



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
CENTRO DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO EN CÓMPUTO



**DISEÑO PARAMÉTRICO DE MOTOR STIRLING**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA DE CÓMPUTO**

**PRESENTA:**

**JORGE CARLOK SILVA**

DIRECTORES

DR. EDGAR ALFREDO PORTILLA FLORES

DR. GERMÁN ARDUL MUÑOZ HERNÁNDEZ

MÉXICO, D.F.,

ENERO 2012



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 12:30 horas del día 9 del mes de enero del 2012 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CIDETEC para examinar la tesis titulada:

"DISEÑO PARAMÉTRICO DE UN MOTOR STIRLING"

Presentada por el alumno:

<u>CARLOK</u>	<u>SILVA</u>	<u>JORGE</u>
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)
Con registro:		
<u>B</u>	<u>0</u>	<u>9</u>
<u>1</u>	<u>3</u>	<u>5</u>
<u>0</u>		

aspirante de:

Maestría en Tecnología de Cómputo

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

  
DR. EDGAR ALFREDO PORTILLA FLORES  
Primer Vocal

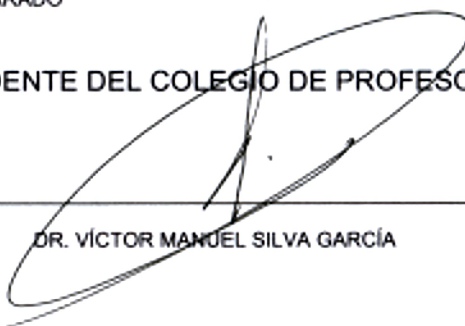
  
DR. GERMÁN ARDUL MUÑOZ HERNÁNDEZ  
Segundo Vocal

  
DR. GABRIEL SEPÚLVEDA CERVANTES  
Presidente

  
M. EN C. JUAN CARLOS HERRERA LOZADA  
Secretario

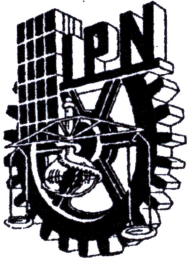
  
M. EN C. EDUARDO VEGA ALVARADO  
Tercer Vocal

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

  
DR. VÍCTOR MANUEL SILVA GARCÍA



S. E. P.  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INNOVACION Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO EN COMPUTO



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

*CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

En la Ciudad de México D. F. el día 10 del mes Enero del año 2011, el (la) que suscribe **Jorge Carlok Silva** alumno (a) del Programa de **Maestría en Tecnología de Cómputo** con número de registro **B091350**, adscrito a **Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo**, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de **Dr. Edgar Alfredo Portilla Flores** y **Dr. Germán Ardul Muñoz Hernández** y cede los derechos del trabajo intitulado **“Diseño paramétrico de un motor Stirling”**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección **[carsiljor@gmail.com](mailto:carsiljor@gmail.com)**. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



Jorge Carlok Silva

## RESUMEN

El uso de las heurísticas para la solución de problemas de optimización con restricciones es una alternativa útil, adicional a las técnicas clásicas. En general, las heurísticas se aplican para la búsqueda de soluciones que puedan considerarse buenas a un costo computacional razonable, garantizando la factibilidad y la eficiencia de las mismas. En trabajos recientes, Storm y Price propusieron una heurística llamada Evolución Diferencial (ED), mientras Kennedy y Eberhart presentaron una heurística que denominaron Optimización Mediante Cúmulo de Partículas (Particle Swarm Optimization, PSO). A este respecto, el trabajo realizado por otros autores para modificar dichos métodos para el tratamiento de problemas de optimización con restricciones es relativamente abundante, aunque hasta ahora no ha profundizado en el análisis de problemas prácticos reales.

Por ello, en la presente tesis se propone una metodología de rediseño sobre los parámetros de un motor Stirling tipo Alpha, con base en un análisis cinemático del mismo, el cual se traduce a un problema de optimización que finalmente se resuelve aplicando tres métodos, los dos de tipo heurísticos ya mencionados, y un tercero utilizando la función `fmincon`, contenida en la biblioteca *toolbox* de la aplicación Matlab®.

Finalmente, se realizó una comparación entre los resultados obtenidos de los tres métodos, enfatizando la comparación sobre el desempeño de los métodos heurísticos.

## ABSTRACT

The use of heuristics for solving optimization problems with restrictions is a useful option, additional to classical techniques. Generally, heuristics are applied for the search of solutions that can be considered as acceptable, with a reasonable computational cost, and guarantying the feasibility and efficiency of them. In related work on this subject, Storm and Price proposed a heuristic known as Differential Evolution (DE), while Kennedy and Eberhart presented another heuristic, denominated as Particle Swarm Optimization (PSO.) In this sense, there is an abundance of investigation that has been developed by other authors in order to modify such methods for the treatment of optimization problems with restrictions, but this work hasn't deepened the analysis of real practical problems.

For that reason, this thesis proposes a redesign methodology, focused on the parameters of a Alpha-type Stirling engine, and taking as a base a cinematic analysis of that type of engine. This is translated in an optimization problem, which is finally solved by means of three methods: the two heuristics techniques mentioned earlier, and a third one using the `fmincon` function, included in the *toolbox* library of the Matlab® application.

Finally, a comparison of results obtained by the application of the three methods is made, with special emphasis on the performance of the heuristic techniques.

## DEDICATORIAS

A mis papás, con cariño, admiración y respeto....

Les agradezco todo lo que me han dado a lo largo de mi vida, desde un buen regaño a tiempo hasta ese amor que me es tan necesario, aun cuando no se los pido. Los amo y muchas gracias por disfrutar los éxitos y sobre todo, por compartir los fracasos, siempre juntos.

Gracias “Viejito”, gracias “Bebé”.

A mis hermanas Cynthia y Ma. Celia, pero sobre todo a Shunashi porque sería inconcebible esta vida sin ustedes; gracias por respetar mis decisiones aunque no estén de acuerdo, que este documento sirva para que se den cuenta que no hay imposibles, que si quieren les resultará lógico poder, recarguen pilas y terminen los proyectos que han empezado, verán que la recompensa es bastante reconfortante.

A mis tíos Kenedy, Roberto y Marcos, porque nunca me dejaron solo en esta ciudad, porque las puertas de sus casas siempre estuvieron abiertas para mí, pero sobre todo porque me hacen creer que he logrado algo extraordinario.

A mi esposa y a mi Bebé, gracias por estar conmigo, por compartir esta aventura, por soñar juntos, y por permitirme realizar esta meta que para mí es muy importante. Ahora con esta nueva herramienta que hemos logrado juntos les prometo que hasta mi último esfuerzo realizado será para forjarnos un mejor futuro, para que sean felices y no les falte nada. Las amo con todo mí ser.

Gracias “Negrita”, gracias por hacerme el hombre más feliz.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco al Dr. Edgar Alfredo Portilla Flores la oportunidad de trabajo que me dio, por confiar en mí, pero sobre todo por la amistad y comprensión que me brindó a lo largo de estos tres años.

Al Dr. Germán Ardul Muñoz Hernández, por estar siempre dispuesto a enriquecer este proyecto, y porque a pesar de estar lejos, siempre estuvo al pendiente de la realización de este trabajo.

Al Dr. Gabriel Sepúlveda Cervantes, al Dr. Juan Carlos Herrera Lozada, al M. en C. Ever Juárez Guerra, al M. en C. Juan Carlos González Robles y al M. en C. Eduardo Vega Alvarado, revisores y sinodales de esta tesis, ya que la enriquecieron con sus acertados comentarios y observaciones.

Es difícil incluso tratar de explicar lo importante que es tener a tu lado a un amigo; agradecer las experiencias compartidas es casi imposible, porque son demasiadas, pero confío en que esto solo es el principio de una larga amistad y camaradería. Gracias amigos y compañeros de aventura, Héctor Manuel Maldonado del Toro y Alexander Sánchez Sibaja, por esto y muchas cosas más.

A mi compadre Ricardo Pastrana Carmona, porque siempre me ha brindado una amistad sincera y se ha preocupado por el bienestar de mi familia en mi ausencia, además de ayudarme en la culminación de estos estudios, gracias compadre.

Al Ing. Luis Alfredo Gordián Rivera, del Laboratorio Nacional de Informática Avanzada (LANIA), por el trabajo que empeñó en la presente tesis, gracias por fortalecer la parte débil de la misma.

A todo el personal administrativo del CIDETEC-IPN, por haberme apoyado siempre en los trámites que realicé dentro del Centro.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y a la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) del IPN, por las becas otorgadas y darme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría.

# ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
DEDICATORIAS	iii
AGRADECIMIENTOS	iv

## Capítulo I. Introducción

1.1 Estado del arte	1
1.1.1. Diseño paramétrico	1
1.1.2. Algoritmos heurísticos	2
1.1.3. Motor Stirling	2
1.2 Planteamiento del problema	4
1.3 Objetivo	4
1.4 Metas	4
1.5 Organización de la tesis	4

## Capítulo II. El motor Stirling

2.1 Introducción	6
2.2 Principio de funcionamiento	7
2.2.1. Ciclo termodinámico	8
2.3 Tipos de motores Stirling	9
2.3.1. Alpha	9
2.3.2. Beta	10
2.3.3. Gamma	10
2.4 Selección de mecanismo a analizar	11
2.5 Análisis Cinemático	11

## Capítulo III. Estrategias de Optimización

3.1 Optimización	20
3.1.1 Función Objetivo	21
3.2.1 Restricciones de diseño	21
3.3.1 Variables de diseño	21
3.2 Métodos de solución	22
3.2.1. Evolución diferencial	22
3.2.1.1. Descripción del algoritmo de evolución diferencial	23
3.2.2. Optimización mediante Cúmulo de Partículas (PSO)	27
3.2.2.1. Motivación	27
3.2.2.2. Elementos de PSO	28



## **Capítulo IV. Simulación numérica**

4.1 Planteamiento del problema de optimización .....	32
4.2 Selección del método de solución .....	33
4.3 Resultados.....	34
4.3.1 Programación clásica.....	34
4.3.2 Evolución diferencial .....	35
4.3.3 Optimización mediante cúmulo de partículas (PSO).....	35
4.4 Comparación .....	36

## **Capítulo V. Conclusiones**

5.1 Conclusiones generales .....	38
5.2 Trabajos a futuro.....	38

<b>Referencias</b> .....	39
--------------------------	----

<b>Sección de Anexos</b> .....	42
--------------------------------	----

## ÍNDICE DE FIGURAS

No. de Figura	Nombre de la Figura	Página
2.1	Diagrama de las partes básicas de un Motor Stirling	8
2.2	Funcionamiento del Motor Stirling	8
2.3	Ciclo termodinámico Stirling	9
2.4	Motor Stirling tipo Alpha	10
2.5	Motor Stirling tipo Beta	11
2.6	Motor Stirling tipo Gamma	11
2.7	Esquema básico de un mecanismo manivela-biela-corredera	11
2.8	Punto mas alto y mas bajo alcanzado por el mecanismo-biela-corredera	13
2.9	Configuración en “V” de un Motor Stirling	15
2.10	Comportamiento de $V_e$ y $V_c$ (Gráficas obtenidas en Matlab).	16
2.11	Mecanismo de cuatro barras	17
2.12	Posición de enclavamiento en cuatro barras (a)	18
2.13	Posición de enclavamiento en cuatro barras (b)	18
3.1	Diagrama de la versión original de Evolución Diferencial	23
3.2	Esquema del operador de mutación del algoritmo de evolución diferencial	25
3.3	Algoritmo original de Evolución Diferencial	26

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>No. de Tabla</b>	<b>Nombre de Tabla</b>	<b>Página</b>
3.1	Parámetros de PSO	28
4.1	Resultados obtenidos por fmincon	34
4.2	Resultados obtenidos por Evolución Diferencial	34
4.3	Media de Evolución Diferencial	34
4.4	Desviación Estándar de Evolución Diferencial	34
4.5	Resultados obtenidos por PSO	35
4.6	Media de PSO	35
4.7	Desviación Estándar de PSO	35
4.8	Mejores valores obtenidos con las distintas técnicas de optimización	35
4.9	Peores valores obtenidos con técnicas heurísticas	35
4.10	Mediana de los valores obtenidos con técnicas heurísticas	36
4.11	Desviación estándar de los valores obtenidos con técnicas heurísticas	36

# **CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN**

## **1.1 ESTADO DEL ARTE**

La parametrización de sistemas mecánicos no es una novedad, sin embargo, la de un motor Stirling si lo es. De la investigación realizada sobre el tema, no se encontraron artículos publicados en revistas indizadas, en los que el tema sea el funcionamiento de dicho motor.

Por lo anterior, la investigación realizada sobre el estado del arte se dividió en tres partes, el Diseño paramétrico, Algoritmos heurísticos y el Motor Stirling, temas que nos proporcionaron un panorama general sobre los trabajos que se han llevado a cabo en relación a la idea central de esta tesis.

### **1.1.1 DISEÑO PARAMÉTRICO**

Se denomina diseño paramétrico a la resolución del problema de asignar la mejor combinación de valores posible a todos los parámetros necesarios para describir el objeto de diseño [1], es decir, dado un problema informal de diseño, plantear y resolver un problema de cómputo que determinará los mejores valores de los parámetros del sistema.

Se utilizan diversos métodos para resolver este tipo de problemas computacionales. Muchos de ellos se basan en modelos matemáticos, que describen la geometría y el comportamiento del objeto de diseño, algunos de ellos se describen a continuación.

Por ejemplo Ahmed Jawad Qureshi et. al. en su artículo “Parametric and Robust Design Using the Quantifier Notion”, ha modelado matemáticamente el proceso de un “ensamble mecánico”, el modelo toma en cuenta la influencia de las desviaciones geométricas, así como los efectos que éstas desviaciones geométricas tienen sobre las propiedades mecánicas del ensamble. Se desarrolló un algoritmo en el que aplicó un nuevo enfoque para el diseño robusto de conjuntos mecánicos, basado en el principio de los cuantificadores del QCSP (Quantified Constraint Satisfaction Problem), mismo que es una extensión del CSP (Constraint Satisfaction Problem). Además, la capacidad de evaluar el impacto de la selección de materiales diferentes también se tiene en cuenta en el algoritmo [2].

Por otro lado J. Grimmer en su artículo “Parametric mechanical design of new insertion devices at the APS” encuentra una posible solución al problema de insertar nuevos dispositivos a la Fuente Avanzada de Fotones (APS por sus siglas en inglés, Advanced Photon Source) del Laboratorio Nacional Argonne en los

Estados Unidos, Grimmer desarrolla un modelo paramétrico, diseñado para minimizar el costo de fabricación, montaje y ajuste de los precios. Esta familia de diseño incorpora un método de bajo costo para la retención de polo y el registro. Además de que su construcción es modular [3].

### **1.1.2 ALGORITMOS HEURÍSTICOS**

Existen muchos algoritmos de este tipo, sin embargo, mencionaremos solo dos que fueron utilizados en esta tesis, Evolución Diferencial (ED) y Optimización Mediante Cúmulo de Partículas (PSO).

En [4], Chattopadhyay, S. Sanyal, S.K. y Chandra A., describen el diseño de un filtro FIR, utilizando el método de optimización convexa, el rendimiento del mismo fue analizado comparando los datos obtenidos mediante la técnica de Evolución Diferencial; los resultados experimentales están incluidos en esta investigación.

En [5], Portilla-Flores E.A., Mezura-Montes E., Alvarez-Gallegos J., Coello-Coello C.A. y Cruz-Villar C.A, nos presentan un trabajo sobre la aplicación del Algoritmo de Evolución Diferencial para la optimización de una transmisión de variación continua, donde es modificado el algoritmo tradicional con el objetivo de aplicarlo a un problema multiobjetivo.

En [6], Liu Hong y Zhang Qishan exponen el algoritmo de cálculo de vida útil para los productos mecánicos de General Motors Company, con el que el costo de experimentación se reduce, así como el tiempo de experimentación. Utilizan PSO para la optimización de la precisión de predicción; por último muestran los resultados comparados con el programa de optimización anterior.

En [7], Qimin y Qili plantean un problema con restricciones que consiste en optimizar un planetario reductor de velocidad, para resolverlo utilizan el algoritmo PSO que mejora la capacidad de carga reduciendo el volumen y peso de la pieza, aumentando de esa manera su eficiencia y la vida útil del planetario. El modelo que describe el funcionamiento del planetario tiene 8 variables de diseño y 18 restricciones y se utiliza el software Matlab para realizar esta optimización.

### **1.1.3 MOTOR STIRLING**

Desde hace algunos años el motor Stirling se ha tomado como objeto de estudio [8]-[14], por las bondades que éste presenta, entre ellas la de alcanzar altas eficiencias energéticas teóricas [15]-[19], además de convertir directamente la energía calorífica en mecánica.

Uno de los retos tecnológicos a los que se enfrenta este tipo de motores es acercar las eficiencias energéticas reales con las teóricas, utilizando nuevos materiales en su manufactura, tales como aceros inoxidable y aluminios, que reducen el desgaste y aumentan la conductividad térmica, por lo que se obtiene un mejor aprovechamiento energético de los motores Stirling.

En [8] J. G. Lira y V. R. Agüero proponen un motor Stirling de tipo beta para la generación de energía eléctrica o mecánica utilizando como fuente de calor el GLP, incluyen el modelo matemático, el análisis termodinámico y el cinemático.

En [9] P. Kerdchang, M. Maungwin, S. Teekasap, J. Hirunlabh, J. Khedari y B. Zeghmati, hacen el análisis numérico de un sistema de aeración de agua, en este sistema se utiliza un motor Stirling de tipo beta para bombear el agua de canales, lagos y estanques creando una circulación del líquido, evitando así la contaminación del agua.

En [10] B. Kongtragool y S. Wongwises presentan una investigación experimental sobre el funcionamiento de un motor Stirling, motor de 2 cilindros en la configuración Gamma. Dicho motor fue probado con un simulador solar (reflector) y variando la intensidad de calor se pudo observar como se reflejó directamente en el torque. También proponen en [11] un motor Stirling de tipo gamma de cuatro cilindros, que fue probado con un simulador solar de cuatro intensidades solares distintas, y se observó que el torque del motor está directamente relacionado con la intensidad solar con la que se trabaja.

En [12] Y. Timoumi, I. Tlili y S. B. Nasrallah platican acerca de los motores Stirling prototipo GPU-3 de General Motors, proponen un modelo dinámico tomando en cuenta las pérdidas térmicas para optimizar su funcionamiento y diseño paramétrico del motor. Una vez optimizado y rediseñado paraméricamente el GPU-3 se logró aumentar 20% la potencia y 12% la eficiencia térmica del motor.

En [13] F. Nepveu, A. Ferriere y F. Bataille analizan termodinámicamente al concentrador solar Euro Dish/Stirling que reúne los rayos solares para proveer calor a la cámara caliente de un motor Stirling 161 de la marca "SOLO" y presentan una solución numérica a las ecuaciones diferenciales del sistema, que describe el comportamiento térmico del sistema.

En [14] J. H. Barón, L. Scollo, F. Hinrichs y R. D. Napoli describen la selección de paraboloides para una mejor captación de la energía solar aplicado a los motores Stirling, es una publicación de experiencias en la generación de energía eléctrica en Argentina, proyecto desarrollado por la Universidad Nacional de Cuyo.

## 1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Actualmente la literatura acerca de los motores Stirling está más orientada a las aplicaciones en que éste se emplea, que a su funcionamiento.

Existen análisis de los concentradores solares que proporcionan al motor su fuente de calor, así como de la resistencia de los materiales aplicados en la manufactura de los componentes del motor, etcétera. Sin embargo, no se ha encontrado literatura respecto a los parámetros de funcionamiento óptimo del motor.

Por lo que en ésta investigación se pretende plantear un problema de rediseño paramétrico de motor Stirling, considerando los parámetros para el óptimo desempeño del mismo. Dichos valores fueron obtenidos mediante la implementación de algoritmos heurísticos para la optimización del sistema.

## 1.3 OBJETIVO

- Proponer un problema de rediseño paramétrico de un mecanismo denominado motor Stirling.

## 1.4 METAS

- Obtener el Modelo Cinemático del mecanismo del motor Stirling a rediseñar.
- Simular el modelo cinemático en Matlab®.
- Establecer los parámetros de desempeño para el motor Stirling.
- Establecer como problema de optimización el rediseño paramétrico del motor.
- Proponer un algoritmo de solución para el problema de optimización, considerando técnicas heurísticas.
- Evaluar cuantitativamente los resultados obtenidos por los algoritmos de solución propuestos.

## 1.5 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

En el **Capítulo I** se presenta la investigación del estado del arte de la parametrización del motor Stirling, dividido en tres partes: investigación sobre el diseño paramétrico, aplicaciones de las técnicas heurísticas y por último, los trabajos realizados con el motor Stirling. Así mismo se exponen el planteamiento del problema, las metas y el objetivo general de la tesis.

El **Capítulo II** explica los conceptos básicos del motor Stirling, su funcionamiento, el ciclo termodinámico mediante el cual se rige, etcétera. Igualmente se presenta la historia del motor Stirling y su clasificación; finalmente se propone un análisis cinemático del mecanismo analizado.

El **Capítulo III** explica el concepto básico de Optimización, así como la definición de sus componentes. También detalla las dos técnicas de optimización utilizadas: *Evolución Diferencial* y *Optimización Mediante Cúmulo de Partículas*.

En el **Capítulo IV** se exponen tanto el problema de optimización como los resultados obtenidos de las técnicas de optimización antes mencionadas, mismos que sirvieron para realizar una comparación.

Las conclusiones generales y propuesta de trabajos a futuro se presentan en el **Capítulo V**.



# CAPITULO II. EL MOTOR STIRLING

## 2.1 INTRODUCCIÓN

Aunque la mayoría de los autores describen el inicio de los motores Stirling con la implementación del ciclo cerrado regenerativo, que hicieron los hermanos Stirling en el año de 1816 [18]-[22], los orígenes de este tipo de máquinas se ubican en el año de 1699, cuando Guillaume Amontons aprovechó la expansión del aire caliente para hacer girar un volante (sólo un año después de la primera máquina de vapor).

Este tipo de máquinas fue evolucionando a la par de los motores de vapor, sin embargo, las máquinas de aire caliente debido a su seguridad fueron remplazando a los motores de vapor, ya que estos últimos estallaban frecuentemente por las altas presiones que se generan en las calderas, además del alto grado de corrosión en el interior de las mismas a consecuencia de las altas temperaturas del agua.

Debido a los accidentes que se suscitaban, en el año de 1759, Wood modificó la máquina de vapor de Newcomen para que funcionara con aire caliente.

Este tipo de maquinas de aire caliente siguieron trabajando en ciclo abierto hasta el año de 1801, cuando Glazebrook introdujo el ciclo cerrado.

Finalmente, en el año de 1816 los hermanos Robert y James Stirling introdujeron el ciclo cerrado regenerativo, desde entonces lo que ahora conocemos como motores Stirling llevan su nombre [18]-[22].

Desde entonces los motores Stirling gozaron de un pequeño esplendor, ya que se utilizaron en diversas tareas, en su mayoría relacionadas con el bombeo de agua y ventilación de minas. Esplendor que duraría unas cuantas décadas, ya que para el año de 1876, August Otto inventó el primer motor de cuatro tiempos de combustión interna, con mayor potencia, aunque menos eficiente en el clo de trabajo.

A partir de entonces, el motor Stirling se fue perdiendo poco a poco en el olvido, aunque era más eficiente que el nuevo motor Otto, éste último generaba mayor potencia y su manufactura era mas barata [20], además que en aquella época el petróleo era mucho más barato que en la actualidad.

El motor Stirling estuvo fuera de la escena tecnológica por más de 60 años, pero con el estallido de la Segunda Guerra Mundial en el año de 1937, los gobiernos comenzaron a invertir en investigación de nuevos materiales y en la

implementación de nuevas aplicaciones para la tecnología que aunque obsoleta era sencilla de fabricar, además de la versatilidad de uso.

Se descubrió que una de las limitaciones del motor Stirling era el material con el que eran fabricados anteriormente, sufría demasiado desgaste en las cabezas de los pistones debido a las altas temperaturas alcanzadas en esos puntos. Este problema fue corregido con el uso de un nuevo material, recientemente llamado acero inoxidable [20], fue así como los motores Stirling volvieron a utilizarse, esta vez como generadores de energía eléctrica en Bunkers.

En la década de los 40`s la compañía Phillips Electronics empezó a invertir fuertes sumas de dinero en la investigación de este motor, por las ventajas que poseía, como la de sencillez de mecanismos, la utilización de varias fuentes de energía para la generación de calor, facilidad de operación entre otras, sin embargo aún no podía competir con los motores de combustión interna ya que estos últimos eran más económicos, livianos y potentes.

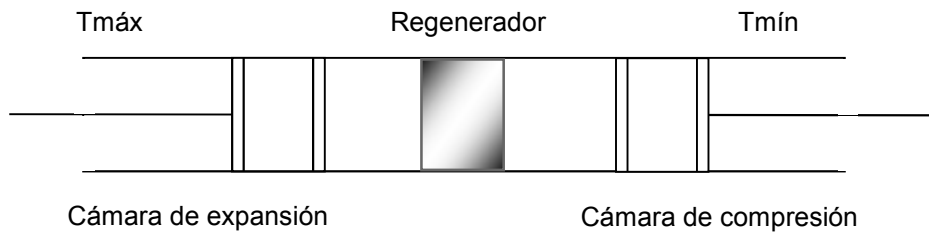
En la década de los 80`s, la Agencia Americana para el Desarrollo Internacional (USAID) invirtió mucho dinero para construir un motor Stirling sencillo y económico, utilizado en países en vía de desarrollo, desafortunadamente el único beneficiado fue Bangladesh [20].

Después de ese intento fallido por parte de la USAID las investigaciones de este tipo de motor se han orientado principalmente a la generación de energía eléctrica en el espacio y en yates de lujo, locomoción de submarinos, etcétera [20].

## **2.2 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO**

El principio del funcionamiento de este tipo de motores se basa en la expansión y contracción de los gases sometidos a una diferencia de temperatura; en caso de enfriamiento, éste se contrae; en contraste, cuando es calentado, sufre una expansión volumétrica.

El motor Stirling como se puede observar en la figura 2.1 está compuesto por un fluido de trabajo, un punto frío para extraer el calor, un punto caliente para calentar el fluido, dos émbolos, uno para desplazamiento del fluido de punto caliente al frío y viceversa, y uno más para realizar el trabajo.

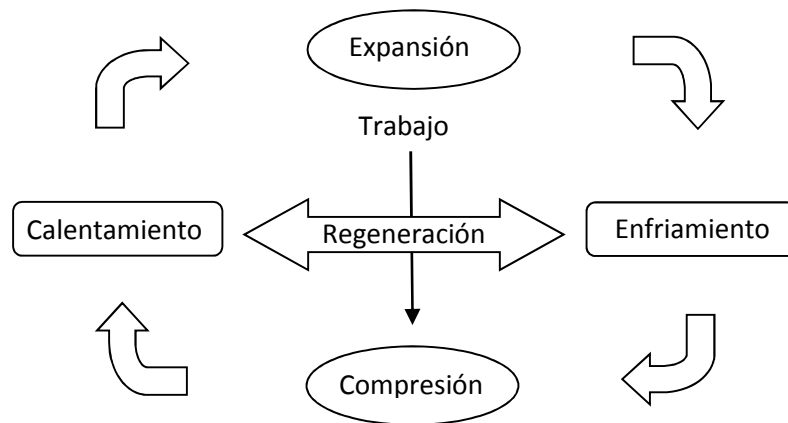


**Figura 2.1.** Diagrama de las partes básicas de un Motor Stirling.

El funcionamiento de un motor Stirling, prácticamente es la ejecución de cuatro procesos cíclicos:

1. Aporte de calor al fluido de trabajo por medio de la convección.
2. Expansión del fluido de trabajo debido al calentamiento del mismo.
3. Extracción del calor al fluido de trabajo por medio del regenerador.
4. La compresión del fluido de trabajo con extracción de calor.

Estos cuatro procesos se interpretan en el siguiente diagrama, figura 2.2, donde además se observa que el trabajo es obtenido por la compresión del fluido.



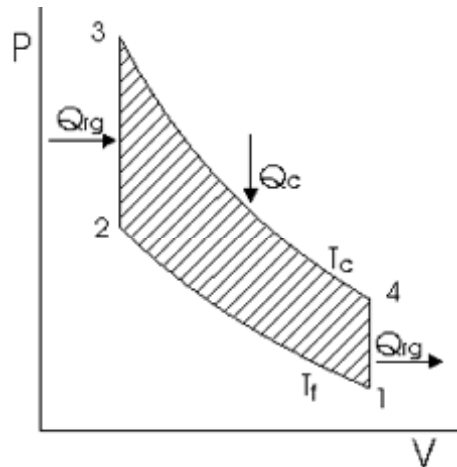
**Figura 2.2.** Funcionamiento del Motor Stirling

### 2.2.1 CICLO TERMODINÁMICO

El ciclo teórico de Stirling consta de las 4 etapas mencionadas anteriormente: a) dos transformaciones isocoras, en las que el gas de trabajo pasa a través de un regenerador absorbiendo o cediendo calor, y b) dos transformaciones isotermas, en las que el gas está en contacto con una fuente caliente o fría, a  $T_c$  y a  $T_f$  respectivamente.

El ciclo termodinámico se muestra en la figura 2.3, que es un diagrama en el que se grafica la Presión contra el Volúmen (P-V). Sus etapas son las siguientes:

- 1-2: Compresión isoterma del gas a la temperatura inferior,  $T_f$ . Durante este proceso se cede al exterior una cantidad de calor  $Q_f$  a la fuente fría.
- 2-3: Absorción de calor a volumen constante. El gas absorbe del regenerador una cantidad de calor  $Q_{rg}$  y aumenta su temperatura, lo que provoca un aumento de presión.
- 3-4: Expansión isoterma del gas a alta temperatura,  $T_c$ . Durante este proceso se absorbe una cantidad de calor  $Q_c$  de la fuente caliente.
- 4-1: Cesión de una cantidad de calor  $Q_{rg}$  al regenerador a volumen constante, disminuyendo la temperatura del fluido.



**Figura 2.3.** Ciclo termodinámico Stirling.

## 2.3 TIPOS DE MOTORES

Los motores Stirling se pueden clasificar de acuerdo a la posición del desplazador y del pistón de potencia, principalmente existen tres tipos, Alpha, Beta y Gamma. Existen muchos otros tipos de motores, pero su diseño se deriva de alguno de los tres mencionados anteriormente.

### 2.3.1 ALPHA

Este tipo de motor consta de dos cilindros independientes conectados por un tubo en el que se localiza el regenerador, que almacena y cede calor. En cada uno de los cilindros hay un pistón que se mueve 90 grados desfasado respecto al otro, como se puede observar en la figura 2.4.

Uno de los cilindros se calienta y el otro se enfría mediante aletas o agua. El desfase entre los dos pistones hace que el aire pase de un cilindro a otro calentándose, enfriándose y realizando el trabajo que permite el funcionamiento del motor [21].

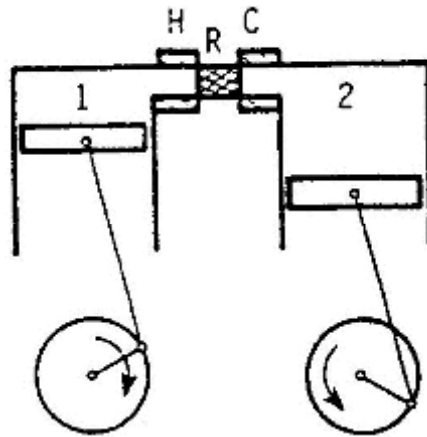


Figura 2.4. Motor Stirling tipo Alpha.

### 2.3.2 BETA

Esta configuración es la del motor original de los hermanos Stirling, y consta de un cilindro, con una zona caliente y una fría. En el interior del cilindro está el desplazador, cuya misión es pasar el aire de la zona fría a la caliente y viceversa.

Los motores grandes por lo general llevan un regenerador externo por el que debe pasar el aire en su camino de la zona fría a la caliente y viceversa. El regenerador debe ser concéntrico con el desplazador que está situado en el pistón de potencia. Mediante un cigüeñal especial el movimiento del pistón y el desplazador están desfasados  $90^\circ$ , lo que permite que el motor funcione, en la figura 2.5 se observa el diagrama general de este tipo de motor.

Desde el punto de vista termodinámico es el motor más eficaz, sin embargo, su construcción es complicada debido a que el pistón debe de tener dos bielas y permitir el paso del vástago que mueve el desplazador [22].

### 2.3.3 GAMMA

Este motor es muy parecido al de tipo beta, pero más sencillo de construir. Lo que diferencia al Beta y al Gamma, es que éste último tiene el pistón de potencia y el desplazador en diferentes cilindros, desfasados a  $90^\circ$ . Los dos cilindros están unidos por un cigüeñal, como se puede observar en la figura 2.6. Este tipo de motor es más sencillo, pero su potencia y eficiencia es menor que las de tipo Beta.

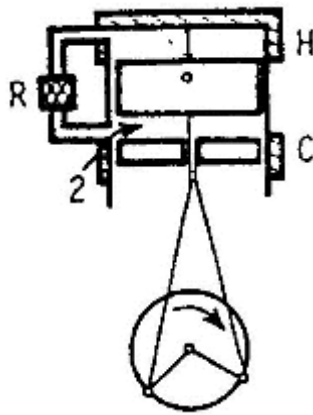


Figura 2.5. Motor Stirling tipo Beta.

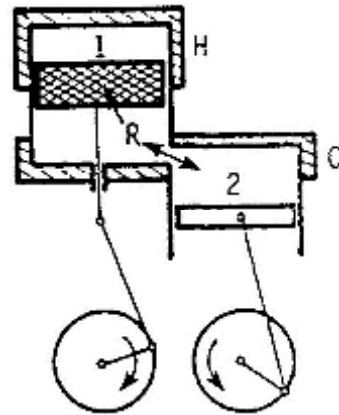


Figura 2.6. Motor Stirling tipo Gamma.

## 2.4 SELECCIÓN DE MECANISMO A ANALIZAR

El mecanismo a analizar será un motor Stirling de tipo Alpha, debido a que su manufactura es más sencilla. En internet podemos encontrar planos para su construcción.

## 2.5 ANÁLISIS CINEMÁTICO

La figura 2.7 muestra un sistema de compresión simple, compuesto por una manivela, una biela y una corredera.

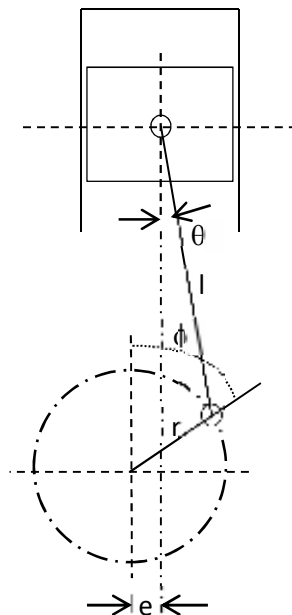


Figura 2.7. Esquema básico de un mecanismo manivela-biela-corredera.

Tomando como base el dibujo mostrado en la figura 2.7, se calcula la altura con la siguiente expresión:

$$y = r\cos(\phi) + l\cos(\theta) \quad (1)$$

De la misma forma, se calcula el desplazamiento en el eje x, sin embargo, debido al desfaseamiento entre el centro de la manivela y el desplazamiento del pistón, esta ecuación puede ser escrita como una igualdad entre los desplazamientos de la manivela más el error y el desplazamiento de la biela:

$$r\sin(\phi) - e = l\sin(\theta) \quad (2)$$

Con la finalidad de eliminar a  $\theta$  de la ecuación 2, elevamos al cuadrado toda la ecuación como sigue:

$$l^2\sin^2(\theta) = [r\sin(\phi) - e]^2 \quad (3)$$

Y con la ayuda de la siguiente identidad trigonométrica

$$l^2\sin^2(\theta) + l^2\cos^2(\theta) = l^2 \quad (4)$$

Despejando, podemos obtener la relación  $l\cos(\theta)$

$$l^2\cos^2(\theta) = l^2 - l^2\sin^2(\theta) \quad (5)$$

$$\sqrt{l^2\cos^2(\theta)} = \sqrt{[l^2 - l^2\sin^2(\theta)]} \quad (6)$$

$$l\cos(\theta) = \sqrt{[l^2 - l^2\sin^2(\theta)]} \quad (7)$$

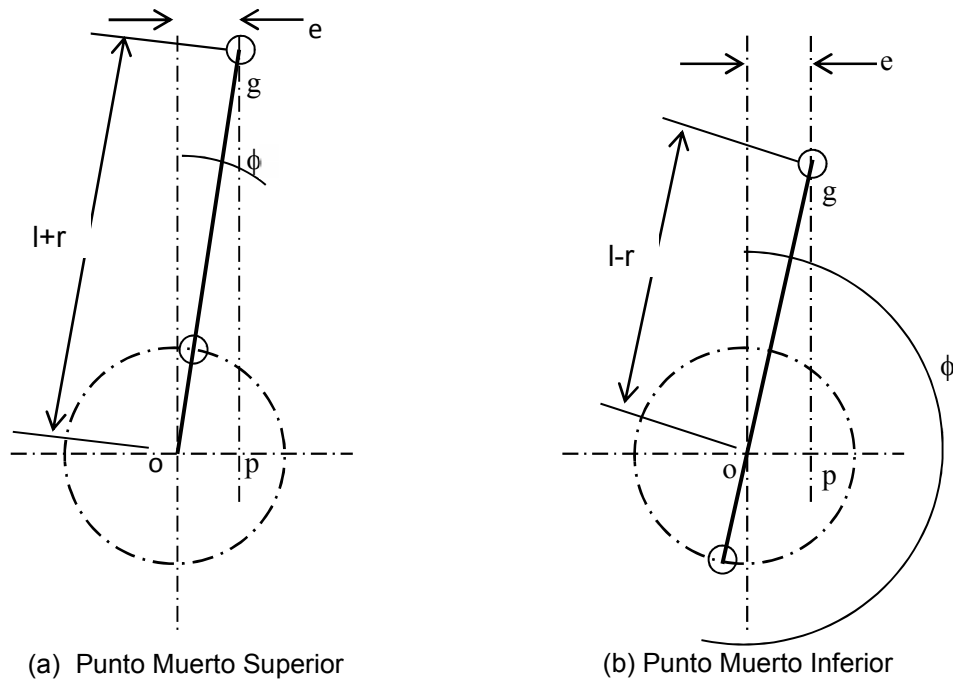
Al sustituir la ecuación (3) en la (7) tenemos la relación  $l\cos(\theta)$ , escrita de otra manera:

$$l\cos(\theta) = \sqrt{[l^2 - [r\sin(\phi) - e]^2]} \quad (8)$$

Después se sustituye la ecuación (8) en la ecuación (1) y tenemos la expresión de la altura solo en función del ángulo  $\phi$ , el error y el radio de la manivela.

$$y = r\cos(\phi) + \sqrt{[l^2 - [r\sin(\phi) - e]^2]} \quad (9)$$

Otra variable importante de calcular es el desplazamiento del pistón, que es igual a  $2r$  solo para el caso en el que  $e = 0$ . Sin embargo, como el error no es cero, la figura 2.8 (a) y (b) muestra los casos en las que la manivela se encuentra en la posición de mayor altura y la de menor altura.



**Figura 2.8.** Puntos más alto y más bajo alcanzado por el mecanismo manivela-biela-corredera.

Para determinar la magnitud de la carrera del pistón, con la ayuda del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo con puntos “o”, “p” y “g” que se forma en la figura 2.8. Por lo que la carrera del pistón está determinada por la diferencia entre las distancias del punto muerto superior ( $S_{sup}$ ) y el inferior ( $S_{inf}$ ); entonces:

$$s = S_{sup} - S_{inf} \quad (10)$$

Calculando, con la ayuda del teorema de Pitágoras tenemos que:

$$(e)^2 + (S_{sup})^2 = (l + r)^2 \quad (11)$$

Despejando  $(S_{sup})^2$

$$(S_{sup})^2 = (l + r)^2 - (e)^2 \quad (12)$$

Por lo tanto

$$S_{sup} = \sqrt{(l + r)^2 - (e)^2} \quad (13)$$

De la misma manera se calcula  $S_{inf}$ , obteniendo la siguiente ecuación

$$S_{inf} = \sqrt{(l - r)^2 - (e)^2} \quad (14)$$



Sustituyendo las ecuaciones (13) y (14) en la ecuación (10), se obtiene:

$$s = \sqrt{(l+r)^2 - (e)^2} - \sqrt{(l-r)^2 - (e)^2} \quad (15)$$

Factorizando la ecuación (15)

$$s = r\sqrt{\left(\frac{l}{r} + 1\right)^2 - \left(\frac{e}{r}\right)^2} - r\sqrt{\left(\frac{l}{r} - 1\right)^2 - \left(\frac{e}{r}\right)^2} \quad (16)$$

Normalizando con respecto a  $r$

$$\frac{s}{r} = \sqrt{\left[\left(\frac{l}{r} + 1\right)^2 - \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]} - \sqrt{\left[\left(\frac{l}{r} - 1\right)^2 - \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]} \quad (17)$$

Se continúa con el cálculo de una nueva variable, la del volúmen existente entre la parte superior del cilindro y la posición en la que se encuentre la cara del pistón, que se establece como la diferencia entre el desplazamiento de la altura  $S_{sup}$  y la altura “ $y$ ” multiplicado por el área “ $A$ ” de la base del cilindro:

$$V = [S_{sup} - y]A \quad (18)$$

Al sustituir las ecuaciones (9) y (13) en (18), y al área de la parte superior del cilindro como  $A = \left[\frac{\pi D^2}{4}\right]$ , donde  $D$  es el diámetro de la circunferencia de la cabeza del pistón, se obtiene:

$$V = \left[\sqrt{(l+r)^2 - (e)^2} - r\cos(\phi) + \sqrt{[l^2 - [r\sin(\phi) - e]^2]}\right] \left[\frac{\pi D^2}{4}\right] \quad (19)$$

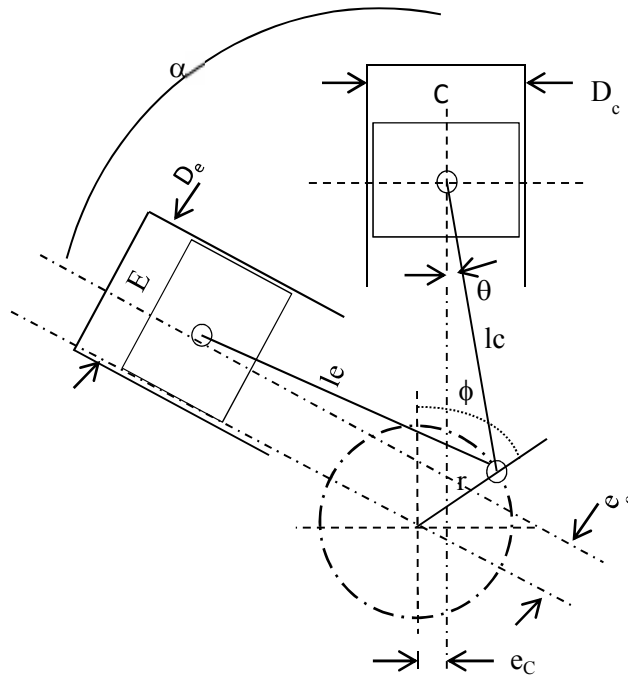
Despejando  $r$  se obtiene.

$$V = \left[r\sqrt{\left[\left(\frac{l}{r} + 1\right)^2 - \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]} - r\cos(\phi) + r\sqrt{\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 - \left[\sin(\phi) - \frac{e}{r}\right]^2}\right]\right] \left[\frac{\pi D^2}{4}\right] \quad (20)$$

Finalmente se puede expresar al volúmen en función del ángulo  $\phi$  de la siguiente manera:

$$\frac{V(\phi)}{\left[\frac{\pi D^2}{4}\right]} = \left[\sqrt{\left[\left(\frac{l}{r} + 1\right)^2 - \left(\frac{e}{r}\right)^2\right]} - \cos(\phi) + \sqrt{\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 - \left[\sin(\phi) - \frac{e}{r}\right]^2}\right]}\right] \quad (21)$$

Observando la figura 2.9 y con la ayuda de la ecuación (21), podemos determinar los volúmenes de las cámaras en momentos de expansión y compresión.



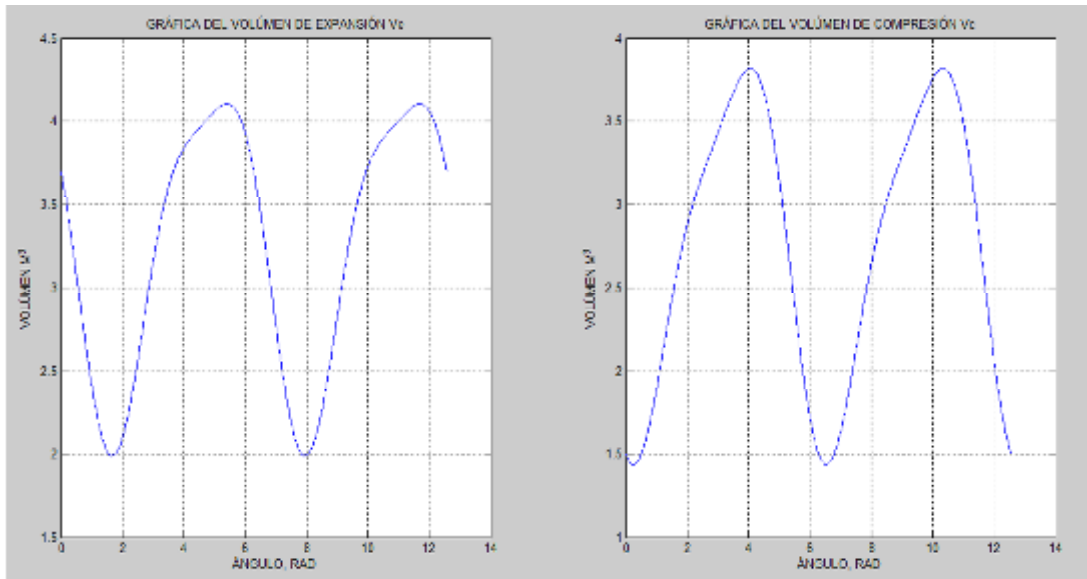
**Figura 2.9.** Configuración en “V” de un Motor Stirling.

Entonces el volúmen de compresión  $V_c$ , y el de expansión  $V_e$  se determinan de la siguiente forma:

$$\frac{V_e(\phi)}{[r\pi D_e^2/4]} = \left[ \sqrt{[(l_e/r + 1)^2 - (e_e/r)^2]} - \{ \cos(\phi - \alpha) + \sqrt{[(l_e/r)^2 - [\sin(\phi - \alpha) - e_e/r]^2]} \} \right] \quad (22)$$

$$\frac{V_c(\phi)}{[r\pi D_c^2/4]} = \left[ \sqrt{[(l_c/r + 1)^2 - (e_c/r)^2]} - \{ \cos(\phi) + \sqrt{[(l_c/r)^2 - [\sin(\phi) - e_c/r]^2]} \} \right] \quad (23)$$

En el Apéndice 1 se encuentra el código que se insertó en el programa Matlab para comprender mejor el comportamiento de los volúmenes de las ecuaciones (22) y (23) los valores de los eslabones tomados al azar, pero conservando la relación que debe de existir entre ellos. En la figura 2.10 se muestra el comportamiento de los volúmenes de expansión y de compresión del motor Stirling; y se observa que éste es el esperado ya que están desfasados los ciclos de expansión y compresión sin perder la relación que se debe mantener entre ellos.



**Figura 2.10.** Comportamiento de  $V_e$  y  $V_c$  (Gráficas obtenidas en Matlab).

Sin embargo, para algunas configuraciones de motores Stirling los dos cilindros se encuentran en una disposición totalmente vertical, por lo que el ángulo entre ellos es igual a cero ( $\alpha = 0$ ).

Se sabe que el eslabonamiento de cuatro barras es el mecanismo articulado más simple posible para el movimiento controlado de un grado de libertad, y que también aparece en diversas facetas, como el dispositivo de manivela-corredera y el de leva-seguidor [24]. A continuación se mencionan las condiciones de rotabilidad deducidas para el mecanismo plano de cuatro barras que pueden emplearse en la determinación de la capacidad de rotación del mecanismo manivela-corredera.

Considerando el mecanismo mostrado en la figura 2.11, debemos recordar que un par prismático es equivalente a un par de revoluta localizado en el infinito, en una dirección perpendicular a la dirección del movimiento relativo del par prismático.

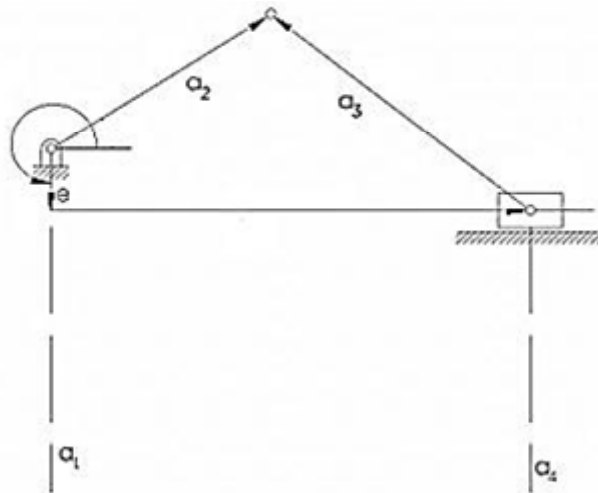


Figura 2.11 Mecanismo de cuatro barras

Por lo tanto, la longitud de los eslabones  $a_1$  y  $a_4$  del mecanismo manivela-corredera estará dada por:

$$a_1 = e + a_2 \quad \text{y} \quad a_4 = a_3 + a_2 \quad (24)$$

En donde  $e > 0$ . Con estos datos es posible analizar la capacidad de rotación de los eslabones  $a_2$  y  $a_4$  del mecanismo manivela-corredera.

De la primera condición de rotabilidad se tiene que:

$$a_1 + a_2 < a_3 + a_4 \quad (25)$$

Sustituyendo los valores de (24) en (25) se obtiene:

$$e + a_2 < a_3 + a_2 \quad (26)$$

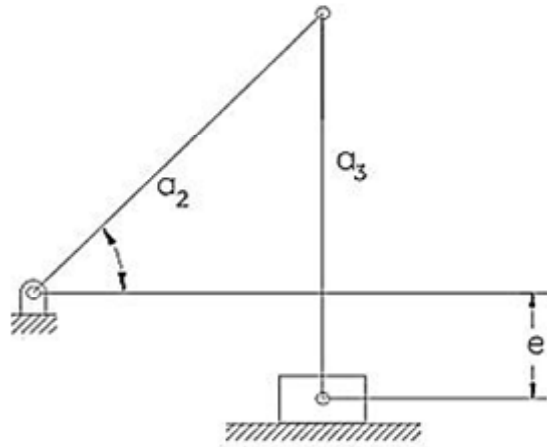
Simplificando

$$e < a_3 - a_2 \quad (27)$$

Si la ecuación (27) no se satisface, es decir que  $a_2 > a_3 - e$ , ó  $a_2 + e > a_3$ , el eslabón  $a_2$ , la biela, son incapaces de rotar y presentan una posición de puntos muertos como se muestra en la figura 2.12.

Despejando la ecuación (27), se obtiene la primera restricción de diseño, misma que nos asegura evitar la posición de enclavamiento descrita en la figura 2.12.

$$0 < a_3 - a_2 - e$$



**Figura 2.12.** Posición de enclavamiento en cuatro barras (a).

De la segunda condición de rotabilidad, se tiene que:

$$|a_2 - a_1| \leq |a_4 - a_3| \quad (28)$$

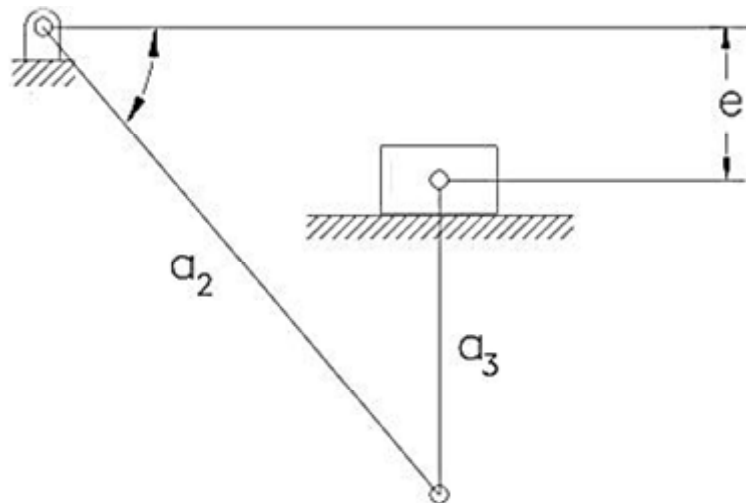
Y sustituyendo los valores mostrados en (24) se obtiene:

$$|a_2 - (a_1 + e)| \leq |a_3 - a_4| \quad (29)$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación

$$a_2 \leq a_3 + e \quad (30)$$

Si la ecuación (30) no se satisface, es decir,  $a_2 > a_3 + e$  entonces el eslabón 2, la biela, es incapaz de rotar y se presenta una posición de puntos muertos como se muestra en la figura 2.13.



**Figura 2.13.** Posición de enclavamiento en cuatro barras (b).

Despejando la ecuación (30), se obtiene la segunda restricción de diseño, misma que nos asegura evitar la posición de enclavamiento descrita en la figura 2.13.

$$0 \quad a_3 - a_2 + e$$

El volúmen de un motor Stirling con las disposiciones de sus cilindros en paralelo ( $\alpha = 0$ ) puede verse de la siguiente manera:

$$V = [r\pi D^2/4] \left\{ \sqrt{[(l/r + 1)^2 - (e/r)^2]} - \cos(\phi) + \sqrt{[(l/r)^2 - [\sin(\phi) - e/r]^2]} \right\}$$

En donde:

$\phi$  es una variable conocida como la posición angular de la manivela ( $0^\circ$ - $360^\circ$ ),

$D$  es el diámetro de las cilindros (m),

$r$  es la longitud de la manivela (m),

$l$  es la longitud de la biela (m), y

$e$  es el desfase entre el centro de la corredera y el punto pivote de la manivela (m).

# CAPÍTULO III. ESTRATEGIA DE OPTIMIZACIÓN

## 3.1 OPTIMIZACIÓN

La optimización se requiere cuando se pretende encontrar una solución o conjunto de soluciones que maximice o minimice una cierta medida de calidad, conocida como función objetivo, para un problema dado.

Dentro de los conceptos más destacados para el término Optimización, se encuentran los siguientes:

- Proceso para encontrar la mejor solución posible a un problema, bajo circunstancias específicas.
- Método matemático para determinar los valores de las variables que hacen máximo el rendimiento de un proceso o un sistema.
- Búsqueda de la mejor manera para realizar una actividad.

Los métodos de optimización normalmente involucran técnicas de programación matemática, las cuales son aplicables a problemas de toma de decisiones, así como al establecimiento de las mejores soluciones posibles.

En matemáticas, la optimización intenta dar respuesta a un tipo general de problemas matemáticos donde se desea elegir el mejor elemento entre un conjunto de valores. En su forma más simple, el problema equivale a resolver una ecuación del tipo:

$$\max(\min)_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

En donde:

$x = (x_1, \dots, x_n)$  es un vector y representa variables de decisión,

$f(x)$  es llamada función objetivo y representa o mide la calidad de las decisiones (usualmente números enteros o reales), y

es el conjunto de puntos o decisiones factibles o restricciones del problema.

En algunos casos es posible expresar al conjunto de restricciones  $\Omega$  como la solución de un sistema de igualdades o desigualdades, tal como

$$g(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

$$h(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Entonces, un problema de optimización busca una decisión óptima para maximizar (ganancias, velocidad, eficiencia, etc.) o minimizar un criterio determinado (costos, tiempo, riesgo, error, etc.), mientras que el conjunto de restricciones indican que no cualquier decisión es posible.

### 3.1.1 FUNCIÓN OBJETIVO

Uno de los mayores problemas al que se enfrenta el ingeniero de diseño es proponer al menos una relación matemática que permita cuantificar el desempeño del sistema u objeto de interés. En general, definir una relación matemática para **medir** el rendimiento o característica de interés de un sistema es producto de un profundo **análisis** del mismo. La relación matemática se denomina entonces función objetivo y es aquella que se maximiza o minimiza según sea el caso, cuando es evaluada con el conjunto de valores del vector óptimo de variables de diseño.

Debido a lo complejo que son los sistemas en la actualidad, su descripción matemática para el proceso de diseño necesita más de una función objetivo, es decir, la descripción adecuada de un sistema requiere de al menos dos funciones objetivo, las cuales generalmente tienen conflicto entre sí, por lo que la estrategia es establecer un problema de optimización multiobjetivo para el sistema.

### 3.1.2 RESTRICCIONES DE DISEÑO

El conjunto de limitantes que se deben satisfacer para producir un diseño aceptable se denomina genéricamente restricciones de diseño; aquellas que inciden en el comportamiento o el desempeño del sistema son denominadas **restricciones funcionales o de comportamiento**, mientras que las que representan limitaciones físicas tales como disponibilidad, facilidad de fabricación y transportabilidad son las **restricciones geométricas**.

### 3.1.3 VARIABLES DE DISEÑO

Cualquier sistema en ingeniería está definido por un conjunto de cantidades, de las cuales algunas pueden verse como variables en el proceso de diseño.

Un aspecto importante es determinar el conjunto de variables de diseño (con el número mínimo de elementos) para obtener la información necesaria en dicho proceso. En la mayoría de los problemas de ingeniería, estas variables no pueden elegirse de manera arbitraria, ya que deben describir de manera completa al sistema u objeto de interés.



## 3.2 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Si bien existen muchas técnicas de optimización, a continuación se describen únicamente los dos métodos heurísticos utilizados para solucionar el problema que se propone en el siguiente capítulo. Ambos métodos pertenecen a la clasificación denominada “Técnicas Heurísticas”, que se emplean para resolver un tipo de problema computacional general, usando los parámetros dados por el usuario sobre unos procedimientos genéricos y abstractos de una manera que se espera eficiente. La etimología de heurística es la misma que la de la palabra **eureka**, cuya exclamación se atribuye a Arquímedes en un episodio tan famoso como ficticio. La palabra heurística aparece en más de una categoría gramatical; cuando se usa como sustantivo, identifica al arte o la ciencia del descubrimiento, una disciplina susceptible de ser investigada formalmente. Cuando aparece como adjetivo se refiere a cosas más concretas, tales como estrategias heurísticas, reglas heurísticas o silogismos y conclusiones heurísticas. Claro está que estos dos usos están íntimamente relacionados, ya que la heurística usualmente propone estrategias que guían el descubrimiento.

Las heurísticas generalmente se aplican a problemas que no tienen un algoritmo específico que proporcione una solución satisfactoria, o bien, cuando no es posible implementar ese método óptimo. La mayoría de las heurísticas tienen como objetivo los problemas de optimización combinatoria, pero por supuesto, se pueden aplicar a cualquier problema que se pueda reformular en términos heurísticos.

### 3.2.1 EVOLUCIÓN DIFERENCIAL

Uno de los algoritmos evolutivos más utilizados es el de Evolución Diferencial, que fue creado por Rainer Storn y Kenneth Price para resolver el problema polinomial de Chebychev en 1994. Al año siguiente dichos autores propusieron la Evolución Diferencial en su artículo “Differential evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces” [25], para la optimización de funciones no lineales y no diferenciables sobre espacios continuos.

La Evolución Diferencial es un método de búsqueda directa y estocástica, que ha demostrado ser efectivo, eficiente y robusto [26] en una gran variedad de aplicaciones, como se desprende de los resultados en la investigación del estado del arte de la presente tesis.

La Evolución Diferencial cuenta con un número de características importantes, las cuales lo hacen atractivo para resolver problemas de optimización global, entre ellas se destacan las siguientes [27]:

- Manejo de funciones objetivo no diferenciables
- Manejo de funciones objetivo no lineales
- Manejo de funciones objetivo multimodales
- Suele converger al óptimo
- Utiliza pocos parámetros de control

Evolución Diferencial también pertenece a la clasificación de Algoritmos Evolutivos dado que se basa en poblaciones, además de que emplea dos mecanismos evolutivos para la generación de los descendientes: mutación y cruza, y por último, un mecanismo de reemplazo, el cual se aplica entre el vector padre y el vector hijo para determinar quien sobrevive en la siguiente generación.

### 3.2.1.1 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO DE EVOLUCIÓN DIFERENCIAL

El algoritmo de evolución diferencial maneja dos poblaciones diferentes dentro del proceso de optimización:

- Población primaria
- Población secundaria

La primera almacena la población actual, que a su vez se genera al inicio de manera aleatoria, mientras que la segunda almacena los individuos que resultan exitosos en el proceso de selección. La representación gráfica de ambas poblaciones se muestra en la figura 3.1.

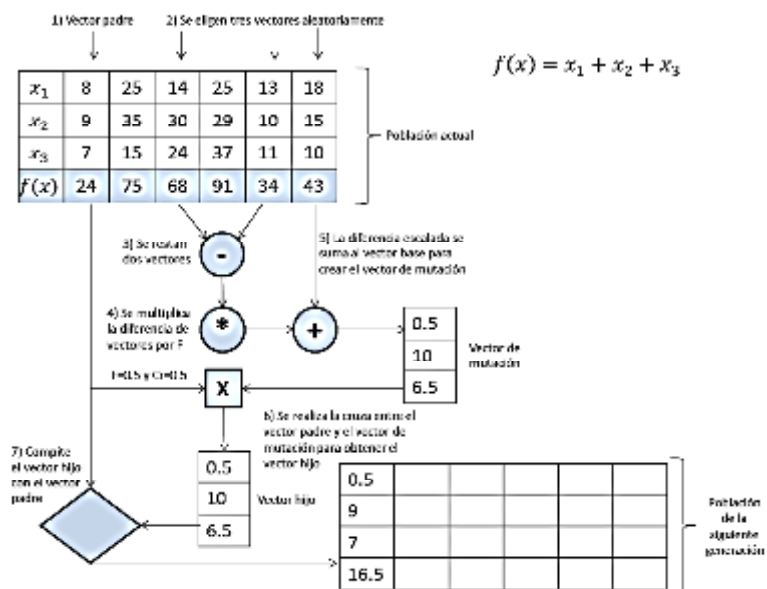


Figura 3.1 Diagrama de la versión original de Evolución Diferencial.

Matemáticamente, una población se expresa de la siguiente forma:

$$P_G = (X_{G,i}, \dots, X_{G,N_p-1}) \quad i = 0, 1, \dots, N_p - 1 \quad G = 0, 1, \dots, G_{max}$$

Donde  $P_G$  representa a una población, la cual está conformada por vectores  $X_{G,i}$ ; a cada uno de los vectores se le asigna un índice  $i$ , que va desde 0 hasta  $N_p - 1$ ,  $N_p$  es el número total de vectores en la población y su valor no cambia durante el proceso de optimización al igual que el número máximo de generaciones  $G_{max}$ , y  $G$  representa la generación a la cual pertenece el vector de la población:

$$X_{G,i} = (x_{G,i,j}, \dots, x_{G,i,D-1}) \quad j = 0, 1, \dots, D - 1$$

Cada vector  $X_{G,i}$  contiene  $D$ -dimensiones,  $D$  es el número de variables de decisión (parámetros) de la función objetivo del problema; las variables de decisión son indizadas por  $j$ , y se representan mediante números reales.

El valor de una variable de decisión inicial puede ser dado por la siguiente ecuación:

$$x_{G,i,j} = rand_j(0,1) (b_{j,U} - b_{j,L}) + b_{j,L}$$

Donde  $rand_j$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo  $[0,1]$ ,  $b_{j,L}$  y  $b_{j,U}$  son los límites inferiores y superiores de las variables de decisión  $j$ .

Como primer paso del algoritmo de Evolución Diferencial, se genera aleatoriamente la población inicial, donde los vectores están uniformemente distribuidos en el espacio de búsqueda dentro de los límites definidos.

Una vez iniciada la población, Evolución Diferencial utiliza la mutación y la recombinación para producir un solo vector hijo (*trial*) por cada vector de la población. Para la generación del vector hijo se requiere primero llevar a cabo el proceso de mutación, el cual consiste en:

- Seleccionar aleatoriamente tres vectores diferentes entre sí ( $X_{G,r0}$ ,  $X_{G,r1}$  y  $X_{G,r2}$ ).
- Restar dos de ellos ( $X_{G,r1} - X_{G,r2}$ )  $r0$   $r1$   $r2$ .
- Aplicar a la diferencia un peso dado por un factor "F"  $F(X_{G,r1} - X_{G,r2})$ .
- Por último, sumar la diferencia escalada al tercer vector

De esta manera se crea un vector llamado vector de mutación:

$$V_{G,i} = X_{G,r0} + F(X_{G,r1} - X_{G,r2})$$

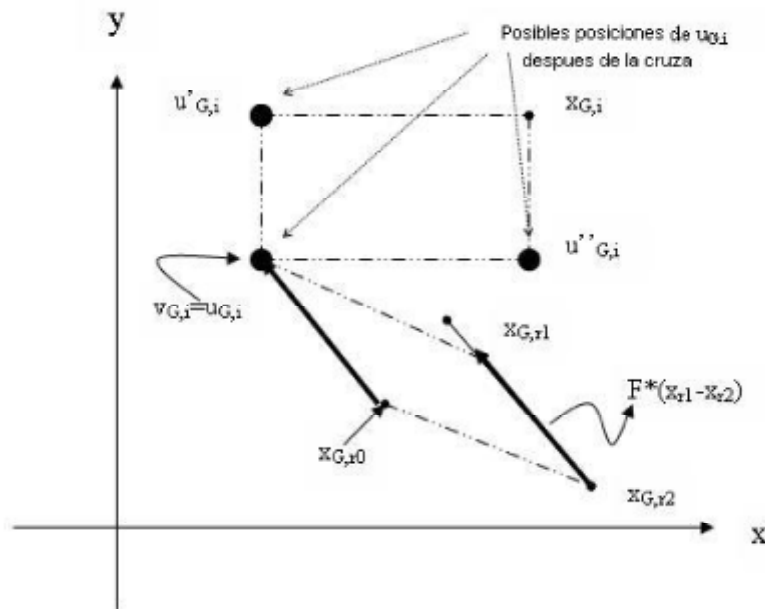
La figura 3.2 muestra gráficamente el proceso de mutación.

Los índices “ $r0$ ”, “ $r1$ ” y “ $r2$ ” son números enteros elegidos al azar en el rango  $[0, N_p - 1]$  diferentes entre sí, “ $r1$ ” y “ $r2$ ” representan a los índices de vectores de diferencias, el factor escalar  $F \in [0,1]$  es un número real positivo que escala el vector de diferencia y “ $r0$ ” es el índice del vector base. La mutación en *Evolución Diferencial* es el principal mecanismo para generar nuevas direcciones de búsqueda.

Posteriormente, se hace la cruce o recombinación entre el vector padre  $X_{i,G}$  y el vector de mutación  $V_{i,G}$  con el propósito de generar un vector hijo  $U_{i,G}$ . Este proceso se hace de la siguiente manera:

$$U_{G,i} = \begin{cases} V_{G,i} & \text{si } (rand_j \leq Cr) \text{ ó } j_{rand} = j \\ X_{G,i} & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

La condición  $Cr \in [0,1]$  controla la cantidad de variables de decisión (parámetros) que se copian del vector de mutación al vector hijo,  $j_{rand} \in [0, D - 1]$  es una variable elegida aleatoriamente y su función es lograr que por lo menos un parámetro del vector de mutación sea copiado al vector hijo y así mismo evita que el vector hijo sea duplicado del vector padre, como se observa en la figura 3.2.



**Figura 3.2.** Esquema del operador de mutación del algoritmo de evolución diferencial.

La cruce intercambia información entre los vectores participantes con el propósito de buscar una mejor solución en el espacio de búsqueda. Todos los vectores de la población son seleccionados sólo una vez como padre, sin depender del valor de la función objetivo (valor de aptitud). Después de obtener el vector hijo, este se evalúa en la función objetivo del problema y se compara con el vector padre con base en su valor de la función objetivo; el mejor valor pasa a formar parte de la población en la siguiente generación. Si el vector padre todavía es mejor, se conserva en la siguiente generación, como se observa en la siguiente fórmula (asumiendo minimización).

$$U_{G+1,i} = \begin{cases} U_{G,i} & \text{si } f(U_{G,i}) \leq f(X_{G,i}) \\ X_{G,i} & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

El proceso de mutación, de recombinación y de selección se repite hasta alcanzar un criterio de terminación especificado por el usuario, en este caso el número máximo de generaciones (iteraciones),  $G_{max}$ . Evolución Diferencial maneja pocos parámetros de control, mismos que son especificados por el usuario, tales como:  $N_p$ ,  $G_{max}$ ,  $Cr$  y  $F$ . En la figura 3.3 se muestra el algoritmo original de Evolución Diferencial [28].

```

1 Generar aleatoriamente una población inicial
2 Evaluar cada individuo de la población en  $f(X_{G,i})$ 
3 do
4   for( $i = 0; i < N_p; i++$ ) seleccionados aleatoriamente
5      $r0, r1, r2$  [ $0, N_p - 1$ ] seleccionados aleatoriamente
6     donde  $r0 \quad r1 \quad r2 \quad i$ 
7      $j_{rand}$  [ $0, D - 1$ ] seleccionada al azar
8     for ( $j = 0; j < D; j++$ )
9       if ( $rand_j < Cr$ ) or  $j_{rand} = j$  then
10         $u_{G,i,j} = x_{G,r0,j} + F(x_{G,r1,j} - x_{G,r2,j});$ 
11      else
12         $u_{G,i,j} = x_{G,i,j};$ 
13      end for
14      if  $f(u_{G,i}) < f(x_{G,i})$  then
15         $x_{G+1,i} = u_{G,i,j};$ 
16      else
17         $x_{G+1,i} = x_{G,i,j};$ 
18      end for
19       $G = G + 1;$ 
20 while (criterio de terminación)

```

**Figura 3.3.** Algoritmo original de Evolución Diferencial.

## **3.2.2 OPTIMIZACIÓN MEDIANTE CÚMULO DE PARTÍCULAS (PSO)**

La optimización mediante Cúmulo de Partículas es una heurística desarrollada por Kennedy y Eberhart en 1995 [29], la cual ha sido utilizada para resolver problemas de optimización, denominada PSO por sus siglas en Inglés (*Particle Swarm Optimization*). PSO es una técnica fácil de implementar y de funcionamiento sencillo, que por su naturaleza representa un paradigma diferente a los algoritmos evolutivos, catalogándose dentro del área de Inteligencia en Cúmulos [30].

### **3.2.2.1 MOTIVACIÓN**

PSO fue concebido como un algoritmo bioinspirado, por tener sus orígenes en la idea básica del comportamiento social de las bandadas de pájaros o bancos de peces. En estos grupos de animales se establecen relaciones sociales entre los individuos del grupo, definiéndose jerarquías de acuerdo a las características de cada uno de ellos, existiendo un líder que es reconocido y seguido por los individuos de su grupo. El líder es un individuo que tiene características físicas o habilidades que le permiten mantener un control sobre los demás, y ser el guía para desarrollar actividades como buscar comida o moverse a otro lugar cuando el alimento se ha acabado. Los individuos confían en la capacidad de su líder para dirigirlos, pero en estos grupos sociales se suele cambiar de líder si surge un individuo con mejores capacidades que el actual, sustituyéndolo en la guía del grupo. Cada individuo dentro del grupo ve influenciado su comportamiento por dos factores:

- Su conocimiento y habilidades propias adquiridas durante su vida o de manera innata.
- La influencia del líder.

Cuando el grupo se organiza y decide emprender el vuelo para ir en busca de comida, el líder guía al grupo por donde tiene la sospecha de encontrar alimento; sin embargo, todos los individuos, también durante su vuelo, tratan de avistar comida y avisar al grupo de la nueva dirección que deben tomar con el objeto de tener éxito en su misión, ya que en esa nueva dirección pueden encontrar alimento. Durante el vuelo se debe tener noción de la posición propia y la de los demás a fin de evitar colisiones, y evitar perder la dirección de búsqueda del líder. Este comportamiento social de las bandadas de pájaros es la base de PSO, y cada individuo del grupo es representado por una partícula en el cúmulo.

La Optimización mediante Cúmulo de Partículas se utiliza para resolver problemas de optimización, y tiene un espacio de búsqueda definido por la dimensión del problema a resolver y por el rango de variables. PSO es una

heurística que utiliza una población de soluciones representadas por las partículas del cúmulo, dicha población usualmente no varía su tamaño a través de las generaciones, ya que no existe un mecanismo de generación de hijos ni reemplazo de sobrevivientes, a diferencia de otros algoritmos evolutivos.

La tabla 3.1 muestra los parámetros utilizados en esta heurística. El conocimiento cognitivo de cada partícula se refiere al conocimiento propio adquirido en la búsqueda, que es representado por la mejor posición alcanzada que es recordada (y su correspondiente valor de la función objetivo), así como por la posición actual de la partícula con su valor propio de la función. El conocimiento social se refiere a los valores de la mejor partícula del cúmulo (líder) que será tomada como referencia para guiar a las demás partículas. En cada generación las partículas actualizan su posición utilizando como referencias tanto el conocimiento cognitivo como el social representado por el líder.

**Tabla 3.1** Parámetros de PSO.

NOMBRE	SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
Número de partículas	NP	Número de Partículas del Cúmulo
Generaciones	MAX_GEN	Número de generaciones que va a iterar el algoritmo
Peso de inercia	$w$	Regula la influencia de la velocidad de vuelo actual de una partícula en el cálculo del nuevo valor de velocidad
Coefficiente de aceleración $c1$	$c1$	Regula la influencia de la mejor posición recordada de una partícula en la actualización de su velocidad
Coefficiente de aceleración $c2$	$c2$	Regula la influencia del líder en la actualización de la velocidad de una partícula
Coefficiente de estrechamiento	$k$	Se utiliza para controlar la velocidad actualizada de una partícula en la versión de PSO sin inercia

### 3.2.2.2 ELEMENTOS DE PSO

#### Representación de soluciones.

Una posible solución para resolver el problema se representa por una partícula en el cúmulo. Cada partícula corresponde al vector de los valores para cada variable del problema, y se indica como  $\vec{x} = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$ . Inicialmente se genera una población de cierto tamaño (20 ó 40 partículas por ejemplo) con valores aleatorios dentro del rango de las variables, y cada partícula representa un punto en el

espacio de búsqueda. Mediante el vector de valores de cada variable se puede obtener el valor de la función objetivo ( $fitness_{x_i}$ ) que proporciona una medida de la calidad de la solución representada por la partícula.

### Selección del líder.

En problemas de optimización sin restricciones la selección del líder del cúmulo ( $p_{global}$  ó  $gBest$ ) se basa en la comparación del valor de aptitud calculado para cada partícula ( $fitness_{x_i}$ ) (valor de la función objetivo y/o algún otro criterio de evaluación), mediante su vector de los valores para cada variable, contra el valor de aptitud del líder ( $fitness_{gBest}$ ), seleccionando como líder del cúmulo a aquella partícula con mejor valor de la aptitud. Si una partícula tiene un igual valor de aptitud que el líder no lo sustituye, ya que forzosamente debe tener uno mejor. Si ninguna partícula del cúmulo a través de las generaciones llegara a mejorar la solución del líder, todas las partículas del cúmulo tenderán a asemejar su solución (posición) a la del líder del cúmulo, cada vez más en cada generación hasta estar prácticamente en la misma posición. A esto se denomina convergencia del cúmulo.

### Función de vuelo.

Dada su naturaleza, PSO determina la nueva posición de cada partícula a partir de una función de vuelo, actualizando su posición después de haber calculado la nueva velocidad. La velocidad representa en sí una dirección de búsqueda. La figura 3.5 muestra los factores que influyen la dirección de búsqueda de una partícula. La fórmula para calcular la velocidad de la partícula es la siguiente.

$$v_{id}(t + 1) = w \ v_{id}(t) + c_1 \ rand() \ (p_{id} - x_{id}) + c_2 \ Rand() \ (gBest - x_{id})$$

La nueva velocidad ( $v_{id}(t + 1)$ ) de la partícula es determinada en su forma general por los siguientes parámetros:

- Peso de inercia  $w$ . El peso o factor de inercia es un valor que regula la influencia de la velocidad anterior de la partícula  $v_{id}(t)$  en el cálculo de la nueva velocidad  $v_{id}(t + 1)$ , a manera de guiar el vuelo de la partícula haciendo un balance entre explotación y exploración del área de búsqueda. Bajo ciertas condiciones, el factor de inercia promueve la convergencia del cúmulo, es decir, que todas las partículas se asemejan al líder del cúmulo en su solución alcanzada. La versión original de PSO utiliza  $w$ , pero existen versiones que no lo usan, por lo que la regulación de la velocidad anterior se hace de manera diferente.



- $v_{id}(t)$ . Representa la velocidad actual de la partícula que fue anteriormente calculada con la misma fórmula, y se refiere a su dirección de vuelo. En un inicio todas las partículas tienen una velocidad de 0, lo que quiere decir que forman parte de un estado de reposo cuando comienza el vuelo. De otra forma, el tener una velocidad inicial mayor a 0, requeriría un conocimiento previo del recorrido del área de búsqueda para fijar su valor.
- Coeficientes de aceleración ( $c_1$  y  $c_2$ ).  $Rand()$  y  $rand()$  representan un número real aleatorio con distribución uniforme entre 0.0 y 1.0, los cuales multiplican a los coeficientes de aceleración. Los números aleatorios son de distribución uniforme para evitar repeticiones en los números generados. El coeficiente  $c_1$  regula la influencia del conocimiento cognitivo de la partícula, mientras que el coeficiente  $c_2$  regula la influencia del conocimiento social. Esto es,  $c_1$  marca la influencia que tiene la mejor posición alcanzada por la partícula ( $p_{id}$ ) para guiar su nueva dirección, y  $c_2$  determina la influencia del líder del cúmulo ( $p_{gd}$ ) en la dirección de búsqueda de la partícula.  $c_1 \cdot rand()$  y  $c_2 \cdot Rand()$  pueden representarse como  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respectivamente. Si  $\phi_1 > 0$  y  $\phi_2 = 0$ , únicamente el conocimiento cognitivo influye para actualizar la velocidad. Si  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_2 > 0$ , únicamente el conocimiento social influye para actualizar la velocidad. Si  $\phi_1 > 0$  y  $\phi_2 > 0$ , ambos conocimientos intervienen para guiar la nueva dirección de búsqueda.
- $p_{id}$  o  $pBest$ . Indica la memoria de la partícula, su mejor posición alcanzada hasta esa generación.
- $p_{global}$  o  $gBest$ . Marca la mejor posición del cúmulo, es decir el líder.
- $x_{id}$ . Representa la posición actual de la partícula, misma que se toma como referencia para calcular la nueva velocidad (dirección de búsqueda).
- $v_{id}(t + 1)$ . Es la velocidad actualizada de la partícula, que determinará la nueva dirección de búsqueda de la partícula en la generación  $t + 1$ .

Una vez calculada la velocidad actualizada  $v_{id}(t + 1)$ , se recalcula la posición de la partícula mediante la siguiente fórmula:

$$x_{id} = x_{id} + v_{id}$$

La posición actualizada de la partícula no debe exceder el límite inferior y superior del vector de variables, dado que esos parámetros están definidos con base en el contexto del problema. Se puede establecer una velocidad máxima o mínima para no salirse del rango permitido de las variables.

El peso de la inercia ( $w$ ) es un parámetro muy importante para balancear la búsqueda global y local. Se asigna un valor pequeño al valor de la inercia si se necesita promover la búsqueda local, y un valor grande si es necesario promover

la exploración global. Para promover un equilibrio se puede utilizar un esquema dinámico, en donde para la exploración se puede comenzar con un valor alto de  $w$  y decrementarlo conforme transcurren las generaciones. Shi y Eberhart [31] sugieren utilizar un valor de  $w = 0.8$  para optimización en espacios no restringidos.

### **Memoria de las partículas.**

Cada partícula tiene la capacidad de recordar la mejor posición por donde ha pasado mediante una memoria propia, que es representada como  $pBest(\vec{x})$ , la cual forma parte de su conocimiento cognitivo. Para cada partícula es de utilidad recordar su mejor posición por donde ha pasado, puesto que reduce la influencia del conocimiento social (representado por el líder del cúmulo) al actualizar su velocidad, y permite a la partícula explorar el área de búsqueda cercana en donde encontró su mejor posición recordada [32].

## CAPITULO IV. SIMULACIÓN NUMÉRICA

La simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a efecto experiencias sobre el mismo, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos para el funcionamiento de dicho sistema [33].

### 4.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Tomando como base el análisis cinemático que se realizó anteriormente en el Capítulo II, en donde el volúmen esta descrito por:

$$V = [r\pi D^2/4] \left\{ \sqrt{[(l/r + 1)^2 - (e/r)^2]} - \cos(\phi) + \sqrt{[(l/r)^2 - [\sin(\phi) - e/r]^2]} \right\}$$

y tomando en cuenta la definición de Función Objetivo del Capítulo III, se traduce la ecuación del Modelo Cinemático a la forma de un problema de optimización de la siguiente manera:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^3} f(x_1, x_2, x_3) = [x_1\pi D^2/4] \left\{ \sqrt{[(x_2/x_1 + 1)^2 - (x_3/x_1)^2]} - \cos(\phi) + \sqrt{[(x_2/x_1)^2 - [\sin(\phi) - x_3/x_1]^2]} \right\}$$

Sujeto a:

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 = 0$$

En donde:

*D = Parametro constante*

$$r = x_1$$

$$l = x_2$$

$$e = x_3$$

$$\phi = (\omega)(t)$$

Desglosando  $\phi = (w)(t)$  se tiene que el mecanismo analizado gira a una velocidad de 4 revoluciones por segundo, por lo tanto:

$$w = \frac{4rev}{s} \frac{2\pi rad}{1rev} = 8\pi \frac{rad}{s}$$

Sustituyendo  $w$  en la fórmula original, quedaría de la siguiente manera:

$$\phi = 8\pi \frac{rad}{s} (t)$$

Sin embargo, la velocidad  $8\pi \frac{rad}{s}$  indica que realiza cuatro vueltas en un segundo, si se utilizara este dato se repetirían los datos cuatro veces; sólo interesa analizar una sola revolución, que serían 360 grados. Por lo tanto, esa velocidad se divide entre cuatro para obtener  $t = (0.25)$ . Esto es:

$$\phi = 8\pi \frac{rad}{s} (0.25)$$

para que el programa de optimización recabe datos en el vector de tiempo que a continuación se muestra.

$$t=[0, 0.001, 0.002, \dots, 0.25]$$

Esto es,

$$\max V = f(r, l, e)$$

Donde,

$$D = 0.03$$

$$\phi = 8\pi \frac{rad}{s} (0.25)$$

$$0.02 \quad r \quad 0.05$$

$$0.04 \quad l \quad 0.1$$

$$0.001 \quad e \quad 0.005$$

## 4.2 SELECCIÓN DEL MÉTODO DE SOLUCIÓN

Como se mencionó anteriormente, se utilizarán dos métodos de solución: el algoritmo de Evolución Diferencial y el algoritmo de Optimización Mediante Cúmulo de Partículas. Ambos métodos heurísticos fueron programados en el software de cálculo matemático Matlab® de la Compañía MathWorks; esto con la

finalidad de utilizar la función `fmincon` de las bibliotecas de Matlab, para tener un parámetro común de comparación de los métodos heurísticos contra los de programación clásica.

### 4.3 RESULTADOS

Los programas con técnicas heurísticas que se desarrollaron realizan 30 ejecuciones con una población de 100 individuos, aunque con una población de 30 también se obtienen buenos resultados.

En Evolución Diferencial se utiliza un coeficiente de cruce de 0.5 con un factor de 0.8, mientras que en PSO se le asigna un valor de 0.8 a la variable de peso ( $w$ ), y sus coeficientes de aceleración se calibraron en 0.8.

#### 4.3.1 PROGRAMACIÓN CLÁSICA

El propósito de la función `fmincon` del programa Matlab es encontrar el mínimo o máximo de una función escalar multivariable que comienza en una estimación inicial. Esto es generalmente denominado optimización de restricciones lineales o no lineales.

El modelo de la función que ésta realiza es el siguiente:

$$\min f(x):$$

Sujeto a:

$$c(x) \leq 0$$

$$ceq(x) = 0$$

$$Ax \leq b$$

$$Aeqx = beq$$

$$lb \leq x \leq ub$$

Donde  $x$ ,  $b$ ,  $beq$ ,  $lb$ , y  $ub$  son vectores,  $A$  y  $Aeq$  son matrices,  $c$  y  $ceq(x)$  son funciones que retornan vectores, y  $f(x)$  es una función que retorna un escalar.  $f(x)$ ,  $c(x)$ , y  $ceq(x)$  pueden ser funciones no lineales.

Los resultados obtenidos con este programa son los que se muestran en la Tabla 4.1.

**Tabla 4.1** Resultados obtenidos por fmincon.

Variables	R	L	E
	X1	X2	X3
Valores Óptimos	0.0500	0.1000	0.0050

V	0.0100 m <sup>3</sup>
---	-----------------------

### 4.3.2 EVOLUCIÓN DIFERENCIAL

Los valores obtenidos con el programa que implementa la evolución diferencial se muestran en la Tabla 4.2, el programa que se implementó se incluye en la sección de Anexos 2.

**Tabla 4.2** Resultados obtenidos por Evolución Diferencial.

Valores	X1	X2	X3	V
El mejor	0.0500	0.0999	0.0050	-0.0100
El peor	0.0500	0.0999	0.0050	-0.0100
mediana	0.0500	0.0999	0.0050	-0.0100

**Tabla 4.3** Media de Evolución Diferencial.

Media	-0.0100
-------	---------

**Tabla 4.4** Desviación Estándar de Evolución Diferencial.

Desviación estándar	0
---------------------	---

### 4.3.3 OPTIMIZACIÓN MEDIANTE CÚMULO DE PARTÍCULAS (PSO)

Los valores obtenidos con el programa que implementa el algoritmo de PSO se muestran en la Tabla 4.5, y el programa desarrollado se incluye en la sección de Anexos 3.

**Tabla 4.5** Resultados obtenidos por PSO.

valores	X1	X2	X3	V
El mejor	0.0500	0.0999	0.0042	-0.0100

El peor	0.0382	0.0764	0.0031	-0.0077
mediana	0.0500	0.0999	0.0028	-0.0100

**Tabla 4.6** Media de PSO.

Media	-0.0096
-------	---------

**Tabla 4.7** Desviación Estándar de PSO.

Desviación estándar	6.3294 e-004
---------------------	--------------

## 4.4 COMPARACIÓN

Los mejores valores obtenidos por las tres técnicas están mostrados en la Tabla 4.8, donde se puede observar que los mejores resultados se obtienen de la técnica de PSO, ya que se pretende que el error sea lo mas cercano posible a cero.

**Tabla 4.8** Mejores valores obtenidos con las distintas técnicas de optimización.

	X1	X2	X3
Fmincon	0.0500	0.1000	0.0050
Evolución diferencial	0.0500	0.0999	0.0050
PSO	0.0500	0.0999	0.0042

Sin embargo, en la Tabla 4.9 se observa que la técnica de búsqueda de soluciones óptimas “Evolución Diferencial” tiene un mejor desempeño, ya que aún su peor valor encontrado obtuvo un resultado aceptable, caso contrario a la técnica PSO.

**Tabla 4.9** Peores valores obtenidos con técnicas heurísticas.

	X1	X2	X3
Evolución diferencial	0.0500	0.0999	0.0050
PSO	0.0382	0.0764	0.0031

El buen desempeño de la técnica de optimización Evolución Diferencial se puede corroborar en la Tabla 4.10, ya que en la mediana de los datos obtenidos se puede observar que la técnica PSO aún no ha llegado a su valor óptimo en X3, mientras que Evolución Diferencial lo logró desde la primera corrida.

**Tabla 4.10** Mediana de los valores obtenidos con técnicas heurísticas.

	X1	X2	X3
--	----	----	----

Evolución Diferencial	0.0500	0.0999	0.0050
PSO	0.0500	0.0999	0.0028

La desviación estándar nos muestra el factor aproximado de cambio entre un resultado y otro en la búsqueda de soluciones, por lo que en la Tabla 4.11 se puede observar que Evolución Diferencial encontró su óptimo desde la primera corrida, mientras que en PSO aunque muy pequeña, existe una desviación.

**Tabla 4.11** Desviación estándar de los valores obtenidos con técnicas heurísticas.

	Desviación estándar
Evolución diferencial	0
PSO	6.3294e-004



# CAPITULO V. CONCLUSIONES

## 5.1 CONCLUSIONES GENERALES

En la presente tesis se propuso un modelo cinemático que describe el funcionamiento de un motor Stirling tipo alpha. Mismo que se simuló en el programa Matlab® y definitivamente cumple con el comportamiento esperado del motor Stirling tipo Alpha.

El problema de rediseño de un motor Stirling se tradujo a un problema de optimización, dicho problema se puede tomar como un problema dinámico desde el punto de vista computacional, ya que al implementarle  $\phi = (w)(t)$  se evalúa en diferentes tiempos, aun con los mismos valores de variables el resultado es diferente conforme va evolucionando la variable  $\phi$ .

El problema de optimización propuesto se resolvió aplicando dos técnicas heurísticas: Evolución diferencial y Optimización mediante cúmulo de partículas, dichos resultados se compararon con los resultados obtenidos por la función fmincon del toolbox del programa Matlab®.

Así mismo, se observó que ambos algoritmos produjeron resultados factibles. Sin embargo, debido a la sencillez de la implementación de la Evolución Diferencial podemos concluir que éste es un algoritmo altamente recomendable y competente contra otro tipo de algoritmos ya que tiene un desempeño aceptable utilizando menos tiempo el procesador de la computadora.

Finalmente, se concluye de acuerdo al desempeño de los algoritmos que los Algoritmos heurísticos son una buena opción en problemas de optimización mecánica, ya que son flexibles en su programación y se obtiene resultados viables y en poco tiempo de ejecución.

## 5.2 TRABAJOS A FUTURO

A continuación se mencionan algunos de los trabajos que se proponen:

Realizar la manufactura o la compra de un motor Stirling, para implementar la instrumentación adecuada para la adquisición de datos y así obtener datos reales de funcionamiento.

Analizar el motor determinar una función matemática que cuantifique el funcionamiento del motor Stirling. Lo anterior, para establecer un problema de rediseño el cual se resuelva utilizando una técnica heurística.

## REFERENCIAS

- [1] Marrero S. A. y Martínez J., Estrategia para el diseño paramétrico basado en modelos. Ingeniería Mecánica 2008, vol. 11. Noviembre de 2011. ISSN.
- [2] Ahmed Jawad Q., "Parametric and Robust Design Using the Quantifier Notion", Computers & Industrial Engineering, CIE 2009, IEEE, pp. 1359-1366, Agosto de 2009, ISBN: 978-1-4244-4135-8.
- [3] Grimmer J. y Kmak R., "Parametric Mechanical Design of New Insertion Devices at the APS", Particle Accelerator Conference, IEEE, pp. 889-891, Mayo de 2005, ISBN:0-7803-8859-3.
- [4] Chattopadhyay S., et. al., "Design of FIR Pulse-Shaping Filter: Superiority of Differential Evolution Optimization over Convex Optimization", Circuits and Systems for Communications (ECCSC), IEEE, pp. 189-192, Noviembre de 2010, ISBN: 978-1-61284-400-8.
- [5] Portilla-Flores E.A., et. al., "Utilización de la evolución diferencial multiobjetivo en el diseño mecatrónico de una transmisión de variación continua", Memorias del 8vo. Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Octubre 23 – 25, 2007.
- [6] Liu Hong y Zhang Qishan, "Life prediction of mechanical Products of G.M.(1,1) based on particle Swarm Optimization", Grey Systems and Intelligent Services, IEEE, pp. 409-413, Enero de 2008, ISBN: 978-1-4244-1294-5.
- [7] Qimin X. y Qili X., "Study on Optimal Design of Planetary Gear Reducer Based on Particle Swarm Algorithm and Matlab", Semantics Knowledge and Grid (SKG), IEEE, pp. 391-394, Enero de 2011, ISBN: 978-1-4244-8125-5.
- [8] J. G. Lira y V. R. Agüero, "Generación de energía eléctrica con un motor Stirling empleando un combustible gaseoso", 8° Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Instituto de Motores de Combustión Interna, FIM y Universidad Nacional de Ingeniería, Cusco, Perú, 23-25 Octubre de 2007.
- [9] P. Kerdchang, M. Maungwin, S. Teekasap, J. Hirunlabh, J. Khedari y B. Zeghamati, "Development of a new solar thermal engine system for circulating water for aeration", Solar Energy 78, pp. 518-527, Septiembre de 2004.
- [10] B. Kongtragool and S. Wongwises, "Performance of a twin power piston low temperature differential Stirling Engine powered by a solar simulator", Solar Energy 81, pp. 884-895, Diciembre de 2006.

- [11] B. Kongtragool and S. Wongwiset, "A four power-piston low-temperature differential Stirling engine using simulated solar energy as a heat source", *Solar Energy* 82, pp. 493-500, Enero de 2008.
- [12] Y. Timoumi, I. Tlili and S. B. Nasrallah, "Design and performance optimization of GPU-3 Stirling Engines", *Energy* 33, pp. 1100-1114, Febrero de 2005.
- [13] F. Nepveu, A. Ferriere and F. Bataille, "Termal model of a dish/Stirling systems", *Solar Energy* 83, pp. 81-89, Septiembre de 2008.
- [14] J. H. Barón, L. Scollo, F. Hinrichs y R. D. Napoli, "Aprovechamiento de la energía en forma térmica para la producción de energía eléctrica", Grupo Energía Solar, UNCuyo, Argentina, 2005.
- [15] Gallardo U. I., "Energías renovables en México: Potenciales de aprovechamiento e iniciativas actuales", Secretaria de Energía (SENER), Abril de 2004.
- [16] Rodríguez G. V., "Iniciativa con proyecto de decreto mediante el cual se reforma la fracción IX y se adiciona una fracción X al artículo 9 de la ley del servicio público de energía eléctrica", LIX Legislatura H. Congreso de la Unión, México.
- [17] Huacuz J. M., "Energías Renovables y Desarrollo Sostenible en México: Programas, Perspectivas y Lecciones Aprendidas", Instituto de Investigaciones Eléctricas, México, 2001.
- [18] Huarapil D., *Guía Teórica: experiencia motor Stirling*, Editorial de la Universidad de Santiago de Chile, Curso de energía renovable, 2009.
- [19] *Manuales sobre energía renovable: Solar Térmica*, Biomass Users Network (BUN-CA), 1 ed. San Jose, C. R., Biomass User Network (BUN-CA), ISBN: 9968-904-01-5, 2002.
- [20] W. Beale, *Understanding Stirling Engines*, Ed. Volunteers in technical assistance, ISBN: 0-86619-200-x, 1984.
- [21] J. C. Cervantes, "Metodología para el rediseño de motores de ciclo Stirling", tesis de maestría dirigida por Dr. Ignacio Carbajal Mariscal, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, Agosto de 2006.
- [22] D. O. Velázquez, "Estudio teórico del regenerador para un motor Stirling", tesis de maestría dirigida por Dr. Ignacio Carbajal Mariscal, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, Enero de 2007.

- [23] J. A. Á. Flórez, I. C. Agramunt, S. F. Farrús, P. R. Carles, D. B. Grande, J. C. Rossell, T. N. Odriozola, C. F. Freixa, A. G. Fontal, A. M. Luque, F. J. P. Llopis, *Maquinas Térmicas Motoras vol. 2*, Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, ISBN: 84-8301-644-3, Septiembre de 2002.
- [24] Robert L. Norton, "Diseño de Maquinaria", México, 2000, Segunda Edición, Mc. Graw Hill, ISBN: 0-07-048395-7.
- [25] Rainer Storn and Kenneth Price. Differential evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. Technical Report TR-95-012 International Computer Science Institute, Berkley, 1995.
- [26] Rainer Storn and Kenneth Price. Differential evolution - a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. Technical Report TR-95-012 International Computer Science Institute, Berkley, 1995.
- [27] Kenneth V. Price. An Introduction to Differential Evolution. In David Corne, Marco Dorigo, and Fred Glover, editors, *New Ideas in Optimization*, pages 79-108. Mc Graw-Hill, UK, 1999.
- [28] R.G. Ramón, "Estudio empírico de variantes de Evolución Diferencial en optimización con restricciones", tesis de maestría dirigida por Dr. Efrén Mezura Montes, Centro de enseñanza LANIA, Laboratorio Nacional de Informática Avanzada, Diciembre de 2007.
- [29] J. Kennedy and R. C. Eberhart. Particle swarm optimization. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Piscataway. NJ: IEEE Service Center., v.4:1942–1948, 1995.
- [30] A.P. Engelbrecht. *Fundamentals of Computational Swarm Intelligence*. John Wiley & Sons, 2006.
- [31] Y. Shi and R. C. Eberhart. Parameter selection in particle swarm optimization. <http://www.engr.iupui.edu/shi/PSO/Paper/EP98/psof6/ep98pso.html>; 1998:
- [32] J.I.F. Mendoza, "Propuesta de optimización mediante Cúmulo de partículas para espacios restringidos", tesis de maestría dirigida por Dr. Efrén Mezura Montes, Centro de enseñanza LANIA, Laboratorio Nacional de Informática Avanzada, Octubre de 2007.
- [33] Shannon, R. y Johannes, J.D., "Systems simulation: the art and science", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 6(10). pp. 723-724, 1976.

## **SECCIÓN DE ANEXOS**

# Anexo 1

## Programa Utilizado para observar el comportamiento de los Volúmenes del motor Stirling

```
%Las constantes del Motor Stirling es:

%El ángulo entre los cilindros
alpha= 90*(pi/180);
%Los diámetros de los cilindros de expansión y compresión
De= 0.1;
Dc= 0.12;
%El radio de la manivela
r= 0.10;
%Las magnitudes de la Bielas
lc= 0.20;
le= 0.25;
%%Los desfases de las correderas de los pistones entre el centro de
%%la manivela
ec=0.05;
ee=0.02;
%%La posición angular (2 Vueltas) de la manivela en radianes es:
Fi=[0:1:720].*(pi/180);
%% Ingresando la Formula para el cálculo de los Volúmenes tenemos
Ve=((le/r)+1)^2-(ee/r)^2)^1/2-((cos(Fi-alpha))+((le/r)^2-(sin(Fi-alpha)-
(ee/r)).^2).^1/2);
Vc=((lc/r)+1)^2-(ec/r)^2)^1/2-((cos(Fi))+((lc/r)^2-(sin(Fi)-
(ec/r)).^2).^1/2);
%IMPRIMIENDO LAS GRAFICAS DE VOLÚMENES
figure (1)
subplot(1,2,1)
plot(Fi,Ve), title('GRÁFICA DEL VOLUMEN DE EXPANSIÓN Ve'),
xlabel('ÁNGULO, RAD'), ylabel('VOLÚMEN M^3'), grid
subplot(1,2,2)
plot(Fi,Vc), title('GRÁFICA DEL VOLÚMEN DE COMPRESIÓN Vc'),
xlabel('ÁNGULO, RAD'), ylabel('VOLÚMEN M^3'), grid

%%Con una variación constante en el ángulo de posicionamiento Alpha,
alphavar= [0:0.125:90]*(pi/180)
Vear=(((le/r)+1)^2-(ee/r)^2)^1/2-((cos(Fi-alpha))+((le/r)^2-(sin(Fi-
alpha)-(ee/r)).^2).^1/2)

figure (2)
plot(Fi*(180/pi),Vear, '.',Fi*(180/pi),Vc, '.')
legend('Ve','Vc')
xlabel('ÁNGULO, GRADOS'),ylabel('VOLÚMEN M^3')
title('GRÁFICA DEL VOLÚMEN')
```

## Anexo 2

### Programa donde se implementó el algoritmo de evolución diferencial

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Evolución Diferencial
% Esta función ejecuta el algoritmo de evolución diferencial, recibe como
% parámetros la población P y el número de veces que se ejecutara el algoritmo
% (Generaciones Maximias)MaxGen.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [ P ] = Evolucion( P, MaxGen )

global LInf;
global LSup;
global NoVariables;

CR=0.5;
F=0.8;
p=size(P,1);

P=Aptitud(P);

U=[];
for g=1:1:MaxGen, %Inicializamos el vector Hijo
    %Para cada generacion se realiza lo siguiente

    for i=1:1:p, %Para cada uno de los elementos de la poblacion por cada generacion
        x1=round(rand*p); %Se seleccionan de la poblacion 3 vectores para la generacion del vector mutante
        x2=round(rand*p); %no deben ser iguales entre si, ni al vector PADRE
        x3=round(rand*p);
        while (x1==x2 || x1==x3 || x1==0 || x2==x3 || x2==0 || x3==0 || x1==i || x2==i || x3==i)
            x1=round(rand*p);
            x2=round(rand*p);
            x3=round(rand*p);
        end

        jrand=0;
        while(jrand==0) %se selecciona de manera aleatoria apartir de que pocicion del vector se
            iniciara la %cruza.
            jrand=round(NoVariables*rand);
        end

        for j=1:1:NoVariables, %Se realiza la crusa entre el vector PADRE y el VECTOR MUTANTE para obtener el
            vector HIJO
                if (rand<CR || j==jrand)
                    U(1,j)=P(x3,j)+F*(P(x1,j)-P(x2,j));
                else
                    U(1,j)=P(i,j);
                end

                if (U(1,j)>LSup(j))
                    U(1,j)=2*LSup(j)-U(1,j);
                end
                if (U(1,j)<LInf(j))
                    U(1,j)=2*LInf(j)-U(1,j);
                end
            end

            PF=P(i,NoVariables+1);
            SUMP=P(i,NoVariables+2); %Se obtiene el valor de la evaluacion de restriccion mayor.

            U=Aptitud(U); %Se evalua el vector hijo en la funcion objetivo y en las restricciones
            UF=U(1,NoVariables+1);
            SUMU=U(1,NoVariables+2);

            %Se selecciona entre el vector PADRE y vector HIJO para saber quien pasa a la
            %generación
            %si los dos cumplen la restriccion se selecciona el que tenga el menor valor

            if (SUMP<=0&&SUMU<=0)
                if (UF<=PF)
                    P(i,:)=U(1,:);
                end
            elseif (SUMP>0&&SUMU<0)
                P(i,:)=U(1,:);
            elseif (SUMP>0&&SUMU>0)
                if (SUMU<SUMP)
                    P(i,:)=U(1,:);
                end
            end

            end
            U=[];
        end

        P=Aptitud(P(:,1:NoVariables));

    end

    P=P(:,1:NoVariables);

end
```

## Anexo 3

### Programa en el que se implementó el algoritmo PSO.

```
function [ P ] = Cumulos( P,iteraciones )
% CUMULOS Summary of this function goes here
%Detailed explanation goes here

global LInf;
global LSup;
global NoVariables;
MaxGen=iteraciones; %Se solicita al usuario el maximo numero de generaciones
W=0.5;
C1=0.8;
C2=0.8;
p=size(P,1); %Tamaño de la población
P=Aptitud(P); %Se genera la matriz con la que se trabajará;
U=[]; %Inicializamos el vector Hijo
for g=1:1:MaxGen, %Para cada generacion se realiza lo siguiente

    [valor,lider]=min(P(:,NoVariables+1)); %Se obtienen los valores del vector que liderea al grupo.
    XL=P(lider,:); %XL es el lider del grupo.
    Y(g)=valor; %En Y se guarda el valor de la funcion objetivo para el mejor
    Z(g)=P(lider,4); %En Z se guarda el valor de la suma de evaluaci3n de restricciones
    for i=1:1:p,
        for j=1:1:NoVariables
            P(i,4+(NoVariables*2)+j)=W*P(i,4+(NoVariables*2)+j)+C1*rand*(P(i,4+(NoVariables*2)+j)-P(i,j))+C2*rand*(XL(j)-P(i,j));
            U(1,j)=P(i,j)+P(i,4+(NoVariables*2)+j);

            if U(1,j)>LSup(j)
                U(1,j)=2*LSup(j)-U(1,j);
            end
            if U(1,j)<LInf(j)
                U(1,j)=2*LInf(j)-U(1,j);
            end
            end

            P(i,1:NoVariables)=U(1,:); %La posicion calculada se vuelve la posicion actual
            PP=P(i,size(P,2)-NoVariables-1); %Se obtiene la aptitud del la mejor posici3n recordada
            SUMP=P(i,size(P,2)-NoVariables); %Se obtiene el valor de la evaluacion de restriccion mayor.

            U=Aptitud(U); %Se obtiene la aptitud de la posici3n actual
            UF=U(1,NoVariables+1);
            SUMU=U(1,NoVariables+2);

            %Se evalua la posici3n actual contra la mejor recordada y se
            %evaluan para saber si la nueva posici3n sustituirá a la recordada
            %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

            if (SUMP<=0&&SUMU<=0) %si los dos cumplen la restriccion se selecciona el que tenga el menor
                valor
                    if (UF<=PP)
                        P(i,size(P,2)-(NoVariables*2)-1:size(P,2)-NoVariables)=U(1,:);
                    end
                    elseif (SUMP>0&&SUMU<0)
                        P(i,size(P,2)-(NoVariables*2)-1:size(P,2)-NoVariables)=U(1,:);
                    elseif (SUMP>0&&SUMU>0)
                        if (SUMU<SUMP)
                            P(i,size(P,2)-(NoVariables*2)-1:size(P,2)-NoVariables)=U(1,:);
                        end
                    end
                end
                U=[];
            end
        end

        Aux=Aptitud(P(:,1:NoVariables));
        Aux2=Aptitud(P(:,NoVariables+3:(NoVariables*2+2)));
        P=[Aux,Aux2,P(:,(NoVariables*2)+5:size(P,2))];

    end
    P=P(:,1:NoVariables);
    % Y(MaxGen)
)
% Z(MaxGen)
% plot(Y)
% hold on
% plot(Z, 'r')
end
```



## Anexo 4

Programa implementado en Matlab para observar el comportamiento del volúmen de expansión y de compresión.

```
close all;
clear all;
%%
%para el valor de D=0.03
%%
Lb=[0.02 0.04 0.001];
Ub=[0.05 0.1 0.005];

%x0=[0.02 0.04 0.001];
%x0=[0.021 0.041 0.0011];
%x0=[0.023 0.045 0.0015];
x0=[0.027 0.053 0.0019];
%x0=[0.031 0.061 0.0023];
%x0=[0.033 0.069 0.0028];
%x0=[0.035 0.070 0.0030];
%x0=[0.040 0.074 0.0035];
%x0=[0.044 0.080 0.0040];
%x0=[0.048 0.090 0.0045];
%x0=[0.05 0.1 0.005];

% x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
[p,v]=fmincon('volumen',x0,[ ],[ ],[ ],[ ],Lb,Ub,'restriccion')

function f=volumen(x)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para el valor de D=0.03
w=8*pi;
Tf=0.25;
D=0.03;
t=0:0.001:Tf;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

vol=-((x(1)*pi*D^2)/4 )*( (sqrt(((x(2)/x(1))+1).^2-(x(3)/x(1)).^2))-
(cos(w*t)+sqrt((x(2)/x(1)).^2-(sin(w*t)-(x(3)/x(1)).^2))) );

f=0;
[M,N]=size(vol);
for q=1:N
    f=f+vol(M,q);
end
function [c,ceq] = restriccion(x)
    c = [x(1)-x(2)+x(3);
         x(1)-x(2)-x(3)];

    ceq = [2*x(1)-x(2)];
```

## Anexo 5

Programa para generar población de ambos métodos.

```
TP=30;                                %%input('tamaño de población');

global NoVariables;
global LInf;
global LSup;
NoVariables=3;
LInf=[0.02,0.04,0.001];               %Limites inferiores [X1,X2, ... , Xn]
LSup=[0.05,0.10,0.005];              %Limites superiores [X1,X2, ... , Xn]
P=[];
vector=[];
for j=1:1:TP,
for i=1:1:NoVariables,
    vector=[vector,LInf(i)+(LSup(i)-LInf(i))*rand];
end
P=[P;vector];
vector=[];
end
global Evals;
Evals=0;
```

## Anexo 6

Programa implementado para aptitud.

```
function [ P ] = Aptitud( P )

global Evals;
w=8*pi;
D=0.03;

for i=1:1:size(P,1)
    ap(i,1)=0;
    for t=0:0.001:0.25
        ap(i,1)=ap(i,1)+((P(i,1)*pi*(D^2))/4)*((sqrt(((P(i,2)/P(i,1))+1)^2)-
(P(i,3)/P(i,1))^2))-cos(w*t)+sqrt(((P(i,2)/P(i,1))^2)-(sin(w*t)-
(P(i,3)/P(i,1))^2)));
    end
    ap(i,1)=ap(i,1)*-1;
    PR1=-(-P(i,1)+P(i,2)-P(i,3));
    PR2=-(-P(i,1)+P(i,2)+P(i,3));
    PR3=abs(2*P(i,1)-P(i,2))-0.0001;
    ap(i,2)=max(PR1,PR2);
    ap(i,2)=max(PR3,ap(i,2));
end
Evals=Evals+1;
P=[P,ap];
end
```

## Anexo 7

Programa general utilizado para ambos métodos heurísticos.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%Este script ejecuta un diagnostico de un algoritmo realizando 30
ejecuciones
%seleccionando la mejor solucion de cada uno y añadiendolo a un arreglo
de
%soluciones, obteniendo la mejor y la peor solucion de las 30 ejecuciones
%además de los siguientes parametros estadisticos: media, mediana, y
%desviacion estandar.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
clear all; clc;
format compact;

Resultado=[];
Aux=[];

for i=1:1:30;
    GenerarP;
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %Modificar "Evolución" o "Cumulos"
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    Aux=Aptitud(Evolucion(P,4000));
    Aux=sortrows(Aux,2);
    Resultado=[Resultado;Aux(1,:)];
    Aux=[];
    display('Ejecutando...')
end
Resultado=sortrows(Resultado,size(Resultado,2)-1);
fprintf('\n'), display('El mejor resultado obtenido es:'),
Resultado(1,:)
fprintf('\n'), display('El peor resultado obtenido es:'),
Resultado(30,:)
fprintf('\n'), display('Media del valor objetivo:')
mean(Resultado(:,size(Resultado,2)-1))
fprintf('\n'), display('Mediana :')
Resultado(15,:)
fprintf('\n'), display('Desviacion Estandar de los valores objetivo :')
std(Resultado(:,size(Resultado,2)-1))
```

## Anexo 8

### Programa fmincon implementado.

```
close all;
clear all;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para el valor de D=0.03
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Lb=[0.02 0.04 0.001];
Ub=[0.05 0.1 0.005];

%x0=[0.02 0.04 0.001];
%x0=[0.021 0.041 0.0011];
%x0=[0.023 0.045 0.0015];
%x0=[0.027 0.053 0.0019];
x0=[0.031 0.061 0.0023];
%x0=[0.033 0.069 0.0028];
%x0=[0.035 0.070 0.0030];
%x0=[0.040 0.074 0.0035];
%x0=[0.044 0.080 0.0040];
%x0=[0.048 0.090 0.0045];
%x0=[0.05 0.1 0.005];

[p,v]=fmincon('volumen',x0,[ ],[ ],[ ],[ ],Lb,Ub,'restriccion')

function [c,ceq] = restriccion(x)
    c = [x(1)-x(2)+x(3);
         x(1)-x(2)-x(3)];

    ceq = [2*x(1)-x(2)];

function f=volumen(x)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para el valor de D=0.03
w=8*pi;
Tf=0.25;
D=0.03;
t=0:0.001:Tf;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

vol=-((x(1)*pi*D^2)/4 )*( (sqrt(((x(2)/x(1))+1).^2-(x(3)/x(1)).^2))-
(cos(w*t)+sqrt((x(2)/x(1)).^2-(sin(w*t)-(x(3)/x(1)).^2))));

f=0;
[M,N]=size(vol);
for q=1:N
    f=f+vol(M,q);
end
```