



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

---

---

---

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELECTRICA**

**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN  
UNIDAD ZACATENCO**

**“ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE  
TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN  
MICROCANAL PARA UN FLUJO ELECTRO-  
OSMÓTICO DE UN FLUIDO  
DE LEY DE POTENCIA”**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRO EN CIENCIAS**

**EN INGENIERÍA MECÁNICA**

**P R E S E N T A**

**FREDY DONÍS SÁNCHEZ**

**DIRECTORES DE TESIS:**

**DR. JUAN PABLO ESCANDÓN COLIN**

**DR. IGNACIO CARVAJAL MARISCAL**



**MÉXICO, D.F.**

**SEPTIEMBRE 2011**



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 17:00 horas del día 15 del mes de septiembre del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de ESIME UNIDAD ZAC. para examinar la tesis titulada:

**“ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA”.**

Presentada por el alumno:

<b>DONÍS</b>	<b>SÁNCHEZ</b>	<b>FREDY</b>
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: 

B	0	0	1	0	7	0
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

DR. IGNACIO CARVAJAL MARISCAL

DR. JUAN PABLO ESCANDÓN COLÍN

DR. GEORGY POLUPAN

DR. JUAN PABLO ESCANDÓN COLÍN

DR. LORENZO ALBERTO MARTÍNEZ SUÁSTEGUI

DR. FLORENCIO SÁNCHEZ SILVA

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

DR. JAIME ROBLES GARCÍA





**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 19 del mes de Septiembre del año 2011, el (la) que suscribe Ing. Fredy Donís Sánchez alumno(a) del Programa de Maestría en Ingeniería Mecánica opción Energética con número de registro B001070, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente Trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Ignacio Carvajal Mariscal y del Dr. Juan Pablo Escandón Colin y cede los derechos del trabajo titulado: Análisis del problema conjugado de transferencia de calor en un microcanal para un flujo electro-osmótico de un fluido de ley de potencia, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: fredyds@hotmail.com

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

---

Ing. Fredy Donís Sánchez

## Dedicatorias

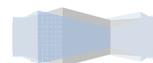
### Con especial dedicación:

- A la mujer más linda y hermosa que me dio la vida, que con amor, cariño y educación me forjó y enseñó la importancia de la vida, te amo jefecita, eres única.
- A mi abuelita Eri Ángeles, por que con tu educación me enseñaste a valorar y respetar a las personas para bien, te amo.
- A mis hermanos, Francisco y Gerardo por su apoyo incondicional y palabras de aliento en todo momento.
- A mi amigo Jesús, que en todo momento me has apoyado.
- A mi amigo Juan Pablo, por apoyarme en cada momento para alcanzar esta meta profesional.

### Agradezco:

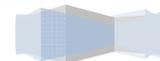
- A Dios, por colmarme de bendiciones y permitirme vivir otro momento tan especial en mi vida.
- A toda mi familia en general por su cariño y apoyo incondicional.
- Al Instituto Politécnico Nacional, por abrirme las puertas del conocimiento y apoyarme en mi formación profesional.
- A mis asesores, Dr. Escandón y al Dr. Carvajal que con sus conocimientos, enseñanzas y asesorías me permitieron alcanzar y poder culminar la terminación de esta tesis.
- A todos mis maestros y compañeros que han sido una parte importante en cada etapa de mi vida escolar.
- A Todos mis amigos y amigas que siempre han estado y estarán presentes en mi mente y en mi corazón, gracias por permitirme ser parte de sus vidas é infinitamente gracias por formar una parte importante de la mía.

Fredy Donís Sánchez



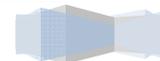
## ÍNDICE

	Pag.
<b>RESUMEN</b>	3
<b>ABSTRACT</b>	4
<b>LISTA DE FIGURAS Y TABLAS</b>	5
<b>NOMENCLATURA</b>	6
<b>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	11
<b>JUSTIFICACIÓN</b>	11
<b>OBJETIVO</b>	11
<b>INTRODUCCIÓN</b>	12
<b>ESTRUCTURA DE LA TESIS</b>	13
<b>I ANTECEDENTES</b>	15
1.1 Microfluídica	15
1.2 Aspectos generales de macro, micro y nanoflujos	17
1.3 Electromagneto–hidrodinámica	19
1.4 Doble capa eléctrica	24
1.5 Clasificación de flujos electrocinéticos	24
1.6 Sistemas coloidales	26
<b>II FORMULACIÓN DEL PROBLEMA</b>	28
2.1 Modelo físico	28
2.2 Ecuaciones gobernantes generales	29
2.3 Consideraciones	32
2.4 Estimación de órdenes de magnitud	35
2.5 Ecuaciones gobernantes reducidas y condiciones de frontera	39
2.6 Adimensionalización de las ecuaciones gobernantes	41
2.6.1 Escalas características	41
2.6.2 Variables adimensionales	42
2.6.3 Ecuación de Poisson Boltzmann	43
2.6.4 Ecuación de conservación de la masa	43
2.6.5 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento	43
2.6.6 Ecuación de conservación de la energía en el fluido	44
2.6.7 Ecuación de conservación de la energía en el sólido	45
<b>III METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN</b>	47
3.1 Solución Numérica	47
3.1.1 Análisis numérico	47
3.1.2 Método de SOR	48



## ÍNDICE

	<b>Pag.</b>
3.2 Solución asintótica	49
3.2.1 Análisis asintótico	49
3.2.2 Solución asintótica del campo de temperaturas	51
3.3 Número de Nusselt	54
<b>IV ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>57</b>
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>67</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>69</b>
<b>Apéndice A. Solución de la ecuación diferencial de Poisson - Boltzmann</b>	<b>71</b>
<b>Apéndice B. Análisis de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el fluido</b>	<b>73</b>
<b>Apéndice C. Solución numérica de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento</b>	<b>75</b>
<b>Apéndice D. Discretización en diferencias finitas é implementación de la solución numérica</b>	<b>77</b>
<b>D.1. Discretización del modelo matemático.</b>	<b>77</b>
<b>D.2. Implementación del método SOR</b>	<b>81</b>
<b>D.3. Número de Nusselt reducido</b>	<b>84</b>
<b>Apéndice E. Diagrama de flujo</b>	<b>86</b>
<b>Apéndice F. Codificación de la solución numérica</b>	<b>90</b>

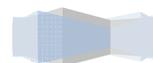


## Resumen

En este trabajo se resuelve numérica y analíticamente el problema conjugado de transferencia de calor en estado permanente de un fluido no Newtoniano en un microcanal de placas planas paralelas, bajo la aplicación de fuerzas electro-osmóticas. El flujo se considera hidrodinámicamente desarrollado y un fluido con una relación completamente reológico del fluido que sigue una ley de potencia.

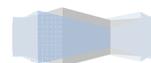
De la solución numérica se obtienen los campos de temperatura en el fluido y la pared del microcanal, mostrando la influencia de los parámetros adimensionales de transporte involucrados en el análisis: un indicador del comportamiento del flujo, para describir al fluido de ley de potencia; un parámetro electrocinético, para indicar el espesor de la longitud de Debye; el número de Peclet, como un indicador de la transferencia de calor por convección; un término normalizado de generación de energía, siendo éste la competencia del flujo de calor en la pared externa del microcanal al calentamiento Joule; un término de conjugación, el cual representa la competencia entre el calor conductivo longitudinal en la pared del microcanal y el calor convectivo del fluido y relaciones de aspecto geométrico en las regiones del fluido y de la pared sólida del microcanal.

Para validar la solución numérica, se introduce una solución asintótica. Adicionalmente se presenta la correspondencia entre la solución numérica y asintótica para el número de Nusselt para diferentes condiciones en el proceso conjugado de transferencia de calor.



## Abstract

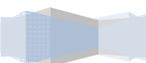
The problem related to heat transfer in steady state from non Newtonian fluids in a microchannel from parallel flat plates under the influence of electro-osmotic strengths is solved numerically and analytically in this work. The flow is considered hydrodynamically developed and with a constitutive power-law model. From the numerical solution we get the temperature field in the fluid of the microchannel wall, showing the influence from the dimensionless parameters involved in the analysis such as: a flow behavior index, to describe the power-law fluid; an electrokinetic parameter to indicated the thickness of the Debye length; the Peclet number, as indicator of heat transfer convection; a normalized power generation term, being the ratio of heat flow from an external wall to the Joule heating, a conjugate term that considers, which represent the competition between longitudinal conductive heat in the microchannel to the convective heat transfer in the fluid; geometric aspect ratios of the microchannel and the solid wall, respectively. Additionally is observed the excellent agreement between the numerical and asymptotic solution to the Nusselt number for different conditions in the conjugated heat transfer process.



## Lista de figuras y tablas

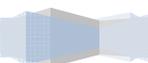
Figura	Título	Pág.
2.1	Esquema del flujo electro-osmótico en un microcanal de placas planas paralelas.	28
4.1	Distribución del potencial eléctrico $\bar{\psi}$ , como función de la coordenada transversal $Y_f$ , para diferentes valores del parámetro electrocinético $\bar{\kappa}$ , adaptado de Masliyah and Bhattacharjee, 2006.	58
4.2	Distribución de velocidades adimensionales para diferentes valores del índice de comportamiento del fluido en $n$ , mientras se mantiene a) $\bar{\kappa} = 10$ , (adaptación Zhao et al.,2008), b) $\bar{\kappa} = 50$ y c) $\bar{\kappa} = 100$ .	59
4.3	Comparación de la solución analítica y numérica para el desarrollo especial de los perfiles de temperatura adimensional en el fluido, a lo largo de la dirección axial, para diferentes valores de la posición transversal, manteniendo $n = 0.5$ .	60
4.4	Comparación de la solución analítica y numérica para el desarrollo especial de los perfiles de temperatura a través de la dirección transversal en el sólido.	61
4.5	Perfil de temperatura adimensional como una función de la coordenada transversal adimensional en la región del fluido y sólido en $X = 0.5$ para diferentes valores del índice de consistencia del fluido, $n$ .	62
4.6	Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal del microcanal en la región del fluido y sólido, para diferentes posiciones adimensionales en la coordenada axial, $X_f = X_s$ , y para diferentes valores del índice de comportamiento del flujo $n$ .	62
4.7	Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal en la región del fluido y del sólido, variando $\bar{\kappa}$ y para dos valores diferentes de $n$ .	63
4.8	Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal en la región del fluido y del sólido, variando $Pe$ y para valores diferentes de $(n = 0.5, 1.5)$ .	63
4.9	Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal en la región del fluido y del sólido, variando $\Lambda$ y para dos valores diferentes de $(n = 0.5, 1.5)$ .	64
4.10	Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal en la región del fluido y del sólido, variando $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$ y para dos valores diferentes de $(n = 0.5, 1.5)$ .	65

Tabla	Título	Pág.
1.1	Valores típicos geométricos, físicos (soluciones acuosas) y de flujo en dispositivos macro, micro y nano.	19
1.2	Ecuaciones de Maxwell de los fenómenos electromagnéticos.	19
1.3	Ecuaciones de Maxwell reducidas de los fenómenos electromagnéticos.	20
1.4	Ecuaciones Maxwell aplicables al estudio de la electrohidrodinámica.	23
4.1	Valores típicos y parámetros de transporte considerados en la solución numérica y asintótica.	57
4.2	Numero de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales $X$ y para diferentes parámetros adimensionales involucrados, con $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 25$ .	66
4.3	Numero de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales $X$ y para diferentes parámetros adimensionales involucrados, con $(\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 25, 2.5, 0.25)$ .	66

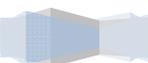


## Nomenclatura

Símbolo	Descripción
$A$	vector potencial magnético $[V \cdot s/m]$
$B$	vector de la intensidad del campo magnético $[\text{Tesla}, V \cdot s/m^2]$
$B$	campo magnético $[\text{Tesla}, V \cdot s/m^2]$
$b$	vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen $[N/m^3]$
$b$	fuerzas de cuerpos por unidad de volumen $[N/m^3]$
$c$	velocidad de la luz en el vacío $2.9979 \times 10^8 [m/s]$
$C_p$	calor específico $[J/Kg \cdot K]$
$D$	vector de la densidad de flujo eléctrico $[C/m^2]$
$d$	diámetro promedio de la partícula de fluido $[m]$
$E$	vector de campo eléctrico $[V/m]$
$E$	campo eléctrico $[V/m]$
$e$	carga eléctrica elemental $1.602 \times 10^{-19} [C]$
$F_{y1}$	gradiente de temperatura discretizado en el fluido en $(X_f, Y_f = 0)$
$F_{y2}$	gradiente de temperatura discretizado en la interface del fluido en $(X_f, Y_f = 1)$
$F_{s,x1}$	gradiente de temperatura discretizado en el sólido en $(X_s = 0, Y_s)$
$F_{s,x2}$	gradiente de temperatura discretizado en el sólido en $(X_s = 1, Y_s)$
$F_{x2}$	gradiente de temperatura discretizado en el fluido en $(X_f = 1, Y_f)$
$f_E$	vector de fuerzas de campo eléctrico $[N/m^3]$
$f_g$	vector de fuerzas de campo gravitacional $[N/m^3]$
$g$	vector aceleración de la gravedad $[m/s^2]$
$g$	aceleración de la gravedad $[m/s^2]$



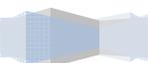
$\mathbf{H}$	vector de intensidad del campo magnético [A/m]
$H$	mitad del microcanal [m]
$h$	entalpía [J/kg], coeficiente de transferencia de calor por convección [ $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ ], espesor de la pared del microcanal [m]
$\mathbf{I}$	tensor identidad
$i_{max}$	número máximo de nodos de la malla discretizada en la dirección axial
$\mathbf{J}$	vector de la densidad de corriente eléctrica [ $\text{C}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$ ]
$j$	corriente eléctrica [ $\text{C}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$ ]
$j_{max}$	número máximo de nodos de la malla discretizada en la dirección transversal
$\mathbf{J}_{tot}$	vector de corriente total [ $\text{C}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$ ]
$k$	conductividad térmica [ $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ ]
$k_B$	constante de Boltzmann $1.38 \times 10^{-23}$ [J/K]
$Kn$	número de Knudsen
$L$	longitud del microcanal, longitud [m]
$l$	longitud característica [m]
$m$	índice de consistencia de flujo
$n$	índice de comportamiento del flujo
$n_\infty$	número de concentración iónica general del electrolito [ $1/\text{m}^3$ ]
$Nu$	número de Nusselt
$p$	presión [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]
$Pe$	número de Peclet
$\mathbf{Q}$	densidad total de flujo de energía [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]
$\dot{q}$	generación de energía por unidad de volumen [ $\text{W}/\text{m}^3$ ]
$q_0''$	flujo de calor en la pared del microcanal [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]
$q_{cond}''$	flujo de calor por conducción [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]
$q_{conv}''$	flujo de calor por convección [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]



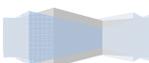
$Re$	número de Reynolds
$T$	temperatura [K]
$\bar{T}$	temperatura adimensional
$T_0$	temperatura de entrada al microcanal [K]
$t$	tiempo [s]
$U$	energía interna [J/kg]
$u, v, w,$	componentes de velocidad [m/s]
$\bar{u}$	velocidad adimensional axial
$u_c$	velocidad característica - Smoluchowski [m/s]
$\mathbf{V}$	vector de velocidad [m/s]
$W$	densidad total de energía [J/kg]
$X$	coordenada adimensional axial
$Y$	coordenada adimensional transversal
$x, y, z$	coordenadas Cartesianas [m]
$z$	valencia del electrolito

#### Símbolos griegos

$\bar{\alpha}$	parámetro de conjugación en el proceso de transferencia de calor
$\beta$	cociente del alto a la longitud del microcanal en la región del fluido
$\dot{\gamma}$	tensor de la rapidez de deformación [1/s]
$\dot{\gamma}$	rapidez de deformación [1/s]
$\Delta T$	incremento de la temperatura [K]
$\Delta \bar{T}$	incremento de la temperatura adimensional discretizada
$\Delta X$	incremento nodal en la malla discretizada en la dirección axial



$\Delta Y$	incremento nodal en la malla discretizada en la dirección transversal del fluido
$\varepsilon$	permisividad dieléctrica [C/V · m]
$\varepsilon_0$	permisividad del vacío $8.854 \times 10^{-12}$ [C/V · m]
$\varepsilon_r$	permisividad dieléctrica relativa
$\bar{\varepsilon}$	cociente del alto a la longitud del microcanal en la región del sólido
$\zeta$	potencial Z en el plano de corte de la doble capa eléctrica [V]
$\kappa$	inverso de la longitud Debye [m <sup>-1</sup> ]
$\kappa^{-1}$	longitud Debye [m]
$\kappa^2$	parámetro Debye-Hückel [m <sup>-2</sup> ]
$\bar{\kappa}$	parámetro electrocinético
$\Lambda$	parámetro adimensional de generación de energía
$\lambda$	trayectoria libre promedio molecular de un fluido [m]
$\mu$	permeabilidad magnética [H/m]
$\mu_f$	viscosidad dinámica del fluido [Pa · s]
$\mu_0$	permeabilidad magnética del vacío $12.566 \times 10^{-7}$ [H/m]
$\mu_r$	permeabilidad magnética relativa
$\xi$	constante del método de Sobre Relajación Sucesiva
$\Pi$	tensor total de esfuerzos [N/m <sup>2</sup> ]
$\rho$	densidad del fluido [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_e$	densidad de carga eléctrica libre [C/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	conductividad eléctrica [S/m]
$\tau$	tensor de esfuerzos [N/m <sup>2</sup> ]



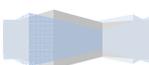
$\tau$	esfuerzo $[\text{N}/\text{m}^2]$
$\Phi$	relación de aspecto de la malla discretizada en el sólido
$\psi$	potencial eléctrico $[\text{V}]$
$\Omega$	relación de aspecto de la malla discretizada en el fluido
$\omega$	factor de relajación del método de Sobre relajación Sucesiva

### Subíndices

$c$	característica
$f$	fluido
$i$	fila
$j$	columna
$s$	pared solida del microcanal

### Superíndices

$k$	iteración
-----	-----------



## Planteamiento del problema

Actualmente existen varios modelos propuestos para analizar el comportamiento de fluidos no Newtonianos, pero todavía existen implicaciones pertinentes sobre el transporte de flujos electrocinéticos los cuales no han sido resueltos todavía por la comunidad científica y es por tal motivo, que en el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático, cuya finalidad consiste en resolver un problema conjugado de transferencia de calor para un flujo electro-osmótico de un fluido no Newtoniano con un modelo reológico del fluido que sigue una ley de potencia, resolviendo de manera analítica y numérica la distribución de la velocidad, y temperatura de fluidos biológicos con sus propiedades constantes a través de un microcanal de placas planas paralelas.

## Justificación

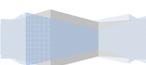
Durante los últimos años debido al rápido desarrollo de tecnologías en biochips, la electro-ósmosis está siendo ampliamente utilizada debido a la inducción de fuerzas electrocinéticas para manipular el flujo de fluidos en microcanales, para el transporte y control de muestras en nano volúmenes en dispositivos microfluídicos utilizados para análisis químicos, biológicos y diagnósticos médicos. Se han desarrollado estudios de transferencia de calor de flujos electro-osmóticos y de problemas conjugados de transferencia de calor con fluidos Newtonianos, así como también con fluidos no Newtonianos con el modelo reológico de ley de potencia, pero sin considerar la distribución de temperatura en las paredes del microcanal, por tal motivo el presente estudio se centra en el análisis del problema conjugado de transferencia de calor en un microcanal para un flujo electro-osmótico de un fluido de ley de potencia.

## Objetivo

El objetivo general consiste en desarrollar un modelo matemático para resolver numérica y analíticamente el problema conjugado de transferencia de calor en estado estacionario de un flujo de un fluido de ley de potencia en un microcanal, bajo la influencia de fuerzas electro-osmóticas, mostrando la influencia de los parámetros adimensionales representativos en el modelo del problema planteado.

Los objetivos particulares son:

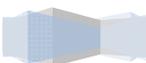
- Identificar los parámetros adimensionales de transporte representativos.



- Resolver numéricamente la ecuación adimensional de la energía, para el fluido y las paredes del microcanal.
- Validar analíticamente, por medio de una solución asintótica, los resultados obtenidos en la solución numérica.
- Analizar los resultados obtenidos del campo de temperaturas y mostrar la influencia de los parámetros adimensionales de transporte involucrados en el análisis del problema.
- Determinar el coeficiente adimensional de transferencia de calor en la región del fluido y del sólido.

## Introducción

El flujo electro-osmótico surge cuando las paredes solidas de un microcanal están en contacto con un electrolito, el estado químico de las superficies generalmente se altera; como resultado en la superficie se concentran iones con una carga eléctrica determinada, mientras que iones de carga eléctrica opuesta son liberados dentro del líquido. La carga eléctrica superficial se balancea con los iones opuestamente cargados y presentes en el medio fluido; esta superficie eléctricamente cargada es conocida como EDL y consta de dos zonas, una capa eléctrica fija donde los iones están fijos en la pared del canal, y una capa eléctrica difusa en donde se encuentra una alta concentración de iones libres, la interface entre estas dos zonas, se le conoce como plano de corte de la EDL. Una medida característica de la EDL es por medio de la longitud de Debye, la cual es una propiedad de la solución electrolítica y representa una distancia característica de la superficie cargada a el punto donde el potencial eléctrico decae aproximadamente en un 33% del potencial superficial, (Myasliyah y Bhattacharjee, 2006). Si un campo eléctrico se aplica a lo largo del eje axial del microcanal en presencia de la distribución de la densidad de carga eléctrica dentro de la EDL, los elementos ionizados localizados dentro de la capa eléctrica difusa, tenderán a moverse bajo la acción de fuerzas electroestáticas; como consecuencia y debido a la naturaleza cohesiva del fluido (viscosidad), se empuja a la solución intermedia entre las EDLs, dejando una fuerza electrocinética de cuerpo sobre la totalidad del fluido. De esta manera, la fuerza electro-osmótica es una función combinada de la distribución de la densidad de carga y un campo eléctrico que se genera por una diferencia de potencial que se aplica entre la entrada y la salida del microcanal, (Myasliyah y Bhattacharjee, 2006; Karniadakis et al., 2005), como consecuencia del rápido desarrollo de tecnologías de laboratorios en un chip la electro-osmosis está siendo utilizada ampliamente como fuerza conductora

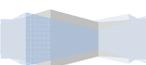


para manipular flujos de líquidos para transporte y control de muestras en análisis biológicos, químicos, y diagnósticos médicos (Ramos, 2007; Laser y Santiago, 2004). Por tanto, es fundamental entender las características del flujo de fluidos en dispositivos microfluídicos para su óptimo diseño y control, (Zhao et al., 2008). Estudios realizados por Xuan et al., (2004a, b, c), Tang et al., (2003, 2004a, b, 2007) Zhao y Liao (2002), analizan fenómenos de transferencia de calor conjugados y acoplados con la temperatura en flujos electro-osmóticos y enfatizan en el efecto del calentamiento Joule en el fluido; el acoplamiento de los sistemas antes mencionados son a través de la temperatura en la constante dieléctrica del fluido, viscosidad y conductividad térmica.

Aunque en la literatura existen varios modelos propuestos para analizar el comportamiento de fluidos no Newtonianos, en la actualidad, todavía aparecen implicaciones pertinentes sobre el transporte de flujos electrocinéticos que no han sido resueltos completamente por la comunidad científica, (Das y Chakraborty, 2006). Estudios realizados por Zhao et al. (2008), Berli y Olivares (2008) y Tang et al. (2009) consideran la ley de potencia para fluidos no Newtonianos y trabajan sobre la hidrodinámica de flujo electro-osmótico, Das y Chakraborty (2006) también utiliza la ley de potencia para resolver analíticamente la distribución de la velocidad, temperatura y concentración en flujos electro-osmóticos de fluidos biológicos no Newtonianos; trabajos desarrollados sobre problemas conjugados de transferencia de calor en estado estable de un flujo de un fluido viscoelástico y con un esquema reológico de Phan-Thien Tanner en un microcanal de placas planas paralelas, bajo la influencia de fuerzas electro-osmóticas y de presión; es analizado y resuelto numérica y analíticamente por Escandón et al. (2011), considerando un flujo hidrodinámicamente desarrollado y con propiedades constantes.

## **Estructura de la tesis**

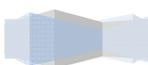
En el Capítulo 1 de este trabajo se muestra un panorama general sobre el estudio de la microfluídica y el movimiento de fluidos sobre los cuales se ejercen fuerzas sin el accionamiento de partes móviles; en particular se observan los rangos de estudio de flujos electromagneto-hidrodinámicos y la aplicación de las leyes de Maxwell en la descripción de los fenómenos electromagnéticos relacionados con movimientos de fluidos. De lo anterior se deriva la rama de flujo electrocinéticos como uno de los principales métodos para el movimiento de fluidos químicos y biológicos en aplicaciones con dispositivos microfluídicos.



En el Capítulo 2 se describe el esquema del modelo físico de estudio, también se establece las ecuaciones gobernantes generales de transporte de masa, momentum, energía y electrocinéticas de forma vectorial, así como el establecimiento de las consideraciones e hipótesis propuestas para la simplificación de las ecuaciones gobernantes generales de transporte. Posteriormente se indican las escalas características del problema al realizar una estimación de ordenes de magnitud de variables representativas dentro de los rangos de valores típicos en flujos electro-osmóticos en microcanales; lo anterior, con el propósito de finalizar la simplificación de las ecuaciones gobernantes y obtener el modelo matemático a resolver en un esquema de un problema conjugado de transferencia de calor. Se proponen las variables adimensionales convenientes para normalizar el modelo matemático, con sus respectivas condiciones de frontera y obtener un esquema adimensional, lo que deriva en la identificación de los parámetros adimensionales representativos del proceso de transferencia de calor.

En el Capítulo 3 se establece la metodología para resolver el modelo matemático adimensional. Primeramente, se describe el análisis numérico que seguirá el proceso iterativo para la solución de las ecuaciones adimensionales de la energía, en un esquema en diferencias finitas centrales, y su implementación en el método numérico de solución de Sobre Relajación Sucesiva (SOR-Successive Over Relaxation; por sus siglas en inglés), para ecuaciones diferenciales parciales elípticas. En la segunda parte de este capítulo, con objeto de validar analíticamente este proceso previamente establecido, se determina una solución asintótica en los límites de  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$ ,  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim 1$  y  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \gg 1$ , todos con  $\bar{\alpha} \ll 1$ , para los perfiles de temperatura en la región del fluido y sólido del microcanal; también se determina el coeficiente de transferencia de calor adimensional mediante el número de Nusselt reducido para este problema.

En el Capítulo 4 se presenta los resultados obtenidos numéricamente para los perfiles de temperatura adimensional en las regiones del fluido y del sólido del microcanal, mostrando la influencia de los parámetros adimensionales de transporte representativos del sistema. También, se realiza la validación de la solución numérica con la solución asintótica propuesta, por medio de la comparación de perfiles de temperaturas para la región del fluido en la coordenada axial y para el sólido en la coordenada transversal, respectivamente. Finalmente, se muestra la comparación entre las soluciones numéricas y asintóticas para el número de Nusselt reducido.



# Capítulo 1

## Antecedentes

### 1.1 Microfluídica

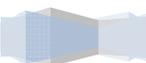
La microfluídica se refiere al estudio de dispositivos y métodos para controlar y manipular flujos de fluidos con longitud de escalas menores a un milímetro (Stone et al., 2004). Bayraktar y Pidugu (2006), establecen que la dimensión característica de un microcanal en un sistema de microfluídico está en el intervalo de 1-1000 micrómetros.

En la actualidad han tenido una gran relevancia los estudios de fenómenos que involucran el manejo de sustancias coloidales y la mecánica de fluidos en dispositivos con escalas del orden de unas decenas o cientos de micrómetros. El enfoque de la microfluídica se centra en diversas tareas fundamentales como (Stone et al., 2004):

- Desarrollo de métodos, diseño y fabricación de microdispositivos integrados
- Manipulación de pequeños volúmenes (microlitros)
- Uso potencial de microsistemas para estudios fundamentales de procesos físicos, químicos y biológicos
- Rentabilidad en la aplicación de microdispositivos en las diversas tareas de análisis

En este contexto la literatura de la microfluídica contiene una amplia descripción de diversos tipos de elementos funcionales en donde se incluyen válvulas, bombas, actuadores, interruptores, dispensadores, mezcladores, filtros, separadores, intercambiadores de calor, algunos de los cuales son motivadores para la investigación y propuesta de nuevas configuraciones, (Stone et al., 2004).

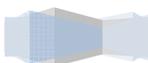
El termino “laboratorio en un chip” (lab-on-a-chip, en inglés), se usa para dispositivos que usan fluidos como medio de trabajo e integran un número diferente de funciones en una escala pequeña; entre las más importantes son: preparación, transporte, separación y detección de fluidos, (Steffen y Fiedhelm, 2007). De esta manera, un laboratorio en un chip puede incorporar muchos de los componentes necesarios y funciones de un laboratorio típico que realiza un análisis biológico o químico, incluyendo las ya mencionadas, (Hu y Li, 2006). Así, el concepto de laboratorio en un chip, surge como la integración de todos los componentes antes mencionados y demuestra la ejecución de procesos de



síntesis, análisis y reacción de muestras en pequeños volúmenes de fluidos. Sin embargo, se debe mencionar que en la actualidad existen tópicos de fundamental interés sobre estos dispositivos que asocian los procesos de transporte de masa, momentum y energía. El desarrollo de un chip no es simplemente el uso de instrumentos convencionales en escalas pequeñas, requiere del entendimiento y control de muchos fenómenos físicos, químicos, abarcando escalas que van de centímetros hasta nanómetros, (Hu y Li, 2006; Stone et al., 2004; Steffen y Friedhelm, 2007).

Entre los aspectos para el diseño de microflujos se pueden considerar el manejo de fuerzas para mover el flujo y las características de los conductos llamados microcanales. Se ha reportado que los microflujos pueden ser manipulados por diversos tipos de campos externos, ejercidos por fuerzas de presión, eléctricas, magnéticas, capilares, sonoras, también es posible combinar dichas fuerzas con las características mecánicas, geométricas y químicas del microcanal según convenga para el mejor flujo del fluido, (Hu y Li, 2006; Stone et al., 2004; Steffen y Friedhelm, 2007). Siguiendo el contexto, las microbombas tienen buen desarrollo para el flujo continuo en un laboratorio en un chip. (Laser y Santiago 2004, y Chunsun et al., 2007) reportan clasificaciones y aplicaciones de las microbombas de acuerdo a su principio de funcionamiento. Desde las primeras bombas introducidas en 1980, los progresos en el análisis y desarrollo de microbombas han sido rápidos (Laser y Santiago, 2004). Las microbombas utilizadas para la manipulación de microfluidos generalmente se clasifican en dos grupos: mecánicas con partes móviles y no mecánicas con partes no móviles (Chunsun et al., 2007). Las primeras se dividen a su vez en varias categorías: piezoeléctricas, neumáticas, termoneumáticas, electrostáticas, electromagnéticas y bimetálicas; mientras que las no mecánicas principalmente incluyen microbombas electrocinéticas, magnetohidrodinámicas (MHD, por sus siglas en inglés), electroquímicas de onda acústica, de tensión superficial y capilaridad (Laser y Santiago, 2004).

Los mecanismos electrocinéticos incluyen electro-osmosis, electroforesis y dielectroforesis, y juegan roles cada vez más importantes en dispositivos en micro y nano escalas (Hu y Li, 2006). El transporte de fluidos en micro canales de dispositivos microfluídicos usa dos métodos comunes: imposición de un diferencial de presión-flujo de Poiseuille y por la imposición de un campo eléctrico-flujo, electro-osmótico, (Bayraktar y Pidugu, 2006). De esta forma, las microbombas electro-osmóticas han surgido como una opción viable para un variado número de aplicaciones como son: La mezcla de muestras médicas y biológicas, el análisis en el área alimenticia y el análisis en plantas de tratamiento de agua(Laser y Santiago, 2004).

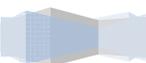


En forma general, algunas ventajas del uso de dispositivos microfluídicos en la industria biomédica son: El bajo costo de producción en masa de estructuras microfluídicas, un alto rendimiento de procesos en paralelo, el uso de un reducido volumen de la muestra o reactivo así como un reducido desperdicio de las muestras y la posibilidad de fabricación de dispositivos desechables altamente integrados.

## 1.2 Aspectos generales de macro, micro y nano flujos.

Una cantidad importante a determinar en el flujo de un fluido es el número de Reynolds,  $R_e = \rho u_c L_c / \mu$  para indicar el régimen de flujo en que se encuentra el sistema, en donde  $\rho$  y  $\mu_f$  son la densidad y viscosidad dinámica del fluido,  $u_c$  y  $L_c$  son la velocidad y longitud característica del sistema, respectivamente, (Steffen y Friedhelm, 2007). En el diseño de sistemas de tubos circulares macroscópicos, el régimen de flujo es generalmente turbulento con  $R_e \geq 2300$  y en el caso de sistemas con  $R_e \leq 2300$  el régimen es laminar. En contraste, en la escala de microflujos el régimen es usualmente laminar; en este caso, considerando valores característicos para sistemas de laboratorios en un chip, se obtienen valores de  $R_e \sim 1$  y menores. Esto lo demuestra en el flujo dentro del microcanal usualmente ocurre en régimen laminar donde el flujo es gobernado por las fuerzas viscosas. El carácter laminar en microflujos tiene aplicaciones importantes para el diseño de sistemas microfluídicos en el monitoreo, control, resolución y modelado de análisis de muestras, en procesos de separación, detección y reacción, así como en el empleo de herramientas computacionales para simulación de los sistemas. Otra diferencia fundamental entre macro y microflujos es la influencia de la teoría de capa límite. En macroflujos, los campos de velocidad, temperatura y concentración son significativamente diferentes en la región de la capa límite respecto de la región restante del dominio del flujo. En microflujos, las capas límite gobiernan y se extienden en todo el dominio del flujo; de esta manera la cobertura de capas límite en microflujos puede ser explotada para determinar de forma más relevante los campos de flujo, temperatura y concentración, y su consecuente aprovechamiento en el control y manipulación (Steffen, 2007).

Por otra parte, en los últimos años ha ocurrido un progreso en el campo de la nanofabricación, éste proceso ha llevado a la manipulación de fluidos en dominios de longitudes por debajo de un micrómetro. El manejo de fluidos en estas escalas hace parecer en algunos casos que la perspectiva de



aplicación sea más remota que en el caso de microflujos; es por eso que, conforme las estructuras de conducción de los fluidos se vuelven más pequeñas, es conveniente revisar la aplicabilidad de las leyes macroscópicas de transporte de momento, energía, masa. En el caso de flujos macroscópicos, las leyes fundamentales de transporte siguen la hipótesis del medio continuo en donde el efecto del tamaño y espaciado intermolecular de los fluidos transportados respecto al tamaño de la escala longitudinal de los sistemas en donde se desplazan no afectan la aplicación de esta hipótesis. La aplicabilidad de la teoría del medio continuo y el uso de sus ecuaciones gobernantes de transporte se analiza con el número adimensional de Knudsen.  $K_n = \lambda/d$ , donde  $\lambda$  es la trayectoria libre promedio entre las moléculas del fluido, y  $d$  es la longitud característica del conducto por donde fluye el fluido (Steffen y Friedhelm, 2007). Aquí,  $\lambda = (k_B T) / (\sqrt{2} \pi \sigma^2 p)$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$ ,  $\sigma$ ,  $p$  son la temperatura, el diámetro promedio de la partícula de fluido y la presión total del sistema de flujo, respectivamente. Hu y Li, (2006) mencionan que para el flujo de gases y con valores de  $K_n < 0.01$ , la hipótesis del medio continuo es aplicable. En el intervalo de  $0.01 < K_n < 0.1$ , la hipótesis del medio continuo puede ser todavía aplicable a las ecuaciones gobernantes, sin embargo, las condiciones de frontera en las paredes sólidas tienen que considerar el efecto del deslizamiento del fluido. Para valores altos del número de Knudsen, en la región de transición  $0.1 < K_n < 10$ , las ecuaciones de medio continuo no proveen una descripción adecuada de los procesos de transporte y en general este rango del número de Knudsen ofrece una alta complejidad de análisis para la predicción de los campos de velocidad, temperatura y concentración, debido a las colisiones intermoleculares entre moléculas del fluido y las paredes sólidas. Para valores de  $K_n > 10$ , es alcanzado el régimen de flujo molecular libre entre las moléculas del fluido y las paredes sólidas y las colisiones entre moléculas pueden ser despreciadas. También señalan que en el caso de flujos de líquidos, el fenómeno fluídico en microescalas en el  $\sim 100\text{nm} - 100\mu\text{m}$ , todavía puede ser descrito por la hipótesis del medio continuo. Es importante considerar que el decremento de la longitud de las escalas provoca importantes fuerzas superficiales, haciendo que los efectos electrocinéticos sean relevantes, y los efectos inerciales sean despreciables; es decir, que el transporte de masa en dispositivos microfluídicos está dominado por fuerzas viscosas más que por fuerzas inerciales. Los canales fluídicos continuos debajo de la escala de 100nm, entran en la región de nanofluídica. La Tabla 1.1 resume algunos valores característicos manejados en la escala de macro, micro y nanoflujos, y los correspondientes valores de los números adimensionales de  $R_e$  y  $K_n$ .



**ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.**

Tabla 1.1. Valores típicos geométricos, físicos (soluciones acuosas) y de flujo en dispositivos macro, micro y nano.

Parámetro/Notación	Unidad	Macro Referencia	Micro Referencia	Nano Referencia
Altura del microcanal / $L_c$	m	$\sim 10^{-2}$ Mataix, (2008)	$\sim 10^{-4}$ Bayraktar, (2006); Horiuchi, (2004)	$\sim 10^{-8}$ Wang, (2010)
Densidad / $\rho$	Kg/m <sup>3</sup>	$\sim 10^3$ Mataix, (2008)	$\sim 10^3$ Tang, (2004a, 2007); Das, (2006)	$\sim 10^3$ Wang, (2010)
Viscosidad dinámica / $\mu_f$	Pa · s	$\sim 10^{-3}$ Mataix, (2008)	$\sim 10^{-3}$ Das, 2006; Horiuchi, 2004; Zhao, (2008)	$\sim 10^{-3}$ Wang, (2010)
Temperatura / $T$	K	$\sim 10^2$ Mataix, (2008)	$\sim 10^2$ Tang, (2004a; Das, 2006); Xuan, (2008)	$\sim 10^2$ Wang, (2010)
Presión / $p$	P	$\sim 10^5$ Mataix, (2008)	$\sim 10^5$ Bayraktar, (2006)	$\sim 10^5$ Andry, (2011)
Diámetro promedio de la partícula / $\sigma$	m	$\sim 10^{-9}$ Masliyah, (2006)	$\sim 10^{-9}$ Masliyah, (2006)	$\sim 10^{-9}$ Masliyah, (2006)
Velocidad / $u_c$	m/s	$\sim 10^0$ Mataix, (2008)	$\sim 10^{-3}$ Ramos, (2007); Bayraktar, (2006); Stone, (2004)	$\sim 10^{-3}$ Wang, (2010)
Numero de Reynolds / $R_e$		$\sim 10^4$	$\sim 10^{-1}$	$\sim 10^{-5}$
Numero de Knudsen / $K_n$		$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-5}$	$\sim 10^{-1}$

### 1.3 Electromagneto-hidrodinámica

Las ecuaciones de Maxwell son el conjunto de ecuaciones que describen por completo los fenómenos electromagnéticos y están dadas por la Tabla 1.2, (Griffiths, 1999). En la actualidad pueden ser reducidas de la forma como se muestra en la Tabla 1.3, (Griffiths, 1999; Masliyah y Bhattacharjee, 2006).

Tabla 1.2. Ecuaciones de Maxwell de los fenómenos electromagnéticos.

Nombre	Ecuación en forma diferencial
Ley de corrientes totales	$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + (\partial \mathbf{D} / \partial t)$
Vector potencial magnético	$\mu \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$
Ley circuital de Ampere	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{tot}$
Fuerza de Lorentz	$\mathbf{E} = \mu \mathbf{V} \times \mathbf{H} - (\partial \mathbf{A} / \partial t) - \nabla \psi$
Ecuación de electricidad elástica	$\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$
Ley de Ohm	$\sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}$
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$
Ecuación de continuidad de carga	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -(\partial \rho_e / \partial t)$

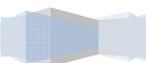


Tabla 1.3. Ecuaciones de Maxwell reducidas de los fenómenos electromagnéticos.

Nombre	Ecuación en forma diferencial
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ley de Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$
Ley generalizada de Ampere	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + (\partial \mathbf{D} / \partial t)$

donde  $\mathbf{J}_{tot}$  es la corriente total,  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente eléctrica,  $\mathbf{D}$  es la densidad de flujo eléctrico,  $\rho_e$  es la densidad de carga eléctrica libre,  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,  $\psi$  es el potencial eléctrico,  $\sigma$  es la conductividad eléctrica del medio,  $\mathbf{H}$  es la intensidad de campo magnético,  $\mu$  es la permeabilidad magnética,  $\mathbf{V}$  es la velocidad de la carga del campo magnético,  $\mathbf{A}$  es el potencial magnético,  $\epsilon$  es la permisividad dielectrica del medio, y  $\mathbf{B}$  es la densidad del flujo magnético.

En forma complementaria, se establecen las siguientes relaciones electromagnéticas para un medio homogéneo:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \quad (1.1)$$

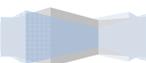
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (1.2)$$

donde  $\epsilon_0, \epsilon_r, \mu_0, \mu_r$  son la permisividad del vacío, la permisividad relativa del medio, la permeabilidad magnética del vacío y permeabilidad magnética relativa del medio. Aunque la velocidad de la luz no aparece explícitamente en las ecuaciones de las Tablas 1.2 y 1.3 las cuales gobiernan la propagación de las ondas electromagnéticas, es un parámetro importante que es recuperado mediante la siguiente expresión

$$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2, \quad (1.3)$$

donde  $c$ , es la velocidad de la luz en el vacío.

Por otra parte, en el contexto sobre los límites del electromagnetismo para simplificar las ecuaciones de Maxwell, se pueden derivar las ecuaciones en condiciones electro-cuasiestáticas y magneto-cuasiestáticas en el movimiento de fluidos para desacoplar los efectos eléctricos y magnéticos. Los cuasiestáticos se



refieren a un movimiento lento del fluido y se describe como lento en comparación a la velocidad de la luz, (Castellanos, 1998).

De esta forma, considerando primeramente la ecuación de la conservación de la energía en un sistema, (Kikuchi, 1999)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (1.4)$$

donde  $W$  es la densidad total de la energía del sistema y  $\mathbf{Q}$  es la densidad total del flujo de energía, las cuales son definidas a continuación

$$W = \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho U + \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{Q} = \rho V \left( \frac{1}{2} V^2 + h \right) - V \mathbf{\Pi} - k_f \nabla T + \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (1.6)$$

donde  $U$  y  $h$  son la energía interna y la entalpía por unidad de masa,  $\mathbf{\Pi}$  y  $k_f$  son el tensor de esfuerzos viscosos y la conductividad térmica del fluido, respectivamente. Estableciendo la competencia entre los términos de la densidad de energía eléctrica y magnética de la ecuación (1.5), (Castellanos et al., 1998; 2007)

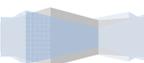
$$\frac{\varepsilon E^2 / 2}{B^2 / 2\mu} = \frac{E^2}{c^2 B^2}, \quad (1.7)$$

con  $\mu \varepsilon \sim 1/c^2$ .

Ramos, (2007), indica que para sistemas microfluídicos, el campo magnético generado  $B_j$  por el flujo de una corriente eléctrica debido a la aplicación de un campo eléctrico, se puede determinar de la ecuación de la ley de Ampere, Tabla 1.3.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + (\partial \mathbf{D} / \partial t), \quad (1.8)$$

con la densidad del flujo eléctrico  $\mathbf{D}$  no varía con respecto al tiempo en condiciones electrocuasiestáticas, se tiene



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1.9)$$

sustituyendo la ecuación (1.2) en la ecuación (1.9) se transforma de la siguiente manera

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \mu. \quad (1.10)$$

Proponiendo las siguientes escalas características para el campo magnético, geometría del sistema microfluídico y para la densidad de corriente,

$$B_c \sim B_j; \quad \nabla \sim \frac{1}{l}; \quad J_c \sim j, \quad (1.11)$$

donde  $j$ ,  $B_j$  y  $l$ , son la densidad de la corriente, el campo magnético generado y longitud característica.

De la ecuación (1.12), se establecen las siguientes variables adimensionales, respectivamente

$$B^* = \frac{B}{B_j}; \quad \nabla^* \sim \nabla l; \quad J^* = \frac{J}{j}, \quad (1.12)$$

sustituyendo la ecuación (1.12) en la (1.10), esta se transforma en la siguiente expresión

$$\frac{B_j}{l} \nabla^* \times B^* = J^* \mu j, \quad (1.13)$$

por lo tanto, el orden de magnitud del campo magnético generado por una corriente eléctrica se obtiene de la ecuación (1.14)

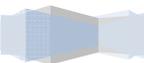
$$B_j \sim \mu j l. \quad (1.14)$$

De la ley de Ohm, de la Tabla 1.2

$$\sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad (1.15)$$

se establece la siguiente escala característica para el campo eléctrico aplicado

$$E_c \sim E_x, \quad (1.16)$$



de donde se obtiene la siguiente variable adimensional

$$E^* = \frac{E}{E_x}, \quad (1.17)$$

sustituyendo las variables adimensionales correspondientes de la ecuación (1.12) y (1.17) en la ecuación (1.15), se obtiene

$$\sigma E_x E^* = jJ^*, \quad (1.18)$$

de la ecuación anterior, el orden de magnitud de la densidad de corriente eléctrica es

$$j \sim \sigma E_x. \quad (1.19)$$

Por tanto, considerando materiales no magnéticos  $\mu \approx \mu_0$  y tomando en cuenta los valores típicos de sistemas microfluídicos con soluciones electrolíticas acuosas, se obtiene el orden de magnitud del campo magnético  $B_j$ , a partir de la ecuación (1.14) y (1.20)

$$B_j \sim \mu j l \ll 1, \quad (1.20)$$

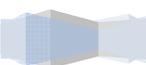
y poder evaluar en ordenes de magnitud de la ecuación (1.7),

$$\frac{\varepsilon E_x^2 / 2}{B_j^2 / 2} \gg 1. \quad (1.21)$$

Lo anterior implica que los efectos del campo magnético en las ecuaciones de Maxwell pueden ser desacopladas de los fenómenos magnéticos, (Ramos, 2007; Castellanos et al., 1998; 2007). De esta manera, las ecuaciones de Maxwell aplicables a flujos electrocinéticos se reducen en Tabla 1.4.

Tabla 1.4 Ecuaciones de Maxwell aplicables al estudio de la electrohidrodinámica.

Nombre	Ecuación en forma diferencial
Ley de Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e$
Ley de Faraday	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
Ecuación de continuidad de carga	$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -(\partial \rho_e / \partial t)$



## 1.4 Doble capa eléctrica

En 1870, Helmholtz desarrollo la teoría de la doble capa eléctrica (EDL, por sus siglas en inglés), la cual relaciona los parámetros eléctricos y de flujo para el transporte electrocinético, y está formada por una capa fija y una capa difusa, (Karniadakis et al., 2005).

Generalmente, la superficie sólida del microcanal adquiere cargas electrostáticas cuando está en contacto con una solución acuosa. La superficie cargada atrae iones opuestos en el líquido hacia la región cercana a la pared, formando así la EDL. Bajo el efecto de un campo eléctrico aplicado tangencialmente, el exceso de iones de carga opuesta a la pared dentro de la EDL será movida, dando como resultado el movimiento de todo el volumen del líquido por efecto viscoso (Hu y Li, 2006).

El plano entre la capa fija y la capa difusa es llamada plano de corte, el potencial eléctrico en ese plano es llamado zeta potencial o  $\zeta$  (Bayraktar y Pidugu, 2006).

La EDL se forma típicamente en el orden de unos cuantos nanómetros de espesor o un poco más gruesa, dependiendo de la concentración iónica de la solución (entre más alta concentración iónica, más bajo será el espesor de la EDL), (Bayraktar y Pidugu, 2006). Su magnitud puede ser definida aproximadamente por la longitud de Debye o  $\kappa^{-1}$  que depende de la concentración molar del fluido ionizado y está dada por

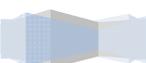
$$\kappa^{-1} = \left( \frac{2n_{\infty} z^2 e^2}{\epsilon k_B T} \right)^{1/2}, \quad (1.22)$$

donde  $n_{\infty}$  es el número de concentración iónica general de la solución,  $z$  es la valencia del electrolito,  $e$  es la carga eléctrica elemental,  $\epsilon$  es la permisividad dieléctrica del medio y  $k_B$  es la constante de Boltzmann, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006).

## 1.5 Clasificación de flujos electrocinéticos

Masliyah y Bhattacharjee (2006), dividen el fenómeno electrocinético en:

**Electro-ósmosis**, que presenta el movimiento, debido a la aplicación de un campo eléctrico, de una solución electrolítica relativa a una superficie estacionaria. La presión necesaria para contra balancear el flujo electro-osmótico es llamada presión electro-osmótica. Dicha presión entre los dos extremos del



microcanal puede ser medida cuando no hay flujo a través del microcanal bajo la influencia de la aplicación del campo eléctrico, y puede ser despreciada a fin de estudiar únicamente el efecto electro-osmótico.

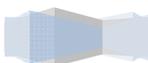
Por ejemplo, cuando un silicato está en contacto con una solución acuosa, su superficie puede ser cargada con iones negativos, positivos o neutrales, dependiendo del PH de la solución electrolítica. Si la superficie del canal es cargada con iones negativos, los iones positivos dentro del fluido son atraídos hacia dicha superficie y se agrupan inmediatamente cerca de la pared, formando la capa fija, que tiene el grosor del diámetro de un ion; dichos iones son atraídos con grandes fuerzas electrostáticas, por lo tanto son inmovilizadas cerca de la superficie de la pared cargada.

Inmediatamente después de la capa fija se forma la capa difusa, en donde los iones son libres para moverse, (Karniadakis et al., 2005). Bajo un campo eléctrico aplicado, los iones positivos dentro de la capa difusa se mueven en la dirección del campo eléctrico, provocando el traslado de dicho movimiento al fluido entre las EDL's a lo largo del canal, debido a la naturaleza cohesiva del fluido (viscosidad), dejando una fuerza eléctrica de cuerpo sobre la totalidad del fluido, (Bayraktar y Pidugu, 2006).

**Potencial de corriente**, un campo eléctrico es creado cuando una solución electrolítica es hecha para fluir a través de una superficie estacionaria, por la aplicación de un gradiente de presión. Este tipo de flujo es generalmente encontrado en microcanales estrechos conectados a dos receptores. Si una solución electrolítica es bombeada a través de un microcanal cargado negativamente, el campo eléctrico creado fluirá en sentido contrario al flujo de la solución. Este principio es utilizado en la desalinización del agua de mar y es considerado lo opuesto a la electro-osmosis.

**Electroforesis**, es el movimiento de una superficie cargada, relativa a un líquido estacionario, causado por la aplicación de un campo eléctrico a dicho líquido. Usualmente es empleado para la medición del potencial superficial de una partícula cargada. En este tipo de flujo, no se puede aplicar algún tipo de gradiente de presión para provocar el flujo.

**Sedimentación de potencial**, un campo eléctrico es creado cuando partículas cargadas se mueven relativamente a un líquido. El movimiento de las partículas puede ser bajo un campo gravitacional o centrifugo. Este fenómeno es llamado algunas veces *efecto Dorn* o *migración de potencial*. En estricto sentido, la sedimentación de potencial es definido para el caso en el que la corriente de flujo es nulo en tal proceso.



## 1.6 Sistemas coloidales.

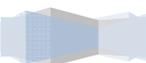
Una gran cantidad de sustancias que se utilizan en la vida diaria son mezclas, es decir a un sistema de más de un componente en la que distinguimos un disolvente y uno o varios solutos. En la mayor parte de los casos el soluto está constituido por moléculas normales, cuyo tamaño suele ser inferior a 1nm, (Rodríguez, 2008).

El transporte electrocinético está relacionado estrictamente al campo de las ciencias coloidales, por lo tanto es necesario el entendimiento del fenómeno y sistemas coloidales para el estudio de los procesos electrocinéticos. Thomas Graham (1805-1869) inventó los términos coloidal y cristaloides para clasificar dos tipos de materia. Los cristaloides forman una solución homogénea cuando son disueltos en un solvente (Masliyah y Bhattacharjee, 2006). Los sistemas coloidales son sistemas de al menos dos fases, una de ellas finamente dividida en pequeñas partículas llamada fase dispersa o fase discontinua, a las que rodean completamente la otra sustancia llamada fase dispersante o fase continua (Rodríguez, 2008).

Por ejemplo, al considerar una solución acuosa con partículas de silicato con diámetro de 25nm y serán aproximadamente 100 veces más grandes que las moléculas de agua (0.276nm). En este caso, aunque las moléculas son separadas aparecerán como parte de un medio continuo relativo a las partículas del silicato. En contraste, si añadimos una sal (por decir NaCl) a la dispersión, los iones de sodio y cloro con diámetro hidratado aproximadamente de 0.4-0.5nm serán del mismo rango de magnitud que el solvente. En este caso, los iones también aparecerán como parte de un medio continuo relativo a las partículas de silicato. Por lo tanto, para tener un sistema coloidal, el medio suspendido o separado tendrá un tamaño aproximado de una orden de magnitud más grande que las moléculas del solvente, entonces, las partículas coloidales son usualmente definidas como entidades que tienen un rango de magnitud de 1nm a 10 $\mu$ m (1 $\mu$ m=10<sup>-6</sup>m).

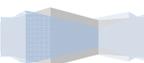
Como ejemplo de coloidales podemos citar: nieblas, humos, smog, que son dispersos de finas partículas en un medio de dispersión gaseoso, o *aerosoles*; leche, una dispersión de finas gotas de grasa en agua, o *emulsión*; pinturas, lodos, dispersiones de finas partículas sólidas en un medio líquido (aceite, agua); gelatinas, dispersiones de macromoléculas en líquido, o *geles*; por nombrar algunos.

De forma genérica, según la naturaleza de la fase dispersa y de la fase continua, los distintos tipos de sistemas coloidales (Masliyah y Bhattacharjee, 2006), en donde se clasifica las magnitudes de algunas partículas típicas en un sistema coloidal, como por ejemplo los virus se encuentran localizados en



$\sim 10^{-1} \mu\text{m}$ , mientras que las bacterias se encuentran en  $\sim 10^0 \mu\text{m}$ , y las células de sangre entre un rango del  $\sim 10^0 \mu\text{m}$  a un  $\sim 10^1 \mu\text{m}$ , por citar algunos.

El siguiente Capítulo hará uso de estos antecedentes sobre flujos electrocinéticos y ecuaciones gobernantes generales para desarrollar la formulación del modelo matemático y resolver en el presente trabajo, el cual considera el transporte de fluidos no Newtonianos en microcanales de placas planas paralelas.



## Capítulo 2

### Formulación del problema

#### 2.1 Modelo Físico

En la Figura 2.1 se muestra el esquema del modelo físico de estudio. Se considera el transporte de un fluido no Newtoniano con el modelo reológico de ley de potencia en un electrolito simétrico. El fluido fluye a través de un microcanal de placas planas paralelas de altura  $2H$ , longitud  $L$  y espesor de pared  $h$ . Se establece que  $L/H \gg 1$ ,  $L/h \gg 1$ . El sistema de coordenadas se compone de una coordenada axial  $x$  y una coordenada transversal  $y$ . El flujo es accionado por un campo eléctrico  $E_x$  (electro-osmótico) generado por la aplicación de un potencial eléctrico en la dirección axial entre la entrada y salida del microcanal. El fluido entra a una temperatura  $T_0$  en  $x=0$ . La pared del microcanal tiene condiciones adiabáticas en  $x \leq 0$  y  $x \geq L$ . En la región  $0 \leq x \leq L$ , hay un flujo de calor constante  $q_0''$  desde la pared externa del microcanal hacia los alrededores del sistema. En la figura se indica la alta concentración de carga eléctrica en la zona de la longitud de Debye  $\kappa^{-1}$  dentro de la EDL; además de la velocidad de referencia Smoluchowski  $u_c$ , en la dirección del flujo.

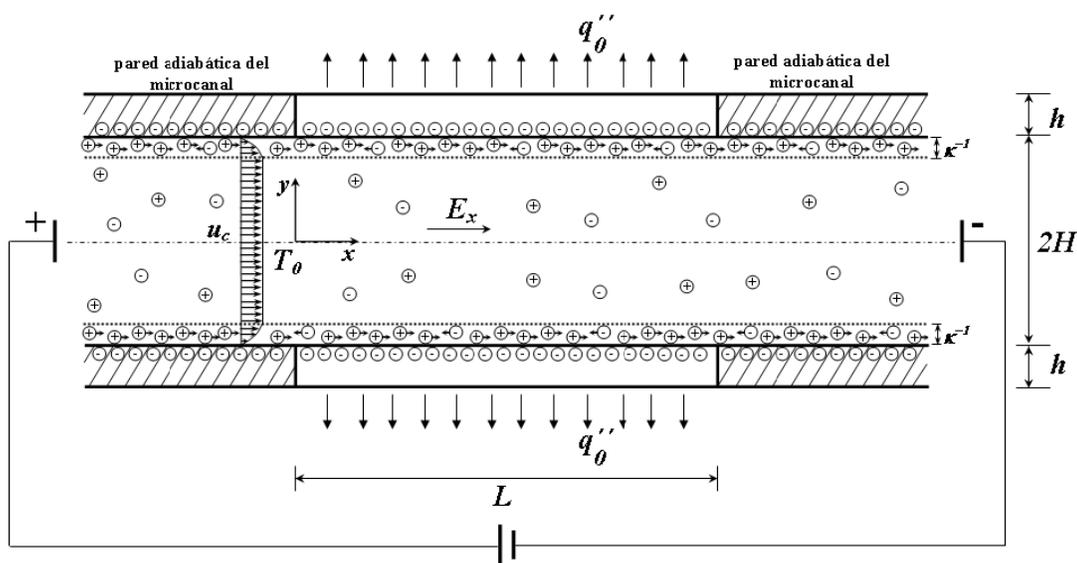
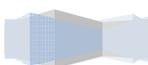


Figura.2.1 Esquema del flujo electro-osmótico en un microcanal de placas planas paralelas.



## 2.2 Ecuaciones gobernantes generales

Las ecuaciones gobernantes generales, que describen los fenómenos de transporte del presente trabajo, son: la ecuación del potencial eléctrico dentro de la doble capa eléctrica (EDL), conservación de la masa, conservación de la cantidad de movimiento, ecuación constitutiva de fluidos no Newtonianos de ley de potencia y conservación de la energía en las regiones del fluido y sólido del microcanal. Estas ecuaciones se presentan a continuación.

*Ecuación de Poisson-Boltzmann.*

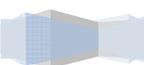
La mayoría de las superficies consiguen cargas eléctricas superficiales cuando entran en contacto con un electrolito. Las fuerzas electrostáticas derivadas de estas cargas eléctricas superficiales son esenciales para estabilizar las suspensiones coloidales y juegan un papel relevante en sistemas de conductos con flujo de fluidos biológicos y procesos industriales. En el objetivo de entender el papel de la concentración y distribución de cargas y del potencial eléctrico, Masliyah y Bhattacharjee (2006) realizan un estudio sobre la electrostática en este tipo de fluidos (en ausencia de una corriente eléctrica) en contacto con superficies solidas, este estudio es como antecedente de su aplicación en flujos electrocinéticos.

De la ley de Gauss, definida como una ecuación de Maxwell en la Tabla 1.4, que relaciona el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada y las cargas dentro de la superficie; además tomando en cuenta la relación eléctrica dada por la ecuación (1.1), se obtiene

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho_e . \quad (2.1)$$

Considerando un campo eléctrico irrotacional, de la fuerza de Lorentz en Tabla 1.2, el campo eléctrico se puede determinar en función del escalar potencial eléctrico,  $\mathbf{E} = -\nabla \psi$ . De esta manera, la distribución del potencial eléctrico en estado de equilibrio en un microcanal que confina una solución electrolítica se determina por medio de la ecuación de Poisson como se indica de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla \psi = -\rho_e , \quad (2.2)$$



de la distribución de Boltzmann para un electrolito simétrico, se tiene que la densidad de carga eléctrica de la solución electrolítica en las cercanías de las superficies solidas de un microcanal dentro de la EDL, está dada por la siguiente expresión, (Maslyah y Bhattacharjee, 2006)

$$\rho_e = -2zen_\infty \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_f}\right), \quad (2.3)$$

donde  $z, e, n_\infty, k_B$  y  $T_f$  son la valencia del electrolito, la carga eléctrica elemental, el número de concentración iónica general de la solución, la constante de Boltzmann y temperatura del fluido respectivamente. Al sustituir la ecuación (2.3) en (2.2) se tiene la ecuación de Poisson-Boltzmann para la distribución del potencial eléctrico dentro de la EDL, como a continuación se muestra

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla \psi = 2zen_\infty \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_f}\right), \quad (2.4)$$

*Ecuación de conservación de la masa*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0, \quad (2.5)$$

*Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento*

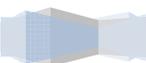
$$\frac{D\rho \mathbf{V}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{b}, \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{\Pi}$  y  $\mathbf{b}$  son el tensor total de esfuerzos y las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen respectivamente.  $\mathbf{\Pi}$ , se define como

$$\mathbf{\Pi} = p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}, \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{I}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  son el tensor de identidad y el tensor de esfuerzos, respectivamente. Las fuerzas del cuerpo  $\mathbf{b}$  se establecen de la manera siguiente

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}_E + \mathbf{f}_g, \quad (2.8)$$



donde  $\mathbf{f}_E$  y  $\mathbf{f}_g$  son las fuerzas debidas al efecto del campo eléctrico y gravitacional, respectivamente.  $\mathbf{f}_E$  Se establece como a continuación se indica, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Kikuchi, 1999; Castellanos y Pérez, 2007)

$$\mathbf{f}_E = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right), \quad (2.9)$$

el primer término de la ecuación (2.9) es la fuerza de Coulomb, el segundo es la fuerza dieléctrica y el último es la fuerza de electro-restrictiva.  $\mathbf{f}_g$  se representa por

$$\mathbf{f}_g = \rho \mathbf{g}. \quad (2.10)$$

#### *Ecuación constitutiva de fluidos de ley de potencia*

El modelo de Ostwald-de Waele de la ley de potencia describe la viscosidad como una función que es proporcional a una potencia del tensor de la rapidez de deformación del fluido  $\dot{\gamma}$

$$\tau = \mu \dot{\gamma}; \quad \mu = m \dot{\gamma}^{n-1}, \quad (2.11)$$

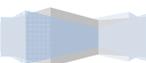
donde  $\tau, \mu, \dot{\gamma}, n$  y  $m$ , son el tensor de esfuerzos, la viscosidad aparente, el tensor de la rapidez de deformación, el índice de comportamiento del flujo, y el índice de consistencia de flujo, respectivamente.

La rapidez de deformación se define como

$$\dot{\gamma} = (\nabla \mathbf{V}) + (\nabla \mathbf{V})^T \quad (2.12)$$

La ecuación de la ley de potencia contiene dos datos experimentales. Un parámetro es el exponente de  $n$ , el cual es el índice de comportamiento del flujo, el segundo parámetro es  $m$ , el cual es el índice de consistencia de flujo constante.

El modelo de la ley de potencia puede describir a un fluido Newtoniano, en este caso  $m = \mu$  y  $n = 1$ , mientras que para valores en los cuales  $n > 1$  el fluido es llamado dilatante (se hace más espeso) y para valores de  $n < 1$  son llamados fluidos pseudoplásticos, por lo que ha este comportamiento es llamado dilución. (Morrison F. A., 2001).



*Ecuación de conservación de la energía.*

La ecuación de conservación de la energía para la región del fluido es

$$\rho C_{pf} \frac{DT_f}{Dt} = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + \Pi \dot{\gamma} + \dot{q}, \quad (2.13)$$

donde  $C_{pf}$  es el calor específico del fluido,  $\dot{q}$  es la generación de energía debida al calentamiento Joule por unidad de volumen en el fluido; ésta última definida por, (Tang et al., 2004; Das y Chakraborty, (2006)

$$\dot{q} = \frac{(\rho_e \mathbf{V} + \sigma \mathbf{E})(\rho_e \mathbf{V} + \sigma \mathbf{E})}{\sigma(T_f)}. \quad (2.14)$$

Por otra parte, la ecuación de conservación de la energía para la región sólida de la pared del microcanal es, (Xuan et al., 2004; Tang et al., 2004b)

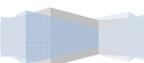
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s C_{ps} T_s) = \nabla \cdot (k_s \nabla T_s), \quad (2.15)$$

donde  $C_{ps}$ ,  $k_s$  y  $T_s$  son el calor específico, la conductividad térmica y temperatura de la pared del microcanal, respectivamente.

### 2.3 Consideraciones

Las ecuaciones gobernantes del subcapítulo 2.2 en coordenadas cartesianas de Poisson-Boltzmann, conservación de la masa, conservación de la cantidad de movimiento, constitutiva de fluidos de ley de potencia, conservación de la energía para la región del fluido y del sólido, consideradas en el presente trabajo son las siguientes, respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_r \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon_r \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_r \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{2ze n_{\infty}}{\varepsilon_0} \sinh \left( \frac{ze\psi}{k_B T_f} \right), \quad (2.16)$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{xx} + \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} + \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{xz} + \dot{\gamma}_{zx} \\ \dot{\gamma}_{yx} + \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{yy} + \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} + \dot{\gamma}_{zy} \\ \dot{\gamma}_{zx} + \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{zy} + \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\gamma}_{zz} + \dot{\gamma}_{zz} \end{pmatrix};$$

(2.19)

$$\mu = m \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{xx} + \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} + \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{xz} + \dot{\gamma}_{zx} \\ \dot{\gamma}_{yx} + \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{yy} + \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} + \dot{\gamma}_{zy} \\ \dot{\gamma}_{zx} + \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{zy} + \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\gamma}_{zz} + \dot{\gamma}_{zz} \end{pmatrix}^{n-1},$$

$$\rho C_{pf} \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} + w \frac{\partial T_f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \right) + \left\{ \begin{pmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{xx} + \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} + \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{xz} + \dot{\gamma}_{zx} \\ \dot{\gamma}_{yx} + \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{yy} + \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} + \dot{\gamma}_{zy} \\ \dot{\gamma}_{zx} + \dot{\gamma}_{xz} & \dot{\gamma}_{zy} + \dot{\gamma}_{yz} & \dot{\gamma}_{zz} + \dot{\gamma}_{zz} \end{pmatrix} + \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z, \quad (2.20)$$

$$\rho_s C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_s \frac{\partial T_s}{\partial z} \right), \quad (2.21)$$

donde  $u, v$  y  $w$  son las componentes de la velocidad en las coordenadas cartesianas  $x, y$  y  $z$ , respectivamente.



Las siguientes consideraciones se establecen para simplificar las ecuaciones gobernantes anteriores:

- Flujo incompresible
- El flujo es completamente desarrollado con  $\mathbf{V} = \{u(y), 0, 0\}$
- El campo de temperaturas se encuentra en régimen estacionario
- Propiedades constantes con la temperatura para cambios menores a 10 K, (Horiuchi y Dutta, 2004)
- Las paredes del microcanal están sujetas a un flujo de calor constante
- El efecto de la aceleración gravitacional es únicamente en la dirección de la coordenada  $y$
- No se imponen gradientes de presión externos entre la entrada y salida del microcanal
- El campo eléctrico es irrotacional, y actúa solamente en la dirección de la coordenada  $x$
- El movimiento del fluido obedece al modelo reológico de ley de potencia
- El calentamiento Joule es uniforme a través del microcanal
- Análisis bidimensional del sistema en la coordenada axial y transversal

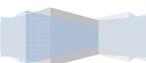
y la hipótesis siguiente:

- El potencial  $Z$  es uniforme a través de las paredes del microcanal, debido a los bajos cambios de temperatura en el sistema

Por lo tanto, atendiendo a las suposiciones establecidas las ecuaciones gobernantes se transforman de la siguiente forma, respectivamente

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2ze n_{\infty}}{\varepsilon} \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_f}\right), \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.23)$$



$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \rho_e E_x, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y, \quad (2.25)$$

$$\tau_{xy} = m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.26)$$

$$\rho C_{pf} \frac{\partial T_f}{\partial x} = k_f \left( \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \right) + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}_{yx} & 0 \\ \dot{\gamma}_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{(\rho_e u + \sigma E_x)(\rho_e u + \sigma E_x)}{\sigma} \right\} \right\}, \quad (2.27)$$

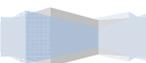
$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} = 0. \quad (2.28)$$

## 2.4 Estimación de órdenes de magnitud

*Ecuación de Poisson-Boltzmann*

Estableciendo las siguientes escalas características para la región del fluido

$$x \sim L; y \sim H; \psi \sim \zeta; \quad (2.29)$$



donde  $\zeta$  es el potencial zeta en el plano de corte dentro de la EDL. Se proponen las siguientes variables adimensionales

$$x^* = \frac{x}{L}; y^* = \frac{y}{H}; \psi^* = \frac{\psi}{\zeta}, \quad (2.30)$$

sustituyendo las variables adimensionales de la ecuación (2.30) en la ecuación (2.22)

$$\frac{\zeta}{L^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\zeta}{H^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} = \frac{2ze n_\infty}{\varepsilon} \sinh\left(\frac{ze\zeta\psi^*}{k_B T_f}\right). \quad (2.31)$$

Comparando en órdenes de magnitud los términos del lado izquierdo de la ecuación (2.31) y para valores típicos de flujos electro-osmóticos en el presente trabajo se tiene lo siguiente

$$\frac{\zeta}{L^2} \ll \frac{\zeta}{H^2}; \left(\frac{H}{L}\right)^2 \ll 1, \quad (2.32)$$

por lo tanto la ecuación (2.22) puede ser simplificada, como a continuación se indica.

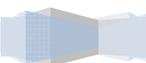
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2ze n_\infty}{\varepsilon} \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_f}\right) = \frac{-\rho_e}{\varepsilon}. \quad (2.33)$$

La ecuación (2.33) es válida para microcanales largos  $L \gg H$ , donde se considera que el potencial eléctrico es independiente de la posición axial y que el fluido está en estado de equilibrio sin la aplicación de un campo eléctrico, (Masliyah y Bhattacharjee 2006). Por otra parte considerando la aproximación de Debye-Hückel; se tiene de la ecuación (2.31)

$$\sinh\left(\frac{ze\zeta\psi^*}{k_B T_f}\right) \sim \frac{ze\zeta}{k_B T_f} \psi^*. \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) es válida, cuando se cumple la siguiente condición

$$\frac{ze\zeta}{k_B T_f} \leq 1, \quad (2.35)$$



que se alcanza con valores típicos utilizados en aplicaciones de flujos electro-osmóticos; por lo tanto la ecuación (2.33) se puede linearizar de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \kappa^2 \psi, \quad (2.36)$$

donde  $\kappa^2$  es el parámetro Debye-Huckel dado por

$$\kappa^2 = \left( \frac{2z^2 e^2 n_\infty}{\epsilon k_B T_f} \right), \quad (2.37)$$

*Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.*

Estableciendo las siguientes escalas características para la ecuación (2.24)

$$\tau \sim \tau_c; \quad y \sim H, \quad (2.38)$$

donde  $\tau_c$  es el esfuerzo característico. Se proponen las siguientes variables dimensionales

$$\tau^* = \frac{\tau}{\tau_c}; \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad (2.39)$$

sustituyendo la ecuación (2.39) en la ecuación (2.24)

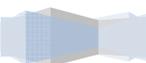
$$0 = \frac{\tau_c}{H} \frac{\partial \tau^*}{\partial y^*} + \rho_e E_x, \quad (2.40)$$

ahora, comparando en órdenes de magnitud el término de fuerzas viscosas con el de fuerzas electro-osmóticas de la ecuación anterior se obtiene que el esfuerzo característico sea del siguiente orden

$$\tau_c \sim \rho_e E_x H. \quad (2.41)$$

Por otra parte, estableciendo las siguientes escalas características para la ecuación (2.25)

$$p \sim p_c; \quad y \sim H, \quad (2.42)$$



donde  $p_c$  es la presión característica, se proponen las siguientes variables adimensionales

$$p^* = \frac{p}{p_c}; \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad (2.43)$$

sustituyendo las variables adimensionales anteriores en la ecuación (2.25) se obtiene

$$\frac{p_c}{H} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \rho g_y, \quad (2.44)$$

comparando el orden de magnitud entre el gradiente de presión en la coordenada transversal de la ecuación (2.44), con el termino de fuerzas electro-osmóticas de la ecuación (2.40), se obtiene lo siguiente

$$\rho_e E_x \gg \rho g_y; \quad \frac{\rho g_y}{\rho_e E_x} \ll 1, \quad (2.45)$$

de esta manera las fuerzas generadas por la columna hidrostática en el sistema pueden ser despreciadas.

*Ecuación de conservación de la energía en el fluido.*

Estableciendo las siguientes escalas características

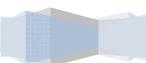
$$u \sim u_c; \quad E_c \sim E_x, \quad (2.46)$$

donde  $u_c$  es la velocidad característica. Comparando en órdenes de magnitud los términos constitutivos del calentamiento Joule en la ecuación (2.27) y para valores típicos de flujos electro-osmóticos

$$\frac{\rho_e u_c}{\sigma E_x} \ll 1, \quad (2.47)$$

el orden de magnitud de la ecuación anterior indica que el calor generado por la densidad de carga eléctrica moviéndose con el fluido es despreciable con el efecto conductivo al aplicar el campo eléctrico (Das y Chakraborty, 2006). Con lo indicado en la ecuación (2.47), el efecto de calentamiento Joule de la ecuación (2.27), queda determinado únicamente por

$$q_x \sim \sigma E_x^2. \quad (2.48)$$



Ahora, el orden de magnitud del término de disipación viscosa de la ecuación (2.27) es

$$\tau_{xy} \dot{\gamma}_{yx} \sim \tau_c \dot{\gamma}_c, \quad (2.49)$$

donde  $\dot{\gamma}_c$  es la velocidad de deformación característica dada por la siguiente expresión, (Morrison, 2001)

$$\dot{\gamma}_c \sim \frac{u_c}{H}, \quad (2.50)$$

por lo tanto, con ayuda de la ecuación (2.41) y la ecuación (2.50), la ecuación (2.49) se transforma en

$$\tau_c \dot{\gamma}_c \sim \rho_e E_x u_c. \quad (2.51)$$

Comparando en órdenes de magnitud el término de disipación viscosa dada por la ecuación (2.51), con el término de calentamiento Joule de la ecuación (2.48), se tiene lo siguiente

$$\frac{\rho_e E_x u_c}{\sigma E_x^2} \ll 1, \quad (2.52)$$

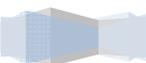
de la ecuación anterior, se concluye que el término de disipación viscosa en la ecuación de la energía se puede despreciar.

## 2.5 Ecuaciones gobernantes reducidas y condiciones de frontera

Las ecuaciones gobernantes de Poisson-Boltzmann, ecuación (2.36); conservación de la masa, ecuación (2.23); conservación de la cantidad de movimiento, ecuación (2.24); constitutiva de fluidos no Newtonianos de ley de potencia, ecuación (2.26); conservación de la energía del fluido, ecuación (2.27) y conservación de la energía del sólido ecuación (2.28), son reducidas finalmente de la forma siguiente.

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} = \kappa^2 \psi, \quad (2.53)$$

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad (2.54)$$



$$0 = \frac{d}{dy} \tau_{xy} + \rho_e E_x, \quad (2.55)$$

$$\tau_{xy} = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy}, \quad (2.56)$$

$$\rho C_{pf} u \frac{\partial T_f}{\partial x} = k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \sigma E_x^2, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} = 0, \quad (2.58)$$

con sus siguientes condiciones de frontera correspondientes

$$\psi(x, y = H) = \zeta, \quad (2.59)$$

$$\left. \frac{d\psi}{dy} \right|_{(x,y=0)} = 0, \quad (2.60)$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{(x,y=0)} = 0, \quad (2.61)$$

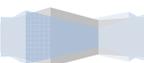
$$u(x, y = H) = 0, \quad (2.62)$$

$$T_f(x = 0, y) = T_0, \quad (2.63)$$

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial x} \right|_{(x=L,y)} = 0, \quad (2.64)$$

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{(x,y=0)} = 0, \quad (2.65)$$

$$T_f(x, y = H) = T_s(x, y = H); -k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{(x,y=H)} = -k_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial y} \right|_{(x,y=H)}, \quad (2.66)$$



$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial x} \right|_{(x=0,y)} = 0, \quad (2.67)$$

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial x} \right|_{(x=L,y)} = 0, \quad (2.68)$$

$$-k_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial y} \right|_{(x,y=H+h)} = q_0'' . \quad (2.69)$$

## 2.6 Adimensionalización de las ecuaciones gobernantes

### 2.6.1 Escalas características

$$x_f = x_s \sim L; y_f \sim H; y_s \sim h; \psi \sim \zeta; u \sim u_c; \quad (2.70)$$

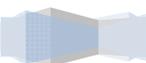
donde  $x_f$ ,  $x_s$ ,  $y_f$  y  $y_s$  son la coordenada axial del fluido, coordenada transversal de la pared solida del microcanal, coordenada transversal del fluido, coordenada transversal de la pared solida del microcanal, respectivamente.  $u_c$ , es la velocidad Smoluchowski definida por  $u_c = n\kappa^{(1-n)/n} (-\varepsilon\zeta E_x / m)^{1/n}$ , (Zhao et. al., 2008).

Ahora de la ecuación (2.57), al comparar en órdenes de magnitud los términos difusivos axial y transversal con el de generación de calor por calentamiento Joule, se tiene las siguientes escalas para los cambios de temperatura de la región del fluido en el sistema

$$\Delta T_{f,x} \sim \frac{\sigma E_x^2 L^2}{k_f}, \quad (2.71)$$

$$\Delta T_{f,y} \sim \frac{\sigma E_x^2 H^2}{k_f}, \quad (2.72)$$

donde  $\Delta T_{f,x}$  y  $\Delta T_{f,y}$  son los incrementos de la temperatura en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente en la región del fluido. Estableciendo un balance entre la ecuación (2.71) y (2.72) se tiene



$$\frac{\Delta T_{f,x}}{\Delta T_{f,y}} \sim \left(\frac{L}{H}\right)^2 \gg 1, \quad (2.73)$$

Lo que significa que las diferencias de temperaturas en la dirección longitudinal son mucho mayores que en la dirección transversal en el microcanal. En el caso particular de este trabajo el cambio de temperatura característico es elegido de la ecuación (2.72).

## 2.6.2 Variables adimensionales

Utilizando las escalas características de la sección 2.6.1 se obtiene las siguientes variables adimensionales respectivamente

$$X_f = X_s = \frac{x_f = x_s}{L}, \quad (2.74)$$

$$Y_f = \frac{y_f}{H}, \quad (2.75)$$

$$Y_s = \frac{y_s - H}{h}, \quad (2.76)$$

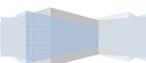
$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{\zeta}, \quad (2.77)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_c}, \quad (2.78)$$

$$\bar{T}_f = \frac{k_f(T_f - T_0)}{\sigma E_x^2 H^2}, \quad (2.79)$$

$$\bar{T}_s = \frac{k_f(T_s - T_0)}{\sigma E_x^2 H^2}, \quad (2.80)$$

donde  $X_f, X_s, Y_f, Y_s, \bar{\psi}, \bar{u}, \bar{T}_f$  y  $\bar{T}_s$ , son coordenada axial en la región del fluido y sólido, coordenada transversal del fluido, coordenada transversal de la pared sólida del microcanal, potencial eléctrico,



velocidad axial, temperatura del fluido y la temperatura de la pared sólida del microcanal, todas adimensionales, respectivamente.

### 2.6.3 Ecuación de Poisson-Boltzmann

Introduciendo las variables adimensionales de la ecuación (2.75) y (2.77) en la ecuación (A.11) del Apéndice A, se obtiene

$$\bar{\psi} = \frac{\cosh(\bar{\kappa}Y_f)}{\cosh(\bar{\kappa})}, \quad (2.81)$$

donde  $\bar{\kappa}$ , es el parámetro electrocinético y se define como, (Masliyah J.H., Bhattacharjee S., 2006)

$$\bar{\kappa} = \kappa H, \quad (2.82)$$

### 2.6.4 Ecuación de conservación de la masa

Introduciendo las variables adimensionales de la ecuación (2.74) y (2.78) en la ecuación (2.54) se tiene

$$\frac{d\bar{u}}{dX_f} = 0. \quad (2.83)$$

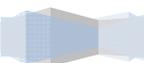
### 2.6.5 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Introduciendo las variables adimensionales de las ecuaciones (2.74), (2.75) y (2.78) en la ecuación (B.6) del Apéndice B, y en la ecuación (2.62)

$$\frac{d\bar{u}}{dY_f} = - \left[ \left( \frac{\bar{\kappa}}{n} \right)^n \frac{\sinh(\bar{\kappa}Y_f)}{\cosh(\bar{\kappa})} \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (2.84)$$

con su correspondiente condición de frontera

$$\bar{u}(X_f, Y_f = 1) = 0, \quad (2.85)$$



### 2.6.6 Ecuación de Conservación de la Energía en el fluido

Introduciendo las variables adimensionales de las ecuaciones (2.74)-(2.76) y (2.78)-(2.80) en las ecuaciones (2.57) y (2.63)-(2.66) se tiene

$$P_e \beta \bar{u} \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial X_f} = \beta^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial X_f^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial \bar{Y}_f^2} + 1, \quad (2.86)$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$\bar{T}_f(X_f = 0, Y_f) = 0, \quad (2.87)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial X_f} \right|_{(X_f=1; Y_f)} = 0, \quad (2.88)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial Y_f} \right|_{(X_f, Y_f=0)} = 0, \quad (2.89)$$

$$\bar{T}_f(X_f, Y_f = 1) = \bar{T}_s(X_s, Y_s = 0); \quad \left. \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial Y_f} \right|_{(X_f, Y_f=1)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \left. \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial Y_s} \right|_{(X_s, Y_s=0)}, \quad (2.90)$$

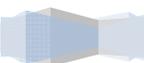
en el proceso de adimensionalización de las ecuaciones anteriores surgen los siguientes parámetros

$$Pe = \frac{\rho C_{pf} u_c H}{k_f}, \quad (2.91)$$

$$\beta = \frac{H}{L}, \quad (2.92)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{k_s}{k_f} \frac{H}{L} \frac{h}{L}, \quad (2.93)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h}{L}, \quad (2.94)$$



donde  $Pe, \beta, \bar{\alpha}$  y  $\bar{\varepsilon}$  son el número de Peclet, el cociente del alto a la longitud del microcanal en la región del fluido, el término de conjugación en el proceso de transferencia de calor y el cociente del alto a la longitud del microcanal en la región del sólido, cabe hacer mención que  $\bar{\alpha}$ , representa la competición entre el calor conductivo longitudinal en la pared del microcanal y el calor convectivo en el régimen de flujo laminar del fluido.

### 2.6.7 Ecuación de conservación de la energía en el sólido

Introduciendo las variables adimensionales de las ecuaciones (2.74), (2.76) y (2.80) en las ecuaciones (2.58) y (2.67)-(2.69) se obtiene

$$\bar{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{T}_s}{\partial X_s^2} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_s}{\partial Y_s^2} = 0, \quad (2.95)$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial X_s} \right|_{(X_s=0, Y_s)} = 0, \quad (2.96)$$

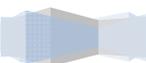
$$\left. \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial X_s} \right|_{(X_s=1, Y_s)} = 0, \quad (2.97)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial Y_s} \right|_{(X_s, Y_s=1)} = -\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}} \Lambda, \quad (2.98)$$

adicionalmente a las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.96-2.98), se tiene que considerar la condición de frontera de interface en el problema conjugado de transferencia de calor dado por la ecuación (2.90).

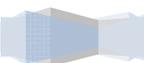
Finalmente,  $\Lambda$  esta dado por la siguiente ecuación

$$\Lambda = \frac{q_0''}{\sigma E_x^2 H}, \quad (2.99)$$



donde  $\Lambda$  es el término normalizado de generación de energía, y que indica la competencia entre el flujo de calor desde la pared externa del microcanal con el calor generado por calentamiento Joule.

En el siguiente capítulo, se planteará la metodología de solución del modelo matemático adimensional formulado en este apartado, con base en una solución numérica por un modelo iterativo convencional y su validación analítica por medio de una solución asintótica.



## Capítulo 3

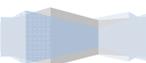
### Metodología de solución

#### 3.1 Solución numérica

##### 3.1.1 Análisis numérico

El modelo matemático se resolvió mediante un esquema numérico convencional en diferencias finitas centrales. Las ecuaciones de energía para el fluido y del sólido son resueltas por un proceso iterativo, en donde ni la temperatura, ni su correspondiente gradiente, ecuación (2.90), son conocidos en la interface sólido-líquido, lo que con lleva a un problema conjugado de transferencia de calor; por tanto, primeramente se resuelve la temperatura adimensional de la pared sólida con sus condiciones de frontera, especificando una temperatura arbitraria en la interface interna del microcanal para inicializar el proceso. Consecuentemente se obtiene un campo de temperaturas en la pared del microcanal, del cual se determinan el gradiente de temperatura en la interface interna hacia la región del sólido  $(\partial \bar{T}_s / \partial Y_s) \Big|_{(X_s, Y_s=0)}$ ; este gradiente de temperatura se usa para completar la condición de frontera de la ecuación (2.90) y determinar el gradiente de temperaturas  $(\partial \bar{T}_f / \partial Y_f) \Big|_{(X_f, Y_f=1)}$ , para resolver la ecuación de la energía en la región del fluido en conjunto con sus demás condiciones de frontera. De esta manera, se obtiene un campo de temperaturas para el fluido. Una vez que se resuelven las regiones del sólido y del fluido, se comparan las temperaturas interfaciales  $\bar{T}_f(X_f, Y_f=1)$  y  $\bar{T}_s(X_s, Y_s=0)$ , hasta cumplir la condición de tolerancia impuesta al proceso numérico  $|\bar{T}_f(X_f, Y_f=1) - \bar{T}_s(X_s, Y_s=0)| \leq 10^{-5}$ . Si la condición anterior no se satisface, el ciclo se repite llevando la nueva temperatura interfacial calculada en la iteración previa de la región del fluido al sólido, es decir,  $\bar{T}_f(X_f, Y_f=1) = \bar{T}_s(X_s, Y_s=0)$ , con el fin de inicializar nuevamente el proceso numérico. El anterior proceso numérico es desglosado en el diagrama de flujo del Apéndice E.

El modelo matemático del problema se resolvió numéricamente para diferentes valores de los parámetros adimensionales  $n$ ,  $\bar{\kappa}$ ,  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $Pe$ , y  $\Lambda$ . Para los cálculos numéricos, en el fluido se



empleó el siguiente tamaño de la malla discretizada  $\Delta X_s = 0.005, \Delta Y_f = 0.005$ , con  $M = 200$  nodos en la dirección transversal  $Y_f$  y  $N = 200$  nodos en la dirección longitudinal  $X_f$ . Similarmente, para la pared sólida del microcanal, el tamaño de malla es  $M = 200$  nodos en la dirección transversal  $Y_s$  y  $N = 200$  en la dirección longitudinal  $X_s$ . Por tanto, el sistema de ecuaciones lineal se presenta por una matriz de orden  $N \times M$  para cada región, el cual se resolvió por el método iterativo de Sobrerelajación Sucesiva (SOR, por sus siglas en Ingles), con una tolerancia de  $10^{-8}$ .

### 3.1.2 Método de SOR

La discretización de los modelos matemáticos adimensionales y sus respectivas condiciones de frontera, (Apéndice D), se implementaron en el método iterativo de solución SOR, (Hoffman, 2001), en el método de SOR, la temperatura adimensional del fluido y de la pared del microcanal es evaluada en interacciones sucesivas mediante

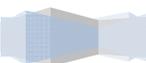
$$\bar{T}_{f;i,j}^{k+1} = \bar{T}_{f;i,j}^k + \omega_f \Delta \bar{T}_{f;i,j}^{k+1}, \quad (3.1)$$

$$\bar{T}_{s;i,j}^{k+1} = \bar{T}_{s;i,j}^k + \omega_s \Delta \bar{T}_{s;i,j}^{k+1}, \quad (3.2)$$

donde  $k, i$  y  $j$ , son el número de iteraciones y posiciones nodales de la malla discretizada en la dirección axial y transversal, respectivamente;  $\bar{T}_f, \omega_f, \Delta \bar{T}_{f;i,j}^{k+1}$  y  $\bar{T}_s, \omega_s, \Delta \bar{T}_{s;i,j}^{k+1}$ , son la temperatura adimensional en forma discretizada, factor de relajación del método SOR y cambio de la temperatura adimensional por iteración y nodo de malla discretizada en la región del fluido y sólido, respectivamente. El factor de relajación se obtiene mediante.

$$\omega_{f,s} = 2 \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \xi_{f,s}}}{\xi_{f,s}} \right), \quad (3.3)$$

donde  $\xi_{f,s}$  y  $\omega_{f,s}$ , son la constante del método de Sobre Relajación Sucesiva y el factor de relajación del método SOR, tanto para la región del fluido como para la del sólido.



$$\xi_{f,s} = \left[ \frac{\cos(\pi/I) + (\Omega, \Phi)^2 \cos(\pi/J)}{1 + (\Omega, \Phi)^2} \right]^2; \quad (3.4)$$

$$I = (i_{max-1}); J = (j_{max-1}),$$

donde  $\Omega = \Delta X_f / \Delta Y_f$  y  $\Phi = \Delta X_s / \Delta Y_s$ , son las relaciones del aspecto de la malla discretizada en la región del fluido y solido, respectivamente;  $i_{max}$  y  $j_{max}$ , son el número máximo de nodos en la dirección axial y transversal. La codificación de la solución numérica en Fortran PowerStation 4.0, se presenta en el Apéndice F.

## 3.2 Solución asintótica

### 3.2.1 Análisis asintótico

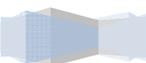
Con el objetivo de validar los resultados numéricos, se propuso una solución asintótica para las ecuaciones (2.86) y (2.95). Por tanto, para obtener los parámetros adimensionales y los regímenes de trabajo relevantes para este propósito, se introduce un análisis de órdenes de magnitud en este apartado. Debido a las condiciones adiabáticas de ambos lados de la pared del microcanal, un orden de magnitud del balance de energía en la pared del microcanal indica, en primera aproximación, que la mayoría del calor generado por efecto del calentamiento Joule es del orden de magnitud del calor conductivo transversal en el sistema del microcanal y también del mismo orden de magnitud que las pérdidas de calor, esto es

$$\sigma E_x^2 H \sim k_f \frac{\Delta T_{f,y}}{H} \sim k_s \frac{\Delta T_{s,y}}{h} \sim q_0'', \quad (3.5)$$

donde  $\Delta T_{s,y}$  es el incremento de temperatura característica en la dirección transversal de la pared del microcanal. Por otra parte, el cambio total de temperatura en la coordenada transversal del microcanal es entonces del orden de

$$\Delta T_y \sim \Delta T_{f,y} + \Delta T_{s,y}. \quad (3.6)$$

Combinando las ecuaciones (3.5) y (3.6), se puede demostrar que



$$\frac{\Delta T_{f,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{1}{\left[1 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}}\right]}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\Delta T_{s,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}}}{\left[1 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}}\right]}, \quad (3.8)$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.7), el cambio total de temperatura en la coordenada transversal debe ser del orden de

$$\Delta T_y \sim \frac{\sigma E_x^2 H^2}{k_f} \left[1 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}}\right] \sim \Delta T_{f,y} \left[1 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}}\right]. \quad (3.9)$$

De las ecuaciones (3.7) y (3.8), se obtienen límites asintóticos relevantes, los cuales dictan los regímenes físicos del proceso conjugado de transferencia de calor. Básicamente, para flujos electro-osmóticos se tienen límites típicos para parámetros adimensionales los cuales son  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$  y  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim 1$  y  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \gg 1$ , todos con  $\bar{\alpha} \ll 1$ .

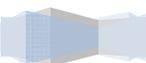
Para valores de  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$ , de las ecuaciones (3.7) y (3.8), se obtiene

$$\frac{\Delta T_{f,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}; \quad \frac{\Delta T_{s,y}}{\Delta T_y} \sim 1, \quad (3.10)$$

Con la ecuación (3.10), se puede observar que la caída de temperatura transversal en el fluido son muy pequeñas comparadas con el cambio total de temperatura  $\Delta T_y$ , a lo mucho del orden de  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$ ; mientras que las variaciones de temperatura transversal en la pared del microcanal con el cambio total de temperatura  $\Delta T_y$ , son del mismo orden.

En el límite  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim 1$ , se obtiene lo siguiente

$$\frac{\Delta T_{f,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{1}{2}; \quad \frac{\Delta T_{s,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{1}{2}, \quad (3.11)$$



así, las variaciones de temperatura transversal, tanto como para la pared del microcanal y el fluido (comparadas con  $\Delta T_y$ ), son del mismo orden de magnitud. Finalmente, para valores de  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \gg 1$ , de las ecuaciones (3.7) y (3.8), resulta

$$\frac{\Delta T_{f,y}}{\Delta T_y} \sim 1; \frac{\Delta T_{s,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}}. \quad (3.12)$$

A partir de la ecuación (3.12), se puede observar que la caída de temperatura transversal en el fluido es del mismo orden que el cambio total de la temperatura  $\Delta T_y$ , mientras que las variaciones de temperatura transversal en la pared del microcanal con el cambio total de temperatura  $\Delta T_y$  son muy pequeñas, a lo mucho del orden de  $\bar{\varepsilon}^2/\bar{\alpha}$ . La solución asintótica presentada en la siguiente sección, valida la solución numérica, considerando los límites asintóticos anteriormente mencionados.

### 3.2.2 Solución asintótica del campo de temperaturas

En este régimen, se proponen las siguientes series de expansiones regulares, en potencias de  $\bar{\alpha}$ , para la región del fluido y sólido por ser ecuaciones diferenciales lineales. Primeramente para la temperatura adimensional de la región del fluido

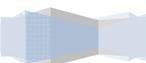
$$\bar{T}_f \sim \bar{\alpha}^0 \bar{T}_{f0}(X_f) + \bar{\alpha} \bar{T}_{f1}(X_f, Y_f) + \dots, \quad (3.13)$$

y para la región del sólido en el microcanal

$$\bar{T}_s \sim \bar{\alpha}^0 \bar{T}_{s0}(X_s, Y_s) + \bar{\alpha} \bar{T}_{s1}(X_s, Y_s) + \dots, \quad (3.14)$$

con lo anterior, se asume que la temperatura del fluido en primera aproximación es función de  $X_f$ , y la temperatura de la pared del microcanal depende de  $X_s$  y  $Y_s$ . Al introducir la ecuación (3.14) para la región del sólido en la ecuación (2.95), queda la siguiente expresión

$$\bar{\alpha} \left[ \bar{\alpha}^0 \frac{\partial^2 \bar{T}_{s0}}{\partial X_s^2} + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{T}_{s1}}{\partial X_s^2} + \dots \right] + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \left[ \bar{\alpha}^0 \frac{\partial^2 \bar{T}_{s0}}{\partial Y_s^2} + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{T}_{s1}}{\partial Y_s^2} + \dots \right] = 0, \quad (3.15)$$



con sus correspondientes condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.96-2.98), que se transforman de la manera siguiente, respectivamente

$$(X_s = 0, Y_s): \bar{\alpha}^0 \frac{\partial \bar{T}_{s0}}{\partial X_s} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{s1}}{\partial X_s} + \dots = 0, \quad (3.16)$$

$$(X_s = 1, Y_s): \bar{\alpha}^0 \frac{\partial \bar{T}_{s0}}{\partial X_s} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{s1}}{\partial X_s} + \dots = 0, \quad (3.17)$$

$$(X_s, Y_s = 1): \bar{\alpha}^0 \frac{\partial \bar{T}_{s0}}{\partial Y_s} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{s1}}{\partial Y_s} + \dots = -\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}} \Lambda. \quad (3.18)$$

Para la región del fluido, se sustituye la ecuación (3.13) en la ecuación (2.86) resultando en

$$Pe\beta\bar{u} \left[ \bar{\alpha}^0 \frac{\partial \bar{T}_{f0}}{\partial X_f} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{f1}}{\partial X_f} + \dots \right] = \beta^2 \left[ \bar{\alpha}^0 \frac{\partial^2 \bar{T}_{f0}}{\partial X_f^2} + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{T}_{f1}}{\partial X_f^2} + \dots \right] + \left[ \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{T}_{f1}}{\partial Y_f^2} + \dots \right] + 1, \quad (3.19)$$

con sus respectivas condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.72-2.74)

$$(X_f = 0, Y_f): \bar{\alpha}^0 \bar{T}_{f0} + \bar{\alpha} \bar{T}_{f1} + \dots = 0, \quad (3.20)$$

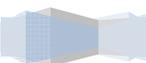
$$(X_f = 1, Y_f): \bar{\alpha}^0 \frac{\partial \bar{T}_{f0}}{\partial X_f} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{f1}}{\partial X_f} + \dots = 0, \quad (3.21)$$

$$(X_f, Y_f = 0): \bar{\alpha}^0 \frac{\partial \bar{T}_{f0}}{\partial Y_f} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{f1}}{\partial Y_f} + \dots = 0. \quad (3.22)$$

Ambas ecuaciones, (3.15) y (3.19), necesitan de condiciones de compatibilidad en la interface interna de la pared del microcanal dadas por la ecuación (2.90), quedando respectivamente

$$\left( \bar{\alpha}^0 \bar{T}_{f0} + \bar{\alpha} \bar{T}_{f1} + \dots \right) \Big|_{(X_f, Y_f=1)} = \left( \bar{\alpha}^0 \bar{T}_{s0} + \bar{\alpha} \bar{T}_{s1} + \dots \right) \Big|_{(X_s, Y_s=0)}, \quad (3.23)$$

$$\left[ \bar{\alpha}^0 \frac{\partial \bar{T}_{f0}}{\partial Y_f} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{f1}}{\partial Y_f} + \dots \right] \Big|_{(X_f, Y_f=1)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \left[ \bar{\alpha}^0 \frac{\partial \bar{T}_{s0}}{\partial Y_s} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{s1}}{\partial Y_s} + \dots \right] \Big|_{(X_s, Y_s=0)}. \quad (3.24)$$



Agrupando los términos del orden  $\bar{\alpha}^0$ , de la ecuación (3.24), se obtiene

$$o(\bar{\alpha}^0): \left. \frac{\partial \bar{T}_{f1}}{\partial Y_f} \right|_{(X_f, Y_f=1)} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^2} \left. \frac{\partial \bar{T}_{s0}}{\partial Y_s} \right|_{(X_s, Y_s=0)}. \quad (3.25)$$

Considerando los límites asintóticos de este apartado, se deduce que la ecuación (3.15). En primera aproximación, que los gradientes de temperatura en la dirección transversal de la pared interna y externa del microcanal son constantes; por lo anterior, de la ecuación (3.18) se tiene la siguiente igualdad

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_{s0}}{\partial Y_s} \right|_{(X_s, Y_s=0)} = \left. \frac{\partial \bar{T}_{s0}}{\partial Y_s} \right|_{(X_s, Y_s=1)} = -\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}} \Lambda, \quad (3.26)$$

de la ecuación (3.26), la condición de frontera en la interface interna del microcanal de la ecuación (3.25) se transforma en

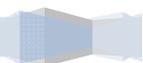
$$\left. \frac{\partial \bar{T}_{f1}}{\partial Y_f} \right|_{(X_f, Y_f=1)} = -\frac{\Lambda}{\bar{\alpha}}, \quad (3.27)$$

por otra parte, al considerar la ecuación (2.73), que indica que las variaciones de temperatura en la coordenada transversal son muy pequeñas en comparación de las caídas de temperatura en la coordenada axial, se puede integrar la ecuación (3.19) de la energía del fluido en la dirección de la coordenada transversal

$$\begin{aligned} \beta Pe \frac{\partial \bar{T}_{f0}}{\partial X_f} \int_{Y_f=0}^{Y_f=1} \bar{u} dY_f + \bar{\alpha} \beta Pe \frac{\partial \bar{T}_{f1}}{\partial X_f} \int_{Y_f=0}^{Y_f=1} \bar{u} dY_f = \\ \beta^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_{f0}}{\partial X_f^2} + \bar{\alpha} \beta^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_{f1}}{\partial X_f^2} + \bar{\alpha} \left. \frac{\partial \bar{T}_{f1}}{\partial Y_f} \right|_{(X_f, Y_f=1)} + 1, \end{aligned} \quad (3.28)$$

sustituyendo la ecuación (3.27) en (3.28) y agrupando términos del orden de  $\bar{\alpha}^0$ , se obtiene una ecuación diferencial simplificada para la temperatura adimensional de la región del fluido

$$o(\bar{\alpha}^0): \beta^2 \frac{d^2 \bar{T}_{f0}}{dX_f^2} - \beta Pe k_1 \frac{d\bar{T}_{f0}}{dX_f} - \Lambda + 1 = 0, \quad (3.29)$$



dónde  $k_1 = \int_{Y_f=0}^{Y_f=1} \bar{u}(Y_f; n, \bar{\kappa}) dY_f$ ,  $k_1$  es encontrada a partir de la integración, la solución numérica del perfil de velocidades adimensional (dado por el Apéndice C y D), utilizando el software de Origin Pro, versión 8.0. La solución general de la ecuación (3.29), con sus correspondientes condiciones de frontera indicadas por las ecuaciones (3.20) y (3.21), en primera aproximación es

$$\bar{T}_{f0}(X_f) = \frac{(\Lambda - 1)}{k_1 Pe} \left\{ \left[ \frac{\exp\left\{\frac{k_1 Pe}{\beta}(X_f - 1)\right\} - \exp\left\{-\frac{k_1 Pe}{\beta}\right\}}{k_1 Pe} \right] - \frac{X_f}{\beta} \right\}. \quad (3.30)$$

Por otra parte, considerando los límites asintóticos de este apartado en la ecuación (3.15), se agrupan términos del orden  $\bar{\alpha}^0$ , para obtener la siguiente expresión

$$\frac{d^2 \bar{T}_{s0}}{dY_s^2} = 0, \quad (3.31)$$

por lo tanto, la solución analítica de la ecuación de la energía para la temperatura adimensional de la pared solida del microcanal con sus correspondientes condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (3.18) y (3.23), en primera aproximación resulta como a continuación se indica

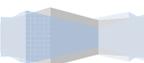
$$\bar{T}_{s0} = -\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}} \Lambda Y_s + \bar{T}_{f0}(X_f = X_s) \quad (3.32)$$

### 3.3 Número de Nusselt

De la definición de número de Nusselt

$$Nu = \frac{hL_c}{k_f}, \quad (3.33)$$

donde  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección y  $L_c \sim H$  es una longitud característica. El flujo de calor en la interface interna del microcanal obedece a la condición de no salto en la temperatura, por tanto



$$q''_{conv} = q''_{cond} = h [T_f(x, y = H) - T_{s,prom}] = -k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{(x,y=H)}, \quad (3.34)$$

donde  $q''_{conv}$  y  $q''_{cond}$  son el flujo de calor por convección y flujo de calor por conducción en la interface interna del microcanal, respectivamente;  $T_{s,prom}$  es la temperatura media en la pared del microcanal. De la ecuación (3.34) se deduce la siguiente expresión para el coeficiente de transferencia de calor por convección

$$h = \frac{-k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{(x,y=H)}}{T_f(x, y = H) - T_{s,prom}}. \quad (3.35)$$

Sustituyendo la ecuación (3.35) en la ecuación (3.33), el número de Nusselt reducido para este problema se escribe como

$$Nu = - \frac{H \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{(x,y=H)}}{T_f(x, y = H) - T_{s,prom}}. \quad (3.36)$$

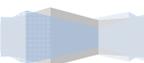
En términos de las variables adimensionales y con ayuda de la solución para el campo de temperaturas en primera aproximación de la sección 3.2.2, la ecuación (3.36) se transforma en

$$Nu = \frac{- \left. \frac{\partial \bar{T}_{f0}}{\partial Y_f} \right|_{(X_f, Y_f=1)}}{\bar{T}_{f0} - \bar{T}_{s0,prom}}, \quad (3.37)$$

donde  $\bar{T}_{s0,prom}$  es la temperatura media adimensional en la pared del microcanal definida por la siguiente relación

$$\bar{T}_{s0,prom} = \frac{\int_{Y_s=0}^{Y_s=1} \bar{T}_{s0}(X_s, Y_s) dY_s}{\int_{Y_s=0}^{Y_s=1} dY_s}. \quad (3.38)$$

La ecuación (3.38) se ayuda de la integración de la ecuación (3.32), quedando



$$\bar{T}_{s0, prom} = -\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2\bar{\alpha}} \Lambda + \bar{T}_{f0} (X_f = X_s). \quad (3.39)$$

De la ecuación (3.24) para los gradientes de la temperatura en la interface del microcanal se tiene

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \frac{\partial \bar{T}_{s0}}{\partial Y_s} \Big|_{(X_s, Y_s=0)} = \frac{\partial \bar{T}_{f0}}{\partial Y_f} \Big|_{(X_f, Y_f=1)}, \quad (3.40)$$

considerando la ecuación (3.26), la ecuación (3.40) se transforma en

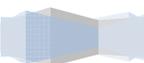
$$\frac{\partial \bar{T}_{f0}}{\partial Y_f} \Big|_{(X_f, Y_f=1)} = -\Lambda. \quad (3.41)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.39) y (3.41) en la ecuación (3.37), se obtiene el número de Nusselt reducido

$$Nu = 2 \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}. \quad (3.42)$$

El número de Nusselt reducido en forma discretizada para su solución numérica se encuentra al final del Apéndice D.

En el siguiente capítulo, se presentan en forma gráfica los resultados de la solución numérica en la distribución de los perfiles de temperatura en la región del fluido y sólido del microcanal en el problema conjugado de transferencia de calor que se plantea en este trabajo; además se mostrará la influencia de los parámetros adimensionales representativos en el proceso de transporte. Finalmente se validarán los resultados numéricos obtenidos para los perfiles de temperatura y para el número de Nusselt, con la solución analítica propuesta.



## Capítulo 4

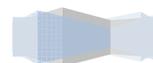
### Análisis de resultados

Para los propósitos numéricos y analíticos en este estudio, en la Tabla 4.1 se presentan valores de los parámetros físicos utilizados y que resultaron en los parámetros de transporte adimensionales involucrados en el análisis.

Tabla 4.1. Valores típicos y parámetros de transporte considerados en la solución numérica y asintótica.

	Notación	Valor	Unidad	Referencia
Geométricos	$H$	$\sim 10^{-5} - 10^{-4}$	(m)	Tang et al., 2004b,2007
	$h$	$\sim 10^{-5} - 10^{-4}$	(m)	Tang et al., 2007,2004 a,b; Xuan et al., 2004b
	$L$	$\sim 10^{-2} - 10^{-1}$	(m)	Tang et al., 2004a; Xuan et al., 2004a
Electrocinéticos	$\kappa^{-1}$	$\sim 10^{-7} - 10^{-6}(\ddagger)$	(m)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006
	$z$	$\sim 10^0$	(-)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006
	$\varepsilon$	$\sim 10^{-10} (*)$	(C/V · m)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006
	$\zeta$	$\leq 10^{-2}$	(V)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Afonso et al., 2009
	$E_x$	$\sim 10^4 - 10^5$	(V/m)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Horiuchi et al., 2006
	$\sigma$	$\sim 10^{-3}$	(S/m)	Ramos, 2007
Ley de potencia	$n$	0.33–1.5	(-)	Zhao et al., 2008
	$m$	$\sim 10^{-3} - 10^{-2}$	(Pa · s <sup>n</sup> )	Zhao et al., 2008; Das y Chakraborty, 2006
Flujo	$\rho$	$\sim 10^3$	(kg/m <sup>3</sup> )	Tang et al., 2004 a; Das y Chakraborty, 2006
	$u_c$	$\sim 10^{-4} - 10^{-3}$	(m/s)	Ramos, 2007
Térmicos	$k_f$	0.61–0.7	(W/m · K)	Tang et al., 2004b; Xuan et al., 2004a
	$k_s$	0.15–0.19(††)	(W/m · K)	Tang et al., 2004b; Xuan et al., 2004a
	$k_s$	1.38(§)	(W/m · K)	Tang et al., 2004b; Xuan et al., 2004a
	$C_{pf}$	4180	(J/kg · K)	Xuan et al., 2004a
	$q_0'$	$\sim 10^3$	(W/m <sup>2</sup> )	
Parámetros adimensionales	$\beta$	0.01	(-)	
	$\bar{\varepsilon}$	0.001	(-)	
	$\bar{\kappa}$	$\sim 10^1 - 10^2$	(-)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Tang et al., 2004b; Zhao et al., 2008
	$\bar{\alpha}$	$2.5 \times 10^{-7} - 2.5 \times 10^{-5}$	(-)	
	$Pe$	0.5–1.5	(-)	Horiuchi y Dutta, 2004
	$\Lambda$	0.5,0.75,1.0	(-)	Das y Chakraborty, 2006

† Basado en un electrolito simétrico con concentración iónica de  $\sim 0.001 - 0.0001$  mM; \* solución acuosa; †† polimetil metacrilato (PMMA); § sílice fundida



La Figura 4.1 muestra la distribución del potencial eléctrico  $\bar{\psi}$ , como una función de la coordenada transversal  $Y_f$ , para diferentes valores del parámetro electrocinético  $\bar{\kappa}(100,50,10,1)$ , obtenido de la ecuación (2.81), (Masliyah and Bhattacharjee, 2006), en donde se tiene que para valores mayores de  $\bar{\kappa}$  el potencial eléctrico se comporta con valores mínimos llegando con pendiente cero a medida que se acerca a la interface del microcanal, mientras que para valores menores de  $\bar{\kappa}$  el potencial eléctrico se incrementa considerablemente, para  $\psi \leq 1$ , por tal motivo la influencia del parámetro electrocinético  $\bar{\kappa}$ , es clara en esta figura, ya que para valores menores de  $\bar{\kappa}$  se muestra un tamaño mayor de la doble capa eléctrica con respecto al tamaño del microcanal (con tendencia a sobre colocar la doble capa eléctrica) y consecuentemente se tiene una baja influencia de un campo eléctrico externo cercano a la pared del microcanal.

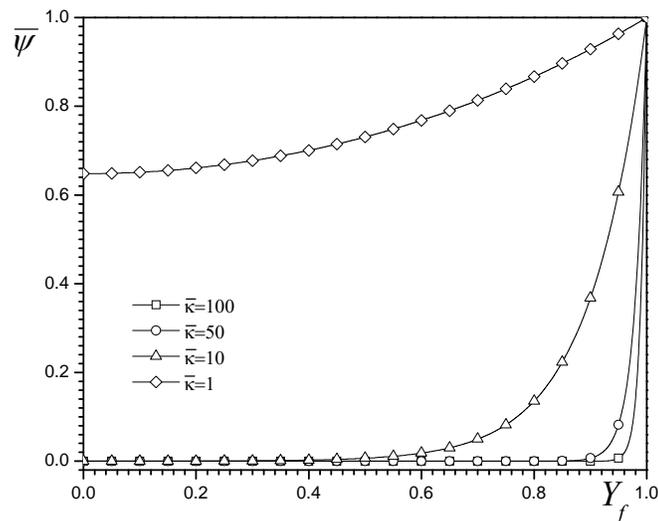


Figura 4.1 Distribución del potencial eléctrico  $\bar{\psi}$ , como función de la coordenada transversal  $Y_f$ , para diferentes valores del parámetro electrocinético  $\bar{\kappa}$ , adaptado de Masliyah and Bhattacharjee, 2006.

La Figura 4.2 muestra las distribuciones de velocidad para diferentes valores adimensionales del índice de comportamiento del flujo, ( $n = 0.33, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5$ ), mientras se mantiene el valor constante de  $\bar{\kappa} = 10, 50, 100$ , respectivamente. La velocidad adimensional fue obtenida usando la velocidad generalizada de Smoluchowski  $u_e$ , para la ley de potencia de fluidos. Se observa que el valor independiente del índice de comportamiento del flujo, la velocidad y los perfiles de velocidad llegan a ser más del tipo flujo tapón. Cuando el índice de comportamiento del flujo decrece y el parámetro electrocinético se incrementa a  $T_0$ ,  $n = 1$  el caso Newtoniano es recuperado. Se puede ver que los valores de  $n < 1$  (líquidos pseudoplásticos) el perfil de velocidad tiende a incrementar en la dirección del

flujo por encima del caso Newtoniano ( $n = 1$ ), mientras el efecto electro-osmótico está claramente marcado teniendo valores de velocidad más largos cercanos a la pared del microcanal, porque este tipo de fluidos tienen una viscosidad dinámica mucho menor en la pared (Zhao, et al., 2008).

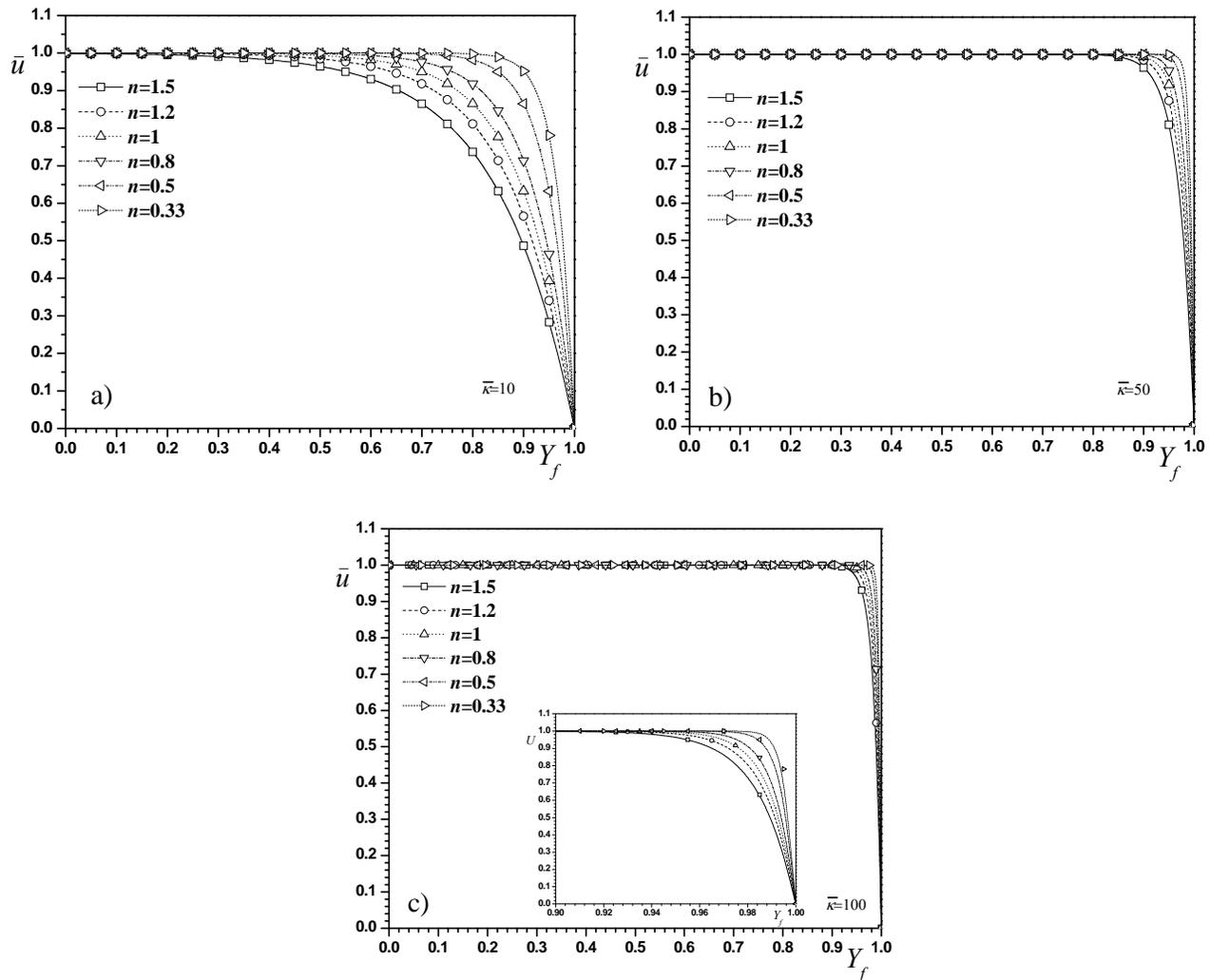
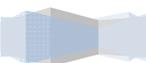


Figura 4.2 Distribución de velocidades adimensionales para diferentes valores del índice de comportamiento del fluido en  $n$ , mientras se mantiene a)  $\bar{\kappa} = 10$ , (adaptación Zhao et al., 2008), b)  $\bar{\kappa} = 50$  y c)  $\bar{\kappa} = 100$ .

Para valores de  $n > 1$  (líquidos dilatantes) el perfil de velocidad tiende a descender en la dirección del flujo por debajo del caso Newtoniano  $n = 1$ , mientras el efecto electro-osmótico es menor en la pared, teniendo un valor menor de velocidad cerca de la pared del microcanal, por lo que este tipo de fluidos tienen una viscosidad dinámica mucho mayor, asumiendo una influencia menor para el campo eléctrico externo (Zhao et al 2008). La influencia del parámetro electrocinético  $\bar{\kappa}$ , es claro en estas figuras, para valores menores a ( $\bar{\kappa} = 10$ ), indican un tamaño mayor de la doble capa eléctrica con respecto al



tamaño del microcanal (con tendencia a traslaparse la doble capa eléctrica) y consecuentemente una baja influencia de un campo eléctrico externo cercano a la pared del microcanal dejando una tendencia parabólica en los perfiles de velocidad, por otro lado para los valores de  $\bar{\kappa} (>>10)$  muestran un tamaño menor con respecto al tamaño de la doble capa eléctrica del microcanal y consecuentemente una mayor influencia por un campo eléctrico externo cercano a la pared del microcanal, dejando un flujo tapón en los perfiles de velocidad.

Para los parámetros mostrados y para validar la solución numérica de las ecuaciones (2.86-2.90) la Figura 4.3 compara el comportamiento del perfil de la temperatura axial en la región del fluido, con una solución asintótica dada por la ecuación (3.30); podemos observar que en una primera aproximación para la solución asintótica es cercana al perfil de la temperatura axial en la región del fluido en la solución numérica para diferentes valores de  $Y_f (= 0, 0.5, 1)$  y un valor de  $n (= 0.5)$  a lo largo del microcanal. También se puede apreciar el cumplimiento del orden de la magnitud de la ecuación (2.73), mostrando que los cambios de temperatura son más importantes en dirección longitudinal que en dirección transversal.

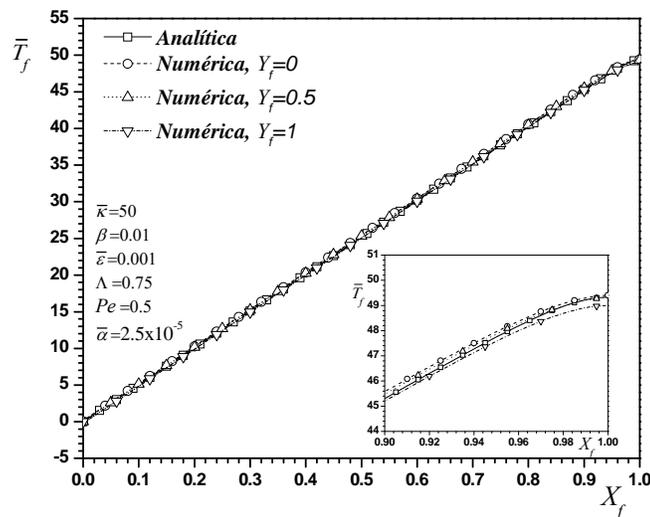
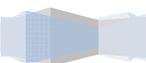


Figura 4.3 Comparación de la solución analítica y numérica para el desarrollo de los perfiles de temperatura en el fluido, a lo largo de la dirección axial, para diferentes valores de la posición transversal, manteniendo  $n = 0.5$ .

La Figura 4.4 muestra una comparación del perfil de temperatura transversal en la región del sólido dada por las ecuaciones (2.90, 2.95-2.98) con la solución asintótica la cual es obtenida de la ecuación (3.32). En donde se observa en primera aproximación el correcto desempeño del método numérico en la solución del modelo matemático al existir un comportamiento muy similar entre la solución analítica del



perfil de temperaturas en la región del sólido con la solución numérica en una posición media axial existente en la pared del microcanal.

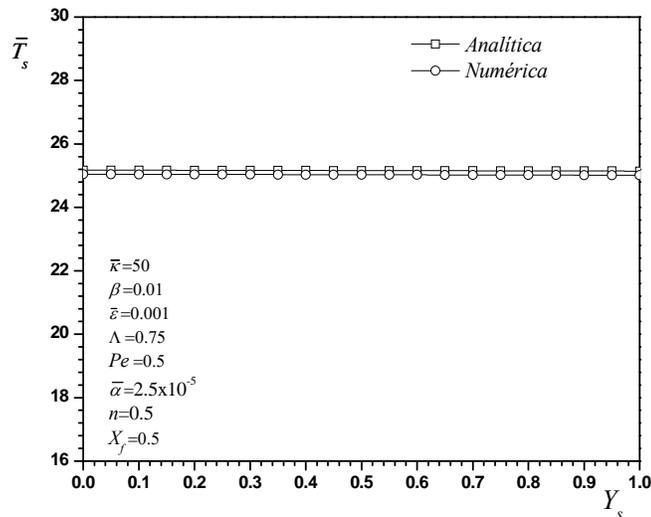
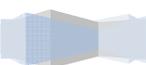


Figura 4.4 Comparación de la solución analítica y numérica para el desarrollo de los perfiles de temperatura a través de la dirección transversal en el sólido.

De acuerdo a la correspondencia entre la solución analítica y numérica en las Figuras 4.4-4.7, se grafican los resultados numéricos para el perfil de temperatura transversal de las regiones del fluido y sólido en el microcanal. La Figura 4.5 muestra el desarrollo del calentamiento Joule en el fluido y en el perfil de temperatura de la pared del microcanal, a lo largo de la dirección transversal en una posición axial  $X_f = X_s = 0.5$ , para diferentes valores de ( $n=0.33, 0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5$ ). Las distribuciones de temperatura en la región del fluido muestran una tendencia parabólica, mientras la pared sólida muestra un comportamiento lineal, (Tang, 2004b). También muestra que la temperatura más alta ocurre en el centro del microcanal, por lo que es claro que el calor generado por el calentamiento Joule es transferido desde la región central a la pared por convección y conducción en el fluido y se disipa a través de la pared del microcanal por conducción, finalmente el calor es transferido por el flujo de calor  $q_0''$ . Para los parámetros mostrados en la figura 4.5, se observa que para valores del índice de comportamiento de flujo  $n > 1$ , hay un incremento de los perfiles de temperatura (respecto a casos de fluidos Newtonianos), esto con el motivo del decremento de la velocidad y la consecuente reducción del efecto convectivo. Para el caso de  $n < 1$ , hay una reducción de los perfiles de temperatura (respecto a casos de fluidos Newtonianos) por el motivo del aumento de la velocidad y su consecuente incremento en el efecto convectivo de transferencia de calor.



ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.

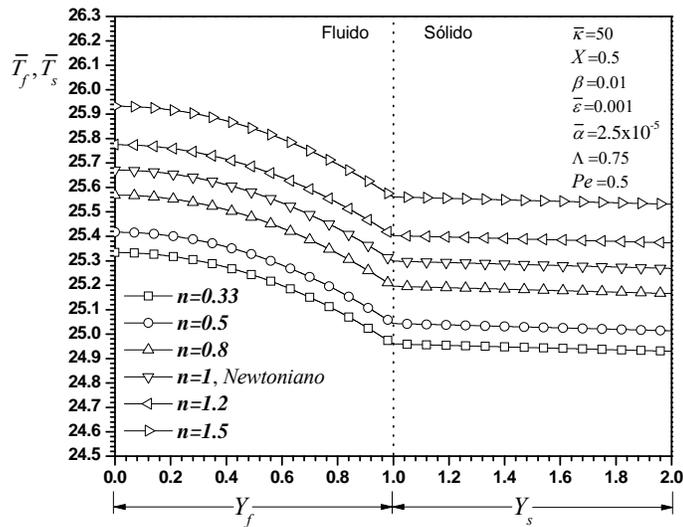


Figura 4.5 Perfil de temperatura adimensional como una función de la coordenada transversal adimensional en la región del fluido y sólido en  $X = 0.5$  para diferentes valores del índice de comportamiento del flujo,  $n$ .

La Figura 4.6 muestra los perfiles de temperatura adimensional a través de la sección transversal del microcanal para diferentes posiciones de la coordenada axial adimensional, ( $X = 0.1, 0.5, 1$ ). Para los parámetros seleccionados, se observa un crecimiento linear de la temperatura hacia la salida del microcanal.

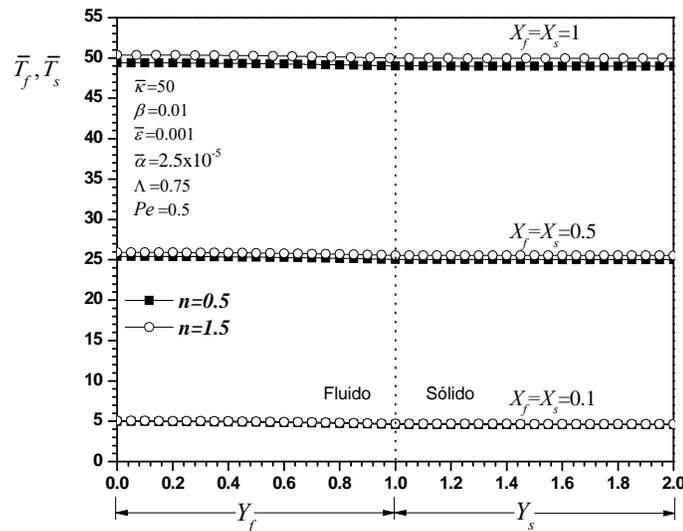
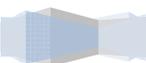


Figura 4.6 Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal del microcanal en la región del fluido y sólido, para diferentes posiciones adimensionales en la coordenada axial,  $X_f = X_s$ , y para diferentes valores del índice de comportamiento del flujo  $n$ .

En la Figura 4.7 se observa que para valores de  $\bar{k} = 10$  se presenta un incremento en la temperatura adimensional transversal del fluido y del sólido con valores de ( $n = 0.5, 1.5$ ) mientras que al incrementar



**ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL  
PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.**

el valor de  $\bar{\kappa} = 50$  con  $(n = 0.5, 1.5)$  se presenta un decremento de la temperatura transversal del fluido y del sólido, debido a la relación que existe con los perfiles de velocidad.

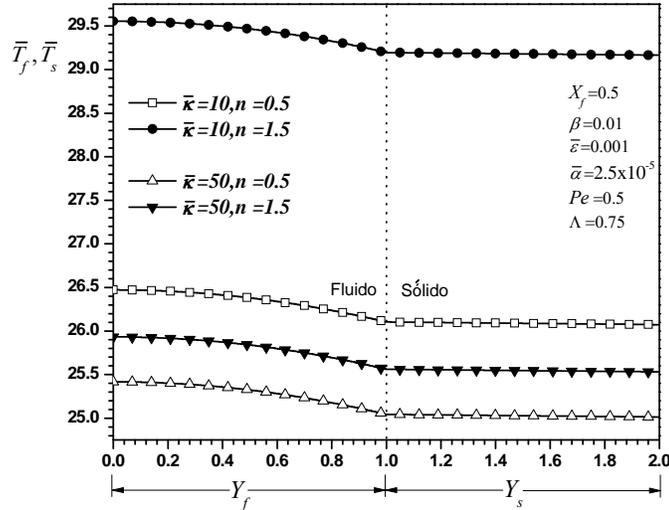


Figura 4.7 Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal en la región del fluido y del sólido, variando  $\bar{\kappa}$  y para dos valores diferentes de  $n$ .

En la Figura 4.8 muestra que al disminuir el número de  $Pe$ , también disminuye el efecto convectivo sobre el efecto de la conducción de calor, incrementando el perfil de temperatura significativamente pues el número de  $Pe$  es un indicador de una velocidad de convección en el sistema. El efecto del índice de comportamiento del fluido  $n > 1$  y  $n < 1$  es mostrado en el mismo orden que en la Figura 4.5

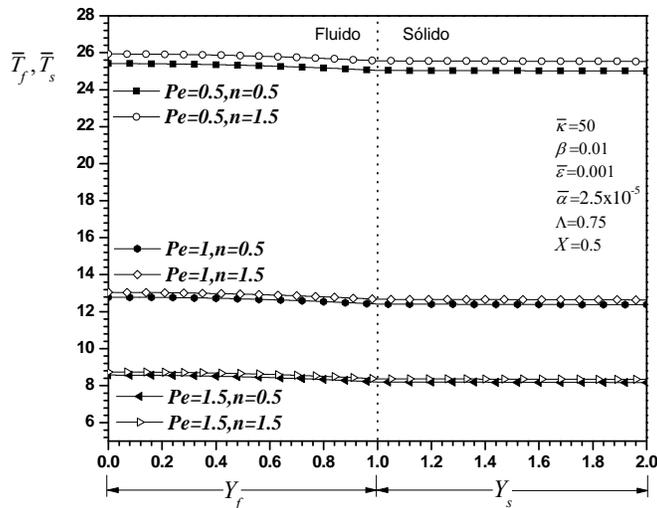
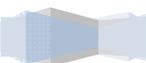


Figura 4.8 Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal en la región del fluido y del sólido, variando  $Pe$  y para valores diferentes de  $(n = 0.5, 1.5)$ .



A continuación, la Figura 4.9 representa los perfiles de temperatura a través de una dirección transversal del microcanal en la longitud media axial para la región del fluido y del sólido, para ( $\Lambda = 1, 0.75, 0.5$ ) y ( $n = 0.5, 1.5$ ) en todos los casos el valor de  $q_0''$  es considerado como una constante de extracción de calor desde las paredes del canal. Es importante recordar que la temperatura se incrementa en el flujo electro-osmótico bajo el cambio constante y continuo del calor en la pared y en las condiciones de frontera, siendo esto atribuido al mecanismo combinado de calentamiento Joule y transferencia de calor en las paredes. Para los casos estudiados en la Figura 4.9 el calentamiento Joule parece ser un mecanismo dominante detrás del incremento de temperatura dentro del sistema en general, para el incremento del valor del calentamiento Joule, la temperatura transversal tiende a incrementarse, desde los perfiles del diferencial de temperatura dejando ver el valor mínimo de  $\Lambda$ , la temperatura es mayor y se incrementa a una posición axial dada en el microcanal, (Das y Chacraborty, 2006)

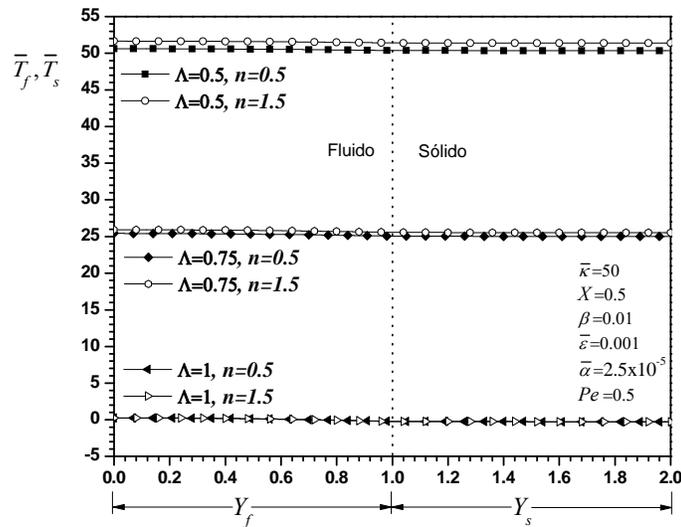
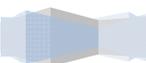


Figura 4.9 Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal en la región del fluido y del sólido, variando  $\Lambda$  y para dos valores diferentes de ( $n = 0.5, 1.5$ ).

En la Figura 4.10 expone los perfiles de temperaturas adimensionales a través de una sección transversal del microcanal evaluadas en la posición media axial para la región del fluido y sólido para diferentes valores de ( $\bar{\alpha}/\bar{\epsilon}^2 = 25, 2.5, 0.25$ ) y ( $n = 0.5, 1.5$ ). Esta figura muestra que para valores decrecientes de el parámetro  $\bar{\alpha}/\bar{\epsilon}^2$  hay incrementos del gradiente de temperatura a través de la pared del microcanal, estas predicciones numéricas son de acuerdo al análisis de órdenes de magnitud dadas en la sección 3.2 por ejemplo  $\bar{\alpha}/\bar{\epsilon}^2 = 25$ , corresponde al límite de la ecuación (3.12) donde prevalecen  $(\Delta T_{f,y}/\Delta T_y) \sim 1$



y  $(\Delta T_{s,y}/\Delta T_y) \sim \bar{\varepsilon}^2/\bar{\alpha}$ . a  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 2.5$ , corresponde al límite de la ecuación (3.11); Finalmente para  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 0.25$ ,  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 2.5$ , corresponde al límite de la ecuación (3.10), no obstante para los parámetros mostrados y los valores decrecientes del parámetro  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$ , la disposición del calor es más lenta a través de la pared del microcanal, causando un gradiente de temperatura significativa por la variación de conductividad térmica y de la geometría de la pared del microcanal.

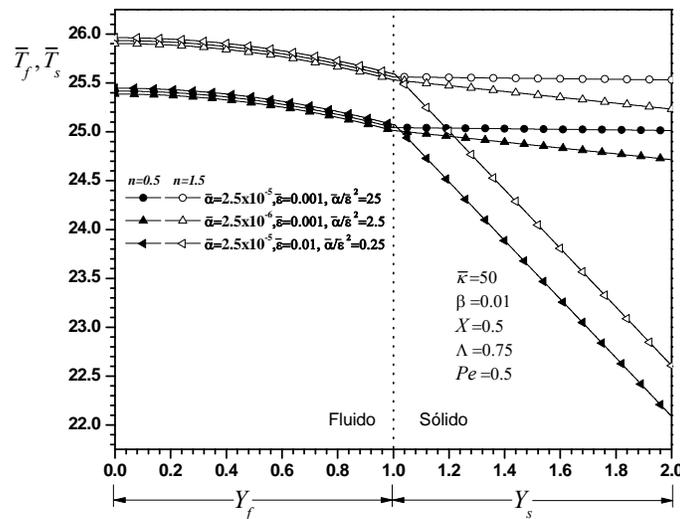
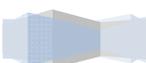


Figura 4.10 Perfil de temperatura adimensional como una función en la coordenada transversal en la región del fluido y del sólido, variando  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$  y para dos valores diferentes de  $(n = 0.5, 1.5)$ .

En las Tablas 4.2 y 4.3, se presenta la comparación entre las soluciones numérica y asintótica para el número de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales  $X$  y para diferentes parámetros adimensionales involucrados. En la Tabla 4.2 se muestra que el número de Nusselt es independiente de los parámetros adimensionales  $n, Pe, \Lambda$  y  $\bar{k}$ . En el caso del presente trabajo se tiene en donde el flujo del calor es constante en la interface externa del microcanal, se asume que  $Nu$  es una constante que también es independiente de la coordenada axial  $X$ , dependiendo únicamente del parámetro  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$  indicado por la ecuación (3.42) como se puede observar en la Tabla 4.3. En estas tablas, el subíndice  $A$ , se refiere a la solución asintótica y el subíndice  $N$ , denota la solución numérica.



**ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL  
PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.**

Tabla 4.2 Número de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales  $X$  y para diferentes parámetros adimensionales involucrados, con  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 25$ .

$X_f = X_s$	$Nu_N$								$Nu_A$
	$n = 0.5$	$n = 1.5$	$\bar{\kappa} = 10$	$\bar{\kappa} = 100$	$Pe = 0.5$	$Pe = 1$	$\Lambda = 0.75$	$\Lambda = 1.0$	
0.1	49.8343	49.8329	49.8343	49.8343	49.8329	49.8342	49.8343	49.8648	50
0.5	49.8387	49.8373	49.8387	49.8387	49.8373	49.8386	49.8387	49.8658	50
1.0	51.2909	51.4564	51.5045	51.2909	51.4564	51.5257	51.2909	49.8683	50

Tabla 4.3. Número de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales  $X$  y para tres valores de  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$  ( $= 25, 2.5, 0.25$ ) con  $\bar{\kappa} = 50, n = 0.5, Pe = 0.5$  y  $\Lambda = 0.75$  el subíndice  $A$ , se refiere a la solución asintótica y el subíndice  $N$ , denota la solución numérica.

$X_f = X_s$	$\bar{\alpha} = 2.5 \times 10^{-5}, \bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 25$		$\bar{\alpha} = 2.5 \times 10^{-6}, \bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 2.5$		$\bar{\alpha} = 2.5 \times 10^{-5}, \bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 0.25$	
	$Nu_N$	$Nu_A$	$Nu_N$	$Nu_A$	$Nu_N$	$Nu_A$
0.1	49.8343	50	4.9832	5	0.4983	0.5
0.5	49.8387	50	4.9833	5	0.4983	0.5
1.0	51.2909	50	5.0072	5	0.5128	0.5

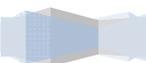


## Conclusiones

Se analizó numérica y asintóticamente el problema conjugado de transferencia de calor en estado estable de flujo de un fluido no Newtoniano en un microcanal de placas planas paralelas, bajo la aplicación de fuerzas electro-osmóticas. El fluido se consideró hidrodinámicamente desarrollado y con una relación constitutiva de la ley de potencia. El resultado final de este trabajo fue la estimación de los perfiles de temperatura adimensional en la región del fluido y de la pared sólida del microcanal para las consideraciones impuestas. Se mostró la influencia de los parámetros adimensionales de transporte representativos, como son los parámetros geométricos, electrocinéticos y de transferencia de calor; parámetros que tienen una relevancia significativa en el control del incremento o decremento de la temperatura en el sistema del microcanal.

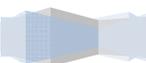
En el desarrollo hidrodinámico del perfil de velocidades en el flujo electro-osmótico tratado en el presente trabajo, el índice de comportamiento del flujo mostró ser relevante, para perfiles de velocidad pseudoplásticos aumenta. Comparado con el caso Newtoniano acercándose más a un flujo tapón pero en el caso de fluidos dilatantes el perfil de velocidad disminuye comparado con un fluido Newtoniano con la tendencia a tomar una forma del tipo parabólica. En el caso del parámetro adimensional  $\bar{\kappa}$  tiene una influencia relevante en el perfil hidrodinámico de velocidad, para valores crecientes de  $\bar{\kappa}$  la concentración del electrolito es alta provocando que la longitud de Debye tienda a disminuir, acercándose el perfil de velocidades a una configuración del tipo de flujo tapón.

Mientras que en los parámetros adimensionales relacionados con el desarrollo de los perfiles de temperatura,  $Pe$ ,  $\Lambda$ ,  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$  y  $n$ , este último resultó ser menos significativo. En el caso de valores decrecientes del número de Peclet los campos de temperatura aumentan, por lo tanto  $Pe$ , es un parámetro representativo para el proceso de transferencia de calor para este problema. Asimismo se muestra el comportamiento de  $\Lambda$ , el cual representa el efecto de extracción de energía sobre el sistema del microcanal y el flujo electro-osmótico, resultando ser este parámetro el de mayor importancia en el control de la temperatura y al cuál se le atribuye el mecanismo combinado de calentamiento Joule y transferencia de calor en las paredes del microcanal. Otro parámetro adimensional importante fue  $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$  en donde se observó que para valores decrecientes de este parámetro el flujo de calor es más lento a



través de la pared del microcanal causando un gradiente de temperatura significativo, por la variación de la conductividad térmica y la geometría de la pared del microcanal.

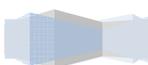
Es importante mencionar que tales efectos de calentamiento pueden tener consecuencias en una baja eficiencia de separación de muestras, reducción en la resolución en los análisis y pérdidas en la inyección de muestras en aplicaciones biomédicas por citar algunas áreas de aplicación e investigación. Por tal motivo, el presente modelo y su correspondiente solución, pueden actuar como una herramienta que ayude al entendimiento y comprensión de los diferentes mecanismos de transporte en el eficiente diseño de los sistemas microfluídicos.



## Referencias

- Afonso A.M., Alves M.A., Pinho F.T., Analytical solution of mixed electro-osmotic/pressure driven flows of viscoelastic fluids in microchannels, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 159:50-63, 2009.
- Bayraktar T., Pidugu S.B., Characterization of liquid flows in microfluidic systems, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49:815-824, 2006.
- Berli C.L.A., Olivares M.L., Electrokinetic flow of non-Newtonian fluids in microchannels, *Journal of Colloid and Interface Science*, 320:582-589, 2008.
- Castellanos A. y Perez A., Electrohydrodynamics systems, Handbook of experimental fluid mechanics. Chapter 21., Springer Berlin, 2007.
- Castellanos A., Electrohydrodynamics, CSIM courses and lectures No. 380, International Centre for Mechanical Sciences, Springer-Verlag Wien New York, 1998.
- Chakraborty S., Roy S., Thermally developing electroosmotic transport of nanofluids in microchannels, *Microfluid NanoFluid*, 4:501-511, 2008.
- Chunsun Z., Da X., Yuyuan L., Micropumps, Microvalves, and micromixers within PCR microfluidic chips: Advances and trends, *Biotechnology Advances*, 25:483-514, 2007.
- Das S., Chakraborty S., Analytical solutions for velocity, temperature and concentration distribution in electroosmotic microchannel flows of a non-newtonian bio-fluid, *Analytical Chimica Acta*, 559:15-24, 2006.
- Escandón J.P., Bautista O., Méndez F., Bautista E., Theoretical conjugate heat transfer analysis in a parallel flat plate microchannel under electro-osmotic and pressure forces with a Phan-Thien-Tanner fluid, *International Journal of Thermal Sciences* 50 1022-1030, 2011
- Griffiths D.J., Introduction to Electrostatics. Prentice Hall, NJ, 3a. ed., 1999.
- Hoffman J.D., Numerical Methods for Engineers and Scientists, Marcel Dekker, Inc., Chap, 5, 9, 2001.
- Horuichi K., Dutta P. and Hossain A., Joule-heating effects in mixed electro-osmotic and pressure-driven microflows under constant wall heat flux, *Journal of Engineering Mathematics*, 54:159-180, 2006.
- Horuichi K., Dutta P., Joule-heating effects in electroosmotically driven microchannel flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:3085-3095, 2004.
- Hu G., Li D., Multiscale phenomena in microfluidics and nanofluidics, *Chemical engineering science*, 62:3443-3454, 2007.
- Karniadakis G., Beskok A., Aluru N., Microflows and Nanoflows, *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Springer, V. 29, 2005.
- Kikuchi H., EHD/EMHD transport processes and electric reconnection in dusty and dirty plasmas. Annals of the New York Academy of Sciences, V. 891, Heat and mass transfer under plasma condition, 1999.
- Laser D. J. and Santiago J. G., A review of micropumps, *Journal of micromechanics and microengineering*, 14:35-64, 2004.

- Masliyah J. H., Bhattacharjee S., *Electrokinetic and Colloid Transport Phenomena*. Wiley Interscience, 2006.
- Morrison F. A. *Understanding rheology*. Oxford University press, 2001.
- Ramos A., *Microfluidic Technologies for Miniaturized Analysis Systems Electrohydrodynamics and Magnetohydrodynamics Micropumps*. Chapter 2: Springer US, 2007.
- Steffen H. and Friedhelm S., *Microfluidic Technologies for Miniaturized Analysis Systems*. Springer, 2007.
- Stone H. A., Stroock A. D., and Adjari A., Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36:381-411, 2004.
- Tang G., Yan D., Yang C., Gong H., Chai C., Lam Y., Joule heating and its effects on electrokinetic transport of solutes in rectangular microchannels, *Sensors and Actuators A*, 139:221-232, 2007.
- Tang G. H., Li X. F., He Y. L., Tao W. Q., Electroosmotic flow of non-Newtonian fluid in microchannels, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 157:133-137, 2009.
- Tang G. Y., Yang C., Chai C. J., and Gong H. Q., Modeling of Electroosmotic Flow and Capillary Electrophoresis with the Joule Heating Effect: The Nernst-Planck Equation versus the Boltzmann Distribution, *Langmuir*, 19:10975-10984, 2003.
- Tang G. Y., Yang C., Chai C. K., and Gong H. Q., Numerical analysis of the thermal effect on electroosmotic flow and electrokinetic mass transport in microchannels, *Analytica Chimica Acta*, 507:27-37, 2004b.
- Tang G. Y., Yang C., Chai J. C., Gong H. Q., Joule heating effect on electroosmotic flow and mass species transport in microcapillary. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:215-227, 2004a.
- Xuan X., and Li D., Analytical study of Joule heating effects on electrokinetic transportation in capillary electrophoresis. *Journal of Chromatography*, A 1064:227-237, 2005.
- Xuan X., and Li D., Joule heating effects on peak broadening in capillary zone electrophoresis, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 14:1171-1180, 2004c.
- Xuan X., Joule heating effects on electrokinetic flow, *Electrophoresis*, 298:33-43, 2008.
- Xuan X., Sinton D., Li D., Thermal and effects on electroosmotic flow in capillary, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:3145-3157, 2004a.
- Xuan X., Xu B., Sinton D., and Li D., Electroosmotic flow with Joule heating effects, *Miniaturisation for Chemistry, Biology-Bioengineering Lab on a Chip*, 4:230-236, 2004b.
- Yang J. and Kwok Y. D., Effect of liquid slip in electrokinetic parallel-plate microchannel flow, *Journal of Colloid and Interface Science*, 260:225-233, 2003.
- Zhao C., Zholkovskij E., Masliyah J. H., Yang C., Analysis of electroosmotic flow of power-law fluids in a slit microchannel, *Journal of Colloid and Interface Science*, 326:503-510, 2008.
- Zhao T. S. and Liao Q., Thermal effects on electro-osmotic pumping of liquids in microchannels, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 12:962-970, 2002.



## Apéndice A

### Solución de la ecuación diferencial de Poisson-Boltzmann

Combinando las ecuaciones (2.33) y (2.53), se tiene la ecuación diferencial de Poisson-Boltzmann

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \kappa^2\psi = \frac{-\rho_e}{\varepsilon}, \quad (\text{A.1})$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$\psi(x, y = H) = \zeta, \quad (\text{A.2})$$

$$\left. \frac{d\psi}{dy} \right|_{(x,y=0)} = 0, \quad (\text{A.3})$$

la ecuación diferencial (A.1) se puede reescribir como

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - \kappa^2\psi = 0, \quad (\text{A.4})$$

por lo que la ecuación auxiliar queda de la siguiente forma

$$m^2 - \kappa^2 = 0, \quad (\text{A.5})$$

por tanto la solución general, es

$$\psi = c_1 e^{\kappa y} + c_2 e^{-\kappa y}, \quad (\text{A.6})$$

derivando la ecuación (A.6)

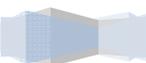
$$\frac{d\psi}{dy} = c_1 \kappa e^{\kappa y} - c_2 \kappa e^{-\kappa y}, \quad (\text{A.7})$$

y al aplicar la condición de frontera de la ecuación (A.3) en la ecuación anterior, resulta

$$c_1 = c_2, \quad (\text{A.8})$$

ahora, sustituyendo la ecuación (A.8) y la condición de frontera de la ecuación (A.2) en la ecuación (A.6)

la constante de integración es



$$c_1 = \frac{\zeta}{(e^{\kappa H} + e^{-\kappa H})}, \quad (\text{A.9})$$

así, al sustituir la constante de integración en la solución general de la ecuación (A.6), se tiene

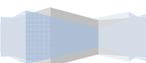
$$\psi = \zeta \left( \frac{e^{\kappa y} + e^{-\kappa y}}{e^{\kappa H} + e^{-\kappa H}} \right), \quad (\text{A.10})$$

utilizando identidades trigonométricas, la ecuación (A.10) se transforma en la siguiente expresión para la distribución del potencial eléctrico en el microcanal.

$$\psi = \zeta \left( \frac{\cosh \kappa y}{\cosh \kappa H} \right). \quad (\text{A.11})$$

Combinando la ecuación (A.11) con la ecuación (A.1) se deduce la densidad de carga eléctrica dentro de la EDL

$$\rho_e = -\varepsilon \kappa^2 \zeta \frac{\cosh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)}. \quad (\text{A.12})$$



## Apéndice B

### Análisis de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el fluido

El esfuerzo cortante de la ecuación (2.56) se sustituye en la ecuación (2.55) de conservación de la cantidad de movimiento, obteniéndose la siguiente expresión

$$\frac{d}{dy} \left[ m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \right] + \rho_e E_x = 0, \quad (\text{B.1})$$

asumiendo que la velocidad decrece en el sentido de crecimiento de la coordenada transversal  $y$ , se tiene

$$\frac{d}{dy} \left[ m \left( -\frac{du}{dy} \right)^{n-1} \frac{du}{dy} \right] + \rho_e E_x = 0, \quad (\text{B.2})$$

después de una manipulación algebraica sobre la ecuación (B.2) esta se transforma en

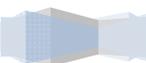
$$\frac{d}{dy} \left[ m \left( -\frac{du}{dy} \right)^n \right] = \rho_e E_x, \quad (\text{B.3})$$

sustituyendo la densidad de carga eléctrica de la ecuación (A.12), en la ecuación (B.3) e integrando una vez se obtiene

$$\frac{du}{dy} = - \left[ -\frac{\varepsilon \kappa \zeta E_x}{m \cosh(\kappa H)} \sinh(\kappa y) + C_1 \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{B.4})$$

considerando la condición de frontera dada por la ecuación (2.61) en la ecuación (B.4)

$$C_1 = 0, \quad (\text{B.5})$$



por tanto el gradiente de velocidad del flujo en el presente problema se define de la ecuación (B.4) de la manera siguiente.

$$\frac{du}{dy} = - \left[ -\kappa \frac{\varepsilon \zeta E_x}{m} \frac{\sinh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{B.6})$$

La solución de la ecuación (B.6) debe considerar la condición frontera dada por la ecuación (2.62).



## Apéndice C

### Solución numérica de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

El modelo matemático del perfil de velocidades de las ecuaciones (2.84) y (2.85) fue resuelto por un esquema numérico en diferencias finitas hacia adelante y adaptado a un algoritmo de una matriz tridiagonal, resuelto por el método de Thomas, (Hoffman,2001). Discretizando el paso nodal para la coordenada transversal adimensional de la región del fluido, se tiene lo siguiente

$$Y_f = j\Delta Y_f^k; \quad j = 0,1,\dots,M, \quad (C.1)$$

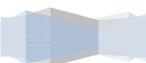
donde  $k$ , es el numero de iteraciones del método. La derivada ordinaria de la ecuación (2.84), puede ser escrita en forma discretizada como se muestra a continuación.

$$\frac{d\bar{u}}{dY_f} \approx \frac{\bar{u}_{j+1}^k - \bar{u}_j^k}{\Delta Y_f^k}, \quad (C.2)$$

sustituyendo (C.1) y (C.2) en la ecuación (2.84) se tiene

$$-\bar{u}_j^k + \bar{u}_{j+1}^k = -\Delta Y_f^k \left[ \left( \frac{\bar{\kappa}}{n} \right)^n \frac{\sinh\{\bar{\kappa}(j\Delta Y_f^k)\}}{\cosh(\bar{\kappa})} \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (C.3)$$

adaptando la ecuación (C.3) y la ecuación (2.85) al método de Thomas, (Hoffman, 2001)



$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} - & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \dots\dots\dots & & \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & - \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\Delta Y_f^k \left[ \left( \frac{\bar{\kappa}}{n} \right)^n \frac{\sinh\{\bar{\kappa}(j\Delta Y_f^k)\}}{\cosh(\bar{\kappa})} \right]^{\frac{1}{n}} \\ -\Delta Y_f^k \left[ \left( \frac{\bar{\kappa}}{n} \right)^n \frac{\sinh\{\bar{\kappa}(j\Delta Y_f^k)\}}{\cosh(\bar{\kappa})} \right]^{\frac{1}{n}} \\ \dots\dots\dots \\ -\Delta Y_f^k \left[ \left( \frac{\bar{\kappa}}{n} \right)^n \frac{\sinh\{\bar{\kappa}(j\Delta Y_f^k)\}}{\cosh(\bar{\kappa})} \right]^{\frac{1}{n}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (C.4)$$

el vector solución es obtenido a partir del método mencionado, el cual es codificado en el lenguaje Fortran, en el Apéndice F, para obtener el siguiente vector

$$\bar{\mathbf{u}}_j = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{u}_j^k \\ \bar{u}_{j+1}^k \\ \dots\dots\dots \\ \bar{u}_{j=j\max-1}^k \\ \bar{u}_{j\max}^k \end{bmatrix}, \quad (C.5)$$

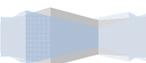
donde  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{X}$ , son la matriz inversa, el vector particular y el vector solución del método de Thomas. Por otra parte, el incremento nodal en la sección transversal de la región del fluido en el microcanal, esta dado por la siguiente expresión

$$\Delta Y_f^k = \frac{1}{N_{\text{nodos}} - 1}, \quad (C.6)$$

donde  $N_{\text{nodos}}$ , se refiere al total de nodos de la malla discretizada en este apartado y que corresponde a la siguiente secuencia,  $N_{\text{nodos}} = \Sigma(j = 0, 1, \dots, j \max)$ . El valor de  $N_{\text{nodos}}$ , en el presente trabajo se inicializara a partir de un valor de 10,001, el cual se incrementa en cada iteración del método aquí propuesto con un valor de 1000, hasta que se cumpla la siguiente condición

$$\left| \bar{u}_j^k - \bar{u}_j^{k-1} \right| \leq \text{tol}_T, \quad (C.7)$$

donde  $\text{tol}_T$ , es la tolerancia de la aplicación del método de Thomas, con un valor de  $10^{-11}$ .



## Apéndice D

### Discretización en diferencias finitas e implementación de la solución numérica

#### D.1 Discretización del modelo matemático

El modelo matemático fue resuelto por un esquema numérico con diferencias finitas centrales, (Hoffman, 2001). Primeramente, discretizando el paso nodal para la coordenada axial adimensional de la región del fluido y sólido

$$X_s = X_f = i\Delta X_s = i\Delta X_f : i = 0, 1, \dots, N; \quad (D.1)$$

ahora para la coordenada transversal de la región del fluido y sólido, se tiene respectivamente

$$Y_f = j\Delta Y_f; Y_s = j\Delta Y_s : j = 0, 1, \dots, M. \quad (D.2)$$

Las derivadas parciales de las ecuaciones de energía (2.86 - 2.98), pueden ser escritas en forma discretizada como se muestra a continuación; para la coordenada axial de la región del fluido y sólido

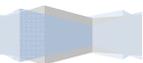
$$\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial X_f} \approx \frac{\bar{T}_{f;i+1,j} - \bar{T}_{f;i-1,j}}{2\Delta X_f}; \quad \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial X_s} \approx \frac{\bar{T}_{s;i+1,j} - \bar{T}_{s;i-1,j}}{2\Delta X_s}, \quad (D.3)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial X_f^2} \approx \frac{\bar{T}_{f;i+1,j} - 2\bar{T}_{f;i,j} + \bar{T}_{f;i-1,j}}{\Delta X_f^2}; \quad \frac{\partial^2 \bar{T}_s}{\partial X_s^2} \approx \frac{\bar{T}_{s;i+1,j} - 2\bar{T}_{s;i,j} + \bar{T}_{s;i-1,j}}{\Delta X_s^2}, \quad (D.4)$$

ahora, para las coordenadas transversal de la región del fluido y sólido

$$\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial Y_f} \approx \frac{\bar{T}_{f;i,j+1} - \bar{T}_{f;i,j-1}}{2\Delta Y_f}; \quad \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial Y_s} \approx \frac{\bar{T}_{s;i,j+1} - \bar{T}_{s;i,j-1}}{2\Delta Y_s}, \quad (D.5)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial Y_f^2} \approx \frac{\bar{T}_{f;i,j+1} - 2\bar{T}_{f;i,j} + \bar{T}_{f;i,j-1}}{\Delta Y_f^2}; \quad \frac{\partial^2 \bar{T}_s}{\partial Y_s^2} \approx \frac{\bar{T}_{s;i,j+1} - 2\bar{T}_{s;i,j} + \bar{T}_{s;i,j-1}}{\Delta Y_s^2}.$$



**Región del fluido:** Sustituyendo los términos adecuados de las ecuaciones (D.3- D.5) en la ecuación (2.86), se obtiene la versión discretizada de la ecuación de la energía adimensional para todos los nodos que no son nodos frontera

$$\left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f;i+1,j} + \Omega^2 \bar{T}_{f;i,j+1} + \left[ \beta^2 + \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f;i-1,j} + \Omega^2 \bar{T}_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f;i,j} + \Delta X_f^2 = 0, \quad (D.6)$$

para  $i = 1, \dots, i_{max-1}$ ;  $j = 1, \dots, j_{max-1}$ .

El término de la velocidad adimensional  $\bar{u}$  se reemplaza por el término  $\bar{u}_j$  de la ecuación (C.5), sustituyendo la coordenada adimensional transversal  $Y_s$  por el término adecuado de la ecuación (D.2), quedando en su versión discretizada de la manera siguiente

$$\bar{u} = \bar{u}_j(j, \Delta Y_f). \quad (D.7)$$

Las condiciones de frontera discretizadas de la ecuación (D.6) se dan a continuación. De la ecuación (2.87), para la sección de entrada del microcanal en  $X_f = 0$ :

$$\bar{T}_{f;i,j} = 0 \quad (D.8)$$

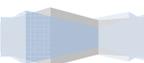
para  $i = 0$ ;  $j = 0, \dots, j_{max}$ .

De la ecuación (2.88), para la salida del microcanal en  $X_f = 1$ :

$$\Omega^2 \bar{T}_{f;i,j+1} + 2\beta^2 \bar{T}_{f;i-1,j} + \Omega^2 \bar{T}_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f;i,j} + \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] 2\Delta X_f F_{x2} + \Delta X_f^2 = 0, \quad (D.9)$$

con,  $F_{x2} = \left( \partial \bar{T}_f / \partial X_f \right) \Big|_{(X_f=1, Y_f)} \approx \left[ \left( \bar{T}_{f;i+1,j} - \bar{T}_{f;i-1,j} \right) / 2\Delta X_f \right] = 0$ ; para  $i = i_{max}$ ;  $j = 1, \dots, j_{max-1}$ .

De la ecuación (2.89) para el centro del microcanal en  $Y_f = 0$ :



$$\begin{aligned} & \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f;i+1,j} + 2\Omega^2 \bar{T}_{f;i,j+1} + \left[ \beta^2 + \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f;i-1,j} - \\ & 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f;i,j} - 2\Omega^2 \Delta Y_f F_{y1} + \Delta X_f^2 = 0, \end{aligned} \quad (D.10)$$

con  $F_{y1} = \left( \partial \bar{T}_f / \partial Y_f \right) \Big|_{(X_f, Y_f=0)} \approx \left[ (\bar{T}_{f;i,j+1} - \bar{T}_{f;i,j-1}) / 2\Delta Y_f \right] = 0$ ; para  $i = 1, \dots, i_{max-1}; j = 0$ .

De la ecuación (2.90), para la interface interna del microcanal en  $Y_f = 1$ :

$$\bar{T}_{f;i,j} = \bar{T}_{s;i,j} \quad (D.11)$$

para  $i = 0, \dots, i_{max}; j = j_{max}$ . Además de la ecuación (D.11) en la interface interna del microcanal, se considera la condición de compatibilidad dada por la misma ecuación (2.90) de la forma discretizada siguiente

$$\begin{aligned} & \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f;i+1,j} + 2\Omega^2 \bar{T}_{f;i,j-1} + \left[ \beta^2 + \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f;i-1,j} - \\ & 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f;i,j} + 2\Omega^2 \Delta Y_f F_{y2(i,j)} + \Delta X_f^2 = 0, \end{aligned} \quad (D.12)$$

con  $F_{y2(i,j)} = \left( \bar{\alpha} / \bar{\varepsilon}^2 \right) \left( \partial \bar{T}_s / \partial Y_s \right) \Big|_{(X_s, Y_s=0)} \approx \left[ (\bar{T}_{f;i,j+1} - \bar{T}_{f;i,j-1}) / 2\Delta Y_f \right]$ ; para  $i = 1, \dots, i_{max-1}; j = j_{max}$ .

Ahora, la condición de frontera para el nodo esquina de la malla en las coordenadas  $i = i_{max}, j = 0$ , fue discretizada considerando las condiciones de salida y del centro del microcanal de las ecuaciones (2.88) y (2.89), obteniéndose

$$\begin{aligned} & 2\beta^2 \bar{T}_{f;i-1,j} + 2\Omega^2 \bar{T}_{f;i,j+1} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f;i,j} + \\ & \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] 2\Delta X_f F_{x2} - 2\Omega^2 \Delta Y_f F_{y1} + \Delta X_f^2 = 0, \end{aligned} \quad (D.13)$$

finalmente para la región del fluido, la condición de frontera para el nodo esquina de la malla en las coordenadas  $i = i_{max}, j = j_{max}$ , fue discretizada considerando las condiciones de salida y de la interface interna del microcanal de las ecuaciones (2.88) y (2.90), obteniéndose



$$2\beta^2\bar{T}_{f;i-1,j} + 2\Omega^2\bar{T}_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2)\bar{T}_{f;i,j} + \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] 2\Delta X_f F_{x2} + 2\Omega^2\Delta Y_f F_{y2(i,j)} + \Delta X_f^2 = 0, \quad (D.14)$$

**Región del sólido:** Sustituyendo los términos adecuados de las ecuaciones (D.4) y (D.5) en la ecuación (2.95), se obtiene la versión discretizada de la ecuación de la energía adimensional para todos los nodos que no son nodos frontera

$$\bar{\alpha}\bar{T}_{s;i+1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\bar{T}_{s;i,j+1} + \bar{\alpha}\bar{T}_{s;i-1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\bar{T}_{s;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\bar{T}_{s;i,j} = 0, \quad (D.15)$$

para  $i = 1, \dots, i_{max-1}; j = 1, \dots, j_{max-1}$ .

Las condiciones de frontera discretizadas de la ecuación (D.15) se dan a continuación. De la ecuación (2.96), para el lado izquierdo de la pared del microcanal en  $X_s = 0$ :

$$2\bar{\alpha}\bar{T}_{s;i+1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\bar{T}_{s;i,j+1} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\bar{T}_{s;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\bar{T}_{s;i,j} - 2\bar{\alpha}\Delta X_s F_{sx1} = 0, \quad (D.16)$$

con  $F_{sx1} = \left(\partial\bar{T}_s/\partial X_s\right)\big|_{(X_s=0, Y_s)} \approx \left[\left(\bar{T}_{s;i+1,j} - \bar{T}_{s;i-1,j}\right)/2\Delta X_s\right] = 0$ ; para  $i = 0; j = 1, \dots, j_{max-1}$ .

De la ecuación (2.97) para el lado derecho de la pared del microcanal en  $X_s = 1$ :

$$2\bar{\alpha}\bar{T}_{s;i-1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\bar{T}_{s;i,j+1} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\bar{T}_{s;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\bar{T}_{s;i,j} + 2\bar{\alpha}\Delta X_s F_{sx2} = 0, \quad (D.17)$$

con  $F_{sx2} = \left(\partial\bar{T}_s/\partial X_s\right)\big|_{(X_s=1, Y_s)} \approx \left[\left(\bar{T}_{s;i+1,j} - \bar{T}_{s;i-1,j}\right)/2\Delta X_s\right] = 0$ ; para  $i = i_{max}; j = 1, \dots, j_{max-1}$ .

De la ecuación (2.90) para la interface interna del microcanal en  $Y_s = 0$ :

$$\bar{T}_{s;i,j} = \bar{T}_{f;i,j}, \quad (D.18)$$

para  $i = 0, \dots, i_{max}; j = 0$ .

Para la condición de frontera de la interface externa del microcanal, de la ecuación (2.98), en  $Y_s = 1$ :

$$\bar{\alpha}\bar{T}_{s;i+1,j} + 2\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\bar{T}_{s;i,j-1} + \bar{\alpha}\bar{T}_{s;i-1,j} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\bar{T}_{s;i,j} - 2\Phi^2\Delta Y_s\Lambda = 0, \quad (D.19)$$



para  $i = 1, \dots, i_{max-1}; j = j_{max}$ .

Ahora, la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas  $i = 0, j = j_{max}$ , fue discretizada considerando las condiciones del lado izquierdo y de la interface externa de la pared del microcanal de las ecuaciones (2.96) y (2.98), obteniéndose

$$2\bar{\alpha}\bar{T}_{s;i+1,j} + 2\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\bar{T}_{s;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\bar{T}_{s;i,j} - 2\Phi^2\Delta Y_s\Lambda - 2\bar{\alpha}\Delta X_s F_{sx1} = 0, \quad (D.20)$$

finalmente, para la región del sólido, la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas  $i = i_{max}, j = j_{max}$ , fue discretizada considerando las condiciones del lado derecho y de la interface externa de la pared del microcanal de las ecuaciones (2.97) y (2.98), obteniéndose

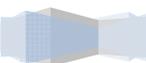
$$2\bar{\alpha}\bar{T}_{s;i-1,j} + 2\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\bar{T}_{s;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\bar{T}_{s;i,j} + 2\bar{\alpha}\Delta X_s F_{sx2} - 2\Phi^2\Delta Y_s\Lambda = 0 \quad (D.21)$$

## D.2 Implementación del método SOR

La discretización anterior de los modelos matemáticos adimensionales y sus respectivas condiciones de frontera se implementaron en el método iterativo de SOR, como a continuación se describe.

**Región del fluido:** El cambio de temperatura  $\Delta\bar{T}_{f;i,j}^{k+1}$  en nodos interiores que no correspondan a nodos frontera es determinada de la ecuación (D.6) adaptándose al método de SOR de la siguiente forma

$$\Delta\bar{T}_{f;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f;i+1,j} + \Omega^2\bar{T}_{f;i,j+1} + \\ \left[ \beta^2 + \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f;i-1,j} + \\ \Omega^2\bar{T}_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2)\bar{T}_{f;i,j} + \Delta X_f^2 \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2). \quad (D.22)$$



La temperatura en la entrada del fluido del microcanal fue especificada por la ecuación (D.8); mientras que las condiciones de frontera que no tienen temperatura especificada son adaptadas al método de SOR como sigue, primeramente a la salida del microcanal a partir de la ecuación (D.9) se obtiene

$$\Delta \bar{T}_{f,i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \Omega^2 \bar{T}_{f,i,j+1} + 2\beta^2 \bar{T}_{f,i-1,j} + \Omega^2 \bar{T}_{f,i,j-1} - \\ 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f,i,j} + \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j \Delta X_f}{2} \right] 2\Delta X_f F_{x2} + \Delta X_f^2 \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2), \quad (D.23)$$

para la condición de frontera en el centro del microcanal a partir de la ecuación (D.10) se obtiene

$$\Delta \bar{T}_{f,i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j \Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f,i+1,j} + 2\Omega^2 \bar{T}_{f,i,j+1} + \\ \left[ \beta^2 + \frac{Pe\beta\bar{u}_j \Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f,i-1,j} - \\ 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f,i,j} - 2\Omega^2 \Delta Y_f F_{y1} + \Delta X_f^2 \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2). \quad (D.24)$$

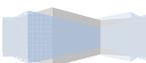
La temperatura en la interface interna del fluido del microcanal fue especificada por la ecuación (D.11) y en adición a esta condición de frontera, a partir de la ecuación (D.12) se obtiene

$$\Delta \bar{T}_{f,i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j \Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f,i+1,j} + 2\Omega^2 \bar{T}_{f,i,j-1} + \\ \left[ \beta^2 + \frac{Pe\beta\bar{u}_j \Delta X_f}{2} \right] \bar{T}_{f,i-1,j} - \\ 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f,i,j} + 2\Omega^2 \Delta Y_f F_{y2(i,j)} + \Delta X_f^2 \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2). \quad (D.25)$$

Para la condición de frontera en el nodo esquina en las coordenadas  $i=i_{max}, j=0$  y a partir de la ecuación (D.13) se obtiene

$$\Delta \bar{T}_{f,i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\beta^2 \bar{T}_{f,i-1,j} + 2\Omega^2 \bar{T}_{f,i,j+1} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f,i,j} + \\ \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j \Delta X_f}{2} \right] 2\Delta X_f F_{x2} - 2\Omega^2 \Delta Y_f F_{y1} + \Delta X_f^2 \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2), \quad (D.26)$$

finalmente, la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas  $i=i_{max}, j=j_{max}$  y a partir de la ecuación (D.14) se obtiene



$$\Delta \bar{T}_{f;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\beta^2 \bar{T}_{f;i-1,j} + 2\Omega^2 \bar{T}_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \bar{T}_{f;i,j} + \\ \left[ \beta^2 - \frac{Pe\beta\bar{u}_j\Delta X_f}{2} \right] 2\Delta X_f F_{x2} + 2\Omega^2 \Delta Y_f F_{y2(i,j)} + \Delta X_f^2 \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2), \quad (D.27)$$

**Región del sólido:** El cambio de temperatura  $\Delta \bar{T}_{s;i,j}^{k+1}$  en nodos interiores que no correspondan a nodos frontera es determinada de la ecuación (D.15) adaptándose al método de SOR de la siguiente forma

$$\Delta \bar{T}_{s;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha} \bar{T}_{s;i+1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \Phi^2 \bar{T}_{s;i,j+1} + \bar{\alpha} \bar{T}_{s;i-1,j} + \\ \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \Phi^2 \bar{T}_{s;i,j-1} - 2\bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right) \bar{T}_{s;i,j} \end{array} \right\} / 2\bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right), \quad (D.28)$$

las condiciones de frontera que no tienen temperatura especificada son adaptadas al método de SOR como sigue, considerando primeramente el lado izquierda de la pared del microcanal a partir de la ecuación (D.16) se obtiene

$$\Delta \bar{T}_{s;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\bar{\alpha} \bar{T}_{s;i+1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \Phi^2 \bar{T}_{s;i,j+1} + \\ \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \Phi^2 \bar{T}_{s;i,j-1} - 2\bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right) \bar{T}_{s;i,j} - \\ 2\bar{\alpha} \Delta X_s F_{sx1} \end{array} \right\} / 2\bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right), \quad (D.29)$$

ahora, para el lado derecho de la pared del microcanal a partir de la ecuación (D.17) se obtiene

$$\Delta \bar{T}_{s;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\bar{\alpha} \bar{T}_{s;i-1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \Phi^2 \bar{T}_{s;i,j+1} + \\ \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \Phi^2 \bar{T}_{s;i,j-1} - 2\bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right) \bar{T}_{s;i,j} + \\ 2\bar{\alpha} \Delta X_s F_{sx2} \end{array} \right\} / 2\bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right). \quad (D.30)$$

La temperatura en la interface interna del microcanal fue especificada por la ecuación (D.18), adicionalmente se considera la ecuación (2.90), para evaluar los siguientes gradientes de temperatura en las regiones del fluido y sólido, respectivamente

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \frac{\partial \bar{T}_{s;i,j}}{\partial Y_s} \Big|_{(X_s, Y_s=0)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \left( \frac{\bar{T}_{s;i,j+1} - \bar{T}_{s;i,j}}{2\Delta Y_s} \right) \Big|_{(i,j=0)} = \frac{\partial \bar{T}_{f;i,j}}{\partial Y_f} \Big|_{(X_f, Y_f=1)} = F_{y2(i,j)}, \quad (D.31)$$



la ecuación anterior es necesaria para evaluar el gradiente  $F_{y2(i,j)}$  en las ecuaciones (D.12) y (D.14) para la región del fluido. Ahora, a partir de la condición de frontera en la interface externa de la pared del microcanal de la ecuación (D.19) se obtiene

$$\Delta \bar{T}_{s;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha} \bar{T}_{s;i+1,j} + 2 \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \Phi^2 \bar{T}_{s;i,j-1} + \bar{\alpha} \bar{T}_{s;i-1,j} - \\ 2 \bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right) \bar{T}_{s;i,j} - 2 \Phi^2 \Delta Y_s \Lambda \end{array} \right\} / 2 \bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right). \quad (D.32)$$

Ahora, a partir de la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas  $i=0, j=j_{max}$ , de la ecuación (D.20) se obtiene

$$\Delta \bar{T}_{s;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \bar{\alpha} \bar{T}_{s;i+1,j} + 2 \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \Phi^2 \bar{T}_{s;i,j-1} - \\ 2 \bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right) \bar{T}_{s;i,j} - 2 \bar{\alpha} \Delta X_s F_{sx1} - 2 \Phi^2 \Delta Y_s \Lambda \end{array} \right\} / 2 \bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right), \quad (D.33)$$

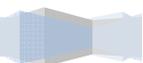
finalmente, a partir de la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas  $i=i_{max}, j=j_{max}$ , de la ecuación (D.21) se obtiene

$$\Delta \bar{T}_{s;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \bar{\alpha} \bar{T}_{s;i-1,j} + 2 \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \Phi^2 \bar{T}_{s;i,j-1} - \\ 2 \bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right) \bar{T}_{s;i,j} + 2 \bar{\alpha} \Delta X_s F_{sx2} - 2 \Phi^2 \Delta Y_s \Lambda \end{array} \right\} / 2 \bar{\alpha} \left( 1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2} \right). \quad (D.34)$$

### D.3 Número de Nusselt reducido

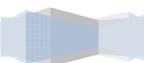
De la ecuación (3.37), el número de Nusselt reducido se puede representar en forma discretizada como a continuación de indica

$$Nu_N = \frac{-\left. \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial Y_f} \right|_{(X_f, Y_f=1)}}{\bar{T}_{f0} - \bar{T}_{s0, prom}} = -\frac{2 \left[ (\bar{T}_{f;i, j=j_{max}}) - (\bar{T}_{f;i, j=j_{max}-1}) \right]}{2 \bar{T}_{f;i, j=j_{max}} - \left[ \bar{T}_{s;i, j=0} + \bar{T}_{s;i, j=j_{max}} \right]}, \quad (D.35)$$



considerando el no salto de temperatura en la interface interna del microcanal  $\bar{T}_{f;i,j=j_{max}} = \bar{T}_{s;i,j=0}$ , de esta forma simplificando la ecuación (D.35) se transforma en

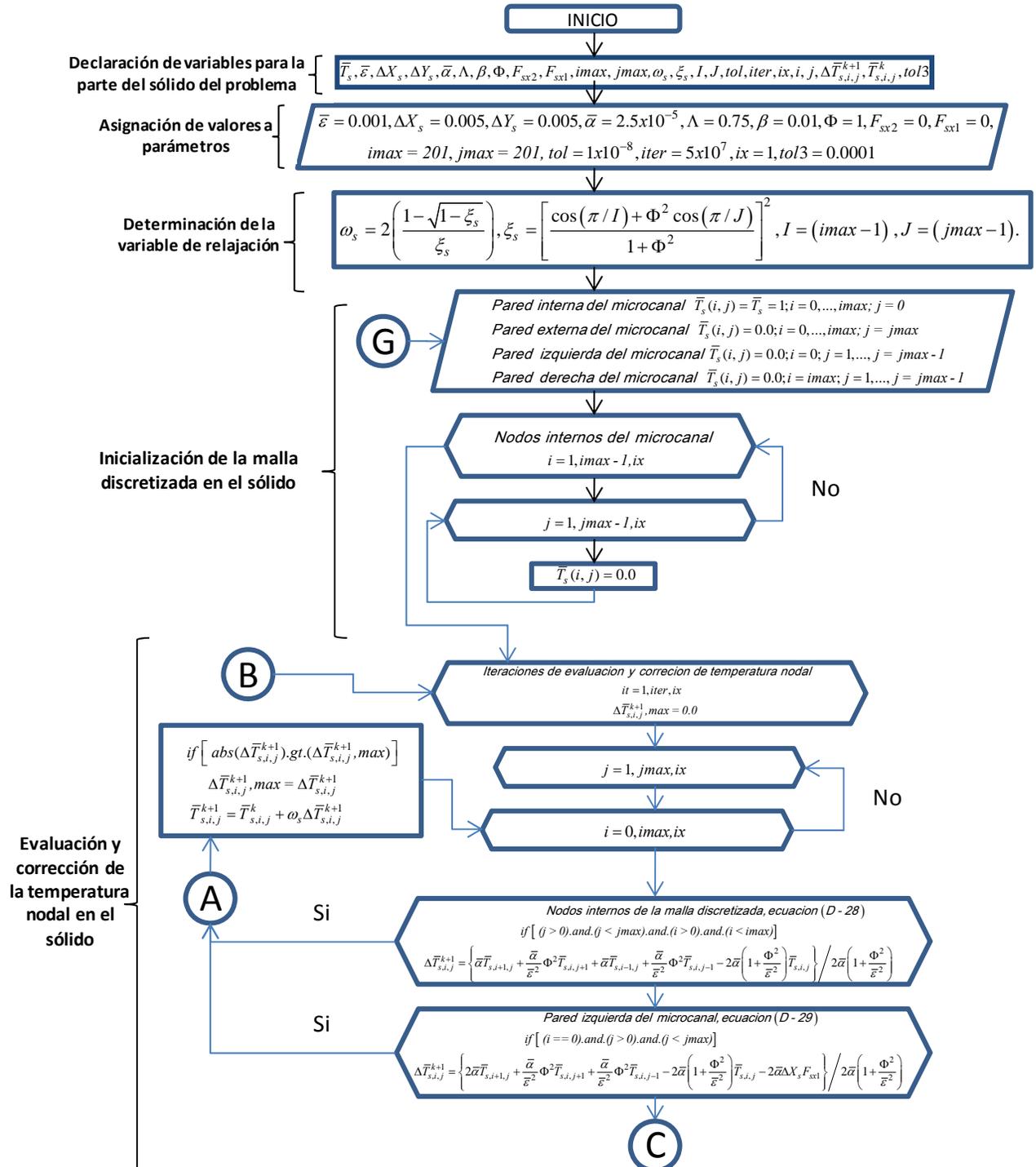
$$\text{Nu}_N = -\frac{2\left[\left(\bar{T}_{f;i,j=j_{max}}\right) - \left(\bar{T}_{f;i,j=j_{max}-1}\right)\right]}{\Delta Y_f \left[\bar{T}_{f;i,j=j_{max}} - \bar{T}_{s;i,j=j_{max}}\right]}. \quad (\text{D.36})$$



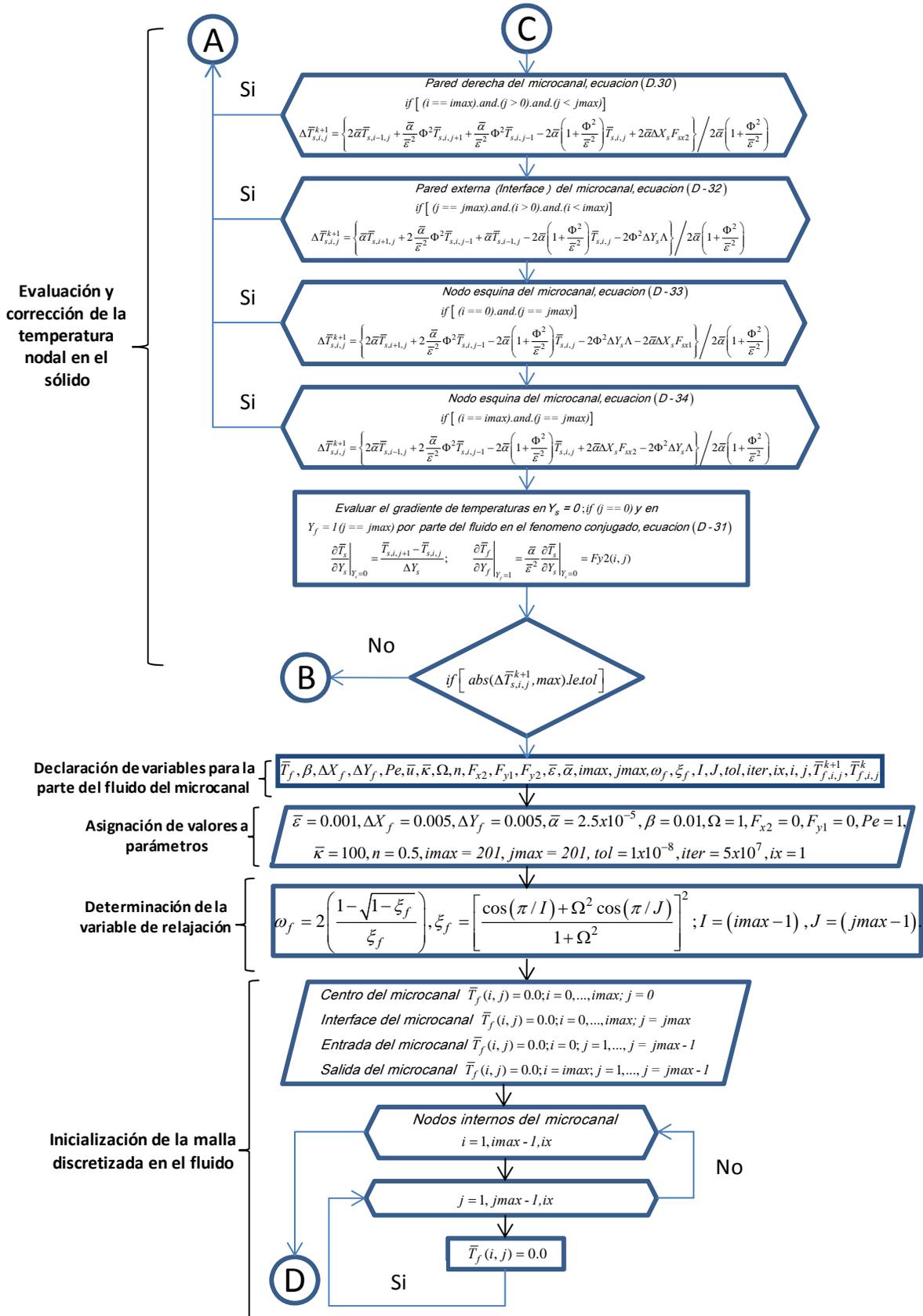
## Apéndice E

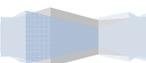
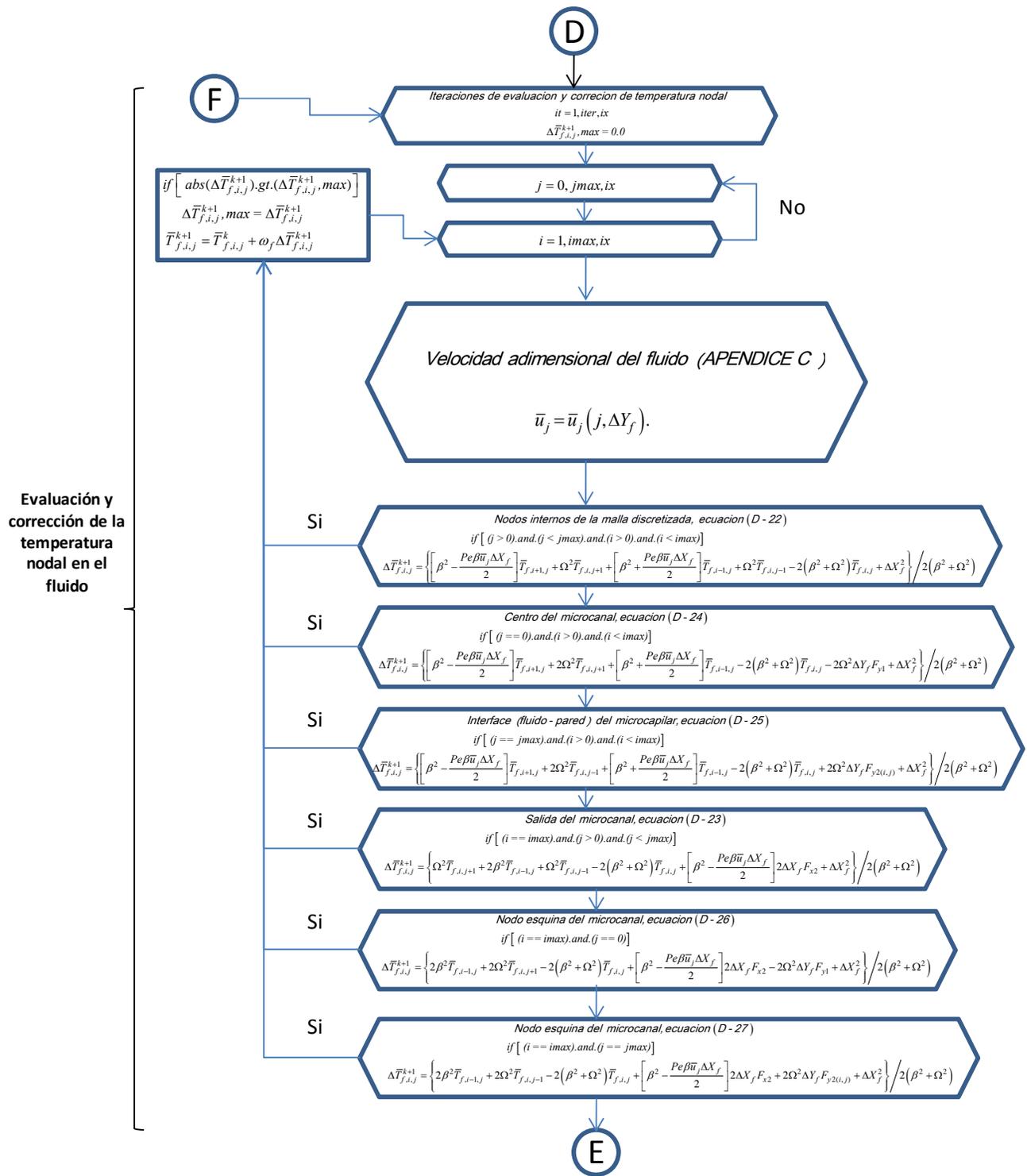
### Diagrama de flujo

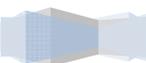
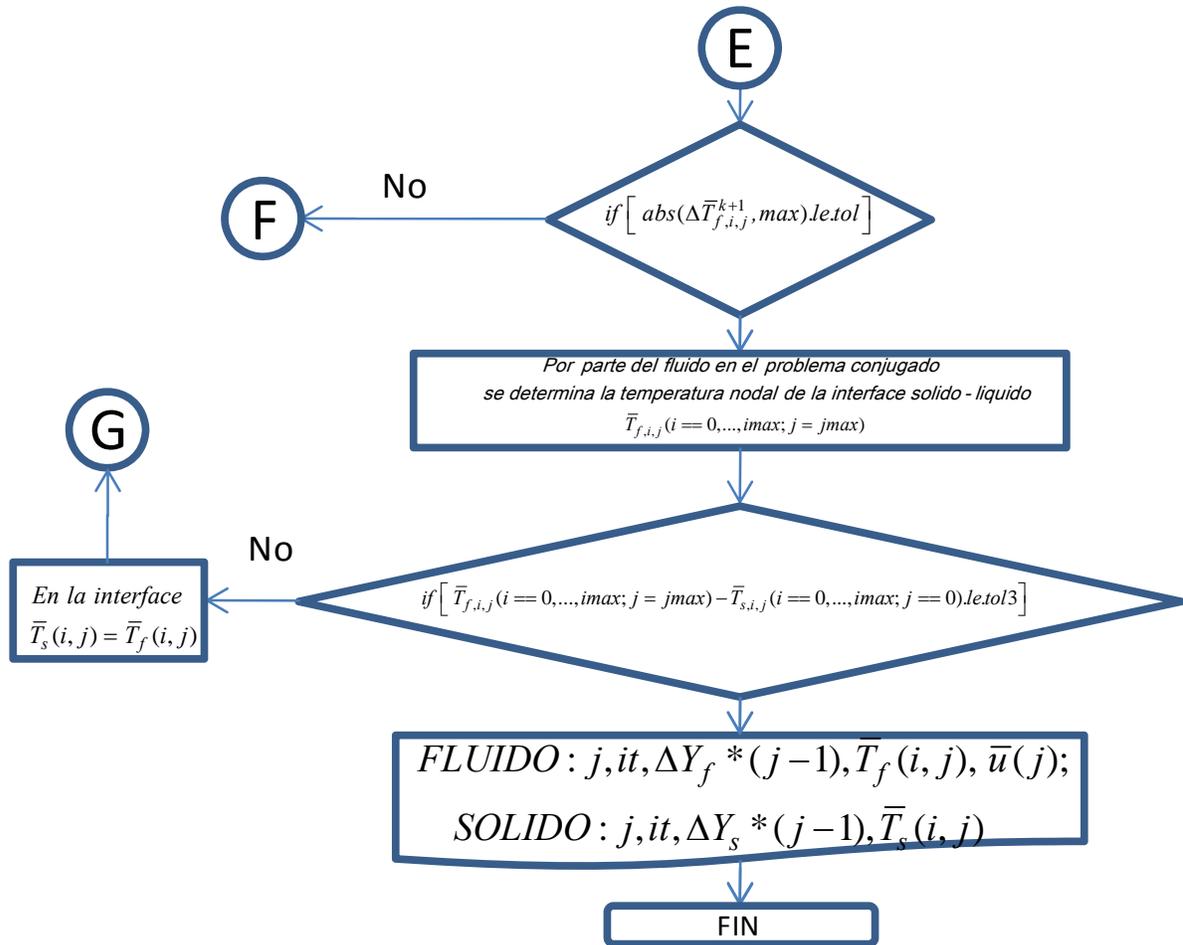
A continuación se muestra en la figura siguiente el diagrama de flujo propuesto para resolver numéricamente el modelo matemático establecido por la sección 3.1, D.1 y D.2



ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.







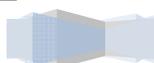
## Apéndice F

### Codificación de la solución numérica

Programa en Fortran PowerStation 4.0, que resuelve el modelo matemático del problema conjugado de transferencia de calor en un flujo de un fluido no Newtoniano con modelo reológico de ley de potencia en un microcanal de placas planas paralelas en estado estable e hidrodinámicamente desarrollado.

```
program main

!*****REGION DEL SOLIDO -asignación de formato y datos del problema*****
real (kind=8), dimension(2000,2000)::fw
real (kind=8), dimension(2000)::gradiente
real (kind=8), dimension(2000)::gradiente2
real (kind=8), dimension(2000)::tempInterfaceSolido
real (kind=8)::epsilongorro
real (kind=8)::dwx
real (kind=8)::dwy
real (kind=8)::alfagorro
real (kind=8)::lambda
real (kind=8)::tol
real (kind=8)::tol3
real (kind=8)::fi
real (kind=8)::fwx2
real (kind=8)::fwx1
real (kind=8)::omegaw
real (kind=8)::zetaw
real (kind=8)::dfmaxw
real (kind=8)::dfw
real (kind=8)::dew
integer::i, j, iter, jmax, imax, ix
data dwx, dwy, iter, tol, tol3/0.005, 0.005, 50000000, 1.0e-08, 0.0001/
data imax, jmax, iw, ix/201, 201, 1, 1/
data fwx1, fwx2 /0.0, 0.0/
!*****REGION DEL FLUIDO -asignación de formato y datos del problema*****
real (kind=8), dimension(2000,2000)::f
real (kind=8), dimension(1000001)::x
real (kind=8), dimension(1000)::veloci
real (kind=8), dimension(2000)::gradiente3
real (kind=8), dimension(2000)::tempInterfaceFluido
real (kind=8), dimension(2000)::DELTATEMPERATURAINTERF
real (kind=8), dimension(1000001,3)::a
real (kind=8), dimension(1000001)::b
real (kind=8)::dx
real (kind=8)::dy
real (kind=8)::dyveloci
real (kind=8)::Pe
real (kind=8)::beta
real (kind=8)::velocidad
real (kind=8)::AA
real (kind=8)::BB
real (kind=8)::CC
```



**ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL  
PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.**

---

```

real (kind=8)::ccc
real (kind=8)::ddd
real (kind=8)::g
real (kind=8)::n
real (kind=8)::coeficiente1
real (kind=8)::coeficiente2
real (kind=8)::k
real (kind=8)::GAMA
real (kind=8)::OMEGAMAY
real (kind=8)::fx2
real (kind=8)::fy1
real (kind=8)::omega
real (kind=8)::zeta
real (kind=8)::dfmax
real (kind=8)::df
real (kind=8)::de
!integer::i, j, iter, jmax, imax, ix
data dx, dy/0.005, 0.005/
!data imax, jmax, iw, ix/501, 501, 1, 1/
data fx2, fy1 /0.0, 0.0/
data k/50.0/
data GAMA/0.0/
data n/0.5/
data ni/10001/
data tolvloci/0.000001/
!*****DETERMINACION PERFIL DE VELOCIDAD HIDRODINAMICAMENTE DESARROLLADO*****
nn=ni
x(1)=0.0
do it=1, iter
    dyveloci=1.0/(nn-1)
    open (5, file='velocidad.dat')
    ccc=x(1)
    !-----Creación de matrix tridiagonal-----
    do i=1, nn-1
        a(i,1)=0.0
        a(i,2)=-1.0
        a(i,3)=1.0
        a(nn,1)=0.0
        a(nn,2)=-1.0
        a(nn,3)=0.0
        AA=((n+1)/n)**(n)*gama*(i-1)*dyveloci
        BB=((k/n)**(n))*sinh(k*(i-1)*dyveloci)/cosh(k)
        CC=-dyveloci*( AA+BB)**(1.0/n)
        b(i)=CC
        b(nn)=0.0
    end do
    !-----Metodo de Thomas-----
    do i=2, nn
        em=a(i,1)/a(i-1,2)
        a(i,1)=em
        a(i,2)=a(i,2)-em*a(i-1,3)
        b(i)=b(i)-a(i,1)*b(i-1)
    end do
    !Sustitución hacia atrás
        x(nn)=b(nn)/a(nn,2)
    do i=nn-1, 1, -1
        x(i)=(b(i)-a(i,3)*x(i+1))/a(i,2)
    end do
    !-----Creación de archivo de datos de salida del perfil de velocidad-----
    paso=nn*0.005
    do i=1, nn, paso

```

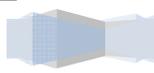


**ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL  
PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.**

```

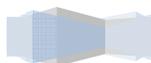
                veloci(i)=x(i)
                write (5,1040) i, (i-1)*dyveloci, veloci(i)!i, (a(i, j), j=1, 3), b(i), x(i)
            end do
            1040 format (i8,7f18.10)
            close (5)
            !-----Condicional de termino de metodo de Thomas-----
                ddd=veloci(1)
                g=ddd-ccc
                if (abs(g).le.tolveloci) then
                    exit
                else
                    nn=nn+1000
                end if
            !-----
end do
!*****ITERACION PRICIPAL DEL PROBLEMA CONJUGADO*****
itM=1
do itP=itM, iter
    PRINT' (I10)', itP
    !*****Creación de archivos de datos del SOLIDO*****
    !*****Archivo de datos de temperatura nodal*****
    open(6, file='solido.dat')
    !*****Archivo de datos del gradiente de temperatura*****
    open(7, file='gradientesolido.dat')
    !*****Creación de archivos de datos del FLUIDO*****
    !*****Archivo de datos de temperatura nodal*****
    open(8, file='fluido.dat')
    !*****Archivo de datos del gradiente de temperatura*****
    open(9, file='gradientefluido.dat')
    !*****
    !*****Creación de archivos de datos de la comparación de la temperatura interfacial*****
    !*****Archivo de datos de LA DELTA temperatura nodal*****
    open(10, file='deltatemperaturainterface.dat')
    !*****S O L I D O*****
    !*****Determinación del factor de corrección omegaw*****
    zetaw=((cos(3.141516/(imax-1))+((dwx/dwy)**2)*cos(3.141516/(jmax-1)))/(1+(dwx/dwy)**2)**2
    omegaw=2*(1-sqrt(1-zetaw))/zetaw
    !*****Inicialización de nodos en el SOLIDO*****
    !*****Interface de la pared interna del microcanal*****
    if (itP==1) then
        fw(1,1)=1.0
        fw(imax,1)=1.0
        do i=2, imax-1
            fw(i,1)=1.0
        end do
    else
        !*****Nueva temperatura en la pared interna del canal*****
        do i=1, imax
            fw(i,1)=tempInterfaceFluido(i) !f(i, jmax)
        end do
    end if
    !*****Pared externa del microcanal*****
    fw(1, jmax)=0.0
    fw(imax, jmax)=0.0
    do i=2, imax-1
        fw(i, jmax)=0.0
    end do
    !*****Pared izquierda del microcanal*****
    do j=2, jmax-1
        fw(1, j)=0.0
    end do
end do

```



# ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.

```
!*****Pared derecha del microcanal*****
do j=2, jmax-1
    fw(imax, j)=0.0
end do
!*****Nodos interiores a 0.0 de la malla discretizada*****
do i=2, imax-1
    do j=2, jmax-1
        fw(i, j)=0.0
    end do
end do
!***** SOLUCION DE LA ECUACION DE LA ENERGIA EN EL SOLIDO*****
epsilongorro=0.001
epsilongorro2=epsilongorro**2
fi=(dwx/dwy)**2
lambda=0.75
alfagorro=0.000025
dew=2.0*alfagorro*(1.0+(fi/epsilongorro2))
do itw=1, iter
    dfmaxw=0.0
    do j=2, jmax, ix
        do i=1, imax, ix
            !Correccion de temperaturas en los nodos internos de la malla discretizada
            if ((j>1).and.(j<jmax).and.(i>1).and.(i<imax)) then
                dfw=(alfagorro*fw(i+1, j)+alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j+1)+alfagorro*&
                    fw(i-1, j)+alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-dew*fw(i, j))/dew
            end if
            !Correccion de temperaturas en los nodos del borde izquierdo del microcanal
            if ((i==1).and.(j>1).and.(j<jmax)) then
                dfw=(2.0*alfagorro*fw(i+1, j)+alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j+1)+alfagorro*&
                    (fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-dew*fw(i, j)-2.0*alfagorro*dwx*fwx1)/dew
            end if
            !Correccion de temperaturas en los nodos del borde derecho del microcanal
            if ((i==imax).and.(j>1).and.(j<jmax)) then
                dfw=(2.0*alfagorro*fw(i-1, j)+alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j+1)+alfagorro*&
                    (fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-dew*fw(i, j)+2.0*alfagorro*dwx*fwx2)/dew
            end if
            !Correccion de temperaturas en los nodos del borde externo del microcanal
            if ((j==jmax).and.(i>1).and.(i<imax)) then
                dfw=(alfagorro*fw(i+1, j)+2.0*alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)+alfagorro*&
                    fw(i-1, j)-dew*fw(i, j)-2.0*dwy*lambda*fi)/dew
            end if
            !Correccion de temperaturas en el nodo esquina superior izquierdo
            if ((j==jmax).and.(i==1)) then
                dfw=(2.0*alfagorro*fw(i+1, j)+2.0*alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-dew*&
                    fw(i, j)-2.0*dwx*alfagorro*fwx1-2.0*dwy*lambda*fi)/dew
            end if
            !Correccion de temperaturas en el nodo esquina superior derecho
            if ((j==jmax).and.(i==imax)) then
                dfw=(2.0*alfagorro*fw(i-1, j)+2.0*alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-dew*&
                    fw(i, j)+2.0*alfagorro*dwx*fwx2-2.0*dwy*lambda*fi)/dew
            end if
            if (abs(dfw).gt.dfmaxw) dfmaxw=dfw
                fw(i, j)=fw(i, j)+omegaw*dfw
            end do
        end do
        !Determinacion de gradiente de temperaturas en la interface del solido hacia el fluido
        do i=1, imax, ix
            tempInterfaceSolido(i)=fw(i, 1)
            gradiente(i)=(fw(i, 2)-fw(i, 1))/(dwy)
            gradiente2(i)= (alfagorro/epsilongorro2)*gradiente(i)
        end do
    end do
end do
```

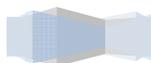


## ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.

```

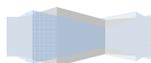
    if (abs(dfmaxw).le.tol) then
        goto 50
    end if
end do
!*****
50 PRINT' (I10, f20. 15)', itw, dfmaxw
!*****Escritura de resultados en los archivos de datos de salida del solido*****
!*****Contador, iteracion final, avance nodal, campo de temperaturas*****
do j=1, jmax, ix
    write (6, 1010) j, itw, dwy*(j-1), (fw(i, j), i=1, imax, ix)
end do
!*****Gradientes y temperature interfacial*****
do i=1, imax, ix
    write (7, 1020) dwx*(i-1), gradiente(i), gradiente2(i), tempInterfaceSolido(i)
end do
!*****Formato de variables de salida del solido*****
1010 format (I10, 1x, I15, 1x, f16. 9, 1x, 501f16. 9)
1020 format (f16. 9, 1x, f16. 9, 1x, f16. 9, 1x, f16. 9)
!*****Cierre de archivos de datos de salida del solido *****
close (6)
close (7)
!*****F L U I D O*****
!*****Determinación del factor de corrección omega*****
zeta=((cos(3. 141516/(imax-1))+((dx/dy)**2)*cos(3. 141516/(jmax-1)))/(1+(dx/dy)**2))**2
omega=2*((1-sqrt(1-zeta))/zeta)
!*****Inicialización de nodos en el FLUIDO*****
!*****Centro del microcanal*****
f(1, 1)=0. 0
f(imax, 1)=0. 0
do i=2, imax-1
    f(i, 1)=0. 0
end do
!*****Interface de la pared interna del microcanal*****
f(1, jmax)=0. 0
f(imax, jmax)=0. 0
do i=2, imax-1
    f(i, jmax)=0. 0
end do
!*****Entrada del microcanal*****
do j=2, jmax-1
    f(1, j)=0. 0
end do
!*****Salida del microcanal*****
do j=2, jmax-1
    f(imax, j)=0. 0
end do
!*****Nodos interiores a 0.0 de la malla discretizada*****
do i=2, imax-1
    do j=2, jmax-1
        f(i, j)=0. 0
    end do
end do
!*****SOLUCION DE LA ECUACION DE LA ENERGIA EN EL FLUIDO*****
Pe=0. 5
beta=0. 01
beta2=beta**2
OMEGAMAY=(dx/dy)**2
de=2. 0*(beta2+OMEGAMAY)
do it=1, iter
    dfmax=0. 0
    do j=1, jmax, ix

```



# ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.

```
do i=2, imax, ix
  velocidad=veloci(j)
  coeficiente1=(beta2-((dx*beta*Pe/2)*velocidad))
  coeficiente2=(beta2+((dx*beta*Pe/2)*velocidad))
  !Correccion de temperaturas en los nodos internos de la malla discretizada
  if ((j>1).and.(j<jmax).and.(i>1).and.(i<imax)) then
    df=(coeficiente1*f(i+1, j)+OMEGAMAY*f(i, j+1)+coeficiente2*f(i-1, j)+OMEGAMAY*&
      f(i, j-1)-de*f(i, j)+(dx**2))/de
  end if
  !Correccion de temperaturas en los nodos del centro del microcanal
  if ((j==1).and.(i>1).and.(i<imax)) then
    df=(coeficiente1*f(i+1, j)+2.0*OMEGAMAY*f(i, j+1)+coeficiente2*f(i-1, j)-de*&
      f(i, j)+(dx**2)-(2.0*OMEGAMAY*dy*fy1))/de
  end if
  !Correccion de temperaturas en los nodos de la interface interna del microcanal
  if ((j==jmax).and.(i>1).and.(i<imax)) then
    df=(coeficiente1*f(i+1, j)+2.0*OMEGAMAY*f(i, j-1)+coeficiente2*f(i-1, j)-de*&
      f(i, j)+(dx**2)+(2.0*dy*OMEGAMAY*gradiente2(i)))/de
  end if
  !Correccion de temperaturas en los nodos de salida del microcanal
  if ((i==imax).and.(j>1).and.(j<jmax)) then
    df=(OMEGAMAY*f(i, j+1)+2.0*beta2*f(i-1, j)+OMEGAMAY*f(i, j-1)-de*&
      f(i, j)+(dx**2)+coeficiente1*2.0*dx*fx2)/de
  end if
  !Correccion de temperaturas en el nodo esquina inferior a la salida del microcanal
  if ((j==1).and.(i==imax)) then
    df=(2.0*beta2*f(i-1, j)+2.0*OMEGAMAY*f(i, j+1)-de*f(i, j)+(dx**2)-&
      (2.0*dy*OMEGAMAY*fy1)+coeficiente1*2.0*dx*fx2)/de
  end if
  !Correccion de temperaturas en el nodo esquina superior a la salida del microcanal
  if ((j==jmax).and.(i==imax)) then
    df=(2.0*beta2*f(i-1, j)+2.0*OMEGAMAY*f(i, j-1)-de*f(i, j)+(dx**2)+&
      coeficiente1*2.0*dx*fx2+(2.0*dy*OMEGAMAY*gradiente2(i)))/de
  end if
  if (abs(df).gt.dfmax) dfmax=df
  f(i, j)=f(i, j)+omega*df
end do
end do
!Determinacion de gradiente de temperaturas en la interface del fluido hacia el solido
do i=1, imax, ix
  tempInterfaceFluido(i)=f(i, jmax)
  gradiente3(i)=(f(i, jmax)-f(i, jmax-1))/(dy)
end do
if (abs(dfmax).le.tol) then
  exit
end if
end do
PRINT' (I10, f20.15)', it, dfmax
!*****Escritura de resultados en los archivos de datos de salida del fluido*****
!*****Contador, iteracion final, avance nodal, campo de temperaturas, velocidad*****
do j=1, jmax, ix
  write (8, 1050) j, it, dy*(j-1), (f(i, j), i=1, imax, ix), veloci(j)
end do
!*****Gradientes y temperature interfacial*****
do i=1, imax, ix
  write (9, 1080) dx*(i-1), gradiente3(i), tempInterfaceFluido(i)
end do
!*****Formato de variables de salida del fluido*****
1050 format (I10, 1x, I15, 1x, f16.9, 1x, 501f16.9, 1x, f16.9)
1080 format (f16.9, 1x, f16.9, 1x, f16.9)
!*****Cierre de archivos de datos de salida del fluido *****
```



## ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO DE LEY DE POTENCIA.

```
close (8)
close (9)
!*****Comparación de las temperaturas de la interface del solido y fluido*****
do i=1,imax,ix
    DELTATEMPERATURAINTERF(i)=tempInterfaceFluido(i)-tempInterfaceSolido(i)
end do
!*****Datos de salida de la comparación de las temperaturas interfaciales*****
do i=1,imax,ix
    write (10,1090) itP,dx*(i-1),DELTATEMPERATURAINTERF(i)
end do
!*****Formato de variables de salida de la comparación de temperaturas interfaciales*****
1090 format (I10,1x,f16.9,1x,f16.9)
!*****Cierre de archivos de datos de salida de la comparación *****
close (10)
!*****CONDICIONAL DE SALIDA DEL PROGRAMA ITERATIVO PRINCIPAL*****
in=1
280   in=in
do itC=in,imax
    i=1+itC
    if (abs(DELTATEMPERATURAINTERF(i)).ge.tol3) then
        goto 200
    else
        PRINT' (I10,1x,I10,1x,f16.9)',itP,i,DELTATEMPERATURAINTERF(i)
        in=i
        goto 280
    end if
end do
pause
exit
200   itM=itP+1
!*****CIERRE DE LA INSTRUCCION ITERATIVAPRINCIPAL *****
end do

!*****

end
```

