Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

Unidad Legaria

La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería

Tesis que para obtener el grado de

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:

Francisco Javier Córdoba Gómez

Directora de Tesis:

Dra. Gabriela Buendía Abalos

México, Distrito Federal

Septiembre de 2011

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 17 del mes de agosto de 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería

Presentada por el(la) alumno(a):

Córdoba	Gómez	Francisco Javier
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	9	0	6	6	6

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Gabriela Buendía Abalos

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Avenilde Romo Vázquez

Dr. Francisco Cordero Osorio

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

CICATA IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 17 del mes de agosto del año 2011, el (la) que suscribe Francisco Javier Córdoba Gómez alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A090666, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra. Gabriela Buendía Abalos y cede los derechos del trabajo intitulado La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección fjcordob@yahoo.es. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Francisco Javier Córdoba Gómez

El ser humano aprende en la medida en que participa en el descubrimiento y la invención. Debe tener libertad para opinar, para equivocarse, para rectificarse, para ensayar métodos y caminos para explorar.

(Ernesto Sábato, 1911-2011)

Dedico este trabajo a mi madre que aunque no esté, está conmigo, a mi buena esposa Liliana y a toda mi familia, quienes pacientemente han soportado mis ausencias y mis malos momentos.

Agradecimientos

A la Dra. Gabriela Buendía, Directora de esta investigación,

por sus esfuerzos y fortaleza, y su disposición siempre

A la Dra. Avenilde Romo y al Dr. Apolo Castañeda, por su apoyo y

acompañamiento, así como por revisar este trabajo

A la Dra. Gisela Montiel y al Dr. Francisco Cordero

por tomarse el tiempo de revisar este escrito.

A todos los Profesores del PROME y personal del CICATA-IPN,

por su generosidad y apoyo

A Elizabeth Mariscal por su apoyo y disposición sin medida

A los compañeros de Maestría, generación 2009

A las Directivas del Instituto Tecnológico Metropolitano por su apoyo

A la Profesora Luz Dary Castellanos y al Profesor José Alberto Rúa,

por su valiosa colaboración

Al Profesor Carlos Rodríguez y a Hugo Vidal

Índice

Lista de imágenes (fotografías, esquemas) y tablas[1].

[1] En esta lista no se consideran las correspondientes al capítulo seis, puesto que allí mismo se explican

Glosario

En este glosario se da una breve descripción (características) de algunos de los conceptos que aparecen a lo largo del escrito. La acepción presentada es la que se va a usar en este trabajo. Otros detalles se van a encontrar en el desarrollo del escrito. Hay otros conceptos que no aparecen en este glosario pero que serán explicados con detalle en los siguientes capítulos, debido a que se requiere un poco más de profundidad en su descripción.

Modelación.

En el marco de la Socioepistemología y en el ámbito escolar, se entiende como una práctica (de referencia) ejercida por profesores y estudiantes en un contexto y tiempo determinados en respuesta a una situación o fenómeno del mundo externo pero cercano a la realidad de los estudiantes, y a partir de la cual se resignifica conocimiento matemático escolar funcional, de manera individual y colectiva, mediante procesos de interacción

Interacción.

Proceso de intercambio comunicativo en el que las negociaciones, los consensos, las convergencias, las divergencias, las explicaciones y las argumentaciones son los mecanismos mediante los cuales se dan las relaciones entre los actores en la clase de matemáticas: profesor y estudiantes, en búsqueda de la resignificación de un conocimiento matemático escolar. En este caso, las representaciones o evidencias de las interacciones serán las producciones escritas y orales de los estudiantes.

Modelo.

Es un sistema (físico o teórico) que sirve para representar un objeto, situación o fenómeno del mundo real en el cual se utilizan relaciones y conceptos matemáticos y cuya utilidad está dada en términos de ser una herramienta para interpretar, transformar y predecir el fenómeno y su comportamiento

Realidad.

Todo lo que es y ocurre (interna y externamente al sujeto) y que pueda ser no sólo percibido sino también imaginado o representado por un individuo a partir de sus sentidos y procesos mentales, y en cuya interpretación y análisis influye tanto su propia subjetividad como el contexto en el que se encuentra inmerso

Contexto.

Está dado por la dinámica natural de interacciones en una clase de matemáticas y en unas condiciones particulares sociales y culturales

Resignificar.

Se asume como un proceso. No es sinónimo de dar nuevos significados o nuevas definiciones a un concepto, es una construcción del conocimiento mismo que hacen los individuos en un colectivo humano y que está normado por aspectos institucionales y culturales en un contexto particular. Se puede entender como reforzar, robustecer, ampliar, enriquecer, articular e integrar un significado ya existente (o por construir) que las personas tienen y que lo están usando en un momento o situación particular, con una finalidad específica y en el ejercicio de diferentes prácticas

Práctica

La práctica (social) se puede entender como un constructo teórico usado para referirnos a aquello que nos hace comportarnos tal y como lo hacemos y no de una manera diferente. De manera más general y en términos de comunidades, una práctica social es aquello que nace como respuesta a una necesidad, donde la respuesta viene a ser una especie de acuerdo, explícito o no, de la comunidad para trabajar en una cierta dirección. Son todos los aspectos y formas de la actividad humana que transforman realmente (materialmente) los objetos, resignificando así al conocimiento.

Conocimiento matemático funcional.

Se asume como aquel conocimiento que se pueda integrar al mundo de la vida para transformarla y transformar al sujeto que aprende, reconstruyendo y enriqueciendo significados permanentemente

Fenómeno de enfriamiento.

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente. Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto al tiempo t, T_m es la temperatura constante del medio que lo rodea y $\frac{dT}{dt}$ es la razón con que la temperatura del cuerpo cambia, la ley de Newton del enfriamiento (o calentamiento) se traduce en el enunciado matemático

$$\frac{dT}{dt} \alpha T - T_m \text{ o sea } \frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad

RESUMEN

Una preocupación permanente de los matemáticos educativos tiene que ver con encontrar maneras de intervenir y mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes en las clases de matemáticas, de tal forma que el conocimiento matemático escolar, cuando sea aprendido por ellos (los estudiantes), se convierta realmente en conocimiento significativo y funcional, en el sentido de que se pueda integrar al mundo de la vida para transformarla y transformar al sujeto que aprende, reconstruyendo y enriqueciendo significados permanentemente.

En este sentido, la siguiente investigación estudia cómo en el ejercicio de la modelación (asumida como una práctica) del fenómeno de enfriamiento, el uso de un conocimiento matemático escolar (la ecuación diferencial lineal de primer orden) permite que estudiantes de ingeniería de dos cursos de ecuaciones diferenciales interactúen activamente y de esta forma puedan emerger elementos que aporten a la resignificación de ese conocimiento matemático en particular, sin olvidar que lo que se privilegia en este caso es el ejercicio intencional y situado de la práctica como tal y no el objeto matemático en sí.

La investigación se inscribe en la disciplina Matemática Educativa y al reconocer que es en el ejercicio de prácticas (sociales) a partir de las cuales se resignifica conocimiento matemático escolar, el sustrato teórico que da base a este estudio es la Socioepistemología.

ABSTRACT

A constant concern of mathematical educators is about finding ways to intervene and improve the learning processes of students in math classes, so that school mathematical knowledge, as learned by them, becomes really meaningful and functional in the sense that it can integrate into the world of life to transform itself and the learner too, constantly rebuilding and giving significant enrichment (Suarez y Cordero, 2008).

In this regard, the following research studies how the modeling exercise (assumed as a practice) of the phenomenon of cooling, the use of school mathematical knowledge (the linear differential equation of first order) allows engineering students from two courses of differential equations, actively interact and thus can emerge elements that contribute to the re-signify of that mathematical knowledge in particular, without forgetting that what is privileged in this case is the intentional and situated exercise of practice as such and not the mathematical object itself.

The research is part of the Mathematics Education discipline and when it is recognized that is in the exercise of practice (social) from which school mathematical knowledge is re-signified, the substrate that gives theoretical basis to this study is the Socio-epistemology.

INTRODUCCIÓN

Algunos conceptos matemáticos evolucionan hasta llegar a una cierta estabilidad en el tiempo y son así aceptados y reconocidos por una comunidad que los comparte y los usa. Una vez que esos conceptos pasan a la escuela son enseñados con el ideal de que sean aprendidos e internalizados por los estudiantes de la más significativa y estructurada forma posible.

Pasado un tiempo, esos conceptos siguen siendo los mismos y nosotros que supuestamente los habíamos aprendido alguna vez sentimos, un tiempo después, que algo faltó en lo que habíamos aprendido, que había otros significados adicionales que ignoramos en su momento, que no vimos su relación con otras áreas de conocimiento o que tal vez lo que habíamos aprendido no era lo correcto. Esa situación se da cuando por alguna circunstancia y en unas condiciones específicas, estamos usando ese conocimiento en el ejercicio intencional de una práctica. De esta forma, se puede decir que se ha iniciado la resignificación o mejor el proceso de resignificación de ese conocimiento y decimos proceso porque esa resignificación no es única, no tiene un punto final y más bien se nutre y evoluciona con el tiempo y en el ejercicio de otras prácticas y con otros usos.

Sin embargo, no siempre se logra lo anterior de forma natural o espontánea. Para generar procesos de resignificación debemos crear las condiciones para ello y precisamente lo que se propone en esta investigación es que con el uso situado de un conocimiento y en el ejercicio de una práctica se puede promover un proceso de resignificación. En esta investigación se muestra, por ejemplo, que aunque los estudiantes, que formaron parte de esta investigación, ya habían estudiado en clase un determinado fenómeno y desde el punto de vista matemático conocían su formulación y planteamiento, al momento de llevar ese conocimiento a otros dominios, por fuera de la matemática, no lograban articularlo ni entenderlo de manera coherente para explicar ese mismo fenómeno en una situación de uso en otro contexto. Esta situación de ruptura hace entonces que el conocimiento matemático escolar que se moviliza en el aula no sea funcional ni que se pueda articular después a otros dominios de conocimiento de manera significativa.

La situación anterior tiene diferentes causas, sin embargo consideramos que una de ellas puede ser precisamente el hecho de que se haya concebido al conocimiento matemático no como una construcción social sino como el resultado del esfuerzo de un grupo aislado y desvinculado de otras realidades. Contrario a lo anterior, asumimos el ejercicio de prácticas (sociales) como el escenario propio para resignificar y construir conocimiento matemático escolar, privilegiando esas prácticas por encima de los mismos objetos matemáticos. Así las cosas optamos por la Socioepistemología y sus principios, como la teoría que sustenta esta hipótesis, en un marco más general como lo es de la disciplina de la Matemática Educativa. En este sentido, la matemática adquiere sentido y significación a partir de otras prácticas, no exclusivas de la estructura misma de la matemática, sino pertenecientes a un universo social y cultural más amplio que el de la matemática misma.

Consideramos entonces que no se trata solo de evidenciar o diagnosticar una problemática que ya es conocida y ha sido estudiada antes desde diferentes ángulos, sino de mostrar que hay algo que no está funcionando bien y que las evidencias así lo corroboran, pero que también hay acciones que se pueden emprender para mejorar el estado actual de cosas. En otras palabras, los resultados de la investigación deben ser, en la medida de lo posible, usados para intervenir la realidad educativa, en este caso la realidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela.

De manera particular, en esta investigación se ha escogido la práctica de modelación como la práctica que servirá para poner en uso un conocimiento matemático: la ecuación diferencial lineal de primer orden. El fenómeno escogido para la modelación es el fenómeno de enfriamiento. La justificación de estas elecciones se presentará en los capítulos siguientes.

El trabajo de campo se basó en la puesta en escena de una secuencia didáctica en la que dos grupos de estudiantes, en el curso de ecuaciones diferenciales, realizaron una actividad experimental (fenómeno de enfriamiento), como una fase de la práctica de modelación, para construir un modelo matemático. La actividad se grabó en video y audio, el investigador cumplió el rol de observador en uno de los casos. Los resultados muestran que la modelación, asumida como una práctica, favorece no solo la motivación de los estudiantes sino también que dota de mayor sentido y significado al conocimiento matemático escolar puesto en juego, es decir favorece el proceso de resignificación.

La organización del trabajo se ha estructurado de la siguiente manera:

Capítulo 1. Se plantea el contexto general de la modelación en la enseñanza de las matemáticas y su importancia, tomando como referencia diferentes contextos y autores, sin incluir la perspectiva socioepistemología Una vez que se ha hecho esta contextualización, se llega a la modelación en ingeniería, pero vista desde su implementación en los cursos propios de la ingeniería o de matemáticas. Finalmente se plantea el problema de investigación. En el planteamiento del problema, aparecen algunas nociones como práctica, resignificación e interacción, que luego serán discutidas con más detalle en los capítulos dos y tres.

Capítulo 2. Se hace una descripción general de diferentes perspectivas sobre modelación en matemática educativa, por fuera de la Socioepistemología, y se definen algunos constructos relacionados con la modelación. Con esta revisión lo que se pretende es tener otros referentes que permiten ubicar la perspectiva Socioepistemológica y los supuestos que la sustentan, en la explicación de la modelación desde esta perspectiva.

Capitulo 3. Se aborda la aproximación Socioepistemológica, iniciando con las prácticas sociales. Luego se trata la modelación como práctica y algunos constructos desde la perspectiva Socioepistemológica. Se cierra este capítulo con la discusión sobre la resignificación a través de la modelación.

Capítulo 4. Lo que se pretende en este capítulo es contextualizar el fenómeno de enfriamiento (escogido como el fenómeno a modelar) partiendo de una breve descripción histórica y tomando algunos elementos de trabajos previos (en el marco de la Socioepistemología) que también han usado este fenómeno. Luego se describe el tratamiento escolar que se le ha dado al fenómeno de enfriamiento, y finalmente se concluye con la resignificación de la ecuación diferencial asociada a ese fenómeno.

Capitulo 5. Este capítulo contiene los aspectos metodológicos y el contexto experimental. Incluye el aspecto cualitativo de la investigación, la descripción del escenario, los actores y los materiales, los momentos (organización metodológica) en el desarrollo de la práctica modelación y las categorías de análisis

Capítulo 6. Comprende el análisis a priori de los momentos del desarrollo de la práctica, la puesta en escena y un análisis de las producciones de los estudiantes, con algunas evidencias de los hallazgos. También comprende la valoración del trabajo por parte de los estudiantes y una discusión de la resignificación observada.

Capítulo 7. Comprende las conclusiones del estudio y algunas miradas a futuro.

Capítulo 1.

La investigación

Por supuesto, no tengo la fórmula para salvar a la humanidad. Ni siquiera para salvarme yo. Pero pienso que el mundo no es para dejarlo ser de cualquier manera, sino para hacerlo nuestro mundo, a imagen de nuestros sueños, de nuestros deseos, (Gonzalo Arango, 1931-1976)

1. El papel de la modelación en la enseñanza de las matemáticas

En la siguiente sección se exponen diferentes argumentos a favor de la modelación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles educativos y desde el punto de vista de varios autores. Este recuento se justifica ya que permite reconocer a la modelación como un elemento importante de estudio y análisis en la matemática escolar que ha motivado investigaciones en diferentes niveles educativos en múltiples contextos. Las ideas que se presentan son de carácter general, para ir gradualmente enfocando la modelación en la perspectiva socioepistemológica, como se verá más adelante.

1.1 La modelación y su importancia en la enseñanza de las matemáticas

Toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiere en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla (Suárez y Cordero, 2005)

La modelación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un tema que en las últimas décadas ha cobrado mayor relevancia y sobre el cual se han realizado no sólo eventos internacionales sino que además se ha incorporado el tema de la modelación en diferentes currículos escolares en los diferentes niveles educativos. Tal como lo exponen Biembengut y Hein (2004), la modelación matemática está siendo fuertemente defendida, en diversos países, como método de enseñanza de las matemáticas en todos los niveles de escolaridad, ya que permite al alumno no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema.

Existe una demanda creciente de la sociedad hacia una utilidad y si se quiere, practicidad, de aquello que se enseña en la escuela para que el conocimiento, en este caso matemático, construido en las aulas no se encuentre alejado de la realidad y no sea obsoleto en términos de que sirva efectivamente para resolver o plantear alternativas de solución a problemas reales y actuales. Esta situación se hace más evidente según lo planteado por Kaiser (2010) en el libro Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies:

> Las aplicaciones y la modelación, su aprendizaje y enseñanza en la escuela y la universidad se han convertido en temas importantes en las últimas décadas en vista del crecimiento mundial de la importancia del uso de las ciencias matemáticas, la tecnología y la vida diaria. Dada la inminente reducción a nivel mundial de jóvenes interesados en las matemáticas y las ciencias, es altamente necesario discutir las posibilidades de cambiar la educación en matemáticas, tanto en la escuela como en la universidad, hacia la inclusión de ejemplos del mundo real y las competencias para usar las matemáticas en la solución de problemas del mundo real[2] (p.1).

En la actualidad existen diferentes comunidades y se celebran diversos eventos cuyo objetivo central es promover y difundir la modelación como una práctica habitual en la enseñanza de las matemáticas. Para el caso se mencionan por ejemplo:

- ICTMA (International Community on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications)

- CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática), la cual está asociada a la ICMI (International Commission on Mathematical Instruction)

[2] Traducción nuestra

- RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), en la que en sus diferentes versiones uno de los temas tratados ha sido la Modelación Matemática. Para el caso específico, al seno de RELME 23, se creó el Grupo de Modelación y Tecnología (M y T) que tiene como propósito investigar y difundir aspectos relacionados con la modelación matemática en la enseñanza de las matemáticas.

Así mismo, en algunos libros de texto analizados, tanto de los niveles iniciales como de cursos avanzados en matemáticas para programas de ingeniería, es común encontrar temas relacionados con la modelación y la obtención de modelos para fenómenos en otras áreas como la física, la economía, la biología, etc., lo cual muestra la importancia y utilidad de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. Aunque en algunos casos no se profundiza en el tema, sí existe una referencia directa a la modelación y al uso de modelos.

Al analizar también los currículos escolares de algunas universidades del medio[3] (en este caso de la ciudad de Medellín, Colombia) en carreras de ingeniería, se encontró que en los programas de los cursos de matemáticas (específicamente de ecuaciones diferenciales) se hace alusión a la modelación de manera directa sobre todo en la parte de aplicaciones, es decir, la modelación es considerada parte importante en el desarrollo de los cursos y así está consignado de manera institucional.

A continuación se exponen entonces diferentes argumentos que sirven para justificar la integración y articulación de la modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar.

La modelación permite enriquecer la comprensión de fenómenos extramatemáticos ya que proporciona diversas representaciones de dichos

[3] Ver anexos 4 y 5 al final del trabajo

fenómenos y dota de sentido las diferentes actividades matemáticas (Molyneux-Hodgson et al, 1999, citado en Suárez, 2008)

Para Bassanezi (1994) el uso de la modelación en la enseñanza conduce al aprendizaje de contenidos matemáticos que están conectados a otras formas de conocimiento. El trabajo con la modelación matemática no intenta simplemente ampliar el conocimiento sino desarrollar una forma particular de pensar y actuar: produciendo conocimiento, aunando abstracciones y formalizaciones, interconectadas a fenómenos y procesos empíricos considerados como situaciones problemáticas.

Según Blomhøj (2004) las actividades de modelación pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar (al aprendiz) a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir conceptos matemáticos. Así mismo, la modelación tiene como finalidad describir y analizar algún fenómeno de la vida diaria con el fin de motivar el trabajo con las matemáticas y experimentar la matemática como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria.

Para este autor, y partiendo de su experiencia, son tres los argumentos importantes a favor de la modelación matemática, como elemento central en la enseñanza general de la matemática, aún desde edades tempranas:

1. La modelación matemática tiende puentes entre la experiencia de la vida diaria de los alumnos y la matemática. Esto motiva el aprendizaje de la matemática, provee de apoyo directo de tipo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y ubica a la matemática en la cultura, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria.

2. En el desarrollo de sociedades altamente tecnológicas, las competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos son de crucial importancia. Este es el caso tanto desde una perspectiva individual en relación a las oportunidades y desafíos educativos y en el mundo laboral, como desde una

perspectiva social en relación a las necesidades de una fuerza laboral adecuadamente educada.

3. Los modelos matemáticos de distinto tipo y complejidad están jugando roles importantes en el funcionamiento de sociedades basadas en alta tecnología. Por lo tanto, el desarrollo de competencias expertas para criticar modelos matemáticos y la forma en que son usados para la toma de decisiones se está convirtiendo en un imperativo para el mantenimiento y futuro desarrollo democrático.

Según lo anterior, la modelación puede servir a otros fines, tales como la culturización matemática y la formación de una actitud crítica frente a modelos preestablecidos. Otros factores que apoyan la práctica de modelación como aspecto importante en la enseñanza de las matemáticas, según el mismo autor, son:

- Los alumnos generalmente encuentran motivador y relevante trabajar con problemas reales fuera del aula.

- Situaciones cuasi-auténticas, es decir contextos construidos para la enseñanza, también pueden dar soporte para la construcción de significados para los estudiantes, si son lo suficientemente ricos y son considerados seriamente en la enseñanza.

- El conocimiento matemático escolar, conceptual o procedimental, no es un prerrequisito para las actividades de modelación. La experiencia demuestra que las actividades de modelación pueden motivar el proceso de aprendizaje, crear raíces cognitivas sólidas para la construcción de conceptos matemáticos de parte del alumno y ser un modo de desafiar sus conceptualizaciones al ampliar el dominio para las actividades de modelación.

En uno de los trabajos de Arrieta, Carbajal, Díaz, Galicia, Landa, Mancilla, Medina y Miranda (2007, p. 474), en el que se llevó a cabo una práctica de modelación (sobre la contaminación de un río), se establecieron algunos factores en los que se resaltó la importancia de la práctica de la modelación y su utilidad en el desarrollo de competencias científicas: "*…*Los estudiantes construyen modelos numéricos, gráficos u otros, argumentan y establecen consensos, contribuyendo con ello al fortalecimiento de una visión científica del mundo y preparándolos para su incorporación a las comunidades de técnicos especializados y profesionistas"

Según Bienbengut y Hein (2003, citado en Gabardo, 2006) en el ámbito de la educación matemática como método de enseñanza, la modelación está siendo empleada en varios niveles educativos porque promueve la adquisición de conocimientos matemáticos y la habilidad de utilizar esos conocimientos para la resolución de problemas formulados a partir de una realidad en la cual se insertan profesores, alumnos y los demás individuos con los cuales éstos conviven.

Gabardo (2006) a su vez propone que otro motivo de uso y defensa de la modelación en la enseñanza es que contribuye a transferir el enfoque de una matemática ya construida y acabada, cuyo funcionamiento se debe aprender por medio de la práctica de ejercicios, a una matemática que puede ser utilizada, identificada, reconstruida, o inclusive construida, cuando se objetiva conocer, comprender y actuar sobre la realidad de la cual se forma parte.

Por su parte Blum (1991, en Martínez y Ortiz, 2005) sostiene que hay consenso para que la modelación matemática sea incorporada en los currículos de todos los niveles escolares. Además plantea que con la modelación se logra comprender mejor el mundo a nuestro alrededor, comprender con más profundidad los conceptos matemáticos y mejorar las actitudes hacia las matemáticas.

La corriente de la Educación Matemática Realista[4] le confiere una alta importancia a la modelación ya, que en términos más precisos, no son los modelos en sí los que hacen posible el crecimiento de la comprensión matemática, sino las actividades de modelación de los estudiantes (Van den Heuvel, 2003). De esta forma las actividades iniciales de modelación, ejecutadas sobre problemas en contexto vinculados con la realidad de los estudiantes, permiten que estos últimos lleguen a realidades nuevas las que a su vez vuelven a ser objeto de nuevas actividades de modelación, es decir, la modelación se convierte de alguna forma en una espiral de comprensión de conceptos matemáticos ya que estimula la reflexión y la interacción en el aula al aparecer nuevas manifestaciones del modelo inicial que dan acceso a nuevas perspectivas, a nuevas posibilidades de resolución de problemas y a niveles más altos de comprensión.

Sadovsky (2005) por su parte propone que, desde un punto de vista didáctico, se debe pensar el trabajo de modelación en la clase como vía para que los alumnos tengan una experiencia de producción de conocimientos en el marco de cierto dominio matemático, experiencia que permita además enriquecer la conceptualización teórica en dicho dominio.

Chevallard (citado por Sadovsvky, 2005) plantea que la noción de modelación permite "mirar" globalmente la actividad matemática desde la escuela hasta la universidad y suministra un marco de referencia a partir del cual es posible reconocer diferencias significativas entre diferentes dominios de la matemática al considerar el tipo de problemas que pueden modelarse en cada uno de ellos, los modelos que toleran, las herramientas que se usan, etc.

La idea de modelación realza el valor educativo que tiene la enseñanza de esta disciplina: ofrece la posibilidad de actuar sobre una porción de la realidad a través de un aparato teórico. El expresar una realidad usando una teoría ubica a quien

[4] Corriente desarrollada por el matemático holandés Hans Freudenthal en los años 70, en la cual los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos

estudia en una perspectiva de mayor generalidad, lo cual le permite apreciar el valor y la potencia del conocimiento (Sadovsky, 2005).

La modelación permite al profesor considerar el entorno físico y social para abordar situaciones problema dentro de contextos vinculados a los alumnos, es decir, el profesor tendrá en esta actividad muchas opciones que le puedan ayudar a relacionar los conceptos matemáticos con el mundo real, de tal manera que los alumnos puedan vislumbrar y otorgar una mayor importancia a las matemáticas escolares. La modelación también contribuye a que los alumnos perciban las matemáticas como una disciplina que puede utilizarse para comprender y modificar la realidad, mediante el planteamiento de situaciones problema del mundo real, lo más cercanas posibles a la sensibilidad del estudiante (Castro y Castro, 2000; Romero y Castro, 2008). Para Cortés (2005) es en las actividades, en particular las de modelación, en donde las herramientas utilizadas otorgan significado físico a los conceptos matemáticos.

Arrieta (2003) enumera algunos beneficios de la modelación en el ámbito escolar que le permiten al estudiante:

- Emplear herramientas específicas (gráficas, tablas numéricas) y formas particulares para describir los hechos construyendo diversas versiones de éstos
- Construir argumentos a través de conjeturas y confirmaciones, basadas en la inducción como práctica
- Argumentar y validar versiones utilizando una coordinación de múltiples herramientas
- Desarrollar formas de predicción.
- Elaborar descripciones y explicaciones de nuevas experiencias utilizando conocimientos que tienen, derivados de otros contextos y frente a otras experiencias

Otros argumentos a favor de la práctica de modelación, propuestos por Castro y Castro (2000) son:

- Ofrece alternativas de solución a problemas de la vida real brindando al estudiante sentido de participación y control en los procesos de solución
- Permite la comunicación de ideas matemáticas e intervención en la actividad de construcción de nuevos conceptos
- Permite transferir de manera dinámica el conocimiento desde situaciones físicas y geométricas hasta la estructuración mental en el proceso de aprendizaje

De la misma forma Malaspina (1998, citado en Arrieta 2003) y Mochón (2000, citado en Torres 2004) expresan que la modelación es importante en la medida que permite desarrollar ideas para visualizar conceptos matemáticos y reforzar así su comprensión y manejo y facilitar, en consecuencia, una intuición de lo abstracto que ayuda a entender mejor los fenómenos que describen, desarrollando nuestra intuición sobre su funcionamiento. Además, sirven para predecir lo que pasaría en la situación real, tanto en condiciones normales como al modificar algún factor que intervenga en el modelo.

Por su parte Cordero y Suárez (2005) reconocen la modelación como una actividad necesaria para la reconstrucción de significados matemáticos y Arrieta (2005) considera a su vez que la modelación permite construir un contexto donde los estudiantes y profesor de forma, interactiva en el aula, construyan argumentos, herramientas y significados a partir de la modelación de un fenómeno.

Para Luaces, Camarena y Biembengut (2004) uno de los propósitos de que la matemática esté incorporada en los diferentes niveles educativos es que la matemática apoye al individuo a resolver problemas de su vida cotidiana y laboral. Un elemento que se destaca de la resolución de problemas es la formulación del modelo matemático, razón por la cual la modelación debe ser considerada en todos los niveles educativos.

Otro aspecto importante de la modelación matemática es que el estudiante puede explorar fenómenos semejantes a la realidad e incluso le brinda la oportunidad de crear, manipular e interpretar situaciones imaginarias al considerar datos irreales lo cual crea una visión más amplia de los fenómenos de las ciencias, favoreciendo así, la comprensión de conceptos. Los modelos matemáticos sirven para predecir lo que sucedería en una situación real, tanto en condiciones normales, como al modificar algún factor que intervenga en el modelo (Mochón y Rojano, 1998), lo cual permite a los alumnos la formación de ideas intuitivas acerca de la explicación y comportamiento de algunos fenómenos naturales además de generar nuevas formas de pensar y ver a los conceptos de las ciencias, mismos que hasta hace algún tiempo estaban supeditados, en el mejor de los casos, a la repetición de los fenómenos en el laboratorio escolar (León y Mochón, 2003)

Para Biembengut y Hein (2006), la modelación como método de enseñanza y de investigación propicia en el alumno:

- La integración de la matemática con otras áreas del conocimiento
- El interés por la matemática frente a su aplicabilidad
- La mejora de la aprehensión de los conceptos matemáticos
- La estimulación a la creatividad en la formulación y resolución de problemas
- La habilidad en el uso de máquinas (calculadora gráfica y computadoras)
- La capacidad para actuar en grupo
- La orientación para la investigación

En los trabajos de D’ Ambrosio (2009), se puede observar la importancia conferida a la modelación como una estrategia que permite la creación de conocimiento y más concretamente se refiere a la modelación como la estrategia por excelencia de los seres humanos para generar conocimiento. Otro aspecto que resalta este autor es que permite validar y hacer predicciones sobre el comportamiento del sistema que se modela y la posibilidad de controlarlo.

Para otros autores como Villa (2009, p.169) la modelación a su vez sirve para dotar de significado a los mismos contextos en los que se dan las situaciones de modelación “…al abordar situaciones reales del contexto sociocultural al interior del aula de clase, la modelación se convierte en una herramienta que permite (re)significar dichos contextos.”

Como se observa, son diversos y, en algunos casos, recurrentes los argumentos a favor de incorporar la modelación en las clases de matemáticas de tal forma que permita crear ambientes favorables en los que el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas se vea favorecido.

1.2 La modelación: ¿en los cursos de ingeniería o de matemáticas?

> "*Uno de los defectos fundamentales que tenia la enseñanza matemática, para técnicos en los comienzos del siglo era su exceso de abstracción, su inconsciente apartamiento de toda aplicación inmediata al mundo real. Ello motivó, como es sabido, una intensa reacción antimatemática en las escuelas técnicas, que quedó rápidamente frenada en cuanto los mismos técnicos se dieron cuenta de que la culpa de su incapacidad no radicaba en la matemática en sí, sino en el modo cómo se las había enseñado" El cómodo pretexto: "Ustedes verán cómo esto se aplica en...." rara vez tenía confirmación. (P. Puig Adam, Cálculo integral, 1972)*.

Una de las actividades de los estudiantes de ingeniería, y futuros ingenieros, tiene que ver con la solución (o planteamiento de alternativas de solución) de problemas del mundo real que surgen en diferentes áreas de conocimiento y en diferentes contextos. Para ello, deben valerse de las herramientas tecnológicas actuales y de los conocimientos y métodos que proveen las matemáticas, entre otras áreas de saber. Una herramienta para los futuros ingenieros la constituyen los modelos. El ingeniero utiliza modelos matemáticos, tecnológicos (computacionales) y físicos con diferentes objetivos: para dar una idea, para explicar el comportamiento y desempeño de algo, para hacer nuevos diseños, para predecir sobre algún sistema, etc. (Romo, 2009).

Sin embargo, una situación que se presenta con frecuencia en los programas de ingeniería tiene que ver con la desvinculación que existe entre los cursos de matemáticas y los cursos propios de la ingeniería puesto que no hay una conexión real y significativa entre unos y otros. Camarena (2001) lo expone de forma directa cuando afirma que la modelación es uno de los elementos que al parecer no es competencia de los profesores ni de los cursos de matemáticas ni de los propios de ingeniería:

> … ya que por un lado no existe ninguna asignatura de la ingeniería que los trabaje, y por otro, resulta que los profesores de matemáticas sienten que este punto compete a los profesores de los cursos propios de la ingeniería, mientras que estos últimos presuponen que los maestros de matemáticas son quienes deben enseñar al estudiante a modelar fenómenos de la ingeniería a través del modelaje de diversos problemas que éste debe plantearle a los alumnos durante la enseñanza de las matemáticas (p.468)

Esta situación sin lugar a dudas repercute en el desempeño futuro del ingeniero y puede generar dificultades en la solución de determinados problemas en su campo laboral. En palabras de Camarena (2001)

> Más aún, la matematización de los fenómenos y problemas que se presentan en el campo laboral del futuro ingeniero es un punto de conflicto para el ingeniero, ya que éste recibió sus cursos de matemáticas por un lado y los de la ingeniería por otro lado, de forma tal que en el momento de hacer uso de las dos áreas del conocimiento sus estructuras cognitivas están desvinculadas y él debe integrarlas para poder matematizar el problema que tiene enfrente (p.469).

Si bien lo anterior hace énfasis en la modelación en programas de ingeniería, no significa que estas mismas situaciones no se presenten en otros programas académicos de educación superior y es por ello que la modelación va adquiriendo cada vez más importancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se puede observar que en los programas de curso (contenidos temáticos) de las asignaturas de matemáticas para ingeniería, la práctica de modelación se reduce a las “aplicaciones” las cuales no son más que problemas propuestos al final de los capítulos en los libros de texto que, en algunos casos, se suelen llamar problemas de modelación. Esta modelación sin embargo es sólo de carácter teórico ya que no hay una referencia directa a la modelación que involucre actividades experimentales, como una fase de la modelación (dentro o fuera del aula) en las cuales los estudiantes puedan experimentar en la misma clase con un fenómeno, tomar datos y plantear el modelo matemático correspondiente promoviendo así la articulación de las matemáticas con otros campos de conocimiento y en contextos diferentes. La actividad experimental, como una fase de la modelación, en la enseñanza de las matemáticas es un elemento central si se quiere que (la modelación) sea realmente efectiva y promueva otro tipo de acciones, tal como lo afirman Camacho y Sánchez (2006):

> Por su naturaleza, las prácticas procedimentales pueden considerarse a sí mismas el apoyo imprescindible del diseño de situaciones didácticas, donde la matemática no es pensada a través de objetos duros que los estudiantes deban construir sino a través de sus relaciones procedimentales con la modelación y los diferentes significados del conocimiento que aparecen a lo largo de la práctica. El objetivo de revalorar los conocimientos adquiridos, coloca a los estudiantes en el proceso mismo de la construcción del conocimiento (p.400)

En otras palabras, el papel que juega la modelación en los cursos de matemáticas para ingeniería (al menos en los casos estudiados) es de carácter teórico y se basa en modelos preestablecidos que los estudiantes resuelven muchas veces como simples ejercicios. Arrieta, Canul y Martínez (2005) lo expresan de la siguiente forma:

> A pesar de que gran parte de la matemática se ha construido a partir de las interacciones con diferentes fenómenos, estos son desestimados en el aula de matemáticas y, en consecuencia, se ha minimizado la creación matemática a partir de la experimentación en el laboratorio (p.785)

El laboratorio se asume en este trabajo como un contexto de trabajo colaborativo e interactivo y con unos medios específicos. Coincidimos con lo expuesto por López, Juárez y Arrieta (2007) cuando afirman que

> El laboratorio lo entendemos, no sólo como el espacio físico, el laboratorio lo concebimos como el contexto del ejercicio de prácticas. De esta manera, el laboratorio incluye tanto los elementos físicos, como los elementos que conllevan el desarrollo de las interacciones de los actores. El laboratorio así, es un contexto experimental donde los actores construyen su conocimiento (p.743)

En este mismo sentido, Gallegos (2007) lo plantea en términos de que la modelación, cuando se trabaja en clase de matemáticas, está alejada de la situación real:

> El proceso de modelación existente en clase de Matemáticas es mostrado a los alumnos de manera parcial evitando confrontarlos a etapas claves de esta práctica. La gran parte del tiempo, los alumnos no establecen el modelo lo cual resta significado a la práctica. En resumen, el proceso de modelación existente en esta clase es lejano a aquel vivido por los expertos y en términos de la enseñanza no permite al alumno el enfrentarse al acto de modelar de manera completa (p.118)

Con respecto a los currículos de las asignaturas de matemáticas en ingeniería, la modelación matemática es uno de los temas que aparece oculto y sin embargo se espera que el egresado sea competente en esta área. En otros currículos, en los objetivos de los programas de estudio, se dice que el alumno deberá saber modelar problemas de otras áreas del conocimiento, y en muy pocos currículos viene este término incluido en el temario de las asignaturas (Camarena, 2010).

Ahora bien, en ningún caso se dice cómo incorporar la modelación matemática a los cursos (de matemáticas), ni tampoco se explica su importancia ni utilidad ni tampoco cómo lograr que los estudiantes modelen situaciones de otras áreas o problemas de la vida cotidiana (Camarena, 2001).

Son diferentes las causas por las cuales la modelación no se han incorporado de manera significativa en la clase de matemáticas para ingeniería, además de lo expuesto sobre los libros de texto. Arrieta, Canul y Martínez (2005) lograron identificar algunas causas de esta situación al realizar unas encuestas a profesores de matemáticas, entre las que se destacan: falta de tiempo, ausencia de recursos necesarios, dificultad para reproducir la experimentación, etc.

Es por ello que de manera gradual debe implementarse la modelación en los cursos de matemáticas para ingeniería que le permita a los estudiantes estar mejor preparados para procesos de modelación más complejos y propios de las asignaturas de sus especialidades de tal forma que, al egresar, puedan responder idóneamente a situaciones que demandan de la modelación propias de su ejercicio profesional y en comunidades concretas de profesionales.

2. El problema de investigación y los objetivos

2.1 El problema

Una de las características de los cursos de matemáticas, en general, en los diferentes niveles educativos es la escasa o insuficiente vinculación con actividades experimentales, como fase de la modelación, que logren articular los contenidos matemáticos con situaciones o fenómenos reales y cercanos a la cotidianidad y vivencias de los estudiantes de tal forma que el conocimiento matemático escolar sea puesto en un plano diferente al teórico y conceptual y emerja como una herramienta importante y de apoyo en otras áreas del conocimiento. Que los fenómenos sean cercanos a la realidad de los estudiantes permite que haya una mayor motivación e interés y a su vez le dará un carácter funcional al conocimiento matemático escolar pues ya no será visto como algo exclusivo del salón de clases y cuyos límites no puede traspasar.

La modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se asumirá como una práctica (concepto que será analizado más adelante) que de alguna manera hace que los estudiantes se conviertan en participantes activos en el proceso de resignificación de conocimiento matemático escolar. Arrieta (2003, p.110) lo plantea en los siguientes términos: “La modelación, como actividad humana, es una forma particular de participar en el mundo, es una forma de interacción con los otros, y con los acontecimientos”

Así mismo, es común que en los cursos de matemáticas en la universidad la modelación se asocie con una actividad final y de síntesis de determinados temas (contenidos). Esto se hace evidente en muchos libros de texto cuando se presentan al final del capítulo los problemas de aplicación que, en alguna medida, están relacionados con la modelación. Se asume que es una actividad que sólo se podría realizar cuando se han adquirido previamente determinados conocimientos y cuando los estudiantes tienen cierto dominio de los mismos, es decir, se considera una aplicación de lo aprendido pero no una fuente de resignificación y generadora de conocimiento ni que puede ser realizada a la par del desarrollo de los cursos.

Además de lo anterior, la modelación que se alcanza a realizar es de carácter “teórico”, en términos de que son problemas y modelos ya establecidos que deben ser resueltos algebraica o analíticamente pero no de manera real o experimental, es decir, existe una cierta tendencia a dejar de lado la parte experimental en la enseñanza de las matemáticas. Ahora bien la actividad matemática no se asocia, en muchos casos, con ninguna otra actividad fuera de su dominio (el de las matemáticas) y se asume que el espacio por excelencia de creación y construcción matemática es el salón de clase. En la enseñanza de las matemáticas resulta más complejo vincular la actividad escolar con la actividad social o en otras áreas (Galicia y Arrieta, 2005). Es más y como afirma Galicia (2004, citado en Galicia y Arrieta, 2005), en el sistema escolar los alumnos están convencidos de que aprender matemáticas es un verbo que no se conjuga con otros aprendizajes y por ello no encuentran fácilmente la articulación de las matemáticas con otras áreas de conocimiento.

De lo expuesto anteriormente se puede inferir que la modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sí es reconocida y valorada en el ámbito escolar. El interés de esta investigación es mostrar además que si se considera la modelación como una práctica, como un hacer del individuo en un contexto, entonces estaríamos en posición de dar cuenta que la modelación sí genera (en términos de construir significados, enriquecer significados) un cierto conocimiento matemático. La generación de ese conocimiento matemático en función de una práctica y no en función de la adquisición de objetos o definiciones, es a lo que se va a denominar resignificación. En el capítulo tres se desarrollará con mayor detalle este concepto.

Por lo tanto en esta investigación se pretende evidenciar la resignificación de la ecuación diferencial lineal de primer orden a la luz de la práctica, que en este caso es la modelación, en la clase de matemáticas con estudiantes de ingeniería para lo cual el foco de atención estará en el análisis de las interacciones generadas o promovidas en el ejercicio de esa práctica y cuyas expresiones de análisis serán las producciones escritas y orales de los estudiantes. Se privilegia el ejercicio situado e intencional de prácticas más que el objeto mismo o la actividad sobre ese objeto. En los capítulos dos y tres se profundizará sobre los conceptos de interacción y resignificación, respectivamente.

A continuación se presenta un esquema (ver imagen 1) en el que se resume de forma general lo que se pretende:

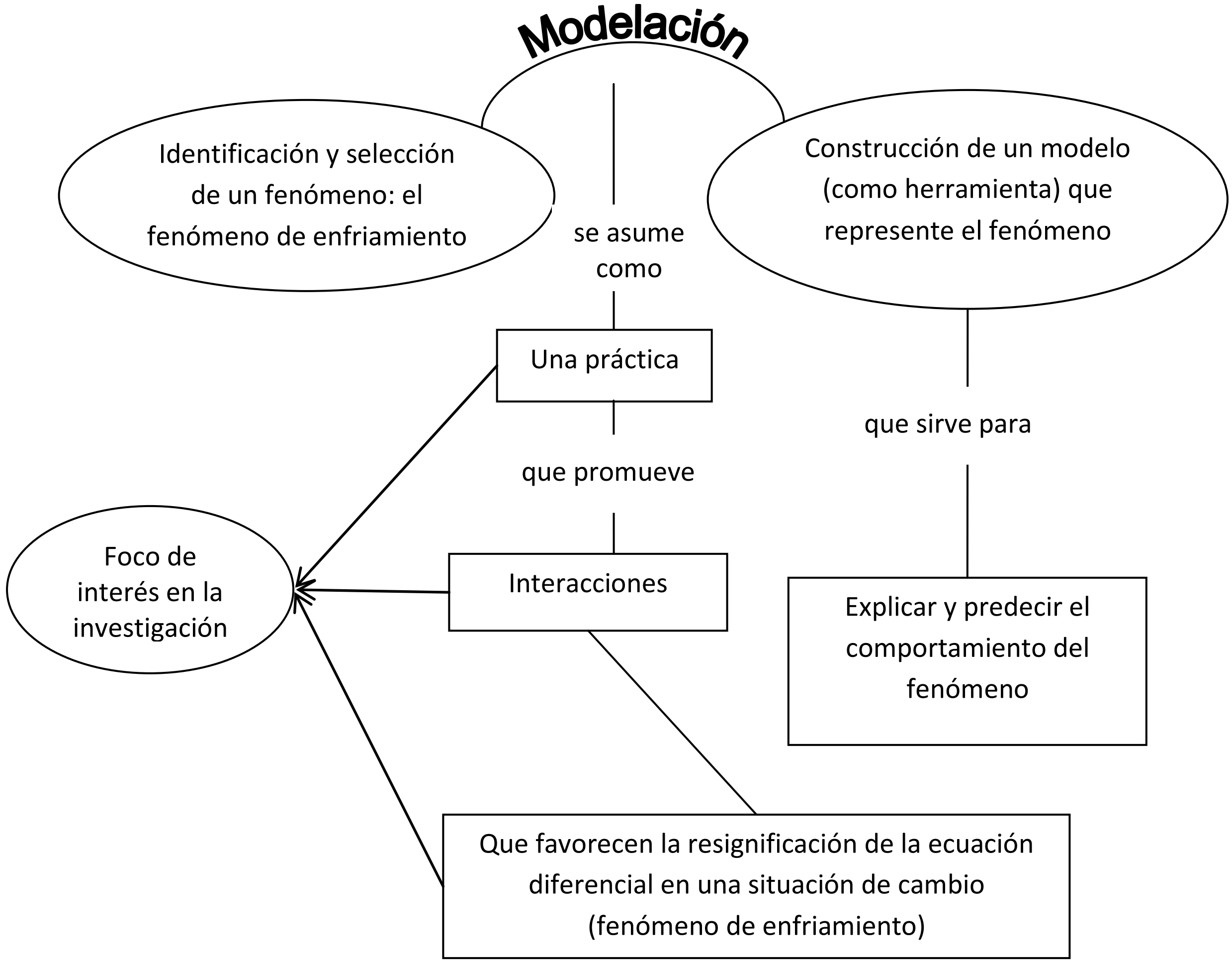


Imagen 1. Esquema general de estudio

Se debe aclarar que en el esquema anterior no se han considerado todas las etapas identificadas en un proceso de modelación propiamente dicho. Sólo se muestran aquellas de interés específico en la investigación. De la misma forma, la parte derecha del esquema no termina en la explicación y predicción del fenómeno, sino que hace parte de un esquema mayor, que no será considerado pues no hace parte del objetivo de esta investigación.

2.2 Objetivos

Objetivo general.

Con las premisas anteriores y los supuestos explicados, se puede esbozar de manera general, el objetivo que guiará el desarrollo de la investigación:

- Analizar cómo, interactivamente en la clase de matemáticas en programas de ingeniería, la práctica de modelación favorece la resignificación de la ecuación diferencial lineal de primer orden, considerada como una herramienta modeladora del cambio en el fenómeno de enfriamiento.

En este sentido la clase (de matemáticas) se concibe como el contexto natural y cotidiano en la que el profesor y los estudiantes interactúan de manera natural, más allá de un simple espacio físico.

Los objetivos específicos que ayudan al logro del objetivo general son:

- Registrar y analizar las interacciones en la clase de matemáticas que surgen en el ejercicio de la práctica de modelación del fenómeno de enfriamiento

- Analizar y describir la forma en que los estudiantes y el profesor resignifican un conocimiento matemático particular, en este caso la ecuación diferencial de primer orden que modela el cambio en el fenómeno de enfriamiento.

Capítulo 2.

La modelación en Matemática Educativa

1. Estado del arte sobre la modelación en Matemática Educativa

Al tratar de abordar algunos conceptos en matemáticas una de las dificultades que se puede presentar es establecer un consenso entre diferentes comunidades y escuelas con respecto a una definición que sea general y que de respuesta a diferentes concepciones. Uno de tales conceptos es precisamente la modelación en matemática educativa (o educación matemática, según sea el caso). A continuación se presenta una clasificación de algunas perspectivas en torno a la modelación y las diferentes interpretaciones y supuestos de cada una

1.1 Diferentes perspectivas sobre la modelación en Matemática Educativa

Varios han sido los trabajos hechos para intentar clasificar las diferentes aproximaciones teóricas a la modelación. Los trabajos de Kaiser y Sriraman (2006) y Kaiser y Schwarz (2010) muestran cómo han ido evolucionando los diferentes enfoques sobre la modelación en matemática educativa (o en educación matemática). En estos trabajos se recogen diferentes perspectivas en el ámbito internacional, sin embargo hay otras perspectivas que han ido apareciendo y que no habían sido considerados en estas clasificaciones.

En el trabajo de Kaiser (1986, citado en Kaiser & Sriraman, 2006), se identifican dos perspectivas predominantes:

- Una perspectiva pragmática, centrada en fines utilitarios o pragmáticos, en la habilidad de los estudiantes para aplicar matemáticas en la solución de problemas prácticos
- Una perspectiva científico-humanista orientada más hacia la matemática como una ciencia y con ideales humanistas de la educación con énfasis en la habilidad de los estudiantes para establecer relaciones entre las matemáticas y la realidad

Tiempo después Kaiser y Schwarz (2010), y tomando como base la clasificación propuesta por Kaiser y Sriraman (2006), proponen una nueva clasificación en la que enfatizan no solo los fines principales sino también los antecedentes de cada perspectiva (ver imagen 2):

Name of the perspective	Central aims	Background
Realistic or applied modelling	Pragmatic-utilitarian goals, i.e.: solving real world problems, understanding of the real world, promotion of modelling competencies	Anglo-Saxon pragmatism and applied mathematics
Contextual modelling	Subject-related and psychological goals, i.e. solving word problems	American problem solving debate as well as everyday school practise and psychological laboratory experiments
Model eliciting approach	Psychological goals, transfer of models elicited to new problem	American problem solving debate
Educational modelling; differentiated in (a) *didactical* modelling and (b) *conceptual* modelling	Pedagogical and subject-related goals: (a) Structuring of learning processes and its promotion (b) Concept introduction and development	Didactical theories and learning theories
Socio-critical modelling	Pedagogical goals such as critical understanding of the surrounding world	Socio-critical approaches in political sociology
Epistemological or theoretical modelling	Theory-oriented goals, i.e. promotion of theory development	Romanic epistemology
The following perspective can be described as a kind of *meta-perspective* focusing on research aims in contrast to the previous approaches:		
Cognitive modelling	Research aims: analysis of cognitive processes taking place during modelling processes and understanding of these cognitive processes Psychological goals: promotion of mathematical thinking processes by using models as mental images or even physical pictures or by emphasising modelling as mental process such as abstraction or generalisation	Cognitive psychology

Fig. 1 Classification of recent modelling approaches

Imagen 2. Clasificación de las perspectivas sobre modelación (Kaiser y Schwarz, 2010, p.54)

De la clasificación anterior se pueden identificar dos tendencias básicas. Por un lado está la tendencia pragmático-utilitaria en la cual lo importante es la solución de problemas del mundo real, la comprensión de ese mundo y la promoción de competencias de modelación. En esta tendencia se defiende el uso de problemas auténticos, es decir, problemas que provienen de campos específicos y que son reconocidos como tal por las personas que trabajan en estos campos (Kaiser & Schwarz, 2010).

En la segunda tendencia, más centrada en la matemática escolar, se pueden distinguir dos enfoques. El primero que considera la modelación como un medio para motivar a los estudiantes y brindar bases para el desarrollo de un contenido matemático particular. El segundo que considera la modelación como un contenido a enseñar para desarrollar en los estudiantes la capacidad de trabajar problemas del mundo real (Kaiser & Schwarz, 2010)

Para la perspectiva realista o aplicada los ejemplos auténticos traídos de la industria o de la ciencia juegan un papel importante. El proceso de modelación es llevado a cabo como un todo y no como un proceso parcial. Una característica central de esta perspectiva es que la modelación es entendida como una actividad para resolver problemas auténticos y no para desarrollar teoría matemática (Kaiser & Sriraman, 2006). En este sentido Kaiser & Schwarz (2010) afirman que los ejemplos tomados como base para trabajar en la escuela deberían permitir a los estudiantes:

- Comprender la importancia de las matemáticas en la vida diaria, en el entorno y en las ciencias
- Adquirir competencias que les permitan resolver problemas matemáticos reales incluyendo problemas cotidianos, del entorno y de las ciencias

En este sentido el principal criterio en la selección de los problemas tiene que ver con lo accesibilidad para los estudiantes, es decir, el contexto del mundo real debería ser comprensible para los estudiantes sin demasiado trabajo adicional y la modelación como tal debería estar en el horizonte matemático de ellos.

Esta situación demanda nuevas formas de estructurar la enseñanza de las matemáticas de tal forma que sean orientadas hacia la realidad lo cual no significa que sean reducidas sólo a ejemplos basados en la realidad pero sí que estos jueguen un papel central (Kaiser & Schwarz,2010)

A continuación se presenta un esquema del proceso de modelación que describe los aspectos centrales de esta perspectiva (ver imagen 3)

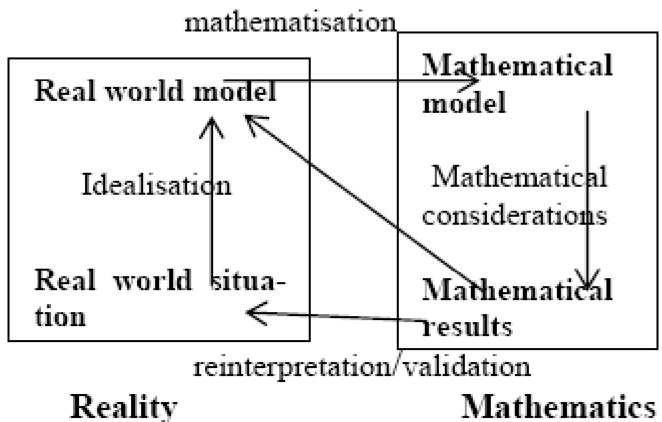


Fig. 1: Didactical modelling process (from Kaiser 1995, p. 68 and Blum 1996, p. 18)

Imagen 3. Proceso didáctico de modelación (Kaiser & Schwarz, 2006, p. 197)

Para esta perspectiva la modelación es el proceso de transformar una situación real, mediante abstracciones y simplificaciones, en un modelo matemático que luego será validado y reinterpretado en la situación real original.

Otra de las perspectivas, la modelación en contexto, se refiere básicamente a la importancia del contexto no sólo en la formulación sino también en la solución de un problema de modelación. Algunas de las premisas de esta perspectiva son:

- Los sistemas conceptuales son constructos humanos y son fundamentalmente de naturaleza social

- Los significados de estos constructos se distribuyen en una variedad de medios y representaciones que van desde el lenguaje hablado, escrito hasta diagramas y gráficos, modelos concretos y metáforas basadas en la experiencia
- El conocimiento es organizado alrededor de la experiencia y las abstracciones.

Los "mundos de experiencia" que los seres humanos necesitan comprender y explicar no son estáticos, éstos son en gran medida productos de la creatividad humana que cambian continuamente (Kaiser & Schwarz, 2010)

En la aproximación que considera modelos elicitados, la modelación es definida como una actividad de solución de problemas usando principios específicos de diseños instruccionales en los cuales los estudiantes le dan sentido a situaciones e inventan, extienden y refinan sus propios constructos matemáticos. El propósito de este proceso es que los estudiantes tomen modelos ya elaborados en la solución de un problema original y los apliquen a nuevos problemas (Kaiser & Sriraman, 2006)

En la perspectiva educativa, que se puede ubicar entre la realística y la epistemológica, el centro está puesto en los procesos de aprendizaje y en la promoción de la comprensión de conceptos. En esta perspectiva, los ejemplos del mundo real y sus interrelaciones con las matemáticas llegan a ser un elemento central en la estructuración de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Kaiser & Sriraman, 2006).

La perspectiva socio-crítica, referida a las dimensiones socioculturales de las matemáticas tiene su énfasis en el papel de las matemáticas en la sociedad y reclama la necesidad de apoyar el pensamiento crítico alrededor del rol de las matemáticas (en la sociedad), el rol y naturaleza de los modelos matemáticos y la función de la modelación matemática (en la sociedad). En esta línea se pueden ubicar los trabajos de D'Ambrosio (1999), Barbosa (2006) y Araujo (2009). En esta perspectiva, se hace la distinción entre la modelación matemática hecha por modeladores profesionales y las actividades de modelación realizadas en la escuela. Así, la promoción del pensamiento crítico del estudiante es un objetivo central de la enseñanza en esta perspectiva. Las discusiones reflexivas de los estudiantes en los procesos de modelación son consideradas parte indispensable de este proceso. El análisis del discurso es considerado fundamental en esta perspectiva ya que a través del discurso los estudiantes desarrollarían discusiones de tipo matemático, tecnológico y reflexivo, indispensables para el desarrollo del pensamiento crítico (Kaiser y Sriraman, 2006).

En la perspectiva epistemológica se puede ubicar el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y la aproximación a las praxeologías matemáticas de Chevallard y el contrato didáctico de Brousseau. A diferencia de la perspectiva realista, se le da menos importancia al aspecto real de los ejemplos con que se trabaja. En este sentido, si el enfoque predominante es el de la TAD, cualquier actividad matemática es susceptible de modelarse, así la modelación no está limitada a la matematización de cuestiones extra matemáticas (Kaiser & Sriraman, 2006). Lo anterior es expresado de manera directa por Bosch, García, Gascón y Ruíz (2006, p.38): “La TAD propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologías (praxis+logos). Esta noción primitiva constituye la herramienta fundamental propuesta desde la TAD para modelar la actividad matemática, entendida como una actividad humana más”

Finalmente, la perspectiva cognitiva en la modelación tiene como finalidad analizar diferentes procesos de modelación con diferentes situaciones, variando en su grado de autenticidad o complejidad matemática. Uno de los fines de esta perspectiva es la reconstrucción de las rutas de modelación individuales y la identificación de las barreras y dificultades de los estudiantes durante sus actividades de modelación (Kaiser & Schwarz, 2006).

De otra parte, y en este mismo sentido, Biembengut y Hein (2004) identificaron en la literatura dos posturas con respecto a la modelación: la que considera que a través de la modelación no se puede enseñar nuevos conceptos matemáticos y los que defienden que la modelación es un proceso ideal para enseñar matemática. Por su parte Coulange (1998) (citado por Gallegos, 2007) distingue dos tendencias importantes que existen alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la modelación: una que afirma que se puede enseñar “a través de la modelación” y otra que sostiene que es “la modelación” la que se debe enseñar. En otras palabras la modelación puede ser estudiada como herramienta pero también como objeto de enseñanza, según estas otras posturas.

La revisión anterior tuvo como finalidad exponer las perspectivas más comunes en el ámbito internacional sobre la modelación para ir delimitando de manera gradual la perspectiva que sirve de base a esta investigación: la socioepistemología (que será presentada en el capítulo 3) y los supuestos bajo los cuales se puede explicar la modelación.

1.2 Síntesis de las diferentes perspectivas sobre modelación

A partir de los diferentes trabajos consultados y de investigaciones anteriores sobre la modelación en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, se pueden identificar diferentes acepciones del término, que si bien en algunos casos tienen elementos en común, en otros muestran diferencias significativas. Esto muestra, de alguna manera, la dificultad no solo conceptual sino también de aplicación de la modelación en la enseñanza de las matemáticas.

Se pueden identificar dos tendencias básicas:

a. La modelación entendida como proceso o actividad en la que un problema, situación o fenómeno por fuera de la matemática es traído al dominio matemático para ser resuelto o explicado

b. La modelación como un método de enseñanza y aprendizaje que puede ser objeto de enseñanza o un medio para enseñar matemáticas

En la siguiente tabla (ver tabla 1) se muestran diferentes concepciones en torno a la modelación, las cuales han sido dispuestas en columnas para facilitar su lectura:

Como proceso	Como método de enseñanza y aprendizaje
Supone recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico-matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia (Sadovsky, 2005)	La modelación matemática es una forma de resolución de problemas de la vida real en la que no solo se tiene en cuenta la solución del mismo sino que exige la utilización de un gran número de habilidades matemáticas y no llega solo a una respuesta específica sino a un rango de respuestas que describen la conducta del fenómeno considerado y da al resolutor sentido de participación y control en los procesos de solución. Esto hace que la modelación matemática sea un poderoso instrumento de aprendizaje significativo, a tener en cuenta para trabajar en el aula. (Castro y Castro, 2000)
La modelación es un proceso en el cual un problema no matemático es resuelto a través de la aplicación de las matemáticas (Kaiser,y Maaß, 2007)	La modelación matemática cómo método de enseñanza y de investigación el cual se vale de la esencia de la modelación que consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad en un lenguaje matemático: el modelo matemático (Biembengut y Hein,s.f.)

Actividad que se realiza en la clase de matemáticas, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un “micromundo” (contexto dotado de relaciones y significados) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real (Villa, 2007)	La modelación matemática es el método de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de modelación en cursos regulares (Bassanezi y Biembengut,1997)
Es el proceso de traslación entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones (Blum y Borromeo, 2009)	
La modelación matemática es un proceso que tiene su esencia en la construcción de modelos matemáticos abstractos. En este eslabón del proceso de solución de problemas el sujeto expresa en un lenguaje matemático los elementos e interrelaciones del problema dado, aplicando los conocimientos adquiridos (Diéguez y otros, 2003)	
Aprender a modelar es saber	

estructurar el contexto, matematizar y reinterpretar los resultados de esta matematización, revisar el modelo, modificarlo, etcétera. Una completa e interesante descripción de la modelación matemática ha sido dada por Henry O. Pollak: Cada aplicación de la matemática usa la matemática para evaluar o entender o predecir algo que pertenece al mundo no matemático. Lo que caracteriza a la modelación es la atención explícita al principio del proceso, al ir desde el problema fuera del mundo matemático a su formulación matemática, y una reconciliación explícita entre las matemáticas y la situación del mundo real al final. (Alsina 2007)	
Consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad en un lenguaje matemático: el modelo matemático (Biembengut y Hein,2006)	
Puede ser entendida como el uso de modelos matemáticos para resolver problemas reales. Esto significa	

encontrar una representación matemática para una situación real, buscar comprenderla e intentar resolver algún problema relacionado a esta situación (Araujo, 2010).	

Tabla 1. Síntesis se diferentes perspectivas en la modelación

2. Constructos teóricos fundamentales

2.1 Modelo

El término modelo se presenta como un concepto polisémico y son diversas las acepciones que se encuentran en la literatura. La noción de modelo en matemática educativa no emerge de la matemática misma, no es interior a las matemáticas, se trata de una relación entre un fenómeno, material o esquema y un concepto, estructura o procedimiento matemático (Castro y Castro, 2000). En otras palabras, existe una relación directa entre realidad y modelo mediada por conceptos matemáticos.

A continuación se presentan algunas características, que sin ser normativas, muestran de alguna manera los rasgos distintivos que debe tener un modelo, independientemente de la perspectiva bajo la cual se aborde la modelación (Hernández, 1989):

- Ha de describir las propiedades esenciales de la estructura del objeto

- Ha de comenzar por el estudio no de las situaciones observadas en la realidad, sino de situaciones ideales, únicas que nos pueden ofrecer la solución de los problemas que se planteen. En este sentido, lo ideal hace alusión más a cierto carácter simplificado de las situaciones, en las cuales por simplicidad hay ciertas variables que no son consideradas

- El modelo debe operar con constructos, es decir, conceptos concernientes a objetos ideales, que no se pueden deducir directamente de los datos experimentales, sino que se construyen libremente a partir de ciertas hipótesis generales sugeridas por el conjunto de las investigaciones y por las intuiciones del investigador y por las relaciones entre esos datos. Cada modelo, pues, representa una construcción deducida lógicamente de las hipótesis con la ayuda de un instrumental matemático determinado.

- Un modelo ha de estar dotado de un poder explicativo, es decir, debe de explicar los hechos y los datos suministrados por la experimentación y predecir el comportamiento del objeto, que será confirmado, ulteriormente, por la observación o por una nueva experimentación.

En la siguiente tabla (ver tabla 2) se presentan algunas concepciones de modelo, que sin ser definitivas, comprenden aspectos generales que los caracterizan en las diferentes perspectivas analizadas:

Definición	**Autor (es)**
Es cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones matemáticas, diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad, su prototipo.	Aris (citado en Suárez, 2008)
Conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular sino también servir de soporte para otras aplicaciones o	Biembengut y Hein (2006)

teorías.	
Representación simplificada del objeto o proceso que se analiza teniendo en cuenta que refleja sólo algunas características que son esenciales en el fenómeno estudiado.	Diéguez y otros (2003)
Sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible, que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo.	Ministerio de Educación Nacional de Colombia, (2006)
Es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática.	Blomhøj (2004)
Es una estructura matemática que aproxima o describe ciertas relaciones de un hecho o fenómeno.	Castro y Castro (2000)
Representaciones de situaciones problema que reflejan necesariamente aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes para la situación problema, pero que pueden tener diversas manifestaciones.	Van Den Heuvel (2003)

Es un sistema para describir (explicar o diseñar) otro sistema o sistemas con algún propósito claramente especificado	Lesh, Galbraith, Haines y Hurfor (2010)
Constructo de carácter dinámico que resulta de la matematización de la realidad y que contribuye a la descripción, explicación y predicción de fenómenos o hechos del mundo real	Martínez y Ortiz (2005)

Tabla 2. Diferentes concepciones de modelo

2.2 Realidad

Un aspecto importante en las actividades de modelación lo constituye el concepto de realidad ya que desde cualquier perspectiva se asume como base para la identificación y selección de los fenómenos, situaciones o problemas que han de ser considerados para el trabajo en la clase de matemáticas. Además, es importante considerar que esa realidad está en estrecha relación con los contextos en los que se desarrolla y por lo mismo más que hablar de realidad y contexto de manera aislada, se trata de un binomio en el que cada una de las partes condiciona e influye en la otra y ambos, a su vez, influyen en la práctica de modelación en matemática educativa. Aunque en algunos de los párrafos siguientes se trabajen de manera separada realidad y contexto, se hace sólo por claridad para su comprensión.

Para Bosh y otros (2006), la modelación supone partir de una situación realista para el alumno, en la cual éste pueda actuar para dar lugar a un primer modelo de su actividad matemática informal y que luego irá evolucionando, en mayor nivel de complejidad, hacia un modelo más elaborado. En este sentido, una situación realista se refiere a una situación que se encuentre en el lo que podría llamarse el espectro, no solo de intereses sino también de comprensiones, del estudiante.

Por su parte Villa (2009), no se refiere a la realidad como tal, sino más bien al mundo real el cual considera como un aspecto cercano a los contextos reales de los estudiantes, es decir, los contextos cotidianos, sociales, culturales, de consumo o de otras ciencias en los cuales los estudiantes pueden estar inmersos.

En este sentido, el mundo real es real en la medida que esté relacionado con las experiencias y vivencias de los mismos estudiantes, es decir, que sea el mundo que los estudiantes viven y del cual se pueden hacer una representación. En el ICMI Study 14 (International Commission on Mathematical Instruction, 2004), cuyo tema fue Applications and modelling in mathematics education, se define el mundo real como todo aquello que tenga que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo tanto lo referente a la vida cotidiana como a los temas escolares y universitarios y disciplinas curriculares diferentes de las matemáticas (Blum, Galbraith, Henn, Niss, 2007)

Para Blum y Borromeo (2009), la realidad es el resto del mundo fuera de las matemáticas e incluye la naturaleza, la sociedad, la vida diaria y otras disciplinas científicas.

En la Educación Matemática Realista (mencionada anteriormente), la concepción de realidad está ligada a la etimología de la palabra (en holandés, el verbo *zich realisieren* significa “imaginar”) y por lo mismo tiene una cierta relación con aquello que puede “imaginarse un estudiante”. El término realista se refiere más a situaciones problema que los estudiantes puedan imaginar que a la realidad o autenticidad de los problemas mismos (Van Den Heuvel, 2003). Esto último no significa que la relación con la vida real no sea importante, sino que los contextos no están necesariamente restringidos a situaciones en ese contexto. Así las cosas, el mundo de fantasía de los cuentos de hadas e incluso el mundo formal de las matemáticas, son contextos idóneos para problemas, siempre y cuando sean “reales” en la mente de los estudiantes.

D’Ambrosio (2009), define la realidad como el complejo de hechos y fenómenos interrelacionados ya sean naturales, ambientales, socioculturales y emocionales. Esta realidad informa al individuo proporcionándole estímulos para la acción, es decir, puede ser percibida por los sentidos.

2.3 Contexto

En Castro y Castro (2000) se señalan tres contextos (en el aula) en los que se puede realizar la modelación. El primero se refiere a resolver problemas en los cuales las operaciones matemáticas surgen como generalización de acciones reales. En el segundo contexto, el estudiante toma un problema de la vida real, lo organiza, estructura, a continuación determina la matemática relevante necesaria y, finalmente, resuelve el problema, es decir, el estudiante aplica a una situación real conceptos matemáticos de los que disponía previamente. En el tercer contexto, el punto de partida es un problema de la vida real para el que se introducen y desarrollan nuevos conceptos matemáticos.

Cualquiera sea el contexto en el que se presenta la modelación, hay que considerar, tal como lo plantean Cordero y otros (2001), que contextualizar el conocimiento matemático no significa simplemente simularlo en el aula con cualquier actividad cotidiana, sino conocer las representaciones que de ese conocimiento se hacen los estudiantes y conocer el significado de sus concepciones, además de ver cómo las hacen funcionar en el ámbito elegido. Se podría añadir entonces que además de ver cómo las hacen funcionar en el ámbito elegido es identificar y analizar cómo resignifican y cómo construyen conocimiento matemático escolar. En el caso de nuestra investigación realidad y contexto son elementos que además de ser indisolubles le dan significado a una práctica social y le imprimen unas características particulares.

2.4 Interacciones en clase de matemáticas

El conocimiento matemático escolar, como construcción colectiva, se da en la medida que hay intercambios, negociaciones y consensos entre los actores principales involucrados en el acto educativo: estudiantes y profesores. Estos intercambios, negociaciones y consensos presentes están mediados por la comunicación y es en este punto en el que las interacciones juegan un papel fundamental. Montiel (2002), afirma que el profesor, el estudiante, el objeto de conocimiento y los objetivos de enseñanza son los elementos de cualquier práctica educativa, pero es la interacción entre ellos la que determina esa práctica y es al mismo tiempo el elemento intrínseco de la efectividad de cualquier ambiente educativo, en especial el aula de matemáticas.

Las interacciones corresponden a las vivencias y encuentros cotidianos que se dan en el salón de clase y cuyo análisis permite interpretar y comprender los significados que le otorgan las personas a una realidad específica y donde se puede observar, distinguir o percibir la cotidianidad en el aula, haciendo énfasis en el discurso explicito y oculto (aquel que no está necesariamente mediado por el lenguaje verbal) de las relaciones de los individuos, en un determinado lugar o escenario (Arias, 2009). Interesan aquellas interacciones que contribuyan a la construcción y resignificación de conocimiento matemático escolar en el contexto de la clase de matemáticas.

Al considerar el aula de matemáticas como un espacio en el que emerge conocimiento matemático escolar y al mismo tiempo se pueden resignificar conocimientos ya adquiridos, las interacciones se pueden comprender como los procesos de asociación de unos actores conscientes con otros, entre los que se produce un intercambio, una orientación y una afectación de la conducta de unas personas con respecto a las demás, y con las cuales se establece una relación determinada. Estos procesos de interacción entre los miembros de un grupo específico generan una red de relaciones edificadoras de organización social y cultural (Blandón, Molina & Vergara, 2006, citado por Arias, 2009). Las interacciones sociales son esenciales para favorecer el aprendizaje ya que propicia el desarrollo de las capacidades humanas tomando en cuenta el lenguaje como mecanismo mediador en dicho desarrollo (Arias, 2009).

Por su parte Falsetti y Rodríguez (2005) se refieren a las interacciones como un intercambio comunicativo, recíproco y voluntario entre actores que participan del acto intencionado de enseñar y que conlleva la potencialidad de provocar alguna transformación (intelectual o actitudinal) entre los sujetos participantes.

Es en el seno de estas interacciones que para esta investigación cobra sentido buscar la forma en que estudiantes y profesores resignifican un conocimiento matemático escolar. Tal como lo afirma Testa (2004, p. 57) en su estudio sobre el proceso de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda "el conocimiento se va construyendo, y reconstruyendo, en las situaciones de interacción que se dan en el aula, se producen resignificaciones de significados en un proceso de negociación".

En las interacciones del aula el discurso juega un papel central pues como afirma Planas (2004), el discurso es un conjunto de acciones e interacciones articuladas en un contexto de prácticas sociales. Es así como al hablar de interacciones se está hablando al mismo tiempo del discurso, el cual sirve como puente entre los estudiantes y el profesor y entre los mismos estudiantes. Así las cosas, el discurso del aula está constituido por prácticas comunicativas que generan la producción y transacción de intenciones y significados en interacciones social y culturalmente situadas (Planas, 2004), en el caso del aula de matemáticas, el discurso modela lo que significa hacer matemáticas y las identidades de los alumnos como aprendices de matemáticas (Klein, 2002, citado por Planas, 2004).

Se puede ver entonces que la relación entre interacciones y comunicación, vía discurso, es directa y en ambos sentidos de tal manera que la una influye en la otra. Cada interacción constituye un acto comunicativo y a su vez cada interacción forma parte de un conjunto compuesto de interacciones anteriores y simultáneas. Por lo tanto, tiene sentido analizar las interacciones a través del discurso si éste se concibe como una realidad que reproduce discursos anteriores y simultáneos y que, a su vez, se reconstruye en discursos posteriores (Planas, 2004). Este discurso será asumido en sus diversas expresiones o manifestaciones ya sean verbales o escritas, cada una de las cuales permite a su vez analizar y dar cuenta de la naturaleza de los argumentos y conocimientos empleados no solo en la construcción de conocimiento matemático escolar (Torres, 2010), sino también en su resignificación. En este sentido, la interacción más que ser considerado un proceso que parte de la diversidad de opiniones y posturas, termina como un proceso donde se negocian y articulan significados, pero también se abren alternativas explicativas y se plantan nuevos debates (Torres, 2010).

Para esta investigación las interacciones son consideradas como procesos de intercambio comunicativo en los que las negociaciones, los consensos, las convergencias, las divergencias, las explicaciones y las argumentaciones son los mecanismos mediante los cuales se dan las relaciones entre los actores en la clase de matemáticas: profesor y estudiantes, en búsqueda de la resignificación de un conocimiento matemático escolar. En palabras de Radford (2011), la interacción puede ser considerada como aquello que provee un espacio de facilitación de intercambio. En este caso, la interacción se presenta como una herramienta, un instrumento pedagógico que ayuda al profesor a crear las condiciones para que el aprendizaje ocurra. Estas interacciones en el caso de esta investigación, se busca que sean promovidas en el ejercicio de una práctica de modelación y más concretamente en el ejercicio de la práctica de modelación del fenómeno de enfriamiento.

De esta forma las producciones orales y escritas son consideradas formas de expresión de esas interacciones y por lo tanto susceptibles de ser analizadas bajo la óptica de la resignificación de conocimiento matemático escolar, concepto que será discutido más adelante.

Capítulo 3.

La perspectiva socioepistemológica de la modelación

En el siguiente capítulo se dan algunos elementos que ayudan a entender de qué manera la práctica de modelación se puede explicar a luz de la socioepistemología y cómo en el ejercicio intencional de esas prácticas es que se da la resignificación, en el sentido de proceso de resignificación. Aunque los conceptos aparecen separados, es importante señalar que están relacionados entre sí y forman un todo coherente.

3.1 Las prácticas sociales en la socioepistemología

Las prácticas sociales se pueden entender como aquellas cosas que hace un grupo social, que tiene significados propios e intención, ubicado en un contexto histórico o actual y que actúa de acuerdo con ideologías predominantes y utiliza a la matemática como herramienta para construir conocimiento (Cordero y otros, 2001). Para Buendía (2004), por su parte, las prácticas sociales son como una metáfora que permite explicar la construcción de conocimiento matemático. Ese conjunto específico de acciones permite la diferenciación entre comunidades y se puede hablar así de prácticas de los profesores, ingenieros, médicos, etc.

De acuerdo con López (2005), la práctica social se puede entender como un constructo teórico usado para referirnos a aquello que nos hace comportarnos tal y como lo hacemos y no de una manera diferente. De manera más general y en términos de comunidades, una práctica social es aquello que nace como respuesta a una necesidad, donde la respuesta viene a ser una especie de acuerdo, explícito o no, de la comunidad para trabajar en una cierta dirección.

Cordero (2006) ha puesto de manifiesto el papel que desempeñan las prácticas en los grupos humanos pues cualquier grupo humano se vale de prácticas para generar conocimiento. De acuerdo con este autor, el desarrollo de éstas depende de la organización, de la cultura y de la historia de los grupos humanos. Afirma que estas prácticas son todos los aspectos y formas de la actividad humana que transforman realmente (materialmente) los objetos, resignificando así al conocimiento.

En Camacho (2006), se hace referencia a la práctica social como una actividad ejercida por el ser humano sobre el medio en el que se desenvuelve y a través de la cual le da sentido a los problemas fundamentales de la ciencia al someterlos a relaciones entre ellos y su entorno. Sin embargo, esos problemas deberían ser ampliados y no ser exclusivos de la ciencia, ya que el mundo real o el medio en el que se pueden desenvolver los individuos es más amplio y complejo.

Estas prácticas sociales pueden ser caracterizadas (Cortés, 2005) según cinco elementos que las configuran y que están interrelacionados:

- Actores sociales en interacción. Reconociendo el carácter discursivo en la construcción social del conocimiento
- Una situación social (diversos fenómenos observables)
- Una noción matemática y sus diversas versiones (tabla, gráfica, ecuación, lenguaje natural, etc.)
- Un contexto social (diversas comunidades de profesionistas y oficios)
- Una intencionalidad implícita en un contexto histórico social (la intervención de los actores en su entorno)

Retomando el carácter funcional que debe tener el conocimiento matemático, Cortés (2005) afirma que es en el ejercicio de prácticas sociales, en diversos contextos, donde toma el carácter de funcionalidad la matemática. Esas prácticas a su vez son ejercidas con una intencionalidad para transformar o comprender el entorno social en el que se desarrollan (dichas prácticas). Es así como las prácticas sociales se ejercen por lo general en situaciones extraescolares y escolares que pueden ser motivadas por contextos políticos, sociales, culturales ideológicos o de otra naturaleza (Camacho, 2006)

Los planteamientos anteriores permiten considerar las prácticas sociales como la base sobre la cual los sujetos pueden construir conocimiento, en comunión con otros y en contextos definidos. Las prácticas sociales serán asumidas en esta investigación como un conjunto de acciones deliberadas e intencionadas que desarrolla el individuo en un colectivo para resignificar conocimiento, en este caso conocimiento matemático escolar, y que caracteriza a las comunidades y a sus integrantes y que norman o regulan el comportamiento de esos sujetos en esa comunidad (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004; Cordero y Suarez, 2005, Cantoral (comunicación Personal)).

3.2 La perspectiva socioepistemológica

De la revisión anterior sobre las diferentes perspectivas de la modelación (secciones 1.1 y 1.2) se puede observar que la perspectiva socioepistemológica no es considerada en estas clasificaciones para abordar el estudio de la modelación en la matemática escolar, al menos en las referencias internacionales consultadas. Si bien la socioepistemología ha tenido un desarrollo y un contexto concretos, no significa que su alcance sea limitado y que no pueda ser considerada también como una aproximación importante en otros contextos.

Según Camacho (2006), la aproximación socioepistemológica cuenta hasta el momento con investigaciones en dos direcciones. Una va orientada hacia la reconstrucción del conocimiento matemático escolar, es decir, el diseño de situaciones y la otra hacia una investigación de corte experimental en la que se ha puesto en juego la simulación y la modelación con el objetivo de que los estudiantes construyan conocimiento a través de las resignificaciones que se producen en las actividades. Es en esta última dirección hacia la cual se orienta esta investigación.

En Martínez (2005), quien toma trabajos de otros autores (Cantoral y Farfán, 2003; Arrieta, 2003; Buendía, 2003; Ferrari y Farfán, 2004) se resume en términos generales la filosofía de la perspectiva socioepistemológica:

> Los saberes matemáticos son un bien cultural y son producto de la actividad humana en su práctica de modificar y construir su realidad, tanto natural

> como social. Trabajamos con la hipótesis del origen social del conocimiento, asumiendo que los procesos de construcción y de creación humana son procesos de síntesis (interrelación de algunas partes para conformar un todo) de los objetos y herramientas culturales presentes en una sociedad o un grupo específico (p.198)

Para Hernández y Arrieta (2005), en el marco de la socioepistemología confluyen cuatro dimensiones, lo epistemológico, relativo a las prácticas que dan origen a las construcciones de los conocimientos; lo cognitivo, a los procesos de construcción de los conocimientos por los alumnos; lo didáctico, que se relaciona a las formas de intervención en los sistemas escolares; y lo social, acerca de cómo se desarrollan y viven en nuestro entorno las prácticas que dan lugar a los conocimientos, en este caso las prácticas sociales.

La perspectiva socioepistemológica es la aproximación teórica que al considerar las dimensiones didáctica, cognitiva y epistemológica en la matemática escolar, las inscribe en un contexto social concreto y particular, de manera sistémica, que dota de sentido y significado a las interacciones que emergen de las relaciones entre las dimensiones anteriores y con el contexto y en las cuales son los seres humanos, como colectividad, los que construyen conocimientos matemáticos nuevos o transforman y resignifican los ya existentes al ejercer prácticas sociales (Cantoral y Farfán, 2003).

Los argumentos fundamentales de esta perspectiva son la naturaleza de la práctica social y la resignificación del conocimiento matemático escolar (Camacho, 2006). Es una aproximación teórica que pone en el centro de la discusión más que a los conceptos a las prácticas sociales asociadas a determinado conocimiento y más que a determinado conocimiento lo que estudia es el entendimiento de la construcción del conocimiento matemático de acuerdo con lo que organizan los grupos humanos normado por lo institucional y cultural (Briceño y Cordero, 2007).

En la siguiente imagen (imagen 4), tomando algunos elementos del esquema presentado por Hernández y Arrieta (2005), se resumen las ideas anteriores:

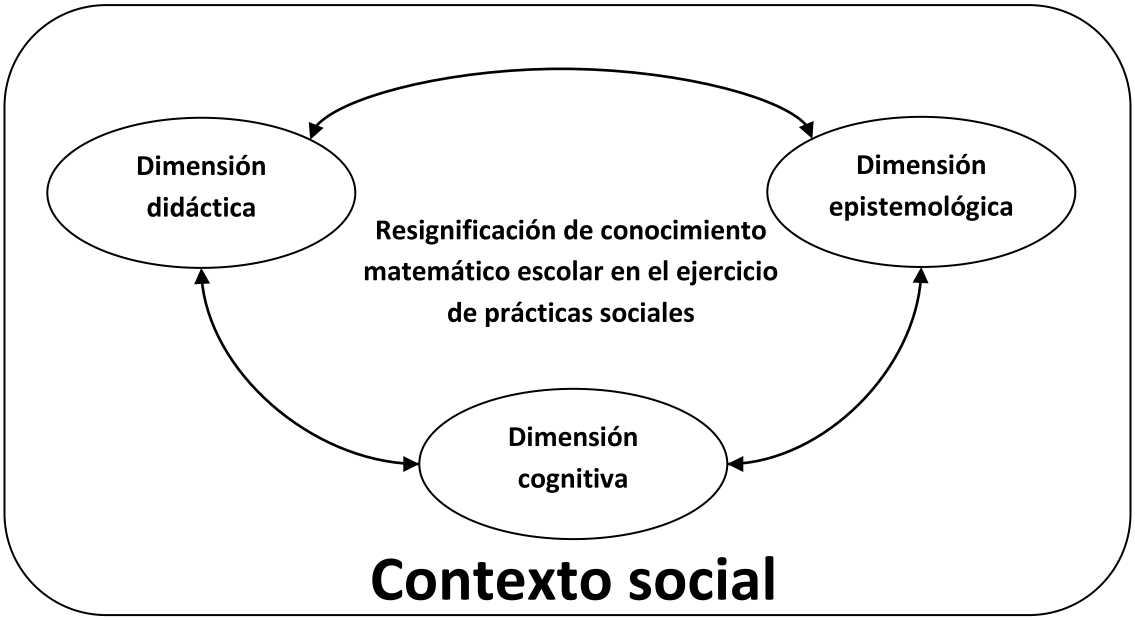


Imagen 4. Esquema general de la Socioepistemología

Por su parte Ramos (2005) propone tres aspectos que deben ser tenidos en cuenta al considerar esta perspectiva:

- Naturaleza de la problemática: en el sistema didáctico el conocimiento matemático es eminentemente una construcción social
- Las prácticas sociales de los grupos humanos: las prácticas son todos los aspectos y formas de la actividad humana que transforma realmente los objetos
- El desarrollo de las prácticas en el sistema didáctico: son las prácticas, como una respuesta a la problemática, las que tienen que ser desarrolladas en el sistema didáctico y no en si los conceptos.

Una vez se han esbozado los aspectos centrales de las prácticas sociales y de la socioepistemología, se va a plantear la modelación como una práctica bajo estas premisas.

3.3 La modelación en la perspectiva socioepistemológica

A diferencia de las anteriores perspectivas con relación a la modelación matemática en el ámbito escolar, la perspectiva socioepistemológica no tiene como preocupación central que la modelación sea considerada como un contenido a enseñar o como un medio o herramienta para enseñar conceptos matemáticos. El centro de interés en la perspectiva socioepistemológica radica en considerar la modelación en matemática educativa como una práctica que se comparte y se ejerce en comunidades específicas y en contextos particulares y que al ser ejercida por estudiantes y profesores (actores del sistema didáctico) permite la resignificación de conocimiento matemático escolar, lo cual a su vez modifica esas prácticas bien sea incorporando nuevos elementos, enriqueciendo los ya existentes o aportando nuevos significados, y modifica también a los individuos involucrados. Según Buendía (2004, p.72) "el individuo es, pues, un ente activo modificando su entorno y modificándose a sí mismo en el contexto mismo de las prácticas en las que se involucran y éstas son la fuente de resignificación del conocimiento matemático".

De la misma manera, y según López, Juárez y Arrieta (2007), las prácticas de modelación son aquellas prácticas sociales que se desarrollan en un contexto determinado (en nuestro caso la clase de matemáticas) y en interacción con fenómenos del mundo real y para los cuales las herramientas que se construyen para comprender o predecir su comportamiento, son precisamente los modelos que desarrollan los estudiantes como fruto de sus interacciones. Es entonces en el ejercicio de esas prácticas sociales que se construye conocimientos matemáticos y éstos a su vez modifican esas prácticas sociales (Arrieta, 2003).

Así mismo, Camacho (2006) citando a Freudenthal (1991), afirma que para este último, desde el punto de vista de la modelación, se distinguen las prácticas sociales como manifestaciones realizadas por los seres humanos a fin de resolver problemas matemáticos y que comprende entre otras actividades investigar lo que es esencial entre contextos, situaciones, problemas, procedimientos; simbolizar, formular, validar, generalizar, en definitiva, matematizar una situación.

Por su parte Cordero (2001, en Torres y Suárez, 2005) plantea que la aproximación socioepistemológica sostiene que la construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de las herramientas que resulta de la actividad humana. Estas herramientas serán precisamente los modelos que construyan los estudiantes en su interacción y como respuesta a una situación determinada.

La modelación, en la perspectiva socioepistemológica, no sería una representación sino una práctica que refleja una cierta intención humana, es decir no solo es una transformación sino intencionalidad y esto es precisamente lo que desde este enfoque más complejo, le da el carácter de social (Arrieta, 2003). Para Cordero (2006) en ese mismo sentido, la modelación en la matemática escolar tiene que ser algo más robusto que una representación o una aplicación matemática, afirma que tiene que ser una práctica plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión.

Como se había mencionado antes, la modelación en tanto actividad humana se convierte en una práctica social que permite la interacción con los otros y con los fenómenos o acontecimientos del mundo real. En esta investigación, los modelos que construyan los estudiantes serán precisamente las herramientas de las que se valdrán no sólo para comprender un fenómeno como tal sino también para predecir su comportamiento (Méndez y Arrieta, 2005). Desde este punto de vista el modelo de algún fenómeno es una herramienta usada para transformarlo, es algo utilizado en sustitución de lo modelado, donde la manipulación del modelo permite entender y predecir el comportamiento del fenómeno, así como validar hipótesis y elaborar estrategias para la intervención (Arrieta, 2003).

Para Ferrari y Farfán (2008), por ejemplo, la modelación es una práctica social como generadora de herramientas y representaciones sociales que nos permite generar conocimiento y construirnos modificándolas y modificándonos. Pero no solo generar conocimiento sino también resignificar conocimientos ya existentes. Es una práctica social en el sentido de comprender y transformar la naturaleza y es fuente que desarrolla procesos de matematización, donde el alumno construye argumentos, significados, herramientas y nociones relacionados con las matemáticas en la intervención con los fenómenos de la naturaleza (Arrieta, 2003). Las herramientas son los modelos creados con la matemática que conocen, son sus herramientas de predicción y actuación.

Al considerar las diferentes concepciones sobre la modelación tanto en la socioepistemología como fuera de ella, en este trabajo se asumirá (la modelación) como una práctica (de referencia) ejercida por profesores y estudiantes en un contexto y tiempo determinados en respuesta a una situación o fenómeno del mundo externo pero cercano a la realidad de los estudiantes, y a partir de la cual se resignifica conocimiento matemático escolar funcional, de manera individual y colectiva, mediante procesos de interacción. Se asume de referencia porque está en un contexto educativo y es ejercida por una comunidad bien definida: estudiantes de ingeniería de un curso de ecuaciones diferenciales.

Las prácticas de modelación en sí mismas son el pretexto que permite identificar y descubrir otros elementos consustanciales a la resignificación del conocimiento matemático escolar y su carácter funcional, funcional en el sentido de que se pueda integrar y resignificar permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla (Suárez y Cordero, 2005).

Finalmente, la modelación al ser asumida como una práctica no es simplemente plantear en símbolos matemáticos un fenómeno extra-matemático, es también al mismo tiempo un proceso de descubrimiento de debilidades de aprendizaje, de formas de relacionarse con el conocimiento, con los otros y con el entorno, es si se quiere, la cara funcional de las matemáticas escolares pero funcional en el sentido de que promueve otros formas de interacción y de resignificación, colectiva e individualmente, de conocimiento matemático. La interacción como eje fundamental de las prácticas sociales es el “lugar” común en el que los actores construyen identidades, significados, sus propias realidades y al mismo tiempo reconstruyen su propia cognición (Buendía, 2004).

3.4. Modelo, realidad y contexto desde la socioepistemología

Tal como se había planteado en el capítulo anterior, hay tres constructos que están relacionados con la práctica de modelación: modelo, realidad y contexto. Dependiendo de la postura que se tome acerca de la modelación, el modelo resulta ser una representación de la realidad o una herramienta para intervenir (Méndez y Cordero, 2009).

Para Arrieta (2003) el modelo de un fenómeno es una herramienta usada para transformarlo. Es algo utilizado en sustitución de lo modelado, la manipulación del modelo nos permite entender y predecir el comportamiento del fenómeno, así como validar hipótesis y elaborar estrategias para la intervención. Un modelo es una herramienta para interpretar e intervenir en un contexto.

Para Méndez y Arrieta (2005), las prácticas sociales están en íntima relación con las herramientas utilizadas, esto es porque al ejercer ciertas prácticas los actores construyen sus herramientas con las que han de actuar y a su vez estas herramientas modifican las prácticas. De esta manera los modelos son considerados como herramientas creadas por los actores, al tratar de entender y predecir el comportamiento de un fenómeno

Para esta investigación se asume que un modelo es un sistema (físico o teórico) que sirve para representar un objeto, situación o fenómeno del mundo real en el cual se utilizan relaciones y conceptos matemáticos y cuya utilidad está dada en términos de ser una herramienta para interpretar, transformar y predecir el fenómeno y su comportamiento (Arrieta, 2003) en unas condiciones de contexto y tiempo particulares. Los modelos no se convierten en el foco principal de interés sino que son medios, herramientas, que permiten acercarnos a una realidad. De esta forma, los modelos funcionan a menudo como “ventanas” a través de las cuales se puede mirar más que como “objetos” a los cuales mirar.

La realidad será asumida en esta investigación como todo lo que es y ocurre (interna y externamente al sujeto) y que pueda ser no sólo percibido sino también imaginado o representado por un individuo a partir de sus sentidos y procesos mentales, y en cuya interpretación y análisis influye tanto su propia subjetividad como el contexto en el que se encuentra inmerso. De lo anterior se resalta que el contexto es un elemento fundamental en la concepción de la realidad y en la construcción de significados y conocimiento a partir de esa realidad, tal como lo afirman Cordero y otros (2001, p. 629) “los contextos tienen relación con el ámbito que da contenido a la situación problemática planteada”.

En cuanto al contexto, López, Juárez y Arrieta (2007) plantean que la actividad de construcción de conocimiento es situacional, es decir que los conocimientos cobran vida y tienen sentido en los contextos sociales concretos en que se encuentran las personas. Ahora bien, ¿qué tiene que ver esto con la práctica de la modelación? Una posible respuesta está en Arrieta (2002, p.9) cuando afirma que “la matemática no es “neutra”, depende del contexto social en donde se aborda. La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos. Estos contextos remiten, a los estudiantes y profesores, a diversas prácticas sociales…”, que en el caso de este trabajo, es la práctica de modelación.

El contexto para esta investigación está dado por la dinámica natural de interacciones en una clase de matemáticas (de ecuaciones diferenciales) y en unas condiciones particulares sociales y culturales.

3.5 La resignificación a través de la modelación

Una vez se ha presentado la modelación como una práctica, interesa entonces identificar de qué forma la práctica de modelación se convierte en el medio para lograr la resignificación de un conocimiento matemático escolar y particularmente de la ecuación diferencial como una herramienta modeladora del cambio.

En este trabajo, resignificar un saber matemático no es otorgarle un nuevo significado es, como lo mencionan Buendía y Cordero (2005, citado en Briceño y Cordero, 2007), una construcción del conocimiento mismo que hacen los individuos en un colectivo humano y que está normado por aspectos institucionales y culturales en un contexto particular y que se manifiesta en el uso del conocimiento dentro de una situación específica (Cordero, Cen y Suárez, 2010). De esta forma, para poder buscar la resignificación de un concepto se puede partir de la premisa que los estudiantes ya han tenido un acercamiento escolar del mismo (García y Montiel, 2007).

La resignificación da cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención lo que permite enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos (Martínez, 2005). Resignificar no es sinónimo de dar nuevos significados o nuevas definiciones a un concepto, es más bien reforzar, robustecer, ampliar, enriquecer, articular e integrar un significado ya existente que las personas tienen y que lo están usando en un momento o situación particular, con una finalidad específica y en el ejercicio de diferentes prácticas.

En palabras de Biehler (2005) es permitir que los estudiantes reflexionen, enriquezcan y reestructuren los significados asociados que ya tienen. Según Buendía (2004), la resignificación se forma de significados y procedimientos construidos en la situación que conforman un esquema explicativo global.

Esta resignificación ha permitido establecer categorías del conocimiento matemático escolar que permiten identificar relaciones funcionales entre los diferentes tópicos que integran el saber matemático. En el desarrollo de la socioepistemología, esta reconstrucción de significados en contextos interactivos en el salón de clases se ha logrado precisar tres marcos o situaciones: variación, transformación y aproximación (Buendía, 2004). En el caso específico de esta investigación la resignificación se buscará en términos de la variación o el cambio que representa la ecuación diferencial, y en la cual la resignificación manifiesta no solo el uso del conocimiento, sino también su desarrollo, que norma al mismo tiempo la práctica social (Cordero, Cen y Suárez, 2010).

El concepto de resignificación está asociado con la reconfiguración epistémica del conocimiento a partir de determinados argumentos que impactan la actividad del aula. Para Buendía (2004), la resignificación se forma de significados y procedimientos desarrollados en una situación de aprendizaje y está normada por lo institucional (Castañeda, Molina y Rosas, 2009). Para esta investigación, el saber a resignificar es la ecuación diferencial que modela un fenómeno particular como es el caso del fenómeno de enfriamiento de un cuerpo.

De esta forma la modelación como práctica y al ser ejercida por grupos humanos (estudiantes y profesores) en un contexto particular y bajo unas circunstancias determinadas promueve interacciones que dotan de sentido y significado a un conocimiento matemático escolar, tal como lo afirma Testa (2004, p. 57) en su estudio sobre el proceso de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda "el conocimiento se va construyendo, y reconstruyendo, en las situaciones de interacción que se dan en el aula, se producen resignificaciones de significados en un proceso de negociación".

Es así como se producen resignificaciones a través de la modelación en la medida que, en el ejercicio de esta práctica, se da un uso específico, situado e intencional de la ecuación diferencial en una situación de cambio y la forma en que ese cambio ocurre, tal como se da con el fenómeno de enfriamiento de los cuerpos. La forma en que ocurre ese cambio es lo que le da valor agregado a la ecuación diferencial y a su uso, ya no aislado y descontextualizado de la realidad sino vinculado con la misma en un proceso interactivo en el que son los estudiantes a través de su propia experiencia, vía la práctica de modelación, los que encontrarán nuevos usos y sentidos a un conocimiento matemático escolar y logrando así enriquecer al mismo tiempo significados.

Por su parte Biehler (2005) afirma que los significados matemáticos que van a ser construidos en el salón de clase deberían estar relacionados a prácticas y significados que estén por fuera de la escuela, es decir, vinculados y asociados a la realidad de los estudiantes.

La actividad matemática es una actividad humana (Freudenthal, 1991) y en este sentido es lo humano en tanto dinámica de interacciones lo que permite intercambios, negociaciones y consensos en la construcción de conocimiento matemático y en la resignificación de saberes matemáticos

Esta resignificación se logra a partir de la confrontación entre aquello que los estudiantes ya saben o creen saber, entre lo que intuyen o su sentido común les sugiere y los resultados obtenidos a partir de una situación real en la que ellos han sido actores principales y han tenido la posibilidad de interactuar con sus pares y con el profesor. Es en este sentido que la resignificación dota de valor, interés, nuevas preguntas y nuevas visiones a un conocimiento matemático, que en este caso particular es la ecuación diferencial que modela el cambio o la variación, enriqueciendo su significado cuando un grupo de estudiantes en un contexto particular ejerce la práctica de modelación sobre el fenómeno de enfriamiento de un cuerpo. En el siguiente esquema (ver imagen 5) se da una visión general del proceso que integra la práctica de modelación, las interacciones y el proceso de resignificación:

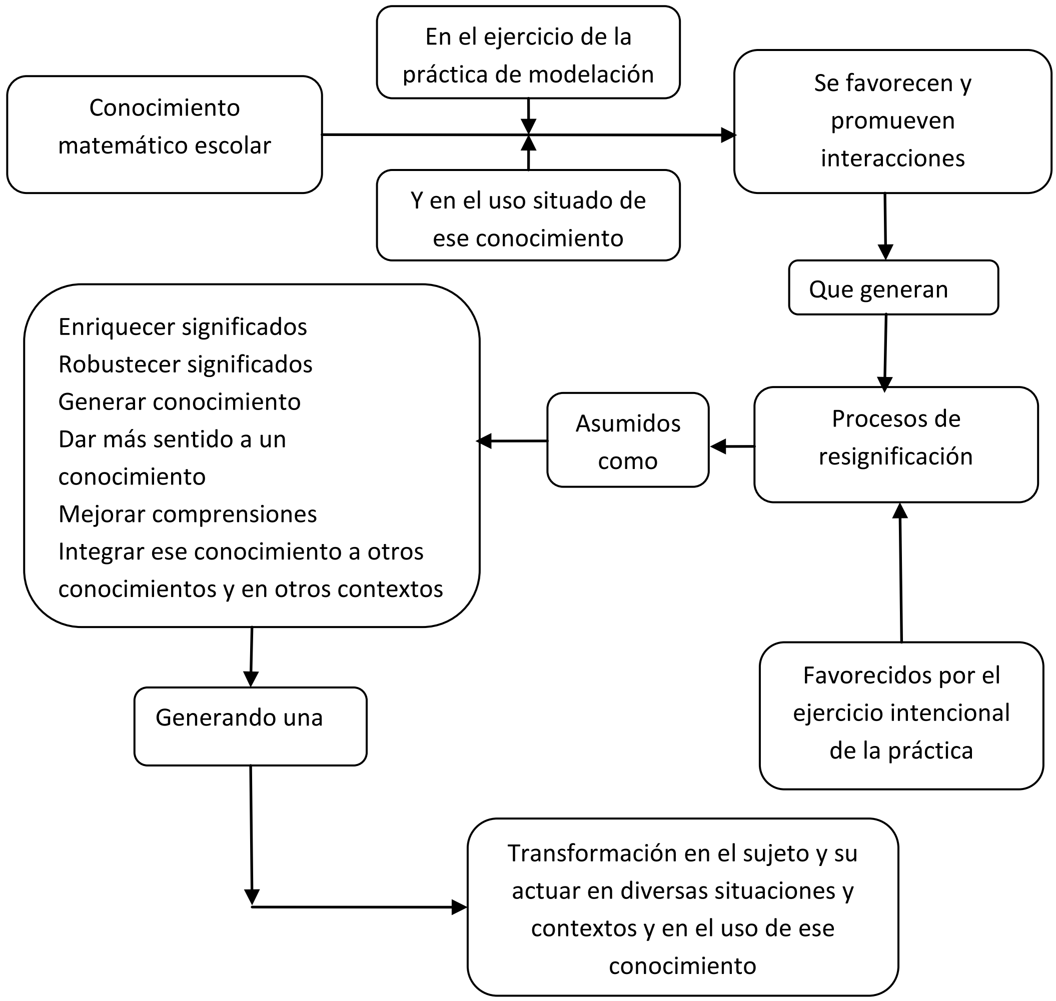


Imagen 5. Relación entre práctica, interacción y resignificación

Según los antecedentes y el marco teórico expuesto la resignificación en esta investigación será analizada a través de las interacciones generadas cuando se ejerce una práctica de modelación en la clase de matemáticas. Más que hablar de resignificación, se hará alusión al proceso de resignificación pues es continua, se transforma y enriquece en el tiempo y se nutre de diversas fuentes, dependiendo de los contextos, de las prácticas y de quienes la ejerzan. Por eso en este trabajo cuando se mencione resignificación en realidad se estará haciendo referencia al proceso de resignificación.

Finalmente, más que referirse a una resignificación completa o total, a una resignificación buena o mala, de lo que se trata es de buscar algunos elementos que aporten o contribuyan a esa resignificación de un conocimiento matemático escolar. Esos elementos a su vez también pueden ser resignificados. Si esto se logra gracias al ejercicio intencional y situado de la práctica de modelación, entonces se puede decir que el proceso de resignificación se ha generado y que por ser eso mismo, un proceso, no acaba cuando termina el ejercicio de la práctica de modelación.

Capítulo 4

La modelación del fenómeno de enfriamiento

4.1 El fenómeno de enfriamiento y algunos trabajos previos relacionados (de naturaleza socioepistemológica)

Vincular los fenómenos físicos con modelos matemáticos y específicamente con modelos propios de las ecuaciones diferenciales, ha sido una actividad que se ha tratado de llevar al ámbito escolar en las clases de matemáticas. En este sentido ya Vega (1988) en su artículo en la Revista Mexicana de Física lo expone con detalle:

> La teoría de las ecuaciones diferenciales es una de las más amplias ramas de la matemática actual, y es también una de las que más se relaciona con las aplicaciones. Al tratar de entender cualquier fenómeno físico, la mente crea una idealización y lo plasma en un modelo matemático… Con mucha frecuencia la expresión matemática, o ley, emanada de este estudio se exprese en forma de una ecuación diferencial.
>
> El estudio de las propiedades de la ecuación obtenida permiten sondear otras características que no son tan evidentes, incluso se pueden predecir hechos o fenómenos que de la observación no se obtiene. La historia de la ciencia está plagada de muchos casos de este tipo (p.98)

En el caso que nos ocupa, el enfriamiento de un cuerpo se puede definir como el proceso mediante el cual un cuerpo en un medio ambiente determinado, con una temperatura diferente a la de éste, llega a alcanzar la temperatura de su entorno, siempre y cuando no haya factores externos que modifiquen dicho proceso. Ésta es una aproximación general a la descripción del fenómeno de enfriamiento y de entrada se observa que en su definición existen algunas simplificaciones que deben hacerse para poder establecer una modelación (del fenómeno), algo que es inherente a la práctica de la modelación. Para contextualizar la situación es importante considerar, de manera muy breve, algunos antecedentes históricos del estudio del fenómeno de enfriamiento.

En la historia de las ciencias hay un nombre, y un hombre, que no necesita mayor presentación pues su importancia e influencia en el desarrollo de las ciencias, en casi todos los campos, ha sido tal que hablar algo más de él es redundar: Sir Isaac Newton (Woolsthorpe 1642, Londres 1727). Según Güémez (2009), Newton es el primero del que se tiene constancia de que se ocupara de estos problemas sobre el enfriamiento y calentamiento de los cuerpos. La motivación del científico por el estudio de este fenómeno puede ser debida al encargo que le habían encomendado en 1696 de Warden of the Royal Mint (Guardián de la Moneda) para contrarrestar el problema de la falsificación (existía un gran problema de acuñación ilegal de monedas supuestamente de oro pero que contenían importantes contenidos de plata) y que estaba a punto de originar un colapso económico.

Para su trabajo, Newton se valió de las herramientas que tenía a su alcance y que había fabricado él mismo (un termómetro con aceite de semillas de lino y su propia escala, pues no se había inventado la escala Celsius). Una vez había establecido el procedimiento, que consideraba correcto, para medir las temperaturas de los cuerpos, en su escala, se dedicó a estudiar cómo se enfriaban los cuerpos (Güémez, 2009):

> Lo que hizo Newton a continuación fue estudiar cómo se enfriaban los cuerpos, especialmente los metales, que se encontraban a altas temperaturas. Para ello hizo lo siguiente. En un bloque de hierro colado en el que había hecho un hueco, colocaba la pieza de metal sólido que quería estudiar. El bloque y la pieza las introducía en un horno cuya temperatura controlaba bien, pues era la del hierro ligeramente rojo (unos 730 grados Celsius). En cuanto el bloque de hierro ya había alcanzado esa temperatura, lo sacaba del horno y lo dejaba enfriar en una corriente de aire frío, siempre a la misma temperatura. A continuación medía el tiempo que tardaba el bloque de hierro en alcanzar la temperatura de solidificación del metal que había puesto en el hueco y a continuación medía el tiempo que el bloque

tardaba en alcanzar la temperatura del cuerpo humano, los 34 grados N (en la escala de Newton).

A partir de sus experimentos y observaciones, Newton había descubierto la que se conoce como Ley de Newton del Enfriamiento que se enuncia diciendo: “La variación de temperatura de un cuerpo respecto de la temperatura de la habitación en la que se encuentra, es proporcional --precisamente-- a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y la habitación”

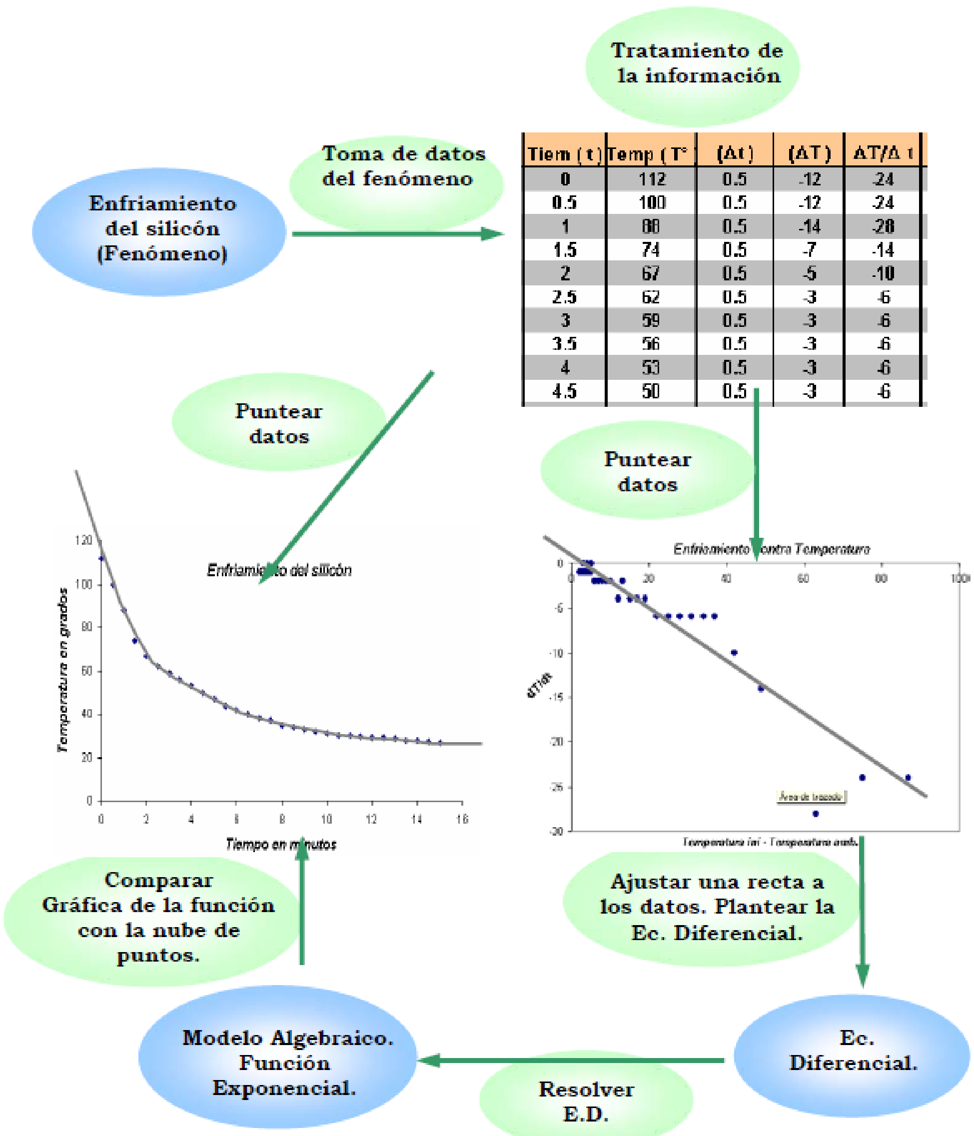
Es decir, Newton observó que al calentar al rojo un bloque de hierro y tras retirarlo del fuego, el bloque se enfriaba más rápidamente cuando estaba muy caliente, y más lentamente cuando su temperatura se acercaba a la temperatura del aire. Sus observaciones dieron lugar a lo que hoy conocemos con el nombre de ley de enfriamiento de Newton (Torres y Zaruma, 2009).

En los trabajos de Hernández y Arrieta (2005), Buendía y Velasco (2006), que trabajaron prácticas de enfriamiento con estudiantes universitarios de tercer y cuarto semestre de carreras de ingeniería, se observa cómo el tratamiento gráfico de los datos es un elemento central en la construcción del modelo y más específicamente el comportamiento exponencial del fenómeno. En este sentido el modelo exponencial se convierte en una herramienta (Hernández y Arrieta, 2005) que permite no sólo comprender sino también predecir el comportamiento del fenómeno en el tiempo.

En el caso específico de Hernández y Arrieta (2005), consideraron la práctica social de modelación, en relación con la emergencia de lo exponencial como herramienta, su foco de interés y observación. En este caso, la actividad experimental fue el enfriamiento del silicón y los participantes fueron estudiantes de tercer semestre de Ingeniería Bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco. Según los mismos autores, el objetivo propuesto fue

… construir un contexto donde los estudiantes y profesor, interactivamente, en el aula, construyan argumentos, herramientas y significados a partir de la modelación de un fenómeno, los aspectos a considerar dentro del modelo serán: la construcción del modelo, el tratamiento (las predicciones con los modelos) y la articulación de los diferentes modelos con el fenómeno. (p. 539)

El esquema propuesto para lo exponencial como una herramienta fue:



Tiem (t)	Temp (T°	(Δt)	(ΔT)	ΔT/Δ t
0	112	0.5	-12	-24
0.5	100	0.5	-12	-24
1	88	0.5	-14	-28
1.5	74	0.5	-7	-14
2	67	0.5	-5	-10
2.5	62	0.5	-3	-6
3	59	0.5	-3	-6
3.5	56	0.5	-3	-6
4	53	0.5	-3	-6
4.5	50	0.5	-3	-6

Imagen 6.Lo exponencial como una red de prácticas y herramientas (Hernández y Arrieta, 2005, p. 540)

El fenómeno de enfriamiento está en la realidad de los estudiantes, es decir, se pude garantizar que todos ellos han vivido alguna experiencia que tenga que ver con el enfriamiento y por lo tanto este fenómeno no será ajeno a su realidad

4.2 Tratamiento escolar del fenómeno de enfriamiento

En la mayoría de los libros de texto seguidos en los cursos de iniciales de matemáticas, el fenómeno de enfriamiento es puesto como ejemplo y mostrado bajo diferentes aplicaciones, lo cual hace que sea reconocido como una situación que se presenta con mucha frecuencia y como un ejemplo que por lo general se muestra. En los textos de ecuaciones diferenciales (el curso de ecuaciones diferenciales fue en el que se realizó la investigación), el fenómeno de enfriamiento conocido como la ley de enfriamiento de Newton, también es un ejemplo que se trabaja continuamente y cuya solución se plantea en términos de una ecuación diferencial lineal de primer orden de variables separables. Sin embargo en los libros de texto consultados no hay una invitación a la construcción del modelo como tal ni a un proceso experimental en el que los estudiantes puedan intervenir de manera directa y acercarse a la modelación de manera real.

Gallegos (2007), lo plantea en términos de que la modelación, cuando se trabaja en clase de matemáticas, está alejada de la situación real:

> El proceso de modelación existente en clase de Matemáticas es mostrado a los alumnos de manera parcial evitando confrontarlos a etapas claves de esta práctica. La gran parte del tiempo, los alumnos no establecen el modelo lo cual resta significado a la práctica. En resumen, el proceso de modelación existente en esta clase es lejano a aquel vivido por los expertos y en términos de la enseñanza no permite al alumno el enfrentarse al acto de modelar de manera completa (p.118)

En el ejercicio profesional de la ingeniería, la modelación se constituye en un elemento fundamental en el desempeño de un ingeniero, que se tendrá que enfrentar a la solución de diversos problemas y situaciones en los cuales la modelación será una herramienta que le permitirá trabajar sobre esa realidad a través de una parte de ella representada en un modelo, y cuyos resultados podrá después aplicar a la totalidad de la situación.

En los cursos iniciales de pre- cálculo y cálculo, y en los libros de texto en las carreras de ingeniería, el tema de las ecuaciones y funciones exponenciales es tratado en su generalidad y por lo mismo el fenómeno de enfriamiento al estar relacionado con un modelo exponencial no es ajeno ni desconocido para los estudiantes, así no se haya trabajado de manera directa. El fenómeno de enfriamiento es un tema que se aborda en diferentes cursos de matemáticas en carreras de ingeniería, y con diferentes niveles de complejidad. En términos actuales y utilizando la teoría de las ecuaciones diferenciales (Zill, 2002, p.24):

> Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente. Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto al tiempo t, T_m es la temperatura constante del medio que lo rodea y $\frac{dT}{dt}$ es la razón con que la temperatura del cuerpo cambia, la ley de Newton del enfriamiento (o calentamiento) se traduce en el enunciado matemático
>
> $$\frac{dT}{dt} \alpha T - T_m \text{ o sea } \frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$$
>
> Donde k es una constante de proporcionalidad. En ambos casos, calentamiento-enfriamiento, si T_m es constante es razonable suponer que $k < 0$.

Para esta ecuación y utilizando separación de variables, se llega a la solución:

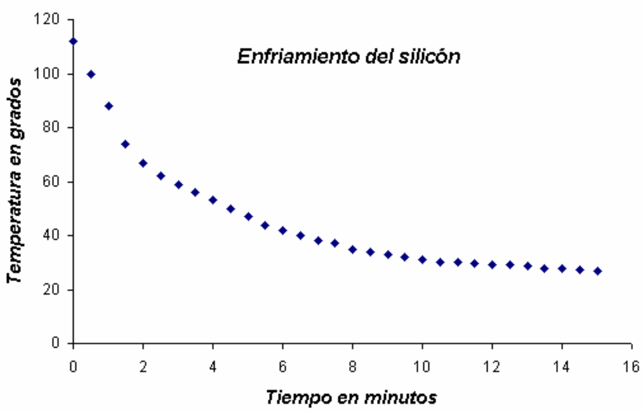
$$T(t) = (T_0 - T_m)e^{kt} + T_m$$

En la expresión anterior se observa el comportamiento exponencial de la solución obtenida, comportamiento que de alguna manera es familiar para los estudiantes pues este tipo de situaciones ya ha sido tratado en cursos anteriores.

El trabajo de Buendía y Velasco (2006) se basa en el trabajo de Hernández y Arrieta (2005), y proponen en este caso como objetivo "Construir un contexto donde los estudiantes y profesor, interactivamente, en el aula, construyan argumentos, herramientas y significados a partir de la modelación del fenómeno de enfriamiento del silicón" (p. 13)

Si bien en ambos casos se trabajó la práctica de modelación con el fenómeno de enfriamiento en la construcción de conocimiento matemático escolar, no se hizo énfasis en la resignificación de ese conocimiento a partir de las interacciones generadas en el ejercicio de esa práctica en particular. Este factor le confiere a esta investigación una cualidad diferente y que puede aportar algo a lo que ya estos autores habían desarrollado.

La secuencia seguida por estos autores sirvió como base para el diseño propuesto en esta investigación, con algunas variaciones y actividades adicionales.



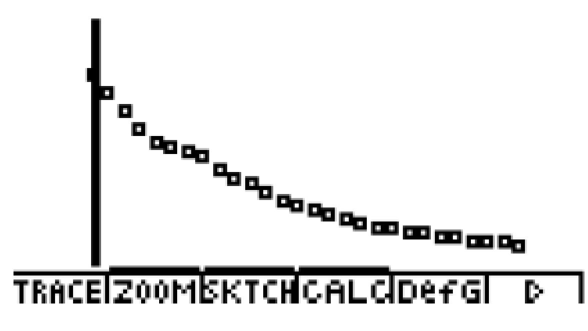


Diagrama 25

Imagen 7 (Hernández y Arrieta, 2005, p.540) (Buendía y Velazco, 2006, p. 23)

Se observa de las experiencias anteriores que el comportamiento exponencial (imagen 7) del fenómeno será un elemento o más precisamente una herramienta que servirá como soporte para la construcción de otra herramienta de mayor complejidad y alcance: el modelo como tal del fenómeno de enfriamiento. En palabras de Arrieta (2003, p.110), que ya se había mencionado antes: "…De esta forma, lo lineal, lo cuadrático, lo exponencial, lo periódico, lo inversamente proporcional, entre otras, son herramientas, artefactos utilizados en las prácticas sociales de modelación ejercidas en contextos sociales". Es por ello que lo exponencial se presenta como un factor importante en la práctica de modelación escogida en este caso, si bien no será el foco de interés, emergerá como una noción permanente sobre la cual se darán diferentes discusiones.

4.3 Resignificación de la ecuación diferencial como herramienta que modela el fenómeno de enfriamiento

Suárez y Cordero (2008) enfatizan en la construcción de conocimiento como una actividad inherente a la práctica de modelación cuando afirman que la construcción del conocimiento matemático escolar está en correspondencia con la modelación y el uso de la misma manifestado en un lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana, herramientas que son esencialmente los modelos construidos. Se trata, como se mencionó anteriormente, de hacer de la modelación una práctica que permita la generación de espacios de interacción en los cuales de manera colaborativa se resignifique un conocimiento matemático escolar y que al mismo tiempo permita identificar los diferentes argumentos, explicaciones, consensos y herramientas que se movilizan e intercambian en entre estudiantes y entre estudiantes y profesor.

Una vez realizada la práctica de modelación, la resignificación de la ecuación diferencial se podrá dar en términos de la comprensión e identificación que hagan los mismos estudiantes de que la ecuación diferencial representa el cambio o la variación de una variable con respecto a la otra, y para la cual deben transitar por etapas, en algunos casos, intermedias como lo es lo lineal y lo exponencial. Al mismo tiempo está resignificación se dará en la medida que sean los mismos estudiantes quienes le otorguen otros significados y puedan asociar e integrar este conocimiento a otras áreas y en otros contextos. En este caso el fenómeno de enfriamiento se convierte en un caso particular (pudo haber sido otro) que permite usar la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Es por ello, que en este trabajo se ha optado por realizar una actividad experimental, como una fase de la modelación y no como el fin en sí mismo, con el propósito de que los estudiantes, al ejercer la práctica de modelación, resignifiquen el conocimiento matemático escolar mediante las diferentes interacciones que se viven en el trabajo en un grupo.

4.4 La secuencia

Para alcanzar el objetivo de investigación propuesto, se decidió realizar una actividad experimental relacionada con el fenómeno de enfriamiento de un material (silicón), con estudiantes de ingeniería de un de curso ecuaciones diferenciales. La implementación de la práctica del fenómeno de enfriamiento fue realizado de la siguiente manera:

1. Distribución de los estudiantes por equipos

Los estudiantes conformaron equipos de tres o cuatro integrantes de manera voluntaria. De esta forma se favorecen las discusiones y las interacciones entre ellos puesto que se agruparán buscando ciertas afinidades, intereses o amistad lo cual les dará más confianza para expresarse e interactuar con sus pares. Se pretende así favorecer la comunicación y la fluidez en las discusiones para poder capturar con mayor detalle sus argumentos, explicaciones, etc.

2. Motivación a la situación de modelación

Una vez conformados los equipos, se les entregará un breve cuestionario (anexo 1) en el que se indagará por ideas previas y se planteará una situación relacionada con el fenómeno de enfriamiento en un contexto muy cercano a su realidad. El objetivo de esta actividad es contextualizar la situación y al mismo tiempo captar la atención y motivación de los estudiantes.

3. Realización de la actividad experimental y toma de datos:

Luego de que el profesor haya explicado qué se va a hacer y cómo se va a hacer, se les entrega la guía de la actividad experimental (anexo 2). Luego, se procede a la realización de la actividad experimental y la toma de datos, los cuales se irán registrando en la tabla (columnas uno y dos) que aparece a continuación (esta tabla hace parte de la guía, anexo 2). El objetivo de esta actividad es integrar el trabajo en equipo, poner a los estudiantes en una situación real de un fenómeno de enfriamiento y motivarlos la discusión a partir de los resultados obtenidos.

Tiempo t (seg)	Temperatura T (°C)	Δt (incremento de tiempo)	ΔT (incremento temperatura)	Razón entre incrementos $\frac{\Delta T}{\Delta t}$	Observaciones

4. Tratamiento numérico de los datos y supuestos iniciales

A partir de los datos de las dos primeras columnas, se procede a completar la tabla anterior (columnas tres, cuatro y cinco) que aparece en la guía (Anexo 2). Una vez han completado la tabla, se les pide que respondan las preguntas planteadas en la misma guía, basados en los datos obtenidos. Lo que se quiere con esta actividad es que a partir de las discusiones en cada grupo vayan emergiendo aspectos que permitan identificar relaciones entre el cambio o variación de la temperatura con el tiempo y que al mismo tiempo se atrevan a conjeturar a partir de lo discutido.

5. Manejo gráfico de los datos e interpretación

Con los datos obtenidos las dos primeras columnas de la tabla anterior, se pide a los estudiantes que en el computador representen estos datos (en Geogebra o Excel) y que comparen lo observado en el gráfico con las respuestas que habían dado a las preguntas planteadas. Se pide que guarden esos gráficos.

De la misma forma se les pide que grafiquen los datos de la columna cinco contra la columna dos, es decir, $\frac{\Delta T}{\Delta t} vs\, T$, y que encuentren la recta que mejor se ajuste a esos datos. La ecuación de ajuste de esta recta será la que permitirá resolver la ecuación diferencial que modela el fenómeno de enfriamiento.

6. La ecuación diferencial como herramienta que modelo el cambio

Al haber sido obtenida la ecuación de la recta de ajuste anterior, se procede a resolver la ecuación diferencial que modela el fenómeno de enfriamiento de un cuerpo, tomando la condición inicial establecida. La función obtenida será el modelo matemático que describe el fenómeno de enfriamiento.

7. Análisis de los resultados obtenidos, comparaciones y explicaciones

Esta fase es la de contrastación de resultados y explicaciones de lo sucedido. Se pide a los estudiantes que grafiquen los datos obtenidos de las dos primeras columnas. En la guía (anexo 2) hay unas preguntas que deben responder con base en este análisis y en la discusión del grupo. Se trata en esta fase que sean las interacciones entre ellos mismos y con su profesor, las que permitan la resignificación de la ecuación diferencial.

Esta resignificación se logra a partir de la confrontación entre aquello que los estudiantes ya saben o creen saber, entre lo que intuyen o su sentido común les sugiere y los resultados obtenidos a partir de una situación real en la que ellos han sido actores principales y han tenido la posibilidad de interactuar con sus pares y con el profesor. Es en este sentido que la resignificación dota de valor, interés, nuevas preguntas, nuevas visiones y enriquece significados de un conocimiento matemático, que en este caso particular es la ecuación diferencial que modela el cambio o la variación.

Para la secuencia propuesta, se realizará un análisis a priori y a posteriori, que serán presentados en el capítulo seis, utilizando algunos elementos metodológicos de la ingeniería didáctica.

Capítulo 5.

Aspectos metodológicos y contexto experimental

5.1 El carácter cualitativo de la investigación

Un trabajo de investigación, en este caso en Matemática Educativa, se ve enfrentado a la pregunta ¿cómo hacer la investigación?, o en otras palabras, ¿cuál debe ser el plan o método para que sea una investigación sistemática? La respuesta o respuestas a este interrogante, es la que orienta la actividad (mental y procedimental) de quien investiga para responder al problema que fundamenta su investigación. Es importante tener en cuenta que cualquier decisión en lo metodológico deber ser justificada a la luz de los objetivos y del problema de la investigación.

El método elegido debe estar en función del contexto, con sus características, especificidades, recursos, etc., y de las necesidades e intereses, no sólo de aquellos sujetos participantes, sino del propio investigador. Esta investigación al inscribirse en el ámbito educativo en Matemática Educativa, es decir, en ese "micromundo" de interacciones en el que los sujetos se van formando gradualmente a través de sus relaciones y negociaciones con los otros, con el medio y con la construcción, adquisición y dominio de unos saberes específicos, exige por lo mismo un método que permita, en palabras de Goetz y Lecompte (1988) una

> …comprensión de las negociaciones más o menos implícitas, que profesores y alumnos llevan a cabo, de las marginaciones y etiquetamientos que día a día se van creando y reforzando casi siempre sin plena conciencia de ello, de las incomprensiones ante los contenidos culturales exigidos por la institución… (p. 19)

De esta forma, el método elegido debe permitir un acercamiento al escenario y a los sujetos a investigar, desde una perspectiva más cualitativa que implique una observación minuciosa en el contexto natural donde se dan esas interacciones y comportamientos. Al mismo tiempo, un método que posibilite una comunicación permanente con los sujetos a estudiar, bien sea de manera directa o indirecta, para conocer sus percepciones y concepciones sobre unos fenómenos o acontecimientos. Ya que la realidad que se vive en el ámbito educativo es algo que se reflexiona, se construye y reconstruye permanentemente, y que son las personas y sus actos las que le confieren significado a esa realidad, la investigación de carácter cualitativo es una opción conveniente y oportuna para esta investigación. Como afirman Campo y Restrepo (2002)

> La investigación de corte cualitativo reconoce que la realidad se construye por los individuos al interactuar en su mundo social y se centra en comprender el significado que la gente ha construido; es decir, en reconocer cómo hacen sentido de su mundo y de las experiencias que tienen en él (p.86)

En este orden de ideas, los métodos cualitativos son los que mejor se ajustan a estas necesidades, ya que un método cualitativo de acuerdo con Flórez (200):

> Permite comprender racionalmente la vida, la cultura, la acción y el acontecer humano sin reducirlo a la simplicidad mecanicista, sin suprimir al sujeto, sin negar la multiplicidad de perspectivas teóricas, ni la multiplicidad de lenguajes que caracterizan al ser humano, contextualizado y en interacción permanente con el horizonte de sentido de los demás (p.9)

Así mismo los métodos cualitativos en sus diferentes formas, permiten explorar el contexto estudiado para lograr las descripciones más detalladas y completas posibles de la situación, (Bonilla-Castro y Rodríguez, 1997), en este caso, la resignificación de conocimiento matemático escolar en el ejercicio de la práctica de modelación. En esta investigación, el método que se ajusta a los intereses y necesidades de la investigación está orientado hacia el método etnográfico, sin que sea una delimitación precisa y absoluta y por lo mismo algunos elementos de la ingeniería didáctica serán tenidos en cuenta para el análisis de la información. El método etnográfico permite una descripción o reconstrucción analítica de escenarios y grupos culturales que permite recrear al lector las creencias compartidas, prácticas, artefactos, conocimiento popular y comportamientos de un grupo de personas (Goetz y Lecompte, 1988).

Lo que se pretende es registrar y analizar con el mayor detalle posible las interacciones que se presentan (en el interior de los equipos, entre equipos y de todo el grupo) y cómo éstas favorecen la resignificación de un saber matemático en este caso de la ecuación diferencial que modela el fenómeno de enfriamiento y no simplemente hacer una descripción de dichas interacciones y acontecimientos.

En la misma línea de trabajo de Arrieta (2003), la intención de la realización de esta práctica es establecer las condiciones de contexto necesarias para generar un escenario argumentativo y discursivo (en la clase de matemáticas) en el cual estudiantes y profesor, como un grupo humano, y de forma interactiva construyan argumentos, establezcan conjeturas, explicaciones y creen herramientas (los modelos) y significados a partir de la interacción con un fenómeno del mundo real.

5.2 Escenario, actores y materiales

En la realización de la actividad experimental, el escenario o contexto para su desarrollo fue el laboratorio, en vista de la facilidad y acceso a los materiales y recursos disponibles para la puesta en escena. La asignatura escogida fue ecuaciones diferenciales para estudiantes de ingeniería. El escenario juega un papel fundamental en la práctica de modelación, pues como afirman Cantoral y Farfán (2003) de lo que se trata es de que el saber producido como fruto de la investigación sea un saber ajustado a la práctica y no un saber elaborado desde la teoría de quien investiga.

Según Moschkovich y Brenner (2000, en Ochoviet y Oktaç, 2010), el conocimiento es socialmente construido y negociado en la práctica y por esto, es importante considerar el contexto en el que se produce el aprendizaje y el escenario natural donde se da ese aprendizaje: la clase de matemática. En este caso, la clase de matemáticas se asume como un espacio en el que estudiantes y profesor, alrededor de un saber matemático, se encuentran en determinadas circunstancias y en el que las interacciones presentes sirven como puente de comunicación entre unos y otros, independientemente del espacio físico.

Para la realización de la práctica de modelación se seleccionaron dos grupos de la asignatura ecuaciones diferenciales (ver contenido temático en el anexo 4) de dos instituciones diferentes. La selección de esta muestra se basa en el hecho de que se han concebido, al menos es una idea generalizada en las instituciones de educación superior, los cursos de ecuaciones diferenciales como los que se acercan más a la modelación de fenómenos físicos y a la aplicación de las matemáticas a otras áreas de conocimiento, sobre todo en las carreras de ingeniería y sin embargo en estos cursos, al menos en las instituciones investigadas, no hay evidencia de la realización de actividades experimentales que hagan parte de prácticas de modelación.

Lo que se quiere mostrar es que la práctica de modelación en la matemática escolar conduce a la emergencia de elementos que evidencian la resignificación, en este caso, de la ecuación diferencial mediante las interacciones que promueve entre los sujetos investigados.

El primer grupo (Universidad de Medellín, universidad privada) estuvo conformado por estudiantes de diversas ingenierías (ambiental, civil, financiera y de telecomunicaciones) En este caso el investigador fungió como orientador de la práctica y no el profesor titular del curso. En total asistieron 21estudiantes cuyas edades oscilan entre 18 y 22 años.

El segundo grupo (Instituto Tecnológico Metropolitano, instituto tecnológico de carácter oficial) estuvo conformado por 10 estudiantes de diversas ingenierías y tecnologías (telecomunicaciones, electromecánica) y en este caso el profesor titular del curso orientó la actividad. Las edades de los estudiantes eran entre 20 y 27 años.

Todos los estudiantes ya habían cursado los cursos de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y algunos Física I y Física II. En ambos casos, los grupos se dividieron en equipos de tres o cuatro estudiantes para la realización de la actividad y los análisis respectivos. En ambos casos, la duración de la sesión de trabajo fue de cuatro horas.

El escenario para la realización de la actividad experimental fue el laboratorio y los materiales usados en la práctica fueron: sensores de temperatura (para el primer grupo) y termómetros (para el segundo grupo), pistola de silicona, barras de silicona, computadores, hojas para el registro de cálculos y operaciones matemáticas y demás elementos que se utilizan en una clase normal (pizarra, marcadores, etc.)

5.3 Momentos en el desarrollo de la práctica

Una vez se han definido los aspectos metodológicos para la realización de la práctica, se describe su desarrollo con los detalles más relevantes en su ejecución y con algunos supuestos bajo los cuales se orientan los diferentes momentos. Es importante anotar que el diseño de la práctica de modelación no está centrado en los contenidos o aspectos propiamente matemáticos o tan sólo en las producciones de los estudiantes (Arrieta, 2003), sino que el centro de este diseño está en favorecer las condiciones para el ejercicio de prácticas sociales en las que el grupo (estudiantes y profesor) construyan argumentos, explicaciones y herramientas en la clase de matemáticas que promuevan la resignificación de conocimiento matemático escolar, en este caso la ecuación diferencial lineal de primer orden como herramienta modeladora del cambio.

Los profesores titulares de los cursos ya les habían comentado con anterioridad a los estudiantes que iban a realizar una actividad experimental en clase con la presencia de un investigador y que iban a ser grabados, sin anticipar cuál era la actividad concreta, con el fin de que la presencia del investigador y los dispositivos de grabación, en el momento de la práctica, no generara mayores inconvenientes ni alteraciones significativas en la dinámica normal de la clase.

La puesta en escena de la secuencia se dividió en cuatro momentos (imagen 8), cada uno de los cuales tuvo una intencionalidad definida, y que se articulan en un todo coherente para darle cierto orden y consistencia a la práctica de modelación como tal.

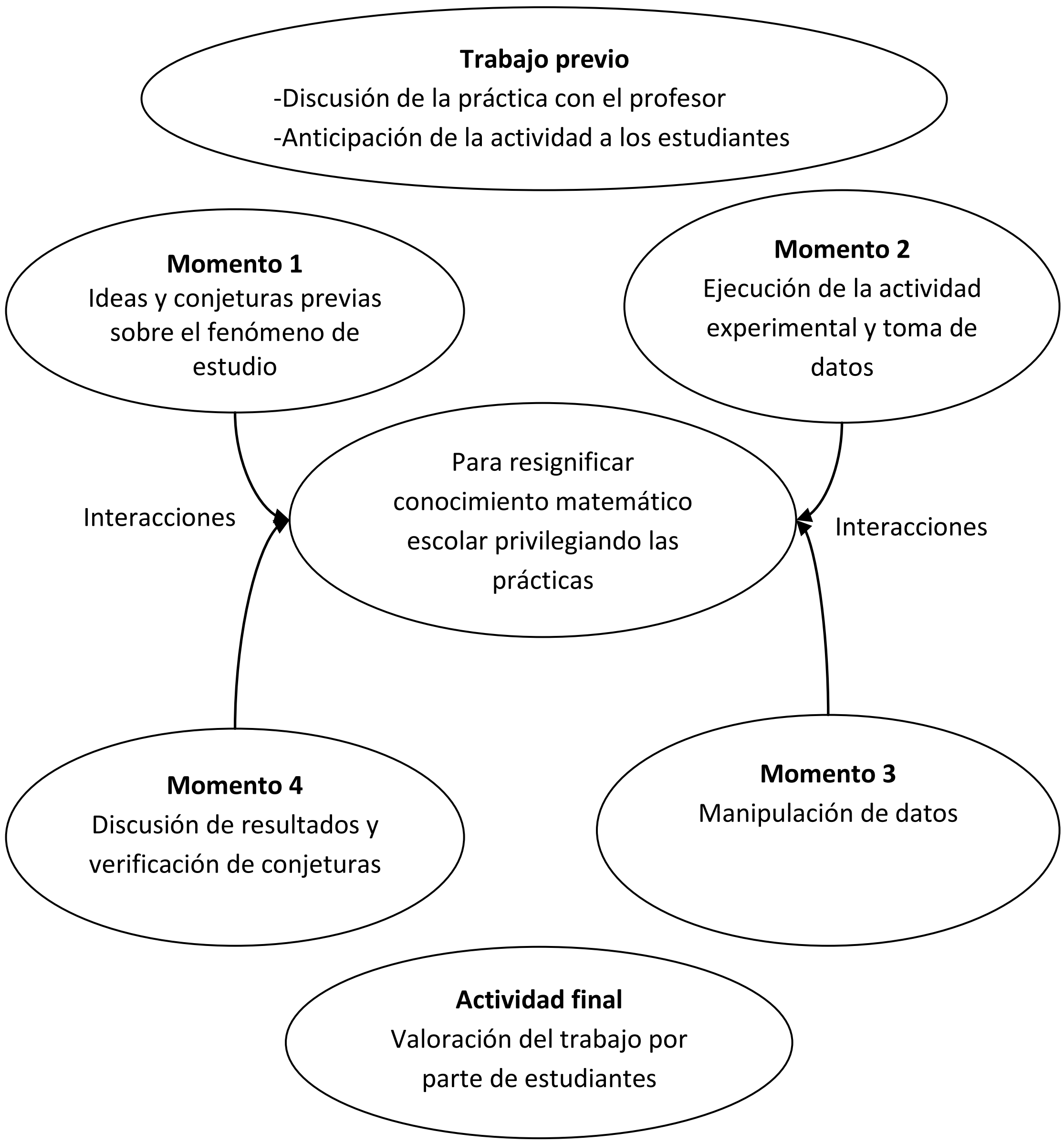


Imagen 8. Momentos de organización metodológica

Momento 1: la motivación y los conocimientos previos

Se presenta la actividad experimental del fenómeno de enfriamiento de los cuerpos y se hace y una contextualización de la misma. Una vez presentada la actividad experimental y se hace una breve introducción al manejo de los equipos, se propone un ejercicio relacionado con el fenómeno de enfriamiento y una serie de preguntas relacionadas con el tema para que cada uno de los grupos las discuta y las responda por escrito, una vez se han establecido acuerdos entre los integrantes. (ver anexo 1).

Se pretende en esta primera parte movilizar los conocimientos previos de los estudiantes para que se atrevan a formular conjeturas sobre el fenómeno de enfriamiento, a establecer vínculos con otras situaciones del mundo real y tratar de plantear modelos mentales sobre el fenómeno de enfriamiento como tal. Es un primer ejercicio que promueve la interacción entre ellos, la argumentación, el establecimiento de consensos y la comunicación, pero también sirve para despertar motivaciones y preparar el terreno para las demás actividades.

Momento 2: la experimentación y la toma de datos

A cada equipo se le entregaron los materiales respectivos y la guía para la realización de la actividad experimental (ver anexo 2). Previamente el profesor dio una explicación general del procedimiento y del registro de los datos. En esta fase es muy importante que los estudiantes participen activamente ya que están frente a una situación real, similar a situaciones que podrán vivir en el desempeño de su profesión. Este es el momento en que la experimentación entra en juego y en el que los estudiantes se convierten en verdaderos actores en la práctica de modelación y serán ellos mismos los que organicen sus equipos de trabajo y los roles que cada uno de los integrantes desempeñará. En el primer grupo se dio una breve explicación del manejo de los sensores y el registro automático de los datos.

Momento 3: Manipulación de datos y procedimientos matemáticos

En este momento, se trata de matematizar los resultados obtenidos en la actividad experimental para intentar construir un modelo matemático que se ajuste a los datos y permita predecir estados futuros. En este sentido es importante resaltar y recordar que lo importante no es que el modelo se ajuste exactamente a los datos o que se trate de encontrar el “mejor modelo”, lo importante son las interacciones que van emergiendo a medida que se desarrolla la discusión en la dinámica misma de trabajo y que permiten la emergencia de elementos que dan evidencia de la resignificación de conocimiento matemático escolar. Tal como lo mencionan Buendía y Velasco (2006) en la realización de una práctica similar:

> Es común que al comparar la nube de datos respecto a la temperatura, ésta no coincida del todo con la expresión analítica obtenida de la ecuación diferencial. El éxito de la práctica no depende de que resulten o no similares, sino de los argumentos y herramientas que se pusieron en juego durante el desarrollo de la misma. (p.25)

Los argumentos, las explicaciones, las conjeturas, los consensos y las herramientas (modelos) son aspectos clave de las interacciones que van emergiendo en la discusión al interior de cada equipo. En este momento, hay una primera construcción o elaboración que tienen que hacer los estudiantes, es decir, deben tratar de llegar a un modelo que se ajuste a los datos y que además sea una posible solución de la ecuación diferencial que plantea la ley de enfriamiento de Newton. En este caso, se hace primero un ajuste lineal y luego se resuelve la ecuación diferencial, utilizando el método de separación de variables. Los detalles se pueden ver en la guía de la práctica (anexo 2)

Momento 4: validación y discusión de resultados

En esta etapa se comparan los modelos obtenidos con los datos reales tomados de la actividad experimental. Esta contrastación de resultados permite identificar debilidades y necesidades de aprendizaje, ideas y conceptos previos correctos o incorrectos, fortalezas y aciertos en el desarrollo de la práctica. De la misma forma, los estudiantes podrán darse cuenta de la importancia que tiene llevar la matemática a otras áreas de conocimiento y cómo se puede resignificar conocimiento matemático escolar a partir de una situación real de modelación. Es el momento de la discusión grupal en la que de alguna manera se establecen consensos, se institucionalizan algunos conceptos y se comparten experiencias de trabajo.

Una vez hecha la discusión grupal (o del profesor con cada equipo), se pide a los estudiantes que evalúen la actividad y comenten brevemente su experiencia tanto individual como de trabajo en equipo para determinar el posible impacto de esta experiencia y sus apreciaciones frente a esta forma de trabajar las matemáticas en la clase y específicamente en el curso de ecuaciones diferenciales (ver Anexo 3)
En el desarrollo de la actividad y en cada uno de los momentos hay una participación directa del profesor, en unos casos más que en otros, dependiendo de los requerimientos de los estudiantes y de los obstáculos que encuentren en el desarrollo de la misma.

5.4 Recolección de información y categorías de análisis

La recolección de la información se hizo con diferentes medios e instrumentos y en un proceso continuo. En los momentos descritos en la sección anterior, los estudiantes deben responder unas preguntas por escrito y consignar sus respuestas en hojas de papel dispuestas para ello. De la misma forma, al final de del trabajo, se pidió a los estudiantes que respondieran un cuestionario (ver anexo 3) de evaluación de lo hecho durante toda la sesión.

Otro medio utilizado lo constituyó la grabación en video del grupo en general y la grabación en audio de las discusiones de cada equipo (en cada equipo había una grabadora). En las sesiones de trabajo, la presencia del investigador (observador no participante, en uno de los grupos) fue necesaria pues existen algunos elementos que pueden no ser registrados ni por la cámara de video ni por las grabadoras de audio y que son de gran riqueza, pues al tratarse de interacciones entre humanos hay ciertos aspectos que solo otro observador humano podría percibir. Este registro se hizo mediante apuntes (notas de campo) que el investigador realizó durante las dos sesiones de trabajo en las que se desarrolló la actividad experimental. En el siguiente esquema (imagen 9), se presenta la disposición espacial para el registro de la información:

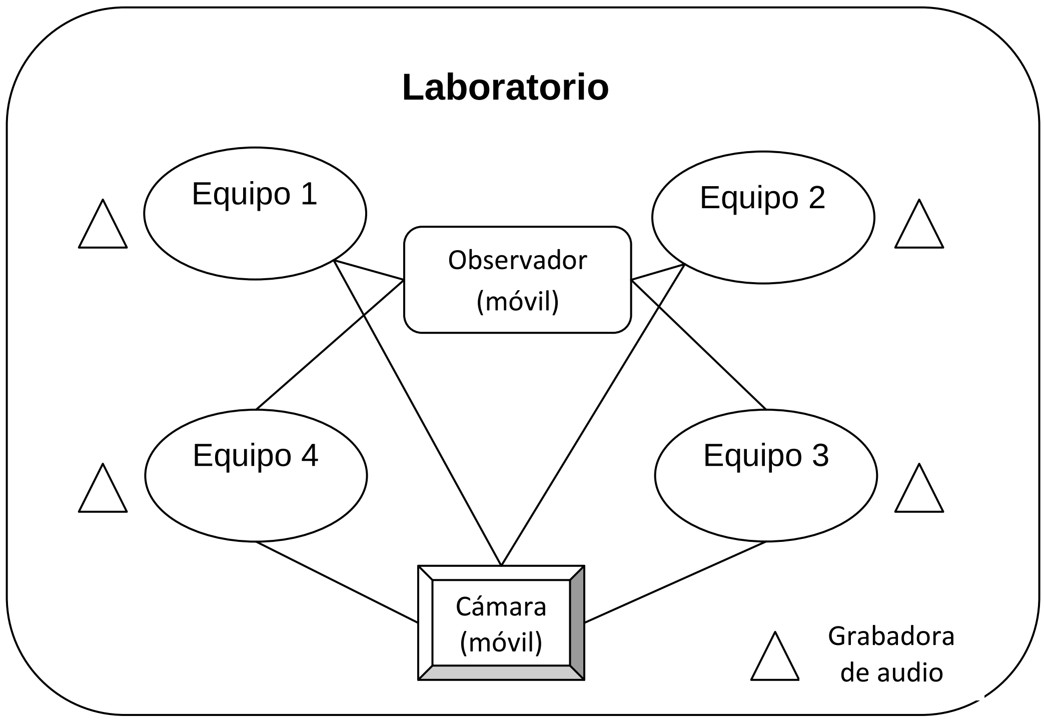


Imagen 9. Disposición de los equipos y registro de información.

Para la grabación en video se contrató personal especializado (un técnico de grabación) y de esta forma el investigador tuvo facilidad de moverse y registrar las observaciones.

Al hablar sobre análisis de información en este contexto, nos referimos no a la cuantificación de los datos, sino al proceso no matemático de interpretación, realizado con el propósito de descubrir conceptos y relaciones en los datos brutos y luego organizarlos en un esquema explicativo teórico (Strauss y Corbin, 2002) que trate de dar respuesta al problema de investigación planteado y al objetivo propuesto. No se trata simplemente de una descripción de lo observado y registrado o de una de una transcripción de diálogos o producciones escritas, sino de una búsqueda de significado y relaciones entre aquello que piensan, dicen, hacen y construyen estudiantes y profesores cuando ejercen una práctica en el contexto de la clase de matemáticas y es en este sentido que el análisis de las producciones tanto escritas como orales constituyen los elementos de análisis.

En este sentido y tal como lo afirma Planas (2004), la caracterización del discurso como práctica social hace que el análisis del discurso devenga el análisis de las acciones de los participantes de un entorno y, por tanto, el análisis del habla y de los textos en tanto que generadores de acciones e intenciones. Así las cosas, al comprender el uso del habla se puede comprender el proceso del discurso a través del cual las personas resuelven lo que dicen y cómo lo dicen en su interacción con otras personas (Planas, 2004).

La información recolectada a partir de las interacciones que emergen del ejercicio de la práctica de modelación, y representadas tanto por las producciones escritas como discursivas los sujetos investigados, serán analizados de tal forma que se puedan identificar elementos que evidencien la resignificación de la ecuación diferencial, en una especie de triangulación a partir de la situación antes, durante y después de la realización de la actividad.

Es importante considerar que no fue fácil establecer e identificar categorías de análisis de las interacciones que sirvieran para todos los equipos de la misma forma, tal como lo menciona Lezama (2003, p. 116) en su investigación sobre reproducibilidad "Cada equipo generó su propia historia de interacciones a partir de las características de los miembros que componen al equipo y el profesor que los acompañó en su trabajo".

Así mismo Candela (1999) al analizar las interacciones que se producen en el salón de clase, descarta la conveniencia de acercarse a la observación y al análisis con categorías precisas, definidas de antemano, ya que esta situación puede pautar la mirada y no permite reconocer los fenómenos que tal vez tengan mayor importancia para los participantes en la interacción. Considerando lo anterior, algunas categorías se establecieron de antemano, pero se fueron enriqueciendo o complementando, a medida que se analizaba la información, el criterio para identificar esos elementos que complementaban esas categorías fue su recurrencia en las respuestas y su articulación con aquellas (categorías) ya establecidas.

A partir de investigaciones anteriores sobre el mismo fenómeno de enfriamiento (Arrieta, 2003; Hernández y Arrieta, 2005; Buendía y Velasco, 2006) y tomando como antecedentes los resultados encontrados en estos trabajos, se pudieron identificar algunas categorías asociadas a la ecuación diferencial que modela el fenómeno de enfriamiento y que pueden dar cuenta del proceso de resignificación, tales como:

- Lo exponencial
- Lo lineal
- La ley de enfriamiento
- La matematización
- El cambio, la variación
- La predicción
- El modelo como herramienta

Para lograr este propósito, la lógica escogida para el análisis de la información es el siguiente (imagen 10):

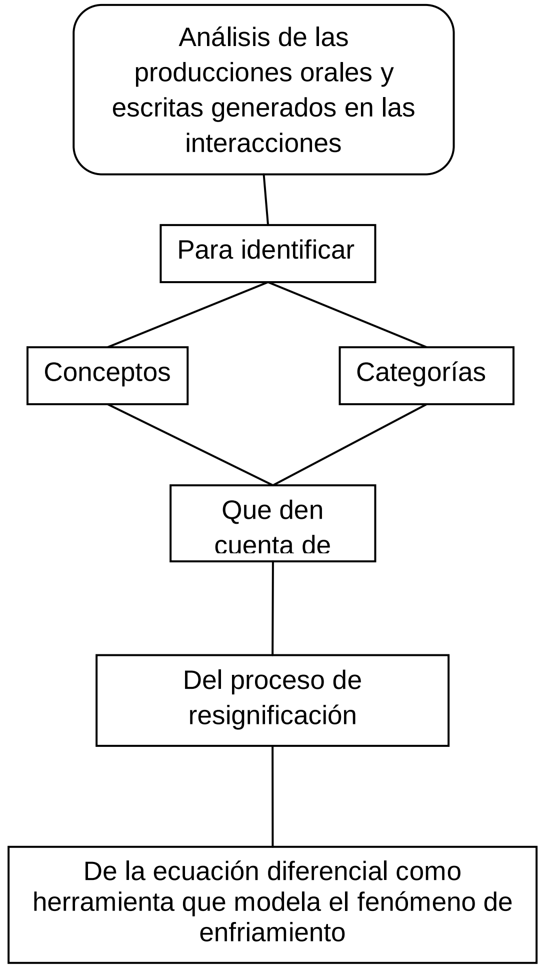


Imagen 10. Esquema de análisis de la información

El orden metodológico seguido una vez se ha recolectado la información consiste básicamente en establecer un análisis a priori o supuestos iniciales sobre la forma en que los estudiantes podrían responder las diferentes preguntas, las puestas en escena de las diferentes actividades y un análisis a posteriori para explicar y mostrar con extractos de diálogos y ejemplos de las producciones escritas de los estudiantes, lo que realmente hicieron y construyeron de manera interactiva, lo cual se hará en el capítulo seis.

Los extractos de diálogos responden a una identificación de lo que Resendiz y Cantoral (2004) denominan secuencias discursivas, es decir, fresas completas y con sentido en las que se pueden identificar elementos que den cuenta de procesos de resignificación. La contrastación entre ambos tipos de análisis se presenta al final como una forma de explicar la secuencia y su desarrollo.

De lo que se trata es de que los estudiantes, con el profesor, al ejercer la práctica de modelación resignifiquen la ecuación diferencial como una herramienta que modela el cambio, para que no perciban ese saber como un saber sin vida y alejado de la realidad. El cómo lo hacen de manera interactiva y mediante las interacciones que surgen, es lo que se pretende descubrir del análisis de la información recolectada mediante los diferentes instrumentos y medios.

Capítulo 6.

Resultados y evidencias

Un relato del observador

Se reúnen por afinidad y de manera voluntaria, no hay indicaciones para reunirse. Leen el anexo y empieza la discusión. Algunos abren sus cuadernos y empiezan a buscar sus apuntes. Buscan en sus cuadernos como si supieran que eso ya lo han visto.

Siguen buscando en sus cuadernos. Algunos empiezan a establecer conjeturas y se imaginan cómo lo harían. Es recursiva la búsqueda del cuaderno. Se imaginan cómo será la situación, plantean algunos supuestos y siguen mirando al cuaderno. Transcurridos aproximadamente quince (15) minutos se nota una mayor actividad sobre todo cuando están analizando el problema del café, hay mayor interacción y discusión.

Equipo #3: Hay liderazgo de un estudiante que plantea diferentes situaciones, muy activa al principio, pero luego en menor grado. Al analizar el problema, siguen mirando en sus cuadernos, tratando de buscar alguna respuesta, es como si trataran de buscar en las matemáticas respuesta al problema.

Al parecer, si no están aferrados a las matemáticas como expresiones de validez parece que no confían en su intuición. Existe una marcada dependencia de sus notas y de las "fórmulas" de su cuaderno, es decir, si no lo explica la matemática, dudan de su validez y de la certeza de sus intuiciones.

Han pasado casi treinta (30) minutos y se nota un ambiente de discusión y aún se nota interés en el problema. El equipo #2 es el primero en terminar en aproximadamente cuarenta (40) minutos.

El último en entregar es el equipo #3. Se nota mayor discusión y análisis, se nota una mayor interacción y una mayor discusión. Todos participan y discuten. Hay puntos de vista diferentes y al parecer hay algunas diferencias.

Al resolver la ecuación diferencial hay cierto procedimiento mecánico que hace que no haya análisis de la ecuación, sino más bien un cierto "activismo" en la solución del problema. Al parecer lo aprendido en ese momento no queda bien consolidado.

No resuelven bien las integrales, hay serias dificultades en la solución de la ecuación diferencial. El profesor debe intervenir frente a algunos equipos para solucionar las dudas

Emergen exponencial, lineal, logaritmo natural. Siguen las dificultades en integración…

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en cada uno de los momentos antes descritos. Se ha tomado solo aquella información que es relevante de acuerdo a las categorías establecidas y que ofrece elementos de análisis significativos, por ello no se considerarán todas las preguntas planteadas en los cuestionarios de trabajo. Para cada uno de los momentos se presenta la pregunta o actividad relevante, los supuestos establecidos, la puesta en escena, las respuestas obtenidas y una breve discusión de estos resultados. Tal como se había planteado en la sección 3.5, más que decir si la ecuación diferencial lineal de primer orden se resignificó o no, lo que se busca es identificar elementos que den evidencia de que efectivamente el proceso de resignificación de ese conocimiento matemático se ha visto favorecido por el ejercicio intencional de la práctica de modelación.

En esta sección y para cada momento se presentará el análisis a priori del diseño, luego la puesta en escena y finalmente el análisis de las producciones de los estudiantes tanto escritas como de extractos representativos de los diálogos grabados. Este análisis se irá presentando en la medida que emerjan respuestas representativas de las categorías establecidas.

6.1 Momento 1: la motivación y los conocimientos previos

Al inicio de la actividad, un elemento que favoreció las interacciones y las discusiones fue la conformación libre de los equipos pues estuvo marcada por las afinidades entre los estudiantes y el grado de confianza o conocimiento entre ellos. Una vez conformados los equipos, el desarrollo de las actividades tuvo una fuerte interacción y motivación a la tarea, pues para la gran mayoría de ellos esta era la primera experiencia que tenían de una actividad experimental en un curso de matemáticas, lo cual fue favoreció el desarrollo de la secuencia

En esta primera actividad (cuestionario con varias preguntas), se presentan diferentes situaciones en las que se aborda el fenómeno de enfriamiento, tanto desde la parte conceptual como desde el análisis de una situación real y cotidiana (anexo 1). En los ejemplos seleccionados, en algunos casos se considera solo la producción escrita y en otros la producción escrita y discursiva, dependiendo de la riqueza y claridad de los argumentos expuestos

Para esta primera actividad los supuestos iniciales que se plantearon fueron:

- El fenómeno de enfriamiento es una situación ya conocida por los estudiantes, al menos desde el punto de vista teórico, dado que en los cursos previos al de ecuaciones diferenciales (y en el mismo curso) se ha trabajado este tema (desde el punto de vista de función y ecuación exponencial) por lo cual se espera que se generen otras interpretaciones y significados en una situación de modelación en clase con este fenómeno y su comportamiento será fácilmente identificable.
- El análisis del fenómeno de enfriamiento se asocia con un cambio de la temperatura en el tiempo de carácter exponencial, para lo cual se espera que lo asocien con esa tendencia y no con otra, pues ya es conocido para ellos pues lo trabajaron antes y en el mismo curso de ecuaciones diferenciales
- Aunque de manera teórica ya han trabajado la ley de enfriamiento de Newton, no tienen los argumentos ni herramientas necesarias para explicar el comportamiento del fenómeno de enfriamiento en la realidad
- Para el nivel y el curso en el que se encuentran los estudiantes (cuarto y quinto semestre de ingeniería) y el acercamiento que han tenido a los modelos matemáticos en diferentes cursos, la noción de modelo y su uso en la predicción del comportamiento de un fenómeno (en este caso de enfriamiento) debe estar presente en los análisis que deben hacer y en sus respuestas.

Esta primera actividad tiene como propósito mostrar que aunque ya existe un conocimiento previo sobre el fenómeno de enfriamiento y aunque se haya trabajado de manera teórica en clase (es decir, como función exponencial y luego como una ecuación diferencial en el mismo curso), no hay un sentido ni una comprensión profunda de este fenómeno que les permita llevar ese conocimiento a una situación real (en esta primera parte un problema teórico sobre enfriamiento) y dar explicaciones, desde ese conocimiento, a un fenómeno externo a la clase de matemáticas.

La puesta en escena.

A continuación se presenta la introducción que hizo la profesora al inicio de la práctica:

Buenas tardes jovencitos. La práctica de hoy consiste en trabajar sobre la ley empírica del enfriamiento de Newton…Como todos ustedes saben, Newton empíricamente ehh… a través de experimentos probó una ecuación diferencial que se le llamó en honor a él, a Isaac Newton, la ley empírica de enfriamiento de Newton.
Entonces, ustedes van a hacer una práctica usando… una pistola de silicona… y a través de esa práctica lo que van a hacer es construir la ecuación diferencial que Newton en esa época probó…

Una vez hecha la introducción los estudiantes empiezan a responder las preguntas del cuestionario de la primera actividad (anexo 1).

Estudiantes respondiendo las preguntas de la primera actividad

Pregunta

Cuando un cuerpo caliente (es decir, su temperatura es mayor que la del ambiente) se deja enfriar, la disminución de la temperatura con respecto al tiempo sigue una determinada tendencia o comportamiento. ¿Qué tipo de tendencia cree *o sabe que sigue el fenómeno de enfriamiento? Marque con una X en la opción escogida*

Las respuestas

Lo exponencial: rapidez de cambio y proporcionalidad:

En las respuestas de los siguientes equipos hay una asociación a la "rapidez de cambio" de temperatura y a la "proporcionalidad", sin embargo al referirse a la proporcionalidad tampoco hay claridad a qué tipo de proporcionalidad se refieren.

Lineal___ Cuadrática___ Exponencial X Otra (cual)____ No puede concluir___

Justifique su escogencia

La rapidez con que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de la temperatura del cuerpo y el medio que lo rodea.

Lineal___ Cuadrática___ Exponencial X Otra (cual)____ No puede concluir___

Justifique su escogencia

Porque la rapidez a la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente.

En las repuestas de los siguientes equipos también se ha incluido parte de las discusiones en su interacción:

Lineal___ Cuadrática___ Exponencial X Otra (cual)____ No puede concluir___

Justifique su escogencia

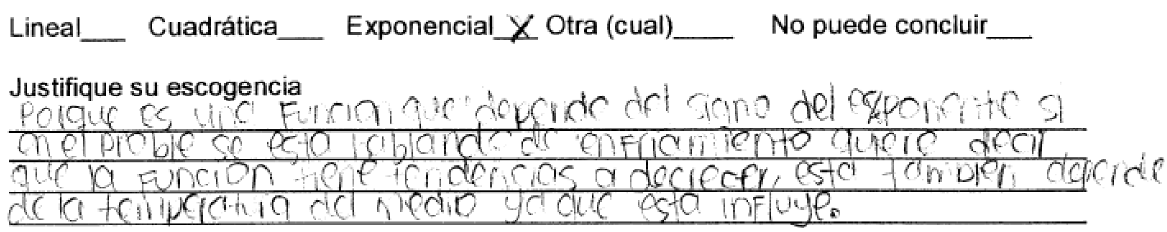
la temperatura de un cuerpo es proporcional a la temperatura del cuerpo y el medio donde se encuentre.

- *E_1: Pero justifique su escogencia…*
- *E_2: Exponencial es pa´ volver a caer algo como a presente, pues, traer algo como a un valor presente*
- *E_3: Es que la lineal no puede ser, porque lineal sería que se mantuviera constante*

- *E_2: Exactamente*
- *E_4: ¿Cuadrática?*
- *E_1: Cuadrática es así, ¿no? (mostrando gráfica)*
- *E_4:* ***La rapidez con que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y el medio que lo rodea***
- *E_1: Oh, esa es que usted…*
- *E_4: No, es del cuaderno de cálculo…*
- *E_1: Claro es que ésta es…*
- *E_4: Diferencia esta temperatura del cuerpo y del medio…*
- *E_1: Es proporcional… pero, ¿de cuál es esta? ¿Exponencial?, no, pero a ver… la rapidez de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la temperatura del medio*
- *E_2: ¿Es que en ese caso sería lineal o qué?*
- *E_1: No, lineal, si es como ella dice, permanecería constante en todo el tiempo*
- *E_2: Pero dicen que son constantes el tiempo y… pues son*
- *E_1: Es proporcional, proporcional, eh… la diferencia de la temperatura pero es el tiempo pues con el tiempo, perdón…*
- *E_3: Ah, el fenómeno de enfriamiento de Newton, ¿dónde está?*
- *E_1: Sí, es que está ahí, pero, pero sabe qué… yo creo que podríamos colocar…*
- *E_4: Lo que pasa es que acá se tomó…*
- *E_1: No, yo, yo, yo digo que no, no cabría ninguna de estas… porque lo que más se asemeja es exponencial, pero exponencial sería que si esta viene disminuyendo va a seguir disminuyendo, disminuyendo, disminuyendo… va para abajo…*
- *E_4: Va a llegar un momento en que va a ser igual al ambiente*
- *E_1: Exacto… entonces más bien colocar… uhmmm…*
- *E_3: ¿Y la cuadrática? (risas)*
- *E_1: Y la justificación…*
- *E_3: Otra ¿cuál, diga cuál? Que es proporcional*
- *E_1: ¿Exponencial es proporcional?, yo creo que de pronto, pero no estoy seguro…*
- *E_4: Pongamos que la temperatura de un cuerpo… (dan la respuesta que está escrita)*

En esta discusión aparece lo lineal y lo cuadrático como posibilidades, sin embargo los mismos argumentos que se generan en el interior del equipo los hace descartarlas y decidirse finalmente por lo exponencial. Se observa que en su discusión expresan lo que efectivamente corresponde al cambio de temperatura con el tiempo, sin embargo no hay seguridad en sus argumentos y llegan finalmente a un consenso para dar la respuesta.

Otro de los equipos propone:



Lineal___ Cuadrática___ Exponencial_X_ Otra (cual)____ No puede concluir___

Justifique su escogencia

Porque es una Función que depende del signo del exponente si en el proble se está hablando de enfriamiento quiere decir que la función tiene tendencias a decrecer, esto también depende de la temperatura del medio ya que esta influye.

Y en su discusión exponen los siguientes argumentos:

- *E_1: Una función exponencial puede ser decreciente o creciente*
- *E_2:* ***Es directamente proporcional a medida que el tiempo avanza****… puede ser proporcional al valor del tiempo*
- *E_3: El enfriamiento tiene que decrecer*
- *E_1: El enfriamiento puede tener temperaturas negativas*
- *E_3: No puede,… si usted calienta una sopa y la deja mucho tiempo la temperatura disminuye…*

Estas respuestas evidencian una cierta uniformidad, muy apegadas a la definición formal. Si bien estos equipos coincidieron en afirmar que la tendencia del fenómeno de enfriamiento es de carácter exponencial, al momento de pedirles una justificación de su escogencia no hubo claridad en sus argumentos.

Lo lineal asociado con el cambio

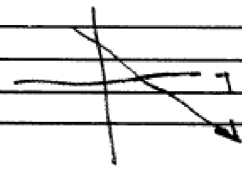
En las respuestas de otros equipos, hay una marcada tendencia a considerar el fenómeno de enfriamiento como un fenómeno lineal. En este caso hay evidencia de que el cambio, cuando se trata de una situación de decrecimiento, para estos estudiantes está relacionado con una disminución que sigue un comportamiento lineal y no de otro tipo. Este aspecto refleja que en este caso prima lo intuitivo más asociado al fenómeno como tal que lo matemático.

Lineal X Cuadrática___ Exponencial___ Otra (cual)____ No puede concluir___

Justifique su escogencia

es una linea recta con pendiente negativa

$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$



Lineal X Cuadrática___ Exponencial___ Otra (cual)____ No puede concluir___

Justifique su escogencia

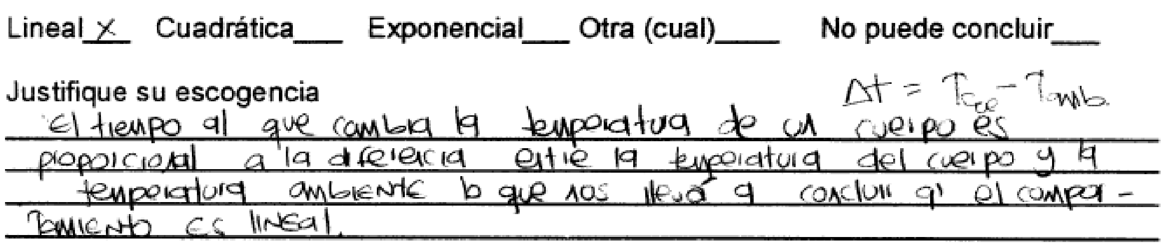
Cuando el cuerpo se enfria, la caida de temperatura es uniforme, lo que varia el tiempo y el medio ambiente.

Veamos para este equipo parte de la discusión alrededor de este tema:

- *E_1: O sea, eso podría ser lineal*
- *E_2: ¿No viene a ser cuadrática?*
- *E_3: El tiempo y el incremento deben ser lineal*
- *E_4: ¿Por qué es lineal?*
- *E_3: Porque es constante… se va enfriando al mismo tiempo*
- *E_1: Si uno dice que es exponencial es que va aumentando con respecto al tiempo o disminuyendo con respecto al tiempo, ¿sí o no?*
- *E_3: Si es lineal, ¿por qué es constante?*
- *E_2: Es lineal*
- *E_1: ¿Cómo lo justificamos?, es lineal porque se puede… porque a mayor tiempo disminuye la temperatura…o sea se comporta igual*
- *E_2: …Igual al tiempo que transcurra*
- *E_4: O sea pero en igual instante de tiempo, por ejemplo en tres segundos disminuye tres grados, ¿si me entiende?*

- *E_1: Pero no tiene que ser eso así tan…*
- *E_4: ¿Por qué no?*
- *E_1: Porque la temperatura , la magnitud, es de las magnitudes más difíciles de controlar, ella no baja… o baja del todo… vos no ves que una persona se muere y… a los 5 minutos ya está helada*
- *E_2: Es uniforme, porque el que varía es el tiempo…*

En la discusión se percibe que la disminución está ligada a una disminución en la misma cantidad (uniforme) o que la relación entre el tiempo y la disminución es la misma (en tres segundos baja tres grados). Esta situación muestra que lo lineal se presenta como una explicación para ciertos fenómenos de los cuales no se dispone de mucha información, pero que por facilidad se puede explicar así.


Lineal X Cuadrática___ Exponencial___ Otra (cual)____ No puede concluir___

Justifique su escogencia $\Delta t = T_{ce} - T_{amb}$

El tiempo al que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente lo que nos llevó a concluir q' el comportamiento es lineal.

La situación anterior muestra que lo lineal y lo exponencial son usados como herramientas (Arrieta, 2003) en el ejercicio mismo de la práctica de modelación y que su significado e interpretación dependen no solo del contexto o escenario donde se ejercen esas prácticas sino también de las significados que ya traen y tienen incorporados los estudiantes y de la dinámica misma de las interacciones que emergen. En este caso, lo lineal está muy arraigado a cualquier variación e incluso esa idea está por encima del fenómeno como tal

Pregunta

¿De qué manera se podría determinar esa tendencia, qué procedimiento emplearía, cómo lo haría?

Las respuestas

La ley de enfriamiento y lo procedimental

En las repuestas de varios equipos, hay evidencia de un conocimiento sobre la ley de enfriamiento de Newton y proponen en algunos casos expresiones matemáticas, otros describen el procedimiento que emplearían para ello:

Esa tendencia se podria determina con el procedimiento de la ley de enfriamiento de Newton.
$(T - Tm) = Ce^{kt}$ → La temperatura esta en función del tiempo.

Con procedimientos matematicos, empleando la ley de enfriamiento de Néwton, lo haria aplicando correctamente los datos obtenidos del experimento que queremos corroborar.

ley de enfriamiento de Newton
derivando la temperatura con respecto al tiempo y siendo proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y del medio que lo rodea.

Algunos procedimientos mencionados por varios equipos:

Tomaria la temperatura maxima y tomaria el tiempo q' demora al llegar a la minima temperatura y ademas tomaria la temperatura ambiente

Se expone un objeto a una temperatura mayor a la temperatura ambiente, durante un tiempo (t) luego se deja en reposo para que su temperatura retome la condicción inicial.

Se tendria que analizar la temperatura con respecto al tiempo, y observar los cambios que ocurren en cualquier instante.

- Se tendria que utilizar equipos de medicion para el analizis de los resultados de las dos variables dadas.

Lo anterior evidencia que saben cómo determinar esa tendencia usando una ley, pero de saber la ley a saber cómo volver ese conocimiento funcional y usarlo en una situación real hay una diferencia considerable, como se verá más adelante en la situación del enfriamiento del café.

Pregunta

¿Qué herramientas matemáticas o conceptos matemáticos emplearía para determinar o identificar esa tendencia o comportamiento?

Las respuestas

La matematización: la ecuación

En este caso hay equipos que describen la herramienta que usarían en términos de una ecuación identificando los elementos que constituyen dicha expresión:

- *E_1: Qué herramientas utilizaríamos para eso…*
- *E_2: Ecuaciones diferenciales*
- *E_3: … la integral… acuérdese que eso resulta de una integral… que es la integral de la variación de…*

$T(t)$: Temperatura del cuerpo T_m: Temp. del medio.

$$\frac{dT}{dt} \propto (T-T_m) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T-T_m) \Rightarrow \frac{dT}{(T-T_m)} = k\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{(T-T_m)} = \int k\,dt \Rightarrow \ln|T-T_m| = kt + C$$

$$e \qquad e$$

$$(T - T_m) = Ce^{kt}$$

Yo utilizaría las ecuaciones diferenciales. Como:

$\frac{dT}{dt} = K(T-T_m)$ donde; $T(t)$ = Temperatura del cuerpo

$\frac{dT}{dt}$ = Rapidez con la que cambia la temperatura del cuerpo respecto al tiempo.

T_m = Es la temperatura ambiente

K = Constante de proporcionalidad.

Lo anterior permite evidenciar que la situación relacionada con el enfriamiento es clara y de hecho saben cuál es la solución, lo que supone que no se presentarían dificultades en la resolución de una ecuación diferencial ni tampoco en la aplicación de lo matemático a una situación real.

El cambio, la variación asociados al fenómeno

En las respuestas de algunos equipos ya se evidencia la inclusión de la noción de cambio o variación entre variables y la aparición del concepto de derivada, asociado con las ecuaciones diferenciales. Si bien no hacen uso de las expresiones matemáticas como tal, son capaces de dar cuenta de ese conocimiento sin la necesidad de escribirlo en términos matemáticos.

Se realizaría la derivada de la Temperatura con respecto a la derivada del tiempo, y así hallar la rapidez a la cual cambia la temperatura del cuerpo en un instante x.

• hacemos uso de la noción de Tasa de cambio que relaciona la variación en el Tiempo de la Temperatura, después integramos a lado y lado de la ecuación y encontramos la ecuación que describe dicho comportamiento

por medio de conceptos tales como la derivada y la Integral, aplicándola correcta, llegaremos a la formula de la ley de enfriamiento de newton, el cual debemos tener presente, la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio.

En estas respuestas hay indicios claros de que el fenómeno puede ser llevado al terreno matemático usando la derivada y que para estos estudiantes, representa un cambio. Así las cosas, hay una aproximación a lo que se pretende resignificar, la ecuación diferencial que modela el cambio de un fenómeno, sea cual sea su naturaleza.

Pregunta

Analice la siguiente situación y trate de justificar el procedimiento escogido

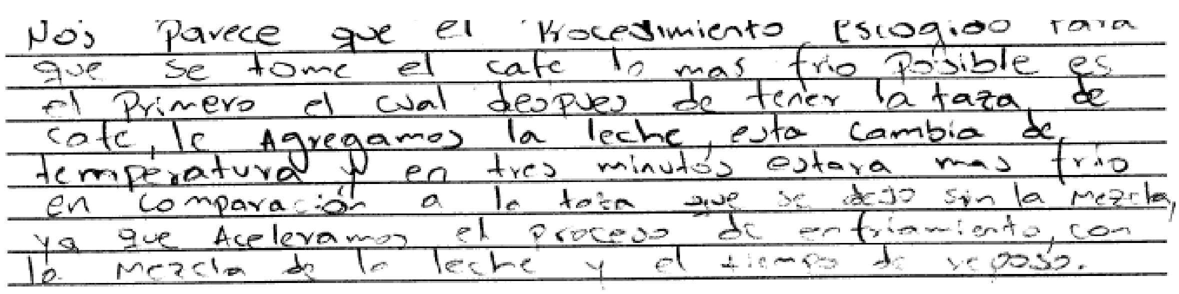
Suponga que le sirven un café, la mitad de una taza, a una temperatura muy alta, digamos 85°C. Usted tiene prisa por tomárselo, pero lo quiere mezclado con leche. A su lado tiene una jarrita con leche a temperatura ambiente, digamos, a unos 20°C. Para enfriar el café puede seguir dos procedimientos. Uno, usted puede añadir la leche al café hasta llenar la taza y dejar que todavía se enfríe otro poco durante unos, digamos, tres minutos. Dos, usted puede dejar que el café sólo en la taza se enfríe durante los mismos tres minutos, añadirle la leche y tomarse el café con leche obtenido. ¿Cómo debe proceder para conseguir que en los mismos tres minutos el café esté lo más frío posible y podérselo tomar sin quemarse? (Tomado de: Física para mentes inquietas. Enfriamiento del café).

Esta situación, cercana a la realidad de los estudiantes, tiene como finalidad promover la discusión y observar si en la solución de la situación los estudiantes consideran lo que ya han respondido sobre las preguntas anteriores y si el conocimiento que tienen del fenómeno de enfriamiento reflejado en sus respuestas les es útil en la solución de esta situación.

Las respuestas

Un intento de matematizar la situación

En este caso todos los equipos seleccionaron el primer procedimiento. Se muestran dos



Nos parece que el procedimiento escogido para que se tome el cafe lo mas frio posible es el primero el cual despues de tener la taza de cafe, le agregamos la leche, esta cambia de temperatura y en tres minutos estara mas frio en comparación a la taza que se dejo sin la mezcla, ya que aceleramos el proceso de enfriamiento, con la mezcla de la leche y el tiempo de reposo.

En el caso de este equipo, aunque inicialmente se habían decidido por esta respuesta luego, a través de una interesante discusión, ponen en duda su elección inicial y utilizan otros argumentos para tratar de explicar el fenómeno. A continuación se transcribe el diálogo sostenido:

- *E_1: Lee el enunciado de la pregunta*
- *E_2: Añadiéndole la leche de una vez*

- *E_3: Sí*
- *E_2: De una…*
- *E_1: Cómo, cómo?*
- *E_2: Añadiéndole de una la leche…*
- *E_4: Si, porque si lo deja enfriar así solo… mientras que si le echa la leche más rápido enfría… porque la temperatura de la leche es más fría*
- *E_2: Porque está chocando… algo caliente…*
- *E_3: Porque si algo está caliente para volver al estado natural si no le han echado nada se demora más, a que usted… haciendo la mezcla… ya va a pasar de un estado más frío… se va a demorar en enfriarse más poco*
- *E_1: A ver*
- *E_2: Pero a tres minutos va a quedar más frío con la leche*
- *E_1: No, no espere, espere un momentico, vea el procedimiento es este… (explica el enunciado)*
- *E_3: Sí así es, pero yo digo que el mejor es el primero. Yo pienso que el mejor es el primero porque acá pasa a un estado más frío*
- *E_2: De una*
- *E_1: Yo creo que es el primero, sí, ¿sabe por qué?, porque inmediatamente cambia… al… pues, no cambia de una aquí pero tiene esos tres minutos ya está un poquito más frío…*
- *E_4: Para alcanzar la temperatura del otro, ¿no?*
- *(Redactan la respuesta)*

Una vez redactaron la respuesta anterior, vuelven a entrar en discusión pues hay dudas en algunos de los miembros del equipo:

- *E_4: Claro que entonces… yo que a veces como que dudo… porque uno si espera tres minutos la leche va a seguir estando*
- *E_2: Fría*
- *E_4: Fría*

- *E_2: Y el café puede que esté frío*
- *E_1: No importa, o sea, yo digo que es que eh… el café para enfriarse o sea en tres minutos no va a lograr estar más frío que el otro que ya se le echó la mezcla y dejarlo tres minutos, ¿por qué?, porque listo, se deja enfriar pero la disminución de la temperatura va a ser según el medio*
- *E_4: Con el ambiente*
- *E_1: O sea con el ambiente… cambia en el momento en que le echemos la mezcla*
- *E_3: Yo digo que va a llegar un punto donde se van a encontrar a los cuatro o cinco minutos van a tener la misma temperatura… pero a los tres minutos yo pienso pues que no*
- *E_1: Es que no, a este sólo se le está aplicando un solo procedimiento*
- *E_4: Vea, las puse a dudar*
- *E_2: Claro que el primero tiene más líquido que… la primera opción tiene más líquido que la segunda*
- *E_4: Ah, pero ¿sabes qué?, después de que le disminuyo, le hago, pues… disminuyo la temperatura, el ya se va estabilizando, ¿no?*
- *E_2: Sí, yo digo que es la primera porque no ensaya pues, uno siempre coge un café y le echa leche y eso le queda muy rico, no, no se pone a esperar a que el café se enfríe*
- *E_3: Pero pues, eso puede ser un experimento que sería bueno hacerlo en la casa*
- *E_4: Pero sabes qué, porque es que la segunda también es posible por lo que ya, le eché la leche y entonces ya se acomoda más a una temperatura ambiente, entonces ¿la disminución de la temperatura es menor o no?*
- *E_2: Lo que pasa es que tenemos que jugar también con la cantidad, mira que es más fácil que se enfríe media taza a que se enfríe una, pero también es más fácil que se enfríe una taza tibia que media taza hirviendo, pues entonces uno no sabe*
- *E_4: No, no vamos con la primera…*
- *E_2: Dejemos la primera, aunque nos da duda, hay que hacer el experimento*
- *E_2: Metámosle cálculo a esto*
- *E_4: Pues sabes qué creería yo, que cuando ya va llegando a una temperatura ambiente ya, ya la disminución es menor, ¿no?*

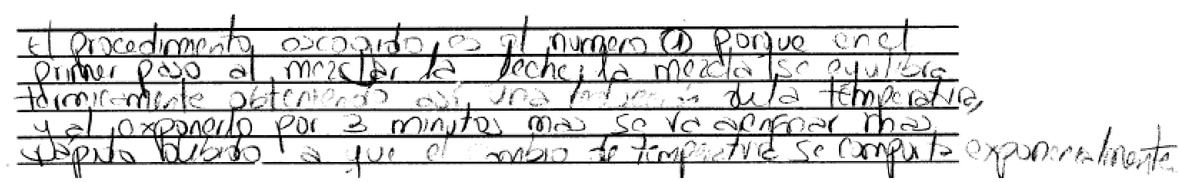
- *E_2: Es que la razón a la que cambia en la primera es súper rápida porque es que usted está pasando, de, de 86° de una le está…*

Se observa en la frase anterior que ya hay una primera aproximación a lo que en realidad sucede con el fenómeno de enfriamiento, hay una nueva interpretación del fenómeno mismo, aunque no sean todavía conscientes de ello.

- *E_4: Y supongamos de 86° le queda en 50°…*
- *E_2: Y le echa la leche*
- *E_4: Y la otra…*
- *E_1: No, yo me inclino más por el primero todavía*
- *E_2: Yo creo que es más fácil el segundo*
- *E_1: El segundo (risas)…*
- *E_2: Bueno, deje esa porque ya la pusimos (risas)…*
- *E_2: Yo digo que la otra también es factible*

La discusión anterior muestra que si se dan situaciones favorables que promuevan la interacción permanente, existe la posibilidad de que los argumentos y las explicaciones que se expongan frente a un problema o situación puedan adquirir nuevas interpretaciones y significados más ricos, lo cual puede aportar elementos al proceso de resignificación.

Otro de los equipos intenta algo similar:


El procedimiento escogido es el numero (1) porque en el primer paso al mezclar la leche, la mezcla se equilibra térmicamente obteniendo así, una [illegible] de la temperatura, y al exponerlo por 3 minutos más se va a enfriar más, [illegible] [illegible] a que el cambio de temperatura se comporta exponencialmente

- *E_2: Si usted espera tres minutos el café ya ha bajado un poquito de temperatura y si le echa la leche ya baja mucho más*
- *E_3: Baja más*
- *E_1: Pero, pero ellos igual se van a igualar en dónde… porque es que esto siempre va a estar ahí*

- *E_3: Ah, si la proporcionalidad es la que determina eso. Digamos que sea así: usted echó la leche y quedó en 60° y espera tres minutos, cuánto vale. La otra, la otra es que usted espere los tres minutos y… el café ya quedó por ahí a 70°, le echa y queda con 20° menos, queda en 50° a los tres minutos, ahí ya sabe usted que le quedó en 50°, el otro es cuánto queda… yo diría que queda más o menos lo mismo. Lo que determina ahí es la proporcionalidad respecto a la temperatura que tiene en ese momento. Cuando usted diga cada tres segundos, se pierden tres grados*
- *E_1: Y si hacemos esto, y si hacemos esto… esto es…*
- *E_2: La derivada de la temperatura con respecto al tiempo*
- *E_3: Habría que entrar a graficar… una gráfica con el tiempo y la temperatura… pero hay que hacer la ecuación para poder saber qué es lo que va a graficar*
- *E_1: Exacto*

Inicia el proceso de solución de la ecuación diferencial usando la separación de variables. Resuelven el ejercicio pero se encuentran con una dificultad

- *E_1: ¿Y esta k quién es?*
- *E_3: Preguntémosle a ella*
- *E_1: Condiciones iniciales, podemos hallar la C, pero quién es k… cierto que es la constante, pero esa constante de proporcionalidad es dependiendo de quién… eso nos lo tiene que dar quién… según lo que estén enfriando, la constante del café ¿cuál es? (risas). Entonces, obviamente se enfría más rápido cuando le agregamos… porque, porque este aquí me va a dar menor*
- *E_3: Son 65° menos 20°, ya te quedan 45° ya*
- *E_1: Aquí de entrada ya tengo 65° le voy a quitar 20° va a quedar en 45°*

Este equipo intenta también llevar la información de la situación al campo matemático pero no logra obtener una respuesta que los satisfaga. Al igual que el equipo anterior, desisten de su intento y su respuesta es la que encuentran más razonable o explicable.

De las respuestas anteriores se observa que el fenómeno de enfriamiento en su interpretación física no está totalmente comprendido por los estudiantes, no hay un significado claro del comportamiento del fenómeno. En este caso el hecho de saber la formulación matemática no es garantía para saber explicar el fenómeno ni su comportamiento. Se puede decir que no hay una comprensión significativa y con sentido del conocimiento matemático escolar referido al fenómeno de enfriamiento, aunque matemáticamente muestren que si lo saben interpretar.

Pregunta

¿Para usted que significa un modelo matemático?, ¿con qué lo asocia?

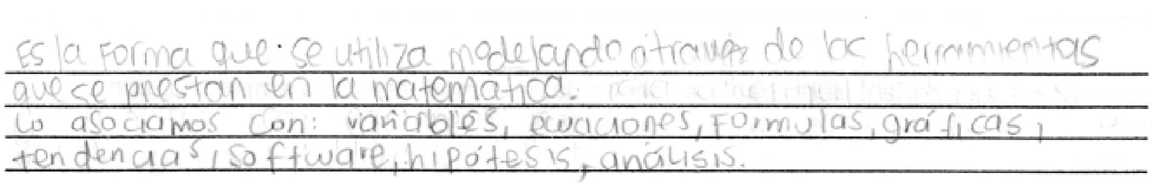
En un curso de ecuaciones diferenciales y después de haber cursado cuatro semestres en la universidad, se esperaría que los estudiantes tengan una noción de lo que significa un modelo y su vinculación con la realidad.

Las respuestas

La predicción asociada al modelo

- *E_1: Solucionar problemas del medio real*
- *E_2: O sea, cómo se dice, como adelantar algo que uno no…*
- *E_3, E_4: Predecir*
- *E_2: Eso y predecir fenómenos que puedan llegar a suceder y… como controlar, como tratar de que no pasen… que puedan prevenir… un desastre…*

En la discusión de este equipo, hay una aproximación a un uso, es decir, la predicción como algo que se desprende del uso de un modelo. Si bien la respuesta que dieron por escrito no refleja exactamente lo que discutieron:


Es la forma que se utiliza modelando a través de las herramientas que se prestan en la matematica.
Lo asociamos con: variables, ecuaciones, Formulas, gráficas, tendencias, software, hipótesis, análisis.

La relación entre el modelo y la fórmula o ecuación

Un modelo matemático es tener un problema específico y llevarlo a una ecuación general

Es Aplicar los conceptos teoricos, en la practica para dar certeza del resultado esperado del problema. Se Asocia con una formula y procedimientos matematicos.

es un análisis cuantitativo que determina de forma teórica soluciones a problemas reales. Se asocia con aplicaciones de los procesos y cambios físicos de la naturaleza.

Para todos los equipos en general un modelo lo interpretan no como una herramienta sino como una manera de resolver algo, es decir, confunden el modelo con parte de la modelación misma. En general hay una asociación del modelo con ecuaciones o fórmulas.

Pregunta

¿Para qué cree que sirve un modelo matemático?

Interesa de esta pregunta saber, los estudiantes de ingeniería investigados, que utilidad le pueden encontrar a un modelo y si dentro de sus alcances está la predicción como una de los usos de estos modelos.

Las respuestas

Un acercamiento a la predicción

para encontrar soluciones prácticas que sean eficientes, prácticas y sirvan para prevenir o dar desarrollo a problemas cotidianos

En esta respuesta, ya hay evidencias de que efectivamente la predicción está dentro de los posibles usos, cuando mencionan “para prevenir o dar desarrollo a problemas cotidianos”. Es en esta situación, y a partir de las interacciones generadas en el interior del equipo que empiezan a emerger procesos de resignificación, en este caso de un modelo.

La explicación de comportamientos

> Sirve para explicar y demostrar el comportamiento de diversos fenomenos.

> Para analizar los comportamientos de los cuerpos a unas condiciones determinadas. (Donde esas condiciones tambien se analizan y hacen parte del modelo matematico)

En estas respuestas, el modelo no es simplemente algo estático o una simple solución de algo, es usado para explicar o analizar posibles comportamientos, algo que da cuenta un significado más amplio y con más sentido.

Pregunta

¿Qué significado le da a una ecuación diferencial? y para que le podría servir?

En esta pregunta se indaga por las concepciones iniciales que tienen los estudiantes sobre lo que para ellos significa una ecuación diferencial y el posible uso que le podrían dar en una situación particular. Se trata de conocer ese punto de partida y de qué manera ese conocimiento matemático puede resignificarse como consecuencia de procesos interactivos fruto del ejercicio de la práctica de modelación.

Las respuestas

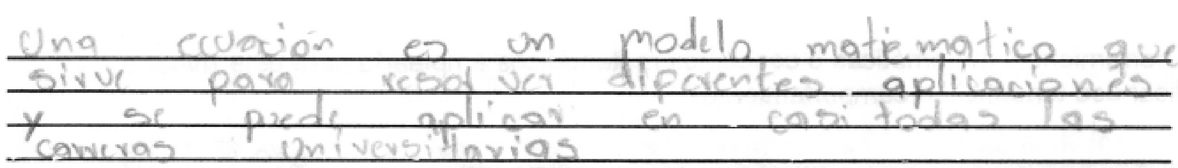
La ecuación diferencial como un modelo

> Es el conjunto derivadas que nos permiten hallar el resultado del funcionamiento o comportamiento de un cuerpo lo elemento. Ej: Maquinaria, cuerpo humano, trabajos especificos, etc...

- *E_2: Es encontrar una derivada*

- *E_1: No, una ecuación diferencial, es que…, es un modelo… es la aplicación de los modelos matemáticos pero con respecto a algo cierto… a ciertas variables pues… que dependa una de otra, si me hago entender*
- *E_2: Una ecuación es encontrar una incógnita, diferencias es encontrar una derivada*
- *E_1: No, por eso, pero es que… o sea uno cuando hace una ecuación diferencial qué es lo que está haciendo, yo estoy encontrando algo con respecto a algo*
- *E_2: jajaja*
- *E_3: Es una operación de… de*
- *E_1: Es encontrar algo con respecto a otra cosa*
- *E_3: Es una… que tiene derivadas, si no tiene derivadas no es una ecuación diferencial*
- *E_1: No, pero una derivada no es una ecuación*
- *E_3: Pero un conjunto de derivadas, …operaciones con derivadas es una ecuación diferencial*
- *E_1: Una derivada es un cambio*
- *E_3: El modelo matemático lo hacemos nosotros*

Este diálogo corresponde a la respuesta dada al principio, sin embargo hay algunos elementos que no aparecen en la respuesta escrita.


Una ecuación es un modelo matemático que sirve para resolver diferentes aplicaciones y se puede aplicar en casi todas las carreras universitarias

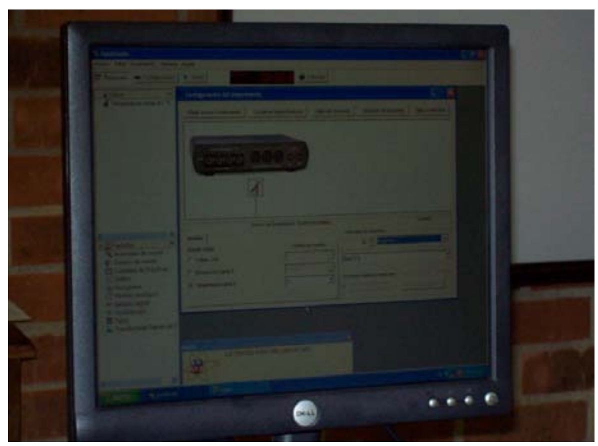
En la primera respuesta hay un intento de acercar la ecuación diferencial a situaciones más reales, pues se asocia con "algo" que permite determinar el funcionamiento o comportamiento de por ejemplo una máquina. En la última respuesta hay una asociación de la ecuación diferencial con el cambio, sin embargo este cambio no está expresado en términos de variables asociados a un fenómeno en particular sino al cambio de un objeto considerado como una totalidad.

6.2 Momento 2: la experimentación y la toma de datos

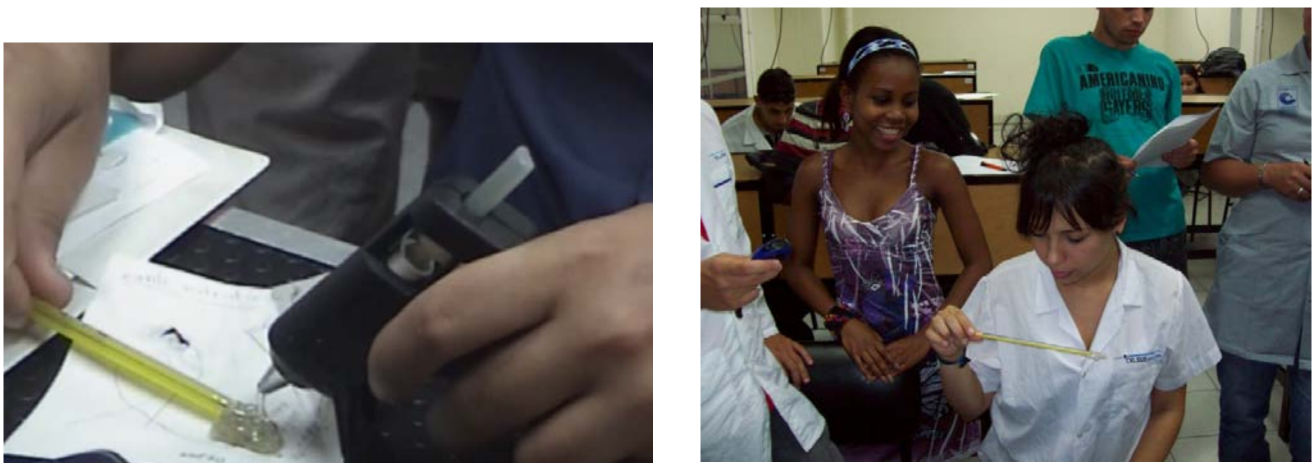
En esta fase, se entregó una guía con la descripción de los pasos a seguir en la actividad experimental (anexo 2). En este caso, la descripción de las actividades varía para el grupo A y B, pues en el primer caso se trabajó con sensores de temperatura y registro automático de datos (los sensores estaban conectados a un PC) y en el segundo caso, se utilizaron termómetros y el registro se hizo manualmente. En esta primera parte de la actividad se realizaron los siguientes pasos:

- Calentamiento de la silicona y registro de los datos (toma de temperatura cada 30 segundos)
- Análisis de los datos registrados en las tablas y respuesta a varias preguntas sobre los datos obtenidos

Es importante anotar que independientemente de los recursos empleados, se plantearon las mismas preguntas a los equipos de los dos grupos.



Grupo A. Uso de sensores



Grupo B. Uso de termómetros

Análisis a priori

Los supuestos iniciales establecidos para esta actividad fueron:

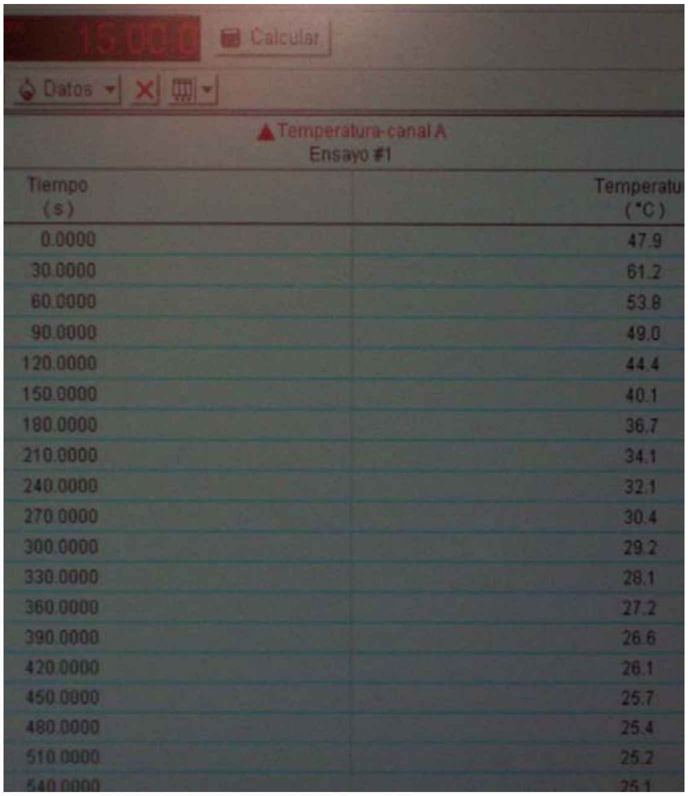
- A partir del análisis de los datos obtenidos, concluyen que el fenómeno no sigue un comportamiento lineal, puesto que la temperatura no disminuye en la misma cantidad con el tiempo (directamente proporcional). Esta situación de alguna forma debe contrastar con lo que algunos equipos habían respondido en la en la primera actividad sobre la tendencia del enfriamiento

- Identifican fácilmente que la disminución de la temperatura es mayor al inicio del proceso (cuando la silicona está más caliente) y que después esa disminución se hace más lenta

El objetivo de esta segunda actividad es acercar a los estudiantes de ingeniería a una situación real en la que pongan en juego no solo lo experimental sino también los conceptos matemáticos previos que tienen y los relacionen en una nueva situación. Se trata, en otras palabras, de que los estudiantes de forma interactiva construyan y resignifiquen conocimientos matemáticos escolares, no solo en este caso la ecuación diferencial lineal de primer orden, sino también y de manera complementaria otros conocimientos relacionados.

La puesta en escena.

Como se había mencionado anteriormente, los equipos del grupo A utilizaron sensores de temperatura adaptados un computador y el registro de los datos fue automático. En el caso del grupo B se utilizaron termómetros y cronómetros para realizar la toma de los datos. En ambos casos se calentó la silicona en la pistola por un tiempo de entre 8-10 minutos, y luego se impregnó en un caso el sensor y en el otro el bulbo del termómetro y posteriormente se procedió a hacer las lecturas y el registro de datos.


15:00.0 Calcular
Datos
Temperatura-canal A
Ensayo #1

Tiempo (s)	Temperatu (°C)
0.0000	47.9
30.0000	61.2
60.0000	53.8
90.0000	49.0
120.0000	44.4
150.0000	40.1
180.0000	36.7
210.0000	34.1
240.0000	32.1
270.0000	30.4
300.0000	29.2
330.0000	28.1
360.0000	27.2
390.0000	26.6
420.0000	26.1
450.0000	25.7
480.0000	25.4
510.0000	25.2
540.0000	25.1

Tiempo t (seg)	Temp. T (°C)
0	119.
30	84
60	64
90	54
120	48.
150	42.
180	38.
210	35
240	33
270	31
300	30
330	29
360	28
390	28
420	28
450	27
480	27
510	27
540	27
570	27
600	27
630	27
660	27
690	27

Tabla de datos Grupo A Grupo B

Esta diferencia en recursos utilizados no mostró ser un factor que disminuyera la motivación o el trabajo en equipo, pues en ambos grupos todos los estudiantes estuvieron muy atentos e interesados en la actividad. Se pudo apreciar que era algo nuevo para ellos en las clases de matemáticas y que esta novedad imprimía mayor interés en la actividad y una actitud diferente frente a lo matemático.

Sobre la tabla de datos que completaron los estudiantes, se hicieron algunas preguntas para orientar la discusión sobre el comportamiento del fenómeno. Se nota en algunos casos la prevalencia de lo "lineal" y en otros de lo "exponencial" pero no hay argumentos sólidos que justifiquen estas escogencias. Veamos algunos ejemplos:

Pregunta

Conclusiones a partir de los datos de la tabla: ¿qué se observa del comportamiento de la temperatura con respecto al tiempo, qué percibe?

Las respuestas

Los datos en las tablas

A continuación se muestran partes de la tabla de registro, en un caso manual (con uso del termómetro) y en el otro de forma automática (con el sensor y el PC)

Una variación (disminución) "normal"

Para algunos equipos, la variación de la temperatura se da como algo normal, no se percibe ninguna característica especial o fuera de lo común, se menciona lo proporcional como algo inherente a este cambio:

> A medida que incrementa el tiempo disminuye la temperatura.
> Alcanza su punto maximo y de ahi decrece la temperatura hasta alcanzar la ambiente

> El tiempo aumenta mientras la temperatura disminoye hasta quedar conctante en un cierto tiempo.

En este caso, aunque los equipos identificaron la disminución de la temperatura con el tiempo, no hubo un análisis mayor ni concluyeron más allá de lo que directamente mostraban los datos.

Una variación (disminución) relativa

Algunos equipos lograron identificar que efectivamente esa disminución es diferente según la temperatura, lo cual les permitió formular una hipótesis sobre el comportamiento del fenómeno:

> Que a mayor temperatura del cuerpo a medir, se da mayor enfriamiento y cuando este disminuye a un 60% de su temperatura, el factor de proporcionalidad es menor, por tanto disminuye mas despacio.

Un extracto de la discusión sostenida por el mismo equipo cuando estaba respondiendo esta pregunta:

- *E_3: ¿A los 30 segundos disminuyó 35° cierto?*
- *E_2: De cero a 30 fue donde más bajó, ya después ya…*
- *E_3: Que mientras esté más caliente más rápido disminuye, cierto*
- *E_2: mmm…*
- *E_3: ¿Cierto?*
- *E_2: Sí*
- *E_4: Disminuye constantemente…*
- *E_2: Ah, lo que decíamos ahorita, con eso de exponencial…*
- *E_3: Sí, sí, porque es que como es una exponencial… eso es proporcional pero no es una proporcional constante sino una proporcional exponencial entonces igual…*
- *E_2: Demás que entre más caliente esté, más rápido…*
- *E_3: Exactamente*
- *E_4: O sea que no, no disminuye constantemente*
- *E_3: No, no, no es que disminuya tres grados cada tres segundos, porque entonces puf se enfriaría en un momentico o constantemente, sino que por ser exponencial… como es la curva (hace gesto de una gráfica exponencial…)… entonces dónde está el mayor, igual tiende a disminuir más rápido*
- *E_2: Y ya, cuando ya estamos más o menos* ***friitos*** *(fríos) ya va disminuyendo más despacio*
- *E_3: Entonces igual, el factor de proporcionalidad es menor a menor temperatura…*

Observamos en este caso que el fenómeno de enfriamiento se va haciendo claro para estos estudiantes y que hay una mejor interpretación y análisis de los datos. Adicionalmente, el estudiante (E_4) era de otro equipo y momentáneamente se incorporó en la discusión sobre el análisis de los datos, lo que significó que su punto de vista cambiara pues pasó de creer que la disminución de la temperatura era constante a darse cuenta que no era así. Esto gracias a las interacciones que se dieron en el equipo.

Otras respuestas similares a la anterior:

la temperatura respecto al tiempo, disminuye
mucho mas rapido cuando esta más caliente
y mucho mas despacio cuando se va enfriando

Cuando empieza a disminuir desde la temperatura maxima, decrementa mas rapidamente, en un tiempo determinado ya alcanzando la temperatura ambiente se hace mas lento

Pregunta

¿Qué tendencia cree que sigue este comportamiento? Justifique

Una vez más se pregunta por el tipo de comportamiento del fenómeno de enfriamiento para saber si los equipos habían cambiado su concepción con respecto a lo que habían manifestado inicialmente.

Las respuestas

Lo exponencial asociado a una disminución

Si bien estos equipos mantuvieron su posición respecto al comportamiento exponencial del fenómeno, al momento de justificar no hubo argumentos o explicaciones que sustentaran su postura:

tiene tendencia exponencial ya que tiene un máximo y disminuye hasta llegar al mínimo.

Es exponencial ya que al Pasar el tiempo la temperatura disminuye a una razón exponencial decreciente.

la tendencia del comportamiento es exponencial ya que la temperatura disminuye Gradualmente.

Lo exponencial asociado a un cambio “brusco”

Otros equipos, en cambio, que en principio habían expresado que el comportamiento del fenómeno de enfriamiento era lineal cambiaron su posición, y tratan de explicar ese comportamiento basados en una disminución “brusca” o “considerable” al principio. Estas nuevas explicaciones dan indicios de que el cambio o la variación para los estudiantes adquirió un nuevo significado y que no siempre está asociado a lo lineal, como lo habían concebido inicialmente.

En un primer instante la temperatura disminuye considerablemente, se observa un comportamiento exponencial negativo, hasta que la temperatura se estabiliza al ambiente. Disminuye mas lentamente a un tiempo mas prolongado

El siguiente equipo, trata de argumentar el comportamiento exponencial del fenómeno de enfriamiento basado en el comportamiento de los datos:

Tiene un comportamiento exponencial porque la temperatura baja bruscamente en cierto periodo de tiempo y luego se estabiliza.

Veamos lo que expresan en su discusión:

- *E_2: Lee la pregunta…*
- *E_3: Que tendencia cree que sigue este comportamiento…*
- *E_1: Exponencial…*
- *E_2: Exponencial…*
- *E_3: Ah un comportamiento… cómo fue que dijimos… cómo es*
- *E_1: Exponencial*
- *E_3: Eso es proporcionalmente, proporcional… exponencial*
- *E_1: Eso es un comportamiento exponencial porque vea, mirá cómo baja eso tan brusco, pum! Brusco, brusco, brusco y ya después se estabiliza*
- *E_3: Sí, sí… ah sí porque él tiende a cero*
- *E_1: Pues llega… pero, pero no queda cero (risas)*

Se acerca una estudiante de otro equipo (E_4)

- *E_4: Y entonces ustedes ¿por qué dicen que es exponencial?… porque aumenta?*
- *E_2: Porque decrecía muy rápido*
- *E_1: Por el comportamiento mire… va disminuyendo, en este caso pero entonces tiene un cambio brusco y después se estabiliza…*

Pregunta

Según el gráfico, ¿qué tendencia cree que sigue ahora el fenómeno y por qué?

Una vez obtenidos los datos, se pide a los estudiantes que los grafiquen en el plano cartesiano y observen la tendencia que siguen. En el grupo A, el mismo computador, conectado al sensor, grafica la nube de puntos y en el grupo B, los estudiantes llevaron los datos a una hoja de cálculo y realizaron la gráfica.

Las respuestas

Lo exponencial asociado a una disminución

Todos los equipos de los dos grupos coincidieron en afirmar que la tendencia que sigue la nube de puntos es exponencial, sin embargo aún en los argumentos que proponen no hay claridad, es como si desligaran la gráfica de los datos numéricos pues tampoco explican considerando los datos. Algunos ejemplos:

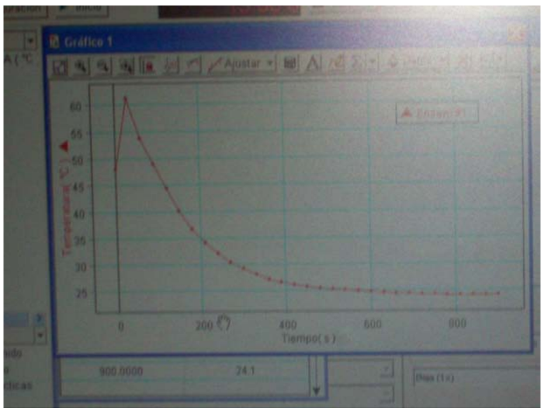
Tiene una tendencia exponencial, Porque a medida que el tiempo aumenta la temperatura disminuye a razón de una función exponencial

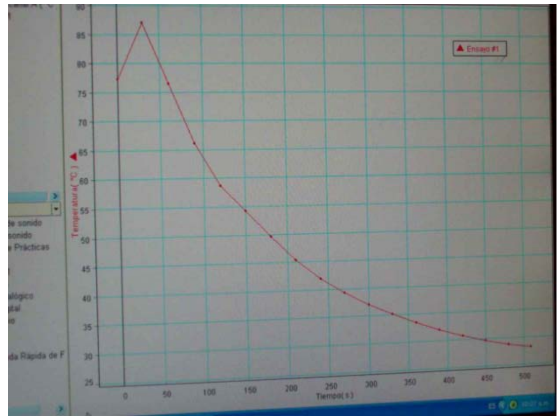
la tendencia fue exponencial, ya que A medida que transcurre el tiempo, la temperatura de la muestra fue disminuyendo Acercandoce a la temperatura Ambiente.

En efecto sigue una tendencia exponencial decreciente, debido a la relación proporcional q' hay entre la temperatura del cuerpo respecto al tiempo afectada por la temperatura del ambiente.

Algunos de los gráficos realizados por los estudiantes se presentan a continuación:

Con el uso de sensores conectados a un PC, la gráfica se hace de manera automática

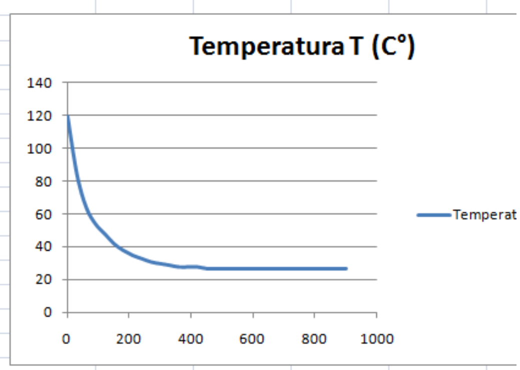




Gráfica de los datos obtenidos con el sensor

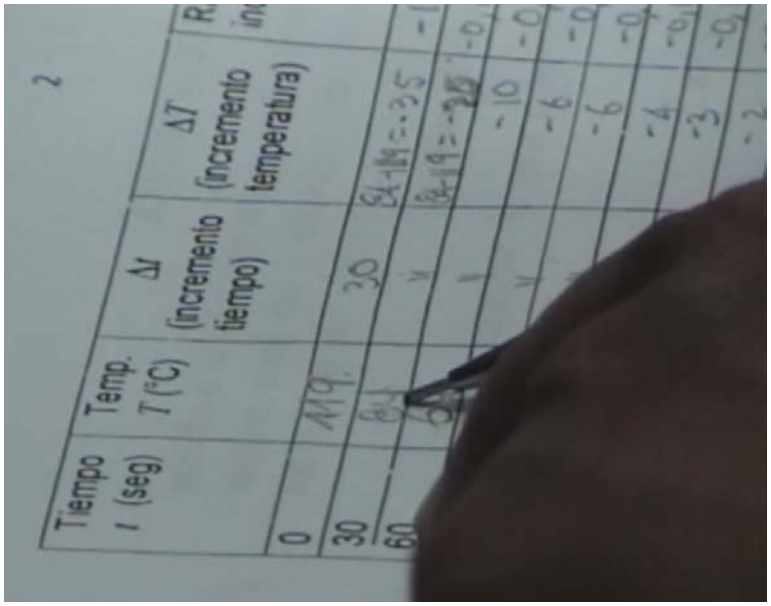
Una vez los estudiantes tomaron los datos manualmente, los llevaron a una hoja de cálculo:

Tiempo t (seg)	Temperatura T (C°)	Δt	Δ	ΔT
0	119	30	-35	-1,16666667
30	84	30	-20	-0,66666667
60	64	30	-10	-0,33333333
90	54	30	-6	-0,2
120	48	30	-6	-0,2
150	42	30	-4	-0,13333333
180	38	30	-3	-0,1
210	35	30	-2	-0,06666667
240	33	30	-2	-0,06666667
270	31	30	-1	-0,03333333
300	30	30	-1	-0,03333333
330	29	30	-1	-0,03333333
360	28	30	0	0



Gráfica de datos tomados con el termómetro y uso de hoja de cálculo

6.3 Momento 3: manipulación de datos y procedimientos matemáticos



Manipulación de los datos

En la segunda parte de esta actividad y como está indicado en la guía (anexo 2), se pide a los equipos que construyan el modelo matemático para el fenómeno de enfriamiento, utilizando los datos obtenidos de la actividad experimental.

En primer lugar se pide que lleven al plano cartesiano los puntos de coordenadas $\left(T, \Delta T/\Delta t\right)$ para los datos obtenidos y que encuentren una recta de ajuste para esa nube de puntos, de tal forma que se llegue a una expresión de la forma:

$\frac{\Delta T}{\Delta t} = mT + b$, para luego resolver $\frac{dT}{dt} = mT + b$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. A medida que los incrementos se hacen más pequeños entonces se puede asumir que la diferencial es precisamente su cambio o incremento.

Análisis a priori

En esta fase de la actividad, los estudiantes deben poner en juego y movilizar diferentes conocimientos matemáticos que se supone deberían saber o manejar. Como supuestos iniciales se establecen los siguientes:

- El ajuste de la nube de puntos a una recta lo harán usando ayudas computacionales y no tendrán dificultad en encontrar las constantes m y b
- Al hacer el ajuste de la nube de puntos, verificarán que la recta de ajuste tendrá pendiente negativa.
- En la solución de la ecuación diferencial no tendrán dificultad y la resolverán usando separación de variables.
- Harán uso de la condición inicial para encontrar el valor de la constante en la integración

Lo que se pretende en este caso es que en el uso de un conocimiento matemático escolar, la ecuación diferencial, en una situación particular los estudiantes de forma interactiva nutran, enriquezcan, consoliden y encuentren sentido y nuevas interpretaciones a ese conocimiento y a otros conocimientos complementarios. En otras palabras lo que se busca es promover procesos de resignificación en la clase de matemáticas mediante contextos de interacción promovidos por el ejercicio de la práctica de modelación.

La puesta en escena.

Una vez han obtenido la ecuación de la recta de ajuste, los estudiantes en sus equipos empiezan el procedimiento para encontrar la solución de la ecuación diferencial que modela el fenómeno de enfriamiento.

Durante este proceso, se ponen en juego diferentes conocimientos matemáticos que se deben dominar para resolver la ecuación diferencial. Sin embargo es en este momento en el que empiezan a emerger diversas dificultades ya que algunos equipos manifiestan haber “olvidado” cómo separar la ecuación diferencial, cómo resolver una integral por sustitución directa, cómo usar las condiciones iniciales para hallar el valor de la constante de integración, etc., es en estos casos que la interacción con el profesor toma relevancia pues se dan orientaciones, se hacen aclaraciones y se muestran alternativas para continuar.

Las respuestas

El ajuste lineal

La explicación del profesor para hacer el ajuste de la recta a la nube de puntos:

Vamos a justificar el delta de la temperatura sobre el delta del tiempo, es decir, la columna 5 de la tabla con respecto a la columna 2.

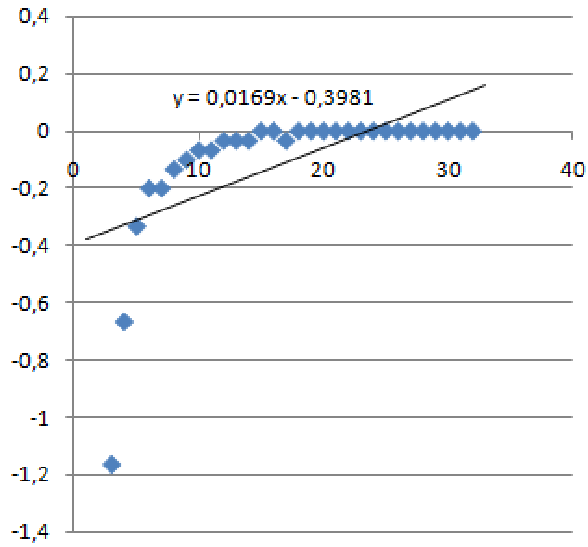
Si nosotros no hubiéramos tomado los deltas cada 30 segundos, sino que los hubiéramos tomado cada 5 segundos o cada 10 segundos, resulta que estos deltas se van aproximando cada vez más a unos diferenciales, entonces después de que tengamos esta ecuación que el programa lo da… nos da la ecuación de la línea recta, entonces éstos (señala en el tablero) los podemos reemplazar… se nos convertirían en un diferencial.

En el caso del grupo A, los equipos no tuvieron dificultad en encontrar la recta de ajuste de la nube de puntos pues el mismo computador, adaptado al sensor de temperatura, les proporcionaba esta recta.

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}0064x + 0{,}1537$$

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{-0.0027}_{m}\,T + \underbrace{0.0529}_{b}$$

En el grupo B, los equipos llevaron los datos a la hoja de cálculo y al hallar la recta de ajuste la pendiente dio positiva, lo cual no correspondía a lo que en realidad estaba pasando, esto sucedió con todos los equipos de este grupo. Sin embargo, ni los estudiantes ni la profesora tuvieron en cuenta este detalle. Veamos:



Ajuste hecho usando la hoja de cálculo

Esta fue la gráfica que uno de los equipos encontró y la ecuación de la recta de ajuste. Lo anterior, influyó para que al final el modelo que encontraron no fuera el adecuado. Veamos la discusión de uno de los equipos:

- *E_1: Mirando nuevamente los datos, hey verdad… sí, eso está decreciendo ¿por qué nos dio positivo a nosotros?…*
- *E_2: ¿En dónde dice usted que nos dio positiva?*
- *E_1: La pendiente, la pendiente nos dio así y nos daba era así*
- *E_3: Pero dio sobre la parte negativa*
- *E_1: Pero igual la pendiente debe ser negativa*
- *E_2: No, porque mire que viene de -35*
- *E_1: Sí*
- *E_2: De -35, -20, -6 … va subiendo (ΔT)*
- *E_1: Está bien…*

En este equipo uno de los estudiantes cuestiona el resultado obtenido y cree que la pendiente de la recta de ajuste debe ser negativa, sin embargo no tiene los argumentos necesarios para justificarlo y cede ante la explicación que le da su compañero

La solución mecánica de la ecuación diferencial

El profesor da una explicación a todo el grupo del procedimiento que deben seguir:

- *P: Lo que vamos a hacer es encontrar una recta de ajuste, sí… si vamos a hacer un ajuste lineal pues lo que vamos a tener es la ecuación de una línea recta, sí*
  Luego de que hacemos el ajuste… Luego de que tengamos la recta, esto (señalando la ecuación)… esto se convierte en qué, ¿qué es esto?, ¿qué es esto que tenemos acá?
- *E: Una ecuación*
- *P: ¿Una ecuación? Y ¿qué clase de ecuación? ¿Una ecuación qué?¿Esta qué clase de ecuación es?, así como está planteada… Es una ecuación…*
- *E: Diferencial (uno de los estudiantes da la respuesta)*
- *P: Es una ecuación diferencial, ¿y por qué es una ecuación diferencial?... Ojo, es una Ecuación Diferencial… cuando tú tienes involucrados diferenciales en una ecuación tienes una ecuación… diferencial*
  Después de que grafiquen estos puntos y encuentren la línea de tendencia, que nos da la línea recta, entonces, van a resolver esa ecuación diferencial y luego. Es una ecuación diferencial sencilla no creo que vayan a tener mucho problema… van a definir una ecuación diferencial que tiene una condición inicial, ustedes son los que van a decidir cuál es la condición inicial para encontrar la constante, ¿no?, después de hacer la integral, entonces empecemos a hacer eso por favor…

El profesor considera que los conocimientos anteriores que deberían saber los estudiantes están bien aprendidos, pues se supone que no tendrían mayor dificultad al resolver una integral por sustitución.

A continuación se muestran diferentes ejemplos del tratamiento matemático empleado en la solución de la ecuación diferencial y algunas de las dificultades encontradas:

$$\frac{dT}{dt} = mT + b$$

$$\frac{dT}{(mT+b)} = dt$$

$$Ln(mT+b) = t + c$$

$$e^{Ln(mT+b)} = e^{t+c} \qquad e^{c} = C_0$$

$$mT+b = C_0 e^{t}$$

$$T = \frac{C_0 e^{t} - b}{m}$$

l 19d EDVS.

En este caso, se resuelve de forma mecánica la integral y no aparece el término m acompañando a la variable t al hacer la sustitución. Con los valores que obtuvieron del ajuste, hacen los siguientes reemplazos y utilizan la condición inicial hasta llegar a la solución final:

$$m = -0{,}0035$$

$$b = 0{,}0856$$

$$T = \frac{C_0 e^{t} - 0{,}0856}{-0{,}0035}$$

con $t = 0$ $\quad T = 102$

$$102 = \frac{C_0 e^{0\cdot 1} - 0{,}0856}{-0{,}0035}$$

$$C_0 = (102)(-0{,}0035) + 0{,}0856$$

$$= -0{,}2714$$

$$T = \frac{(-0{,}2714)\, e^{t} - 0{,}0856}{-0{,}0035}$$

Otro de los equipos hace el siguiente procedimiento:

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}8915x + 44{,}235 \qquad \frac{dT}{dt} = -0{,}0064x + 0{,}1537$$

$$\Downarrow$$

Esta es la gráfica o la recta correcta y lo hubieramos hecho, si no hubiera Ayudado con la gráfica

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}8915T + 44{,}235$$

$$dT = (-0{,}8915T + 44{,}235)\,dt$$

$$\frac{dT}{-0{,}815T + 44{,}235} = dt$$

$$\int \frac{dT}{-0{,}8915T + 44{,}235} = k\int dt$$

$$e^{\ln|-0{,}8915T + 44{,}235|} = e^{tk}\, e^{c}$$

$$-0{,}8915T + 44{,}235 = e^{t}C$$

$$\boxed{T = \frac{Ce^{tk} - 44{,}235}{-0{,}8915}}$$

Se observa nuevamente que hay dificultad al resolver la integral, introducen una constante k, que aparece y desaparece en la solución. Finalmente, cuando quieren obtener el valor de la constante C:

$$47,9 = \frac{C e^{(0)k} - 44,235}{-0,8915}$$

$$47,9 = \frac{C - 44,235}{-0,8915} \qquad C = 47,9(-0,8915) + 44,235$$

$$C = 1,532$$

$$T = \frac{1,53 e^{tk} - 44,235}{-0,8915}$$

$$T = 61,2 \qquad t = 30\text{seg}$$

$$61,2 = \frac{1,53 e^{(30)k} - 44,235}{-0,8915}$$

$$\frac{61,2(-0,8915) + 44,235}{1,53} = e^{30k}$$

$$-6,748 = e^{30k}$$

$$\ln|-6,748| = \ln e^{30k}$$

$$\ln|-6,748| = 30k$$

$$k = 0,064$$

Se observa que no hay claridad en cuanto a la función exponencial ni a las ecuaciones que involucran este tipo de funciones, pues al resolver la expresión

$$-6,748 = e^{30k}$$

no tienen en cuenta que hay una inconsistencia en lo que plantean (el rango de una función exponencial) y sin embargo la resuelven usando un artificio para evitar el signo negativo. Veamos un extracto de la discusión del equipo anterior al momento de resolver la ecuación diferencial:

- *E_1: Esto… esto es, ¿qué, variables separables?*
- *E_2: Sí*
- *E_1: No*
- *E_3: Sí*

Hacen cálculos (uno de los estudiantes los hace)

- *E_1: Ya*
- *E_2: Profe (llama al profesor)*

- *E_1: Ya resolvimos la ecuación diferencial en variables separables, trasladamos este para acá, este para acá, logaritmo natural y nos salió…*
- *P: ¿Qué hiciste? Y este número que hay acá, ¿de dónde salió? Revisen las operaciones… revisen (el profesor habla en voz alta para todo el grupo)*
- *E_3: Mirá, este pasa a multiplicar*
- *E_2: Hagámoslo… me equivoqué*

Toman sus cuadernos y notas, tratando de buscar el procedimiento correcto, hay dudas en el procedimiento…

- *E_2: Pero con esta "te" cómo sería, yo estoy mirando para… ver el logaritmo natural*
- *E_3: Tener te es como tener…*
- *E_2: Porque, esto no se puede hacer*
- *E_1: ¿Pero este logaritmo es para todo esto?*
- *E_2: No*
- *E_3: Ya… resolviendo la ecuación*
- *E_2: Ya solamente tendríamos que hacer la gráfica*

Una vez obtienen la solución de la ecuación diferencial, se pide que grafiquen esta solución para compararla con la curva de datos reales (temperatura contra tiempo). En el mismo equipo continua la discusión:

- *E_3: Trate de graficar los datos de las columnas uno y dos*
- *E_2: Ya*
- *E_3: Y la función de la solución de la ecuación diferencial*
- *E_2: ¿La función de la solución?*
- *E_3: Ahí dice que trate de graficar esto y esto*
- *E_2: Y uno cómo va a graficar*
- *E_1: ¿Cómo va a graficar eso?*
- *E_2: Es que esto es la gráfica de esto*
- *E_3: Comparamos las gráficas*
- *E_2: ¿Les da pena?*

- *E_3: ¿Cómo?*
- *E_2: Les da pena preguntarle al profesor…*
- *E_3: Profe, tenemos una duda…*
- *P: Si*
- *E_3: Para graficar la solución de la ecuación*
- *P: ¿Ya tienen la solución?*
- *E_3: Sí*
- *P: ¿Cuál es la ecuación, cuál es la ecuación que…?*
- *E_2: ¿La total?*
- *P: No, no la ecuación, la solución ya de la ecuación diferencial… no, pero dónde está la ecuación explícita… o sea **T** igual, esa es la ecuación que necesitamos, T= e elevado a la tata…*
- *E_2: Pero **T** es la temperatura*
- *P: T es la temperatura… o sea la ecuación de la temperatura en términos del tiempo…*
- *E_3: mmm.. tenemos que despejar*
- *P: Tienen que despejar a T de ahí, … pero eso lo hacen cuando estén resolviendo la ecuación diferencial*
- *E_2: mmm…*
- *P: Están resolviendo mal es las integrales, ¿por qué?. ¿Cómo están resolviendo esta integral?, ¿por qué la resuelven así?*

Se miran entre sí (risas). El profesor se aleja y dice en voz alta para todo el grupo:

> *P: Mucho cuidado… ecuaciones diferenciales separables… es el nivel más sencillo de ecuaciones diferenciales, ¿sí?, ahí no se deberían, no nos deberíamos equivocar pero nos podemos equivocar, es una ecuación diferencial de variables separables, es algo sencillo, cuidado, cuidado…*

- *E_1: ¿Los separamos, cómo?*
- *E_2: Está mal hecho*
- *E_1: ¿Eso no se puede?*
- *E_2: Hay que hacerla como en el cuaderno…*

Buscan en el cuaderno

- *E_1: ¿Esta **T** no es una constante?*
- *E_2: ¿Esta **T**?*
- *E_1: Sí*
- *E_2: No*
- *E_1: ¿Entonces qué estamos haciendo mal?*

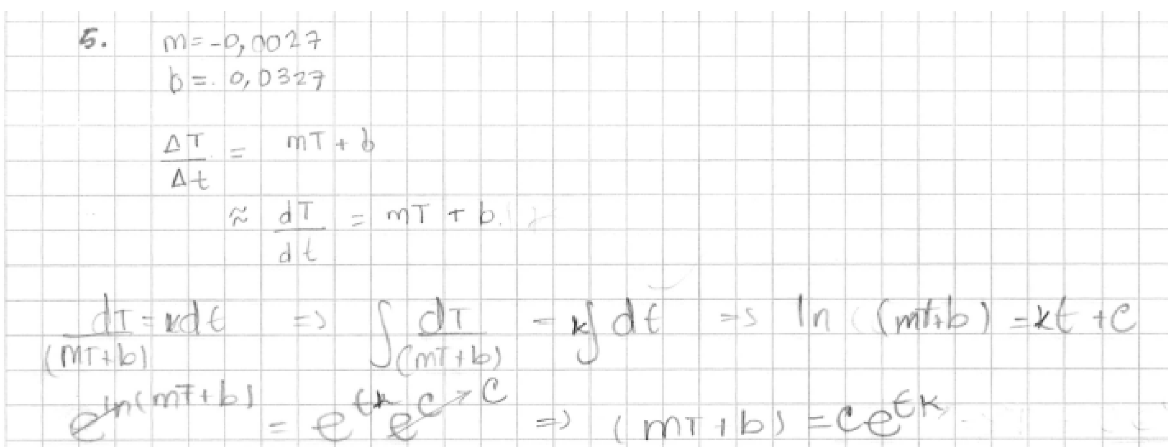
Continúan resolviendo y mirando las notas

- *E_3: Profe, es que se supone que ya despejamos a la **T…** pero entonces reemplazamos el tiempo y … da súper raro*
- *P: mmm… claro y es que si reemplazan T por 60 o 30. e^{60} es algo gigantesco, que creen que está pasando ahí entonces?... ¿algo está pasando con la exponencial o no?*

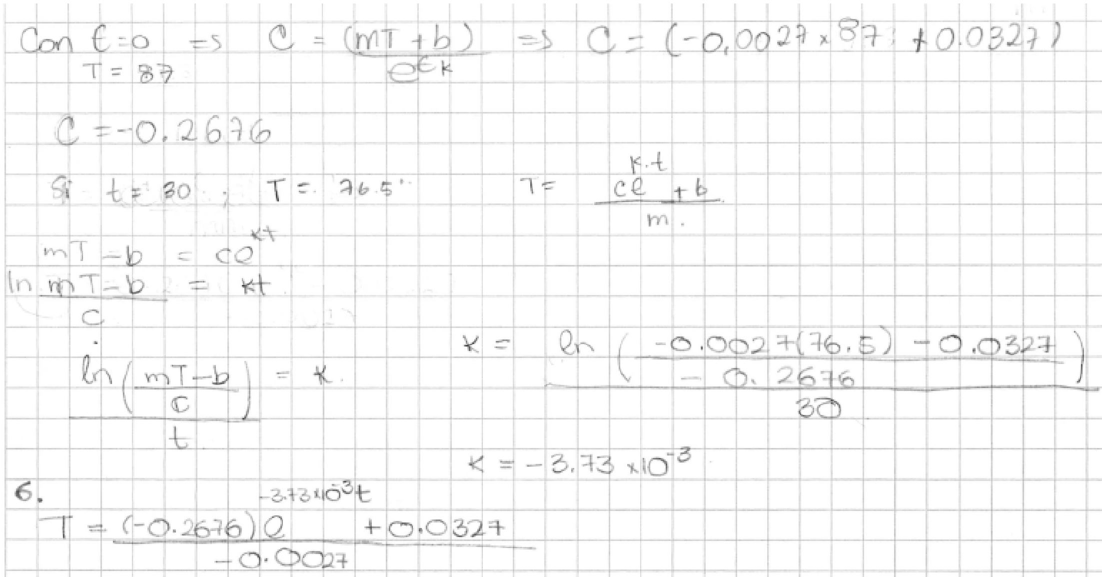
El profesor se aleja nuevamente

El uso de dos condiciones iniciales

Solo uno de los equipos logró encontrar un modelo que se ajustara a los datos obtenidos.



Se observa que introducen una constante k en su planteamiento, sin justificar, y luego lo que hacen es utilizar **dos condiciones** para obtener los valores de las constantes k y C :



Con $t=0 \Rightarrow C = \dfrac{(mT+b)}{e^{tk}} \Rightarrow C = (-0{,}0027 \times 87 + 0.0327)$

$T = 87$

$C = -0.2676$

Si $t = 30$; $T = 76.5°$ $\qquad T = \dfrac{ce^{k \cdot t} + b}{m}$

$mT - b = ce^{kt}$

$\ln \dfrac{mT-b}{C} = kt$

$\dfrac{\ln\left(\dfrac{mT-b}{C}\right)}{t} = k$ $\qquad k = \dfrac{\ln\left(\dfrac{-0.0027(76.5) - 0.0327}{-0.2676}\right)}{30}$

$k = -3.73 \times 10^{-3}$

6. $T = \dfrac{(-0.2676)e^{-3.73\times10^{-3}t} + 0.0327}{-0.0027}$

Este planteamiento es diferente a los demás y se nota un manejo correcto de lo exponencial y de las condiciones iniciales en una ecuación diferencial. Aunque este procedimiento no es el que comúnmente se emplea, lograron resolver la ecuación diferencial y llegar a la solución.

De forma general se puede concluir que las dificultades operativas que tuvieron los equipos estuvieron relacionadas con la integración pues al resolver la integral, lo hicieron de manera casi automática, no hicieron el procedimiento de sustitución y al no hacerlo de manera explícita omitieron, todos, el coeficiente que acompañaba a la variable T (temperatura).

Una dificultad similar encontraron Hernández y Arrieta (2005) en su trabajo sobre el enfriamiento del silicón (actividad experimental que sirvió de base para la secuencia propuesta en esta investigación) cuando los estudiantes estaban resolviendo la ecuación diferencial, tal como lo expresan a continuación

> Es notable como a través de la actividad propuesta llegan a establecer un modelo diferencial para el fenómeno, sin embargo, tienen dificultades para resolver la ecuación diferencial, aún cuando este tema ya ha sido estudiado en Matemáticas III y se emplea uno de los métodos más “simples” (p. 542)

Otros ejemplos:

(6) $y = 0,0169x - 0,3931.$

$$\frac{dT}{dt} = 0.0169T - 0.3981$$

$$\frac{dT}{0.0169T - 0.3981} = dt$$

$$\int \frac{dT}{0.0169T - 0.3981} = \int dt$$

$$u = 0.0169T - 0.3981$$

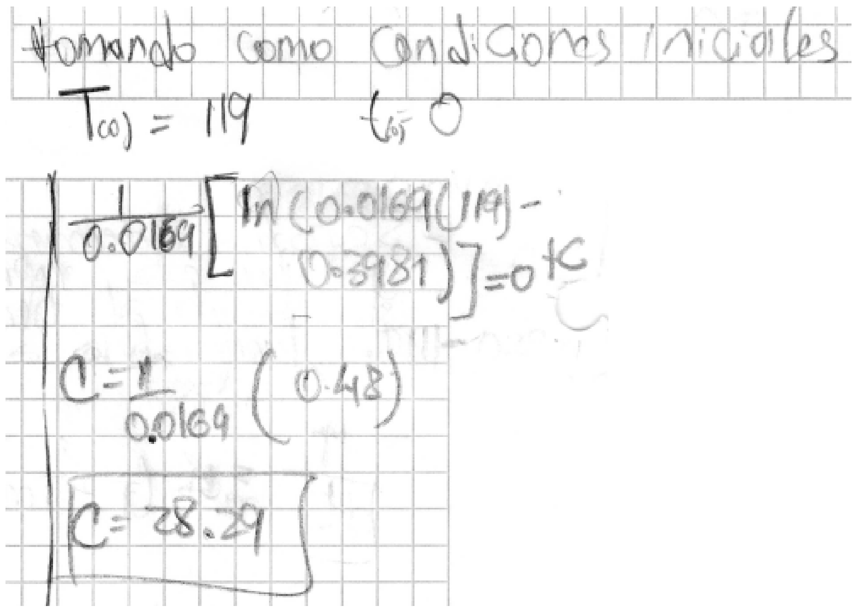
$$du = 0.0169\, dT$$

$$dT = \frac{du}{0.0169}$$

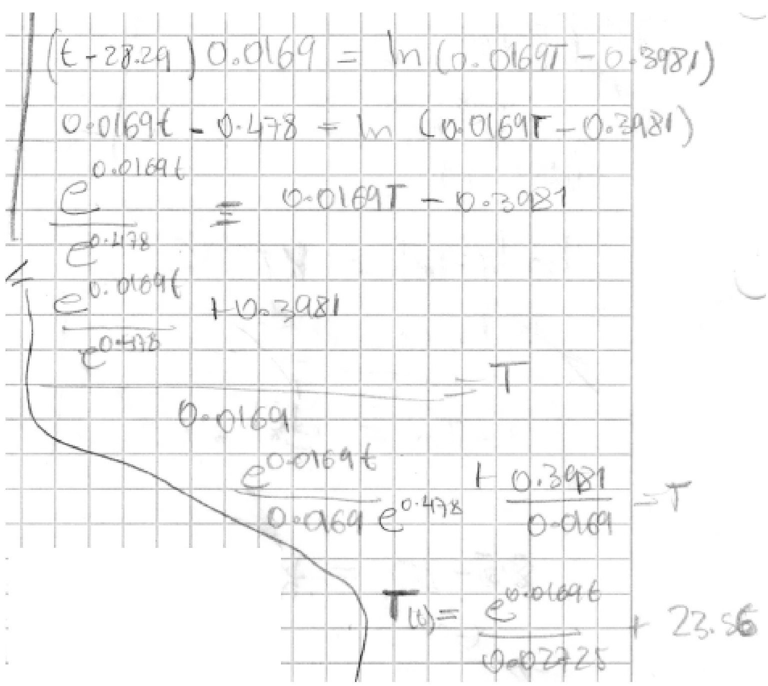
Se observa un manejo correcto de la técnica de integración y llegan finalmente a lo siguiente

$$\frac{1}{0.0169} \ln(0.0169T - 0.3981) = t + C$$

Luego para obtener el valor de la constante C usan las condiciones iniciales:



Finalmente, encuentran la solución a la ecuación diferencial de la siguiente forma:



En la expresión final expresan de manera correcta la temperatura como función del tiempo al escribir $T(t)$

Otro de los equipos realizó el siguiente procedimiento:

$$\frac{dT}{dt} \quad 0{,}0081T+(-0{,}2704)$$

$$\int \frac{dT}{0.0081T-0{,}2704} = \int dt$$

$$U = 0{,}0081T - 0{,}2704$$

$$dU = 0.0081dT$$

$$\frac{dU}{0{,}0081} = dT$$

$$\int \frac{1}{U} \times \frac{dU}{0{,}0081} = \int dt$$

$$\frac{1}{0.0081} \int \frac{1}{U} \, dU = \int dt$$

Para llegar finalmente a la solución

$$\boxed{T = \frac{e^{0{,}0081t} \cdot e^{0{,}0081C} + 0{,}2704}{0{,}0081}} \quad (*)$$

El valor de la constante lo obtienen de la siguiente forma:

cuando t es igual a cero la temperatura obtenida es 168

$t = 0$, $T = 168$

$$168 = \frac{1 \cdot e^{0,0081C} + 0,2704}{0.0081}$$

$$168 \times 0.0081 = e^{0,0081C} + 0,2704$$

$$168 \times 0.0081 - 0,2704 = e^{0,0081C}$$

$$\boxed{1,086 = e^{0,0081C}} \quad (**)$$

Remplazo ** en *

$$T(t) = \frac{1,086 \times e^{0,0081t} + 0,2704}{0,0081}$$

Funcion temperatura en cualquier tiempo

En el caso del último equipo, se tiene lo siguiente

$$\frac{dT}{dt} = 0,005T + (-0,149)$$

$$\int \frac{dT}{0,005T - 0,149} = \int dt$$

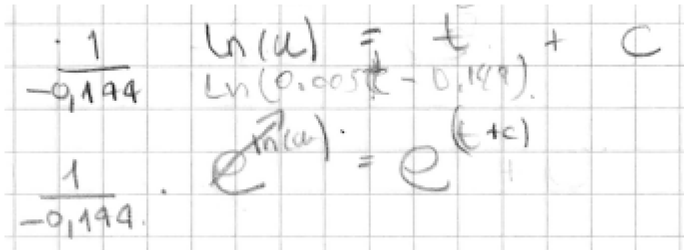
$$u = 0,005T - 0,149 \qquad = t + C$$

$$du = -0,144\, dT$$

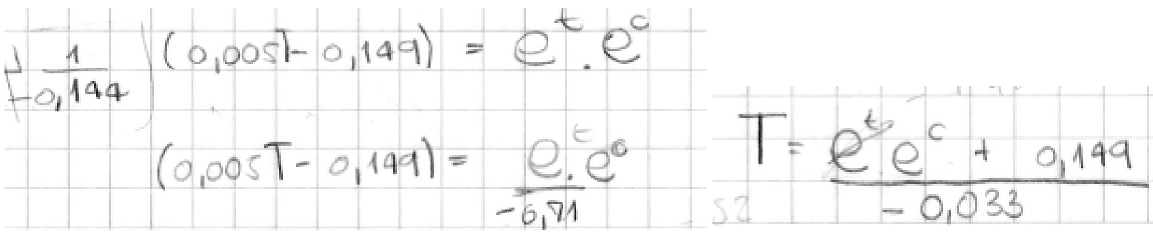
$$\frac{du}{-0,144} = dT$$

$$\int \frac{du}{-0,144\, u} = t + C$$

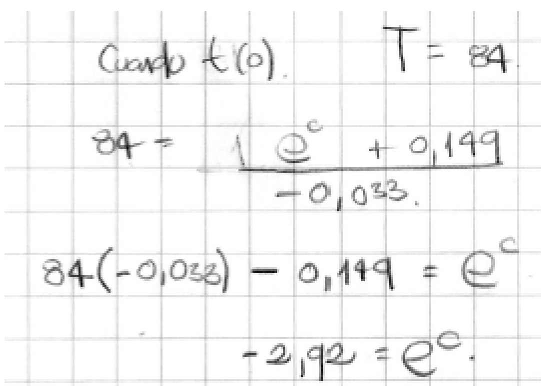
$$\frac{1}{-0,144} \int \frac{du}{u} = t + C$$



Se observa en esta parte que al aplicar la propiedad de la función exponencial natural no tienen en cuenta el factor $1/_{-0.149}$ y por lo tanto no es correcta la respuesta. Sin embargo llegan a la solución



Para hallar el valor de la constante hacen lo siguiente



En este último caso, no hay cuestionamientos respecto del valor de e^C, pues aunque el resultado es negativo, no se preguntan si es posible o no que esta expresión sea negativa.

De manera general, se puede decir que estos no tuvieron dificultades para resolver la integral ni para encontrar el valor de la constante de integración, es decir, estos conocimientos previos estaban bien consolidados. La dificultad radicó en el momento de encontrar la recta de ajuste de la nube de puntos. Tal parece que fue un error de procedimiento, si hubieran analizado un poco más tal vez lo habrían corregido a tiempo. De esta forma los valores obtenidos de las constantes de la recta de ajuste no permitieron que el modelo matemático que modela el fenómeno de enfriamiento correspondiera a la realidad.

Si bien el objetivo principal de la investigación no era encontrar el “mejor” modelo, se percibe cierta inconformidad en los estudiantes al no coincidir los datos reales con los que da el modelo. Sin embargo, esta situación no disminuyó su interés y motivación por la actividad, es más, valoran de manera muy positiva el trabajo realizado, como se podrá ver en las respuestas de que dieron de la evaluación de de todo el trabajo (anexo 3).

6.4 Momento 4: validación y discusión de resultados

En esta parte se hacen una serie de preguntas que tienen como objetivo identificar elementos que den cuenta del proceso de resignificación que se da en cada uno de los estudiantes y en sus equipos, como un colectivo. Las producciones (orales y escritas) que se generan como resultado de las diferentes interacciones, son las evidencias de análisis principales de las cuales se pueden identificar elementos que aporten en el proceso de resignificación de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Los supuestos iniciales que se tuvieron en cuenta fueron:

- Una vez ejercida la práctica de modelación identificarán que la ecuación diferencial modela el cambio en determinados fenómenos y esto los llevará a resignificar la ecuación diferencial y su vinculación con situaciones reales

- Al comparar los datos obtenidos con el modelo con los datos reales, utilizarán diferentes argumentos para explicar las posibles diferencias

- Conceptos como el comportamiento exponencial y la predicción serán elementos que emergerán integrados a la ecuación diferencial, fruto de las discusiones que se den en la dinámica de las interacciones promovidas en el ejercicio de la práctica de modelación

Los equipos empiezan a comprobar que la solución de la ecuación diferencial encontrada si corresponda a los datos obtenidos de temperatura y tiempo: En este punto el profesor hace una aclaración:

> *Muy bien… ¿cuál es la idea?, vuelvo a repetir,* ***la idea no es que tanto el modelo sea el mejor el modelo mejor sea el del equipo 1 o el del equipo 4, digamos que es ver todo lo que está en juego y todo lo que usted tiene que hacer para llegar, ah digamos, a este conocimiento.***

Veamos algunos ejemplos de respuestas:

$$T = \frac{(-0{,}2714)\,e^{(60)} - 0{,}0856}{-0{,}0035} = 8{,}856 \times 10^{27}$$

$$T = \frac{(-0{,}2714)\,e^{(90)} - 0{,}0856}{-0{,}0035} = 9{,}4633 \times 10^{40}$$

- *E_3: Realicé los cálculos, hay una mala, o a mí me dio que la temperatura cuando era 60 segundos era de 8.85 x 10^{27} y ahí nos dio cuanto mire 82° (mirando la tabla)*
- *E_2: ¿A la 27? (risas)*
- *E_3: (risas) ¿Pero sí da tanta diferencia?*
- *E_1: ¿A la 40? (otro cálculo)*
- *E_3: ¿Qué factores cree que inciden en esas diferencias?*
- *E_2: Que abrieron la ventana*
- *E_3: Sí, ¿pero tanta diferencia?*
- *E_1: Uhmmm… ¿Y si los cálculos estaban mal hechos?*

Otro equipo:

$$T(t) = \frac{1.086 \times e^{0{,}0081 \times 60} + 0{,}2704}{0{,}0081} = 236.1$$

$$T(t) \quad 1.086 \times e^{0{,}0081 \times 570} + 0{,}2704 = 13600.33$$

- *P: Esos valores van a dar muy altos (mirando la solución obtenida), ¿cierto?*
- *E_1: Cierto, sí en comparación a estos*
- *P: ¿Por qué creen que van a dar muy altos?*
- *E_2: Porque a te igual a cero sí nos dio lo que si da en la tabla*
- *P: Sí*
- *E_2: Es que nosotros hicimos como una prueba y nos dio*
- *P: Sí, claro, pero y si la prueba la hacen con 30 segundos?*
- *E_1: Ya pasa, ya pasa*
- *P: Entonces, eso da grandísimo, ¿o no?*
- *E_1: Claro, …ya pasa*
- *P: Y, y en esa ecuación, ¿cuál es el término que se hace muy grande?*
- *E_2: El e (en grupo)*
- *P: El e a la te*
- *E_2: "e" elevado a la te*
- *P: Eso, porque ¿qué pasa si t sube 120 segundos?*
- *E_1: Ufff…*
- *P: Eso da gigantesco… ¿entonces qué está pasando ahí? (todos dudan y se miran)*
- *P: En t=0 claro que coincide*
- *E_1: Sí, el error, ¿no?*
- *P: Exactamente, ¿pero qué está pasando con la exponencial ahí… algo está fallando ahí? Se acuerdan ustedes… digamos el comportamiento exponencial que es de la forma e la ca te*
- *E_1, E_2,…: Sí*
- *P: Si se dan cuenta, porque si es e la te, es una cosa gigantesca*
- *E_1: Es que nos está haciendo falta*
- *E_4: Falta la constante*

Los estudiantes se hacen conscientes de que algo estuvo mal en su resolución, sin embargo no logran comprender en qué punto de su procedimiento matemático estuvo el problema. No ponen en duda la toma de datos ni los datos mismos, los asumen como verdaderos y confían en la actividad experimental realizada.

El equipo que había utilizado dos condiciones para resolver la ecuación diferencial, encontró que los datos arrojadas por la solución coincidían con los datos experimentales, lo cual muestra que el modelo construido si responde y se ajusta a los datos experimentales

$$T = \frac{(-0.2676)\,e^{-3.73\times10^{-3}t}}{-0.0027} + 0.0327$$

$$T = \frac{(-0.2676)\,e^{-3.73\times10^{-3}(90)}}{-0.0027} + 0.0327 = 58.73 \checkmark$$

$$T = \frac{(0.2676)\,e^{-3.73\times10^{-3}(30)}}{-0.0027} + 0.0327 = 76.5 \checkmark$$

Tiene Relacion Con los datos de la tabla

Pregunta

¿Qué cree que modela una ecuación diferencial, qué comportamiento, fenómeno o aspecto en general?

Las respuestas

La ecuación diferencial como una herramienta que modela el cambio

una ecuación diferencial modela el cambio de una variable sobre la otra.

Esta respuesta evidencia lo que efectivamente se había supuesto. Si bien este equipo no da más argumentos, muestra una mayor comprensión de lo que ahora para ellos significa una ecuación diferencial. Veamos lo que expresan en su discusión:

- *E_3: Lee nuevamente la pregunta*
- *E_3: Es una razón de cambio, ¿no?, el cambio de una variable…*
- *E_2: Es una regla*
- *E_3: El cambio de una variable…*
- *E_2: De dos variables…*
- *E_3: ¿Es el cambio en el tiempo de una variable sobre otra o es el cambio de una variable sobre la otra?*
- *E_1: Es un cambio en el tiempo*

- *E_2: Es el cambio de una variable sobre la otra… o la relación entre… entre dos variables*

Otro de los equipos expresa:

- *E_1: Lee pregunta*
- *E_2: Pues la variación de una variable con respecto… ¿no? Con respecto a la otra*
- *E_3: Siempre es eso…*
- *E_4: Sí, es verdad, la variación de una variable respecto… de una variable dependiente… ah no, de una variable independiente*

Se puede observar que en este caso se entiende la ecuación diferencial como algo que modela el cambio o la variación, es precisamente ese significado más rico y completo que aporta al proceso de la resignificación de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Otra respuesta:

Modela y evidencia todos los cambios o comportamientos de un proceso determinado. con base en las variables que involucran a todos sus parametros. y variables Dependientes.

El extracto del diálogo:

- *E_1: Un modelo matemático…*
- *E_2: Una ecuación diferencial modela…*
- *E_1: Una ecuación diferencial son variables… determinar…¿qué cree que modela una ecuación diferencial?…la derivada de una variable respecto a la otra*
- *E_1: Lo que pasa es que aquí dice que comportamiento, fenómeno o aspecto en general… son los cambios través…*
- *E_2:¿Qué comportamiento?*
- *E_1: Los cambios que tiene respecto a todas las variables que involucra todo… si son variables , **no todas son tiempo**, no todas son temperatura… son múltiples variables que involucra*

En este equipo también se evidencia la comprensión de la ecuación diferencial como modeladora del cambio y específicamente en un proceso, concepto que no se había mencionado antes. Este concepto, por sí solo, da cuenta de que hay algo que está cambiando, de que se presenta un cambio lo cual muestra que en la concepción de la ecuación diferencial, para estos estudiantes, hay algo adicional que ahora saben sobre la ecuación diferencial.

el comportamiento de las variables, en este caso la temperatura con respecto al tiempo, ademas que conociendo las condiciones iniciales podriamos deducir el comportamiento de las variables en cualquier instante t.

Para este equipo, la ecuación diferencial modela un comportamiento de variables y establece que a partir de unas condiciones iniciales pueden “deducir”, que se puede entender como predecir (al mencionar en cualquier instante), un comportamiento en un tiempo cualquiera. En esta respuesta se evidencia un elemento adicional del proceso de resignificación, en el que la ecuación diferencial adquiere un valor adicional, un carácter funcional y cuyo uso se puede extender a una actividad adicional como lo es la predicción.

Pregunta

Otras dos preguntas cuyo objetivo era tratar de encontrar otras explicaciones o argumentos que permitieran identificar elementos en el proceso de resignificación fueron:

¿Qué significado tiene ahora una ecuación diferencial para usted?

¿A qué tipo de fenómeno en general está asociada una ecuación diferencial?

Las respuestas

La ecuación diferencial como modelo

Es un modelo matematico que muestra una solución general de un # de problemas similares y esta asociada a la ley de enfriamiento de Newton

Representa un modelo matemático el cual nos ayuda a resolver más fácil y rápida y esta asociada a fenómenos como crecimiento poblacional

Un Modelo matematico el cual podemos Utilizar o Aplicar en cualquier campo de Investigación, ya sea de comportamiento o de tendencia.

Representa un tipo de problema matemático que consiste en buscar una función que cumpla una determinada ecuación diferencial

Para los equipos de este grupo, ahora la ecuación diferencial está asociada con un modelo y no simplemente con variables y derivadas como habían respondido antes. Estas respuestas reflejan que hay un significado enriquecido y general, ya no aislado en lo teórico sino relacionado a problemas y situaciones diversas.

La ecuación diferencial como una herramienta

Que es una de las Mejores Herramientas en las areas de Infeniería de cualquier Empresa, ya Que se pueden comprobar y demostrar cada uno de los comportamientos o cambios en los procesos. A fenómenos donde Existan Variables Que dependan de otras.

Para este equipo una ecuación diferencial es una herramienta asociada a un uso, es decir, la ecuación diferencial sirve para algo y es en ese uso que se van a generar procesos de resignificación. Adicionalmente, ese uso está vinculado a una práctica específica: la ingeniería, concepto que no había sido mencionada antes. Este mismo equipo había asociado la ecuación diferencial a procesos de cambio y se mantienen en esta posición, lo que muestra una estabilidad en sus concepciones y argumentos.

La ecuación diferencial en la vida cotidiana

que con esto podemos optener Respuesta de la vida cotidiana

que nos ayuda a analizar en forma general el comportamiento de un proceso

A todos los fenómenos que tengan variables que dependan una de la otra o todas de una

Estos otros equipos asumen la ecuación diferencial como algo que efectivamente tiene un uso y sirve en la realidad: vida cotidiana. Este nuevo sentido que le confieren a la ecuación diferencial muestra que hay un salto entre lo que se concebía antes y lo que se concibe después de realizada la actividad, hay una mayor vinculación de la ecuación diferencial con problemas reales y de esta forma el conocimiento matemático "cobra vida" para los sujetos involucrados.

Pregunta

¿Qué otros fenómenos, situaciones o experiencias cree que se pueden ajustar al fenómeno de enfriamiento?

El proceso de resignificación, en el ejercicio de la práctica de modelación, debe llevar también a que un conocimiento matemático pueda ser vinculado con otras situaciones y problemas, es decir, que pueda salir del aula y ser llevado a otras áreas de conocimiento en variados contextos. Una de las preguntas tenía como objetivo indagar sobre la capacidad de los estudiantes de llevar la experiencia vivida a otras situaciones posibles.

Las respuestas

El modelo del fenómeno de enfriamiento en otros contextos

en la vida cotidiana aplicada a casos como = temp. del ambiente, de la comida, etc. en Situaciones ambientales y experiencias como experimentos químicos y físicos.

Enfriamiento de un Motor, enfriamiento del nucleo de Plantas electricas nucleares, Condensadores de Aire, entre otros se puede Aplicar el Modelo.

- el cambio de temperatura del cuerpo humano
- Procesos de fundición
- Proceso del Plástico (Extrusión - inyección)
- Termo Dinámica

cuando están fundiendo el hierro o todo tipo de metal.

En el caso de este equipo, hay referencia a ejemplos no tradicionales y de alguna forma los vinculan a actividades propias del ejercicio de la ingeniería. Estos ejemplos muestran que para estos estudiantes la experiencia vivida y la práctica de modelación realizada puede ser llevada a otros contextos y problemas que hacen parte de la actividad ingenieril propiamente dicha. Es decir, hay una desvinculación del contexto del aula que permite visualizar el conocimiento matemático escolar asociado a la ecuación diferencial lineal de primer, integrado a otras áreas de conocimiento, hay un carácter funcional de ese conocimiento, resultado del proceso de resignificación.

Pregunta

Para indagar por el impacto de la actividad experimental en cuanto al sentido y significado de una ecuación diferencial después de la actividad, se preguntó lo siguiente:

Después de la actividad experimental, ¿le encuentra un mayor sentido y significado al estudio de las ecuaciones diferenciales de esta forma? Si___ No___ ¿Por qué?

Las respuestas

En los dos grupos, todos los equipos respondieron afirmativamente y entre las razones que mencionaron se destacan:

El modelo matemático nos ayuda a realizar más fácilmente un fenómeno que se observaba como complicado.

Porque se ve que con experimentos reales, podemos aplicar todos los conceptos estudiados por tanto lo podemos aplicar en nuestra vida diaria.

Porque a través de una modelación con herramientas matemáticas y ecuaciones diferenciales podemos implementar una estructura estándar que permita optimizar el tiempo, calidad, ... en un proceso.

Por que de esta manera se entienden mejor ya que se realizan las pruebas y se dan resultados teóricos y prácticos. y se le encuentran un mejor sentido a las ED.

Aunq' los resultados no fueron satisfactorios no quiere que las Ecuac. Dif. no se puedan aplicar en cualquier situación

observamos experimentalmente la teoría vista y analizamos una aplicación real

Hay un consenso general sobre el valor agregado que se obtiene cuando se introduce la práctica de modelación en la clase de ecuaciones diferenciales, pues para los estudiantes la ecuación diferencial toma otro sentido y asumen ese conocimiento ya no aislado y de carácter teórico sino que lo vinculan a situaciones reales fuera del contexto del aula.

Una vez se han recogido los trabajos de los estudiantes, el profesor inicia la retroalimentación.

> *Se supone que son digamos ecuaciones que ya ustedes habían trabajado hace algún tiempo, ¿cierto?... entonces, vamos a corregir, ¿cierto?, y vamos a ver dónde es que posiblemente estuvieron los errores… Dijimos que se iba a graficar $\Delta T/\Delta t$ con respecto a la temperatura y eso nos iba a dar una línea recta. Si ustedes observaban la nube de puntos, sí, pues eso iba a tener una tendencia más o menos de este estilo con pendiente negativa, ¿cierto?... qué sucede entonces… hay algunas dificultades para resolver ecuaciones diferenciales separables, veo que estaban separando de una manera un poco digamos "extraña" entre comillas. Y es esta, es una ecuación diferencial, lo único que hay que hacer, es hacer esto… (el profesor resuelve el ejercicio completo).*

6.5 Los estudiantes valoran el trabajo realizado

Una vez se realizaron las actividades propuestas y se discutió de forma general el resultado de la actividad, se le entregó a cada estudiante un cuestionario en el que se le pidió que valorara la actividad y expresara su concepto respecto a lo vivido en la sesión. La valoración fue muy positiva y todos los estudiantes expresaron su agrado e interés con la experiencia, al tiempo que propusieron que este tipo de actividades haga parte del desarrollo normal de los cursos. Veamos algunas respuestas de los estudiantes.

Pregunta

Frente a las actividades normales de clase, la práctica de modelación que se ha realizado en el grupo le ha parecido:

Mucho mejor___ Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué?____

Las respuestas

Las respuestas se pueden agrupar de la siguiente manera:

- Aquellas en las que se evidencia una transferencia del conocimiento matemático visto en clase a su uso en la realidad y la práctica profesional

Mucho mejor___ Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? Ninguna de las anteriores.
Me parece que es un complemento muy interesante ya que llevamos a la práctica lo visto en clase y lo aplicamos a situaciones que se puedan presentar en la vida laboral.

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? Porque experimentamos la realidad de las e.c diferenciales aplicadas a situaciones fenomenológica,

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? Porque aplicamos los conceptos en la vida practica y así entendemos mucho mejor

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? porque al enfrentarnos a problemas reales de aplicación, entendemos y aterrizamos los conceptos previamente adquiridos en las clases. Además contamos con una HMTA Matemática para futuras intervenciones.

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? Se pudo experimentar directa/ el comportamiento del fenómeno y compararlo con la teoría.

- Aquellas en las que se rompe con el trabajo tradicional de la clase de matemáticas y se llega a una situación de mayor interés y motivación

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? Sale del contexto común de lo que se trabaja normalmente y así tenemos en cuenta como aplicamos la teoria en la practica.

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? Cambia uno la rutina una actividad diferente donde se saca mucho provecho es algo experimental donde uno se da cuenta de los teorias

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? La Academia en casos cuestiona y se vuelve monotona el aula de clase, estos laboratorios, mas aplicaciones hacen despertar interés por la materia y darle sentido a lo que se escribe y evalua en clase.

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? Podemos observar en la Practica el comportamiento e interpretacion de los modelos Matematicos. bueno salir de la rutina, y Mecanica que en muchos casos se convierten en clase

- Aquellas en las que se aclaran y afianzan los conocimientos anteriores generando mayor comprensión

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? De esta manera se afianzan la ideas y se entienden mejor las ED y se aclaran muchas dudas.

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? Porque de una manera practica, dimos claridad a muchas preguntas, y solucionamos problemas cotidianos. plasmando las ecuaciones diferenciales.

Mucho mejor___ Mejor X Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? Podemos ver de una mejor manera las ecuaciones diferenciales que vemos en el aula de clase, haciendo las cosas practicamente se ven y se entienden mejor.

Mucho mejor___ **Mejor X** **Igual__** **Peor__** **que la clase normal**

¿Por qué? Es mucho mas práctico que teórico y me parece que asi hay mejor entendimiento del tema realizado.

Mucho mejor X Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué? De esta manera se puede observar los comportamientos y la aplicacion de la teoria es mucho mas entendible.

Se observa de las respuestas que la práctica de modelación favorece un ambiente propicio para las interacciones y crea las condiciones necesarias para mejores comprensiones y disposición de los estudiantes frente a una actividad escolar.

Pregunta

Enumere algunas ventajas de realizar prácticas de modelación en clases de matemáticas

Al preguntar por las ventajas que encuentran al incorporar la modelación en las clases de matemáticas, vemos que también hay elementos que confirman que la práctica de modelación favorece no solo las interacciones sino también que hay una mejor comprensión de conocimientos matemáticos y se comprende mejor su uso.

Las respuestas

La predicción

En este caso, se puede evidenciar que el ejercicio de la práctica de modelación favorece la predicción como algo que le da valor a la ecuación diferencial. Se puede decir entonces que la práctica de modelación favorece la emergencia de otras prácticas como en este caso, de predicción.

Podemos Predecir o anticipar comportamientos de los fenómenos estudiados, Así como hacemos a una idea previa a la acción que tomaremos.

Otras ventajas

- Se Aprende más Facil el concepto estudiado
- Se socializa mas con los compañeros ideas sobre lo estudiado

Cambiar de sistema, encontrar un ambiente donde se experimenta lo dicho teoricamente.

matemáticas

La ventaja mas importante es ver o evidenciar q' los modelos realmente funcionan, y son aplicables a la vida cotidiana

1. Demostrar que son aplicables a la vida real.
2. Aplicar los conocimientos y a la vez reforzarlos
3. Explorar diferentes maneras de aplicar las matematicas

1. Motivación Academica.
2. Estudia uno por una razón de ser, se puede Aplicar en algo.
3. Se rompe con lo tradicional Clase, Evaluación de Tema y calificación.... todo esto de Forma escrita.

No ver la matemática como solo formulas si no también sacar nuestras propias conclusiones basados en la experiencia.

Las ventajas son significativas ya que en la practica se pueden notar facil los errores y poder corregirlos con mayor facilidad

La ventaja es que se puede analizar, demostrar y concluir mucho mejor la aplicación de las ecuaciones

atematicas

Compartir y/o aclarar conocimientos tanto con los compañeros (a) y la profesora

Dar mayor claridad a las ED. - Aprender a proponer Modelos nuevos. - Demostrar que la Matematicas si es aplicable e importante en todos los procesos de la vida diaria.

Pregunta

De manera breve, comente cual fue su experiencia y qué le aportó esta actividad

Cuando se preguntó a los estudiantes por la experiencia vivida y los aportes de esta actividad, las respuestas indican que fue muy valiosa y que algo se transformó en ellos. De hecho, en estas respuestas se encuentran conceptos que se habían considerado en el análisis a priori. Así mismo se reportan algunas ventajas encontradas por ellos en el ejercicio de esta actividad.

Las respuestas

La modelación para controlar y predecir

Una forma de ver como modelamos un fenomeno fisico cotidiano a el papel y a si lo podemos controlar y predecir sin necesitar de la experiencia

Me enseña que mediante la experimentación, y la aplicación de modelos podemos anticiparnos y calcular lo que va a suceder con los fenomenos que estudiamos

En estas respuestas los estudiantes argumentan que la modelación misma permite otro tipo de actividades como controlar y predecir y que de alguna manera el modelo sustituye la realidad, es decir, que una vez obtenido el modelo, se puede trabajar sobre él y determinar el comportamiento del fenómeno. Esta es una evidencia más de que hay procesos de resignificación, es decir, hay otros significados de la ecuación diferencial cuando se usa para un fin determinado.

Hay una mejor comprensión

Otras respuestas de los estudiantes muestran que la actividad permitió una mayor comprensión y entendimiento de las ecuaciones diferenciales y su aplicación

me Aporta claridad para comprender las ecuaciones diferenciales y su Aplicabilidad

La experiencia fue muy buena y entendi mejor la importancia y aplicación de las Ecuaciones Diferenciales.

Mi experiencia fue muy buena me aporto mayor conocimiento en cuanto a la parte del planteamiento de un modelo

Aportó la experiencia al demostrar que lo aprendido en clase es real y que se aplican a cualquier parte de la vida simulando condiciones y llevandolo a una modelacion matematica

Me aporto de manera positiva ya que vi con más facilidad y rapidez el haber encontrado el modelo matemático que representaba este fenómeno.

Mi experiencia fue exitosa porque por medio de actividades muy cotidianas y apoyadas con el software pude analizar su comportamiento y causa del efecto.

fue una Experiencia interezante puesto que es bueno y nunca lo habia hecho, ver el comportamiento de un modelo matematico en la vida real.

la experiencia fue bastante buena ya que esta ley de enfriamiento nos sirve para plasmarla en muchos casos de nuestra cotidianidad

Personalmente mi aprendizaje fué excelente porque logro comprender a partir de la demostración como funcionan los fenomenos en la realidad.

Lo importante no fue la exactitud del modelo

En el siguiente ejemplo se muestra cómo los resultados finales obtenidos, es decir, la bondad o no del modelo encontrado, no impiden que el ejercicio de la práctica de modelación sea valorado positivamente y que haya aportado mayor sentido a un conocimiento matemático. En otras palabras, los objetos matemáticos no se convierten en lo fundamental, sino que es el ejercicio de la práctica misma y las interacciones promovidas lo que se considera importante, pues permite generar procesos de resignificación:

-la experiencia, no fue excelente, porque no logre ver los resultados pero estuvo bien conocer cosas nuevas y saber que fuimos los unicos que pudimos realizarla y llevarlo a la practica

Pregunta

Finalmente, se les preguntó por el sentido y significado de una ecuación diferencial después de haber vivido la experiencia de una práctica de modelación:

¿Considera que hay ahora más sentido y significado en su concepción de las ecuaciones diferenciales después de la actividad experimental?

Si__ No___

¿Por qué?___________________________________

Las respuestas

Se ve su aplicación

Si X No___

¿Por qué? entiendo claramente como puedo Aplicar todos los conceptos Aprendidos en clase.

Si X No___

¿Por qué? Se entiende mucho mas el concepto.
• Se puede aplicar a la vida diaria.

Si X No___

¿Por qué? tiene demasiada aplicacion a todos las vivencias que tenemos a diario, pero que no los relacionamos a este modelo matematico

Si X No___

¿Por qué? por que EN la aplicación me doy cuenta el aporte tan Grande que dan las ecuaciones para resolver una poblematica con variables que dependan entre ellas misma, o al menos una de la otra.

Se comprende los fenómenos y su comportamiento

Si X No___

¿Por qué? ya entiendo de que hablan y como se compor-tan los fenomenos fisicos

Si X No___

¿Por qué? la parte practica es fundamental para una mejor comprension de los fenomenos.

Si X No___

¿Por qué? porque al uno ver su comportamiento en la vida real y practica es mas facil de interpretar y se vuelve muy interezante ya no es como la simple ecuacion sino que nace una curiosidad por utilizar las ecuaciones para el desarrollo de la practica

Si X No___

¿Por qué? Porque de manera práctica nos enseña que todo fenomeno donde existan variables que dependan de otras, puede ser modeladas y resueltas por medio de esta importante tema matemática.

Se tiene otra mirada

Si X No___

¿Por qué? Demasiado, ya q' algunas veces cuando una materia es tan teorica no se alcanza a tener. Una perspepectiva tan clara.

Si X No___

¿Por qué? El hecho de poder realizar un experimento con ecuaciones ayudo a ver otra vision de las matematicas

Si X No___

¿Por qué? se aprende a mirar este tema con otros ojos y siempre pensado en las experiencias

Sirve para predecir

Si X No___

¿Por qué? se Trata de moldear y predecir un Resultado antes de de Realizar un modelo ya experimental.

Las respuestas anteriores son evidencia de que efectivamente algo se transformó en los estudiantes. Su visón es otra, hay mayor sentido, significado y nuevos usos de la ecuación diferencial ya no solo como un objeto matemático sino como un conocimiento matemático resignificado gracias al contexto interactivo generado por la práctica de modelación.

Pregunta

Observaciones y comentarios

Algunos estudiantes expresaron sus observaciones y comentarios respecto a la actividad realizada y manifiestan que es importante integrar la práctica de modelación en los cursos.

Observaciones y comentarios la actividad es agradable e interesante, es importante seguir realizando actividades practicas.

Observaciones y comentarios

Que este tipo de practicas se realizen siquiera 1 vez al mes, q' todo no sea teoria.

Observaciones y comentarios

Sería muy bueno que se dieran más créditos dentro de la carrera a la parte matemática y se aprovecharan en laboratorios de esta.

6.6 La resignificación a partir de las evidencias:

Para esta investigación se asumió como premisa que en el ejercicio intencional de una práctica de modelación que promueve o favorece interacciones, el uso de un conocimiento matemático (la ecuación diferencial) en una situación concreta (el fenómeno de enfriamiento) aporta elementos a la resignificación de ese conocimiento. La resignificación, fruto de las interacciones al interior de un grupo humano, permite resignificar no solo el conocimiento principal puesto en juego sino otros conocimientos anexos y complementarios que se necesitan para resolver un determinado problema, tal es el caso de lo lineal y lo exponencial, que al resignificarse ellos mismos aportan a la resignificación de la ecuación diferencial. Es en ese momento que un conocimiento matemático escolar se justifica y adquiere sentido para el estudiante y es en el uso intencionado y situado, que ese conocimiento se resignifica en mayor o menor medida, pero siempre en un proceso continuo.

Es importante considerar que si bien lo que se privilegia en esta investigación es el ejercicio intencional de prácticas sobre los mismos objetos matemáticos, no es menos importante el conocimiento matemático que se va a resignificar. Si este conocimiento es complejo, como es el caso de una ecuación diferencial, el proceso de resignificación no es sencillo y las evidencias no se pueden identificar fácilmente. Sin embargo, esa resignificación se puede alcanzar en alguna medida, cuando otros elementos, relacionados con ese conocimiento, también se resignifican y de esta forma se aporta al proceso de resignificación del conocimiento principal. No se debe olvidar por supuesto el contexto.

Lo anterior le da validez a esta práctica, la modelación, como promotora de variadas y significativas interacciones que permiten resignificar los conocimientos anteriores, afianzar los actuales y preparar el terreno para los futuros en una dinámica de construcción, argumentación y discusión colectiva en el seno de un grupo humano. Veamos algunos ejemplos, antes y después de la práctica:

Para la disminución de la temperatura: este equipo asociaba un cambio con lo lineal, antes de la práctica

Lineal X Cuadrática___ Exponencial___ Otra (cual)____ No puede concluir___

Justifique su escogencia

Cuando el cuerpo se Enfria, la caida de temperatura es Uniforme, lo que varia el tiempo y el medio ambiente.

y después de la práctica (a partir de la tabla de datos y de la discusión generada):

Cuando empieza a disminuir desde la temperatura maxima, decrementa mas rapidamente, en un tiempo determinado ya alcanzando la temperatura ambiente se hace mas lento.

¿Qué tendencia cree que sigue este comportamiento? Justifique

deacuerdo a las mediciones se ve un enfriamiento exponencial

Con respecto a la ecuación diferencial, se puede evidenciar que hay una transformación que va de considerar este conocimiento como algo estático y sin conexión aparente con otros dominios, a considerarlo como una herramienta que se puede usar no en el sentido más simple del término, sino en el sentido de integrar a otras prácticas:

Antes.

5. ¿Qué significado le da a una ecuación diferencial? y para que le podría servir?

Es el conjunto derivadas algunas, permiten hallar el resultado del funcionamiento o comportamiento

Después:

¿Qué significado tiene ahora una ecuación diferencial para usted?

Que es una de las Mejores Herramientas En las areas de Ingenieria de cualquier Empresa, ya Que se pueden comprobar y demostrar cada uno delos comportamientos o cambios En los procesos.

Los ejemplos anteriores no se muestran con la intención de afirmar categóricamente que el ejercicio de la práctica de modelación sí resignificó este conocimiento matemático. Lo que se quiere es evidenciar que esa práctica en particular sí aporta elementos que ayudan a la resignificación (entendida como proceso) de un conocimiento y que a la vez ese conocimiento va adquiriendo cierta funcionalidad, en el sentido definido antes. Una cuestión que también se debe resaltar es que ese proceso de resignificación aporta, de alguna manera, a que los mismos estudiantes se vayan haciendo conscientes de ese proceso, lo cual le confiere más valor a la práctica de modelación.

La resignificación de un conocimiento matemático escolar es un proceso continuo y gradual de descubrimiento de nuevos sentidos, interpretaciones, significados más fuertes y estructurados de ese conocimiento, el cual puede ser nutrido por de diversas fuentes y múltiples maneras, en el ejercicio de diferentes prácticas. El proceso de resignificación no se agota en el ejercicio de una sola práctica, al contrario, se pueden generar otras resignificaciones cuando un grupo humano en el ejercicio de otras prácticas, interactúa de manera permanente para dar un uso situado e intencional a un conocimiento y a partir de ahí generar otros procesos de resignificación. Es por ello que entre más ricas y continuas sean las interacciones promovidas por el ejercicio de la práctica de modelación en la clase de matemáticas más consistente será el proceso de resignificación generado alrededor de un conocimiento matemático escolar.

Capítulo 7.

Reflexiones finales

La investigación propuesta, en el marco de la socioepistemología, tuvo como una de sus premisas reconocer la importancia que las interacciones entre sujetos en los grupos humanos en contextos particulares, promovidas en el ejercicio de la práctica de modelación, tienen en el proceso de resignificación de conocimiento matemático escolar. Esta situación de alguna manera hizo conscientes a los estudiantes de que los conocimientos matemáticos efectivamente sirven como base para el entendimiento y solución de problemas en otras áreas de conocimiento y en la misma práctica de su ejercicio profesional, es decir, en otras prácticas de referencia, tales como la práctica de los ingenieros. De esta forma y de acuerdo con los resultados obtenidos, la práctica de modelación sirvió efectivamente al objetivo propuesto de promover contextos interactivos en el proceso de resignificación de la ecuación diferencial lineal de primer orden mediante la actividad concreta del fenómeno de enfriamiento.

Un aspecto importante que se pudo evidenciar de las dos actividades experimentales puestas en escena, es que independientemente de los recursos tecnológicos empleados, la secuencia implementada favoreció procesos de resignificación en un ambiente interactivo. Si bien el primer grupo contó con la ayuda de sensores de temperatura y registro automático de datos y gráficos, y el segundo grupo con termómetros y cronómetros, ésta no fue una variable que influyera de manera importante en los resultados obtenidos, pues en ambos ambientes se percibió una motivación y discusión permanente, así como un trabajo en grupo permanente.

Las interacciones promovidas en el ejercicio de la práctica de modelación y en el interior de cada grupo, permitieron que los estudiantes reflexionaran sobre sus ideas y planteamientos iniciales, de tal forma que mediante argumentaciones y explicaciones pudieran cuestionar su concepción inicial y darle así nuevos y más consistentes significados a un conocimiento. Tal es el caso de un equipo en el que frente al problema del enfriamiento del café (propuesto en el momento 1), modificaron radicalmente su posición inicial como fruto de un ambiente rico en interacciones (ver transcripción de diálogo en la página…)

Las respuestas de los estudiantes permiten concluir que un saber matemático puede comprenderse de una manera distinta a la tradicional, ya no como un conjunto de objetos matemáticos fuera de contexto y sin vida en los cuales los conceptos son lo fundamental, sino como un todo articulado en el que el ejercicio situado e intencional de la práctica de modelación favorece el proceso de resignificación de ese saber vía la dinámica de las interacciones que emergen de esa situación. La modelación como práctica y en el caso específico de estudiantes de ingeniería, es el medio que permite acercarlos a la realidad de su ejercicio profesional y es en el ejercicio mismo de esa práctica en el que las interacciones juegan un papel fundamental al permitir el desarrollo de procesos de resignificación nuevos y con sentido que doten de vida y dinamismo al conocimiento matemático escolar, ya no aislado y desvinculado de una realidad sino integrado y funcional en esa realidad.

Si bien para algunos de los equipos las respuestas del modelo no coincidieron con los datos reales, comprendieron que ese no era el objetivo principal (al menos escolarmente), sino que se hicieran conscientes de esa resignificación cuando ejercían la práctica de modelación y usaban, de una determinada forma, un conocimiento matemático escolar. La resignificación de la ecuación diferencial como una herramienta que modela el cambio vía la práctica de modelación, no se dio en términos de lo algorítmico o procedimental, tampoco de encontrar o descubrir nuevas estrategias más o menos efectivas de resolución. Así, el proceso de resignificación es más valioso en la medida que los sujetos se hacen conscientes de este proceso y lo incorporan e integran en su mente y en su actuar presente y futuro en diferentes contextos y situaciones de uso.

La actitud favorable, dispuesta e interesada de los estudiantes frente a este tipo de actividades y la riqueza de interacciones que se generan, debe ser aprovechada para generar un ambiente propicio de trabajo en la clase de matemáticas para que se den no solo procesos de resignificación intencionados sino también procesos de construcción de conocimiento nuevo en la dinámica misma de las interacciones que se promueven en el ejercicio de la práctica de modelación. Es por ello que se propone que la práctica de modelación sea considerada como un elemento importante a ser tenido en cuenta en el diseño y desarrollo de los programas curriculares de las asignaturas de matemáticas en los planes de estudio en los programas de ingeniería que sirva como fundamento para que los estudiantes puedan abordar prácticas de modelación más avanzadas y de mayor complejidad en los cursos avanzados y específicos de sus respectivas carreras.

En el proceso de resignificación de la ecuación diferencial, los estudiantes le atribuyen otros usos adicionales, de los que se hicieron conscientes en el ejercicio de la práctica de modelación y en las interacciones surgidas en la discusión. Este uso está referido a la **predicción o anticipación**, que se derivada del proceso de solución de la ecuación diferencial que en el ejercicio de la práctica de modelación toma otro sentido y que tal vez no hubieran descubierto si simplemente se limitaran a resolver una ecuación diferencial descontextualizada y en el contexto de una clase tradicional.

En las respuestas de los estudiantes frente a la evaluación de la actividad, la gran mayoría coincide en que hay una mejor comprensión, que hay facilidad en el entendimiento de un conocimiento y sobre todo que hay vida en ese conocimiento. Esta situación crea en los estudiantes una mayor confianza que hace que vean el conocimiento matemático como algo cercano a ellos y cuya comprensión es posible, pues el ambiente creado es favorable y propicio para que se desarrolle un proceso de enseñanza y aprendizaje realmente efectivo y dinámico.

Al escuchar los diálogos fruto de la interacción en el interior de los equipos, se pudo percibir que existen momentos en que la discusión se convierte en un problema de lenguaje, de no tener un lenguaje matemático o científico común que permita que los estudiantes expresen sus ideas de una manera clara, fluida y argumentada generando así espacios de discusión, construcción y resignificación propicios. En estas interacciones se crea un espacio muy apropiado para la intervención didáctica, pues es posible descubrir errores conceptuales y procedimentales, y porque no actitudinales, que no serían fáciles de encontrar o descubrir en otros espacios, como el de la clase tradicional.

Toda propuesta de investigación en Matemática Educativa precisa, en la medida de lo posible, servir de referente para la intervención en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones educativas en los diferentes niveles. Es decir, se investiga para que las intervenciones que se propongan tengan un fundamento teórico coherente y sustentado en la investigación misma. Es por ello, que como fruto de esta investigación se pretende hacer una propuesta de intervención en los programas de las asignaturas en el área de matemáticas para las facultades de ingeniería, en las que se realizó la investigación de tal manera que la práctica de modelación sea integrada en los currículos de esas asignaturas como parte del desarrollo normal de los mismos que sirva efectivamente como puente de acercamiento entre el mundo de la academia y el mundo real, de tal forma que en esa dinámica se generen procesos interactivos que promuevan la resignificación de conocimiento matemático escolar y al mismo tiempo identificar las dificultades de aprendizaje que traen los estudiantes de los cursos previos al poner en uso y en una situación concreta un conocimiento.

Bibliografía

Alsina, C. (2007). Si enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación, 43,* 85-101.

Araujo, J. (2010). Brazilian research on modelling in mathematics education. *(ZDM) The International Journal on Mathematics Education, 42(1),* 337-348

Arias, L. (2009). Las Interacciones Sociales que se Desarrollan en los Salones de Clase y su Relación con la Práctica Pedagógica que realiza el Docente en el Aula. *Revista Posgrado y Sociedad, 9(2), 32-57*

Arrieta J., Carbajal H., Díaz J., Galicia A., Landa L., Mancilla V., Medina R. y Miranda, E. (2007). Las prácticas de modelación de los estudiantes ante la problemática de la contaminación del río de la Sabana. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, 473-477. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Arrieta, J. (2002). Narración de una interacción discursiva en el aula: "la linealidad y lo que no es la linealidad". En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, 9-13. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav–IPN. México.

Arrieta, J., Canul, A. y Martínez, E. (2005). Laboratorio virtual de matemáticas. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 785-790 México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching – Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics 14* (2), 31-35.

Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Números* 32, 13-25.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose (Eds), *Meaning in Mathematics Education* (61-81), Springer.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16(2)*, 105-125.

Biembengut, M. y Hein, N. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clase de matemáticas*. V Festival de Internacional de Matemática de Costa a Costa Matemática para interpretar nuestro entorno*. *Celebrado del 29 al 31 de marzo*. Recuperado el 10 de mayo de 2011 de www.cientec.or.cr/matematica.

Biembengut, M. y Hein, N. (s.f.). *Modelo, modelación y modelaje: Métodos de la enseñanza de las matemáticas. Departamento de Matemática CCEN, Universidad Regional de Blumean*. Recuperado el 20 de diciembre de 2010 de http://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. *National Center for Mathematics Education* (pp 145-159). Suecia.

Blum, W, Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (2007). *Modellling and applications in mathematics education*: the 14th ICMI study. New York: Springer

Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application 1(1),* 45-58.

Bonilla-Castro, E. y Rodríguez, P. (1997). *Más allá del dilema de los métodos: La investigación en ciencias sociales*. Bogotá: Grupo Editorial Norma.

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática 18 (002),* 37-74.

Briceño, E. y Cordero, F. (2007). La génesis instrumental en una situación de modelación del movimiento. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno* (pp.197-206). Mérida

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico).* Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. y Velasco, E. (2006). Modelación del fenómeno de enfriamiento. En G. Buendía, A. Ordoñez y E. Velasco (Eds), *La tecnología en el aula de matemáticas: prácticas de laboratorio y medios virtuales* (13-26), México, Universidad Autónoma de Chiapas.

Camacho y Sánchez (2006). Modelación en el aula del concepto de diferencial. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 399-405. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Educación Matemática, 18(1)*, 133-160

Camarena, P. (2001). Modelos matemáticos y su clasificación para la ingeniería. En G. Beitía (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14, 468-473. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Camarena, P. (2010). La modelación matemática en la formación del ingeniero. Instituto Politécnico Nacional. Recuperado el 10 de enero de 2011 de http://www.m2real.org/spip.php?article152&lang=fr

Campo, R. y Restrepo, M. (2002). *La docencia como práctica, el concepto, un estilo, un modelo*. Bogotá D.C.: Pontificia Universidad Javeriana.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(1)*, 27-40.

Castañeda, A., Molina J. G. y Rosas, A. (2009). El discurso del aula, un análisis sobre su naturaleza y su metodología de estudio.

Castro, E. y Castro E. (2000). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* Barcelona: Universidad de Barcelona e Instituto de Ciencias de la Educación.

Cen, C., Cordero, F. y Suárez L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13(2),* 187-214.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamentoapprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattic, 20(1),* 59-79.

Cordero, F. Suarez, L., Mena, J., Arrieta, J., Rodríguez, Romo, A., Carsteanu., A. y Solis, M. (2009). La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1717-1726 México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Cordero, F. y Suárez, L. (2005). Modelación en matemática educativa. En J. Lezama, M Sánchez y J. Molina, (Eds), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 639-644. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F., Czarnocha, B., Díaz, L., Díaz, V., Muñoz, G. y Poblete, A. (2001). El papel de la sociocultura en la didáctica de la matemática. En G. Beitía (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*, 628-635. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Cortés, G. (2005). La Significación Física de la Integral a Partir de la Modelación de Fenómenos. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 483-488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. *Journal of Mathematical Modelling and Application 1(1), 89-98*

Diéguez, R., García, F., Server, P., y Álvarez, I. (2003). Aplicación del enfoque holístico al estudio del proceso de solución de problemas matemáticos contextualizados en la matemática básica para la carrera de agronomía. *Revista Iberoamericana de Educación.* Recuperado el 10 de noviembre de 2010 de http://www.rieoei.org/did_mat0.htm

Falsetti, M. y Rodríguez, M. (2005). Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: ¿qué perciben los alumnos? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (003),* 319-338

Farfán, R. y Sánchez, M. (2005) Un Estudio sobre interacciones y comunicación en educación. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 687-692. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Ferrari, M. y Farfán, R. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(2),* 309-354.

Flórez, R. (2001). *Evaluación pedagógica y cognición*. Bogotá: Mc Graw Hill.

Gabardo, L. (2006). Modelación Matemática y ontología. En: G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 317-323. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Galicia, A. y Arrieta, J. (2005). Modelación de la Evolución de la Levadura: Un Estudio de las Prácticas Sociales del Ingeniero Bioquímico. En En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 503-509. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gallegos, R. (2007). La enseñanza de la modelación en clase de física y de matemáticas. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20,* 114-119. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

García, M., y Montiel, G. (2007). Resignificando el concepto de función en una experiencia de educación a distancia*. Artículo presentado en I Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*. Argentina: Universidad Nacional del Centro.

Goetz, J. y Lecompte, M.D. (1998). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Hernández, E. (1989). En torno a la modelación matemática lingüística. *Estudios románicos, 4*, 569-584.

Hernández, M. y Arrieta, J. (2005) Las prácticas sociales de modelación y la emergencia de lo exponencial. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 537-542. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Kaiser & Maaß (2007). Modelling and applications in mathematics education. *The 14th International Commission on Mathematical Instruction.*

Kaiser, G. & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university*. (ZDM) The International Journal on Mathematics Education, 38(2),* 196-208

Kaiser, G. & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education Examples and Experiences. *J Math Didakt (2010) 31,* 51–76

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education*. (ZDM) The International Journal on Mathematics Education, 38(3),* 302-310

León, M. y Mochón, S. (2003). Modelación matemática en otras ciencias a través de la hoja electrónica de cálculo. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16 (2),* 488-494. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Lesh, R., Galbraith, P., Haines, C. & Hurfor, A. (2010). *Modeling students' mathematical modeling competencies*. New York: Springer.

Lezama J. (2003). *Un estudio de reproduccibilidad de situaciones didácticas.* Tesis de doctorado no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

López, J. (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav –IPN, México.

López, C., Juárez, M. y Arrieta, J. (2007). Las prácticas de modelación virtual. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* 741-746. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Luaces, V., Camarena, P. y Biembengut, M. (2004). Modelos matemáticos. En L. Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 423-427. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(2)*, 195-218

Martínez, V. y Ortiz, J. (2005) Perspectivas curriculares y uso didáctico de la modelación en educación matemática. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 847-852. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Méndez, M. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 575–582*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Méndez, M. y Cordero, F. (2009). La función de la modelación en la resignificación de conocimiento matemático. En G. Buendía y A. Castañeda (Eds.), *Memoria XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 194-209), Madero: Instituto Tecnológico de Madero.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

Montiel, G. (2002). *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual.* Tesis de Maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Ochoviet, C. y Oktac, A. (2010). Un diseño metodológico para integrar la investigación con la enseñanza. En G. Buendía (Ed), *Publicación de aniversario, Posgrado en Línea de Matemática Educativa,* 175-192.

Planas, N. (2004). Análisis discursivo de interacciones sociales en un aula de matemáticas multiétnica. *Revista de Educación, 334*, 59-74

Puig, P. (1972). *Curso teórico y práctico de cálculo integral*. Madrid: Biblioteca matemática.

Radford, L. (2011). Classroom interaction: Why is it good, really?. *Educational Studies in Mathematics 76*, 101-115.

Ramos, E. (2005). Análisis Socioepistemológico de los Procesos de Matematización de la Predicción en la Economía. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 18, 631-637. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Reséndiz, E. y Cantoral, R. (2004). El discurso en el aula y la construcción de significados a través de la explicación, en el marco de clases sobre la variación. En L. Díaz Moreno (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17, 285-291. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Rivera, M. (2005). *La algoritmia: una práctica en las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Romero, S. y Castro, F. (2008). Modelación matemática en secundaria desde un punto de vista superior. *Modelling in Science Education and Learning, 1(2),* 11-23.

Romo, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot (Paris 7), Francia.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002) *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría. fundamentada*. Bogotá:(2a. Ed.). CONTUS-Editorial Universidad de Antioquia.

Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultado de un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Suárez, L. y Cordero, F. (2005). Modelación en matemática educativa. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 639-644. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 3(1),* 51-58.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Modelación del movimiento en un ambiente tecnológico: una categoría de modelación-graficación para el cálculo. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,*1046-1056. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Testa, Y. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo*. Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de maestría no publicada, Programa de Matemática Educativa, CICATA-IPN. México.

Torres, A. y Suárez, L. (2005). La Modelación y las Gráficas en Situaciones de Movimientocon Tecnología. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 645-650. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Torres, L. (2010). *La noción de predicción matemática en situaciones variacionales. Un estudio de construcción de discurso.* Tesis de Pregrado no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Torres, P. y Zaruma, J. (2009). Proyecto: monitoreo de la temperatura de los componentes de un computador. Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). *El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje*. Recuperado el 05 de marzo de 2011 de http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2009/septiembre/incert160.htm

Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85

ANEXO 1 ACTIVIDADES PREVIAS

Señor estudiante, gracias por su valiosa participación en este trabajo. Le recordamos que la información recogida es de carácter confidencial y su manejo es estrictamente académico. En todo momento se respetará el anonimato de los participantes y de sus escritos.

Una vez el profesor ha hecho la presentación de la actividad experimental sobre el fenómeno de enfriamiento de un cuerpo, responda por favor las siguientes preguntas basado en su propia experiencia

Tiempo: 30-40 minutos

1. Cuando un cuerpo caliente (es decir, su temperatura es mayor que la del ambiente) se deja enfriar, la disminución de la temperatura con respecto al tiempo sigue una determinada tendencia o comportamiento. ¿Qué tipo de tendencia cree o sabe que sigue el fenómeno de enfriamiento? Marque con una X en la opción escogida

Lineal___ Cuadrática___ Exponencial___ Otra (cual)____ No puede concluir___

Justifique su escogencia

____

____

¿De qué manera se podría determinar esa tendencia, qué procedimiento emplearía, cómo lo haría?

____

____

¿Qué herramientas matemáticas o conceptos matemáticos emplearía para determinar o identificar esa tendencia o comportamiento?

____

____

2. Analice la siguiente situación y trate de justificar el procedimiento escogido

Suponga que le sirven un café, la mitad de una taza, a una temperatura muy alta, digamos 85°C. Usted tiene prisa por tomárselo, pero lo quiere mezclado con leche. A su lado tiene una jarrita con leche a temperatura ambiente, digamos, a unos 20°C. Para enfriar el café puede seguir dos procedimientos. Uno, usted puede añadir la leche al café hasta llenar la taza y dejar que todavía se enfríe otro poco durante unos, digamos, tres minutos. Dos, usted puede dejar que el café sólo en la taza se enfríe durante los mismos tres minutos, añadirle la leche y tomarse el café con leche obtenido. **¿Cómo debe proceder para conseguir que en los mismos tres minutos el café esté lo más frío posible y podérselo tomar sin quemarse?**

(Tomado de: Física para mentes inquietas. Enfriamiento del café).

Explique el procedimiento escogido

____

____

3. ¿Para usted que significa un modelo matemático?, ¿con qué lo asocia?

____

____

4. ¿Para qué cree que sirve un modelo matemático?

____

____

5. ¿Qué significado le da a una ecuación diferencial? y para que le podría servir?

____

____

ANEXO 2 GUÍA DE LA PRÁCTICA

A continuación se describe el procedimiento a seguir para la realización de la actividad experimental. Es importante que siga el orden establecido y que anote cualquier observación que considere pueda afectar el desarrollo de la misma. Lea por favor con detenimiento la guía antes de iniciar la actividad experimental.

Todos los cálculos y operaciones matemáticas deben ser registrados en las hojas dispuestas para ello.

1. Verificando los materiales e implementos

Cada equipo debe tener los siguientes materiales e implementos:

1 Sensor de temperatura (o termómetro y cronómetro)

Hojas de registro

Nota.

La pistola de silicona y la barra del mismo material serán usadas por todos los equipos

El computador portátil también será usado por el equipo que lo necesite

2. Inicio de la práctica

Se calienta la silicona en la pistola (por un tiempo de 6-8 minutos aproximadamente) y se impregna el sensor de temperatura completamente en su parte inferior, las mediciones empiezan en este mismo instante.

3. Registro de los datos

En esta parte de la actividad experimental, no hay una intervención directa del profesor (salvo orientaciones metodológicas), lo que se espera es que los estudiantes puedan interactuar y discutir entre ellos, para que identifiquen que comportamiento sigue o puede seguir el fenómeno

Las lecturas se realizarán cada 30 segundos, durante 15 minutos. **Las lecturas de temperatura se registran en la siguiente tabla, en la segunda columna**.

Tiempo t (seg)	Temp. T (°C)	Δt (incremento tiempo)	ΔT (incremento temperatura)	Razón entre incrementos $\frac{\Delta T}{\Delta t}$	Observaciones
0					
30					
60					
90					
120					
.					
.					
.					
900					

Conclusiones a partir de los datos de la tabla: ¿qué se observa del comportamiento de la temperatura con respecto al tiempo, qué percibe?,

____

____

____

¿Qué tendencia cree que sigue este comportamiento? Justifique

____

____

____

Una vez se hayan hecho todas las lecturas, se completan las demás columnas haciendo los cálculos respectivos (este trabajo se puede hacer en el salón de clase)

4. Representación gráfica e interpretación de los datos

Con el fin de establecer algunos supuestos sobre el comportamiento del fenómeno, se pueden graficar en el plano cartesiano los datos de las dos primeras columnas y tratar de hacer algunas aproximaciones al comportamiento del fenómeno.

Según el gráfico, ¿qué tendencia cree que sigue ahora el fenómeno y por qué?

____

____

____

____

¿Corresponde este gráfico y su tendencia, a lo que inicialmente había supuesto?

Si____ No___

¿Por qué? ____

____

____

____

5. La ecuación diferencial como herramienta que modela…

En otro gráfico, se representan las datos de la columna cinco (eje vertical o eje Y) contra los datos de la columna dos (eje horizontal o eje X). En este punto se trata de encontrar la ecuación de una recta de ajuste a estos datos, que sería de la forma $\frac{\Delta T}{\Delta t} = mT + b$. Para ello, se puede hacer uso de Geogebra, Excel u otro programa. De esta forma se encuentran m y b. Si se supone que los deltas (incrementos) calculados se pueden hacer cada vez más pequeños, tomando los datos en intervalos de tiempo cada vez más reducidos, entonces se puede asumir que $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}$, con lo cual se puede plantear la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = mT + b$$

Una vez se hayan obtenido m y b se puede resolver la ecuación diferencial, utilizando las condiciones iniciales del problema (en $t = 0$, $T = ?$). La solución de esta ecuación diferencial representa entonces el modelo matemático del fenómeno de enfriamiento. **No olvide escribir todos los cálculos en las hojas de registro**.

¿Qué cree que modela una ecuación diferencial, qué comportamiento, fenómeno o aspecto en general?

____

____

6. Análisis y comparación de resultados

Trate de graficar los datos de las columnas uno y dos (nube de puntos) y la función solución de la ecuación diferencial obtenida en el paso anterior. Compare ambas gráficas. A partir de este análisis se proponen las siguientes preguntas:

a. ¿Qué tan ajustados están los datos reales (columnas uno y dos) con la función solución de la ecuación diferencial? Realice dos cálculos para la temperatura con dos tiempos distintos (utilizando el modelo matemático encontrado) y compare estos valores con los valores medidos reales

   ____

   ____

b. ¿Qué factores cree que inciden en esas diferencias?

   ____

   ____

c. ¿Qué significado tiene ahora una ecuación diferencial para usted?

   ____

   ____

   ¿A qué tipo de fenómeno en general está asociada una ecuación diferencial?

   ____

   ____

d. ¿Qué otros fenómenos, situaciones o experiencias cree que se pueden ajustar al modelo de enfriamiento trabajado?

   ____

   ____

e. ¿Para qué podría utilizar este modelo y que otra información le podría dar?

   ____

   ____

f. Después de la actividad experimental, ¿le encuentra un mayor sentido y significado al estudio de las ecuaciones diferenciales de esta forma? Si___ No___

¿Por qué?

g. Si pudiera mencionar 10 palabras o conceptos que estén asociados con esta actividad y que se hayan evocado en las discusiones en el grupo, ¿cuáles podría ser? (ojalá diferentes a los ya usados: modelo, enfriamiento, etc.?

Observaciones y comentarios

ANEXO 3 EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD Y RELATO DE EXPERIENCIAS

Una vez se ha discutido en el grupo en general los resultados de la práctica, es conveniente hacer una valoración del trabajo y comentar brevemente la experiencia personal:

1. Frente a las actividades normales de clase, la práctica de modelación que se ha realizado en el grupo le ha parecido:

Mucho mejor___ Mejor___ Igual__ Peor__ que la clase normal

¿Por qué?____

____

2. Enumere algunas ventajas de realizar prácticas de modelación en clases de matemáticas

____

____

3. De manera breve, comente cual fue su experiencia y qué le aportó esta actividad

____

____

4. ¿Qué cosas nuevas aprendió? Desde el punto de vista matemático o personal

____

____

5. ¿Qué herramientas o conceptos matemáticos que ya sabía pudo utilizar?

____

____

6. ¿Considera que hay ahora más sentido y significado en su concepción de las ecuaciones diferenciales después de la actividad experimental? Si__ No___

¿Por qué?____

____

____

Observaciones y comentarios

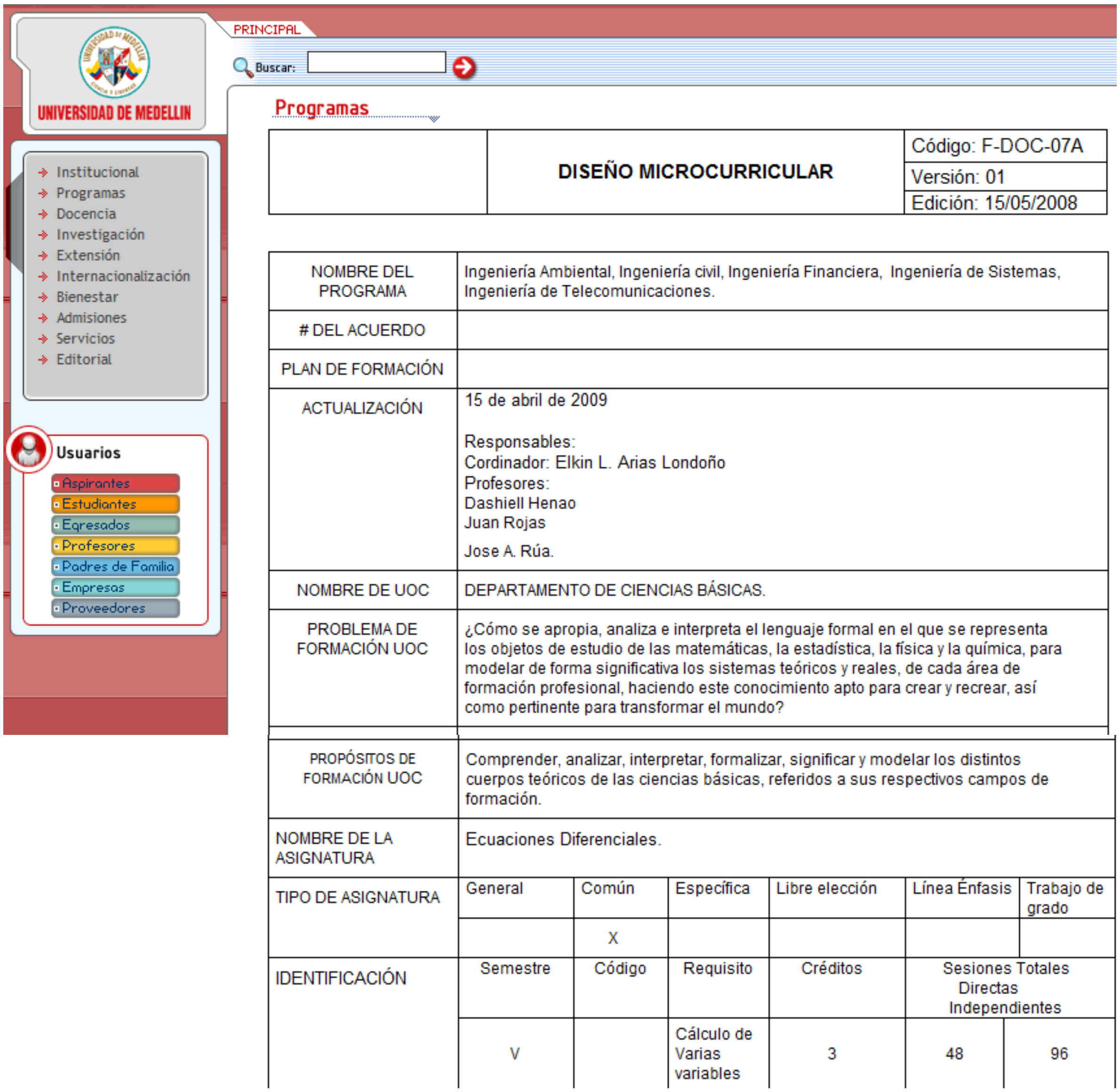
____

____

ANEXO 4

DISEÑO CURRICULAR DE LA ASIGNATURA ECUACIONES DIFERENCIALES

(DISEÑO ACTUAL/2011)



<table>
<tr><td></td><td>DISEÑO MICROCURRICULAR</td><td>Código: F-DOC-07A
Versión: 01
Edición: 15/05/2008</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>NOMBRE DEL PROGRAMA</td><td colspan="6">Ingeniería Ambiental, Ingeniería civil, Ingeniería Financiera, Ingeniería de Sistemas, Ingeniería de Telecomunicaciones.</td></tr>
<tr><td># DEL ACUERDO</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>PLAN DE FORMACIÓN</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>ACTUALIZACIÓN</td><td colspan="6">15 de abril de 2009

Responsables:
Cordinador: Elkin L. Arias Londoño
Profesores:
Dashiell Henao
Juan Rojas
Jose A. Rúa.</td></tr>
<tr><td>NOMBRE DE UOC</td><td colspan="6">DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMA DE FORMACIÓN UOC</td><td colspan="6">¿Cómo se apropia, analiza e interpreta el lenguaje formal en el que se representa los objetos de estudio de las matemáticas, la estadística, la física y la química, para modelar de forma significativa los sistemas teóricos y reales, de cada área de formación profesional, haciendo este conocimiento apto para crear y recrear, así como pertinente para transformar el mundo?</td></tr>
<tr><td>PROPÓSITOS DE FORMACIÓN UOC</td><td colspan="6">Comprender, analizar, interpretar, formalizar, significar y modelar los distintos cuerpos teóricos de las ciencias básicas, referidos a sus respectivos campos de formación.</td></tr>
<tr><td>NOMBRE DE LA ASIGNATURA</td><td colspan="6">Ecuaciones Diferenciales.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">TIPO DE ASIGNATURA</td><td>General</td><td>Común</td><td>Específica</td><td>Libre elección</td><td>Línea Énfasis</td><td>Trabajo de grado</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">IDENTIFICACIÓN</td><td>Semestre</td><td>Código</td><td>Requisito</td><td>Créditos</td><td colspan="2">Sesiones Totales
Directas
Independientes</td></tr>
<tr><td>V</td><td></td><td>Cálculo de Varias variables</td><td>3</td><td>48</td><td>96</td></tr>
</table>

ANEXO 5

DISEÑO CURRICULAR DE LA ASIGNATURA ECUACIONES DIFERENCIALES

(DISEÑO ACTUAL/2011)

ITM Institución Universitaria	MICRODISEÑO CURRICULAR INGENIERIA BIOMEDICA	Código	FDE 058
		Versión	01
		Fecha	08-06-2009

1. IDENTIFICACIÓN

Asignatura	Ecuaciones Diferenciales								
Área	Ciencias Básicas					Nivel		4	
Código	ECO44					Pensum		2	
Correquisito(s)						Prerrequisito(s)		CIO34	
Créditos	4	TPS	4	TIS	8	TPT	64	TIT	128

2. JUSTIFICACIÓN.

Las ecuaciones diferenciales son consideradas eje fundamental para el modelado, planteamiento y desarrollo de conceptos que permiten entender y asimilar conocimientos de casi todas las áreas de la ingeniería y la tecnología aplicada, para finalmente abordar temáticas generales del saber específico en el campo profesional.

C. COMPETENCIAS Y CONTENIDO TEMÁTICO

COMPETENCIAS	CONTENIDO TEMÁTICO	INDICADOR DE LOGRO
Resolver y aplicar ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, utilizando diferentes técnicas de solución.	**Ecuaciones Diferenciales Primer Orden.** • Ecuaciones Diferenciales Primer orden = *EDO1* • Definición, Clasificación, orden, grado, linealidad • Variables Separables • Exactas. • Solución a *EDO 1*	En un sistema específico: • Lo modela en términos de ecuaciones diferenciales de primer orden, identificando sus componentes y clasificándolo • Resuelve la ecuación asociada al modelo, utilizando