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12v_2 + 6u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + 6H \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

(Ec. 2. 70)

Siguiendo con el cambio a coordenadas cilíndricas, se procede a calcular cada término por separado de la ecuación de Reynolds como sigue:

Haciendo:

$$x = R\theta$$

$$dx = R d\theta$$

Y recordando que el espesor de la película de lubricante adimensional se define como:

$$H = C_r + e_0 \cos \theta$$

De la ecuación de Reynolds, primer término parte izquierda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{R\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{C_r^3}{C_r^3} = \frac{C_r^3}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)$$

(Ec. 2. 71)

Segundo termino parte izquierda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = C_r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3(\theta)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

(Ec. 2. 72)





De forma similar al caso anterior, usando (Ec. 2. 68) y (Ec. 2. 69) se tiene para cada término en la ecuación de Reynolds:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H(\theta)}{R \partial \theta} = -\frac{1}{R} C_r \varepsilon \sin \theta$$

(Ec. 2. 73)

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (C_r \varepsilon \sin \theta + R\omega - C_r \varepsilon \beta \cos \theta) = \frac{1}{R} (C_r \varepsilon \cos \theta + C_r \varepsilon \beta \sin \theta)$$

(Ec. 2. 74)

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = (C_r \varepsilon \sin \theta + R\omega - C_r \varepsilon \beta \cos \theta) \left(-\frac{1}{R} C_r \varepsilon \sin \theta \right)$$

(Ec. 2. 75)

Simplificando la ecuación anterior y teniendo en cuenta que $R \rightarrow 0$:

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{C_r^2 \varepsilon \varepsilon}{R} \sin^2 \theta - \omega C_r \varepsilon \sin \theta + \frac{C_r^2 \varepsilon^2}{R} \beta \sin \theta \cos \theta$$

$$u_2 \frac{\partial H}{\partial x} = -\omega C_r \varepsilon \sin \theta$$

(Ec. 2. 76)

El último término de la derecha de la ecuación (Ec. 2. 70) se puede escribir como:

$$H \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{C_r}{R} (1 + \varepsilon \cos \theta) (C_r \varepsilon \cos \theta + C_r \varepsilon \beta \sin \theta) \approx 0$$

(Ec. 2. 77)

Sustituyendo las ecuaciones (Ec. 2. 71) y (Ec. 2. 72), después se simplifica y agrupa, se obtiene la ecuación de Reynolds en coordenadas cilíndricas que se muestra a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \varepsilon \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\beta - \frac{\omega}{2} \right) \sin \theta \right]$$

(Ec. 2. 78)





Aun es posible simplificar la ecuación anterior, haciendo las siguientes sustituciones en el segundo miembro:

$$V_s^2 = (C_r \varepsilon)^2 + \left[C_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right) \right]^2$$

(Ec. 2. 79)

Donde:

$$\cos \alpha = \frac{C_r \varepsilon}{V_s}, \quad \sin \alpha = \frac{C_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right)}{V_s}, \quad \tan \alpha = \frac{-C_r \varepsilon \left(\dot{\beta} - \frac{\omega}{2} \right)}{C_r \varepsilon}$$

(Ec. 2. 80)

Por lo consiguiente la ecuación de Reynolds toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2 V_s}{C_r^2} \cos(\theta + \alpha)$$

(Ec. 2. 81)

En una posición de equilibrio en este caso estado estacionario se toma a $\dot{\beta} = 0$, $\varepsilon = 0$, lo que implica que (Ec. 2. 80); $\alpha = \pi/2$, tomando todo lo anterior la ecuación de Reynolds en estado estacionario se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^2} \left(-\varepsilon \frac{\omega}{2} \sin \theta \right)$$

(Ec. 2. 82)

2.3 Ecuación de la Lubricación de Reynolds.

La ecuación de Reynolds es una simplificación especial de las ecuaciones de Navier-Stokes en la mecánica de fluidos, y permite determinar el campo de presión $p(z, \theta)$ dentro de una chumacera como función de su movimiento. Retomando la ecuación (Ec. 2. 78) [24][32].





$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \varepsilon \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\beta - \frac{\omega}{2} \right) \sin \theta \right]$$

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta$$

(Ec. 2. 83)

$$p\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{L}{2}\right) = 0, \quad p(\theta + 2\pi) = p(\theta)$$

(Ec. 2. 84)

Donde p es la presión, θ es la coordenada circunferencial medida a partir de la línea de centros, z es la coordenada axial a lo largo de la chumacera, φ es el ángulo de actitud (o de equilibrio), C_r es el claro radial, ε es la excentricidad adimensional, R es el radio de la chumacera, μ es la viscosidad dinámica, h es el espesor de la película del fluido en forma adimensional y ω es la velocidad angular del muñón. En general ε y φ son diferentes de cero, pero en la posición de equilibrio estas cantidades tienen valor de cero; sin embargo si se requiere calcular la estabilidad del movimiento del muñón o la respuesta vibratoria del sistema considerando cargas, entonces ε y φ deberán considerarse. Para trabajar de forma general es necesario presentar la ecuación de Reynolds en forma adimensional y así facilitar los cálculos.

En donde se puede definir:

$$V_s^2 = (C_r \varepsilon)^2 \left[C_r \varepsilon \left(\varphi - \frac{\omega}{2} \right) \right]^2, \quad \cos \alpha = \frac{C_r \varepsilon}{V_s}, \quad \sin \theta = \frac{C_r \varepsilon \left(\varphi - \frac{\omega}{2} \right)}{V_s}$$

(Ec. 2. 85)

Entonces la ecuación de Reynolds queda:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} V_s \cos(\theta + \alpha)$$

(Ec. 2. 86)





En la posición de equilibrio se tiene: $\phi = \varepsilon = 0$, entonces (Ec. 2. 85) puede escribirse:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta, \quad V_s = \frac{C_r \omega}{2}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en (Ec. 2. 86), la ecuación de Reynolds en estado estacionario (equilibrio) queda como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{6\mu R^2 \omega}{C_r^2} (-\varepsilon \sin \theta)$$

(Ec. 2. 87)

Para tener mayor generalidad, se usaran las siguientes sustituciones para adimensionalizar a (Ec. 2. 87):

$$z = \frac{L}{2} \bar{z}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{\text{dim}}}, \quad p_{\text{dim}} = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 = \mu \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \left(\frac{R}{C_r} \right)^2$$

(Ec. 2. 88)

Sustituyendo (Ec. 2. 88) en (Ec. 2. 87) se tiene:

$$\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + R^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{L}{2} \right)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = \frac{6\mu R^2 (2\mu N)}{C_r^2} (-\varepsilon \sin \theta)$$

(Ec. 2. 89)

Simplificando se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi (-\varepsilon \sin \theta)$$

(Ec. 2. 90)

Ecuación adimensional de Reynolds en estado estable.





2.4 Modelo Clásico de Chumacera.

Una chumacera debido a una simplificación de la ecuación de Reynolds y tener así una solución más simple, puede ser clasificada de acuerdo a una relación establecida por la longitud axial y el diámetro, esta relación permite clasificarlas en chumaceras cortas, intermedias o largas.

En la siguiente figura se muestra una chumacera teniendo en cuenta los parámetros que forman la relación de la clasificación:

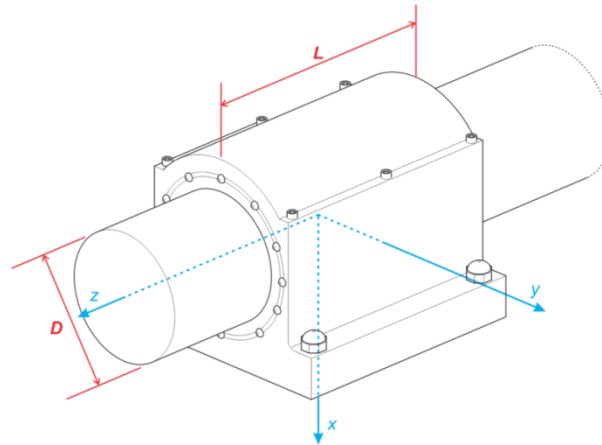


Figura 2. 8 Vista de una Chumacera, Resaltando los Valores “D” y “L”; Sumamente Importante para su Clasificación.

2.4.1 Modelo, Chumacera Corta.

Una chumacera será considerada corta si la longitud axial L es muy pequeña en comparación con el diámetro D , en términos matemáticos: $L \ll D$, en términos numéricos una buena consideración será: $L/D \leq 1/4$ (26). Estas chumaceras son ampliamente usadas y por lo consiguiente estudiadas y analizadas siendo el caso por Dubois y Ocvirk [13][27], quienes asumieron que el gradiente de presión radial de la chumacera es mucho menor que el gradiente de presión en la dirección axial. Por lo consiguiente recordando la ecuación de Reynolds (Ec. 2. 82) y despreciando el término donde corresponde la presión angular se tiene el modelo clásico de una chumacera corta.





$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi(-\varepsilon \sin \theta)$$

(Ec. 2. 91)

2.4.2 Modelo, Chumacera Infinitamente Larga.

Una chumacera será considerada larga si la longitud axial L es muy grande en comparación con el diámetro D , en términos matemáticos: $L \gg D$, en términos numéricos una buena consideración será: $L/D \geq 2$ (26); En la chumacera infinitamente larga donde el gradiente de presión radial de la chumacera es mucho mayor que el gradiente de presión en la dirección axial. Por lo consiguiente recordando la ecuación de Reynolds (Ec. 2. 82) y despreciando el termino donde corresponde la presión axial se tiene el modelo clásico de una chumacera infinitamente larga.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 12\pi(-\varepsilon \sin \theta)$$

(Ec. 2. 92)

La solución de la ecuación anterior es compleja, debido a que las integrales que aparecen en el desarrollo de la solución son de una dificultad alta, sin embargo en el año de 1904 Arnold Sommerfeld (1868 – 1951) soluciono este problema sustitución su sustitución universal; lo que permite determinar el campo de presión en la película del lubricante.

2.5 Modelo Matemático para una Chumacera Larga con Puerto Lineal de Presurización.

En esta sección se busca presentar y desarrollar un modelo de presurización lineal antes mencionado en la tesis del Dr. Ignacio Ramírez Vargas (24), que fue propuesto junto con el Dr. Valery Nossov y el Dr. Julio Cesar Gómez Mancilla. Es bueno mencionar que en la tesis antes mencionada se centra en el desarrollo de un nuevo modelo de presurización en un puerto puntual usando la función generalizada Delta de Dirac; todo esto fue aplicado a la teoría de una chumacera corta, entonces porqué no suponer lo mismo para una chumacera infinitamente larga. Al asumir que una chumacera es infinitamente larga o simplemente larga en el eje axial se está suponiendo que si tenemos una presurización puntual muy





pequeña debido al uso de la función a lo largo del eje, ésta será también infinita en cualquier lugar en el eje axial. Siendo así entonces no se puede proponer una presión puntual, pero si asumimos ahora que esta función equivale a una línea acotada de presurización esta representa ahora si un cambio en la presión proporcionada y de este modo asumimos el puerto de inyección en forma de línea.

2.5.1 Delta de Dirac.

Como se comenta anteriormente, es necesario representar una fuerza concentrada (en este caso suponiendo una línea acotada), esto puede ser considerado a través de una fuente idealizada, las cuales son verdaderamente instantáneas o localizadas [28][29].

El físico teórico, británico Paul M. Dirac (1902-1984) propuso la delta de Dirac siendo una funcional lineal, sobre el espacio de las funciones básicas, $\phi(x) < \delta, \phi > = \phi(0)$ sugiriendo una manera de representar las fuentes concentradas matemáticamente:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

(Ec. 2. 93)

Teniendo la llamada función delta de Dirac como límite de funciones continuas y tomando en consideración algunas de las propiedades de la función ya que la función simbólica $\delta(x)$ representa un fuente ubicada en una x y la presión propuesta acumulada es conocida como la función de Heaviside (también llamada función escalón unitario) nombrado así debido al matemático ingles Oliver Heaviside, denotada por $H(x)$.

Las siguientes ecuaciones son el resultado de las derivaciones de distribución:



Donde se puede escribir:

$$\frac{dH}{dx} = \delta(x)$$

(Ec. 2. 94)

Y se define que:

$$H(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

(Ec. 2. 95)

Entonces:

$$H'(x) = 2\delta(x)$$

(Ec. 2. 96)

Y bien:

$$2 \int \delta(x) dx = H(x)$$

(Ec. 2. 97)

2.5.2 Modelo para una Chumacera Larga con Línea de Presurización.

Una vez retomando la importancia de porqué es indispensable un buen modelado del comportamiento dinámico de los soportes en máquinas rotatorias radica en la manera de atenuar y controlar las amplitudes he ahí que tomando una chumacera hidrodinámica presurizada externamente (chumacera híbrida), es posible modificar las propiedades dinámicas de la película del lubricante, haciendo que las inestabilidades y amplitudes por vibraciones puedan disminuir así se demuestra en diferentes trabajos [8].





El modelo de presurización lineal utilizado junto con la función Delta de Dirac, se emplearán para determinar los campos de presión y poder caracterizar las chumaceras.

En esta tesis se utilizará la misma nomenclatura utilizada por el Dr. Ignacio Ramírez Vargas en su trabajo; debido que esta tesis es una continuación de su trabajo.

La ubicación del puerto de inyección se muestra en la (figura 2.9) en donde aparecen dos sistemas de coordenadas; el sistema fijo XOY en el cual el punto O representa el centro de la chumacera y el sistema móvil $X'JY'$ en el cual J es el centro de muñón, el ángulo entre el sistema de coordenadas es llamado ángulo de equilibrio o de actitud φ , la posición angular del puerto de inyección está dada por el ángulo β en el sistema fijo y $\theta_\beta = \pi - \varphi + \beta$ en el sistema móvil; los vectores \vec{U}_R y \vec{U}_T son vectores unitarios en la dirección radial y transversal.

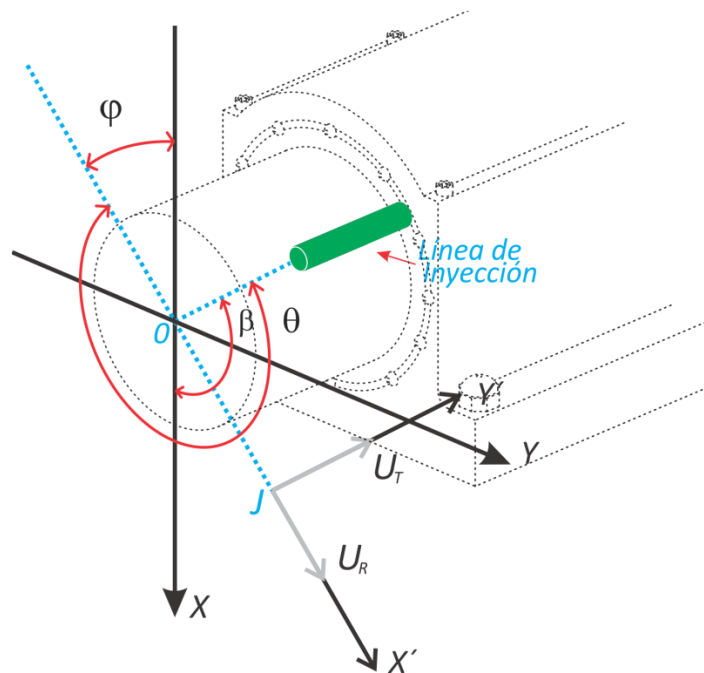


Figura 2. 9 Sistema de Coordenadas Fijo dado por (XYZ) de una Chumacera Móvil (X' , Y' , Z') del Muñón.



El sistema coordinado descrito anteriormente y visto en la imagen anterior muestra que la posición del centro del muñón J está en función del ángulo de actitud φ y de la distancia formada por OJ llamada excentricidad, estas variables

se verán modificadas con la presurización de tal modo que el centro del muñón pueda tomar cualquier posición dentro de algún cuadrante.

Retomando conceptos si se define el área del puerto de inyección como Δs , la cual es una superficie establecida y donde la presión de inyección será Δp , entonces la fuerza total de presión será igual a:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p \cdot \Delta s$$

(Ec. 2. 98)

Se debe de tener en cuenta que si $\Delta s \rightarrow 0$, se tiene que $\Delta p \rightarrow \infty$. Entonces:

$$\Delta F_{pres} = \Delta p \cdot \Delta s = q = \text{constante}$$

(Ec. 2. 99)

Con estas condiciones es posible junto con la función Delta de Dirac proponer un modelo de presurización lineal adimensional.

$$(\Delta p)_{prt} = \bar{q}_{prt} \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]$$

(Ec. 2. 100)

Donde: φ_{pres} es el ángulo de equilibrio (actitud) en una chumacera presurizada.

$$\bar{q}_{prt} = \frac{P_{fict}}{P_{dim}}$$

(Ec. 2. 101)





$$P_{fict} = \frac{\Delta F_{pres}}{DL}, \quad P_{dim} = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2$$

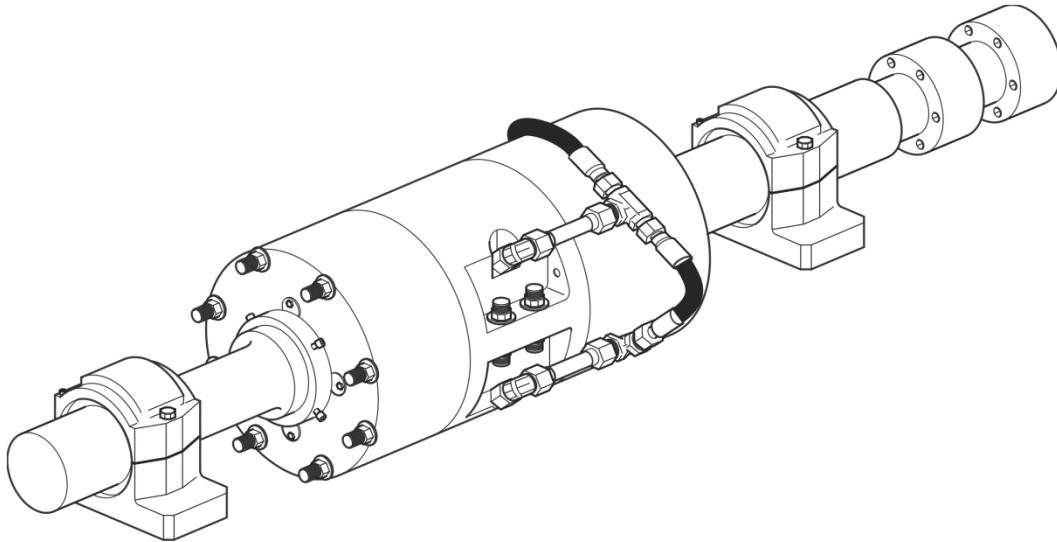
(Ec. 2. 102)

Siendo \bar{q}_{prt} la intensidad de presión adimensional, ver que la ecuación se define como un impulso siendo esta fuerza finita e igual a una constante. En el caso que se deseara a presurizar en una línea de flujo ubicada en lo largo de la chumacera para cualquier posición en la circunferencia dada por el ángulo " β " (figura 2.9). La ecuación de Reynolds adimensional para el caso de una chumacera larga será entonces:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \bar{q}_{prt} \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]$$

(Ec. 2. 103)





CAPÍTULO TRES

CAMPOS DE PRESIÓN EN CHUMACERAS HÍBRIDAS LARGAS CON PUERTOS LINEALES DE INYECCIÓN





Habiendo propuesto en el capítulo anterior el modelo matemático que trata de describir lo más posible el comportamiento y así caracterizar la chumacera infinitamente larga. Resolviendo el modelo es posible determinar la presión que genera la película de lubricante. Conocer los campos de presión que se generan son de mucha importancia ya que se puede llegar a determinar regiones donde la película de lubricante puede romper (cavitación), encontrar el umbral entre una condición hambrienta (starved) o inundada (fully flooded), [25] y el lugar donde se encuentra el valor de máxima de presión. Así conocido el campo de presión, se puede caracterizar por completo a una chumacera.

3.1 Solución Modelo Clásico para una Chumacera Larga (Sin Presurización).

El análisis del modelo clásico de una chumacera larga depende de las condiciones de frontera aquí los casos que este trabajo manejará.

3.1.1 (Primer Caso) Solución del Modelo utilizando las Condiciones de Frontera de Sommerfeld.

Resolviendo el modelo no presurizado con condiciones de frontera de Sommerfeld de una chumacera larga, (25). Y recordando que la ecuación general de Reynolds se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \varepsilon \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\phi - \frac{\omega}{2} \right) \sin \theta \right]$$

(Ec. 3. 1)

Con condiciones de frontera: $p(\theta=0) = p(\theta=2\pi) = p_0$

Por lo tanto: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta$. Para una chumacera larga en estado estacionario, (Ec. 3. 1) toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^2} \left[-\frac{\varepsilon \omega}{2} \sin \theta \right]$$

(Ec. 3. 2)





Usando las siguientes variables adimensionales:

$$\bar{p} = \frac{p}{p_{\text{dim}}}, \quad p_{\text{dim}} = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 = \mu \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \left(\frac{R}{C_r} \right)^2$$

(Ec. 3. 3)

Ecuación de Reynolds adimensional para una chumacera larga.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = -12\pi \varepsilon \sin \theta$$

(Ec. 3. 4)

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

La ecuación (Ec. 3. 4) es compleja de resolver no hay una forma convencional de resolverla, pero como se mencionó con anterioridad la forma de abordar estas integrales pueden ser a través de la llamada sustitución de Sommerfeld que se describirá completamente más adelante de este trabajo. La solución de (Ec. 3. 4) para obtener los campos de presión en una chumacera larga no presurizada con condiciones de frontera de Sommerfeld es la siguiente:

$$\bar{p}(\theta)_{\text{Som}} = \frac{12\pi \varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$$

(Ec. 3. 5)

A la solución anterior puede llamarse solución de Sommerfeld, en las siguientes figuras se muestra un campo de presión a una excentricidad dada.

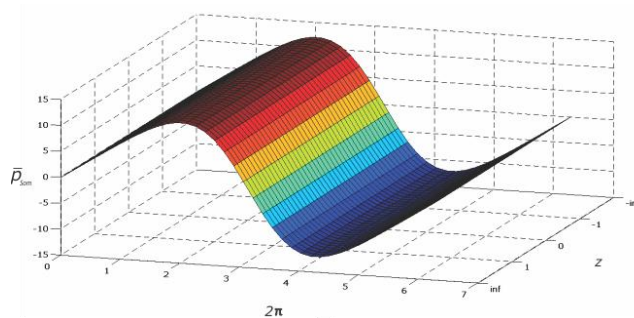


Figura 3. 1 Campo de presión condición de frontera de Sommerfeld, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.3$.



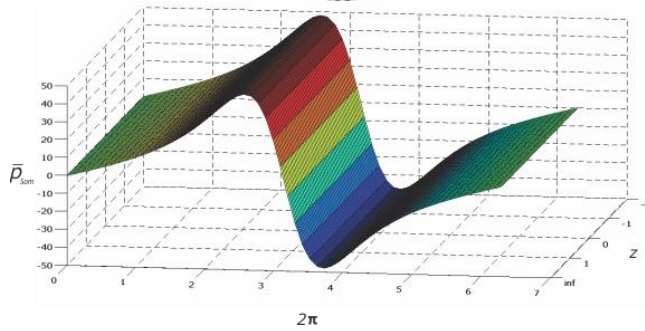


Figura 3. 2 Campo de presión condición de frontera de Sommerfeld, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.7$.

3.1.2 (Segundo Caso) Solución del Modelo utilizando las Condiciones de Frontera de Gumbel.

El análisis de chumaceras largas con condiciones de Gumbel es similar al análisis del punto anterior. La ecuación de Reynolds para el caso de chumaceras largas, debe ahora resolverse con las condiciones de frontera; $p(\theta=0)=p(\theta=2\pi)=p_0$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + R^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\mu R^2}{C_r^3} \left[C_r \varepsilon \cos \theta + C_r \varepsilon \left(\phi - \frac{\omega}{2} \right) \sin \theta \right]$$

(Ec. 3. 6)

Y donde:

$$h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta.$$

Ecuación de Reynolds adimensional para una chumacera larga.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = -12\pi \varepsilon \sin \theta$$

(Ec. 3. 7)

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Nuevamente para obtener la ecuación de campo de presión (Ec. 3. 8) es necesario





hacer uso de la sustitución de Sommerfeld. El campo de presión con condiciones de Gümbel es:

$$\bar{p}(\theta)_{G\ddot{u}m} = \frac{12\pi\varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$$

(Ec. 3. 8)

Las ecuaciones (Ec. 3. 5) y (Ec. 3. 8) son idénticas, por lo tanto el campo de presión en estado estable es el mismo, pero con condiciones de frontera de Gümbel sólo se grafica en el rango de $0 \leq \bar{p} \leq \pi$ en donde los valores de presión son positivos y los negativos se igualan a cero.

Las siguientes figuras muestran los campos de presión con condiciones de frontera Gümbel, a una excentricidad dada.

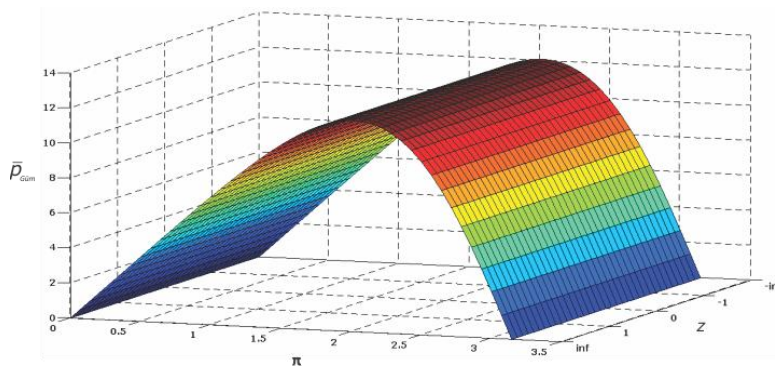


Figura 3. 3 Campo de presión condición de frontera de Gümbel, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.3$.

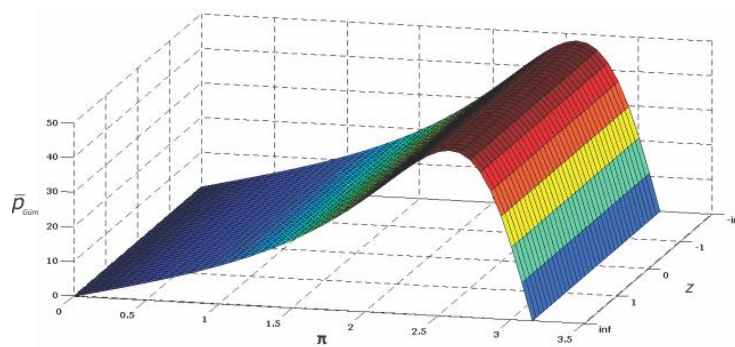


Figura 3. 4 Campo de presión condición de frontera de Gümbel, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.7$.





3.1.3 (Tercer Caso) Solución del Modelo utilizando la Teoría de Warner.

El modelo de Warner [30], se basa en la hipótesis de que la presión desarrollada en una chumacera larga, puede presentarse de la siguiente manera:

$$p(\theta, z)_{\text{Warner}} = p(\theta)_{\text{Som}} \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z}{L} A\right)}{\cosh(A)} \right]$$

(Ec. 3. 9)

Con condiciones de frontera: $p(\theta=0) = p(\theta=2\pi) = p_0$

Por lo tanto:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$$

Donde $p(\theta)_{\text{Som}}$ es la presión proporcionada por la solución de Sommerfeld, para chumaceras largas, $A = \lambda \frac{L}{D}$, λ es una constante la cual evaluada en la posición de equilibrio es igual a:

$$(\lambda)_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon^2(2+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}(2+3\varepsilon^2)-2(1-\varepsilon^2)}}$$

(Ec. 3. 10)

Tener en cuenta que en esta teoría se considera la relación de $\frac{L}{D}$ y la variable z de longitud axial, por lo tanto hay que recordar que la teoría de chumacera larga la relación de longitud con respecto al diámetro es mucho mayor, $L \gg D$, en términos numéricos una buena consideración será: $\frac{L}{D} \geq 2$, aparte notar que esta consideración solo es una constante que afecta a la presión propuesta por





Sommerfeld.

A continuación los campos de presión utilizando la teoría de Warner, a una excentricidad, y relación longitud-diámetro dados.

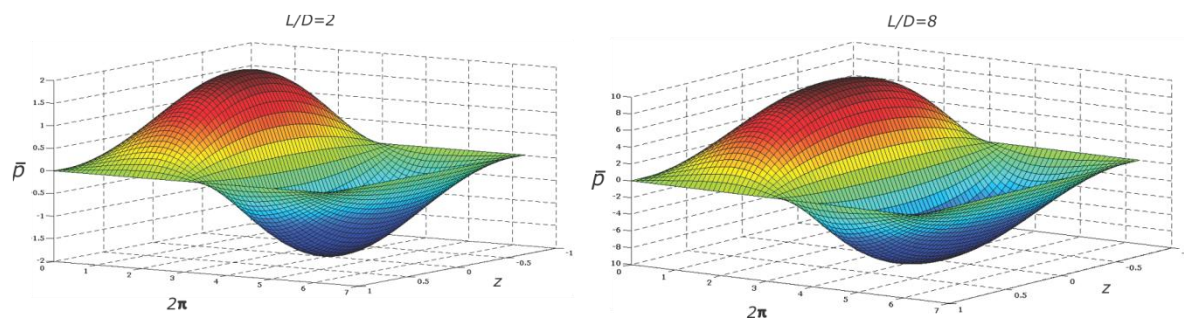


Figura 3. 5 Campo de presión utilizando teoría de Warner, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.3$.

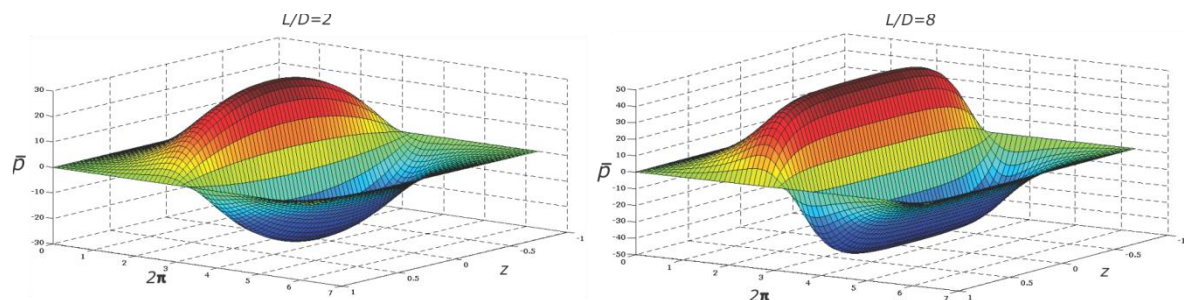


Figura 3. 6 Campo de presión utilizando teoría de Warner, chumacera larga, para una excentricidad $\varepsilon = 0.7$.

3.2 Solución Cerrada Modelo Presurizado de Chumacera Infinitamente Larga

El modelo de presurización lineal que fue presentado en el capítulo precedente, en el que con ayuda de la función delta de Dirac; recordando el modelo nuevamente se tiene (24):





$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \bar{q}_{prt} \delta[\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres})]$$

(Ec. 3. 11)

Teniendo en cuenta que:

$$h = 1 + \varepsilon \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

La solución de (Ec. 3. 11) se puede obtener gracias a algunas de las propiedades de delta de Dirac y la función de Heaviside; recordando que:

$$H(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

(Ec. 3. 12)

Entonces:

$$\bar{H}(x) = 2\delta(x)$$

(Ec. 3. 13)

O bien:

$$2 \int \delta(x) dx = \bar{H}(x)$$

(Ec. 3. 14)

Integrando la (Ec. 3. 11) y teniendo en cuenta (Ec. 3. 14) se tiene:

$$h^3(\theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} = \bar{q}_{prt} \cdot \frac{1}{2} \bar{H}(\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres}))$$

(Ec. 3. 15)

Pasando el término h para despejar la presión se tiene que:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \bar{q}_{prt} \cdot \frac{1}{2h^3(x)} \bar{H}(\theta - (\pi + \beta - \varphi_{pres}))$$

(Ec. 3. 16)

Teniendo en cuenta la (Ec. 3. 12) se tiene que:





$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \begin{cases} +\frac{1}{2}q_{prt} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3} & \theta > (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \\ -\frac{1}{2}q_{prt} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3} & \theta < (\pi + \beta - \varphi_{pres}) \end{cases}$$

(Ec. 3. 17)

Donde el φ_{pres} está dado por: (26)

$$\tan \varphi_{pres} = \frac{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$$

(Ec. 3. 18)

Teniendo la ecuación proseguimos a la solución para esto es necesario utilizar la llamada sustitución de Sommerfeld, debido a como se comento anteriormente no es una integral que se puede resolver convencionalmente, se tiene:

$$p(\theta) = \pm \frac{1}{2}q_{prt} \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3}$$

(Ec. 3. 19)

Procedemos a evaluar integrales del tipo:

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon \cos x)^n}$$

Evaluamos utilizando la sustitución universal propuesta por Sommerfeld, la cual es:

$$\cos \gamma = \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

(Ec. 3. 20)

Conociendo la identidad que $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$, se encuentra $\sin \gamma$.

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

(Ec. 3. 21)





De (Ec. 3. 20) se obtiene que:

$$\cos \theta = \frac{\varepsilon - \cos \gamma}{\varepsilon \cos \gamma - 1}$$

(Ec. 3. 22)

A partir de la sustitución de Sommerfeld es posible obtener a $d\theta$ de la siguiente forma:

$$-\sin \gamma \frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{(1 + \varepsilon \cos \theta)(-\sin \theta) - (\varepsilon + \cos \theta)(-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$$

(Ec. 3. 23)

$$-\sin \gamma \frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{-\sin \theta(1 - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$$

(Ec. 3. 24)

Tomando (Ec. 3. 21) :

$$\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{-\sin \theta(1 - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$$

(Ec. 3. 25)

Despejando:

$$d\theta = \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} d\gamma$$

(Ec. 3. 26)

Tomando en denominador de la integral (Ec. 3. 19) y (Ec. 3. 22) se escribe:

$$1 + \varepsilon \cos \theta = 1 + \varepsilon \left(\frac{\varepsilon - \cos \gamma}{\varepsilon \cos \gamma - 1} \right) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon \cos \gamma - 1}$$

(Ec. 3. 27)

O bien:





$$\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{1 - \varepsilon \cos \gamma}{1 - \varepsilon^2}$$

(Ec. 3. 28)

Teniendo todos los elementos necesarios para el desarrollo de la integral de (Ec. 3. 19) y sustituyéndolo por (Ec. 3. 26) y (Ec. 3. 27) se tiene:

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \int \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon \cos \gamma - 1}\right)^3} \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} d\gamma = \int \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon \cos \gamma - 1}\right)^3} \frac{\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon \cos \gamma - 1}\right)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} d\gamma$$

Simplificando:

$$\int \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon \cos \gamma - 1}\right)^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}} d\gamma \quad \int \frac{(\varepsilon \cos \gamma - 1)^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} d\gamma$$

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int (\varepsilon \cos \gamma - 1)^2 d\gamma$$

(Ec. 3. 29)

Desarrollando el binomio cuadrado de (Ec. 3. 29):

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \int (\varepsilon^2 \cos^2 \gamma - 2\varepsilon \cos \gamma + 1) d\gamma$$

(Ec. 3. 30)

Desarrollando la integral de (Ec. 3. 30) se tiene:

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\gamma + \frac{\varepsilon^2 \sin(2\gamma)}{4} + \frac{\varepsilon^2 \gamma}{2} - 2\varepsilon \sin \gamma \right) + C$$

(Ec. 3. 31)

Recordar que:





$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta}, \quad \cos \gamma = \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1+\varepsilon \cos \theta}, \quad \gamma = \text{Arc tan} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{\varepsilon + \cos \theta}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en (Ec. 3. 31) se obtiene:

$$= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left[\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{\varepsilon + \cos \theta} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) \left(\frac{\varepsilon + \cos \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) + \left(\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{\varepsilon + \cos \theta} \right) \right) \right] + \right. \\ \left. - 2\varepsilon \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) \right] + C$$

Simplificando al final se tiene:

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left[\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{\varepsilon + \cos \theta} \right) - 2\varepsilon \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta (\varepsilon + \cos \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} + \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{\varepsilon + \cos \theta} \right) \right] \right] + C$$

(Ec. 3. 32)

La expresión final que determina el campo de presión es el siguiente:

$$\bar{p}(\theta, \varepsilon) = \pm \frac{\bar{q}_{prt}}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \left[\text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{\varepsilon + \cos \theta} \right) - 2\varepsilon \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta (\varepsilon + \cos \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} + \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{\varepsilon + \cos \theta} \right) \right] \right] + C$$

(Ec. 3. 33)

La expresión anterior es la solución cerrada del modelo propuesto en este trabajo, es una solución compleja, pero el mayor problema que se tiene es que; se sabe que el campo de presión es continuo, pero en esta expresión no lo es por razón de contener Arc tan en la solución y cuando el argumento en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ o sus





variaciones tiende al infinito y por lo consiguiente la función no es continua (Figura 3.7).

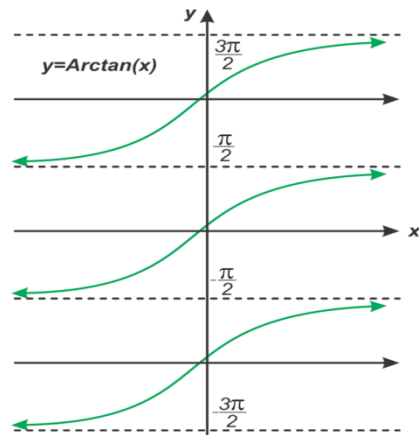


Figura 3. 7 Función Arco tangente.

En la solución para obtener los campos de presión, esto se ve reflejado en saltos (Figura 3.8) no siendo por lo tanto una función continua.

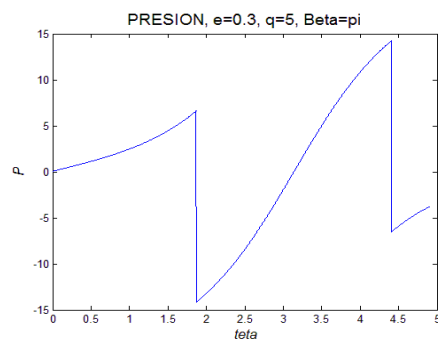


Figura 3. 8 Solución cerrada viéndose reflejado los saltos debido a la función Arco tangente.

3.3 Solución Numérica Modelo Presurizado de Chumacera Infinitamente Larga.

Llegando a tener el inconveniente de tener una función que no es continua y sabiéndolo que lo debe ser, se analiza el modo de proceder con la solución del modelo propuesto, llegando a la conclusión que el método más eficaz que se





puede tomar es en forma numérica, debido que al final los resultados para poder caracterizar la chumacera son numéricos; el método de resolución que se utilizara será a través de la integración de Euler.

3.3.1 Método de Integración de Euler.

La solución de un problema de valores iniciales se obtiene generalmente paso a paso por métodos de integración hacia adelante, lo que permite valuar Y_{i+1} tan pronto se conozcan los valores Y_i , Y_{i-1} de Y en uno o más pivotes anteriores. El más simple de estos métodos, debido a *Euler*, es aplicable a ecuaciones de primer orden y no requiere conocer la solución en los pivotes anteriores.

Dado el problema de valores iniciales:

$$\frac{dY}{dX} = f(X, Y), \quad Y(X_0) = Y_0$$

(Ec. 3. 34)

Se debe integrar la ecuación diferencial en intervalos, $X_i \leq X \leq X_{i+1} = X_i + h$ y evaluar la integral aplicando la fórmula de integración de numérica:

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} \frac{dY}{dX} dX = \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(X, Y) dX$$

(Ec. 3. 35)

$$Y|_{X_i}^{X_{i+1}} = h f(X_i, Y_i) + O(h^2)$$

Entonces:

$$Y_{i+1} - Y_i = h f(X_i, Y_i) + O(h^2)$$

(Ec. 3. 36)

De donde se obtiene la siguiente expresión, aproximada llamada *formula de Euler*:

$$Y_{i+1} = Y_i + h f(X_i, Y_i)$$

(Ec. 3. 37)





Tomando la expresión anterior y aplicando a nuestro método tenemos entonces que, h , es el paso de integración y la función dada por (Ec. 3. 17) y donde $p(0)=0$, así que tomando estos elementos se tiene que:

$$p(0)=0$$

$$p(1)=0+(0.01)\cdot\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

$$p(2)=p(1)+(0.01)\cdot\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

En el apéndice B se detalla y presenta el programa realizado en MATLAB que realiza solución del método llegando a obtener los campos de presión (Figura 3.9).

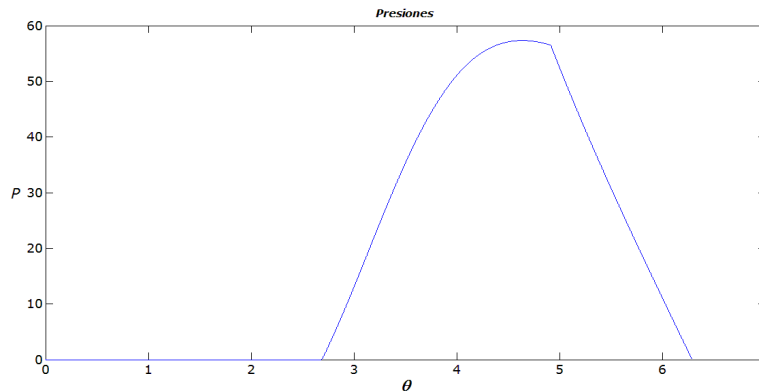


Figura 3. 9 Campo de Presión Hidrostática en Chumacera Híbrida Larga.

3.4 Campos de presión en una Chumacera Híbrida Larga.

Con el resultado anterior permite graficar el campo de presión resultante, el cual está dado por la suma del método clásico para chumaceras largas no presurizado (dependiendo el caso utilizado) y el campo presurizado (Ec. 3. 17). Las siguientes figuras presentan los campos resultantes dado para diversos valores de excentricidad y presurización así como el lugar donde se inyecta.





3.4.1 Campos de Presión Adimensional con Presurización en la Parte Superior de la Chumacera.

Como se ha comentado si la inyección del lubricante se realiza en la parte superior de la chumacera (Figura 3.9) se sabe que $\beta = \pi$:

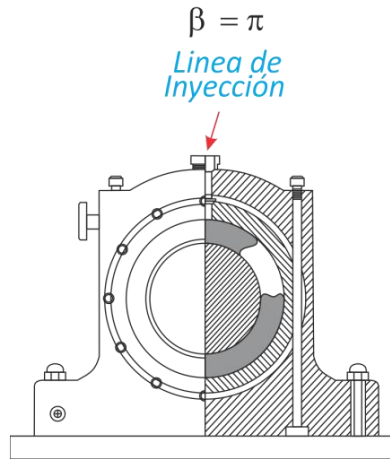


Figura 3. 10 Ubicación de la Línea de Presurización en la Chumacera.

➤ (Primer Caso) Utilizando las Condiciones de Frontera de Sommerfeld.

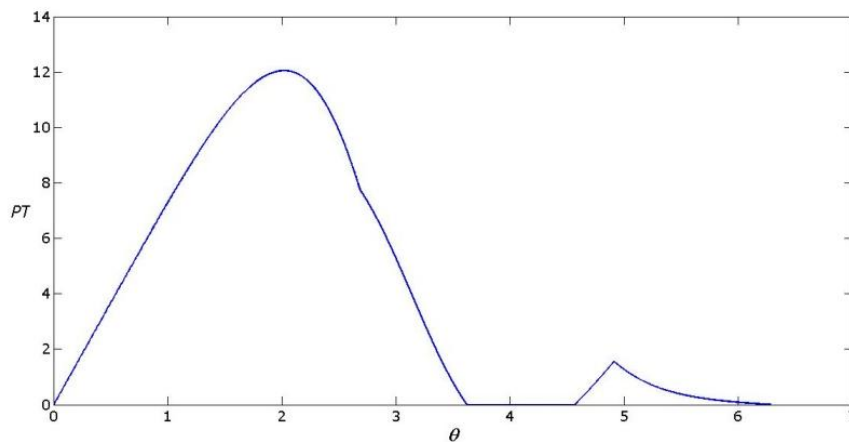


Figura 3. 11a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

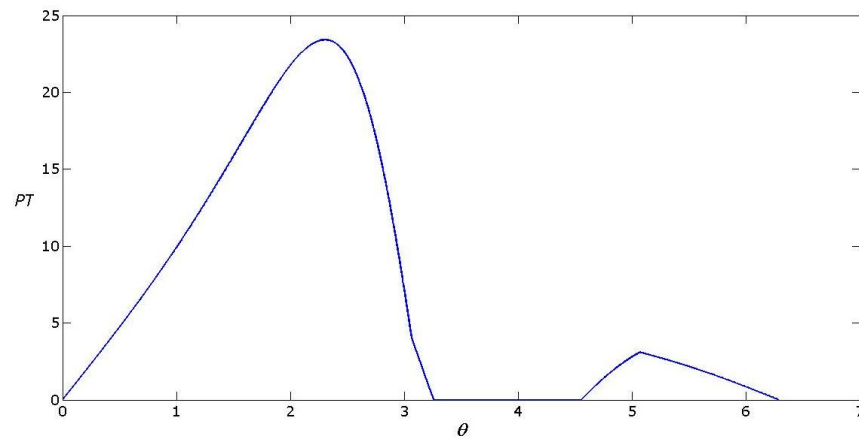


Figura 3. 11b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $q_{pres} = 5$.

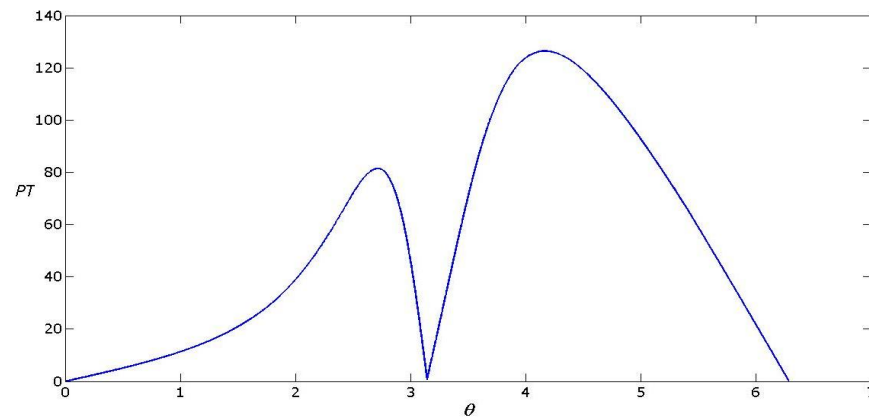


Figura 3. 11c Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.8$, $q_{pres} = 5$.

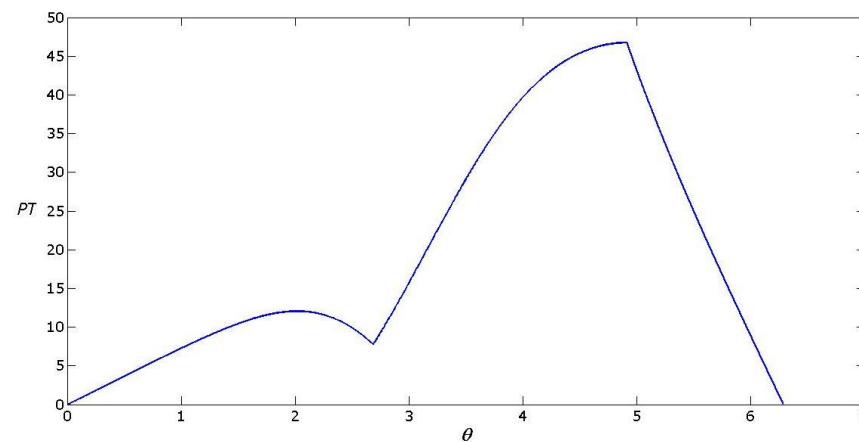


Figura 3. 12a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $q_{pres} = 25$.



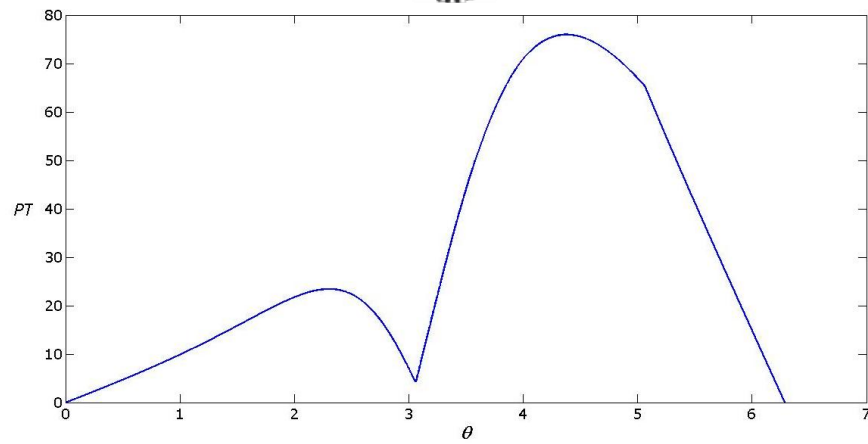


Figura 3. 12b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

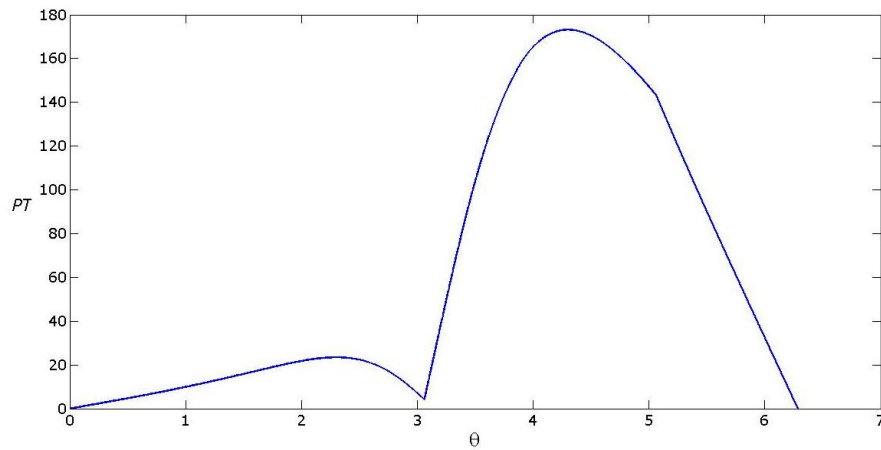


Figura 3. 13a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

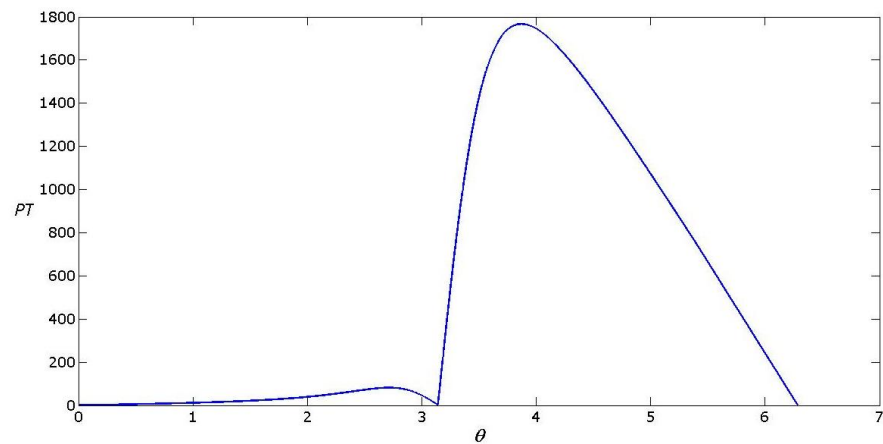


Figura 3. 13b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 50$.





➤ (Segundo Caso) Utilizando las Condiciones de Frontera de Gumbel.

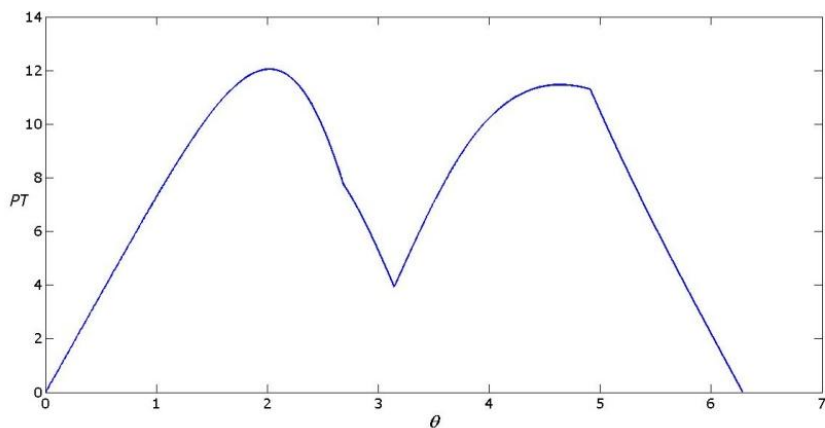


Figura 3. 14a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

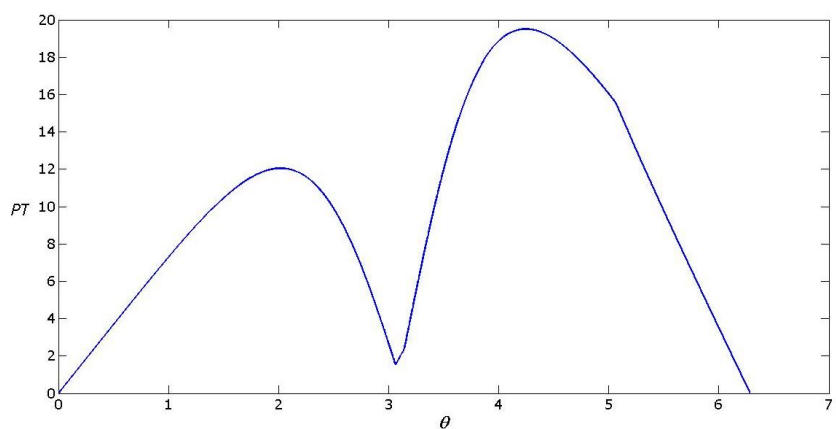


Figura 3. 14b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

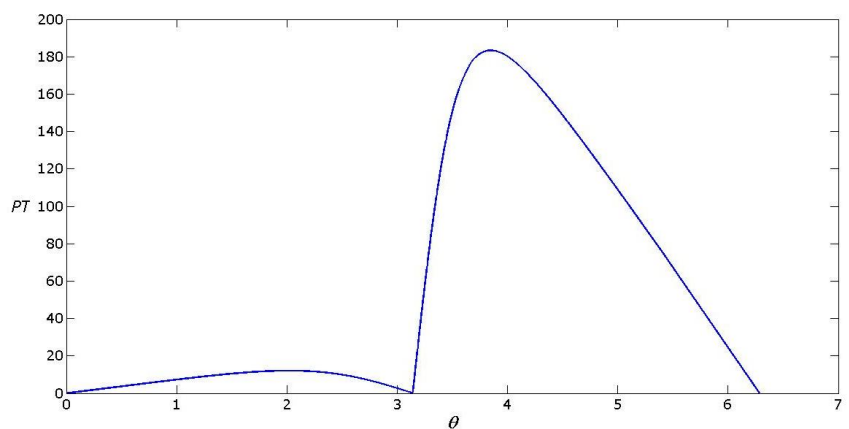


Figura 3. 14c Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.



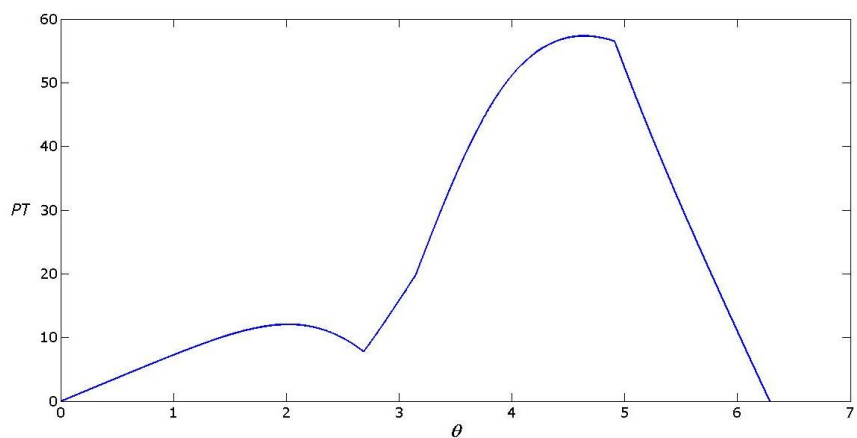


Figura 3. 15a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

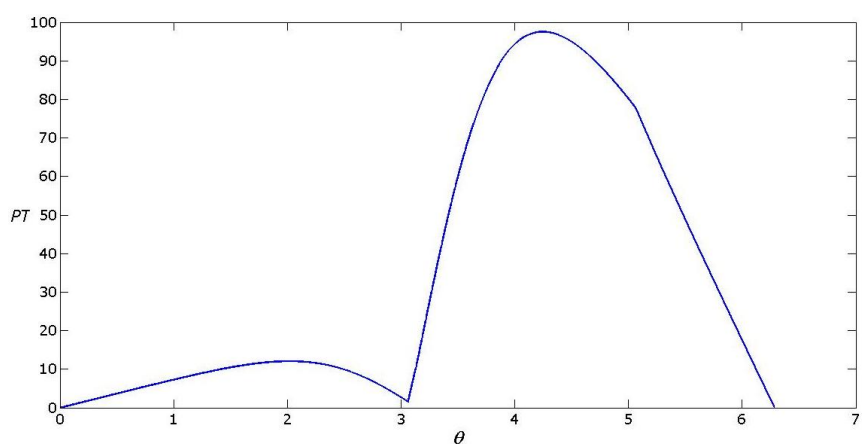


Figura 3. 15b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

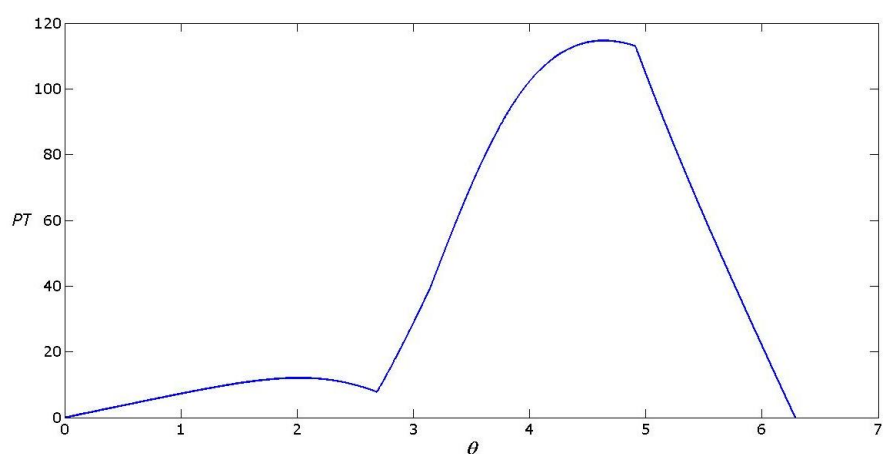


Figura 3. 16a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.



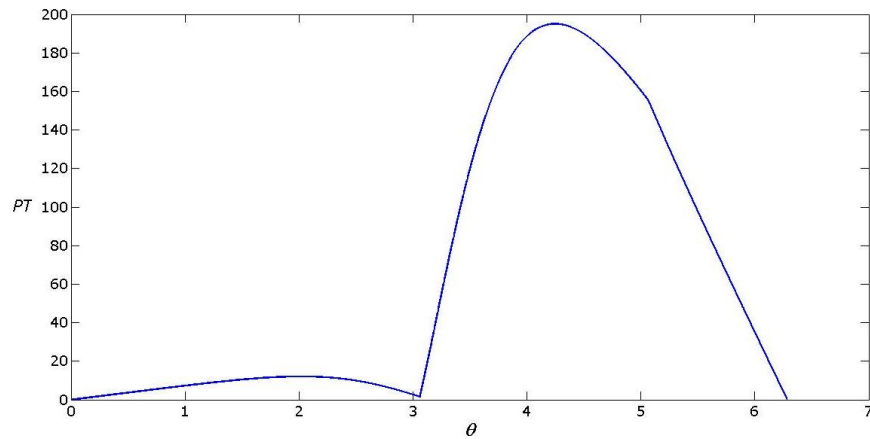


Figura 3. 16b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

➤ (Tercer Caso) Utilizando la Teoría de Warner.

Como se comentó anteriormente en esta teoría se considera la relación de L/D y la variable z de longitud axial, es por eso que estas variables se tomarán en cuenta en los campos de presión total.

Para $L/D = 2$

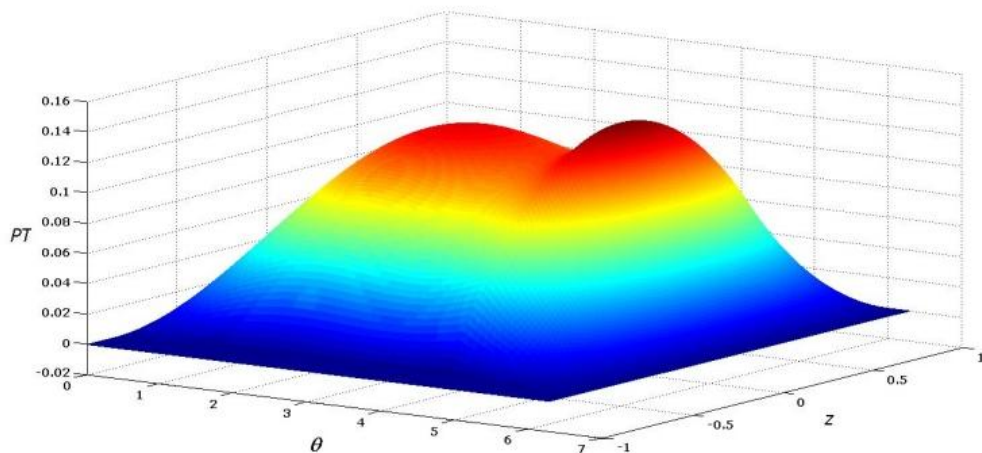


Figura 3. 17a Campo de Presión Total-Teoría Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.1$, $\bar{q}_{pres} = 5$.



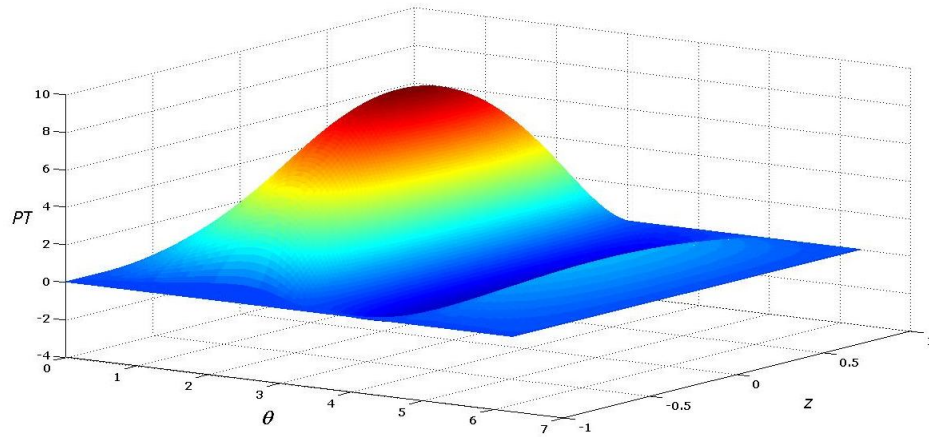


Figura 3. 17b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

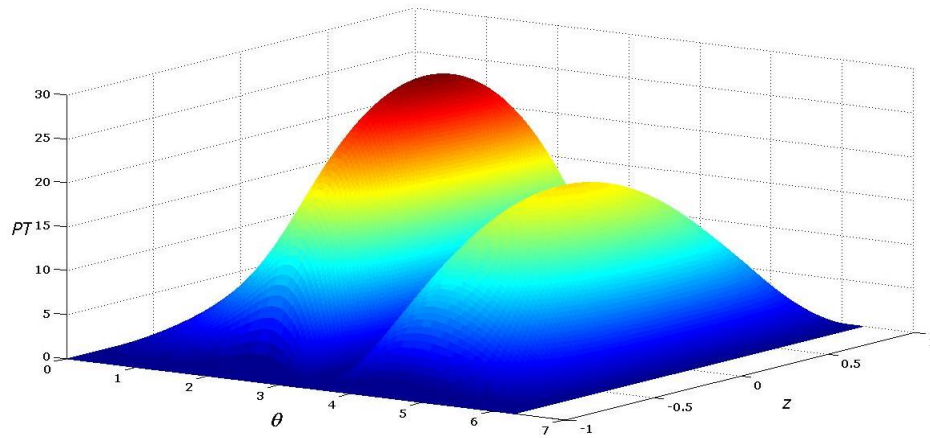


Figura 3. 17c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.7$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

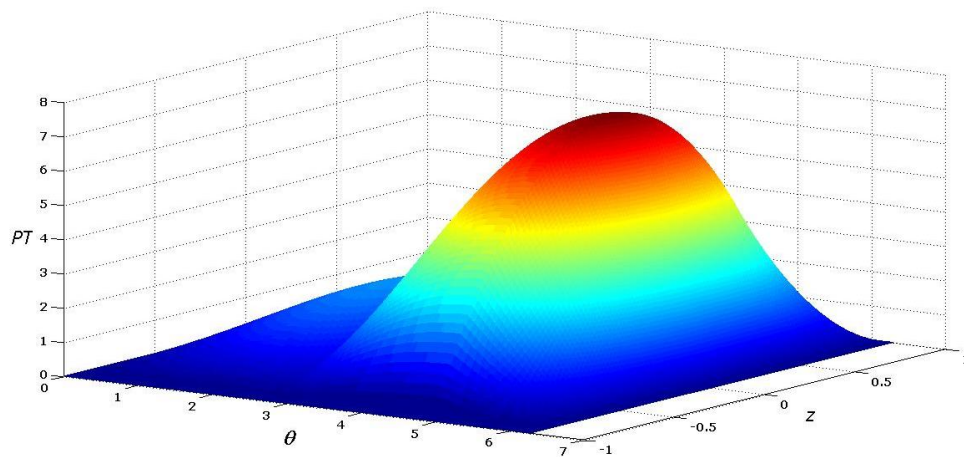


Figura 3. 18a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.



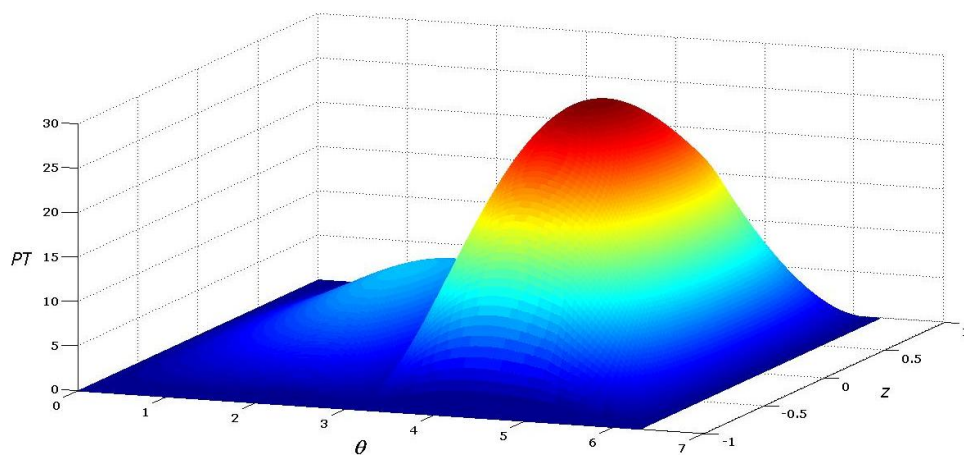


Figura 3. 18b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

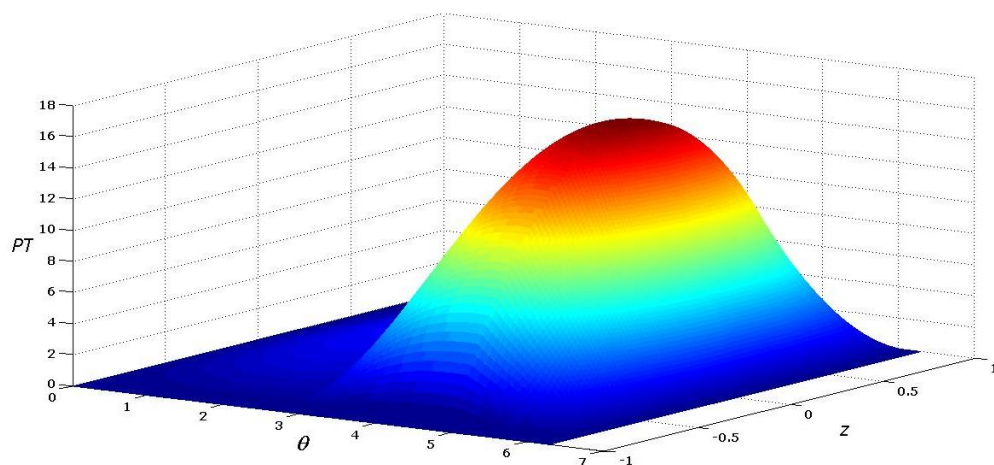


Figura 3. 19a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

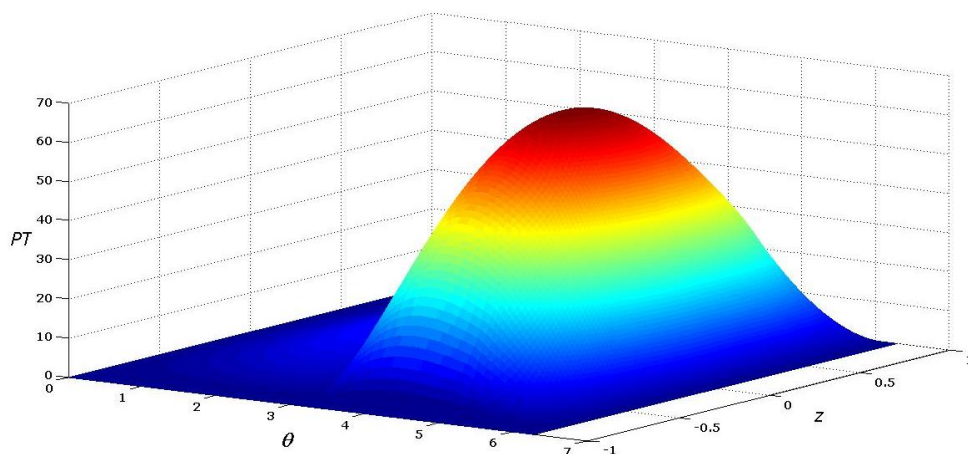


Figura 3. 19b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.





Para $L/D = 8$

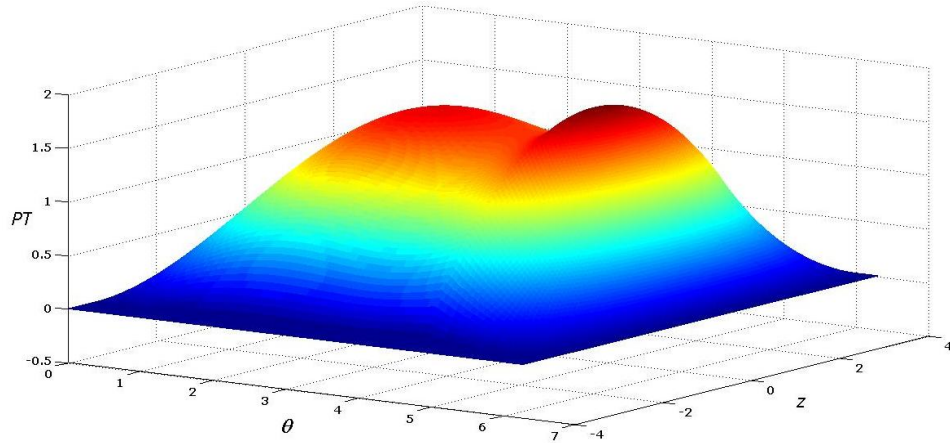


Figura 3. 20a Campo de Presión Total-Teoría Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.1$, $q_{pres} = 5$.

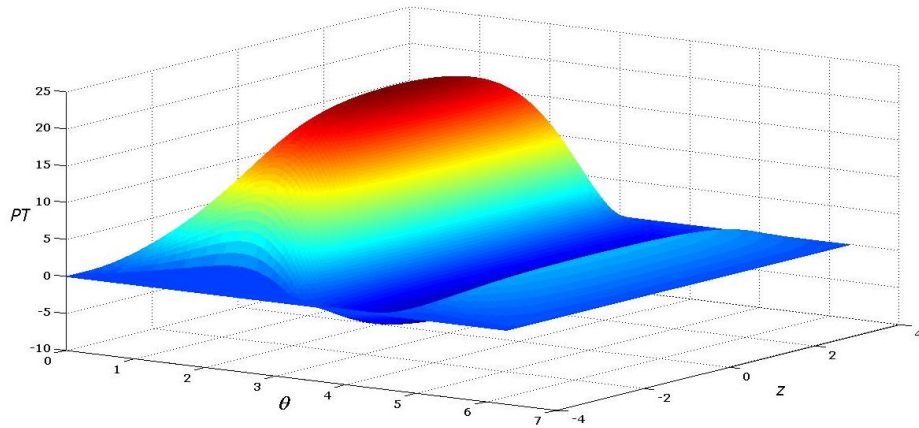


Figura 3. 20b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $q_{pres} = 5$.

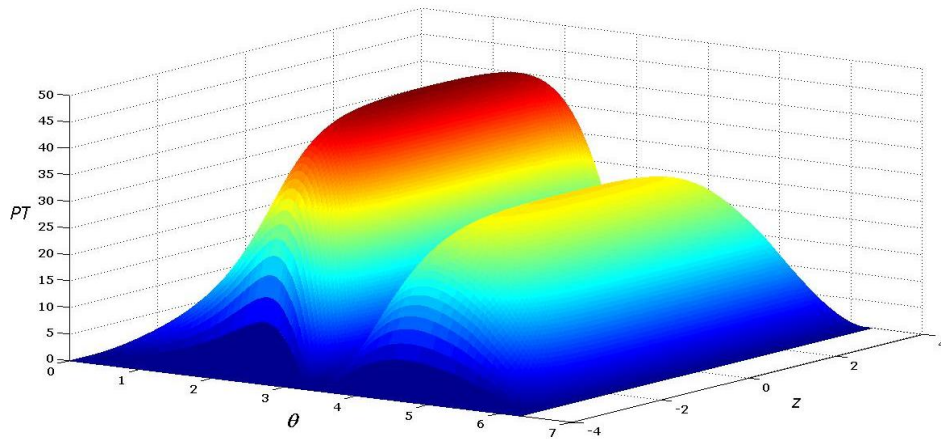


Figura 3. 20c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.7$, $q_{pres} = 5$.



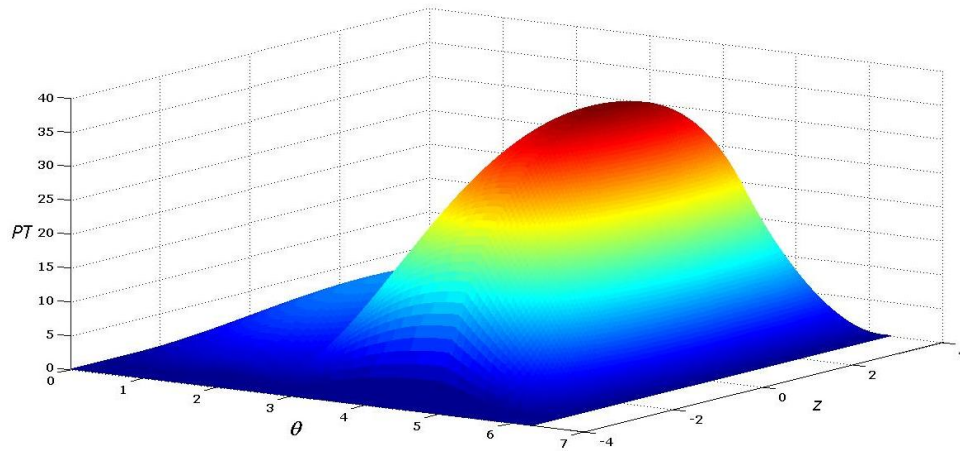


Figura 3. 21a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

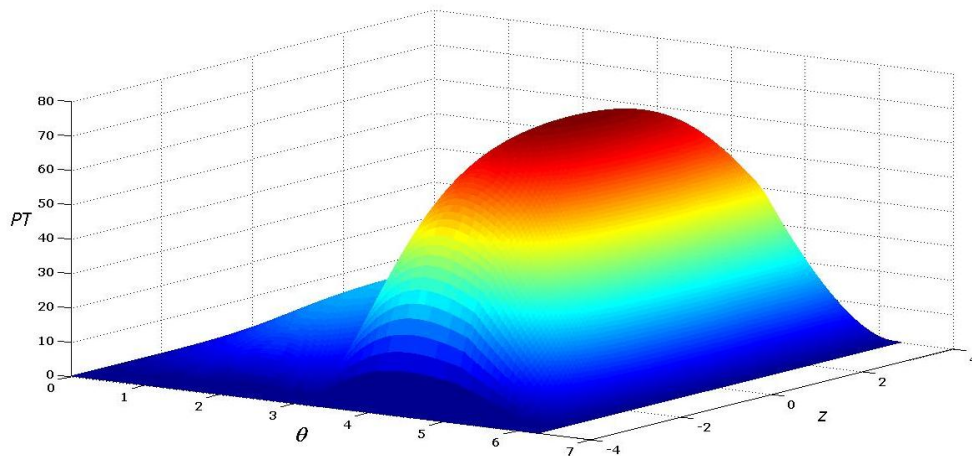


Figura 3. 21b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

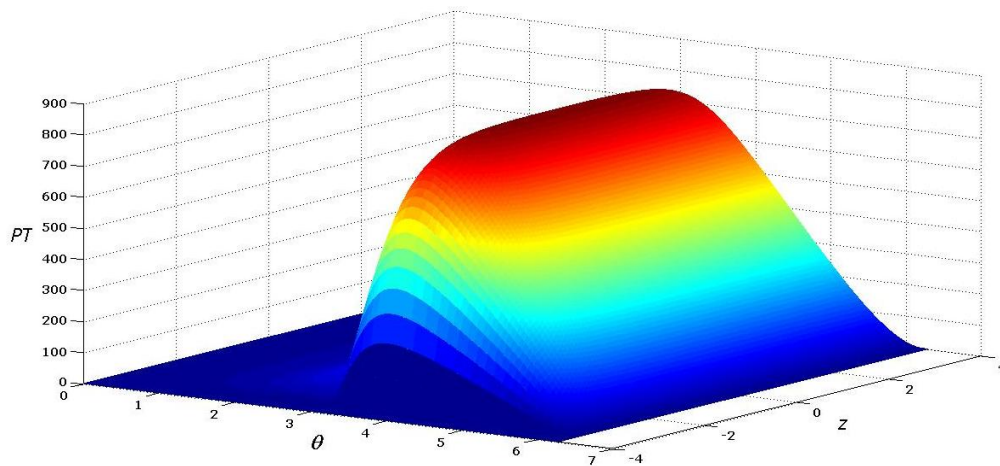


Figura 3. 20c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 25$.



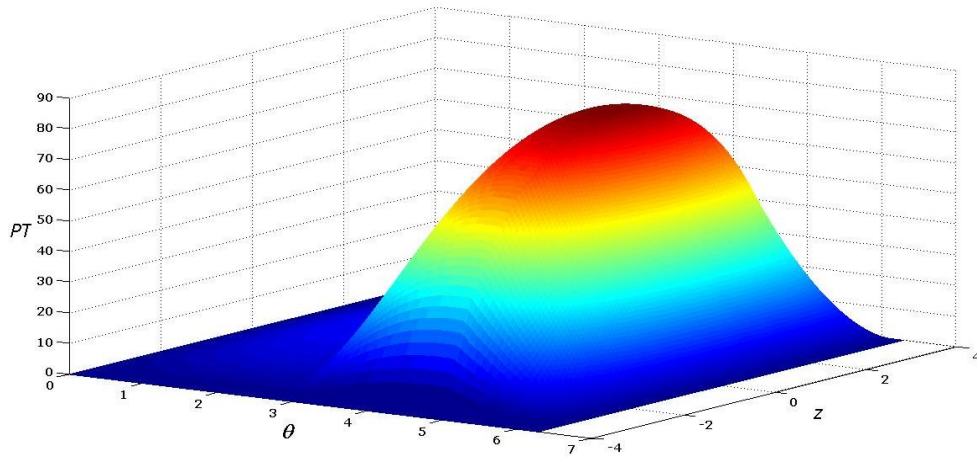


Figura 3. 22a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

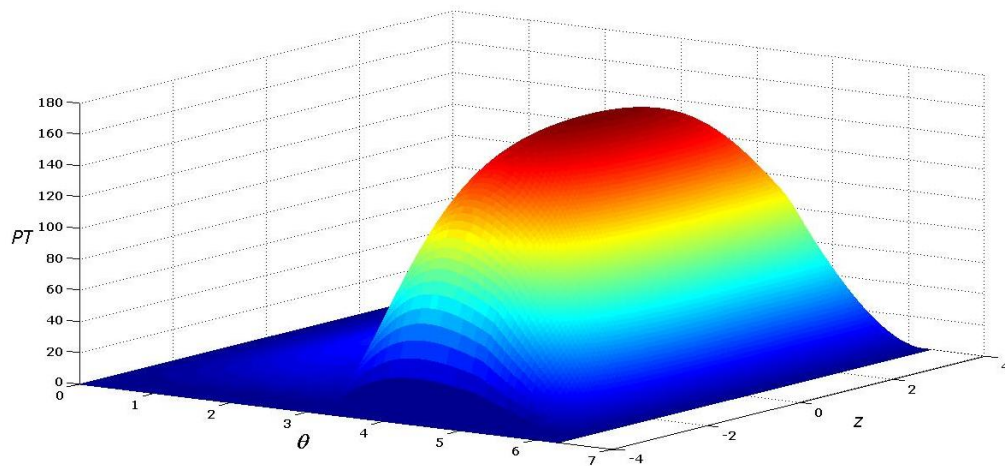


Figura 3. 22b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = \pi$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.



3.4.2 Campos de Presión Adimensional con Presurización en la Parte Inferior de la Chumacera.

Como se ha comentado, si la inyección del lubricante se realiza en la parte inferior de la chumacera (Figura 3.22) se sabe que $\beta = 0$:

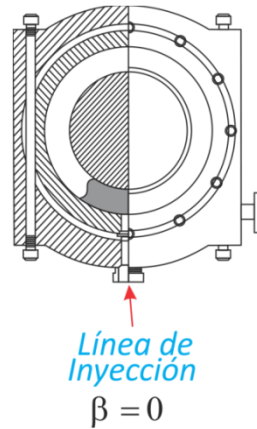


Figura 3. 23 Ubicación de la Línea de Presurización en la Chumacera.

➤ (Primer Caso) Utilizando las Condiciones de Frontera de Sommerfeld.

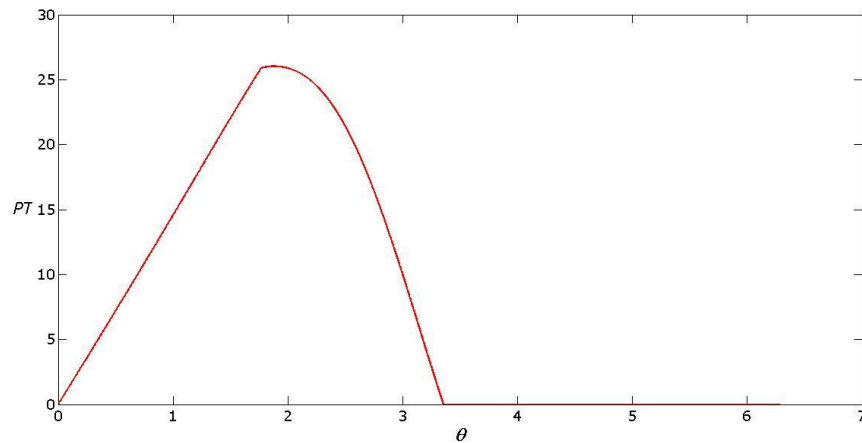


Figura 3. 24a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

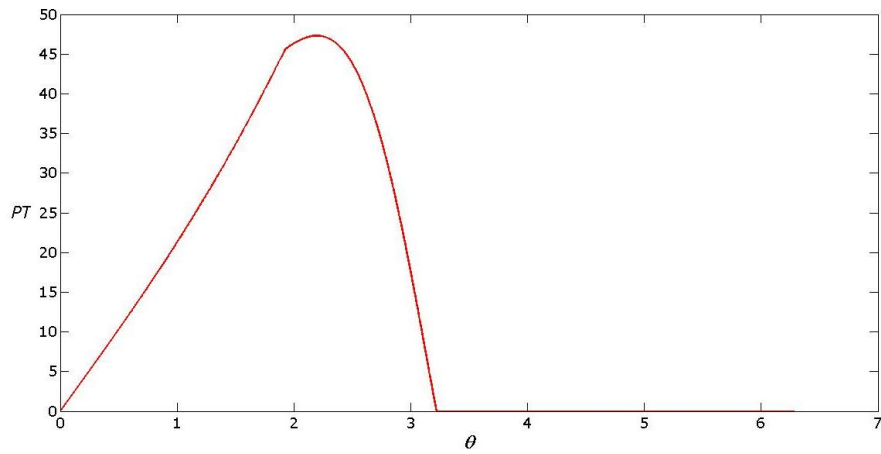


Figura 3. 24b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

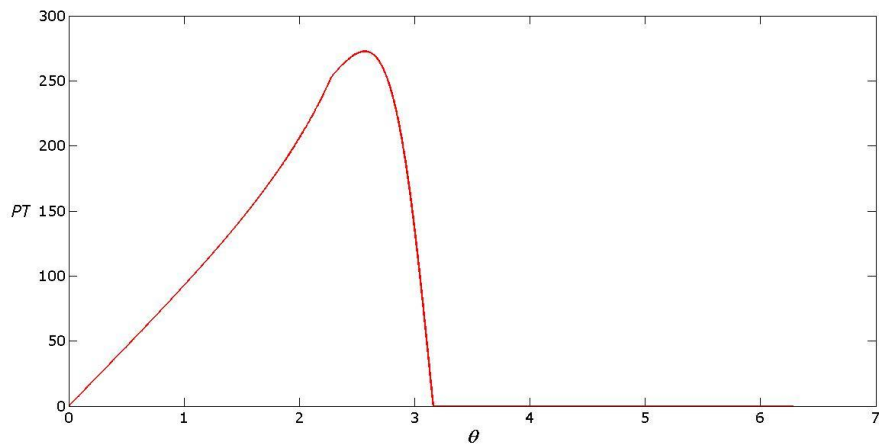


Figura 3. 24c Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

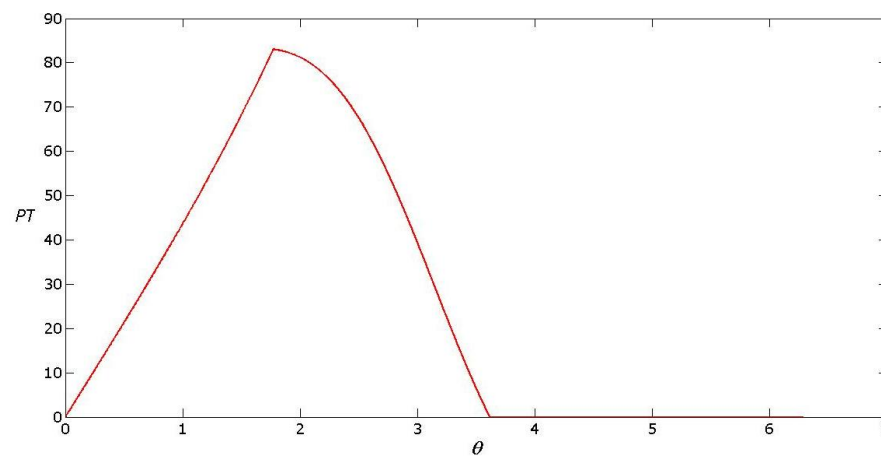


Figura 3. 25a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 25$.



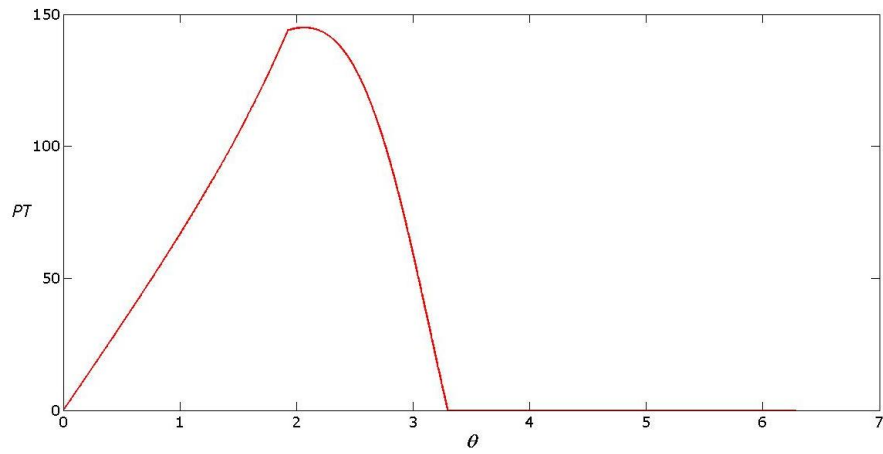


Figura 3. 25b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

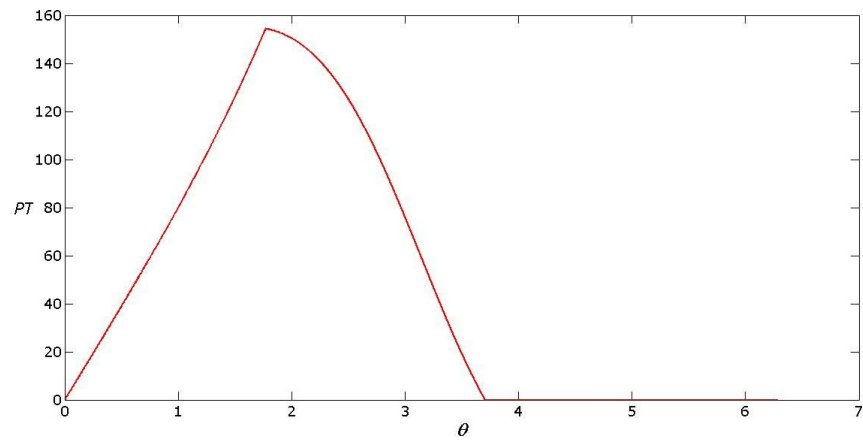


Figura 3. 26a Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

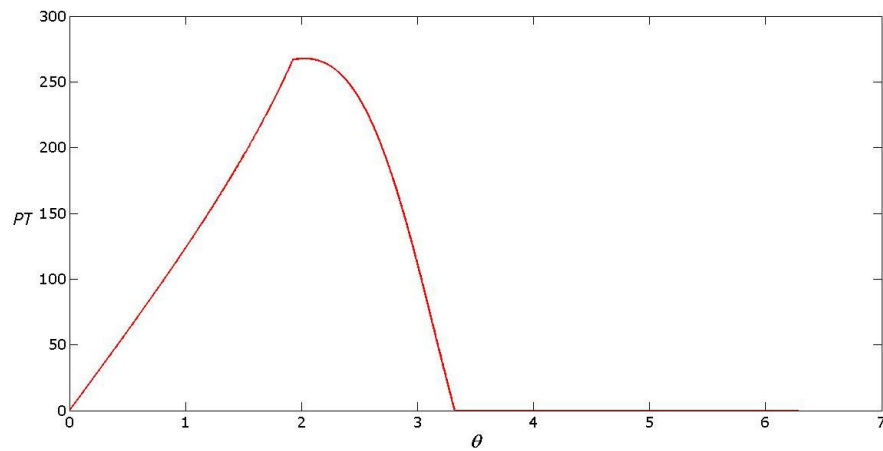


Figura 3. 26b Campo de Presión Total-Solución de Sommerfeld, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.





➤ (Segundo Caso) Utilizando las Condiciones de Frontera de Gumbel.

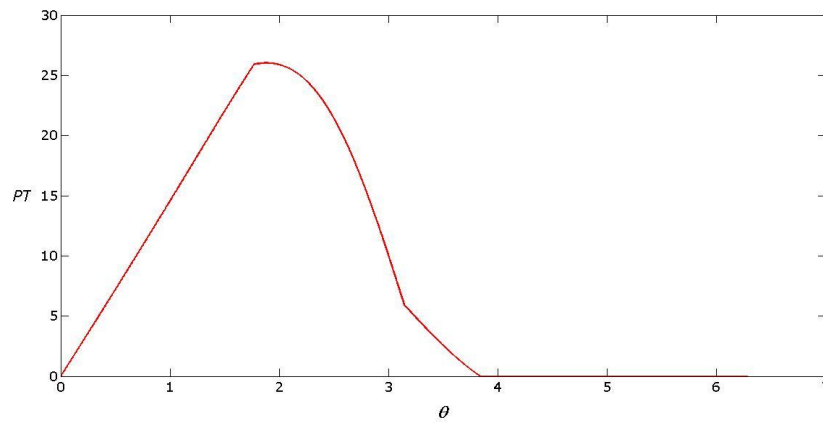


Figura 3. 27a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

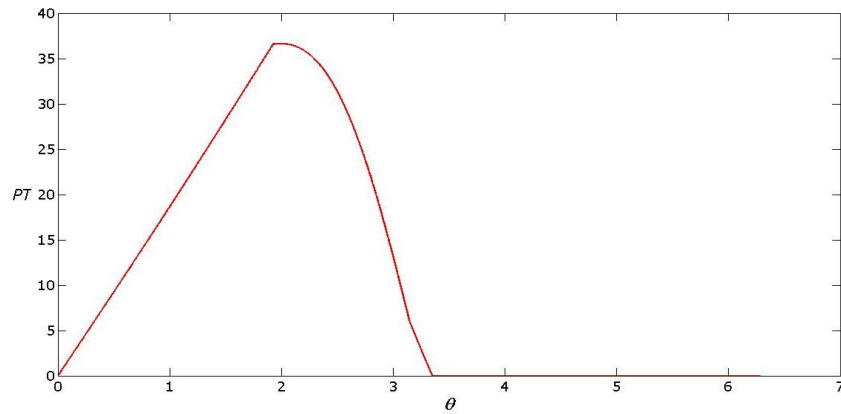


Figura 3. 27b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

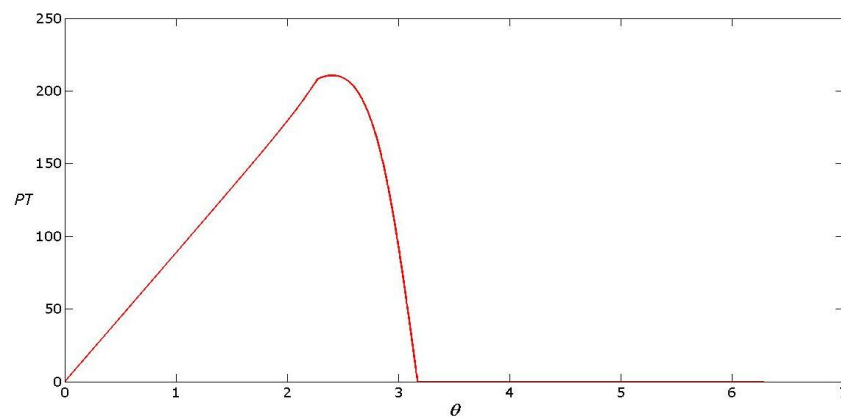


Figura 3. 27c Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.



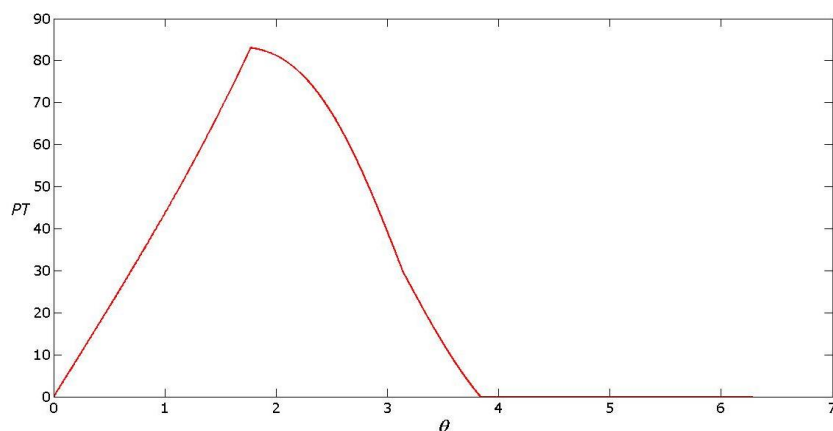


Figura 3. 28a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $q_{pres} = 25$.

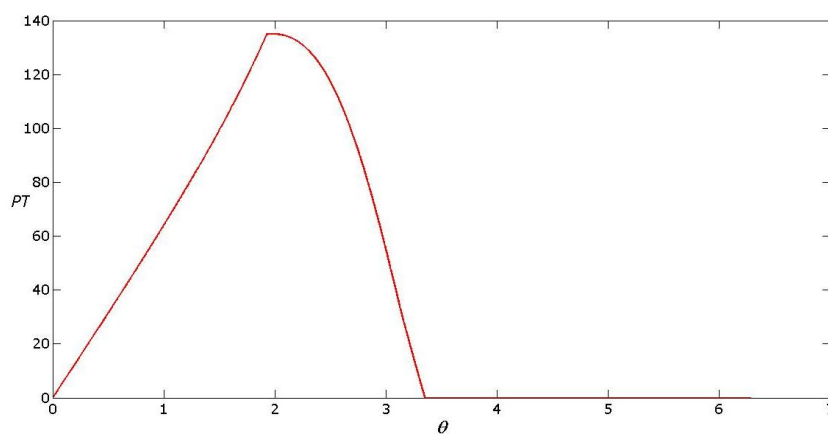


Figura 3. 28b Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $q_{pres} = 25$.

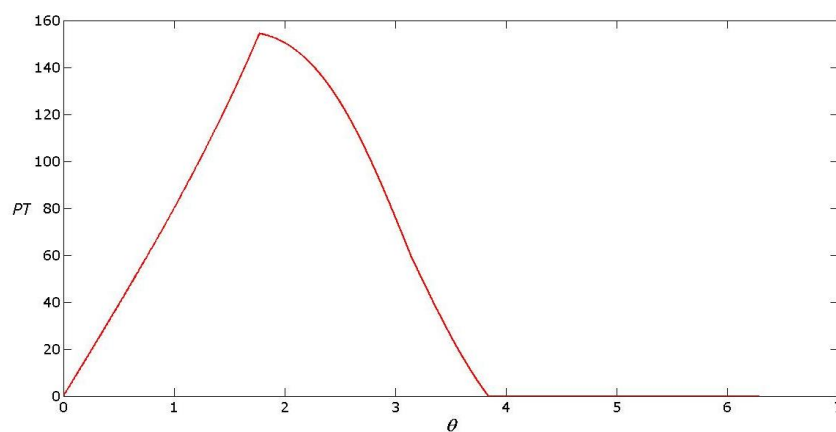


Figura 3. 29a Campo de Presión Total-Solución de Gumbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $q_{pres} = 50$.



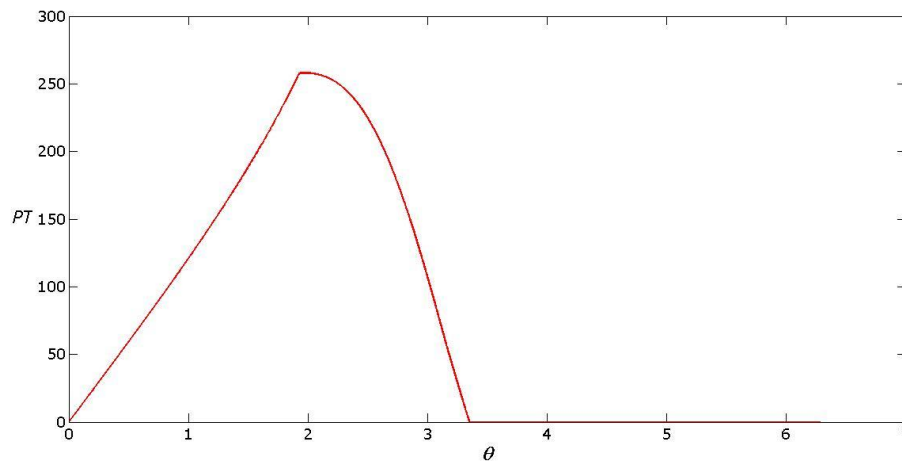


Figura 3. 29b Campo de Presión Total-Solución de Gümbel, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

➤ (Tercer Caso) Utilizando la Teoría de Warner.

Para $L/D = 2$.

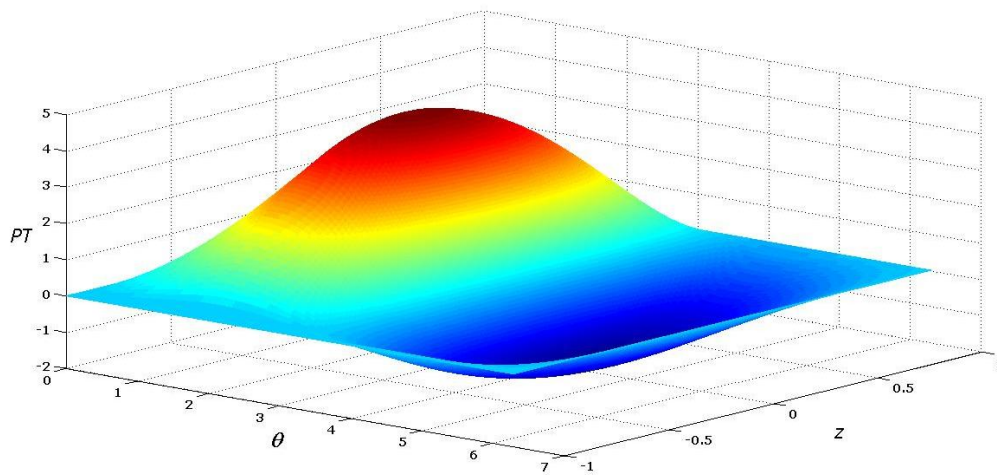


Figura 3. 30a Campo de Presión Total-Teoría Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.



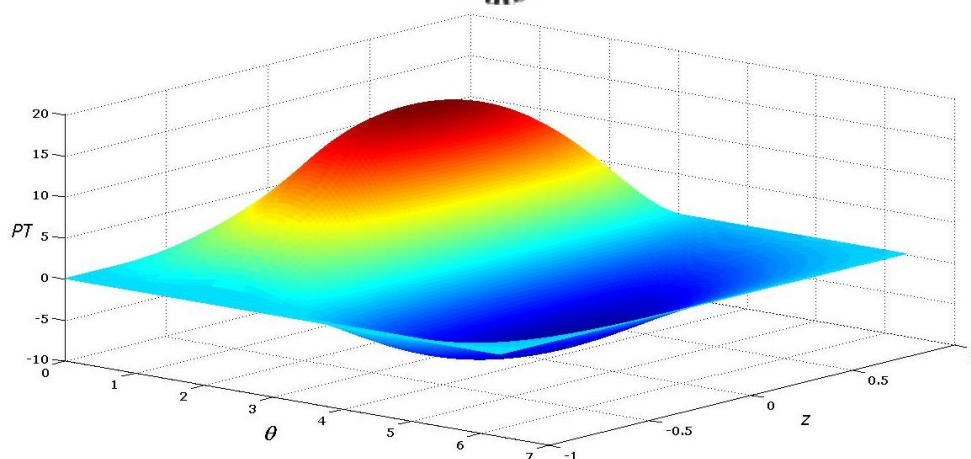


Figura 3. 30b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $q_{pres} = 5$.

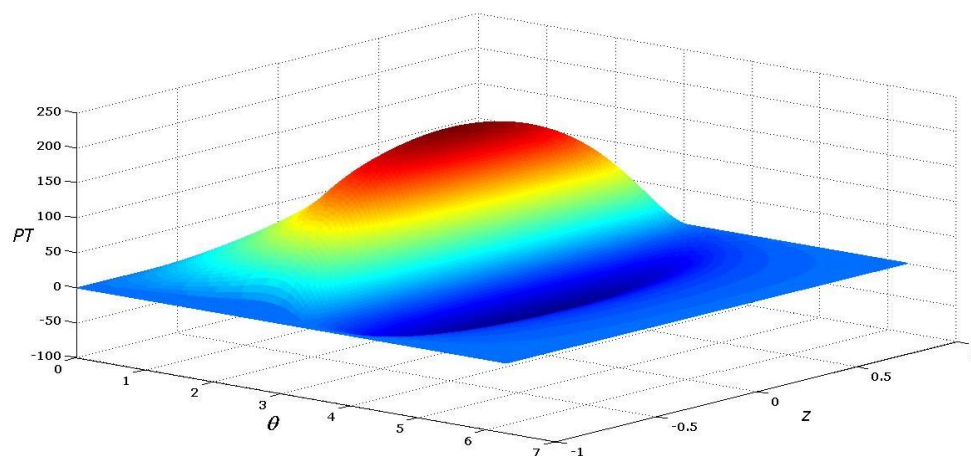


Figura 3. 30c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.8$, $q_{pres} = 5$.

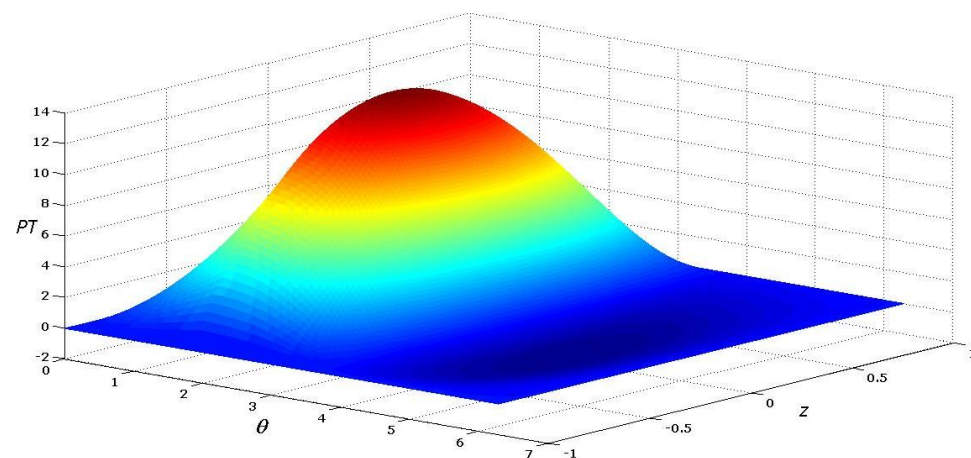


Figura 3. 31a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $q_{pres} = 25$.



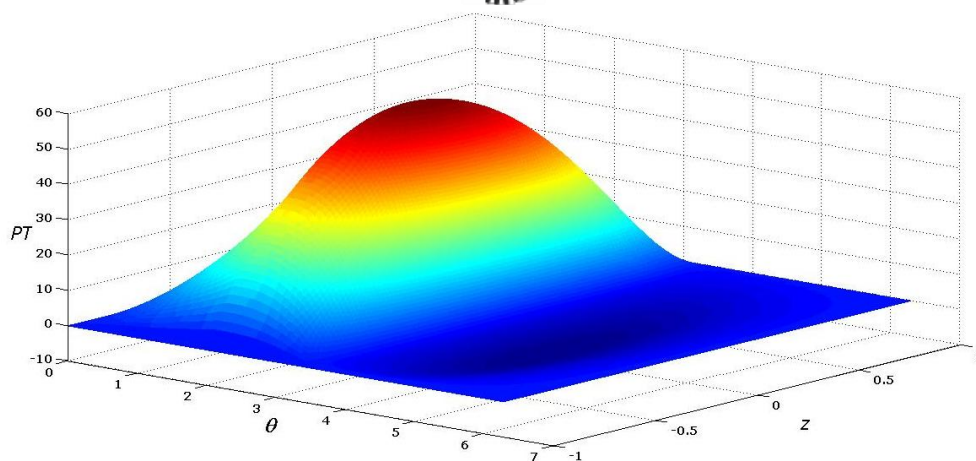


Figura 3. 31b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 25$.

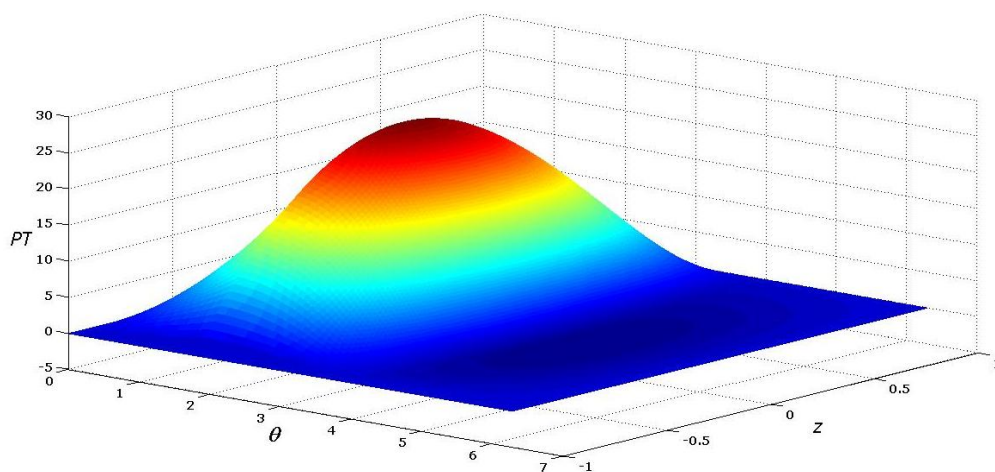


Figura 3. 32a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 50$.

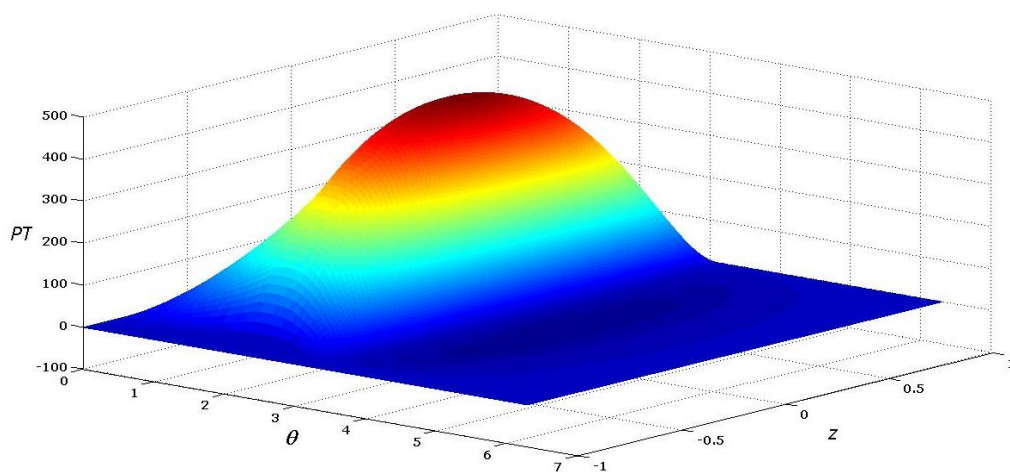


Figura 3. 32b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.7$, $\bar{q}_{pres} = 50$.





Para $L/D = 8$.

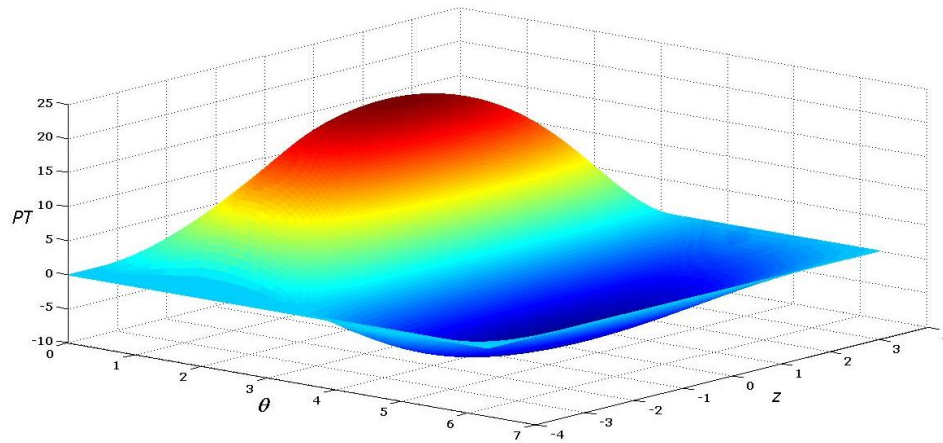


Figura 3. 33a Campo de Presión Total-Teoría Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

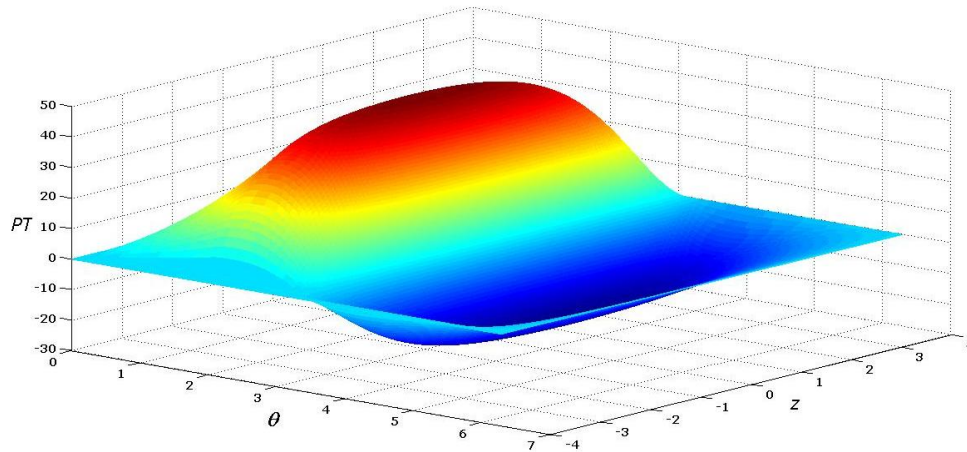


Figura 3. 33b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\bar{q}_{pres} = 5$.

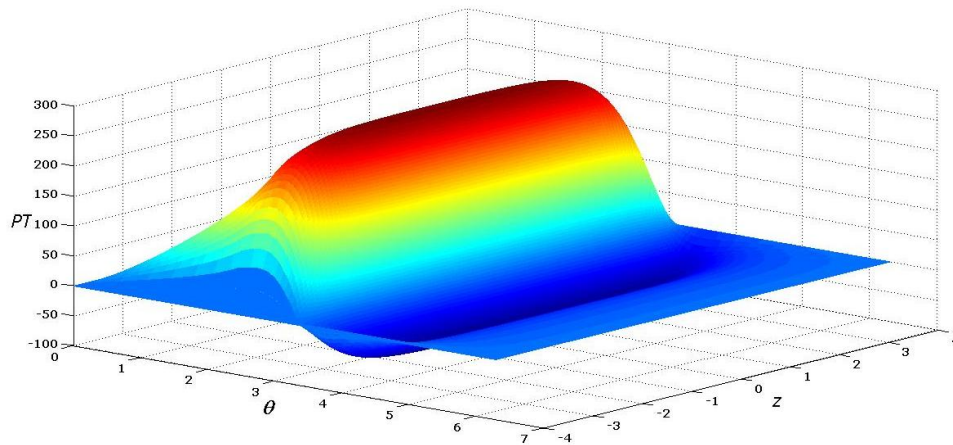


Figura 3. 33c Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.8$, $\bar{q}_{pres} = 5$.



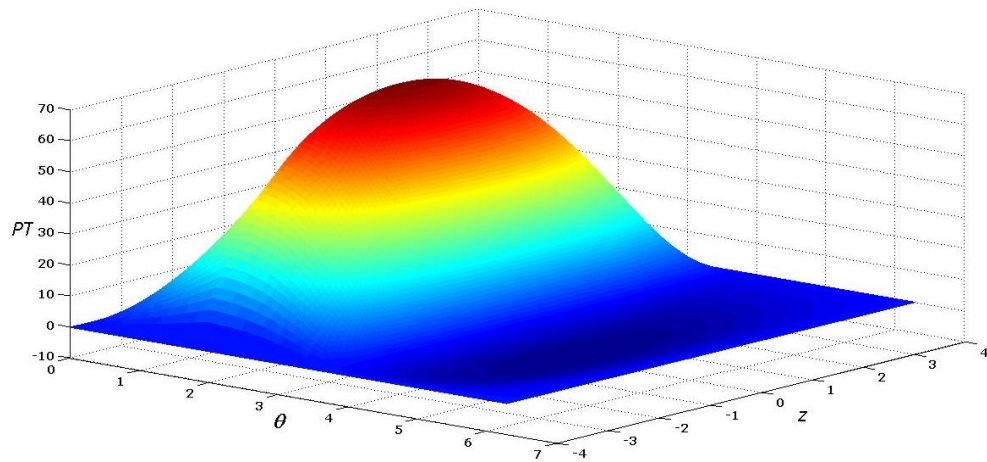


Figura 3. 34a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $q_{pres} = 25$.

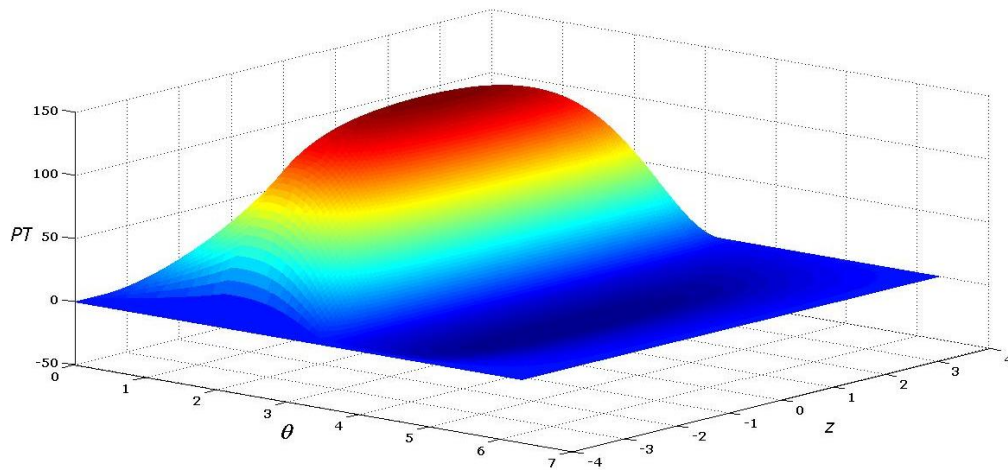


Figura 3. 34b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $q_{pres} = 25$.

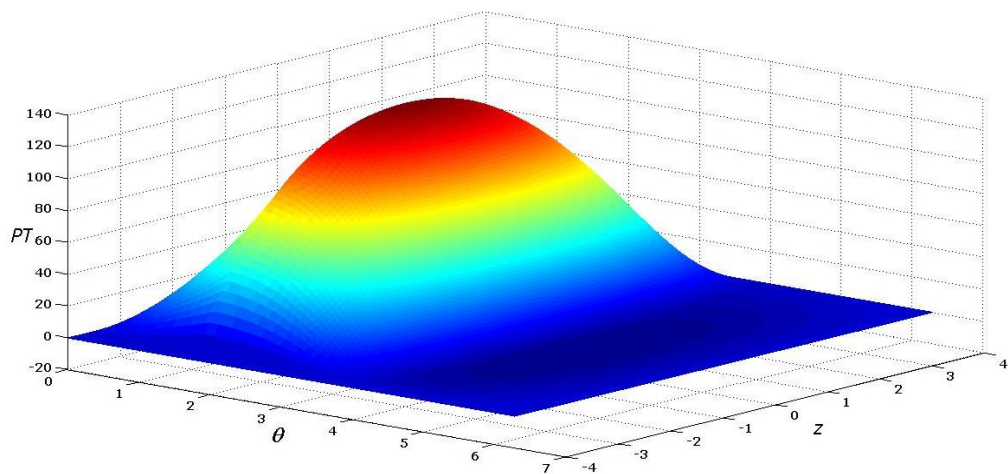


Figura 3. 35a Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.3$, $q_{pres} = 50$.



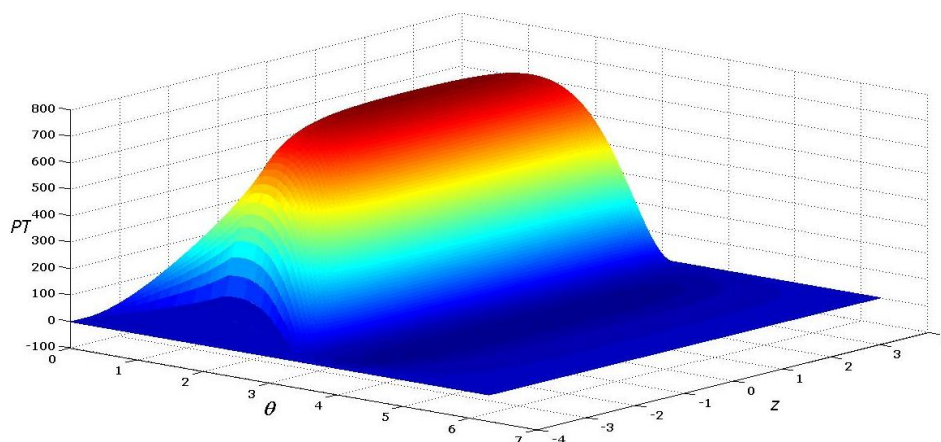
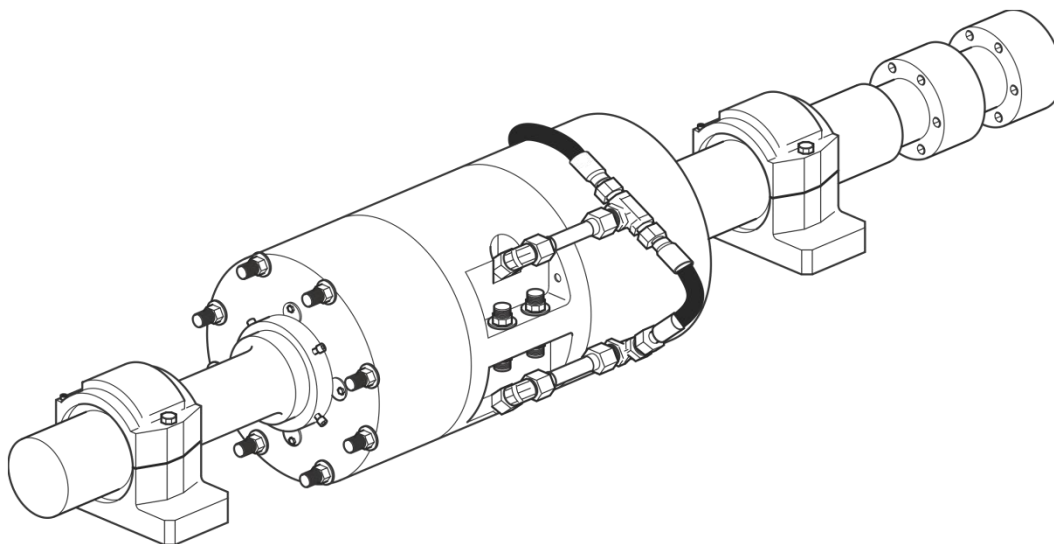


Figura 3. 35b Campo de Presión Total-Teoría de Warner, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $q_{pres} = 50$.

Los campos de presión presentados en las gráficas anteriores, son solo aproximaciones del campo real.

Lo anteriores campos de presión son realmente importante de tomar en cuenta porque con ellos se es capaz de poder observar el comportamiento de una chumacera larga, teniendo en cuenta los factores como la excentricidad y la presión externa suministrada, un caso especial a analizar es cuando la chumacera está totalmente inundada, sea por que los picos de presión tanto de la presión hidrodinámica como la hidrostática son muy similares (Figura 20a) o no (Figura 20c), también cuando un pico de presión en mucho mas predominante que otro (Figura 12c), o cuando solo un pico es predominante es observado en la grafica (Figura 33b).

Otro punto importante a resaltar en la comparación de utilizar la solución de Sommerfeld con respecto a la teoría de Warner, radica en que si la relación L/D es muy grande la presión se aproxime mas a la solución única de Sommerfeld, habiendo la mínima diferencia entre las dos consideraciones de solución debido a que la presión en z se convierte en constante.



CAPÍTULO CUATRO

CARACTERIZACIÓN DE CHUMACERAS HÍBRIDAS LARGAS CON PUERTOS LINEALES DE INYECCIÓN





4.1 Caracterización de una Chumacera Larga; “Número de Sommerfeld”.

En el capítulo anterior se determinó el campo de presión para diferentes casos y posición de inyección de una chumacera híbrida larga, pero ahora es importante conocer la cantidad de carga total que puede soportar. Esta carga se calcula usualmente a partir de las componentes de fuerza que genera el campo de presión en el lubricante; la componente radial que es la que actúa a lo largo de la línea de centro y la componente transversal que es perpendicular a la radial. Con las anteriores fuerzas nos permiten determinar ese ángulo que a su vez se forma entre la línea de centro y la de carga, (Figura 4.1) es importante observar que el eje no se desvía en la misma dirección en la que se aplica la carga; si no como se menciono se mueve a cierto ángulo de la línea de carga, este como se mencionó en el capítulo anterior se conoce como en *ángulo de actitud*, el cual ubica la posición del mínimo espesor de película de aceite a partir de la línea de carga [26].

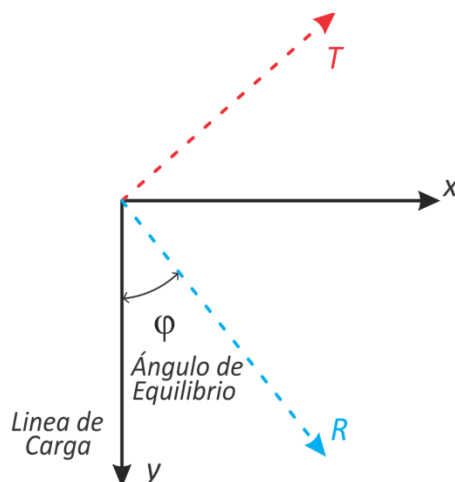


Figura 4. 1 Componentes en la Dirección radial y Transversal de la Fuerza en la Película de Aceite.

Para determinar la posición de equilibrio estático, las fuerzas que actúan son el peso del sistema y la resultante de las fuerzas de la película de aceite, así que teniendo:





$$\vec{W} + \vec{F}_{PT} = 0$$

(Ec. 4. 1)

En componentes radiales y transversales se tiene:

$$\vec{W} \cos \varphi + \vec{F}_R = 0$$

$$\vec{W} \sin \varphi + \vec{F}_T = 0$$

(Ec. 4. 2)

De (Ec. 4. 4) es posible obtener el ángulo de actitud.

$$\tan \varphi = \left| \frac{F_T}{F_R} \right|$$

(Ec. 4. 3)

Las fuerzas en direcciones radial y transversal, se encuentran integrando para longitud finita sobre la chumacera como se muestra a continuación:

$$F_R = L \int_0^{R\theta} p_{Total} \cos \theta dx$$

(Ec. 4. 4)

En la fórmula anterior se puede ver qué $L \rightarrow \infty$ y por lo tanto $F_R \rightarrow \infty$ lo que no permite utilizar las fórmulas convencionales.

$$F_T = L \int_0^{R\theta} p_{Total} \sin \theta dx$$

(Ec. 4. 5)

Introduciendo los términos que representan la fuerza de presión aplicada a una unidad de longitud, los cuales son constantes en el caso cuando $L \rightarrow \infty$ se tiene:





$$F_R = \frac{F_R}{L}, \quad F_T = \frac{F_T}{L}$$

(Ec. 4. 6)

Sustituyendo (Ec. 4. 5) en (Ec. 4. 4)(Ec. 4. 5).

$$\bar{F}_R = \int_0^{R\theta} p_{Total} \cos \theta dx$$

(Ec. 4. 7)

$$F_T = \int_0^{R\theta} p_{Total} \sin \theta dx$$

(Ec. 4. 8)

Donde: $x = R\theta$, $dx = Rd\theta$, $p_{Total} = \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \bar{p}_{Total}$

Sustituyendo los siguientes parámetros en (Ec. 4. 4) se tiene:

$$F_R = \int_0^{2\pi} \mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 \bar{p}_{Total} \cos \theta Rd\theta$$

(Ec. 4. 9)

Simplificando:

$$\bar{F}_R = \left[\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 R \right] \int_0^{2\pi} \bar{p}_{Total} \cos \theta d\theta$$

(Ec. 4. 10)

Sabiendo que $R = D/2$, se tiene:





$$F_R = \left[\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 D \right] \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_{Total} \cos \theta d\theta$$

(Ec. 4. 11)

Del mismo seguimiento anterior tomando (Ec. 4. 5) se tiene:

$$F_T = \left[\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 D \right] \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p_{Total} \sin \theta d\theta$$

(Ec. 4. 12)

De (Ec. 4. 11) y (Ec. 4. 12) es posible identificar las fuerzas radiales y transversales en forma adimensional, las que se pueden escribir:

$$f_R = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{p}_{Total} \cos \theta d\theta$$

(Ec. 4. 13)

$$f_T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{p}_{Total} \sin \theta d\theta$$

(Ec. 4. 14)

O bien (26).

$$f_R = \frac{F_R}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 D}$$

(Ec. 4. 15)

$$f_T = \frac{F_T}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 D}$$

(Ec. 4. 16)





Donde las ecuaciones (Ec. 4. 13) y (Ec. 4. 14) ayudan a determinar las componentes radiales y transversales de la película de lubricante, teniendo en cuenta que debe de conocerse con anterioridad el campo de presión adimensional, esta resolución fue determinado anteriormente a través de la ecuación de Reynolds. Conociendo las componentes de las fuerzas de la película de aceite, se puede conocer la capacidad de carga de una chumacera, pues será igual a la resultante de las fuerzas del lubricante:

$$f = \sqrt{f_R^2 + f_T^2} = \left[\frac{-W \cos \varphi}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 D} + \frac{W \sin \varphi}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 D} \right]^{\frac{1}{2}}$$

(Ec. 4. 17)

Teniendo en cuenta (Ec. 4. 2) y sustituyendo en (Ec. 4. 17) se tiene:

$$f = \sqrt{f_R^2 + f_T^2} = \left[\frac{-W \cos \varphi}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 D} + \frac{W \sin \varphi}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 D} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{W}{\mu N \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 D}$$

(Ec. 4. 18)

En la rotodinámica y análisis hidrodinámico existe un parámetro adimensional que tiene su relación con la capacidad de carga del sistema, este parámetro es conocido como el *Número de Sommerfeld* o *Carga Adimensional*, se utiliza para el diseño y caracterización de chumaceras y se dice que si el numero de Sommerfeld aumenta, la capacidad de soportar carga disminuye y viceversa, la ecuación a continuación es la única forma de definir el Número de Sommerfeld, (25)(26).

$$S = \frac{\mu NDL}{W} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2$$

(Ec. 4. 19)





Pero como se observa en (Ec. 4. 20) no hay una relación con una longitud, por eso se introduce la definición de peso lineal \bar{W} (el peso con respecto a la unidad de longitud) (Ec. 4. 20) en el caso de una L finita, se tiene:

$$\bar{W}_{\lim} = \frac{W}{L_{\lim}}$$

(Ec. 4. 20)

El peso lineal puede ser definido para las chumaceras infinitamente largas, llegando así al **Número de Sommerfeld debidamente modificado** que se define:

$$S_{\text{mod}} = \frac{\mu ND}{\bar{W}} \left(\frac{R}{C_r} \right)^2 = \frac{1}{f}$$

Como no existe ninguna dependencia de características con respecto a z se puede tomar cualquier unidad de longitud y establecer las condiciones de equilibrio para esta unidad.

4.2 Relación Número de Sommerfeld contra la excentricidad.

Las siguientes tablas y graficas constituyen el número de Sommerfeld en función de la excentricidad de equilibrio, el ángulo de actitud a una fuerza de presurización dada para una chumacera larga, la resolución del método utilizado para llegar hasta estos resultados fueron realizados a través de programación realizada en MATLAB, y los programas utilizados son descritos en el Apéndice C que van en correspondencia del tipo de solución de presurización interna descrita anteriormente.

4.2.1 Presurización en la Parte Central Superior de una Chumacera Híbrida Larga.

A continuación las tablas y gráficas que se presentan, contienen las relación de una excentricidad dada la solución correspondiente en un número de Sommerfeld, notar la diferenciación que se ve con y sin fuerza de presurización y el cambio que constituye el aumento de dicha fuerza de presurización, en este caso primero con una inyección en la parte superior.





4.2.1.1 (Primer Caso) Utilizando las Condiciones de Frontera de Sommerfeld.

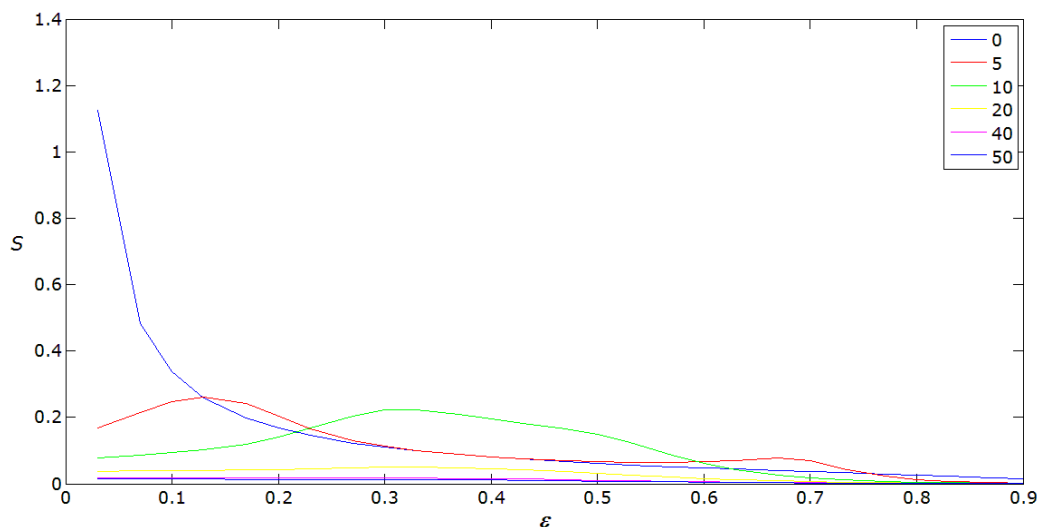


Figura 4. 2 Utilizando Solución de Sommerfeld- $\beta = \pi$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

4.2.1.2 (Segundo Caso) Utilizando las Condiciones de Frontera de Gümbel.

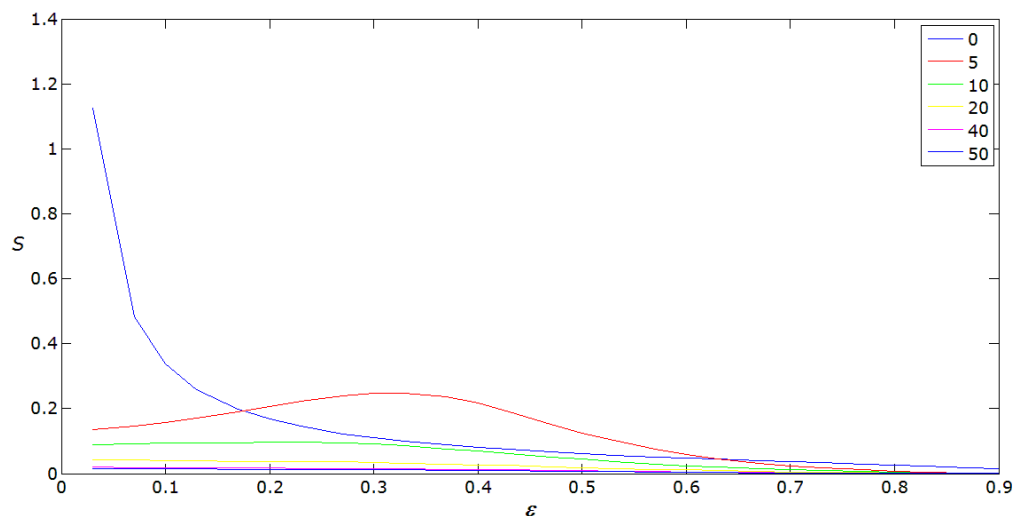


Figura 4. 3 Utilizando Solución de Gümbel- $\beta = \pi$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.





4.2.1.3 (Tercer Caso) Utilizando Teoría de Warner.

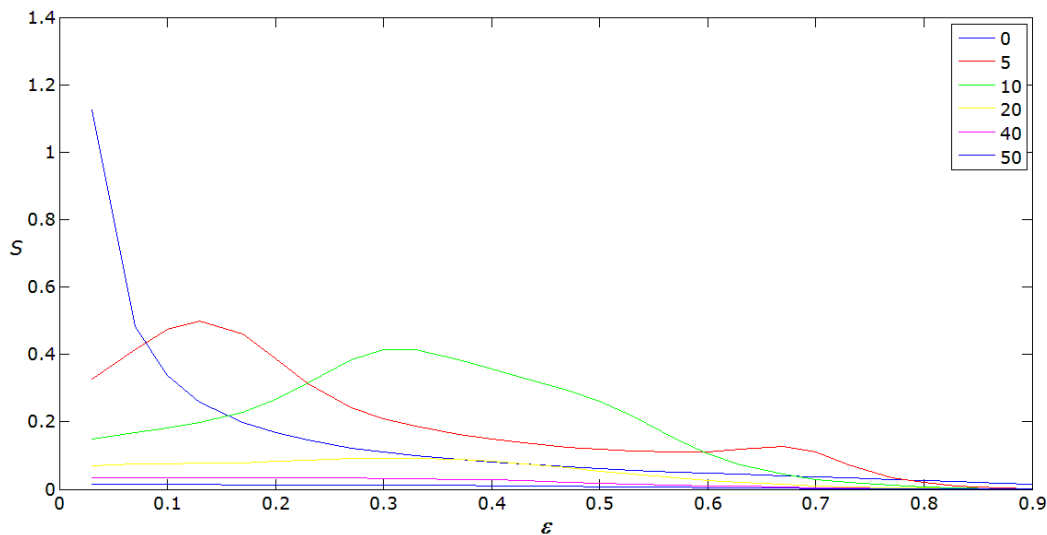


Figura 4. 4 Utilizando Teoría de Warner, $L/D = 2$ - $\beta = \pi$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

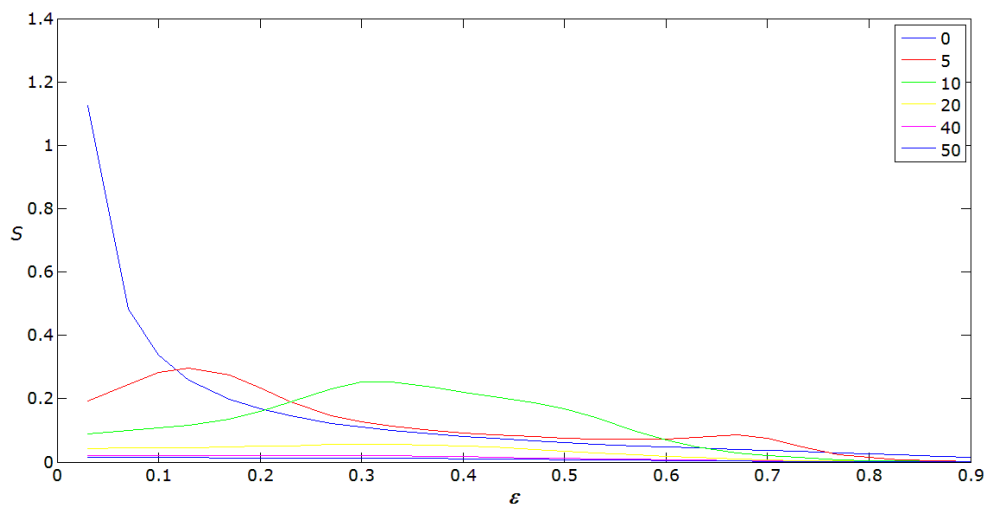


Figura 4. 5 Utilizando Teoría de Warner, $L/D = 8$ - $\beta = \pi$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.





4.2.2 Presurización en la Parte Central Inferior de una Chumacera Híbrida Larga.

A continuación las tablas y gráficas que se presentan, contienen las relación de una excentricidad dada la solución correspondiente en un número de Sommerfeld, notar la diferenciación que se ve con y sin fuerza de presurización y el cambio que constituye el aumento de dicha fuerza de presurización, en este caso primero con una inyección en la parte inferior.

4.2.2.1 (Primer Caso) Utilizando Condiciones de Frontera de Sommerfeld.

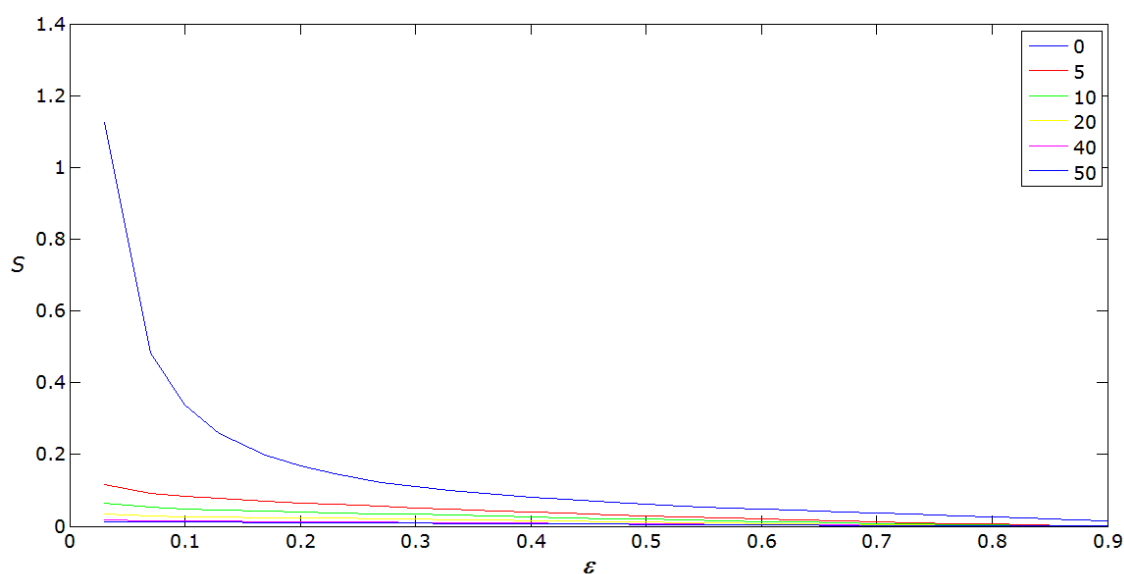


Figura 4. 6 Utilizando Solución de Sommerfeld- $\beta = 0$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.





4.2.2.2 (Segundo Caso) Utilizando Condiciones de Frontera de Gümbel.

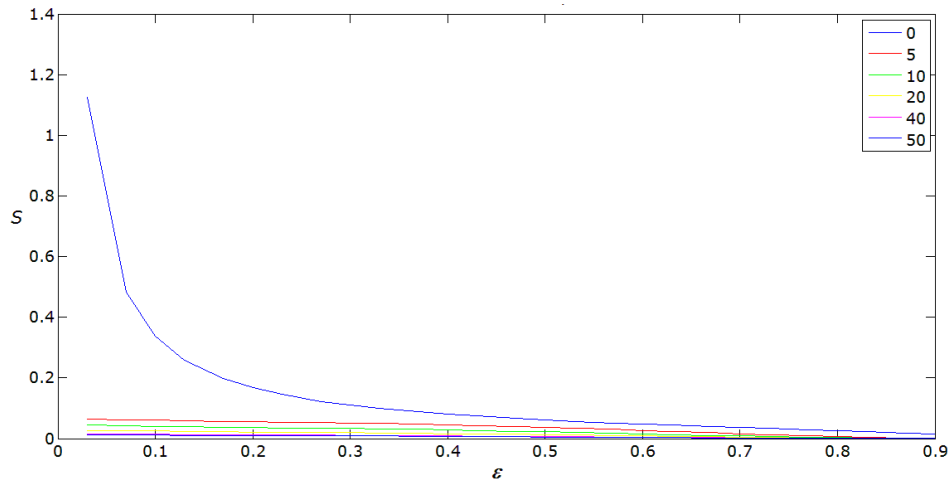


Figura 4. 7 Utilizando Solución de Gümbel- $\beta = 0$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.

4.2.2.3 (Tercer Caso) Utilizando Teoría de Warner

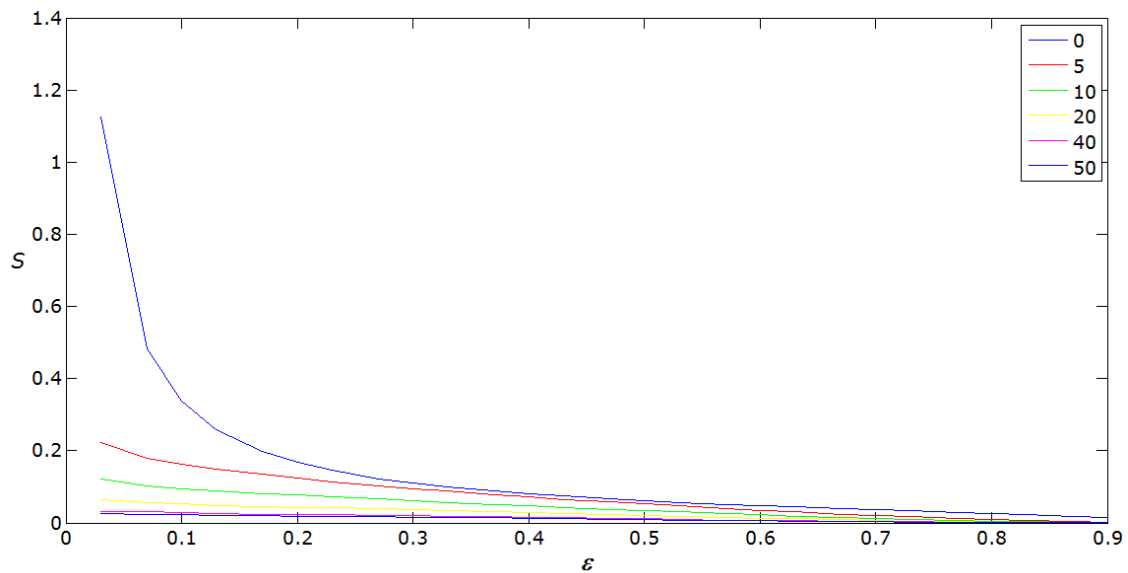


Figura 4. 8 Utilizando Teoría de Warner, $L/D = 2$ - $\beta = 0$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.



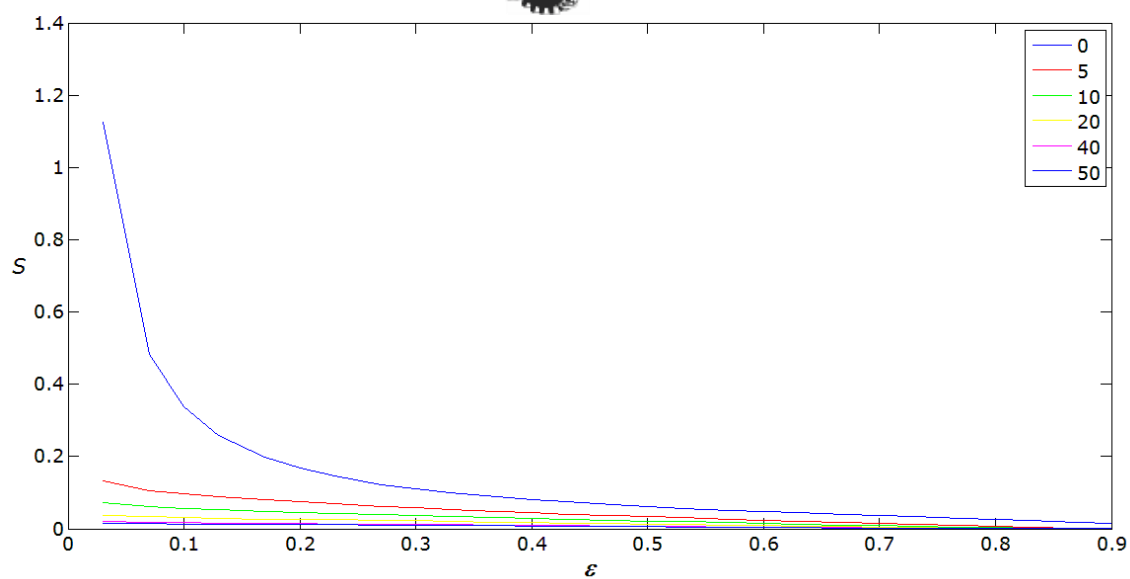


Figura 4. 9 Utilizando Teoría de Warner, $L/D = 8$ - $\beta = 0$, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa.





Excentricidad ε_{pres}	S					
	$f_{pres} = 0$	$f_{pres} = 5$	$f_{pres} = 10$	$f_{pres} = 20$	$f_{pres} = 40$	$f_{pres} = 50$
0.03	1.1255	0.1693	0.0771	0.0368	0.018	0.0143
0.07	0.482	0.215	0.0866	0.0384	0.0181	0.0143
0.1	0.337	0.2469	0.0945	0.0393	0.018	0.0142
0.13	0.2589	0.2605	0.1028	0.0399	0.0177	0.0139
0.17	0.1974	0.2419	0.1198	0.0413	0.0175	0.0136
0.2	0.1673	0.204	0.1405	0.0433	0.0176	0.0136
0.23	0.145	0.166	0.1668	0.0455	0.0178	0.0136
0.27	0.1229	0.1291	0.2041	0.0481	0.0178	0.0135
0.3	0.11	0.1126	0.2216	0.0493	0.0175	0.0132
0.33	0.0994	0.1007	0.2239	0.0496	0.0171	0.0128
0.37	0.0878	0.0889	0.2094	0.0481	0.0161	0.012
0.4	0.0805	0.082	0.1954	0.0455	0.0151	0.0113
0.43	0.0741	0.0763	0.1824	0.0418	0.0139	0.0104
0.47	0.0667	0.0704	0.1654	0.0357	0.0121	0.0091
0.5	0.0618	0.0671	0.1483	0.0308	0.0107	0.008
0.53	0.0573	0.0649	0.1245	0.0258	0.0093	0.007
0.57	0.0518	0.0642	0.087	0.0198	0.0075	0.0057
0.6	0.0479	0.0659	0.0624	0.0159	0.0062	0.0048
0.63	0.0443	0.0702	0.0437	0.0125	0.0051	0.0039
0.67	0.0397	0.0773	0.0268	0.0089	0.0038	0.0029
0.7	0.0364	0.0687	0.0185	0.0067	0.0029	0.0023
0.73	0.0331	0.0458	0.0126	0.0049	0.0022	0.0017
0.77	0.0288	0.0223	0.0074	0.0031	0.0015	0.0011
0.8	0.0255	0.0128	0.0048	0.0021	0.001	7.98E-04
0.83	0.0221	0.0073	0.003	0.0014	6.62E-04	5.26E-04
0.87	0.0175	0.0032	0.0014	6.82E-04	3.33E-04	2.65E-04
0.9	1.1255	0.0015	7.12E-04	3.46E-04	1.71E-04	1.36E-04

Tabla 1 Utilizando Solución de Sommerfeld- Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa, ver Figura 4.2.



Excentricidad ε_{pres}	S					
	$f_{pres} = 0$	$f_{pres} = 5$	$f_{pres} = 10$	$f_{pres} = 20$	$f_{pres} = 40$	$f_{pres} = 50$
0.03	1.1255	0.1355	0.0884	0.0415	0.0192	0.0151
0.07	0.482	0.1476	0.0927	0.0416	0.0189	0.0148
0.1	0.337	0.158	0.0946	0.0409	0.0184	0.0144
0.13	0.2589	0.1697	0.0948	0.0396	0.0177	0.0139
0.17	0.1974	0.19	0.0954	0.0382	0.017	0.0132
0.2	0.1673	0.207	0.0966	0.0377	0.0166	0.013
0.23	0.145	0.2228	0.0967	0.0371	0.0163	0.0127
0.27	0.1229	0.2398	0.0944	0.0357	0.0157	0.0123
0.3	0.11	0.2472	0.0905	0.0343	0.0151	0.0118
0.33	0.0994	0.2484	0.0852	0.0325	0.0144	0.0113
0.37	0.0878	0.2364	0.0763	0.0297	0.0133	0.0104
0.4	0.0805	0.2169	0.0689	0.0273	0.0123	0.0096
0.43	0.0741	0.1909	0.0612	0.0248	0.0113	0.0088
0.47	0.0667	0.1526	0.0511	0.0213	0.0098	0.0077
0.5	0.0618	0.1253	0.044	0.0188	0.0087	0.0069
0.53	0.0573	0.1013	0.0373	0.0163	0.0076	0.006
0.57	0.0518	0.0748	0.0294	0.0132	0.0063	0.005
0.6	0.0479	0.059	0.0242	0.0111	0.0053	0.0042
0.63	0.0443	0.0461	0.0196	0.0091	0.0044	0.0035
0.67	0.0397	0.0325	0.0145	0.0068	0.0033	0.0027
0.7	0.0364	0.0246	0.0113	0.0054	0.0026	0.0021
0.73	0.0331	0.0183	0.0085	0.0041	0.002	0.0016
0.77	0.0288	0.0118	0.0056	0.0028	0.0014	0.0011
0.8	0.0255	0.0081	0.0039	0.0021	9.62E-04	7.68E-04
0.83	0.0221	0.0053	0.0026	0.0014	6.40E-04	5.11E-04
0.87	0.0175	0.0027	0.0013	6.82E-04	3.26E-04	2.61E-04
0.9	1.1255	0.0014	6.77E-04	3.46E-04	1.69E-04	1.35E-04

Tabla 2 Utilizando Solución de Gumbel- Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa, ver Figura 4.3.





Excentricidad ε_{pres}	S					
	$f_{pres} = 0$	$f_{pres} = 5$	$f_{pres} = 10$	$f_{pres} = 20$	$f_{pres} = 40$	$f_{pres} = 50$
0.03	1.1255	0.3267	0.1488	0.0709	0.0346	0.0276
0.07	0.482	0.4144	0.1669	0.074	0.0349	0.0276
0.1	0.337	0.4749	0.1817	0.0757	0.0346	0.0272
0.13	0.2589	0.4997	0.1973	0.0766	0.034	0.0266
0.17	0.1974	0.4621	0.2288	0.0789	0.0334	0.0259
0.2	0.1673	0.388	0.2673	0.0824	0.0336	0.0259
0.23	0.145	0.3142	0.3159	0.0862	0.0336	0.0258
0.27	0.1229	0.2427	0.3836	0.0905	0.0334	0.0253
0.3	0.11	0.2103	0.4139	0.0921	0.0327	0.0247
0.33	0.0994	0.1868	0.4153	0.0921	0.0317	0.0238
0.37	0.0878	0.1633	0.3846	0.0884	0.0295	0.0221
0.4	0.0805	0.1494	0.3559	0.083	0.0275	0.0205
0.43	0.0741	0.1378	0.3293	0.0755	0.0251	0.0188
0.47	0.0667	0.1254	0.2947	0.0637	0.0216	0.0162
0.5	0.0618	0.1183	0.2616	0.0542	0.0189	0.0142
0.53	0.0573	0.1132	0.2172	0.0451	0.0162	0.0122
0.57	0.0518	0.1102	0.1495	0.0341	0.0128	0.0098
0.6	0.0479	0.1118	0.1059	0.027	0.0105	0.0081
0.63	0.0443	0.1176	0.0732	0.021	0.0085	0.0065
0.67	0.0397	0.127	0.0441	0.0146	0.0062	0.0048
0.7	0.0364	0.1113	0.0299	0.0108	0.0047	0.0037
0.73	0.0331	0.073	0.0201	0.0078	0.0035	0.0028
0.77	0.0288	0.0348	0.0116	0.0049	0.0023	0.0018
0.8	0.0255	0.0196	0.0074	0.0033	0.0015	0.0012
0.83	0.0221	0.0109	0.0045	0.0021	9.91E-04	7.86E-04
0.87	0.0175	4.60E-03	0.0021	9.89E-04	4.83E-04	3.85E-04
0.9	1.1255	2.10E-03	1.00E-03	4.89E-04	2.41E-04	1.92E-04

Tabla 3 Utilizando Teoría de Warner, $L/D=2$ - Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa, ver Figura 4.4.





Excentricidad ε_{pres}	S					
	$f_{pres} = 0$	$f_{pres} = 5$	$f_{pres} = 10$	$f_{pres} = 20$	$f_{pres} = 40$	$f_{pres} = 50$
0.03	1.1255	0.1935	0.0881	0.042	0.0205	0.0143
0.07	0.482	0.2457	0.099	0.0439	0.0207	0.0142
0.1	0.337	0.282	0.1079	0.0449	0.0206	0.014
0.13	0.2589	0.2974	0.1174	0.0456	0.0202	0.0137
0.17	0.1974	0.276	0.1366	0.0471	0.02	0.0134
0.2	0.1673	0.2325	0.1601	0.0494	0.0201	0.0133
0.23	0.145	0.189	0.19	0.0518	0.0202	0.0133
0.27	0.1229	0.1469	0.2321	0.0547	0.0202	0.0132
0.3	0.11	0.1279	0.2518	0.056	0.0199	0.0129
0.33	0.0994	0.1143	0.254	0.0563	0.0194	0.0125
0.37	0.0878	0.1007	0.2372	0.0545	0.0182	0.0117
0.4	0.0805	0.0928	0.221	0.0515	0.017	0.0109
0.43	0.0741	0.0862	0.206	0.0472	0.0157	0.0101
0.47	0.0667	0.0793	0.1863	0.0403	0.0136	0.0088
0.5	0.0618	0.0754	0.1668	0.0346	0.012	0.0078
0.53	0.0573	0.0728	0.1397	0.029	0.0104	0.0069
0.57	0.0518	0.0718	0.0974	0.0222	0.0084	0.0056
0.6	0.0479	0.0736	0.0697	0.0178	0.0069	0.0047
0.63	0.0443	0.0782	0.0487	0.014	0.0057	0.0038
0.67	0.0397	0.0858	0.0298	0.0098	0.0042	0.0029
0.7	0.0364	0.0761	0.0205	0.0074	0.0032	0.0023
0.73	0.0331	0.0506	0.014	0.0054	0.0024	0.0017
0.77	0.0288	0.0245	0.0082	0.0034	0.0016	0.0011
0.8	0.0255	0.0141	0.0053	0.0023	0.0011	7.95E-04
0.83	0.0221	0.0079	0.0033	0.0015	7.23E-04	5.24E-04
0.87	0.0175	0.0034	0.0016	7.39E-04	3.61E-04	2.65E-04
0.9	1.1255	0.0016	7.68E-04	3.74E-04	1.84E-04	1.36E-04

Tabla 4 Utilizando Teoría de Warner, $L/D=8$ - Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa, ver Figura 4.5.



Excentricidad ε_{pres}	S					
	$f_{pres} = 0$	$f_{pres} = 5$	$f_{pres} = 10$	$f_{pres} = 20$	$f_{pres} = 40$	$f_{pres} = 50$
0.03	1.1255	0.1156	0.063	0.0329	0.0168	0.0135
0.07	0.482	0.0925	0.0537	0.0297	0.0156	0.0126
0.1	0.337	0.0841	0.0489	0.0273	0.0147	0.0119
0.13	0.2589	0.0776	0.0458	0.0255	0.0137	0.0112
0.17	0.1974	0.0701	0.0426	0.024	0.0128	0.0104
0.2	0.1673	0.0651	0.0403	0.0229	0.0123	0.01
0.23	0.145	0.0605	0.0381	0.0219	0.0118	0.0096
0.27	0.1229	0.0548	0.0352	0.0205	0.0112	0.0091
0.3	0.11	0.0509	0.0331	0.0194	0.0106	0.0087
0.33	0.0994	0.0473	0.0309	0.0183	0.0101	0.0082
0.37	0.0878	0.0427	0.0281	0.0167	0.0092	0.0075
0.4	0.0805	0.0394	0.0261	0.0155	0.0086	0.007
0.43	0.0741	0.0363	0.024	0.0143	0.0079	0.0065
0.47	0.0667	0.0324	0.0214	0.0127	0.007	0.0057
0.5	0.0618	0.0295	0.0194	0.0115	0.0063	0.0052
0.53	0.0573	0.0268	0.0175	0.0103	0.0057	0.0046
0.57	0.0518	0.0233	0.015	0.0088	0.0048	0.0039
0.6	0.0479	0.0207	0.0132	0.0076	0.0041	0.0034
0.63	0.0443	0.0182	0.0114	0.0065	0.0035	0.0029
0.67	0.0397	0.0149	0.0092	0.0052	0.0028	0.0022
0.7	0.0364	0.0126	0.0076	0.0042	0.0023	0.0018
0.73	0.0331	0.0104	0.0062	0.0034	0.0018	0.0014
0.77	0.0288	0.0076	0.0044	0.0024	0.0012	9.96E-04
0.8	0.0255	0.0058	0.0032	0.0017	8.90E-04	7.17E-04
0.83	0.0221	0.0041	0.0022	0.0012	6.05E-04	4.86E-04
0.87	0.0175	0.0023	0.0012	6.21E-04	3.16E-04	2.53E-04
0.9	1.1255	0.0012	6.43E-04	3.28E-04	1.66E-04	1.33E-04

Tabla 5 Utilizando Solución de Sommerfeld- Puerto de Inyección Inferior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa, ver Figura 4.6.



Excentricidad ε_{pres}	S					
	$f_{pres} = 0$	$f_{pres} = 5$	$f_{pres} = 10$	$f_{pres} = 20$	$f_{pres} = 40$	$f_{pres} = 50$
0.03	1.1255	0.0634	0.0439	0.0269	0.0151	0.0124
0.07	0.482	0.0617	0.0423	0.0259	0.0145	0.0119
0.1	0.337	0.0602	0.041	0.0249	0.0139	0.0114
0.13	0.2589	0.0586	0.0396	0.0239	0.0133	0.0109
0.17	0.1974	0.0563	0.0376	0.0225	0.0125	0.0102
0.2	0.1673	0.0549	0.0364	0.0217	0.012	0.0098
0.23	0.145	0.0538	0.0355	0.0211	0.0116	0.0095
0.27	0.1229	0.0522	0.0341	0.0202	0.0111	0.009
0.3	0.11	0.0509	0.0331	0.0194	0.0106	0.0087
0.33	0.0994	0.0495	0.0319	0.0186	0.0101	0.0083
0.37	0.0878	0.0473	0.0301	0.0174	0.0094	0.0077
0.4	0.0805	0.0454	0.0285	0.0164	0.0088	0.0072
0.43	0.0741	0.0432	0.0269	0.0153	0.0082	0.0067
0.47	0.0667	0.0401	0.0245	0.0137	0.0073	0.0059
0.5	0.0618	0.0374	0.0225	0.0125	0.0066	0.0054
0.53	0.0573	0.0346	0.0205	0.0113	0.0059	0.0048
0.57	0.0518	0.0305	0.0177	0.0096	0.005	0.0041
0.6	0.0479	0.0273	0.0156	0.0084	0.0044	0.0035
0.63	0.0443	0.0241	0.0135	0.0072	0.0037	0.003
0.67	0.0397	0.0196	0.0108	0.0057	0.0029	0.0023
0.7	0.0364	0.0164	0.0088	0.0046	0.0023	0.0019
0.73	0.0331	0.0133	0.0071	0.0036	0.0018	0.0015
0.77	0.0288	0.0094	0.0049	0.0025	0.0013	0.001
0.8	0.0255	0.0069	0.0036	0.0018	9.13E-04	7.32E-04
0.83	0.0221	0.0048	0.0024	0.0012	6.17E-04	4.94E-04
0.87	0.0175	0.0025	0.0013	6.38E-04	3.20E-04	2.56E-04
0.9	1.1255	0.0013	6.66E-04	3.34E-04	1.67E-04	1.34E-04

Tabla 6 Utilizando Solución de Gumbel- Puerto de Inyección Inferior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa, ver Figura 4.7.



Excentricidad ε_{pres}	S					
	$f_{pres} = 0$	$f_{pres} = 5$	$f_{pres} = 10$	$f_{pres} = 20$	$f_{pres} = 40$	$f_{pres} = 50$
0.03	1.1255	0.223	0.1216	0.0636	0.0325	0.0261
0.07	0.482	0.1783	0.1036	0.0572	0.0301	0.0243
0.1	0.337	0.1618	0.094	0.0525	0.0282	0.0229
0.13	0.2589	0.1489	0.088	0.049	0.0263	0.0214
0.17	0.1974	0.134	0.0814	0.0457	0.0245	0.0199
0.2	0.1673	0.1239	0.0767	0.0436	0.0235	0.0191
0.23	0.145	0.1146	0.0722	0.0415	0.0224	0.0183
0.27	0.1229	0.1031	0.0662	0.0385	0.021	0.0171
0.3	0.11	0.0951	0.0617	0.0363	0.0199	0.0162
0.33	0.0994	0.0877	0.0574	0.0339	0.0186	0.0152
0.37	0.0878	0.0784	0.0517	0.0307	0.017	0.0139
0.4	0.0805	0.0718	0.0475	0.0283	0.0156	0.0128
0.43	0.0741	0.0656	0.0434	0.0259	0.0143	0.0117
0.47	0.0667	0.0577	0.0381	0.0227	0.0125	0.0102
0.5	0.0618	0.0521	0.0342	0.0203	0.0112	0.0091
0.53	0.0573	0.0468	0.0305	0.018	0.0099	0.0081
0.57	0.0518	0.04	0.0257	0.015	0.0082	0.0067
0.6	0.0479	0.0351	0.0223	0.0129	0.007	0.0057
0.63	0.0443	0.0304	0.0191	0.011	0.0059	0.0048
0.67	0.0397	0.0245	0.0151	0.0085	0.0046	0.0037
0.7	0.0364	0.0204	0.0123	0.0069	0.0036	0.003
0.73	0.0331	0.0166	0.0098	0.0054	0.0028	0.0023
0.77	0.0288	0.0119	0.0068	0.0037	0.0019	0.0016
0.8	0.0255	0.0088	0.0049	0.0026	0.0014	0.0011
0.83	0.0221	0.0061	0.0034	0.0018	9.05E-04	7.28E-04
0.87	0.0175	0.0033	0.0017	9.01E-04	4.58E-04	3.68E-04
0.9	1.1255	0.0017	9.07E-04	4.63E-04	2.34E-04	1.88E-04

Tabla 7 Utilizando Teoría de Warner, $L/D=2$ - Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa, ver Figura 4.8.





Excentricidad ε_{pres}	S					
	$f_{pres} = 0$	$f_{pres} = 5$	$f_{pres} = 10$	$f_{pres} = 20$	$f_{pres} = 40$	$f_{pres} = 50$
0.03	1.1255	0.1321	0.072	0.0376	0.0192	0.0155
0.07	0.482	0.1057	0.0614	0.0339	0.0178	0.0144
0.1	0.337	0.0961	0.0558	0.0312	0.0167	0.0136
0.13	0.2589	0.0886	0.0523	0.0291	0.0156	0.0127
0.17	0.1974	0.08	0.0486	0.0273	0.0146	0.0119
0.2	0.1673	0.0742	0.046	0.0261	0.0141	0.0114
0.23	0.145	0.0689	0.0434	0.025	0.0135	0.011
0.27	0.1229	0.0624	0.04	0.0233	0.0127	0.0104
0.3	0.11	0.0579	0.0376	0.0221	0.0121	0.0098
0.33	0.0994	0.0536	0.0351	0.0207	0.0114	0.0093
0.37	0.0878	0.0483	0.0319	0.0189	0.0105	0.0085
0.4	0.0805	0.0446	0.0295	0.0176	0.0097	0.0079
0.43	0.0741	0.041	0.0271	0.0162	0.0089	0.0073
0.47	0.0667	0.0365	0.0241	0.0143	0.0079	0.0065
0.5	0.0618	0.0332	0.0218	0.0129	0.0071	0.0058
0.53	0.0573	0.0301	0.0196	0.0116	0.0064	0.0052
0.57	0.0518	0.026	0.0168	0.0098	0.0054	0.0044
0.6	0.0479	0.0231	0.0147	0.0085	0.0046	0.0038
0.63	0.0443	0.0202	0.0127	0.0073	0.0039	0.0032
0.67	0.0397	0.0166	0.0102	0.0058	0.0031	0.0025
0.7	0.0364	0.014	0.0084	0.0047	0.0025	0.002
0.73	0.0331	0.0115	0.0068	0.0037	0.002	0.0016
0.77	0.0288	0.0084	0.0048	0.0026	0.0014	0.0011
0.8	0.0255	0.0063	0.0035	0.0019	9.75E-04	7.85E-04
0.83	0.0221	0.0045	0.0024	0.0013	6.60E-04	5.31E-04
0.87	0.0175	0.0025	0.0013	6.74E-04	3.42E-04	2.75E-04
0.9	1.1255	0.0013	6.93E-04	3.54E-04	1.79E-04	1.43E-04

Tabla 8 Utilizando Teoría de Warner, $L/D=8$ - Puerto de Inyección Superior, Número de Sommerfeld en función de excentricidad y fuerza de presurización externa, ver Figura 4.9.



CONCLUSIONES

- 1.- Se propone un **modelo de presurización con línea de inyección** para la chumacera infinitamente larga.
- 2.- La investigación muestra que la relación del Número de Sommerfeld y excentricidad puede conducir a una función **no monótona**, por consecuencia a un mismo Número de Sommerfeld puede corresponder **3 posiciones de equilibrio**.
- 3.- Se propone una **modificación** en la definición Número de Sommerfeld para la chumacera infinitamente larga.
- 4.- Para excluir la solución de la (Ec. 3.33) para la determinación del campo de presión se propone utilizar el método de Euler de **solución numérica** de esta ecuación.





TRABAJOS FUTUROS

- 1.- Realizar el **análisis experimental**, para poder validar el modelo propuesto.
- 2.- Determinación de campos de presión y caracterización de una chumacera híbrida larga con puertos lineales de presurización en forma **horizontal**.
- 3.- Determinar los **coeficientes rotodinámicos** para una chumacera larga.





Referencias

- [1]. **Rankine, W.** 1869, *Centrifugal whirling of shaft.*, The Engineer, p. Apr. 9.
- [2]. **Foppl, A.** 1895, *Das problem der laval'shen turbinewelle.* Civilingenieur, pp. 332-342.
- [3]. **Belluzzo, G.** 1905, *Le turbine a vopore ed a gas.* Milan, Italia : s.n., Hoepli.
- [4]. **Stodola, A.** 1927, *Steam and Gas Turbines.* New York : Mc Graw-Hill.
- [5]. **Jeffcott, H.** 1919, *The lateral vibration of loaded shaft in the neighborhood of a wirling speed-the effect of want of balance.* Phil. Mag., Vol. 37 no. 6, pp. 304-314.
- [6]. **Bently, Donald E.** 1999, www.bpb.com. [Online] , [Cited: Febrero 28, 2011.]
- [7]. **Bently, Donald and Petchenev, Alex.** 2000, *Dinamic stiffness and the advantage of externally pressurized fluid-film bearing.* Orbit, pp. 18-24.
- [8]. **Torres Cedillo, Sergio Guillermo.** 2010, *Experimentación en laboratorio y análisis del comportamiento del sistema chumacera hibrida presurizada con control activo.* s.l. : Tesis de Maestria SEPI-ESIME, IPN,.
- [9]. **Ehrich, F.** 1992, *Handbook of rotordynamics.* s.l. : Mc Graw-Hill.
- [10]. **Tower, B.** 1884, *First report on friction experiments.* Proc. Inst. Mech. Engrs., pp. 29-35.
- [11]. **Tower, B.** 1885, *Second report of friction experiments.* Proc. Ints. Mech. Engrs., pp. 58-70.
- [12]. **Reynolds, O.** 1886, *On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil.* Londres : s.n., Philos. Trans . R. Soc., Vol. 177 Parte 1, pp. 157-234.
- [13]. **Ocvirk, F.** 1952, *Short-bearing approximation for full journal bearing.* E.U.A. : s.n., National Advisory Committee forAeronautics (NACA).
- [14]. **Harrison, W.** 1919, *The hidrodynamical theory of lubrication of a cylindrcial bearing under variable load and of a pivot bearing.* Abril 24, Transactions of the Cambridge Philosophical Society , Vol. 22, pp. 373-388.





- [15]. **Fedor, J.** 1961, *Journal bearing with arbitrary position of source*. ASME Trans, journal of basic engineering.
- [16]. **Fedor, J.** 1960, *A Sommerfeld solution for finite bearing with circumferential grooves*. ASME trans, Journal of basic engineering .
- [17]. **Tian, Y. and Bonis, Marc.** 1995, *Analytical approach for the determination of the dynamic coefficients of hybrid bearing*. ELSEVIER, pp. 66-76.
- [18]. **Santos, I. and Watanabe, F.** 2003, *Feasibility of influencing the dynamic fluid film coefficients of multirecess journal by means of active hybrid lubrication*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.
- [19]. **Kucherenko, V. V. and Gomez Mancilla, J. C.** 2000, *Bifurcation of an exactlt solvable model of rotordynamic .*, DOI: 10.1142/S0218127400001730, Vol. 10, pp. 2689-2699.
- [20]. **Antonio Garcia, A., Nossov, V. y Gomez Mancilla, J. C.** 2005, *Cálculo de los coeficientes rotodinamicos de chumaceras hidrodinamicas por medio de los gradientes del campo de presion*. México : s.n., 4to Congreso internacional de ingenieria electromecanica y de sistemas seccion de estudios de posgrado e investigacion.
- [21]. **Gomez Mancilla, J. C. and Nossov, V.** 2002, *Perturbed pressure field solution for misaligned short journal bearing*. Honolulu, Hawaii : s.n., 9th international Sumposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery.
- [22]. **Ordoñez Pantoja, A.** 2003, *Diseño preliminar y analisis de chumaceras innovadora utilizando inyección presurizada del lubricante*. México : Tesis de Maestria SEPI-ESIME, IPN.
- [23]. **Santana Mora, R. C. Gomez Mancilla, J. C. y Nossov, V.** 2004, *Análisis del umbral de inestabilidad y controlabilidad de un sistema roto-chumacera hibrida con soporte flexibles*. México : s.n., 8vo Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas.
- [24]. **Ramírez Vargas, Ignacio.** 2007, *Teoría de Chumaceras Presurizadas con Puertos Puntuales: Caso de la Chumacera Corta..* México : Tesis de Maestria SEPI-ESIME, IPN.
- [25]. **Hamrock, Bernard J.** Fundamentals of fluid film lubrication. Columbus, Ohio : Mac Graw-Hill, 1994.
- [26]. **Szeri, Andres Z.** Fluid film lubrication: Theory and design. Cambridge, Inglaterra : Cambridge University Press, 2005.
- [27]. **Ocvirk, F. and Dubois, G.** 1953, *Analitycal derivation and experimantal evaluation of short*





bearing approxiamtion for full journal bearing. NACA, Report 1157.

- [28]. **Nosov, V., Ramírez Vargas, I. and Gómez Mancilla, J. C** 2004, *Modelos matemáticos de presurización de lubricante en el sistema rotatorios usando la funcion delta de Dirac.* México : s.n.,. III Congreso Internacional de la Ingenieria Fisica UAM Azcapotzalco .
- [29]. **Nosov, V., Ramírez Vargas, I. and Gómez Mancilla, J. C.** 2005, *Uso de funciones generalizadas espaciales en modelos rotodinámicos presurizados.* México : s.n., 1er Congreso Internacional de Matemáticas Aplicadas .
- [30]. **Nosov, V., Antonio Garcia, A., I. and Gómez Mancilla, J. C.** 2002, *Comparación de coeficientes rotodinámicos de chumaceras hidrodinámicas usando la teoría de chumaceras largas, cortas y Warner.* México : s.n., 3er Congreso internacional de Ingenieria Electronica y de Sistemas. pp. 106-111.
- [31]. **Bolotin, V.V.** 1964, *The dynamic stability of elastic systems.* Holden-day, Inc; Amsterdam.
- [32]. **Rivera-Arreola, D.** 2011, *Teoría de chumaceras con puertos horizontales.* México : Tesis de Maestria SEPI-ESIME, IPN.
- [33]. **Montiel-Varela G.** 2011, *Validación Numérica del Amortiguamiento Crítico para el Tercer Modo de Vibración.* México : Tesis de Maestria SEPI-ESIME, IPN.
- [34]. **Hernández-Salgado J.C.** 2011, *Validación Experimental del Amortiguamiento Crítico para el Tercer Modo de Vibración.* México : Tesis de Maestria SEPI-ESIME, IPN.
- [35]. **Pacheco-Lara J.L.,** 2011 *Diseño de Detalle, Instrumentación y Experimentación de Sistema Chumacera Híbrida.* México : Tesis de Maestria SEPI-ESIME, IPN.



Apéndice A

NÚMERO DE REYNOLDS

Se puede decir que en cada problema de fluidos la importancia relacionada entre las fuerzas de inercia a la viscosidad y teniendo en cuenta la densidad, esto puede ser obtenido de los valores proporcionados por el llamado numero de Reynolds.

En una chumacera, la velocidad del fluido u es mucho mayor a la velocidad v que atraviesa la película de fluido, por lo tanto se puede decir que, $v \ll u$; entonces se tiene $v(\partial v / \partial x) < u(\partial u / \partial x)$, (24).

Además se puede considerar que el ancho de la chumacera es más o menos del mismo orden que su longitud, por lo tanto $(\partial u / \partial x) \approx u_0 / R$ y $(\partial u / \partial z) \approx u_0 / R$. Si w representa la velocidad del fluido en la dirección z , entonces la velocidad del fluido en esta dirección deberá ser una fracción de la velocidad u , en la dirección del movimiento de este. Por lo tanto $u(\partial u / \partial x) > w(\partial u / \partial z)$ y de aquí que el término $u(\partial u / \partial x)$ donde se considera como el expresión de inercia dominante ante los otros esto para efectos de comparación.

Las fuerzas viscosas contienen los términos $\mu(\partial^2 u / \partial x^2)$, $\mu(\partial^2 u / \partial y^2)$, $\mu(\partial^2 u / \partial z^2)$; los cuales necesitan compararse evaluando la siguiente relación.

$$\frac{\mu(\partial^2 u / \partial x^2)}{\mu(\partial^2 u / \partial y^2)} = \frac{(\partial / \partial x)(\partial u / \partial x)}{(\partial / \partial y)(\partial u / \partial y)} \approx \frac{(1/R)(u/R)}{(1/C_r)(u/C_r)} = \left(\frac{C_r}{R}\right)^2 \ll 1$$

A.A 1. 1

Entonces se tiene que: $\mu(\partial^2 u / \partial x^2) \ll \mu(\partial^2 u / \partial y^2)$ se puede decir y observar que las fuerzas viscosas con gradientes a través de la película del fluido son términos dominantes, en la siguiente ecuación se compara las fuerzas viscosas con la de





inercia.

$$\frac{\rho u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)} \approx \frac{\rho u_0 \left(\frac{u_0}{R} \right)}{\mu \left(\frac{u_0}{C_r^2} \right)} = \frac{\rho u_0}{\mu} \left(\frac{C_r^2}{R} \right) = \frac{\rho u_0 R}{\mu} \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 = \text{Re} \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 = \text{Re}_*$$

A.A 1. 2

Donde Re_* es el número de Reynolds Modificado. Donde notar que el factor da la anterior ecuación $\left(\frac{C_r}{R} \right)^2$ es de un orden muy bajo (10^{-6}), entonces por lo tanto el

número de Reynolds que esta dado por $\text{Re} = \frac{\rho u_0 R}{\mu}$ deberá ser muy alto con respecto al factor anterior, por eso se dice que las fuerzas viscosas tenderán a dominar a las inerciales. Para que quede claro y teniendo en cuenta valores clásicos y reales de una chumacera se tiene que:

$$R = 0.02 \text{ m}, \quad \frac{C_r}{R} = 10^{-3}, \quad u_0 = 6.2 \text{ m/s}, \quad \rho = 870 \text{ Kg/m}^3, \quad \mu = 0.25 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Sustituyendo estos valores en (A.A 1. 2) se tiene que:

$$\text{Re}_* = \frac{\rho u_0 R}{\mu} \left(\frac{C_r}{R} \right)^2 = 0.0004$$

Viendo lo anterior se tiene entonces que las fuerzas inerciales son despreciables con respecto a las fuerzas viscosas, este como se comento es un caso típico en chumaceras hidrodinámicas aunque es posible que se presente un fenómeno de turbulencia cuando este número excede el rango de 1000 a 2000, siendo este el caso los términos de inercia totalmente predominantes.





Apéndice B

PROGRAMAS (Solución de campos de presión para una chumacera híbrida larga)

- Programa realizado en MATLAB, para obtener el campo de presión total de una chumacera híbrida larga utilizando la solución de Sommerfeld.

La forma de ejecutar es muy sencilla en cualquier versión de MATLAB (probado desde la versión 7) se copia el programa, se pega y se da aceptar; las únicas variables que se debe de introducir son la excentricidad (ep), la fuerza de presión (q) y el ángulo al que quiera inyectarse siendo las opciones para este trabajo – $\beta = \pi$, presurización superior, $\beta = 0$, presurización inferior -.

```
clear all
clc
close all
ep=0.3;      %% Epsilon adimensional
q=5;         %% Fuerza de Presión Adimensional
att=atan((pi*sqrt(1-(ep^2)))/(2*ep));  %% Determinación del ángulo de
attitud para una chumacera larga
beta=0;      %% Angulo beta (beta=pi- presurización superior; beta=0; presurización inferior)
ang=pi+beta-att  %% Angulo de total
final=ang;
%% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (inicio) -----

ii=0;
x=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:final;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(0.001*(1/(1+ep*cos(ii))^3));
end
iii=final;
for iii=final:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(-0.001*(1/(1+ep*cos(iii))^3));
end
x1=q*x;
u=size(x1,2);
const=x1(u)/(2*pi);

% -CONSTANTE DE INTEGRACIÓN-
y=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    y(i)=(const)*ii;
end
P=x1-y;      %%Presión externa
neg1=find(P<0)  %%Búsqueda de los negativos en la función
for i=1:size(neg1,2);
    P(neg1(i))=0;
```





```

end
% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (final) -----

%% -- SOLUCIÓN DE SOMMERFELD, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (inicio)--

ii=0;
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
i=i+1;    P1(i)=(12*pi*ep*sin(ii))*(2+ep*cos(ii))/(((1+ep*cos(ii))^2)*(2+(ep)^2)); %Presión
hidrodinámica
end
PT=P+P1    %%Suma total de presiones (presión externa y presión hidrodinámica solución de
Sommerfeld)
neg1=find(PT<0)    %%Búsqueda de los negativos en la función
for i=1:size(neg1,2);
    PT(neg1(i))=0;
end

% -- SOLUCIÓN DE SOMMERFELD, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (final)--

%% -- GRAFICA DE SOLUCIÓN, PRESIÓN TOTAL DE UNA CHUMACERA HIBRIDA LARGA
      UTILIZANDO SOLUCIÓN DE SOMMERFELD --

figure1 = figure;
% Create axes
axes1 = axes('Parent',figure1,...
    'XTickLabel',{'0','1','2','3','4','5','6','7'},...
    'FontSize',14,...
    'FontName','Verdana');
box(axes1,'on');
hold(axes1,'all');
% Create plot
plot (PT,'LineWidth',2,'Color',[1 0 0]) %%plot(PT,'LineWidth',2,'Color',[0 0 1]); AZUL
xlabel('\theta','FontWeight','bold','FontSize',20,'FontAngle','italic');
ylabel('{\it PT}','FontSize',16,'FontName','Verdana');

```

- Programa realizado en MATLAB, para obtener el campo de presión total de una chumacera hibrida larga utilizando la solución de Gumbel.

```

clear all
clc
close all
ep=0.8;    %% Epsilon adimensional
q=50;      %% Fuerza de Presión Adimensional
att=atan((pi*sqrt(1-(ep^2)))/(2*ep));    %% Determinación del ángulo de attitud para una
chumacera larga
beta=0;    %% Angulo beta (beta=pi- presurización superior; beta=0; presurización inferior)
ang=pi+beta-att    %% Angulo de total
final=ang;
% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (inicio) -----

ii=0;
x=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:final;
i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(0.001*(1/(1+ep*cos(ii))^3));
end
iii=final;
for iii=final:0.001:2*pi;
i=i+1;

```





```

x(i)=x(i-1)+(-0.001*(1/(1+ep*cos(iii))^3));
end
x1=q*x;
u=size(x1,2);
const=x1(u)/(2*pi);

% -CONSTANTE DE INTEGRACIÓN-
y=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    y(i)=(const)*ii;
end
P=x1-y;    %%%Presión externa
neg1=find(P<0) %%%Búsqueda de los negativos en la función
for i=1:size(neg1,2);
    P(neg1(i))=0;
end
% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (final) -----

%% -- SOLUCIÓN DE GÜMBEL, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (inicio)--

ii=0;
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    P1(i)=(12*pi*ep*sin(ii))*(2+ep*cos(ii))/(((1+ep*cos(ii))^2)*(2+(ep)^2)); %Presión
    hidrodinámica
end
    PT=P+P1    %%%Suma total de presiones (presión externa y presión hidrodinámica solución de
    Gumbel)
neg1=find(PT<0)    %%%Búsqueda de los negativos en la función
for i=1:size(neg1,2);
    PT(neg1(i))=0;
end
% -- SOLUCIÓN DE GÜMBEL, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (final)--

%% -- GRAFICA DE SOLUCIÓN, PRESIÓN TOTAL DE UNA CHUMACERA HIBRIDA LARGA
%% UTILIZAZANDO SOLUCIÓN DE GÜMBEL --

figure1 = figure;
% Create axes
axes1 = axes('Parent',figure1,...
    'XTickLabel',{'0','1','2','3','4','5','6','7'},...
    'FontSize',14,...
    'FontName','Verdana');
box(axes1,'on');
hold(axes1,'all');
% Create plot
plot (PT,'LineWidth',2,'Color',[1 0 0]) %%%plot(PT,'LineWidth',2,'Color',[0 0 1]); AZUL
    xlabel('\theta','FontWeight','bold','FontSize',20,'FontAngle','italic');
    ylabel('\it PT','FontSize',16,'FontName','Verdana');

```

- Programa realizado en MATLAB, para obtener el campo de presión total de una chumacera híbrida larga utilizando la teoría de Warner.

```

% % % PRESION PUNTUA ----- paso de 0.001
clear all
clc
close all

```





```

ep=0.3;    %% Epsilon adimensional
q=5;      %% Fuerza de Presión Adimensional
L=8;      %% longitud
beta=pi;  %% Angulo beta (beta=pi- presurización superior; beta=p0; presurización inferior)
att=atan((pi*sqrt(1-(ep^2)))/(2*ep));    %% Determinación del ángulo de actitud
ang=pi+beta-att;    %% Angulo de total
final=ang;

%% -- CONSTANTE DE WARNER --
A1= sqrt((2*ep^2*(2*ep^2))/(sqrt(1-ep^2)*(2+3*ep^2)-2*(1-ep^2)));
A2=A1*L;

% -- CONSTANTE DE WARNER --

%% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (inicio) -----
ii=0;
x=zeros(1,1);
i=1;

for ii=0:0.001:final;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(0.001*(1/(1+ep*cos(ii))^3));
end

iii=final;
for iii=final:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(-0.001*(1/(1+ep*cos(iii))^3));
end

x1=q*x;
u=size(x1,2);
const=x1(u)/(2*pi);

%CONSTANTE DE INTEGRACION
y=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    y(i)=(const)*ii;
end

P=x1-y;                                %%Presion puntual
neg1=find(P<0)                          %%Busqueda de los negativos en la funcion
for i=1:size(neg1,2);                   %%Se encuentran los negativos de la funcion
    P(neg1(i))=0;
end                                     %%Presion externa positiva

z1 = -L/2; z2 = L/2; P2 = 100;
paso = (z2-z1)/(P2-1);
z= linspace(z1,z2,P2);

jj=0;
j=1;
for jj=-L/2:paso:L/2;
    j=j+1;
    r(j,:)=(1-(cosh((2*(jj)/L)*A2)/cosh(A2)))*P;
end

% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (final) -----

A = 0; B = 2*pi; D = 6285;
pasol = (B-A)/(D-1);
k= linspace(A,B,D);

z2 = -L/2; z2 = L/2; P2 = 101;

```





```
paso = (z2-z1)/(P2-1);
z1= linspace(z1,z2,P2);

%% -- TEORIA DE WARNER, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (inicio)--
ii=0;
x=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    f(i)=(((12*pi*ep*sin(ii))*(2+ep*cos(ii)))/((2+ep^2)*(1+ep*cos(ii))^2));
end
z3 = -L/2; z2 = L/2; P2 = 100;
paso12 = (z2-z3)/(P2-1);
z= linspace(z3,z2,P2);
jj=0;
j=1;
for jj=-L/2:paso12:L/2;
    j=j+1;
    w(j,:)=(1-(cosh((2*(jj)/L)*A2)/cosh(A2)))*f;
end
% -- SOLUCIÓN DE SOMMERFELD, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (final)--

Q=r+w; %%Suma total de presiones (presión externa y presión hidrodinámica solución de
sommerfeld)

%% -- GRAFICA DE SOLUCIÓN, PRESIÓN TOTAL DE UNA CHUMACERA HIBRIDA LARGA
      UTILIZAZANDO LA TEORIA DE WARNER --
mesh (k, z1, Q)
view (40, 28)
xlabel('\theta','FontWeight','bold','FontSize',20,'FontAngle','italic');
ylabel('\it z','FontSize',16,'FontName','Verdana');
zlabel('\it PT','FontSize',16,'FontName','Verdana');
```





Apéndice C

PROGRAMAS (Determinación del número de Sommerfeld)

- Programa realizado en MATLAB, para obtener el número de Sommerfeld en una chumacera híbrida larga utilizando la solución de Sommerfeld.

La forma de ejecutar es muy sencilla en cualquier versión de MATLAB (probado desde la versión 7) se copia el programa, se pega y se da aceptar; las únicas variables que se debe de introducir son la excentricidad (ep), la fuerza de presión (q) y el ángulo al que quiera inyectarse siendo las opciones para este trabajo – $\beta = \pi$, presurización superior, $\beta = 0$, presurización inferior -.

```
clear all
clc
close all

ep=0.3;    %% Epsilon adimensional
q=5;       %% Fuerza de Presión Adimensional
att=atan((pi*sqrt(1-(ep^2)))/(2*ep));    %% Determinación del ángulo de actitud para una
chumacera larga
beta=0;    %% Angulo beta (beta=pi- presurización superior; beta=0; presurización inferior)
ang=pi+beta-att    %% Angulo de total
final=ang;
%% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (inicio) -----
ii=0;
x=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:final;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(0.001*(1/(1+ep*cos(ii))^3));
end
iii=final;
for iii=final:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(-0.001*(1/(1+ep*cos(iii))^3));
end
x1=q*x;
u=size(x1,2);
const=x1(u)/(2*pi);

% -CONSTANTE DE INTEGRACIÓN-
y=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    y(i)=(const)*ii;
    c(i)=cos(ii);
    s(i)=sin(ii);
```





```

end
P=x1-y;          %%Presión externa
neg1=find(P<0)    %%Búsqueda de los negativos en la función
for i=1:size(neg1,2);
    P(neg1(i))=0;
end

%% -- SOLUCIÓN DE SOMMERFELD, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (inicio)--

ii=0;
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    P1(ii)=(12*pi*ep*sin(ii))*(2+ep*cos(ii))/(((1+ep*cos(ii))^2)*(2+(ep)^2)); %Presión
hidrodinámica
End
% -- SOLUCIÓN DE SOMMERFELD, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (final)--

PT=P+P1    %%Suma total de presiones (presión externa y presión hidrodinámica solución de
sommerfeld)

neg1=find(PT<0)          %%Búsqueda de los negativos en la función
for i=1:size(neg1,2);    %%Se encuentran los negativos de la función
    PT(neg1(i))=0;
end

%% -DETERMINACION DEL NUMERO DE SOMMERFELD A TRAVES DEL METODO DE SIMPSON -

% MULTIPLICANDO POR EL COSENO
w=c.*PT;    %%La función se multiplica por coseno
w1=size(w,2)
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=4:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
k=size(r,2)
r1=2*(r(k)-w(w1))

for ii=3:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
r2=4*(r(k))
ft=(0.001/6)*(w(2)+r1+r2+w(w1))

% MULTIPLICANDO POR EL SENO
w=s.*PT;    %%La función se multiplica por seno
w1=size(w,2)
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=4:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
k=size(r,2);
r1=2*(r(k)-w(w1));
for ii=3:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
r2=4*(r(k));
    
```





```
fr=(0.001/6)*(w(2)+r1+r2+w(1));
%% -DETERMINACION DEL NUMERO DE SOMMERFELD POR LA COMPONENTE- %

f=sqrt(((fr)^2)+(ft)^2);
S=1/f
```

- Programa realizado en MATLAB, para obtener el número de Sommerfeld en una chumacera híbrida larga utilizando la solución de Gumbel.

```
clear all
clc
close all

ep=0.3;    %%% Epsilon adimensional
q=5;       %%% Fuerza de Presión Adimensional
att=atan((pi*sqrt(1-(ep^2)))/(2*ep));    %%% Determinación del ángulo de actitud para una
chumacera larga
beta=0;    %%% Angulo beta (beta=pi- presurización superior; beta=0; presurización inferior)
ang=pi+beta-att    %%% Angulo de total
final=ang;
%% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (inicio) -----
ii=0;
x=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:final;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(0.001*(1/(1+ep*cos(ii))^3));
end
iii=final;
for iii=final:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(-0.001*(1/(1+ep*cos(iii))^3));
end
x1=q*x;
u=size(x1,2);
const=x1(u)/(2*pi);

% -CONSTANTE DE INTEGRACIÓN-
y=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    y(i)=(const)*ii;
    c(i)=cos(ii);
    s(i)=sin(ii);
end
P=x1-y;    %%%Presión externa
neg1=find(P<0)    %%%Búsqueda de los negativos en la función

for i=1:size(neg1,2);
    P(neg1(i))=0;
end

%% -- SOLUCIÓN DE SOMMERFELD, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (inicio)--

ii=0;
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    P1(i)=(12*pi*ep*sin(ii)*(2+ep*cos(ii))/(((1+ep*cos(ii))^2)*(2+(ep)^2))); %Presión
hidrodinámica
```





```

End

neg1=find(P1<0)          %%%Búsqueda de los negativos en la función
for i=1:size(neg1,2);    %%%Se encuentran los negativos de la función
    P1(neg1(i))=0;
end
% -- SOLUCIÓN DE GÜMBEL, PRESIÓN HIDRODINÁMICA (final)-

PT=P+P1          %%%Suma total de presiones (presión externa y presión solución de Sommerfeld)

%% -DETERMINACION DEL NUMERO DE SOMMERFELD A TRAVES DEL METODO DE SIMPSON -

% MULTIPLICANDO POR EL COSENO
w=c.*PT;          %%%La función se multiplica por coseno
w1=size(w,2)
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=4:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
k=size(r,2)
r1=2*(r(k)-w(w1))

for ii=3:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
r2=4*(r(k))
ft=(0.001/6)*(w(2)+r1+r2+w(w1))

% MULTIPLICANDO POR EL SENOS
w=s.*PT;          %%%La función se multiplica por seno
w1=size(w,2)
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=4:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
k=size(r,2);
r1=2*(r(k)-w(w1));
for ii=3:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
r2=4*(r(k));

fr=(0.001/6)*(w(2)+r1+r2+w(w1));
%% -DETERMINACION DEL NUMERO DE SOMMERFELD POR LA COMPONENTE- %

f=sqrt(((fr)^2)+(ft)^2);
S=1/f

```

- Programa realizado en MATLAB, para obtener el número de Sommerfeld en una chumacera híbrida larga utilizando la teoría de Warner.

```

clear all
clc
close all

ep=0.3;    %%% Epsilon adimensional

```





```

q=5;          %% Fuerza de Presión Adimensional
att=atan((pi*sqrt(1-(ep^2)))/(2*ep));  %% Determinación del ángulo de actitud para una
chumacera larga
beta=0;       %% Angulo beta (beta=pi- presurización superior; beta=p0; presurización
inferior)
ang=pi+beta-att  %% Angulo de total
final=ang;

%% ----- Integración de constante de Warner -----
z1 = -1; z2 = 1; P2 = 6285;
paso = (z2-z1)/(P2-1);
z= linspace(z1,z2,P2);

L=2;
D=1;
A1= sqrt((2*ep^2*(2*ep^2))/(sqrt(1-ep^2)*(2+3*ep^2)-2*(1-ep^2)));
A2=A1*(L/D);
R=(1-(cosh((2*z./L)*A2)/cosh(A2)));
% ----- Integración de constante de Warner-----

%% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (inicio) -----
ii=0;
x=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:final;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(0.001*(1/(1+ep*cos(ii))^3));
end
iii=final;
for iii=final:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    x(i)=x(i-1)+(-0.001*(1/(1+ep*cos(iii))^3));
end
x1=q*x;
u=size(x1,2);
const=x1(u)/(2*pi);

% -CONSTANTE DE INTEGRACIÓN-
y=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    y(i)=(const)*ii;
    c(i)=cos(ii);
    s(i)=sin(ii);
end
P=x1-y;          %%Presión externa
neg1=find(P<0)   %%Búsqueda de los negativos en la función

for i=1:size(neg1,2);    %%Se encuentran los negativos de la función
    P(neg1(i))=0;
end
P=P.*R;          %%Presión externa multiplicado por la constante de Warner

% ----- SOLUCIÓN PRESIÓN EXTERNA (inicio) -----
%% -----SOLUCION DE WARNER (inicio)-----
ii=0;
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=0:0.001:2*pi;
    i=i+1;
    P1(i)=(12*pi*ep*sin(ii))*(2+ep*cos(ii))/(((1+ep*cos(ii))^2)*(2+(ep)^2)); %Presión
hidrodinámica
end
P1=F.*R;

```





```
% -----SOLUCION DE WARNER (final)-----
%% ----- PRESION TOTAL ----- %
PT=P+P1      %%Suma total de presiones (presión externa y presión Warner)
neg1=find(PT<0)    %%Búsqueda de los negativos en la función
for i=1:size(neg1,2);
    PT(neg1(i))=0;
end

%% -DETERMINACION DEL NUMERO DE SOMMERFELD A TRAVES DEL METODO DE SIMPSON -
% MULTIPLICADO POR EL COSENO
w=c.*PT;      %%La función se multiplica por coseno
w1=size(w,2)
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=4:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
k=size(r,2)
r1=2*(r(k)-w(w1))
for ii=3:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
r2=4*(r(k))
ft=(0.001/6)*(w(2)+r1+r2+w(w1))

% MULTIPLICADO POR EL SENOS
w=s.*PT;      %%La función se multiplica por seno
w1=size(w,2)
r=zeros(1,1);
i=1;
for ii=4:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
k=size(r,2);
r1=2*(r(k)-w(w1));
for ii=3:2:size(w,2);
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+w(ii);
end
r2=4*(r(k));
fr=(0.001/6)*(w(2)+r1+r2+w(w1));

%% DETERMINACION DEL NUMERO DE SOMMERFELD
f=sqrt(((fr)^2)+(ft)^2);
S=1/f
```

