INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto

T E S I S

Que para obtener el grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:
Q. EN A. ANA MARÍA OLAZÁBAL CARPIO

Directora de tesis:
DRA. PATRICIA CAMARENA GALLARDO

MÉXICO, D.F. Enero de 2005

CGPI-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 10:00 horas del día 18 del mes de febrero del 2005 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto."

Presentada por la alumna:

Olazábal	Carpio	Ana María
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 1 | 0 | 6 | 8 | 3 |

aspirante al grado de:

Maestra en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Patricia Camarena Gallardo

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

M. en C. Mario Sánchez Aguilar

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
'ORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México, D.F. el dia 01 del mes de Febrero del año 2005, el (la) que suscribe Ana María Olazábal Carpio alumno (a) del Programa de Maestria en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A010683 adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dra. Patricia Camarena Gallardo y cede los derechos del trabajo intitulado Categorías en la Traducción del Lenguaje Natural al Algebraico de la Matemática en Contexto al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección anaolazabal2000@yahoo.com.mx

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ana María Olazábal Carpio
Nombre y firma

Relación de cuadros, figuras, tablas y gráficas

Resumen

La traducción constituye una etapa primordial en el planteamiento y resolución de los problemas matemáticos contextualizados, puesto que para poder establecer el modelo matemático, elemento central en el proceso de la *matemática en contexto* [Camarena, 1999], se necesita realizar con éxito el tránsito del lenguaje natural, en el que se nos comunican los problemas, al lenguaje algebraico, en el que se representan matemáticamente.

Por ello, este trabajo estudia el fenómeno del planteamiento y resolución de problemas matemáticos contextualizados bajo el enfoque de la traducción.

Así, se analizan textos de Álgebra y Cálculo Diferencial del nivel medio superior y superior, con el propósito de encontrar elementos lingüísticos y matemáticos comunes a los enunciados de diferentes problemas de estos textos, los cuales permitan clasificarlos en categorías de acuerdo a la traducción que demandan.

Como resultado de este análisis, creamos tres categorías de problemas de acuerdo a las características de sus enunciados, que a su vez, involucran los conocimientos del traductor en diferentes niveles. La primera categoría corresponde a los problemas con enunciado literal, donde, del mismo enunciado, se puede obtener literalmente el modelo del problema, para lo cual el traductor debe conocer el vocabulario y su simbología matemática. La segunda categoría corresponde a los problemas con enunciado con evocación, donde el enunciado evoca el modelo del problema mencionándolo, describiéndolo o haciendo referencia a él y en donde el traductor debe conocer su significado. En la tercera categoría, la correspondiente a los problemas con enunciado complejo, el enunciado ni expresa literalmente ni evoca el modelo a usarse en el problema, sino que el individuo debe deducirlo, por lo que debe poseer una estructura cognoscitiva preparada para dicha tarea.

Esta categorización se sujeta a una investigación cualitativa para estudiar la hipótesis de que la traducción es una habilidad básica en el entendimiento y planteamiento de los problemas matemáticos contextualizados, así como la hipótesis de que el número de alumnos que resuelve los problemas disminuye según asciende la categoría.

Tras aplicar una actividad de resolución de un problema de cada categoría a un grupo de estudiantes de primer semestre de licenciatura, que recién terminaron el curso de Cálculo Diferencial e Integral, se pudo confirmar la primera hipótesis de investigación, mientras que la jerarquía propuesta para la categorización no se cumplió, pues se observa que los niveles de

éxito para el entendimiento y planteamiento de los problemas matemáticos contextualizados presentan un comportamiento variable respecto a la categoría a la que pertenecen.

Se sospecha que estos niveles quedan a merced de diferentes factores que salieron a la luz en esta investigación, como son los elementos clave de traducción que aparecen en cada problema en particular y el conocimiento que el traductor tenga de ellos, el número y tipo de traducciones involucradas, la sintaxis de las oraciones que componen los enunciados, o la experiencia en la resolución de problemas parecidos.

Se recomienda extender esta investigación para poder definir el papel que juegan todos estos elementos sobre el entendimiento y planteamiento de los problemas matemáticos contextualizados.

Summary

The translation constitutes a fundamental stage in the posing and solution of contextualized math problems; this is because in order to establish the mathematical model –central element in the process of *mathematics in context* [Camarena, 1999]- it is necessary to successfully make the transition from the natural language, in which problems are communicated to us, into the algebraic language, in which they are mathematically represented.

Therefore, this work studies the phenomenon of the contextualized math problems under the translation approach.

In such a way, texts of Algebra and Differential Calculus of the upper-middle and upper levels are analyzed, with the purpose of finding mathematical and linguistic elements common to the elements of different problems from these texts, which may allow classifying them into categories according to the translation they demand.

Resulting from this analysis, we created three categories of problems according to the characteristics of their statements, which in turn involve the knowledge of the translator at different levels. The first category corresponds to the problems with literal statement where, from the same statement, it is possible to literally obtain the model of the problem, for which the translator must know the vocabulary and its mathematical symbols. The second category corresponds to the problems having statements with evocation, where the statement evokes the problem model by mentioning it, describing it or referring to it, and where the translator

must know its meaning. In the third category, the one corresponding to problems with complex statements, the statement doesn't literally express or evoke the model to be used in the problem, but the individual must deduce it, so he/she must have a cognitive structure prepared for such task.

This classification is subject to a qualitative research in order to analyze the hypothesis that the translation is a basic skill in the understanding and posing of contextualized math problems, as well as the hypothesis that the number of students solving the problems is reduced as the category rises.

After applying a problem solving activity from each category to a group of students from the first semester studying their bachelor's degree, and who had recently finished the course of Differential and Integral Calculus, it was possible to confirm the first research hypothesis, whereas the hierarchy proposed for the classification was not fulfilled, as it is observed that success levels for the understanding and posing of contextualized math problems have a variable behavior with regard to the category to which they belong.

It is suspected that these levels are at the mercy of different factors that came to light during the research, such as the translation key elements appearing in each particular problem and the knowledge the translator may have about them, the number and type of translations being involved, the syntax of the sentences making up the statements, or the experience in solving similar problems.

It is recommended to broaden this research to be able to define the role that each of these elements play on the understanding and posing of contextualized math problems.

Índice

Capítulo I Planteamiento del problema

1.1. INTRODUCCIÓN

Dentro del ámbito de la matemática escolar, de todos es sabido que el ejercicio algorítmico tiene menor grado de dificultad para los alumnos que la resolución de problemas. De hecho, Schoenfeld usa el término *problema* para referirse a una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerla [como se cita en Santos, 1997].

La matemática en el contexto de las ciencias describe que la enseñanza de las matemáticas tiene por una de sus finalidades, dotar de herramientas a los alumnos para la resolución de problemas de otras asignaturas y de la vida real, vinculados con las matemáticas; la *matemática en el contexto de las ciencias*...*es una propuesta educativa que reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren; aborda la fase curricular, la didáctica, la cognitiva , la epistemológica y la de formación docente* [Camarena, 2002, pág. 296].

También es ampliamente compartida la apreciación de que para el alumno el conflicto determinante consiste en hallar el modelo matemático que le permita plantear el problema, entendiendo por modelo matemático *la representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas* [Mochón, 1997, pág. 42]. Es por ello que dentro de la *matemática en el contexto de las ciencias*, el modelo matemático constituye una etapa central y éste se refiere a encontrar la representación matemática del problema [Camarena, 1997].

A su vez, se ha observado que el entendimiento del enunciado resulta definitivo para establecer un modelo matemático que conduzca a la solución, y en la mayoría de las ocasiones los profesores deben empezar por explicar lo que se pide. Esto se debe a que la información y las relaciones en el problema se ofrecen en un sistema semiótico[1] diferente a aquél en el que el problema debe resolverse.

Esto lleva a reflexionar acerca de la gran importancia que tiene el proceso de traducción en el planteamiento y resolución de problemas matemáticos en contexto, entendiendo por traducción el proceso que involucra ir de un modo de representación a otro [Janvier, 1987].

[1] Un sistema semiótico es el conjunto de representaciones semióticas relacionadas mediante reglas. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos en la transmisión y producción del conocimiento [Duval, 1999].

De hecho, existen numerosas referencias a esta relevancia en la bibliografía de la Matemática Educativa, entre las cuales se tiene a Burton, que menciona la noción de traducción en su lista de habilidades necesarias para la resolución de problemas, a Lesh, que señala su importancia en la solución de problemas reales y a Burkhardt, que insiste en su rol crucial en el modelado matemático [como se citan en Janvier, 1987].

Se observa también en la práctica docente, que para un mismo campo temático, el establecimiento del modelo matemático es, en muchas ocasiones, el responsable de las diferencias en el grado de dificultad entre los problemas matemáticos en el contexto de las ciencias. Una vez que se obtiene la expresión matemática que permite su resolución, parecen diluirse no sólo estas diferencias, sino también los conflictos emotivos.Hablando de resolución de problemas en matemáticas, no se puede omitir a Polya, quien distingue cuatro fases en este trabajo:

> "Primero, tenemos que *comprender* el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo, tenemos que captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un *plan*. Tercero, poner en *ejecución* el plan. Cuarto, *volver atrás* una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla" [Polya, 1965, pág. 28].

Polya explica en su primera fase de comprensión del problema:

> "Ante todo, el enunciado verbal del problema debe ser comprendido...poder separar las principales partes del problema, la incógnita, los datos, la condición...Si hay alguna figura relacionada al problema, debe *dibujar* la figura y destacar en ella la incógnita y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente *introducir una notación* adecuada... ¿Es posible satisfacer la condición?" [Polya, 1965, pág. 29].

Fuera de esta mención a la notación, Polya no expresa claramente el papel de la traducción en cada una de las fases que propone para el planteamiento y resolución de problemas, sin embargo, deja ver a través de los ejemplos que presenta, que es importante en el desarrollo del total de la primera y segunda etapas, y de parte de la tercera.

Bajo el punto de vista de este análisis, en la primera etapa, la importancia radica en la asignación de símbolos matemáticos a los datos y a la incógnita. En la segunda, Polya afirma que *…tenemos un plan cuando sabemos, al menos a "grosso modo", qué cálculos, qué* *razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita* [Polya, 1965, pág. 30], lo que se interpreta como el pensamiento del individuo para llegar al modelo matemático que represente el planteamiento. En la ejecución del plan (tercera etapa) se materializa lo que se concibió en la etapa anterior, lo que se entiende que incluye el escribir e interactuar con las expresiones algebraicas para simbolizar el modelo matemático que se pensó.

Podríamos afirmar, pues, que la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático no sólo consiste en representar con símbolos los conceptos matemáticos, sino que también involucra al pensamiento lógico-matemático para establecer las relaciones que puedan existir entre ellos y su consiguiente representación matemática. Por ello, la traducción parece constituir la base sobre la cual se establece el tránsito del lenguaje natural al matemático y viceversa, y de ahí su gran importancia en el planteamiento y resolución de problemas.

Cabe mencionar que hay trabajos publicados que parecen tener relación con el que nos ocupa, pero que no tratan el tema de la traducción, como la tesis de maestría de Margarita Costas (1996), dirigida por Jesús Alarcón Bertolussi, titulada “La lectura de textos matemáticos. Resultados de un estudio sobre la lectura de un texto matemático realizada por alumnos del bachillerato”, en la cual el estudio va enfocado a la construcción de significados por parte del lector mas no involucra al proceso de traducción. Asimismo, la tesis doctoral de Guillermo Rubio Camacho (1994), dirigida por Eugenio Filloy Yagüe, titulada “Modelos didácticos para resolver problemas verbales-aritméticos-algebraicos. Tesis teóricas y observación empírica”, la cual descarta la traducción en el proceso de resolución de problemas verbales de álgebra para proponer un método basado en un tratamiento numérico utilizando un sistema matemático de signos intemediario entre el sistema matemático de signos (SMS) de la aritmética y el SMS del álgebra. Filloy y Rojano (1984) han desarrollado trabajos alrededor de los modelos algebraicos, pero tampoco están enfocados a la traducción en sí, sino más bien a las tendencias cognitivas.

Por todo ello, nos percatamos de la necesidad de investigar acerca del papel de la traducción en la resolución de problemas. Nuestro propósito es crear una categorización en relación a la traducción del lenguaje natural al algebraico, misma que no se encontró en la bibliografía analizada.

Nuestra investigación, enmarcada en la teoría de la *matemática en el contexto de las ciencias*, comienza por un análisis de los textos de Álgebra y Cálculo Diferencial que más se utilizan en el nivel medio superior y superior en la Universidad Autónoma del Estado de

México (UAEM). El fin es encontrar elementos lingüísticos y matemáticos comunes a los diferentes enunciados de los problemas que aparecen en estos textos, para poder clasificarlos en categorías, como una forma personal de organización de acuerdo a la traducción que demandan. Una vez creada la categorización, ésta se investiga cualitativamente a través de una actividad aplicada a un grupo de alumnos de primer semestre de la licenciatura de Químico Farmacéutico Biólogo de la misma Universidad.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la práctica laboral de la educación en el nivel superior, el conocimiento matemático se evalúa por la capacidad de plantear y de resolver problemas. Esto como reflejo del objetivo real que persigue la matemática de modelar los acontecimientos para poder manejarlos.

Cuando además estos problemas ilustran los fenómenos que estudia el alumno en otras ciencias o que acontecen en su vida real, la matemática se vuelve para él una herramienta útil e interesante, fin que persigue la *matemática en el contexto de las ciencias*. Ésta ayuda al estudiante a construir su propio conocimiento de una matemática con significado, con amarres firmes y no volátiles; refuerza el desarrollo de habilidades matemáticas, mediante el proceso de resolver problemas vinculados con los intereses del alumno. [Camarena, 1999].

Como se mencionó anteriormente, el modelado matemático en la *matemática en el contexto de las ciencias* constituye una etapa central de la resolución del problema, pues representa a éste en términos matemáticos. *A través de la instrumentación de la fase didáctica se ha detectado la problemática que tienen los estudiantes para obtener el modelo matemático del problema. Hay varias causales por las que el alumno no puede o le cuesta trabajo llegar a esta etapa de la metodología de contextualización. Una de éstas es el obstáculo que se refiere a hacer la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, entendiéndose por lenguaje natural a aquel en el cual está formulado el problema dentro de la disciplina de que se trate o de actividades de la vida cotidiana* [Camarena & Olazábal, 2003, s/p].

Como sabemos, los objetos matemáticos son objetos abstractos, de la imaginación. Para su transmisión existe *un mundo específico de representaciones y de percepción de la matemática que son los llamados registros algebraicos, numéricos, analíticos y visuales* [Camarena, 1997]. Sin embargo, el planteamiento de los problemas del mundo real, así como su primer razonamiento, se lleva a cabo en lenguaje natural, es decir, en lengua hablada o escrita, lo cual implica la necesidad de transferir el conocimiento de un registro semiótico a otro. *Es claro que si el alumno no puede llevar a cabo esta traducción, menos podrá llegar al modelo matemático que representa al problema, es decir, la traducción es una de las habilidades básicas en el proceso de contextualizar. Por la importancia que reviste esta etapa en la matemática en el contexto de las ciencias y en el entendimiento de la misma matemática, así como en la formación cultural del estudiante, esta investigación se centra en este elemento básico del bagaje matemático, para lo cual analiza la estructura del enunciado, en lengua escrita, que se quiere matematizar* [Camarena & Olazábal, 2003, s/p].

La traducción del lenguaje natural al algebraico en el establecimiento del modelo matemático, no ha sido suficientemente estudiada como factor caracterizante de los problemas o de su grado de dificultad, a pesar de tener muestras reiteradas de que constituye un agente importante en la comprensión y planteamiento del mismo. Tampoco existe material didáctico suficientemente completo que permita desarrollar la habilidad de la traducción en los alumnos a fin de mejorar la resolución de problemas.

Por ello, el presente trabajo realza la importancia que posee este factor en el establecimiento del modelo matemático de los problemas de la *matemática en el contexto de las ciencias*, proponiendo una categorización de los problemas contextualizados[2] a partir de la traducción que demandan.

1.3. JUSTIFICACIÓN

El problema de investigación que se aborda tiene justificaciones de tipo epistemológicas, didácticas y cognitivas.

La necesidad es básicamente epistemológica, pues el proponer y estudiar una categorización para los problemas contextualizados pretende contribuir a la *matemática en el contexto de las ciencias* en forma teórica, respecto al papel de la traducción del lenguaje natural al algebraico en el establecimiento del modelo matemático para el planteamiento y resolución de los mismos.

El fenómeno escolar del planteamiento y resolución de problemas matemáticos se ha abordado desde varias perspectivas, y ahora se pretende estudiar bajo el enfoque de la traducción.

[2]Un problema matemático contextualizado se define como aquel problema que surge de otras ciencias y que requiere de la matemática para su resolución y solución [Camarena, 2000a].

También se justifica didácticamente, pues surge como respuesta a la necesidad de dotar de más y mejores herramientas a los alumnos para la resolución de problemas matemáticos en el contexto de las ciencias, ya que el tener esta categorización puede usarse como base de una propuesta didáctica para desarrollar en los alumnos esta habilidad tan preciada. Así se favorece el que el alumno se encuentre motivado hacia la matemática porque observa una gran utilidad de ésta en su vida ordinaria, tal y como lo establece la teoría de la *matemática en el contexto de las ciencias*.

Asimismo, puede ser usado por el profesor como un organizador previo a la propia tarea de traducir, que manipule deliberadamente la estructura cognoscitiva, y cuya principal función sea: *tender un puente entre lo que el alumno ya sabe y lo que necesita saber antes de que pueda aprender significativamente la tarea en cuestión* [Ausubel, *et al.,* 1976, pág. 158].

De esta forma, se podría contribuir a que la resistencia que presentan los alumnos a la resolución de problemas disminuyera, pues en su estructura cognoscitiva existirían más ideas establecidas y pertinentes para la tarea a realizar.

En tercer lugar, este trabajo también se justifica desde el punto de vista cognitivo, ya que la categorización y su estudio puede obsequiar información acerca del "cómo aprende" el individuo en el proceso de traducción, previo al modelado matemático.

Finalmente cabe señalar que en el nivel superior, el conocimiento matemático está inserto para resolver problemas de la actividad laboral del futuro profesionista, como argumenta Camarena [Camarena & Olazábal, 2003], situación que da validez y pertinencia a este trabajo.

1.4. OBJETIVOS

Dado el problema de investigación, los objetivos generales de este trabajo son:

1. Crear una categorización de los problemas matemáticos contextualizados de acuerdo al tipo de traducción que éstos demandan.
2. Establecer una jerarquía entre dichas categorías.

Los objetivos específicos consisten en:

1. Determinar los problemas de matemáticas en contexto (de otras ciencias o de la vida real).
2. Clasificar los problemas según el criterio de los elementos de la teoría de la *matemática en el contexto de las ciencias*.

3. Crear la categorización.
4. Establecer una jerarquía entre las categorías que la constituyan.
5. Analizar cualitativamente el supuesto teórico acerca de la categorización con estudiantes de Cálculo.

Capítulo II Marco teórico y Método

2.1. MARCO TEÓRICO

Nuestro trabajo está enmarcado en la línea de investigación de la *matemática en el contexto de las ciencias.* La *matemática en el contexto de las ciencias* es una línea de investigación establecida desde hace aproximadamente veinte años en México, aborda varias fases: la curricular, epistemológica, cognitiva, didáctica y de formación de profesores [Camarena,1984, 1987, 1990,1993,1995,1999, 2001].

La matemática en contexto como estrategia didáctica posee varias etapas [Camarena, 1999, pág. 951]:

1.- Planteamiento del problema de las disciplinas del contexto o vida cotidiana; (problemas reales).

2.- Determinación de las variables y de las constantes del problema.

3. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelaje y su solución.

4.- Determinación del modelo matemático.

5.- Solución matemática del problema.

6.- Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.

7.- Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto.

Un elemento central de esta fase es el modelo matemático [Camarena, 2000a]. Camarena propone una caracterización y clasificación de los modelos matemáticos de la ingeniería. *La primera se estructura de acuerdo al uso que le otorga la ingeniería al modelo dado, mientras que la clasificación se lleva a cabo en función de las etapas de conocimiento por las que tiene que transitar el futuro ingeniero* [Camarena, 2002, pág. 299].

En lo que se refiere a la caracterización, *dentro del conocimiento de la ingeniería se tienen problemas de la ingeniería, así mismo, se tienen objetos de la ingeniería que para su mejor manejo o referencia se les representa matemáticamente y también se tienen situaciones, que se pueden describir a través de la simbología matemática, así como fenómenos que se presentan en la ingeniería.* Luego, *un modelo matemático se caracteriza como aquella* *relación matemática que describe objetos, fenómenos o problemas* [Camarena, 2002, pág. 299].

En cuanto a la clasificación de los modelos matemáticos se tienen *modelos de primera generación*, cuando describen problemas de las ciencias básicas, *modelos de segunda generación* cuando el área cognitiva que representan son las ciencias básicas de la ingeniería, *modelos de tercera generación* los que resultan de construcciones de modelos de segunda generación (ciencias de especialización) y *modelos de cuarta generación,* cuando representan a la ingeniería aplicada [Camarena, 2002].

Los modelos matemáticos que ocupa esta investigación son de primera generación por ubicarse ésta en el primer semestre de licenciatura donde todavía se trabajan las ciencias básicas y son modelos nada sofisticados. Esta caracterización y clasificación se extienden a las otras ciencias con las que trabajan los alumnos, objeto de esta investigación.

Por otro lado, se debe recalcar que la *matemática en el contexto de las ciencias* persigue el aprendizaje significativo de las matemáticas a través de la transferencia del conocimiento al contexto de otras ciencias y de la vida real para la resolución de problemas. Ausubel *et al*. (1976) conciben a la transferencia como el proceso recíproco de afectación (que se produciría siempre en el aprendizaje significativo) entre la experiencia de aprendizaje y la estructura cognoscitiva. Las relaciones del aprendizaje significativo se muestran en el cuadro siguiente.

Cuadro no. 1 [Ausubel, et al., 1976, pág. 49]

Relaciones del aprendizaje significativo, significatividad potencial, significatividad lógica y significado psicológico

A. Aprendizaje significativo o adquisición de significados	requiere de	(1) Material potencialmente significativo	y	(2) Actitud de aprendizaje significativo
B. Significatividad potencial	depende de	(1) Significatividad lógica (la relacionabilidad intencionada y sustancial del material de aprendizaje con las correspondientes ideas pertinentes que se hallan al alcance de la capacidad de aprendizaje humana)	y	(2) La disponibilidad de tales ideas pertinentes en la estructura cognoscitiva del alumno en particular
C. Significado Psicológico (significado fenomenológico idiosincrático)	es el producto del	Aprendizaje significativo	o de	La significatividad potencial y la actitud de aprendizaje significativo

La significatividad potencial y la actitud de aprendizaje significativo en los cursos de matemáticas en el nivel superior, las procura la *matemática en el contexto de las ciencias* cuando enfatiza la relación de la matemática con las otras asignaturas que el alumno cursa, de su propia carrera, a través de la transferencia del conocimiento. Se entiende por transferencia del conocimiento la habilidad que tiene un individuo para plasmar su bagaje matemático en la resolución de un problema, así como saber emplear las habilidades formativas que ofrece la matemática en la resolución de problemas de toda índole científica, esto es, desde transitar entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático (en ambas direcciones) cuando se trata de fenómenos o problemas de otras áreas científicas, hasta hacer uso del espíritu científico, crítico y analítico que desarrolla la matemática en cualquier tarea profesional [Camarena, 2003].

La categorización que se propone en este trabajo pretende establecer una relación identificable entre los enunciados de los problemas (en lenguaje natural, ya existente y específicamente relevante en la estructura cognoscitiva del individuo) y el lenguaje matemático, hasta llegar al establecimiento del modelo matemático necesario para la resolución del problema, con el fin de facilitar la tarea de la traducción haciéndola más significativa para el que la lleva a cabo.

Además, esta propuesta de categorización puede constituir para el profesor lo que Ausubel *et al.* denominan un *organizador previo* y que consideran *la principal estrategia... para la manipulación deliberada de la estructura cognoscitiva. Estos organizadores normalmente se presentan antes que el material de aprendizaje en sí y se emplean para facilitar el establecimiento de una actitud favorable hacia el aprendizaje significativo* [Ausubel, *et al.,* 1976, pág. 157]. La categorización propuesta puede ser usada por el profesor como herramienta para el análisis de los enunciados de los problemas en la búsqueda del modelo matemático.

2.2. MÉTODO DE TRABAJO

El trabajo se organiza en etapas, mismas que a continuación se especifican.

2.2.1. ANÁLISIS DE TEXTOS

Dado que esta investigación desea crear una categorización de los problemas matemáticos contextualizados en las ciencias y en la vida real, dentro del ámbito escolar de acuerdo a la traducción, y particularmente, de los problemas a los que comúnmente se enfrenta el alumno de primer semestre de licenciatura en la Facultad de Química, se optó por utilizar como metodología el análisis de textos propios de la matemática, que como es sabido, *constituye una metodología para la detección de ciertos elementos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias* [Camarena, 2002, pág. 298].

El análisis se realiza siguiendo los elementos del enunciado que se matematizan, como son: objetos, situaciones, problemas y fenómenos.

Los libros de texto que se analizan corresponden a aquellos de Álgebra y Cálculo Diferencial que más se utilizan en el nivel medio superior y superior en la UAEM. Se considera el nivel medio superior por ser éste el antecedente del primer semestre de licenciatura, nivel en el que se ubica esta investigación. De los problemas que estos libros ofrecen, se escogieron aquellos que constituían problemas de la vida real o problemas de otras ciencias, especialmente de la Química.

Estos problemas son utilizados, en el ámbito escolar de la Facultad de Química (FQ) de la UAEM, como una herramienta de aprendizaje del Cálculo y de adquisición de experiencia en el proceso del modelado matemático.

2.2.2. ELABORACIÓN DE LA PROPUESTA

A partir del análisis de textos, se crea la categorización como una forma de organización de los problemas matemáticos de acuerdo al tipo de traducción que los enunciados demandan.

Cabe resaltar que la propuesta es original y es el resultado de la búsqueda personal de la autora de este trabajo, de elementos lingüísticos y matemáticos comunes en los enunciados de diferentes problemas algebraicos y de Cálculo, que permitieran su clasificación, para lo cual se auxilió de la caracterización y clasificación de los modelos matemáticos, establecidas por Camarena (2002).

2.2.3. PUESTA A PRUEBA DE LA PROPUESTA CON ESTUDIANTES

Se diseña una actividad que consiste en resolver problemas de diferentes categorías, con el fin de recabar información adicional sobre la categorización.

2.2.4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se analizan los resultados de la actividad anterior a la luz de la *matemática en el contexto de las ciencias* para retroalimentar la propuesta.

Capítulo III   Análisis de textos

Los libros de texto que se analizan son, en la materia de Álgebra, el de Baldor (2000) y el de Lehmann (1979), en sus capítulos de problemas, y en Cálculo Diferencial, el de Larson *et al.* (1999) y el de Zill (1987), en los capítulos de aplicaciones. También se analizó el libro de Matemáticas de Haeussler & Paul (1997), que incluye temas tanto de Álgebra como de Cálculo.

Para este análisis, se examinan los enunciados de los problemas desde un punto de vista lingüístico y matemático con el fin de encontrar una relación entre éstos, apoyándose en la caracterización de modelos matemáticos que se emplean en la ingeniería creada por Camarena (2002).

Por el grado escolar en el que se ubica esta investigación, los modelos matemáticos estudiados son de primera generación, es decir, de las ciencias básicas, e incluso modelos relacionados con la vida diaria de los estudiantes, por ser éste tema de interés de la *matemática en el contexto de las ciencias*. Por ello mismo, los objetos, situaciones, fenómenos y problemas que aparecen en los problemas de esta investigación, no necesariamente tienen que pertenecer a la ingeniería, sino que también se toman en cuenta conceptos de otras áreas del conocimiento.

Cabe insistir en que los problemas escogidos para esta propuesta son únicamente problemas matemáticos contextualizados en los que en el enunciado no aparece expresión algebraica alguna. Esto con la doble intención de que la traducción sea completa y de que se aplique la matemática a problemas de la vida cotidiana, como lo establece la teoría de la *matemática en el contexto de las ciencias*. Por ello se descartan problemas en los que la expresión algebraica desde la que se parte es presentada en el enunciado, ya que parte de la traducción está hecha, como en el siguiente ejemplo:

♦ *Según el método lineal de depreciación, el valor υ de cierta máquina después de t años está dada por*

$$\upsilon = 50{,}000 - 5000t$$

donde $0 \leq t \leq 10$. ¿Qué tan rápido cambia υ con respecto a t, cuando $t = 2$, $t = 3$ y en cualquier momento? [Haeussler & Paul, 1997. pág. 590]

También se descartan los problemas de corte estrictamente matemático, no contextualizados, en los que desde un principio se trabaja en el lenguaje algebraico y no hay una traducción expresa, como por ejemplo, éste que propone Schoenfeld para análisis de estrategias:

- ♦ *Sean P(x) y Q(x) dos polinomios cuyos coeficientes son los mismos pero en orden contrario, es decir,* $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 +...+ a_nx^n$ *y* $Q(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 +...+a_0x^n$ *¿Cuál es la relación entre las raíces de P(x) y Q(x)? Demostrar la respuesta.* [Santos, 1997, pág. 36]

También hay que resaltar el hecho de que a pesar de que todos los problemas matemáticos involucran necesariamente una traducción del lenguaje natural a un modelo matemático, en algunos la traducción se lleva a cabo a través de un modelo intermedio de representación no necesariamente matemático. Por ejemplo, el problema del millón de dólares:

"Imagina que estás viendo "el equipo A" en la televisión. En la primera escena, ves a un ladrón escapando de un banco cargando una bolsa en el hombro y te dicen que ha robado un millón de dólares en billetes de a dólar. ¿Será posible?

Un alumno empezó a resolverlo representando el problema en términos de volumen (si un millón de billetes podrían caber en una bolsa), y después lo representó en términos de peso (cuánto pesan un millón de billetes de un dólar) y llegó a la conclusión de que aún en billetes de 10 dólares, la bolsa sería demasiado grande y demasiado pesada para cargarla una sola persona" [Lesh *et.al.*, 1987, pág. 39].

En el proceso del análisis, se observaron ciertas peculiaridades en la relación entre el lenguaje natural y el algebraico, que describiremos previamente.

Existen varias maneras en nuestro lenguaje, de referirse a un elemento matemático. Veamos unos ejemplos:

- ü $\div \rightarrow$ entre, el cociente, la división, etc.
- ü $+ \rightarrow$ más, se aumenta, se añade, se hace mayor por, excede, etc.
- ü $* \rightarrow$ por, se multiplica, se hace tantas veces, etc.
- ü $2(\ ) \rightarrow$ el doble de, dos veces, etc.
- ü $a = kb \quad \equiv \quad a/b = k \rightarrow$ *a* es directamente proporcional a *b*, la razón entre *a* y *b* es constante, etc.
- ü $(\ )^3 \rightarrow$ el triple producto, el cubo, la tercera potencia, etc.

Por otro lado, existen determinadas palabras que, en el campo de la matemática, solamente tienen una traducción al lenguaje algebraico, mientras que, en determinados campos de la Ciencia, se traducen de forma diferente, constituyéndose una transposición contextualizada, como se define en la *matemática en el contexto de las ciencias* [Camarena, 2000b]. Por ejemplo, la palabra “por” en matemáticas se traduce como una multiplicación de los elementos que enlaza, sin embargo en la Física y en la Economía, se traduce como una división (por ejemplo: velocidad igual a 25 Kilómetros por hora $\rightarrow$ v = 25 Km/h, Costo mensual o por mes $\rightarrow$ $ / mes). Otro ejemplo es la palabra “ganar”, que mientras en matemáticas se traduce como un aumento, es decir una suma, en los fenómenos químicos de óxido-reducción, la ganancia de electrones se traduce como una disminución del número de oxidación.

Algo más a tomar en cuenta es que, en los enunciados de los problemas, aparecen palabras de uso común combinadas con términos técnicos, y que la interpretación de ambos dependerá de las habilidades y conocimientos del lector, así como de su capacidad para situarlas en el contexto pertinente. Palabras como “función” o “integrar” pueden tener significados diferentes dependiendo del contexto del problema, mientras que la palabra “coseno” solamente puede ser interpretada en forma matemática. Además, deberá saber reconocer elementos semejantes a través de representaciones equivalentes, como por ejemplo, traducir el doble del radio de un círculo como su diámetro, lo cual dependerá básicamente de sus conocimientos previos.

Cuando se traduce un enunciado completo, intervienen términos que se pueden traducir directamente así como significados que deben de relacionarse a través de un conocimiento específico. Todo ello se tomó en cuenta en el análisis de los problemas.

Una vez hecho este paréntesis en cuanto a la relación entre nuestro lenguaje natural y el matemático, se procede a mostrar, a través de una selección de problemas, el análisis realizado.

> Problema A) *Un perro y su collar han costado $54 y el perro costó 8 veces lo que el collar. ¿Cuánto costó el perro y cuánto el collar?* [Baldor, 2000. pág. 137]

Si le asignamos el símbolo P a lo que costó el perro y C a lo que costó el collar, con los datos que el enunciado ofrece, se pueden establecer las situaciones y las relaciones entre ellas

$$P + C = 54$$

$$P = 8C$$

suficientes para crear una ecuación entera de primer grado y constituir el modelo matemático que permite la resolución del problema.

Problema B) *Repartir 196 soles entre A y B de modo que si los 3/8 de la parte de A se dividen entre el quinto de la de B, se obtiene 1 de cociente y 16 de residuo.* [Baldor, 2000. pág. 249]

Asignándole el símbolo A a la cantidad que recibe A y B a la cantidad que recibe B, podemos, a partir del enunciado, establecer la siguiente situación

$$A + B = 196$$

y la relación entre datos

$$3/8A \div 1/5B$$

sin embargo el enunciado no describe la relación que hay entre esta división y los conceptos que menciona a continuación: el cociente y el residuo. Para poder establecer esa relación, y por tanto el modelo, el individuo debe evocar, gracias al enunciado, los conceptos de dividendo (D) y divisor (d) y su relación con los conceptos de cociente (c) y residuo (r); esa relación establece que el resultado de dividir el dividendo entre el divisor es igual al resultado de sumar el cociente con la división entre el residuo y el divisor, o lo que es lo mismo

$$D/d = c + r/d$$

y poder así escribir

$$\frac{\frac{3}{8}A}{\frac{1}{5}B} = 1 + \frac{16}{\frac{1}{5}B}$$

que junto con

$$A + B = 196$$

se conforma una ecuación fraccionaria de primer grado que constituye el modelo matemático para resolver el problema.

Problema C) *Se tienen dos focos luminosos, A de 36 bujías y B de 100 bujías, estando B 4 m a la derecha de A. Hallar el punto igualmente iluminado de la recta AB* [Baldor, 2000. pág. 466].

El enunciado de este problema expresa los datos de la distancia entre el foco A y el foco B

$$r_{AB} = 4 \text{ m}$$

y de las intensidades luminosas de cada uno de ellos (sin nombrar a la cantidad física).

$$I_A = 36 \text{ bujías} \;;\; I_B = 100 \text{ bujías}$$

Sin embargo, no expresa la relación entre ellos ni ofrece elementos que permitan evocar la relación pertinente que constituya el modelo matemático para hallar el punto igualmente iluminado. Para ello, el individuo debe evocar por sí mismo el fenómeno que las relaciona, que es la Ley de la Fotometría. En ésta, se relacionan las intensidades luminosas de dos focos, con la distancia de cada uno de ellos a un punto igualmente iluminado por ambos

$$I_1/r_1^2=I_2/r_2^2$$

De manera que

$$r_1 + r_2 = 4$$

Si el individuo no conoce esta ley, el enunciado no le ayuda en nada para poder llegar a ella y poder establecer el modelo que permite la solución del problema

$$36/r_1^2 = 100/(4 – r_1^2)$$

> Problema D) *¿Cuántos kilogramos de un mineral que contiene un 60% de plata pura y cuántos de un mineral que contiene un 90% deberán mezclarse para obtener 6 kilogramos de aleación que tenga un 80% de plata pura?* [Lehmann, 1979. pág. 91]

Si asignamos símbolos a los datos que el enunciado da, obtenemos: *x* (kg del mineral con 60% de plata), *y* (kg del mineral con 90% de plata), 0.6*x* (kg de plata en el primer mineral), 0.9*y* (kg de plata en el segundo mineral). Además del enunciado se obtienen los siguientes datos: masa aleación= 6Kg y 6(0.8) kg de plata en la aleación. Todos ellos se relacionan a través del fenómeno de la mezcla, el cual, en el nivel de Química en el cual se desarrolla este trabajo, la traducción es literal[3]. Sin embargo, cabe aclarar que en otro contexto, estaríamos hablando de una traducción con evocación.

Sólo deberán sumarse las masas

$$x + y = 6$$

$$0.6x + 0.9y = 6(0.8)$$

de manera que a partir únicamente del enunciado se puede desprender el modelo que permite plantear y resolver el problema.

> Problema E) *A y B corren una carrera de un kilómetro, ganando B por 1 minuto. Luego repiten la competencia, aumentando A su velocidad en 2 kilómetro por hora y disminuyendo B su velocidad en la misma cantidad; de este modo, A gana por 1 minuto. Calcular la velocidad de cada uno en la primera competencia* [Lehmann, 1979. pág. 133].

Del enunciado de este problema se desprenden datos a los cuales se les puede asignar símbolos: v_{A1} : velocidad de A en la primera carrera, v_{B1}: velocidad de B en la primera

[3] "Mezcla" se puede traducir directamente al lenguaje matemático como una suma de masas.

carrera, v_{A2}: velocidad de A en la segunda carrera, v_{B2}: velocidad de B en la segunda carrera, t_{A1}: tiempo que hace A en la primera carrera, t_{B1}: tiempo que hace B en la primera carrera, t_{A2}: tiempo que hace A en la segunda carrera, t_{B2} : tiempo que hace B en la segunda carrera, y también que la distancia por recorrer en ambas competencias es s = 1 km. Además, después de evocar que 1h = 60 min, se obtienen del enunciado las situaciones siguientes:

$$v_{A2} = v_{A1} + 2/60$$

$$v_{B2} = v_{B1} - 2/60$$

$$t_{A1} = t_{B1} + 1$$

$$t_{A2} + 1 = t_{B2}$$

Sin embargo, para traducir toda esta información a un modelo matemático que represente el planteamiento y permita resolver el problema, se necesita conocer el fenómeno del movimiento rectilíneo uniforme (v = s / t , expresado como t = s / v), y formular entonces, a partir de las dos situaciones entre los tiempos, las relaciones entre las velocidades en la primera competencia:

$$\frac{1}{V_{A1}} = \frac{1}{V_{B1}} + 1$$

$$\frac{1}{V_{A1} + \frac{2}{60}} + 1 = \frac{1}{V_{B1} - \frac{2}{60}}$$

reconociendo que el enunciado no es suficiente. El modelo que resulta es una ecuación cuadrática.

> Problema F) *La frecuencia de vibración de una cuerda en tensión es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcional al producto de la longitud por el diámetro de la cuerda. Calcular el porcentaje de cambio en la frecuencia si la tensión aumenta un 20 por ciento, la longitud aumenta un 15% y el diámetro disminuye un 10 por ciento* [Lehmann, 1979. pág. 204].

La primera parte del enunciado de este problema describe claramente las relaciones entre los conceptos: frecuencia de vibración, tensión, longitud y diámetro de la cuerda, de manera que se obtiene un primer modelo matemático

$$f = \frac{\sqrt{t}}{ld}$$

En la segunda parte, aparecen las situaciones que representan las nuevas condiciones para los conceptos mencionados

$$t' = t + 0.20t$$

$$l' = l + 0.15l$$

$$d' = d - 0.1d$$

claramente aplicables al modelo matemático descrito

$$f' = \frac{\sqrt{1.2t}}{(1.15l)(0.9d)}$$

sin embargo para calcular el porcentaje de cambio en la frecuencia, se necesita un modelo que la propia palabra "cambio" evoca: una regla de tres o directamente una equivalencia entre razones

$$\% f = 100\,\% \frac{\frac{\sqrt{1.2t}}{(1.15l)(0.9d)}}{\frac{\sqrt{t}}{ld}}$$

Problema G) *Por una cinta transportadora está cayendo arena sobre un montón de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montón es unas tres veces la altura. ¿A qué ritmo cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?* [Larson *et al*, 1999. pág. 167]

En este problema, el enunciado nos da la situación de la razón de cambio del volumen $dV/dt = 10 ft^3/min$ cuando su altura es h = 15 ft, así como la situación entre las dimensiones del cono (D = 3h), pero para encontrar la relación entre las tasas de cambio, y así calcular el ritmo de cambio de la altura, se debe evocar primeramente el concepto del volumen de un cono $V = (\pi r^2 h)/3$, gracias al enunciado que menciona la forma cónica del montón de arena. Después, relacionando D = 2r, se llega a la expresión

$$V = \frac{3}{4}\pi h^3$$

la cual es el modelo del que se parte para derivar respecto al tiempo (lo expresa claramente las palabras "ritmo de cambio") y establecer el modelo definitivo que expresa la relación entre las tasas de cambio y que permite resolver el problema

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Problema H) *Calcular dos números positivos que cumplan que la suma del primero más el doble del segundo es 100 y el producto máximo* [Larson *et al,* 1999. pág. 242].

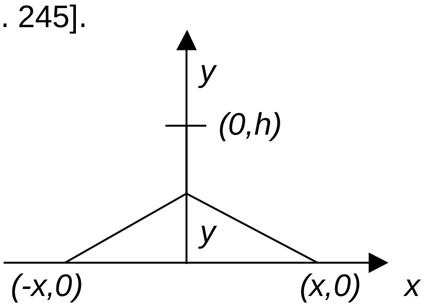
Si les atribuimos los símbolos *x* y *y* al primero y segundo número respectivamente, el enunciado de este problema expresa claramente las situaciones

$$x + 2y = 100$$

$$xy = P$$

de manera que el modelo matemático del que se parte para hallar los números que hacen el producto máximo (el producto como función de uno de los dos números) emerge directamente del enunciado.

Problema I) *Dos fábricas están situadas en las coordenadas (-x,0) y (x,0) y su central de suministro de energía en el punto (0,h) (véase figura). Calcular el valor de y que hace mínima la longitud de la conducción de energía a las dos fábricas* [Larson *et al,* 1999. pág. 245].



Este es un problema cuyo enunciado incluye una figura que facilita en gran medida la traducción al lenguaje algebraico pues permite la visualización de las relaciones entre las constantes (x, h) y las variables (L, y), ya que el enunciado por sí mismo no las establece ni las evoca a través de la mención de algún modelo. El individuo que se enfrenta a este problema debe expresar la longitud L como la suma de las dos hipotenusas de los triángulos de la figura con la distancia entre el punto (0,y) y (0,h)

$$L = 2H + d$$

que constituye el primer modelo, pero el cual es transitorio pues no se conoce ni H ni d, para lo cual deberá dominar el Teorema de Pitágoras y la métrica entre dos puntos. Los modelos que evoca son

$$d = \sqrt{(h-y)^2}$$

$$H = \sqrt{x^2 + y^2}$$

de manera que sustituyéndolos en L = 2H + d, queda el modelo que permite la resolución del problema.

$$L = 2\sqrt{x^2 + y^2} + (h - y)$$

Problema J) *Una escalera de 15 pie se apoya sobre el muro de una casa. El pie de la escalera se separa de la base del muro a razón constante de 2 pie/min. ¿A qué razón se desliza la parte superior de la escalera por el muro cuando el pie de la misma está a 5 pie del muro?* [Zill, 1987. pág. 194]

Este es un ejemplo de problema en el que es conveniente hacer un dibujo de lo que expresa el enunciado para visualizar la constante (h = 15 pie), así como las variables (x: distancia del pie de la escalera al muro, y: distancia de la parte superior de la escalera al suelo) y poder establecer una relación entre ellas. El triángulo rectángulo que se forma entre lo largo de la escalera (h) y la distancia de un extremo de la escalera al muro (x) y del otro al piso (y), permite que se evoque el Teorema de Pitágoras y afirmar en lenguaje matemático que

$$15^2 = x^2 + y^2$$

Además el enunciado da la situación dx/dt = 2pie/min, cuando x = 5 pie, misma que se aplicará cuando se obtenga la derivada de la función anterior respecto al tiempo, modelo sobre el cual se trabaja la resolución del problema.

Problema K) *Obtenga dos números no negativos cuyo producto sea 50 y cuya suma sea mínima* [Zill, 1987. pág. 229].

Asignándole los símbolos *m* y *n* a los dos números, en el enunciado aparecen expresadas las situaciones

$$m > 0; n > 0$$

$$mn = 50$$

$$m + n = S$$

que permiten establecer el modelo con el que se resolverá el problema.

Problema L) *Encuentre las dimensiones de la lata cilíndrica para jugo que utilice la menor cantidad de material cuando el volumen del envase es de 32 plg³* [Zill, 1987. pág. 231].

El enunciado de este problema menciona claramente los conceptos de cilindro y su volumen, con lo que provoca la evocación del concepto "volumen de un cilindro"

$$V = \pi r^2 h$$

que establece la relación entre la dimensiones de la lata (r,h). Sin embargo, la “cantidad de material” debe ser traducida a la situación de que el área total de la lata es igual a la suma del área de las dos tapas con la del cuerpo del cilindro

$$A_T = 2A_O + A_ð$$

tras un ejercicio individual de análisis y razonamiento (que se favorece si se traza el dibujo), al cual el enunciado no contribuye. Sobre esa situación, el individuo relaciona la longitud del cuerpo del cilindro con el perímetro de las tapas, para poder dejar el área total en función del radio y de la altura, es decir, de las dimensiones.

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

que junto con la expresión del volumen

$$32 = \pi r^2 h$$

permiten establecer el modelo que se usará en la resolución del problema

$$A_T = 2\pi r^2 + 64/r$$

> Problema M) *Un fabricante químico desea surtir un pedido de 700 galones de una solución de ácido al 24%. En existencia tiene soluciones al 20 y 30%. ¿Cuántos galones de cada solución debe mezclar para satisfacer el pedido?* [Haeussler & Paul, 1997. pág 158]

Este enunciado permite hacer la traducción directamente del lenguaje natural al algebraico pues da las situaciones (x galones de solución al 20%, y galones de solución al 30%), y los datos (solución total = 700 galones, cantidad de ácido en la mezcla = 0.24(700)). Así, el modelo que plantea este problema queda conformado por la suma de volúmenes, en las dos expresiones siguientes

$$x + y = 700$$

$$0.20x + 0.30y = 0.24(700)$$

> Problema N) *Una compañía taladora posee un bosque de forma rectangular, 1 x 2 millas. La compañía quiere cortar una franja uniforma con árboles a lo largo de los lados externos del bosque. ¿Qué tan ancha debe ser la franja si se quiere conservar al menos ¾ de millas^2 de bosque?* [Haeussler & Paul, 1997. pág 555]

Para traducir este enunciado al lenguaje algebraico es conveniente realizar una ilustración del planteamiento, para facilitar el establecimiento de la relación entre datos y situaciones. Los datos que el enunciado expresa son: $lado_1$ = 1 mi, $lado_2$ = 2 mi y superficie del bosque =

1 x 2 mi^2 y la situación es que la superficie final del bosque ≥ ¾($2mi^2$). Si le asignamos la letra x, a las millas cortadas de largo de cada lado de bosque, nos quedan las situaciones

$$lado_1 \text{ final} = 1 – 2x$$

$$lado_2 \text{ final} = 2 – 2x$$

mismas que se relacionan a través del modelo que emana del mismo enunciado

$$(1 – 2x)(2 – 2x) \geq \tfrac{3}{4} (2 \text{ mi}^2)$$

> Problema O) *Una empresa de cable de televisión tiene 4,800 suscriptores que pagan cada uno $18 mensuales, puede conseguir 150 suscriptores más por cada $0.50 menos en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?* [Haeussler & Paul, 1997. pág 699]

En este caso, el enunciado no expresa ni insinúa a la variable independiente de la función que servirá para formar el modelo de este problema: x disminuciones cada 150 suscriptores. Los datos que el enunciado ofrece son: 150 suscriptores, -$0.50, número inicial de suscriptores = 4,800 y renta mensual inicial = $18. Sin embargo las situaciones: número final de suscriptores = 4,800 + 150x y renta mensual final = $18 - $0.50x, las deberá construir el individuo que está planteando el problema en términos algebraicos, así como la relación entre ellas que finalmente expresa la función modelo

Ingreso total = (número de suscriptores)(renta/suscriptor)

I = (4,800 + 150x)($18 - $0.50x)

Sintetizando este análisis, observamos las siguientes regularidades:

Problema A) El enunciado expresa situaciones y la relación entre ellas, dando lugar al modelo matemático.

Problema B) El enunciado expresa datos, situaciones y conceptos, pero no expresa la relación entre éstos últimos, misma que se evoca por las palabras del enunciado.

Problema C) El enunciado expresa datos pero no menciona ni evoca al fenómeno que los relaciona para establecer el modelo.

Problema D) El enunciado expresa datos y el fenómeno mediante el cual se relacionan éstos, con lo cual el modelo se establece a partir únicamente del enunciado.

Problema E) El enunciado expresa datos y situaciones, pero no menciona ni evoca al fenómeno que relaciona a todos ellos para generar el modelo matemático.

Problema F) El enunciado menciona a los conceptos y la relación entre éstos, así como a las situaciones. Sin embargo, el modelo que permite resolver el problema no se menciona, sino que las palabras utilizadas permiten evocarlo.
Problema G) El enunciado menciona situaciones, pero el modelo matemático requiere de otros conceptos que no son descritos en el enunciado, sino sólo nombrados a manera de evocación.
Problema H) El enunciado expresa las situaciones que dan lugar al modelo matemático.
Problema I) El enunciado de este problema, que incluye una figura descriptiva, solamente nos da algunos datos. Las otras situaciones, así como el modelo que permite resolver el problema, deberán ser construidos por el individuo a partir de sus propios conocimientos.
Problema J) El enunciado menciona situaciones y datos, sin embargo la relación entre ellos (el modelo) ni se menciona, ni se evoca.
Problema K) El enunciado expresa las situaciones que dan lugar al modelo matemático.
Problema L) El enunciado da únicamente conceptos que permiten, a su vez, evocar otros conceptos, pero la situación a partir de la cual se construye el modelo ni se menciona ni se evoca.
Problema M) El enunciado expresa datos y el fenómeno mediante el cual se relacionan éstos, con lo cual el modelo se establece a partir únicamente del enunciado.
Problema N) El enunciado ofrece situaciones y datos, así como la relación que hay entre éstos, de manera que se puede construir el modelo matemático a partir de aquél únicamente.
Problema O) El enunciado da algunos datos y situaciones involucrados en el modelo, pero los restantes, así como su relación, deberán ser aportados por el individuo para construir éste.

A continuación, agruparemos los problemas analizados de acuerdo a la información contenida en sus enunciados.

Cuadro no. 2. Esquema de los problemas analizados de acuerdo a las características de sus enunciados.

El enunciado da todos los datos, conceptos, situaciones y/o fenómenos, que tienen traducción directa al lenguaje matemático en forma de modelo matemático	El enunciado da algunos o todos los datos, conceptos, situaciones y/o fenómenos, y los que faltan para el establecimiento del modelo matemático, los evoca	El enunciado da algunos o todos los datos, conceptos, situaciones y/o fenómenos, y los que faltan para el establecimiento del modelo matemático, los debe aportar el individuo
Problemas: A,D,H,K,M,N	Problemas: B,F,G	Problemas: C,E,I,J,L,O

Tomando en cuenta todo lo anterior, se observa que existen problemas que se caracterizan porque sus enunciados mencionan por su nombre a los datos, conceptos, situaciones y/o fenómenos, de manera que la representación matemática de éstos es literal.

También existen problemas que se caracterizan porque sus modelos matemáticos representativos necesitan de datos, conceptos, situaciones y/o fenómenos que evocan sus enunciados pero que no son mencionados literalmente (pueden aparecer indirectamente o en su descripción).

Existe un tercer grupo en los que el modelo matemático necesita de datos, conceptos, situaciones y/o fenómenos que el enunciado no ofrece ni literalmente ni con evocación por lo que el que elabora el modelo del problema debe crearlos o recrearlos.

Como resultado de este análisis, surge nuestra propuesta de categorización de los problemas contextualizados de acuerdo a sus enunciados, misma que a continuación se expone.

Capítulo IV Diseño de la propuesta

4.1. PROPUESTA TEÓRICA DE CATEGORIZACIÓN

Antes de presentar la propuesta teórica de categorización, se define el término “categoría”. Se entiende por categoría *cada uno de los grupos en que, atendiendo a determinadas características, se pueden clasificar las personas o cosas* [*El Pequeño Larousse Ilustrado*, 1996, pág. 216].

4.1.1. PRIMERA CATEGORÍA. PROBLEMAS CON ENUNCIADO LITERAL

Problemas cuyo enunciado expresa literalmente a los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos, para llegar al modelo matemático del problema. Para realizar la traducción es necesario conocer las representaciones algebraicas de los términos que se nombran en el mismo enunciado.

Son problemas que con el tiempo se convierten en ejercicios para el alumno.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE ESTA CATEGORÍA:

- *Las edades de un padre y su hijo suman 83 años. La edad del padre excede en 3 años al triple de la edad del hijo. Hallar ambas edades* [Baldor, 1983, pág. 136]

En este ejemplo, los datos son: la edad del padre P, la edad del hijo H, el triple de la edad del hijo 3H, que P excede en 3 años P – 3. Las situaciones son que la suma de las edades es 83 y que la edad del padre excede en 3 al triple de la edad del hijo

$$P + H = 83$$

$$P - 3 = 3H$$

De manera que el modelo para resolver este problema se obtiene del enunciado únicamente.

- *Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 pie sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de 2/3 de la altura anterior. Determine qué altura alcanza en su tercero y en su enésimo rebote* [Zill, 1987, pág. 543].

El enunciado menciona a los datos: altura inicial = 15 pie y altura subsiguiente = 2/3 de altura anterior. La situación entre éstos es la que permite establecer el modelo para resolver el problema

$$\text{Altura rebote}_1 = 2/3\ (15)$$

$$\text{Altura rebote}_2 = 2/3\ [2/3\ (15)]$$

$$\text{Altura rebote}_3 = 2/3\ [2/3\ [2/3\ (15)]]$$

$$\text{Altura rebote}_n = [2/3]^n\ (15)$$

Nuevamente, el modelo matemático se obtiene únicamente del enunciado.

4.1.2. SEGUNDA CATEGORÍA. PROBLEMAS CON ENUNCIADO EVOCADOR

Problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático que permite resolverlo a través de las situaciones, objetos y/o fenómenos y las relaciones entre ellos que expresa literalmente, sino que son necesarios otros modelos que evoca el mismo enunciado, nombrándolos, describiéndolos o refiriéndose a ellos en forma indirecta.

El modelo evocado sirve de puente entre la información del enunciado y la traducción final al modelo representativo del problema. En el cuadro no. 3, se muestran varios ejemplos.

Cuadro no. 3. Ejemplos de modelos evocados que sirven de puente entre el lenguaje natural y el algebraico.

Lenguaje común	Modelo evocado	Lenguaje algebraico
Conjunto de puntos que distan 5 unidades del punto (-2,4)	Circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	$(x + 2)^2 + (y – 4)^2 = 25$
La distancia recta que recorre un móvil con velocidad constante de 90 km/h en 3 h	M.R.U. $V = s /t$	S = 90 km/h (3 h)
La resistencia equivalente a un sistema de dos resistencias de 3 y 5 Ω conectadas en paralelo	Resistencias en paralelo $1/R_T = 1/R_1 + 1/R_2 +…1/R_n$	$1/R_T = 1/3\Omega + 1/5\Omega$
El lado opuesto al ángulo de un triángulo cuya magnitud se desea calcular, mide 5 y la hipotenusa mide 8.	Seno de un ángulo $\text{Sen}\ \theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	Sen è = 5/8

Pensamos que la resolución de estos problemas demandaría (y reforzaría) el conocimiento conceptual. Esto es, a diferencia de la traducción literal en la que la no es necesario que se entienda el concepto sino únicamente que se sepa su nombre y su correspondiente representación matemática, en este tipo de traducción se necesita comprender el significado del concepto, de manera que se pueda interactuar con él en la búsqueda del modelo matemático y lograr, así, resolver el problema. Este proceso refuerza su conocimiento.
Cabe reiterar que en los problemas de esta categoría existe la posibilidad de que parte de la información del enunciado se traduzca literalmente, pero ésta no es suficiente para establecer el modelo matemático del problema.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE ESTA CATEGORÍA:

- *Las dimensiones de una caja rectangular son 6 cm, 8 cm y 12 cm. Si cada una de estas dimensiones se disminuye en la misma cantidad, el volumen disminuye en 441 cm. Calcular esta cantidad* [Lehmann, 1979, pág. 260].

Los datos que el enunciado nos da literalmente son las tres dimensiones de la caja 6,8 y 12 cm., la cantidad en la que se disminuye cada una *x* y la consecuente disminución del volumen V – 441. Las relaciones entre éstos son:

$$12 - x$$

$$8 - x$$

$$6 - x$$

Para establecer el modelo que permita resolver el problema, se necesita la expresión del volumen de un paralelepípedo rectangular, modelo que evoca el enunciado del problema al hablar del volumen de la caja

$$V = largo*alto*ancho$$

Así, el volumen inicial está dado por:

$$V = 6*8*12 = 576$$

Y el volumen después de disminuir cada dimensión en *x*, será

$$V - 441 = (6 - x)(8 - x)(12 - x)$$

Quedándonos el modelo para este problema en particular de la manera siguiente

$$576 - 441 = (6 - x)(8 - x)(12 - x)$$

- *La suma de dos números es 59 y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 5. Hallar los números* [Baldor, 1983, pág. 249].

En este problema tenemos como datos a los dos números, uno mayor A y otro menor B, y al cociente = 2 y al residuo = 5. La situación es la suma de los dos números

$$A + B = 59$$

sin embargo lo que sigue en el enunciado no se puede traducir sin la evocación del concepto de la "división" y el modelo matemático asociado a ésta

$$\text{Dividendo} \div \text{divisor} = \text{cociente} + (\text{residuo}/\ \text{divisor})$$

De manera que el modelo para resolver el problema nos queda

$$A + B = 59$$

$$\frac{A}{B} = 2 + \frac{5}{B}$$

o en su forma equivalente

$$59 - B = 2B + 5$$

4.1.3. TERCERA CATEGORÍA. PROBLEMAS CON ENUNCIADO COMPLEJO

Problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático a través, ni de los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos que expresa literalmente, ni de los que evoca, sino que se necesita que el individuo que está resolviendo el problema, conozca un modelo que se adapte a las condiciones del mismo y lo sepa aplicar adecuadamente. Así, el modelo no surge ni literalmente ni por evocación del enunciado, sino que surge de la estructura cognoscitiva del individuo.

También en este caso hay evocación, pues se *trae algo a la memoria o a la imaginación* [*El Pequeño Larousse Ilustrado*, 1996, pág. 430], sin embargo la diferencia con la segunda categoría es que en los problemas de aquélla, el enunciado es el que la origina mientras que en esta tercera, el individuo es el que evoca. Por ello, se necesita que el individuo realice la tarea de escoger, entre sus conocimientos previos, el modelo pertinente (con su simbología y su significado) para relacionar los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos que estén involucrados en el problema y poder así establecer el modelo matemático propio.

En la práctica docente se ha observado que los problemas de esta categoría son los que más trabajo cuesta a los alumnos. Lo que comúnmente denominamos "explicación" del problema consiste, la mayoría de las ocasiones, en "regalarles" el trabajo de evocar e interactuar para realizar la traducción definitiva, puesto que comúnmente se requieren conceptos que se vieron tiempo atrás o en otras asignaturas, y el alumno no los tiene tan presentes como el profesor. Esto se restringe al ámbito de la matemática escolar tradicional donde se acostumbra a resolver problemas cuya teoría ya se aprendió. Cuando no se conocen la o las teorías que los respaldan, son difíciles para cualquiera, pues el enunciado es impropio para saber lo que se debe evocar. Polya lo manifiesta cuando habla de la concepción del plan, de la siguiente manera: *Sabemos, claro está, que es difícil tener una buena idea si nuestros conocimientos son pobres en la materia, y totalmente imposible si la desconocemos por completo* [Polya, 1965, pág. 30].

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE ESTA CATEGORÍA

- *Una viga de madera tiene sección rectangular de altura h y anchura w. Su resistencia S es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar en un tronco de 24 pulgadas de diámetro?* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 245]

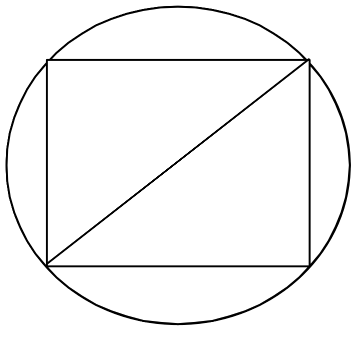
Los conceptos que el enunciado expresa son: anchura w, altura h y resistencia S, así como la relación entre ellos:

$$S = wh^2$$

Un dato es el diámetro del tronco = 24 plg.

Para relacionar lo anterior y poder establecer el modelo del problema, se necesita la evocación del Teorema de Pitágoras, de la cual no es responsable el enunciado, sino que puede ocurrírsele al alumno a partir de la figura que se desprende de la visualización del problema

Figura no. 1.



$$24^2 = h^2 + w^2$$

que relacionado con el modelo inicial, resulta el modelo que permite resolver el problema

$$S = w(576-w^2)$$

Ahora, faltaría traducir...*las dimensiones de la viga más resistente*... por “el valor de w que hace S máxima”, para poder continuar con la resolución del problema.

- La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el duplo de la cifra de las unidades y si el número, disminuido en 9, se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 6. Hallar el número. [Baldor, 2000. pág. 258]

Los datos que da el enunciado de este problema son: cifra de las decenas (d), cifra de las unidades (u), número de dos cifras (du), y cociente = 6.

Las situaciones que aparecen son: la cifra de las decenas es el duplo de la cifra de las unidades

$$d = 2u$$

y que el número disminuido en nueve du –9, se divide por la suma de las cifras d + u para darnos 6.

Se pensaría que la traducción es literal

$$\frac{du - 9}{d + u} = 6$$

Sin embargo, el enunciado no está dando el valor del número, ni evoca algún modelo con el que se pueda obtener, por lo que el individuo deberá evocar notación desarrollada de un número

Ej: cdu = c(100) + d(10) + u

De manera que resulta la situación

du = d(10) + u

y, ahora sí, el modelo que permite resolverlo es el siguiente

$$d = 2u$$

$$\frac{(10)d + u - 9}{d + u} = 6$$

4.1.4. LIMITACIONES DE LA CATEGORIZACIÓN

Los ejemplos y problemas que se derivan de esta categorización dependen del nivel escolar de los individuos a los que está dirigido el análisis ya que los tres tipos de traducción dependen de aquél porque:

- la traducción literal presupone el conocimiento del vocabulario matemático y su consiguiente representación tanto en el lenguaje natural como en el matemático
- la traducción con evocación exige la comprensión de los conceptos involucrados
- la traducción compleja necesita de los dos anteriores y de una estructura cognoscitiva preparada para realizar la tarea.

Las condiciones para la traducción en cada una de las categorías hacen pensar que existe una jerarquía entre éstas, lo cual conduce a establecer la hipótesis de investigación, que se expone a continuación.

4.2. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Las hipótesis de esta investigación son:

Primera hipótesis: que la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico es una de las habilidades básicas para tener éxito en el entendimiento y planteamiento en los problemas matemáticos contextualizados.

Segunda hipótesis: Que para un mismo número de problemas de cada categoría, el entendimiento y planteamiento de los problemas de la primera categoría será logrado por un mayor número de alumnos que en la segunda categoría, y el de éstos, a su vez, por mayor número que en la tercera.

Estas hipótesis intentan ser exploradas a través de una fase experimental en la que se analiza el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico en una serie de problemas de diferentes categorías, aplicados a un grupo de estudiantes, así como los resultados comparados de la resolución de los mismos, tomando en cuenta a ésta como un indicador de su entendimiento y planteamiento. Se busca que esta fase experimental arroje evidencias respecto a dichas categorías.

Capítulo V Fase experimental de la investigación

5.1. DISEÑO DE LA EXPERIMENTACIÓN

La puesta a prueba de la propuesta se compone de problemas contextualizados de Cálculo Diferencial principalmente, y se estima que su duración sea de 1 hora aproximadamente.

Se escogieron problemas contextualizados variados, como se presentan en los libros de texto, por lo que se eligieron algunos en el contexto de la Termodinámica, de la Mecánica, de la Economía, pero también problemas matemáticos o de situaciones cotidianas.

Los problemas seleccionados, para cada una de las categorías, son los siguientes:

Problemas con enunciado literal

1. *Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie?* [Olazábal, 2002]
2. *La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 139].
3. *Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima* [Larson, *et al., 19*99, pág. 242].

Problemas con enunciado evocador

1. *Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada.* [Haeussler Jr., Paul, 1997, pág. 555]
2. *Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda,*

b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando t = 1 y t = 2... [Larson, *et al.,* 1999, pág. 129]

3. *Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el área de la superficie cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.?* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 167]

Problemas con enunciado complejo

1. *Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x...* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 129]
2. *Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción?* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 168]
3. *Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima.* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 243]

Para la aplicación de la prueba, se dividió al grupo en tres partes y a cada subgrupo se le entregó un paquete diferente de problemas.

Cada paquete incluye un problema de cada categoría y éstos se le presentan ordenados al alumno según las mismas categorías. A continuación se muestran los tres paquetes resultantes:

Paquete 1

1. *La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 139]
2. *Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones*

de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. [Haeussler Jr., Paul, 1997, pág. 555]

3. *Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción?* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 168]

Paquete 2

1. *Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima.* [Larson, *et al., 19*99, pág. 242].
2. *Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el área de la superficie cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.?* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 167]
3. *Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x...* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 129]

Paquete 3

1. *Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie?* (Olazábal, 2002)
2. *Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando t = 1 y t = 2...* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 129]
3. *Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima.* [Larson, *et al.,* 1999, pág. 243]

5.2. SELECCIÓN DEL GRUPO DE TRABAJO

El grupo de trabajo está compuesto por alumnos que acaban de finalizar su curso de Cálculo Diferencial e Integral en el primer semestre de la licenciatura de Químico Farmacéutico Biólogo, en la FQ de la UAEM.

El número de alumnos que conforman el grupo es de 35.

Todos ellos tomaron, en forma obligatoria, un curso propedéutico de Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral, un mes antes del inicio del semestre.
La procedencia de los alumnos es la ciudad de Toluca y municipios aledaños, básicamente.

5.3. INSTRUMENTACIÓN DE LA EXPERIMENTACIÓN

La autora de esta investigación dividió al grupo, al azar, en tres partes y a cada subgrupo le entregó un juego diferente de problemas, que denominamos “paquete”.
Ella misma aplicó la puesta a prueba en una hora normal de clase, por acuerdo entre ambas partes, sin permitirles consultar información alguna. El curso ya había finalizado y los alumnos estaban por conocer su calificación final.
Se les invitó muy efusivamente a que hicieran su mayor esfuerzo por resolver los problemas, ya que al no repercutir esta prueba en su calificación final, corríamos el riesgo de que desistieran de la labor cuando la dificultad les exigiera mayor empeño, como ocurre frecuentemente en matemáticas. Sin embargo, tenemos la impresión de que exceptuando un par de alumnos, el grupo mostró entusiasmo y dedicación en la resolución de la prueba.

Capítulo VI Análisis de resultados

6.1. RESULTADOS

En los problemas de ENUNCIADO LITERAL que se escogieron, las traducciones esperadas son dos en cada uno de los problemas. Les asignamos las letras *a* y *b*, por apreciar que las tipo *a* corresponden a relaciones algebraicas entre conceptos de las ciencias o de la vida cotidiana, y las tipo *b* a conceptos matemáticos del Cálculo, en los tres casos.

Paquete 1

a. "... presión es inversamente proporcional al volumen..." (P = K/V)
b. "...ritmo de cambio de la presión..." (dP/dt)

Paquete 2

a. "...dos números positivos que cumplan que su producto es 192..." (xy = 192)
b. "...la suma del primero más el triple del segundo sea mínima..." (x + 3y = S)

Paquete 3

a. "...el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de ð y al cubo del radio..." (V = 4/3ð r^3)
b. "...rapidez de cambio del radio..." (dr/dt)

En los problemas de ENUNCIADO EVOCADOR, las traducciones esperadas son:

Paquete 1

- Altura de 4 plg
- Volumen de la caja
- Área de una hoja cuadrada a la que se le corta un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina
- Mínimo de una función (el área de la hoja)

Paquete 2

- Arista
- Área superficial del cubo
- Ritmo de crecimiento del área (traducción literal = dA/dt)

Paquete 3

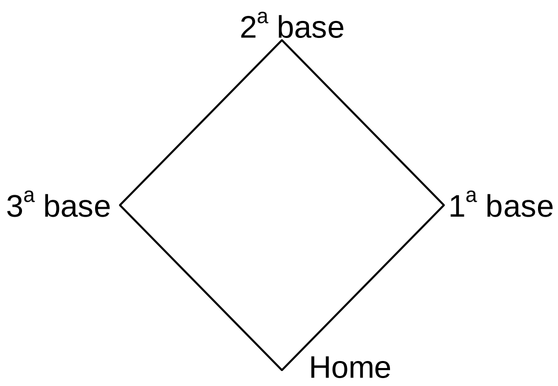
- Función que describe la posición de la moneda en caída libre
- Función que describe la velocidad de la moneda en caída libre

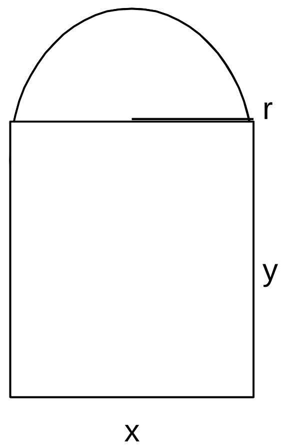
- Velocidad instantánea

En los problemas de ENUNCIADO COMPLEJO, pueden aparecer traducciones literales y con evocación, además de las evocaciones que el alumno tenga que realizar por sí solo y que son las que caracterizan a estos problemas.

Además, como ya se había apreciado en el capítulo de análisis de textos, hay problemas en los que dibujar el enunciado puede facilitar en gran medida la visualización de las relaciones entre los elementos y cuando se trata de problemas con enunciado complejo, parece que, en algunos, el dibujo actúa como el medio a través del cual el alumno puede evocar el o los modelos que se necesitan para establecer el modelo matemático del problema. Por ello, de los problemas con enunciado complejo, el dibujo del campo de béisbol del paquete 1 y el dibujo de la ventana de Norman del paquete 3 (véase figura no. 2), aunque son traducciones del lenguaje natural al gráfico, no al algebraico, se decidió evaluarlas como pasos intermedios del proceso de traducción a este último.

Figura no. 2





A continuación se presentan las traducciones en el orden que se considera más apropiado para su resolución y con los colores de acuerdo al código de elaboración propia.

CÓDIGO DE COLORES

Traducciones literales

Traducciones con evocación

Traducciones gráficas

Traducciones complejas

Cuadro no. 4. Relación de traducciones requeridas para la resolución de los problemas de enunciado complejo para los paquetes 1, 2 y 3.

Paquete 1	Paquete 2	Paquete 3
Ritmo de cambio (dx/dt)	Costo anual ($/año)	Dibujo de la ventana de Norman
Dibujo del campo de béisbol y de las bases	Identificar x como variable de la función "Costo anual"	Establecimiento de las variables en el dibujo
Establecimiento de las variables y constantes en el dibujo	Operar con los datos	Evocación de los objetos perímetro y área del rectángulo y del semicírculo
Introducción del Teorema de Pitágoras		Establecimiento del perímetro de la ventana
Establecimiento de la función "distancia a home"		Relación entre las variables
		Establecimiento de la función "área de la ventana"

Los resultados de los problemas aplicados se concentran en las tablas I, II y III, que se muestran a continuación.

Los resultados de la traducción literal y de la traducción con evocación se muestran en la tabla I, divididos por paquetes. Los resultados de la traducción compleja aparecen, de los paquetes 1 y 2, en la tabla II, y del paquete 3, en la tabla III. Para cada traducción se le asigna "uno" al alumno que realiza la traducción que se marca, y "cero" al que no.

Cabe aclarar que cuando hablamos de traducción gráfica, hacemos referencia a su sentido más general, es decir, la representación figurativa o iconográfica de una idea, y no a su sentido estrictamente matemático de una representación de datos mediante magnitudes geométricas.

Nos permitimos evaluar también la resolución de los problemas por considerarlo un indicador del buen entendimiento y planteamiento de los problemas matemáticos.

Tabla I. Resultados de las traducciones literales y con evocación para los paquetes 1, 2 y 3

TABLA I	TRADUCCION							
	LITERAL			CON EVOCACION				
PAQUETE 1	P=K/V	dP/dt	Resol.	Volum. cubo	h = 4	Area hoja	Mínimo área	Resol.
Gabriela	1	0	0	1	0	0	1	0
Grissel	1	1	0	1	1	0	0	0
Héctor G	0	0	0	1	1	0	0	0
Karina	0	0	0	1	1	0	0	0
Lorena G	1	1	0	1	1	0	0	0
Lorena S	0	0	0	1	1	0	0	0
Natalia	0	0	0	1	1	0	0	0
Stefany	0	0	0	1	1	0	0	0
Teresa	1	0	0	1	1	0	0	0
Vicente	1	1	0	1	0	0	0	0
Víctor	1	0	0	1	1	1	1	0
Yenny	1	1	1	1	0	0	0	0
12	7	4	1	12	9	1	2	0
PAQUETE 2	xy=192	x+3y=S	Resol.	Arista		Area superf. cubo	Ritmo de crecimiento	Resol.
Daniel	1	0	0	1		0	0	0
Evelin	1	1	1	1		0	1	0
Horacio	1	0	0	1		0	0	0
Isaí	1	1	1	1		0	0	0
Jaime	1	0	0	1		0	0	0
Laura	1	1	1	1		0	1	0
Mariana	1	0	0	1		0	0	0
Norma	1	0	0	1		0	0	0
Oswaldo	1	0	0	0		0	0	0
Pablo	1	1	0	1		0	1	0
Yazmín	0	0	0	1		0	1	0
Yennifer	1	0	0	1		0	0	0
12	11	4	3	11		0	4	0
PAQUETE 3	V=4/3(pi)r3	dr/dt	Resol.	Ley veloc.		Ley posición	Velocidad instantánea	Resol.
Cecilia	0	0	0	1		0	1	0
César	1	1	1	0		0	1	0
Davir	0	0	0	1		1	0	1
Héctor Z	1	1	0	0		0	1	0
Irán	1	0	0	1		1	1	0
Isabel	1	1	1	0		0	1	0
Julieta	1	0	0	0		0	1	0
Leonardo	1	0	0	0		0	0	0
Lupita	1	0	0	0		0	0	0
Nayeli	1	1	0	1		1	0	0
Noé	1	1	0	0		0	0	0
11	9	5	2	4		3	6	1

Tabla II. Resultados de las traducciones complejas para los paquetes 1 y 2

TABLA II	TRADUCCIÓN COMPLEJA						
PAQUETE 1	Traduc. literal dx/dt	Dibujo campo Forma	Bases	Establecer var. y ctes.	Introd. T. Pitágoras	Establecer función	Resol.
Gabriela	0	1	0	0	0	0	0
Grissel	1	1	1	1	1	1	1
Héctor G	0	1	1	0	0	0	0
Karina	0	1	0	0	0	0	0
Lorena G	0	0	0	0	0	0	0
Lorena S	0	1	0	0	0	0	0
Natalia	0	1	1	0	1	0	0
Stefany	0	1	1	0	0	0	0
Teresa	0	1	0	0	0	0	0
Vicente	1	1	1	1	1	1	1
Víctor	0	1	1	0	1	0	0
Yenny	1	1	1	1	1	0	0
12	3	11	7	3	5	2	2
PAQUETE 2	Traduc. Literal $/año			Identificar variable		Operar	Resol.
Daniel	0			1		1	1
Evelin	0			1		1	1
Horacio	0			0		0	0
Isaí	0			0		0	0
Jaime	0			0		0	0
Laura	1			1		1	1
Mariana	0			1		1	1
Norma	0			0		0	0
Oswaldo	1			1		1	1
Pablo	1			0		0	0
Yazmín	0			1		0	0
Yennifer	0			1		0	0
12	3			7		5	5

Tabla III. Resultados de las traducciones complejas para el paquete 3

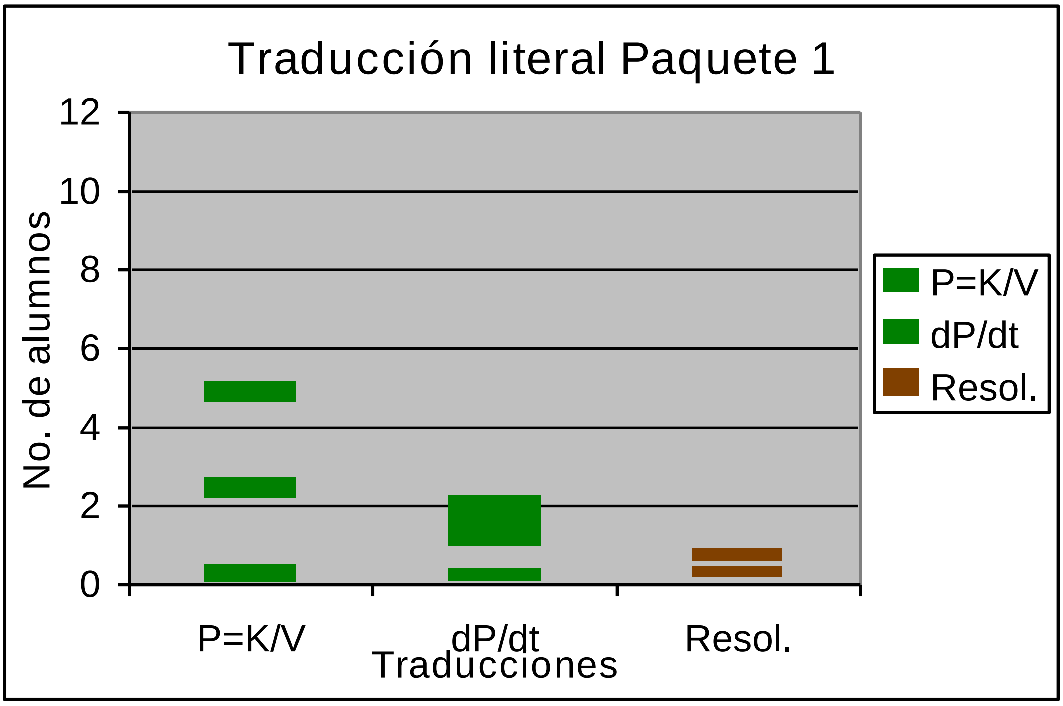
TABLA III					TRADUCCIÓN COMPLEJA					
PAQ. 3	Dibujo ventana	Establ. variab.	Perímetro rectángulo	Perímetro semicírc.	Área rectángulo	Área semicírc.	Perímetro ventana	Relación /variables	Función área	Resol.
Cecilia	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
César	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Davir	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
Héctor Z	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Irán	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
Isabel	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
Julieta	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Leonardo	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
Lupita	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
Nayeli	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
Noé	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
11	11	8	9	8	6	5	4	3	2	0

6.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS

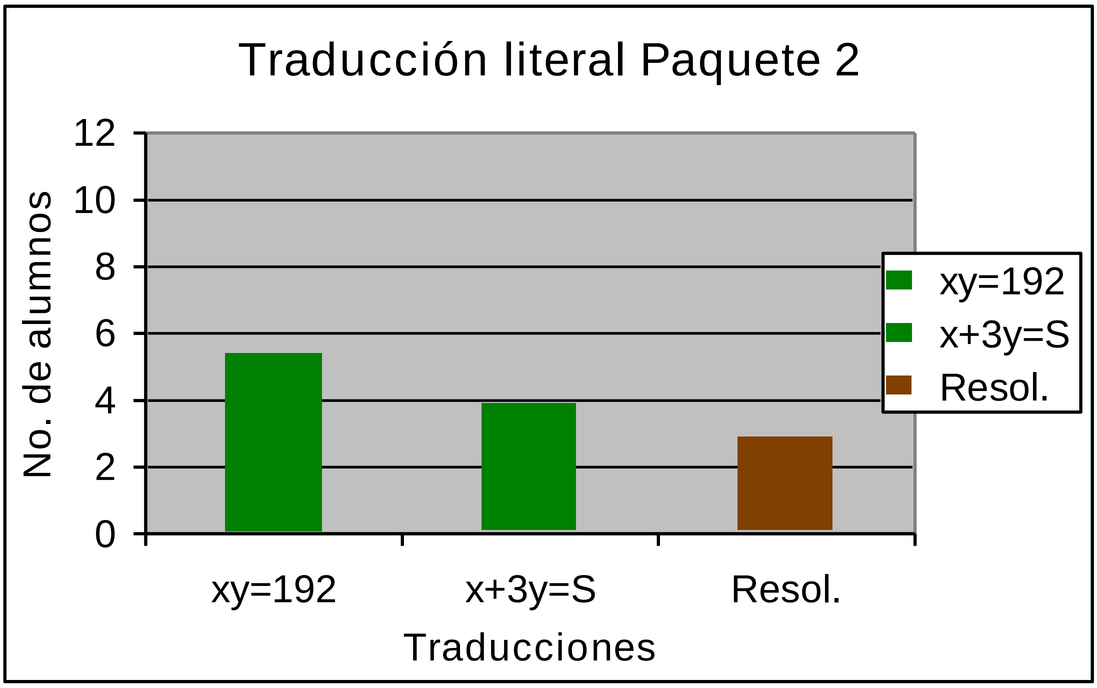
6.2.1. PRIMERA CATEGORÍA. PROBLEMAS CON ENUNCIADO LITERAL

Como ya se dijo, coincidió que en los tres paquetes, la traducción tipo *a* corresponde a relaciones algebraicas entre conceptos de las ciencias o de la vida cotidiana, ejercitados desde años anteriores, mientras que la traducción tipo *b* corresponde a conceptos matemáticos del Cálculo, más recientes en su educación. Por ello, los resultados de éxito en la traducción son mayores en *a* que en *b*, para todos los paquetes. Esto se puede apreciar en las siguientes gráficas.

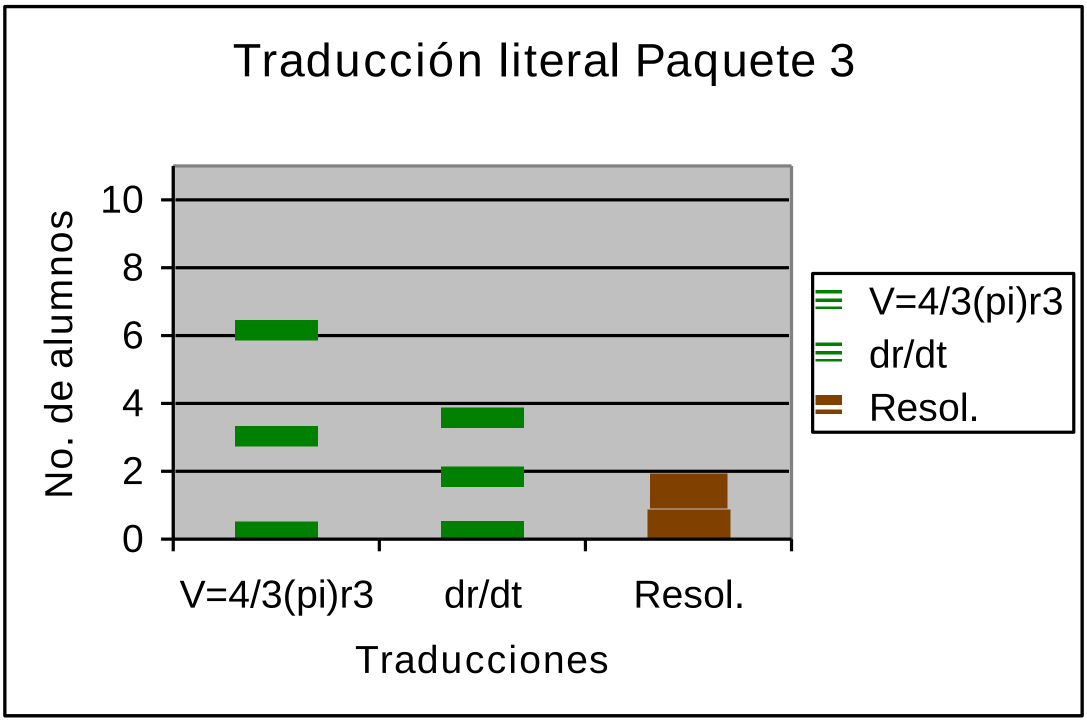
Gráfica no. 1



Gráfica no. 2



Gráfica no. 3



TRADUCCIÓN TIPO A.

Se observa que la traducción tipo *a* de todos los paquetes, traducción literal de relaciones algebraicas entre conceptos de otras ciencias, de la vida cotidiana o de la matemática elemental, con la que ya están familiarizados los alumnos a nivel de licenciatura, es realizada por la mayoría de los alumnos.

De estas traducciones, el paquete que obtuvo el más alto porcentaje de éxito fue el 2. Esto se debe a que la traducción que se pedía ("...dos números positivos que cumplan que su producto es 192...") es recurrente en los problemas de Álgebra que se trabajan desde la Secundaria y tiene que ver con la matemática más que con otras ciencias, a diferencia de las traducciones de los paquetes 1 y 3, las cuales están contextualizadas en el fenómeno físico de los gases, que se estudia en sexto semestre de preparatoria. Esto se puede corroborar fácilmente de los capítulos de problemas del libro de texto *Álgebra* de Baldor (el cual es el más comúnmente usado para el nivel de secundaria en el Estado de México) y el programa de estudio para Física III, del modelo curricular para el Bachillerato 1991 de la UAEM.

Las traducciones que se pedían en los problemas de los paquetes 1 y 3 son muy parecidas entre sí (ambas son de proporcionalidad), sin embargo, la diferencia en los porcentajes de éxito alcanzados para cada una de ellas se puede explicar con base en el enunciado. En el paquete 1, donde los resultados fueron más bajos, el problema inicia diciendo "La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen.". El 80% de los que no hicieron esta traducción correctamente, se debió a que evocaron el modelo de la Ley de Boyle para un cambio de estado, tal y como ellos la trabajan en Termodinámica ($P_1V_1 = P_2V_2$), a pesar de que no se menciona, ni siquiera se insinúa, un cambio de estado. Tomaron a ésta como el modelo matemático del problema, en vez de asumir que el mismo enunciado les daba literalmente la ley de Boyle, describiendo la relación entre sus elementos.

En contraste, en el enunciado del problema del globo esférico del paquete 3, la situación "Si la presión permanece constante...." fue considerada en forma apropiada por los estudiantes ya que, si bien algunos lo escribieron en los encabezados de sus resoluciones, no generó confusión para establecer el modelo matemático que en este caso permitía descartar a las leyes de los gases en el establecimiento de la función del volumen.

Estas observaciones nos llevan a reflexionar acerca del juego crítico que desempeñan los conocimientos previos de otras ciencias en el establecimiento del modelo matemático en este tipo de problemas contextualizados con enunciado literal. Si éstos no son firmes, el estudiante no puede identificar correctamente a los conceptos o a los modelos matemáticos del contexto, por lo que a veces los confunde y/o los inventa.

TRADUCCIÓN TIPO B.

Observamos que los porcentajes de éxito obtenidos por los alumnos para esta traducción, en los tres paquetes, fue significativamente inferior a los obtenidos para la traducción tipo *a*, lo cual se puede entender si se acepta que la traducción tipo *b* involucra conceptos del Cálculo que son relativamente recientes en la educación matemática de los alumnos y que por tanto, su traducción no les es tan familiar. Comparando los resultados de los tres paquetes, se observa que todos los alumnos que tradujeron *b,* habían traducido primeramente *a*.

La mayoría tiene contacto por primera vez con el Cálculo en el quinto semestre de la escuela preparatoria (según los planes de la UAEM) y su segunda ocasión fue el curso propedéutico que recibieron al ingresar a la Facultad, antes de cursar esta materia en el semestre que termina.

En la traducción del paquete 1, el elemento a traducir se expresaba dos veces en el enunciado: como “derivada” y como “ritmo de cambio”, pero aún así sólo el 33.3% consiguió realizarla satisfactoriamente.

Es muy interesante observar que en la traducción del paquete 2, el 75% de los alumnos que no tradujeron *b*, no tradujeron “suma”, sino su adjetivo “mínima” con la abreviatura “mín.” o directamente con cero y lo trataron de resolver como un sistema de dos ecuaciones. Pareciera que los alumnos tuviesen una idea de la suma un tanto aritmética, con un resultado constante, y no alcanzasen a concebir a la suma misma como una función. El hecho de que escribieran cero como el valor mínimo nos hace pensar que los alumnos podrían estar o bien confundiendo aún función con ecuación o bien enredándose con el procedimiento sobre la derivada para encontrar mínimos de una función.

Por último, creemos que en el paquete 3 se obtuvo el porcentaje de éxito más alto porque el enunciado del problema preguntaba directamente “¿Cuál es la rapidez de cambio del radio..?”, mientras que en los otros dos paquetes la traducción quedaba implícita en frases que pedían calcular o demostrar algo. Éste es un factor sintáctico que creemos que afecta a los enunciados de todos los problemas, independientemente de la categoría a la que pertenezcan.

CONCLUSIONES GENERALES SOBRE LA TRADUCCIÓN LITERAL

Los resultados obtenidos en esta investigación nos revelan que el grado de familiaridad que el alumno tenga con las relaciones que describen los enunciados, resulta definitivo para tener éxito en la traducción literal del lenguaje natural al lenguaje algebraico y por ende, en el planteamiento y resolución del problema.

En nuestra investigación, el "ritmo de cambio" no es identificado como la derivada por la mayoría de los alumnos, mientras que las situaciones fueron traducidas por la mayor parte. Esto se explica claramente por ser el Álgebra una parte de la Matemática que, epistémica y cronológicamente, es anterior al Cálculo para ellos.

Se observa además que bastantes alumnos quisieron utilizar modelos de la disciplina en la que los problemas se contextualizaban, cuando éstos no eran ni necesarios ni pertinentes y con el solo enunciado bastaba para establecer el modelo matemático, por lo que concluimos que los conocimientos previos en el contexto de una ciencia juegan un papel importante aún para discriminar conceptos y/o modelos.

También se aprecia que la traducción de dos enunciados distintos que manejan elementos iguales arroja resultados diferentes, lo que se puede atribuir a la sintaxis de las oraciones, pues en un enunciado pueden quedar más expuestos y claros los elementos cuya traducción se demanda, que en otro.

6.2.2. SEGUNDA CATEGORÍA. PROBLEMAS CON ENUNCIADO EVOCADOR

En las tres variantes, el problema 2 exige traducciones con evocación de varios modelos matemáticos diferentes, por lo que analizaremos por paquete primero y en general después.

PAQUETE 1

En este paquete, el problema dice así:

1. *Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada.* [Haeussler Jr., Paul, 1997, pág. 555]

Los conceptos y modelos matemáticos a evocar son:

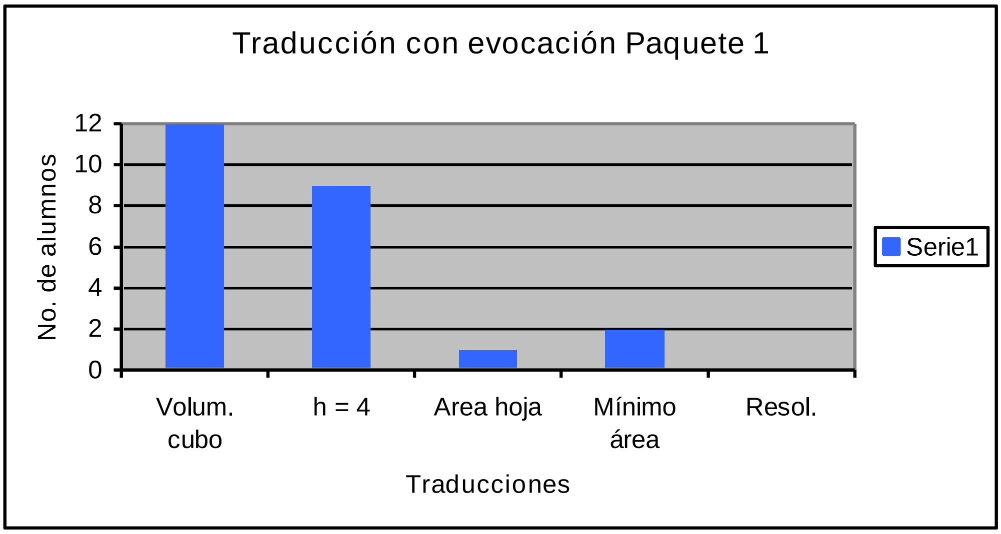
- Volumen de un cubo
- la altura es de 4 pulg. ("...doblando después hacia arriba los lados")

- Área de una hoja cuadrada a la que se le corta un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina
- Mínimo de una función (el área de la hoja)

Respecto al concepto de mínimo de una función, se dará por evocado si aparece alguna expresión de la derivada de la función, aunque ésta sea incorrecta. Esto se decidió porque se puede correr el riesgo de evaluar un procedimiento en lugar de un modelo; el que la función tenga un valor mínimo, que pudiera expresarse en lenguaje analítico, se traduce como parte de las transformaciones que deben efectuarse al modelo, y que en este caso sería obtener la derivada de la expresión que represente a la función.

Los resultados obtenidos de acuerdo a cada una de las traducciones aparecen en la siguiente gráfica:

Gráfica no. 4

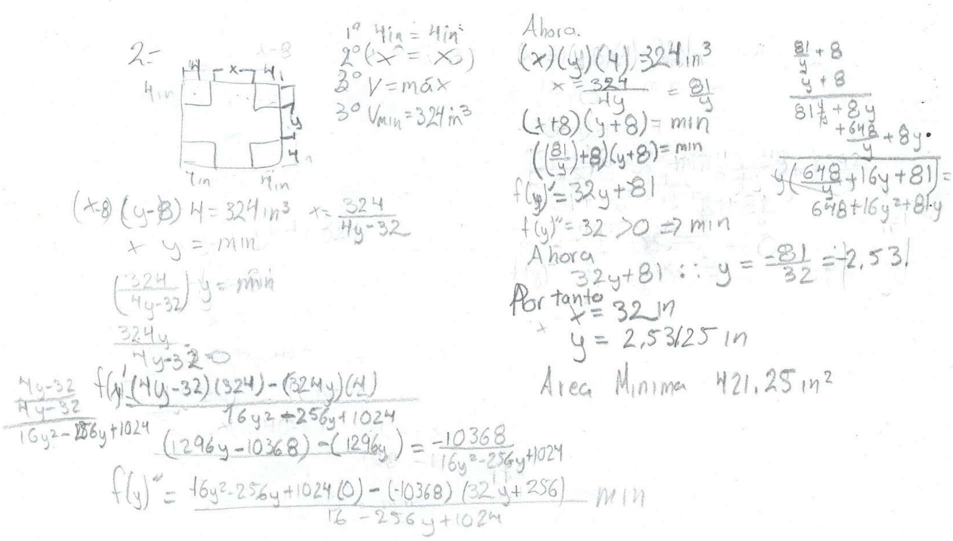


Respecto a la primera traducción, el 100% de los alumnos pudieron evocar el concepto y representarlo mediante su expresión algebraica ($V= l^3$), lo cual era de esperar por el grado escolar en el que se encuentran. En cuanto a la segunda, se esperaba que los alumnos identificaran la altura de la caja, dándole el valor de 4 plg, traducción que alcanzaron a hacer el 75% de los alumnos.

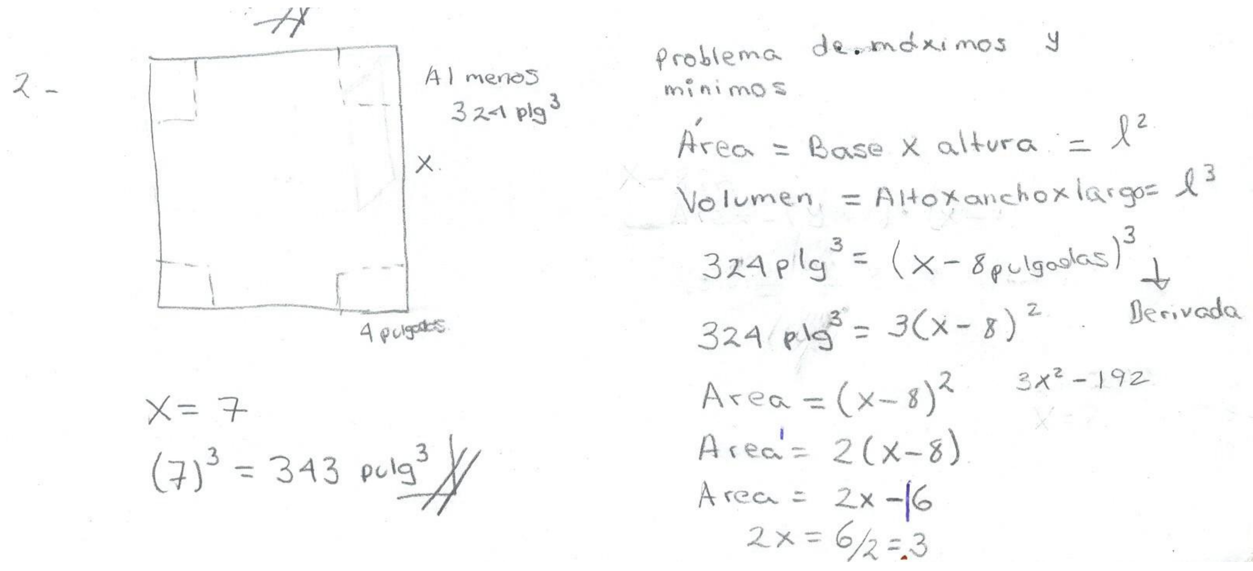
Respecto al área de una hoja cuadrada, todos evocan claramente el concepto ($A = l^2$), sin embargo sólo un alumno de los doce, el cual también había realizado bien la traducción anterior (h=4), pudo incorporarle la situación de haber doblado las 4 pulgadas de cada esquina, y establecer el modelo correspondiente. Analizando la resolución de este problema, observamos que el 50% del total de los alumnos confundió el área de la hoja con el área de la base del cubo. Creemos que esto se debe a que el alumno evoca el término “área” como algo plano y como el área de la hoja se convierte en casi el total del área de las paredes de la caja, ya no es algo plano y de ahí nace la equivocación. De esto se deduce que a la hora de traducir con evocación, los conceptos a veces vienen a la mente en forma de imagen, que cuando no es adecuada, en vez de permitir la traducción, la obstaculiza. En este caso, se observa que la imagen conceptual evocada de “área” es de figuras planas únicamente. Y claro, “*Si las personas comprenden los significados de los enunciados y los evalúan de acuerdo con sus modelos mentales es difícil imaginar que cuando razonen dejen de lado esta comprensión y sólo trabajen con reglas formales semánticamente ciegas.”* [Otero et al, 1998, pág. 91]

Respecto al mínimo del área, sólo 2 alumnos de 12 derivan para obtener su valor, lo que entendemos como que sólo ellos evocaron el concepto y lo tradujeron. Sin embargo, una de ellos, Gabi, deriva el área de la base del cubo en lugar de la función del área de la hoja como bien hace el otro, Víctor, lo que nos reitera que esta traducción debe llevarse a cabo sobre el modelo anterior, el de la función, y si éste no es correcto, no se consuma el entendimiento y planteamiento del problema. Cabe aclarar que Víctor comete equivocaciones en los cálculos y finalmente nadie consigue resolver el problema correctamente.

Ejercicio de Víctor



Ejercicio de Gabi



Debe señalarse además que el problema que se escogió permitía resolverse sin Cálculo, ya que en el enunciado se establecía la altura y ésta no era una variable. Así lo trataron de resolver otras cuatro alumnas de los 12, pero no lo lograron debido a la confusión que acabamos de mencionar del área de la hoja con el área de la base del cubo.

PAQUETE 2

El problema es el siguiente:

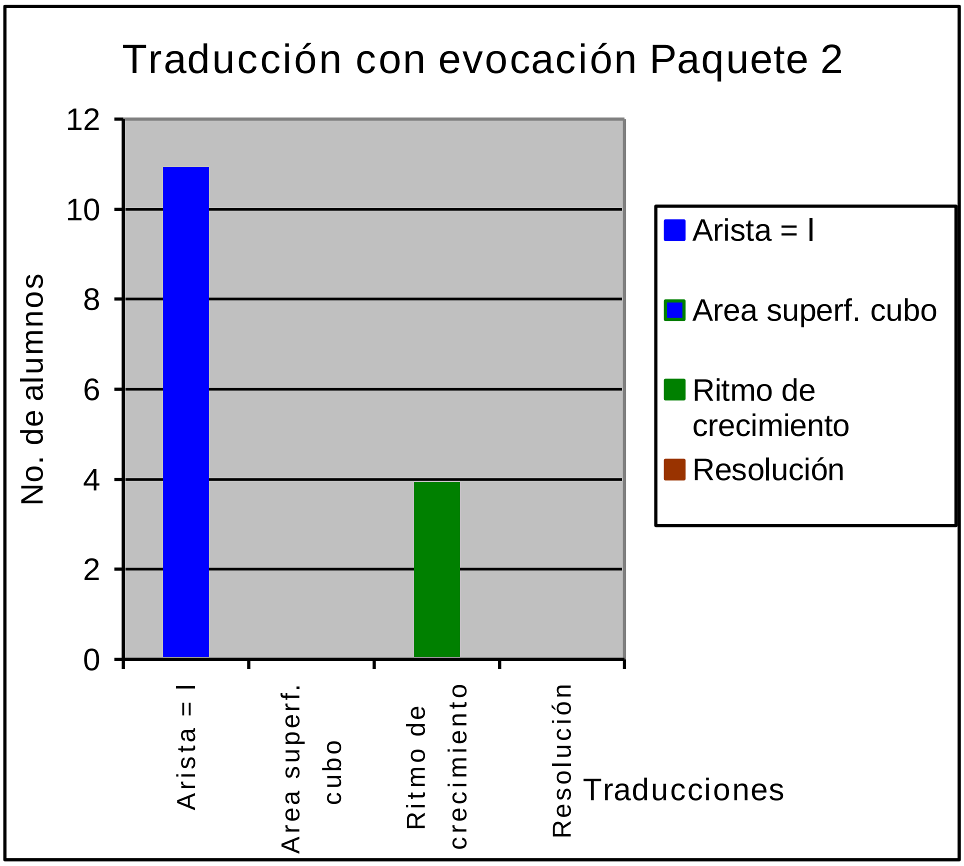
> *Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el área de la superficie cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.?* [Larson, *et al.*, 1999, pág. 167].

Los conceptos que se necesitan en este problema para establecer el modelo matemático son:

- Arista
- Área superficial del cubo
- Ritmo de crecimiento

Los resultados de las traducciones efectuadas se muestran en la gráfica siguiente.

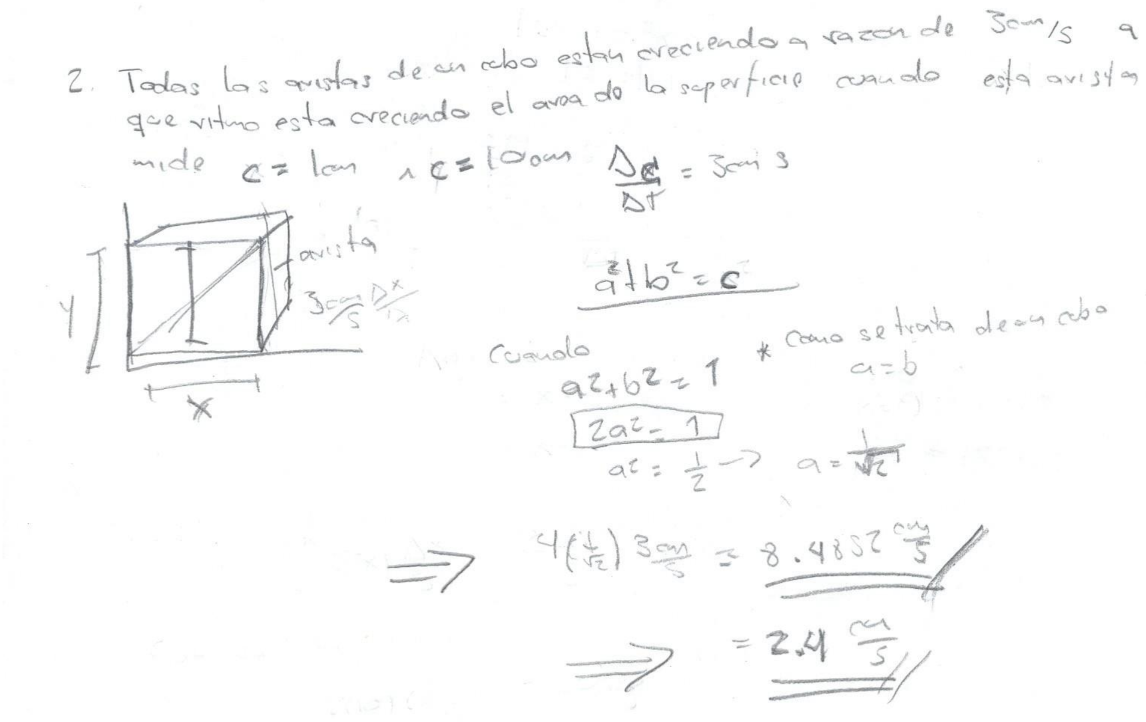
Gráfica no. 5



El concepto de arista, para el nivel escolar en el que se encuentran los alumnos, se esperaba que fuera traducido literalmente por “x” o por “l”, sin confundir esa “l” con el “lado” del cubo.

Sin embargo, hay un alumno, Oswaldo, que lo confunde y marca en su dibujo la cara del cubo con el nombre de arista, es decir, no conoce el significado del término matemático, y por lo tanto no puede traducirlo algebraicamente.

Ejercicio de Oswaldo



Esto es un ejemplo claro de lo que se mencionaba anteriormente sobre las limitaciones de nuestra categorización y de la necesidad de comprender el significado de los términos para la traducción con evocación , pues el modelo matemático para el área superficial del cubo no se puede establecer sin tener claro el concepto de arista.

En cuanto al concepto siguiente, sorprende ver que ninguno de los doce alumnos pudo evocar del enunciado el “área superficial” como el área del cubo, y todos lo confundieron con el área de una cara del cubo. Nuevamente, como en el caso del paquete anterior, los alumnos parecen no concebir el término área para una figura espacial, sino únicamente para figuras planas.

Esta limitación es fatal para el entendimiento y planteamiento del problema, pues si bien el 33.3% de los alumnos pudieron traducir literalmente “ritmo de crecimiento del área” como la derivada respecto al tiempo = dA/dt, no tenían la función correcta sobre la cual traducir el concepto y no pudieron establecer el modelo matemático pertinente. Esta es una muestra de que para la traducción literal, no es necesaria la comprensión del concepto que se traduce.

PAQUETE 3

El problema dice así:

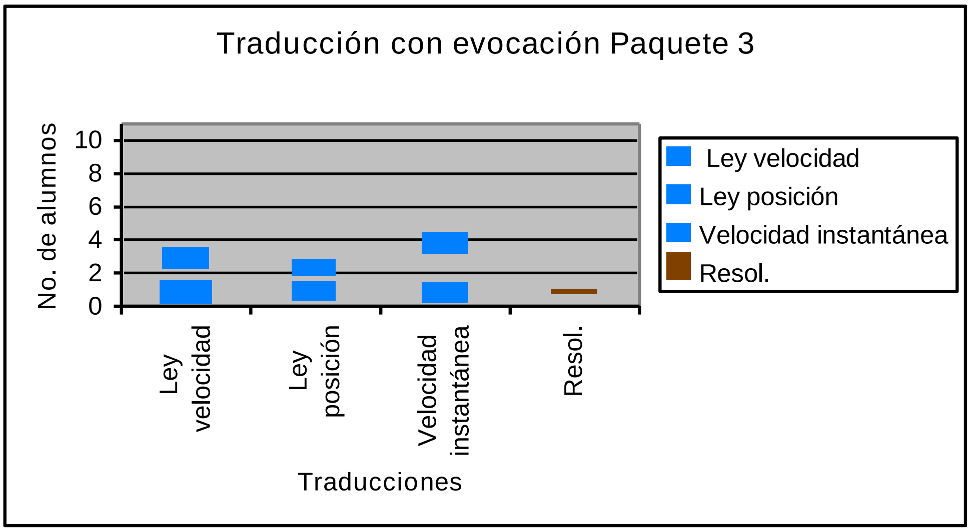
2. *Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando t = 1 y t = 2...* [Larson, *et al.*, 1999, pág. 129]

Y las traducciones esperadas son:

- Ley de la velocidad de la caída libre
- Ley de la posición de la caída libre
- Velocidad instantánea

Los resultados de las traducciones efectuadas se muestran en la gráfica siguiente.

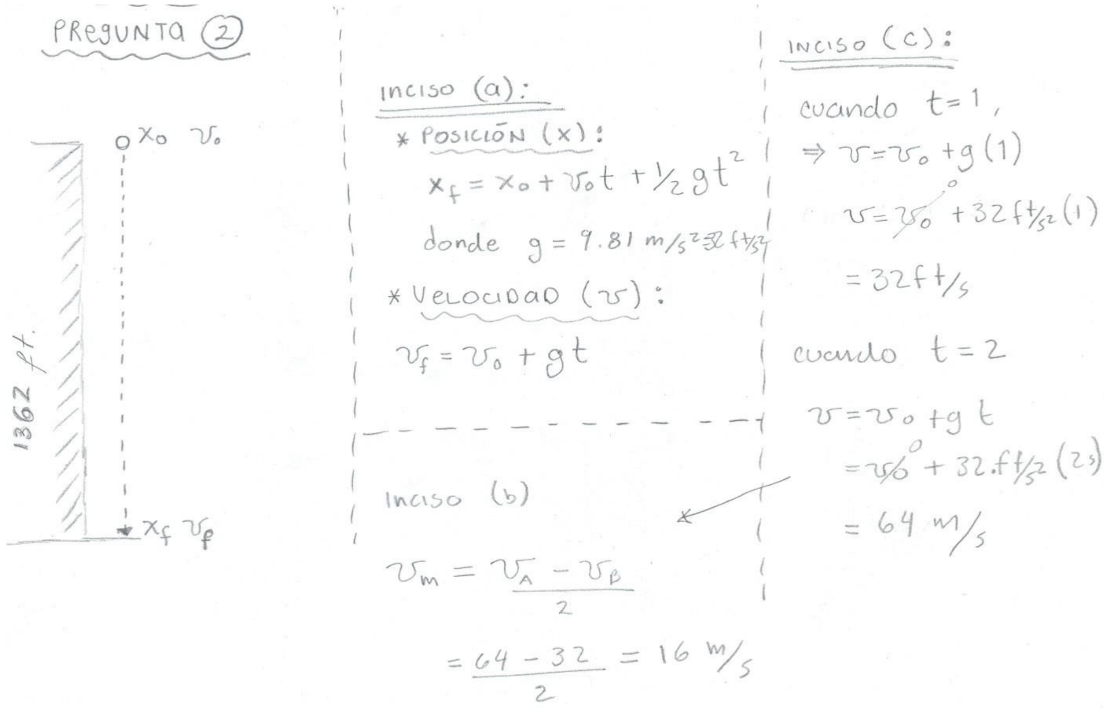
Gráfica no. 6



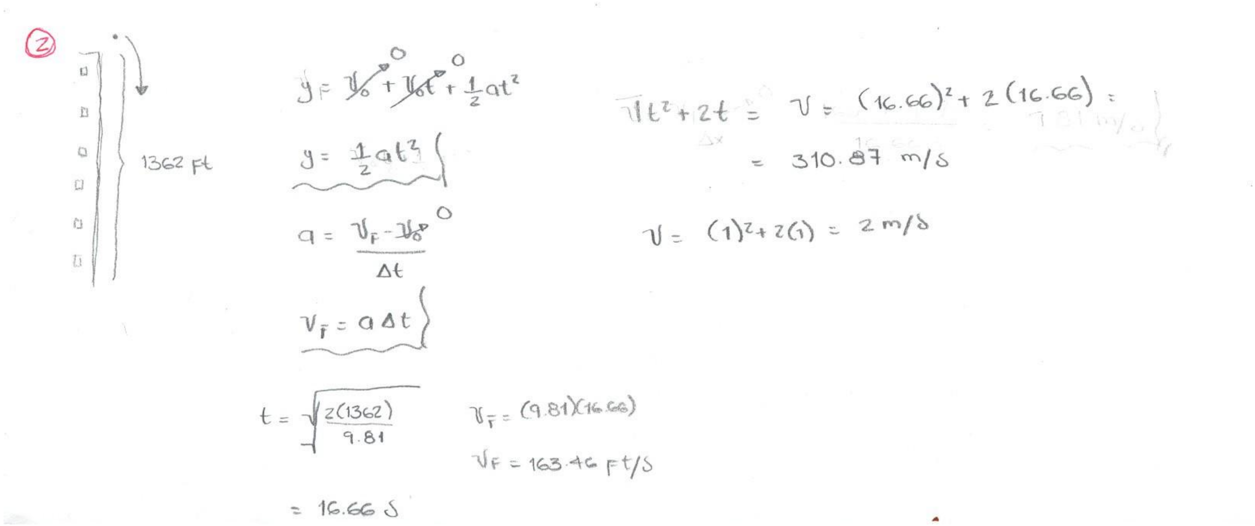
El enunciado de este problema evoca el fenómeno de la caída libre.

Alumnos como Davir y Nayeli demuestran tener un conocimiento mayor que el resto sobre este movimiento pues deducen sus leyes aplicando sus condiciones particulares a las leyes del movimiento uniformemente acelerado.

Ejercicio de Davir



Ejercicio de Nayeli

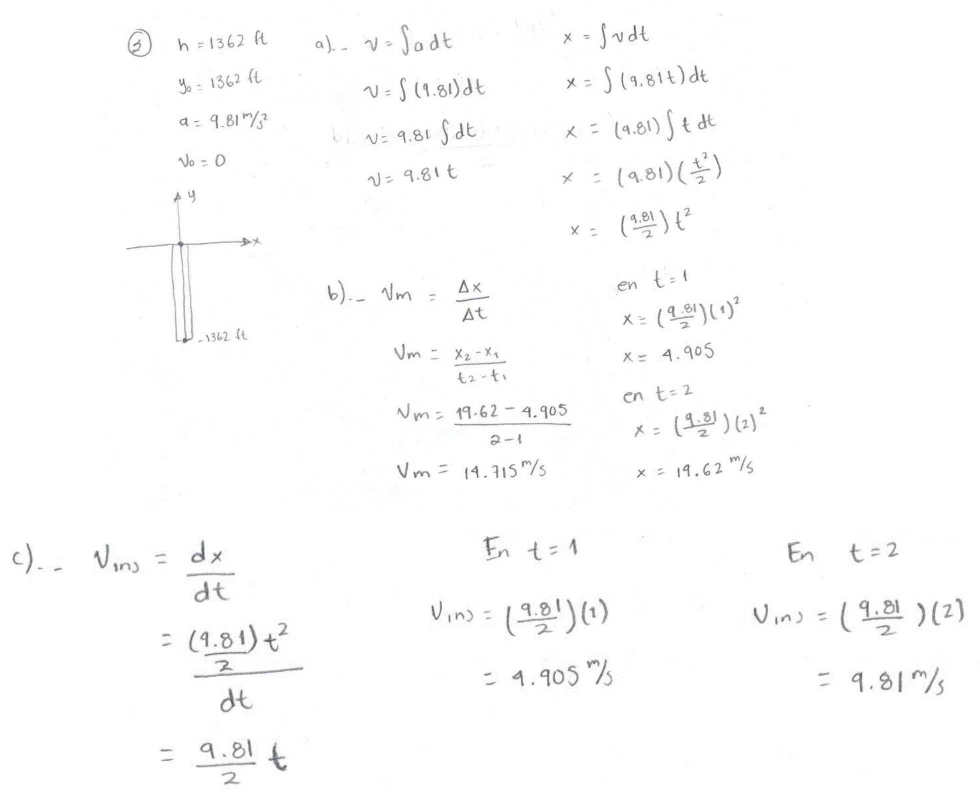


Como ya mencionamos, el inciso b) no será tomado en cuenta en la evaluación de este problema, pues son suficientes el a) y el c) para poder analizar la traducción con evocación. En cuanto al inciso c) se espera que el alumno evoque el concepto de velocidad instantánea como la derivada de la posición respecto al tiempo. Estamos aceptando como hecha la traducción cuando el alumno escribe V = dx/dt ó dh/dt, sin embargo se deben detallar las condiciones en que esto se realiza:

Ø De los 6 alumnos que tradujeron este último concepto, sólo una alumna, Irán, escribe la fórmula en el inciso c) correspondiente, mientras que los otros 5 la escriben en el encabezado de la resolución del problema (como si fuera un dato más) y no le dan seguimiento alguno.

Ø Igualmente, de ellos seis, sólo Irán evoca la ley de la posición de la caída libre y lleva a cabo la derivación.

Ejercicio de Irán


(5) $h = 1362\ ft$

$y_0 = 1362\ ft$

$a = 9.81\ m/s^2$

$v_0 = 0$

a).- $v = \int a\, dt$

$v = \int (9.81) dt$

$v = 9.81 \int dt$

$v = 9.81\, t$

$x = \int v\, dt$

$x = \int (9.81 t) dt$

$x = (9.81) \int t\, dt$

$x = (9.81)\left(\frac{t^2}{2}\right)$

$x = \left(\frac{9.81}{2}\right) t^2$

b).- $V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$V_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

$V_m = \frac{19.62 - 4.905}{2 - 1}$

$V_m = 14.715\ m/s$

en $t = 1$

$x = \left(\frac{9.81}{2}\right)(1)^2$

$x = 4.905$

en $t = 2$

$x = \left(\frac{9.81}{2}\right)(2)^2$

$x = 19.62\ m/s$

c).- $V_{ins} = \frac{dx}{dt}$

$= \frac{\frac{(9.81)t^2}{2}}{dt}$

$= \frac{9.81}{2} t$

En $t = 1$

$V_{ins} = \left(\frac{9.81}{2}\right)(1)$

$= 4.905\ m/s$

En $t = 2$

$V_{ins} = \left(\frac{9.81}{2}\right)(2)$

$= 9.81\ m/s$

Esto nos hace pensar que únicamente Irán parece entender el concepto, y que los otros cinco alumnos realizan, más bien, una traducción literal del término “velocidad”.

En cuanto a la resolución, esperábamos que Irán la lograra puesto que todas las traducciones previas las realizó correctamente, y demostró entender y saber plantear el problema, sin embargo tuvo un error de cálculo en el inciso c) que le impidió terminarlo.

En cuanto al único alumno que obtuvo finalmente el resultado correcto, Davir, hay que precisar que no lo obtuvo a través del concepto de velocidad instantánea como la derivada de la posición respecto al tiempo, sino que lo resolvió sustituyendo los valores de “t” en la ley de la velocidad que se pedía en el inciso a).

Creemos que la comprensión que tiene Davir sobre el fenómeno de la caída libre es el que le permite resolver el problema.

Por ello, también en los problemas con enunciado evocador, se puede concluir que los conocimientos previos de la ciencia del contexto determinan de una manera importante el éxito en la traducción al lenguaje algebraico.

CONCLUSIONES GENERALES SOBRE LA TRADUCCIÓN CON EVOCACIÓN

En los tres problemas que se escogieron de esta categoría, destaca una traducción por su papel clave en el entendimiento, planteamiento y resolución de los mismos. En los tres paquetes, consistió en modelar la función a la que hace referencia cada problema:

- en el paquete 1, la función del área de la hoja
- en el paquete 2, la función del área superficial del cubo
- en el paquete 3, la función de la posición del móvil

Esto era predecible desde el momento en que la selección de los problemas para esta puesta a prueba de la categorización se hizo delimitando un campo de la matemática: el Cálculo Diferencial.

Juzgamos que la traducción clave puede servir como un criterio de clasificación interna de los problemas de esta categoría, pero ya no de acuerdo a la traducción sino al concepto específico que refuerzan, de manera que si alguna vez la resolución de problemas en clase se abordara bajo esta perspectiva categórica que estamos proponiendo, pudiera también aplicársele un orden temático.

En nuestra investigación confirmamos que los problemas de esta categoría requieren de la comprensión de los conceptos, y estimamos que su resolución refuerza su conocimiento, ya que cuando el alumno utiliza las fórmulas entendiendo las leyes a las que representa, les está dando un sentido verdadero de modelo matemático y no de “recetas” algebraicas. De hecho, se apreció que cuando no existe el entendimiento del concepto a evocar por parte del estudiante, la traducción puede llegar a realizarse en forma literal, como ocurrió con algunos alumnos en el caso del concepto de “velocidad” en nuestra investigación, pero la traducción entonces no sirve para el establecimiento del modelo matemático. En el caso de algunos problemas (como el del paquete 2 con el concepto de arista), el no entender el concepto afecta, incluso, a la traducción literal.

Además, el entendimiento de los conceptos de las ciencias en las cuales se contextualizan los problemas juega un papel determinante en el éxito de la traducción del lenguaje natural al algebraico.

Por otro lado, este trabajo nos permitió determinar conceptos (como el caso de “mínimo de una función”) cuyo rol en el fenómeno de la traducción es confuso puesto que, si bien se necesitan evocar en el proceso de búsqueda del modelo matemático correcto, sobre todo se requieren para la resolución matemática del problema. En estos casos, la evaluación de su traducción resulta difícil y aparentemente superficial.

Finalmente, concluimos que en la traducción con evocación, el alumno no sólo evoca el concepto con el nombre y el modelo que lo representa, como se había planteado en un principio, sino también con una imagen del concepto, que cuando no es adecuada o es limitada, en vez de permitir la traducción, la obstaculiza. Esto ocurrió en nuestra investigación con el concepto de área, pues los alumnos lo restringen a figuras planas.

6.2.3. TERCERA CATEGORÍA: PROBLEMAS CON ENUNCIADO COMPLEJO

Para empezar, llama la atención la diferencia que existe entre los tres problemas de esta categoría. Esto se debe a que, como esta categoría puede contener a las dos anteriores, el número y el tipo de traducciones contenidas pueden variar bastante.

Además, en los problemas de los paquetes 1 y 3, la traducción gráfica parece ser determinante para poder establecer las relaciones que permitan llegar a la expresión matemática pertinente (véase fig. no. 2). Por ejemplo, en el problema 1, el Teorema de Pitágoras que da forma algebraica a la función, se desprende necesariamente del dibujo del campo de béisbol y de la representación gráfica de las condiciones del problema. En el problema 3, también el dibujo de la ventana es el vehículo para establecer la relación entre las variables y poder así expresar la función de su área.

Por ello, en esta categoría evaluamos también las traducciones gráficas, que en las gráficas que se muestran a continuación, se muestran de color rosa.

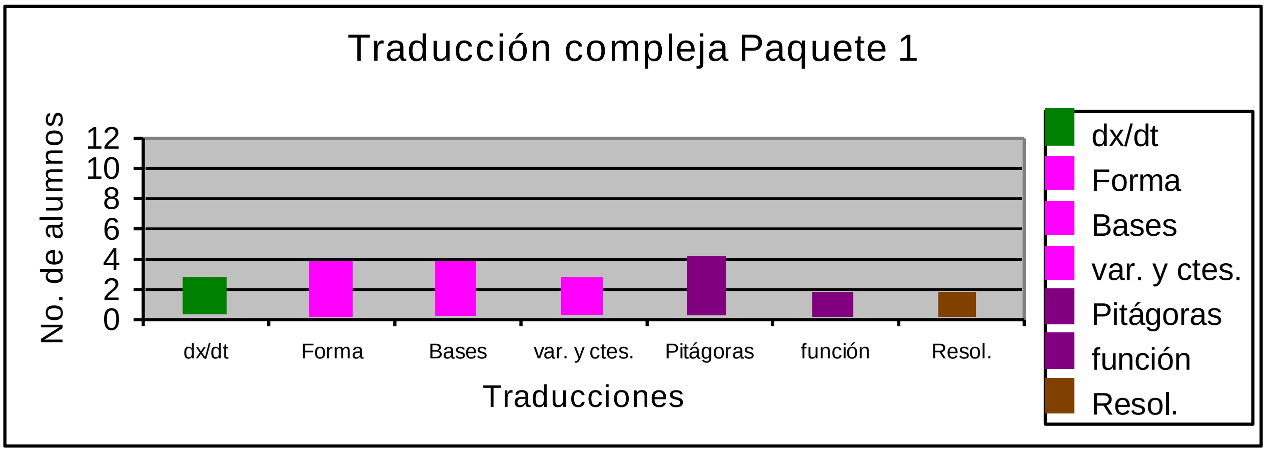
PAQUETE 1

El problema de este paquete dice así:

Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción? [Larson, *et al.,* 1999, pág. 168].

- Ø Traducción literal: ritmo de cambio = dx/dt
- Ø Traducción gráfica: Dibujo de la forma del campo de béisbol
- Ø Traducción gráfica: Dibujo de las bases sobre el campo
- Ø Traducción gráfica: Establecimiento de las variables y constantes en el dibujo
- Ø Traducción compleja: Introducción del Teorema de Pitágoras
- Ø Traducción compleja: Establecimiento de la función “distancia a home”

Gráfica no. 7



PAQUETE 2

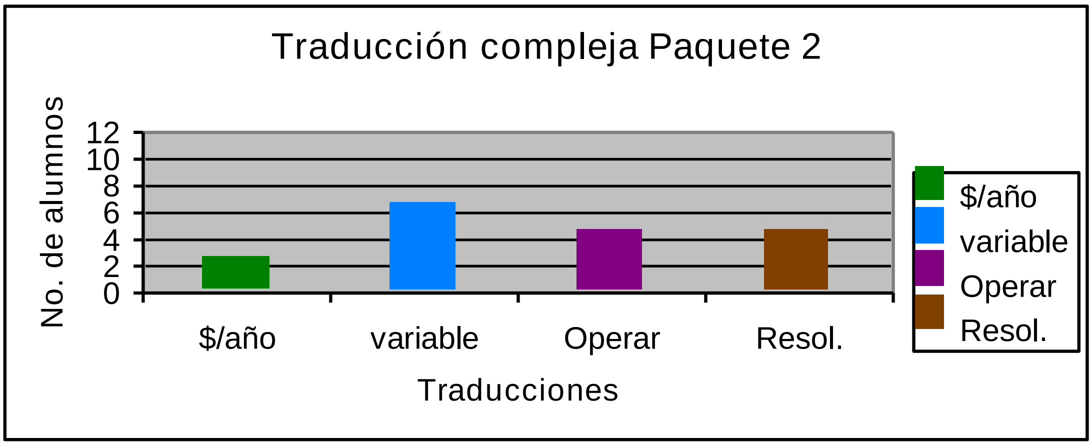
En este paquete, el problema expresa:

Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... [Larson, *et al.,* 1999, pág. 129].

- Ø Traducción literal: costo anual = $/año
- Ø Traducción con evocación: Identificar x como variable de la función “Costo anual”

- Traducción compleja: Dividir y multiplicar los datos $\left(\dfrac{mi/año}{mi/gal}\right)\left(\dfrac{\$}{gal}\right)$

Gráfica no. 8



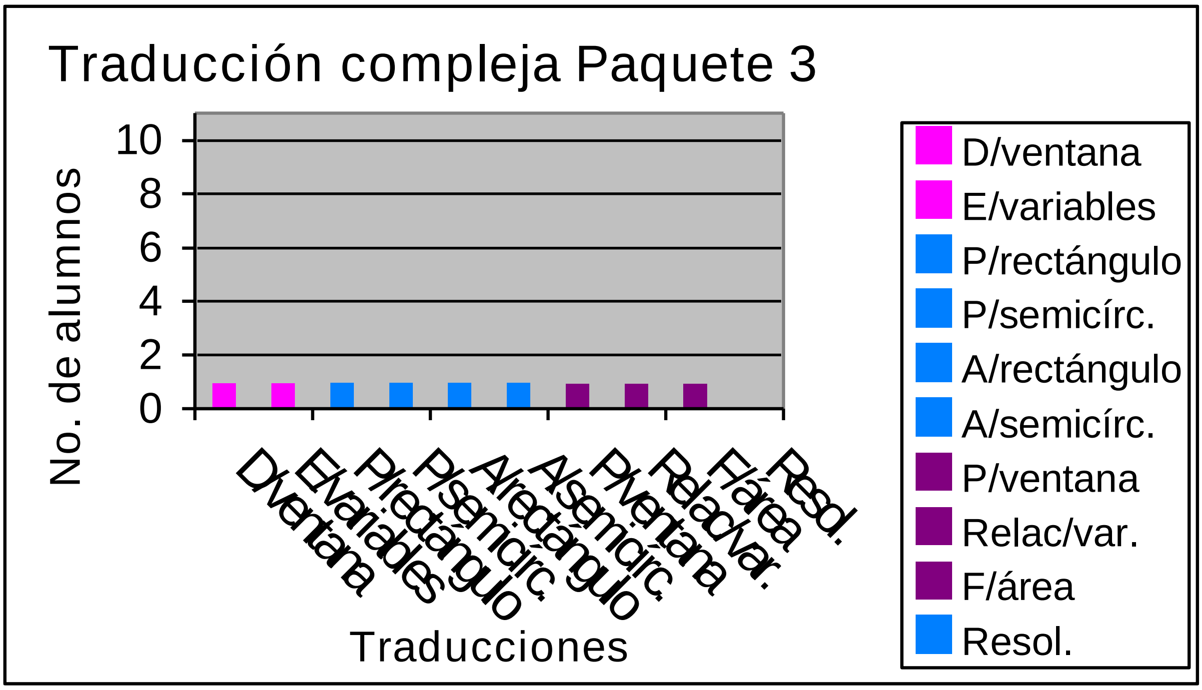
PAQUETE 3

El problema dice así:

Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. [Larson, *et al.,* 1999, pág. 243]

- Traducción gráfica: Dibujo de la ventana de Norman
- Traducción gráfica: Establecimiento de las variables en el dibujo
- Traducción con evocación: Evocación de las fórmulas de perímetro del rectángulo y del semicírculo y del área del rectángulo y del semicírculo
- Traducción compleja: Establecimiento del perímetro de la ventana
- Traducción compleja: Relación entre las variables
- Traducción compleja: Establecimiento de la función “Área de la ventana”

Gráfica no. 9



Dado que el tipo y número de traducciones varía mucho entre los tres paquetes, trataremos de establecer una comparación a partir de la relación que hay entre aquellos y los porcentajes de éxito en la resolución de los problemas, a partir del concentrado siguiente.

Tabla IV. Concentrado del número y tipo de traducciones en la traducción compleja y porcentajes de resolución, para los paquetes 1, 2 y 3

	Traducciones literales	Traduc. gráficas	Traduc. con evocación	Traducciones complejas	Total de traducciones	Resolución
Paquete 1	X	XXX		XX	6	2/12 17%
Paquete 2	X		X	X	3	5/12 42%
Paquete 3		XX	XXXX	XXX	9	0/11 0%

Como vemos, el número total de traducciones involucradas en cada uno de los problemas (6^a columna) presenta una relación inversa con los porcentajes de éxito en la resolución de los mismos (7^a columna): a mayor número de traducciones, menor número de alumnos que lo resuelven. Parece que el número de traducciones totales influye positivamente en el grado de dificultad para la resolución del problema (sin dejar de reconocer que existen otros factores que intervienen en el proceso mismo de la traducción para la determinación del grado de dificultad de un problema).

Se analiza también la relación entre el número de traducciones de cada tipo en los problemas (2ª, 3ª, 4ª y 5ª columnas) y los porcentajes de éxito en la resolución de los mismos (7ª columna); parece ser que el número de traducciones complejas es el que marca realmente la diferencia, pues el número de otros tipos de traducción no reflejan relación alguna con los porcentajes de éxito en la resolución. Así, parece que el número de traducciones complejas implicadas en un problema también influye positivamente sobre el grado de dificultad del mismo.

CONCLUSIONES GENERALES SOBRE LA TRADUCCIÓN COMPLEJA

Se observó que la traducción compleja puede a veces necesitar de una representación gráfica para visualizar las relaciones pertinentes, en donde éstas son fundamentales en el establecimiento del modelo matemático, por lo que en algunos casos esta traducción adicional, la gráfica, aparece como un eslabón entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico.

Partiendo de que la traducción compleja puede incluir también traducciones literales, con evocación, complejas y recién descubrimos que también gráficas, se observa que el número total de traducciones involucradas podría llegar a determinar el grado de dificultad en la resolución de los problemas, sin embargo tendríamos que diseñar una puesta a prueba específica que permitiera demostrarlo, ya que los resultados en las categorías anteriores no refuerzan esta postura.

En cuanto a los tipos de traducción requeridos en un problema con enunciado complejo, el número de traducciones complejas puede tomarse como un indicador del grado de dificultad en la resolución del mismo.

6.2.4. ANÁLISIS GENERAL

De acuerdo al análisis de resultados de cada una de las categorías, encontramos traducciones en donde el porcentaje de éxito es muy bajo, lo que nos hace pensar que es en esas traducciones donde el alumno encuentra mayor dificultad en su proceso para establecer el modelo matemático del problema. Éstas corresponden, en cada categoría, a lo siguiente:

- Traducción literal: el traducir los conceptos del Cálculo (traducción tipificada como *b*)
- Traducción con evocación: el traducir la función
- Traducción compleja: el hacer las traducciones complejas

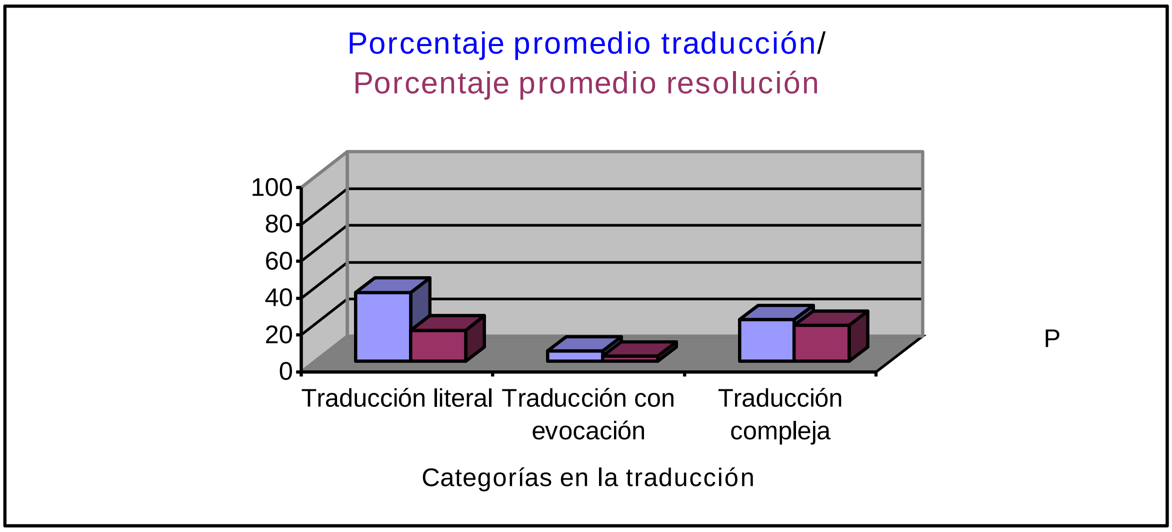
Con el fin de poder establecer una comparación entre los resultados de las categorías, se sacaron promedios de porcentaje de éxito de los tres paquetes para cada una de estas traducciones así como para la resolución del problema, mismos que se concentran en la tabla siguiente.

Tabla V. Concentrado de porcentajes de traducción y de resolución para las traducciones más significativas dentro de cada categoría

TRADUCCIÓN LITERAL	Consumaron la traducción tipo *b*	Resolvieron el problema
Paquete 1	4/12 33.3 %	1/12 8.3%
Paquete 2	4/12 33.3 %	3/12 25%
Paquete 3	5/11 45.45 %	2/12 16.7%
PROMEDIOS	37.35% aprox.	16.7% aprox.
TRADUCCIÓN CON EVOCACIÓN	Tradujeron la función	Resolvieron el problema
Paquete 1	1/12 8.3%	0/12 = 0%
Paquete 2	0/12 = 0%	0%
Paquete 3	1/12 8.3%	8.33% aprox.
PROMEDIOS	5.55% aprox.	2.7% aprox.
TRADUCCIÓN COMPLEJA	Realizaron las traducciones complejas	Resolvieron el problema
Paquete 1	2/12 16.7%	16.7% aprox.
Paquete 2	5/12 41.7%	41.7% aprox.
Paquete 3	1/11 9.1%	0/11=0%
PROMEDIOS	22.5% aprox.	19.5% aprox.

Vaciando estos datos en una gráfica, se visualiza lo siguiente:

Gráfica no. 10



En la gráfica se observa claramente que el promedio de alumnos que tradujeron es superior al promedio de alumnos que resolvieron el problema, para las tres categorías. Cabe aclarar que en todos los grupos y en todas las categorías, los alumnos que resolvieron los problemas habían realizado previamente las traducciones clave, aunque no viceversa.

6.3. EN RELACIÓN A LAS HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Estos promedios se pueden tomar como un indicio de que la traducción es condición necesaria mas no suficiente para la resolución de los problemas y sí es una medida de qué tanto el alumno entiende y sabe plantear el problema, por lo que se verifica la primera hipótesis de investigación.

Además, se puede apreciar en la gráfica que los resultados promedio de resolución no muestran un comportamiento descendente según asciende la categoría, sino que revelan una conducta variable, señal de que nuestra segunda hipótesis de investigación no se cumple, ya que, aunque el entendimiento y planteamiento de los problemas de la primera categoría fue logrado por un mayor número de alumnos que en la segunda, los resultados en esta última no fueron superiores a los de la tercera. El desarrollo de esta investigación nos ha permitido sacar a la luz elementos que, en cada uno de los problemas, están interviniendo en la traducción de los enunciados y que están más allá de las características que los hace pertenecer a una u otra categoría, por lo que el logro obtenido en el entendimiento y planteamiento de cada uno de ellos no se puede relacionar con la categorización.

Capítulo VII Conclusiones

CONCLUSIONES

Esta categorización es un primer intento por organizar teóricamente los problemas matemáticos contextualizados, de acuerdo al tipo de traducción que demandan sus enunciados.

En el análisis previo que se hizo de los problemas para crear esta categorización, se descubrió que las relaciones entre los conceptos también pueden constituir modelos matemáticos, lo cual es una contribución a la caracterización de los modelos matemáticos que trabaja la teoría de la *matemática en el contexto de las ciencias.*

Tras la puesta a prueba a la que fue sometida la categorización mediante esta investigación, encontramos elementos de los que no se puede precisar su papel en esta propuesta, como por ejemplo, la sintaxis de las oraciones que componen los enunciados, o la traducción que se esperaría de conceptos más procedimentales, como el mínimo de una función.

Por ello, se concluye que se necesita de una revisión más profunda de las categorías que incluya estos aspectos, y de otros, como son el número de traducciones involucradas en cada problema, y las consecuencias de la aparición de traducciones literales en enunciados con evocación y complejos, así como de traducciones con evocación en los complejos.

Respecto a nuestra primera hipótesis, confirmamos que la traducción es condición necesaria mas no suficiente para la resolución de los problemas y sí es una medida de qué tanto el alumno entiende y sabe plantear el problema. Sin embargo, respecto a nuestra segunda hipótesis, no se cumplió que el número de alumnos que entiende y plantea los problemas desciende según asciende la categoría, por lo que no podemos establecer una relación entre las categorías y el porcentaje de éxito en la resolución de problemas.

Sospechamos que el éxito en el entendimiento y planteamiento de los problemas dependerá de los elementos clave de traducción que aparezcan en cada problema en particular (conceptos, situaciones, objetos, fenómenos, y el problema en particular) y del conocimiento que el individuo posea de ellos, sin embargo, sin un análisis más profundo, no se pueden sacar conclusiones.

Lo que sí fue evidente es que el conocimiento de las ciencias en las cuales se contextualizan los problemas juega un papel determinante en el éxito de la traducción del lenguaje natural al algebraico.

En cuanto a la categorización, tenemos las siguientes conclusiones:

Respecto a la primera categoría

El éxito en la traducción literal del lenguaje natural al lenguaje algebraico y por ende, en el planteamiento y resolución del problema, depende en gran medida del conocimiento de los conceptos y modelos que menciona el enunciado y del grado de familiaridad que el alumno tenga con ellos.

Respecto a la segunda categoría

Se confirma que los problemas de esta categoría requieren de la comprensión de los conceptos y estimamos que su resolución refuerza el conocimiento de los mismos. Por lo mismo, los conceptos involucrados en este tipo de problemas pueden servir para clasificarlos, a su vez, por contenido temático.

Además, se apreció que, en el proceso del establecimiento del modelo matemático, el alumno no sólo evoca los conceptos con el nombre y el modelo que los representa, como se había planteado en un principio, sino que también lo hace con una imagen del concepto que influye considerablemente en este proceso, pues cuando ésta es inadecuada o limitada, en vez de favorecer la traducción, la obstaculiza.

Respecto a la tercera categoría

En algunos problemas de esta categoría, puede necesitarse de una representación gráfica para visualizar las relaciones pertinentes, en donde éstas son fundamentales en el establecimiento del modelo matemático, por lo que en estos casos, esta traducción adicional, la gráfica, aparece como un eslabón entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico.

RECOMENDACIONES

Esta investigación puede continuarse y completarse con las siguientes recomendaciones:

1. Investigar acerca de la influencia de otros factores sobre el grado de dificultad de las categorías, entre los que observamos la sintaxis de los enunciados, el número y tipo de traducciones involucradas en cada problema, u otros como la experiencia en la resolución de problemas parecidos de la que habla Polya (1965).
2. Establecer premisas más precisas para cada categoría en relación a la habilidad de los estudiantes de traducir enunciados, como las habilidades verbales y lógico-matemáticas, los estilos de aprendizaje o el nivel de conocimientos previos.
3. Extender este trabajo a la traducción del lenguaje natural al lenguaje gráfico y comprobar si nuestra categorización también es pertinente en ese proceso.
4. Reorganizar un curso de Cálculo Diferencial con base en esta categorización como complemento a esta investigación.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D., Hanesian, H. & Novak, J. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognitivo.* México, D.F.: Edit. Trillas.

Baldor, A. (2000). *Álgebra.* México, D.F.: Publicaciones Cultural.

Camarena, P. (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.

Camarena, P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena, P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica.* Edit. ESIME-IPN.

Camarena, P. (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*. ESIME-IPN, México.

Camarena, P. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería*. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Camarena, P. (1997). *El proceso enseñanza-aprendizaje de las ciencias básicas*. Conferencia magistral. Foro de Desarrollo Curricular e Investigación Educativa para la Enseñanza de la Ingeniería y Ciencias Físico Matemáticas*.* México, D.F.

Camarena, P. (1999). *Hacia la integración del conocimiento: matemáticas e ingeniería.* II Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, México, D.F.

Camarena, P. (2000a). Reporte de investigación titulado: *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería*. ESIME-IPN, México.

Camarena, P. (2000b). *Las funciones generalizadas en ingeniería. Construcción de una alternativa didáctica.* Premio ANUIES 2000. Biblioteca de la Educación Superior, Serie Investigaciones.

Camarena, P. (2001). *La matemática en el contexto de las ciencias.* Antología 1, Red de CIMATES, Editorial CINVESTAV, México.

Camarena, P. (2002) *La matemática en el contexto de las ciencias y los modelos matemáticos*. III Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, México, D.F.

Camarena, P. (2003). *La transferencia del conocimiento: ecuaciones diferenciales parciales hacia una cuerda que vibra.* Memorias de la RELME XVII, Santiago de Chile.

Camarena, P. & Olazábal A. (2003) *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico.* XVII Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas. Tlaxcala, México.

Costas, M. (1996). *La lectura de textos matemáticos. Resultados de un estudio sobre la lectura de un texto matemático por alumnos del bachillerato.* Tesis de maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

El Pequeño Larousse Ilustrado. (1996). México, D.F.: Editorial Larousse.

Filloy, E. & Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraical thought (a clinical study with 12-13 year olds), en J. Moser (ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter,* págs. 51-56. Madison, Wisconsin, USA.

Haeussler, E. (Jr.), & Paul, R. (1997) *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida.* México, D.F.: Edit. Prentice-Hall HispanoAmericana.

Janvier, C. (1987) Translation Processes in Mathematics Education. En: Janvier, C. *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* pp. 27-32. Hillsdale, New Yersey: LEA Publishers.

Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. (1999). *Cálculo y Geometría Analítica.* México, D.F.: Editorial Mc Graw Hill.

Lehmann, Ch. (1979). *Álgebra.* México, D.F.: Editorial Limusa.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in Mathematics Learning and Problem Solving. En: Janvier, C. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. pp. 33-40. Hillsdale, New Yersey: LEA Publishers.

Mochón, S. (1997). Modelos matemáticos para todos los niveles. En: *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. *México, 1997.* México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Olazábal, A. (2002). [Problemario para la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral]. Datos en bruto no publicados.

Otero, R., Papini, C. & Elichiribehety, I. (1998). Las representaciones mentales y la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática* 10 (3), 90-102.

Polya, G. (1965). C*ómo plantear y resolver problemas.* México D.F.: Edit. Trillas.

Rubio, G. (1994). *Modelos didácticos para resolver problemas verbales aritmético-algebraicos. Tesis teóricas y observaciones empíricas.* Tesis doctoral en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México.

Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zill, D. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica.* México D.F.: Grupo Editorial IberoAmérica.

ANEXO

Nombre del alumno: Victor Manuel Onofre Camareno

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

1: $T = cte$

$P \propto \frac{1}{V}$

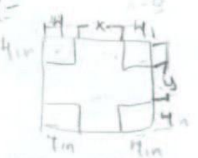
$P \propto \frac{1}{V^2}$

$P = K\frac{1}{V^2}$

$P = \frac{1}{V^2}$

$| = \frac{(1(2v)) - (v^2(0))}{v^4} = \frac{2v}{v^4} = \frac{2}{v^3}$ Portanto no es $\propto$

2:



1° 4 in = 4 in

2° ($x = x$)

3° $V = máx$

3° $V_{min} = 324\ in^3$

$(x-8)(y-8)\,4 = 324\ in^3$ $\quad x = \frac{324}{4y-32}$

$x\ y = min$

$\left(\frac{324}{4y-32}\right) y = min$

$\frac{324y}{4y-32} = 0$

$f(y)' = \frac{(4y-32)(324) - (324y)(4)}{16y^2 - 256y + 1024}$

$\frac{-32 \quad -32}{2 - 256y + 1024}$

$\frac{(1296y - 10368) - (1296y)}{} = \frac{-10368}{16y^2 - 256y + 1024}$

$f(y)'' = \frac{16y^2 - 256y + 1024(0) - (-10368)(32y + 256)}{16 - 256y + 1024}$ min

Ahora.

$(x)(y)(4) = 324\ in^3$

$x = \frac{324}{4y} = \frac{81}{y}$

$(x+8)(y+8) = min$

$\left(\left(\frac{81}{y}\right) + 8\right)(y+8) = min$

$f(y)' = 32y + 81$

$f(y)'' = 32 > 0 \Rightarrow min$

Ahora

$32y + 81 \therefore y = \frac{-81}{32} = -2.53$

Por tanto

$x = 32\ in$

$y = 2,53125\ in$

Area Minima $421.25\ in^2$

$\frac{81}{y} + 8$

$y + 8$

$81\frac{1}{y} + 8y$

$+\frac{648}{y} + 8y$

$y\left(\frac{648}{y} + 16y + 81\right)$

$648 + 16y^2 + 81y$

$$d = \sqrt{90^2 + 30^2}$$
$$= 94.86$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 28 \quad \frac{30}{} \quad \Delta t = 1,07$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{94.86}{1.07} = \underline{4.53}$$

Nombre del alumno: Gabriela Alejandra Quintero Vásquez

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

1.- Ley de Boyle *Cambio $P = \frac{1}{V^2}$

$T = cte_{(g)}$

$P = \frac{1}{V}$

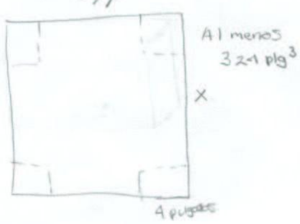
Derivada

$\frac{U}{V} = \frac{U'V - VU'}{V^2}$

$P = \frac{1}{V^2}$

$P = \frac{1}{V^2}$

2 -



$X = 7$

$(7)^3 = 343$ pulg^3

Problema de máximos y mínimos

Área = Base x altura = l^2

Volumen = Altoxanchoxlargo= l^3

$324\ plg^3 = (x - 8_{pulgadas})^3$

$324\ plg^3 = 3(x-8)^2$ Derivada

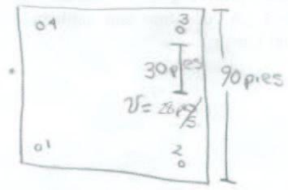
Area $= (x-8)^2$ $3x^2 - 192$

Area' $= 2(x-8)$

Area = $2x - 16$

$2x = 6/2 = 3$

3.-



¿A qué ritmo cambia su distancia?

$v = 28$ pie/s

$X = 30$ pies/s

$a = \frac{dv}{dx} = \frac{28}{30}$ $a = 0.93$ pies/s²

Nombre del alumno: Carmona Colorado Janice Grisel

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

Problema 1:

T = cte

$P_1 V_1 = P_2 V_2$

$\frac{dp}{dt} = ?\ \frac{1}{V^2}$

$PV = nRT$

$P = \frac{nRT}{V}$

$PV = T (cte)$

$P = \frac{T}{V}$

$\frac{dP}{dt} = T\left(\frac{\cancel{V \cdot D_x 1} - 1 D_x V}{V^2}\right)$

$\frac{dp}{dt} = T\left(\frac{1}{V^2}\right)$

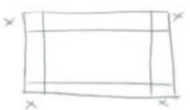
Problema 2:

Datos

$x = 4\ in$

$V = 324\ in^3$

min



$h = 2x$

$V = (Ab)h$

$324\ in^3 = (Ab)(4\ in)$

$V' = Ab D_x h + h D_x Ab$

$V' = Ab(1) + (4)(1)$

$324\ in^3 = Ab + 4\ in^2$

$Ab = \frac{324\ in^3}{4\ in^2}$

$Ab = 81\ in^2$

$A = l^2$

$81\ in^2 = l^2$

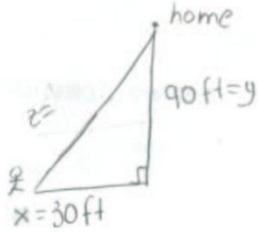
$l = \sqrt{81\ in^2}$

$l = 9\ in$

∴ como es un cuadrado

$x = 9\ in$ $y = 9\ in$ $h = 4\ in$

Problema 3:



$y = 90\,ft$

$\frac{dx}{dt} = 28\frac{ft}{s}$

$\frac{dz}{dt} = ?$

$x = 30\,ft$

$y = cte$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$z = \sqrt{(30)^2 + (90)^2}$$

$$z = 94.8683\,ft$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

$$2(30ft)(28\frac{ft}{s}) + \cancel{2(90ft)\frac{d90}{dt}} \to 0 = 2(94.8683ft)\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1680\,ft^2/s}{189.7366\,ft}$$

$$\frac{dz}{dt} = 8.85\,ft/s$$ ~ cambia z respecto a home

HECTOR GONZALEZ VALDES Q.F.B. GRUPO 13.

Nombre del alumno: HECTOR GONZALEZ VALDES

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

PROBLEMA ①:

Ticte

$$\frac{dP}{dV} = V^2$$

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

$$P_1\left(\frac{dP}{dv}\right) V_1\left(\frac{dP}{dv}\right) = P_2\left(\frac{dP}{dv}\right) V_2\left(\frac{dP}{dv}\right)$$

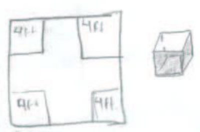
$$P_1(v^2)(v)(v^2) = P_2(v^2)(V_2)(v^2)$$

$$P_1v^2\,v^3 = P_2v^2\,v^3$$

$$P_1v^2 = \frac{P_2v^2\,\cancel{v^3}}{\cancel{v^3}}$$

$$\boxed{P_1V_1^2 = P_2V_2^2}$$

PROBLEMA ②:



$V: 324\ plg^3$.

$V: \Delta b \times h$.

$324\ plg: (\Delta b - 32)(4\ plg)$

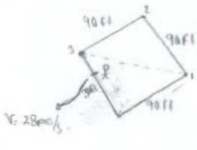
$$\frac{324\ plg}{4\ plg} = \Delta b - 32$$

$81 - 32 = \Delta b$.

$\Delta b: 49 = 49/2 = \boxed{L = 24.5\ plg}$

el lado mínimo de la lámina debe de ser de 24.5 plg. por lado

PROBLEMA ③:



$$\frac{dv}{dt} = 28\ ft/s. \qquad \frac{dx}{dt} = ?$$

$A: L \cdot L$

$$1800 = (90)\left(\frac{dv}{dt}\right) \cdot L\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$1800 = 90(28) \cdot (60)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$1800 = (2520) \cdot 60\frac{dx}{dt}$$

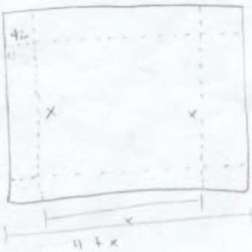
$$\frac{1800}{2520} = 60\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{0.7140}{60} = \boxed{.01\ ft/s}$$

Nombre del alumno: Karina Verdugo Mejía

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

2



[4in

$V = [(x+4)^2 (4)]$

$324 = (4x^2 + 32x + 64)$

$= 4x^2 + 32x - 260$

$x = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 + 4160}}{8}$

$x_1 = \frac{-32 + 72}{8}$ $\quad x_2 = \frac{-32 - 72}{8}$

$\underline{x_1 = 5}$ $\quad x_2 = -13 \Rightarrow$ no

$V' = 8x + 32$

$= 8(5) + 32$

$= 40 + 32$

$V = 72$

$324 = 4(5)^2 + 32(5) + 64$

$324 = 100 + 160 + 64$

$324 = 324$

$\underline{x_1 = 5}$

1

$P_1 V_1 = P_2 V_2$

$\frac{P_1}{V_2} = \frac{P_2}{V_1}$

$\frac{(V_2)(D_x P_1) - (P_1)(D_x V_2)}{(V_2)^2} = \frac{(V_1)(D_x P_2) - (P_2)(D_x V_1)}{(V_1)^2}$

$\frac{V_2 - P_1}{(V_2)^2} = \frac{V_1 - P_1}{(V_1)^2}$

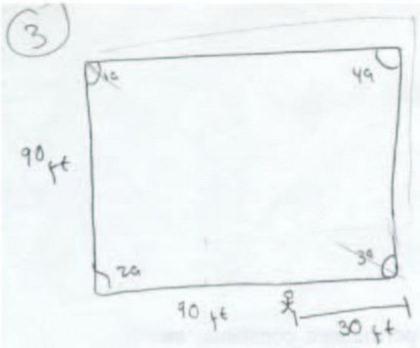
$(V_2 - P_1)(V_1)^2 = (V_1 - P_1)(V_2)^2$

$V_2 V_1^2 - P_1 V_1^2 = V_1 V_2^2 - P_2 V_2^2$

$\cancel{V_2 V_1^2} - \cancel{V_1 V_2^2} - P_1 V_1^2 = -P_2 V_2^2$

$(-P_1 V_1^2 = -P_2 V_2^2)(-1)$

$P_1 V_1^2 = P_2 V_2^2$



$v = 28 \frac{ft}{s}$

$A = L \times L$

$A = 810\ ft$

$A = 810 - 30$

$A = 780$

$v = \frac{d}{t}$

$d = v\,t$

Nombre del alumno: Lorena Galicia Ruiz

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

Problema 1

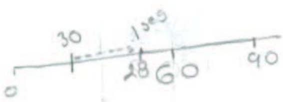
$T = k$

$P = \frac{1}{V}$ $\quad \frac{dP}{dt} = \frac{1}{V^2}$

$\frac{dP}{dt} = d V^{-1} dt$

$\frac{dP}{dt} = V^{-1-1} = V^{-2} = \frac{1}{V^2}$

Problema 3



esta a 30 pies
corre 28 $\frac{pies}{s}$

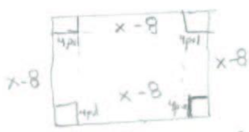
$\frac{28 \text{ pies}}{1 \text{ seg}}$

32 pies

$\frac{28 \text{ pies}}{1 \text{ seg}}$ le resta npa correr

y son $\frac{56 \text{ pies}}{2 \text{ seg}}$ le restan 4 pies

Problema 2



$V = 324 \text{ pulg}^3$

$V = Ab \times h$

$(x-8)(x-8)(4) = V$

$V = (x^2 - 16x + 64)(4)$

$V = 4x^2 - 64x + 256 = 324$

$V' = 8x - 64$

$x = -1 = -72 < 0$

y las dimenciones
9 pulg de lado

Nombre del alumno: Lorena Sánchez Bermúdez

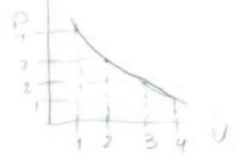
PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

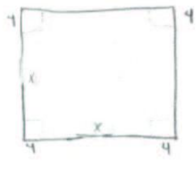
(1) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1}$

$P_1 = x$
$V_1 = x^2$

$$D_x \frac{P_1}{V_1^2} = D_x \frac{x}{x^2} = \frac{x^2 D_x x + x D_x x^2}{(x^2)^2} = \frac{x^2 + x(2x)}{x^4} = \frac{x^2 + 2x^2}{x^4} = \frac{3x^2}{x^4}$$



(2)



$V = A \times h$

$324 = A\,4$

$A = \frac{324}{4}$

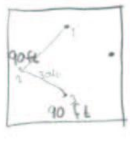
$\underline{A = 81\ plg^2}$

$A = L^2$
$L = \sqrt{A}$
$L = \sqrt{81} = 9$

El Area de un cuadrado es L^2

- Las dimensiones de la hoja de aluminio
- deben de ser de 9in x 9in

(3)



$V = 28\ ft/s$

Nombre del alumno: Natalia Rubio

PAQUETE I

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

Problema 1

T = cte

Ley de Boyle

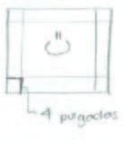
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

Demostrar que:

$$P = \frac{1}{V^2}$$

Problema 2.

$V = 324\ plg^3$



Altura = 4 plg

$A = L \times L$

$A = (L-4)^2$

$V = A \cdot h$

$324 = A \cdot (4)$

$A = 81\ plg^2$

Si $A = L^2$

$\sqrt{A} = L$

$L = 9$

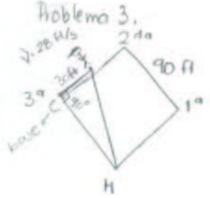
$V = (L-4)^2(4)$

$= (4L-16)^2$

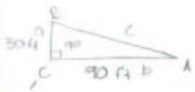
$V = 2 \cdot (4L-16)^2$ $\quad (4L-16)^2 = 162$

$4L-16 = 12.72$

Problema 3.



a irá cambiando respecto al tiempo



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

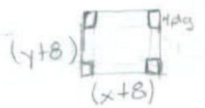
$c = \sqrt{(30)^2 + (90)^2}$

distancia a la que $c = 94.86$ ft
equidista justo en
el momento que
se encuentra a 30 ft
de la base.

Nombre del alumno: Montes de Oca Jáuregui Stefany

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)



$V = 324\,plg^3$

$V = A_B\,h$

$V = (b \cdot h)4$

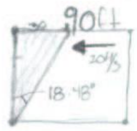
$V = (x-8)(y-8)4$

$2(x+8)(4) + (x+8)(y)$

$8x + 64 + xy + 8y$

$8x + 8y + xy + 64$

$(y+8)(x+8) = (x-8)(y-8) + 64$



$\frac{d\theta}{t} = ?$

Nombre del alumno: Colin Tenorio Maria Teresa

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

1) $T = cte$

$$P \cdot V = T$$

$$P(V^2) = T$$

$$V = \frac{T}{\sqrt{P}} \frac{dV}{dt}$$

$$V = T(P)^{-1/2} \frac{dV}{dt}$$

$$V = T D_x (P)^{1/2} + (P)^{1/2} D_x T$$

$$V = T \sqrt{P} + \sqrt{P}$$

Como la $T =$ es cte $\Rightarrow$ $V = 2\sqrt{P}$

2)

$$V = Ah$$

$$A = \frac{V}{h} = \frac{324\ plg^3}{4\ plg} = 81\ plg^2$$

$$A = l^2$$

$$\sqrt{A} = l$$

$$l = \sqrt{81} = 9\ plg$$

$$\lim_{x \to 4} = \frac{324\ plg^3}{x}$$

$$\lim_{x \to 4} = \frac{324\ plg^3}{4} = 81\ plg^3$$

3)

$$d = \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{d}{v}$$

$$t = \frac{30 \text{ pies}}{28 \frac{\text{pies}}{s}} = \underline{1.07\,s}.$$

cam
dista
este

Nombre del alumno: VICENTE ESCAMILLA RIVERA

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

1)

Boyle = $PV = K$

T = cte $\boxed{P = \frac{1}{V}}$

$\boxed{\frac{dP}{dt} = \frac{1}{V^2}}$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{(1)\frac{dV}{dt} - 0)(V)}{V^2}$$

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = \frac{1\,\frac{dV}{dt}}{V^2}}$$

2)

$V = 324$ inch^3

6.868

Volumen $\sqrt[3]{324}$ → Volumen = L^3 $L = \sqrt[3]{Volumen}$

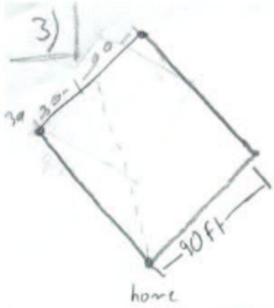
Lado caja 6.862 inch

Lado = 6.862 + 8

$\boxed{= 14.868}$ inch de lado

$(14.868)^2 = \boxed{221.06 \text{ inch}^2}$

3)



$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$2(x)\frac{dx}{dt} + \cancel{2y}(0) = 2z\,d$$

$$V_{subaba} = 28\ \frac{ft}{s}$$

$$2(30)(28) = 2(94.86)\ \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = ?$$

y = cte

$$1680\ \frac{ft^2}{s} = 189.72\,ft\ \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1680\ \frac{ft^2}{s}}{189.72\ ft}$$

$$\frac{\frac{ft^2}{s}}{\frac{ft}{1}}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = 8.855\ \frac{ft}{s}}$$

$$\frac{ft^2}{\cancel{ft}\,s}$$

Nombre del alumno: Jenny López Pedraza.

PAQUETE 1

1. La ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Usar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. (pág. 139 del Larson)
2. Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa cortando un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 plg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda ser utilizada. (pág. 555 del Haeussler)
3. Un campo de béisbol tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador que dista 30 pies de la tercera base está corriendo a 28 pie/s. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción (home)? (pág. 168 del Larson)

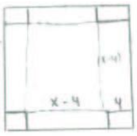
1.- $PV = K$ $\quad P = \frac{K}{V}$

$$P = \frac{V D_t K - K D_t V}{V^2} \Rightarrow P = \frac{V \frac{dK}{dt} - K \frac{dV}{dt}}{V^2}$$

$$P = \frac{\dot{V}(0) - K \frac{dV}{dt}}{V^2}$$

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = \frac{-K \frac{dV}{dt}}{V^2}}$$

2.-



$V = 324\ plg^3$

$V = L \times L \times L$

$V = (x-4)(x-4)(x-4)$

$V = (x^2-8x+16)(x-4)$

$V = x^3-12x^2+48x-64$

$V' = 3x^2 - 24x + 48$

Sacando los valores de la ec.

$(3x-12)(x-4)$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = 4$

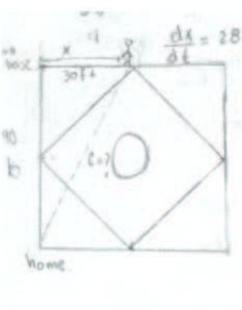
$V'' = 6x-24$

$324 = 6x-24$

$324 + 24 = 6x$

$\frac{348}{6} = x$

$x = 58$



$\frac{dx}{dt} = 28 ft/s$

$\frac{dt}{dt} = ?$

$a = x+30$

$b = 90$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (x-30)^2 + (90)^2$

$c^2 = (x^2 - 60x + 90) + 8100$

$c^2 = x^2 - 60x + 8190$

$2\frac{dc}{dt} = 2x - 60$

$\frac{2dc}{dt} = 2(28) - 60$

$\frac{dc}{dt} = \frac{56-60}{2}$

$\frac{dc}{dt} = -2 ft/s$

Nombre del alumno: Oswaldo Montero Hernández.

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1. $x \cdot y = 192$

$x + 3y \Rightarrow$ mínimo

$y = \frac{192}{x} \Rightarrow x + \frac{576}{x} = y_{mínimo}$

$x^2 + 576 = 0.$

$x^2 = -576$

$x^2 = |576|$

$|x| = 24$

$y = \frac{192}{24}$

$y = 8$

$x = 24$
$y = 8$

$24 \cdot 8 = 192$

$24 + 3(8) = 48$

3. Un automovil viaja 15000millas al año y recorre x millas por galon supongamos que el costo medio del combustible es de $1.25/g
Hallar el costo anual C como funcion de x

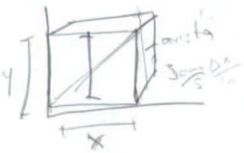
$$\frac{\left(15.000\,\frac{millas}{año}\right)\left(1.25\,\frac{\$}{g}\right)}{x\,\frac{millas}{galon}} = C$$

$$\frac{18750\,\frac{millas\,\$}{año\,g}}{x\,\frac{millas}{galon}} = C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{millas\ \$}{año\ g}}{\frac{millas}{g}} = C\,\frac{\$}{año}$$

$$\frac{(millas/año)(costo/milla)}{(costo/año)} = x\,\frac{millas}{galon}$$

2. Todas las aristas de un cubo estan creciendo a razon de 3cm/s a que ritmo esta creciendo el area de la superficie cuando esta arista mide $c = 1cm \wedge c = 10cm$ $\frac{\Delta c}{\Delta t} = 3cm/s$



$$\underline{a^2 + b^2 = c}$$

cuando

$a^2 + b^2 = 1$ * como se trata de un cubo $a = b$

$\boxed{2a^2 = 1}$

$a^2 = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad 4\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) 3\frac{cm}{s} = 8.4852\,\frac{cm}{s}$$

$$\Rightarrow \quad = 2.4\,\frac{cm}{s}$$

Nombre del alumno: Daniel Rojas Salgado.

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1) $(x)(y) = 192$ (1)

$x + 3y = \min$ (2)

24 8

x y

Dep y en ec 1

Sust y en ec 2

$y = \frac{192}{x}$ (3)

$x + 3\left(\frac{192}{x}\right)$ (4)

$\boxed{x = 24}$

$xy = 192$

$24(y) = 192$

$y = \frac{192}{24}$

$\boxed{y = 8}$

2)

$a = L^2$

$a' = 2L$

$a' = 2(1)$

$a = 2$

$a = 2(10)$

$a = 20$

$\Delta a = \frac{da}{dt}$

$dt = \frac{da}{\Delta a}$

$dt = \frac{2cm}{3cm/s}$

$dt = .66s$

3) $Cx = \frac{1500 \text{ millas x año}}{x \text{ millas x galones}} (1.25\$)$

González Mireles Evelin

Nombre del alumno:

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1°

$xy = 192$

$x + 3y \Rightarrow$ Función a minimizar

$x = \frac{192}{y}$

$\underline{\underline{x = 24}}$ # $\underline{\underline{y = 8}}$ #

$24 + 24 = \underline{\underline{48}}$ # $(8)(24) = \underline{\underline{192}}$ #

$F(x) = x + 3y$

$F(x) = \frac{192}{y} + 3y$

$F'(x) = \frac{y(0) - 192(1)}{y^2} + 3$

$F'(x) = \frac{-192}{y^2} + 3$

$-\frac{192}{y^2} + 3 > 0$

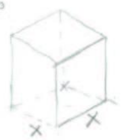
$-192 > -3y^2$

$\frac{-192}{-3} > y^2$

$\sqrt{64} > \sqrt{y^2}$

$8 > y$ $\underline{\underline{y < 8}}$ #

2°



Volúmen= $L \times L \times h$

$h = x$

Area = $x\,x$

$A = x^2$

$A = x^2$

$\frac{dA}{dt} = x^2$

$\frac{dx}{dt} = 3\frac{cm}{s}$

$\frac{dA}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = 2(1cm)\left(3\frac{cm}{s}\right) = 6\frac{cm^2}{s}$

$\frac{dA}{dt} = 2(10cm)\left(3\frac{cm}{s}\right) = 60\frac{cm^2}{s}$

3°

al año = 15 000 millas

por cada galon = x millas

cada galón = $1.25

galones = y

millas = x

$\left(\frac{15000}{x}\right)1.25 = C$

$C = \left(\frac{15000}{x}\right)(1.25) =$

Horacio Solache Ramos

Nombre del alumno:

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson).

(1) $(x)(y) = 192$ $(-3y)(y) = 192$ $24 + 3(8) = \underline{48}$

$x + 3y = 0 \quad x = -3y$ $-3y^2 = 192$

$y = \frac{192}{3}$

$y = \sqrt{64}$

$x + 3(8) = 0$ $\boxed{y = \pm 8}$

$\boxed{x = 24}$

(2)

$A = L^2 \qquad \frac{dL}{dx} = 3\ cm/s$

$D_x u^n = n u^{n-1} D_x u$

$D_x L^2 = (2L)(3\ cm/s)$

=> para 1cm

$2(1cm)(3\ cm/s) = \underline{6\ cm^2/s}$

para 10cm

$2(10cm)(3\ cm/s) = \underline{60\ cm^2/s}$

(3) 15000 millas = 1 año X millas ⟶ 1 galon n 1 galon ⟶ $1.25 12 — 0.264172 gal

Viaja 41.66 millas al dia

X millas ⟶ 1 galon ⟶ $1.25

X millas = $1.25

el costo sera de $\underline{\$/8750}$

Nombre del alumno: Isai Arce Iniestra

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1

Relación

$y = \frac{192}{x}$

$x \cdot y = 192$

$x + 3y =$ mínima

$x + 3\left(\frac{192}{x}\right) = 0$

$f(x) \to x + \frac{576}{x} = 0 \to$ función

$f(x) = x + \frac{576}{x} \to f'(x) = 1 + \frac{-576}{x^2}$

$f'(x) = 1 - \frac{576}{x^2}$

$1 - \frac{576}{x^2} = 0$

$-\frac{576}{x^2} = -1$

$-1\ (-576 = -x^2)$

$x^2 = 576 \to x = \sqrt{576}$

$x = \pm 24$

para que sea mínimo tomo el $+24$

$f''(24) = 1 + \frac{(-576)}{(24)^2}$

$f''(24) = 0$

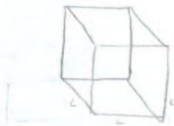
Calculando y

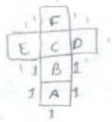
$24 \cdot y = 192$

$y = 192/24$

$y = 8$

②





Cuando arista = 1cm

$A_1 = L^2$

$\frac{3cm}{s} = \frac{D \times L^2}{D \times t}$

$\frac{3}{s} = \frac{2L}{t}$

$(3)t = 2L$

$3t = 2$

$t = \frac{2cm}{3cm/s}$

$t = 0.6s$

Razon de cambio arista = 1cm

$\frac{dd}{dt} = \frac{1cm}{0.6s} = 1.66 \frac{cm}{s}$

Cuando Arista 10.

$A_{10} = L^2$

$\frac{3cm}{s} = \frac{D \times L^2}{D \times t}$

$3cm/s = \frac{2L}{t}$

$3t = 20$

$t = \frac{20}{3}$

$t = 6.6s$

Razón de cambio arista = 10cm.

$\frac{dd}{dt} = \frac{10cm}{6.6s} = 1.51 \frac{cm}{s}$

---

③

15000 milla en un año

X millas por galón

\$1.25 x galón

$1500 \frac{millas}{año} \left(\frac{1 año}{365 dias} \right) = 41 \frac{millas}{dia}$ Aprox

"X" millas • galon

41 millas por día

$f(x) = (\$1.25)(365)^{dias}$

Nombre del alumno: Jaime Esaú Vega Santana

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1.- 2 Numeros x y y $\quad xy = 192$

$x + 3y =$ mínima.

tenemos una suma mínima y el producto

$xy = 192$ donde $x = 24$

$24y = 192 \quad y = \frac{192}{24} \quad y = 8$

$x + 3y =$ suma mínima $= 48$

$x + 3y = 48$ donde $y = 8$

$x + 3y = 48 \quad x = 48 - 24$

$x + 3(8) = 48 \quad x = 24$

de donde $x = 24$

de donde $y = 8$

entonces: $x + 3y$ = suma mínima

$24 + 3(8) = 48$

entonces $(x)(y) = 192$.

$\therefore (24)(8) = 192$

2.- Aristas: $\Delta = 3 cm/s$

a) cuando la arista mide 1cm. el area mide: $L \times L$

$D_x(A)(B) = AD_xB + BD_xA$

$= xD_xy + yD_xx \quad A = x$

$= x(1) + y(1) \quad B = y$

$= x + y$ donde $x = 1$, $y = 1$

$= a\ 2 cm/s$

b) Cuando la arista mide

b) 10 cm el area es $L \times L$.

$A = D_x(A)(B) = AD_xB + BD_xA \quad A = x$

$= 10xD_x(10y) + 10yD_x(10x) \quad B = y$

$= 10x(10) + 10y(10)$

$= 10x(10) + 10y(10) = 200 cm/s$

3.- 15000 mi/año

$= x$ mi/galon

$\$/g = 1.25 \$/gal.$

costo anual = ?

$\frac{15000 \text{ mi/año}}{\$1.25 \quad 9} = \$12000$

Nombre del alumno: LAURA MARTINEZ OSORIO

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es \$1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1. $xy = 192$ $\quad x = \frac{192}{y}$

$x + 3y = C$

$\frac{192}{y} + 3y = C$

$192y^{-1} + 3y = C$

$C' = -192y^{-2} + 3$

$-\frac{192}{y^2} + 3 = C$

$\frac{-192}{y^2} = -3$

$y = \pm 8$

$C'' = 384y^{-3} = \frac{384}{y^3}$

Con $y = 8$

$\frac{384}{y^3} = 0.75$ minimo

Con $y = -8$

$\frac{384}{y^3} = -0.75$ maximo

$x = \frac{192}{-8} = -24$

Los numeros son -8 y 24

3. 1500 millas/año

$x = 1$ galon

1 galon = \$1.25

$C(x)$

$\frac{1500 \text{ millas}}{\text{año}} = \frac{1 \text{ galon}}{x \text{ millas}} = \frac{\$1.25}{1 \text{ galon}}$

$\frac{\$1.25}{x \text{ millas}}$ $\quad \frac{1500 \text{ millas}}{1 \text{ año}}$ $\quad C(\text{millas}) = \frac{1.25 \times 1500}{\text{millas}}$

x = millas

$C(\text{millas}) = \frac{1875}{\text{millas}}$ $\quad C(x) = \frac{1875}{x}$

Función del combustible consumido anualmente

2. 

$\frac{dl}{dt} = 3\,\frac{cm}{s}$

$\frac{dA}{dt} = 2(1cm)\left(\frac{3cm}{s}\right)$

$A = l^2$

$\frac{dA}{dt} = \boxed{\frac{6cm^2}{s} \quad \text{cuando } l = 1cm}$

$\frac{dA}{dt} = 2l\,\frac{dl}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = 2(10cm)\left(\frac{3cm}{s}\right) = \frac{60cm^2}{s}$

cuando $l = 10$

Nombre del alumno: Mariana Nava Elizondo

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

(a) $1cm \rightarrow 3\frac{cm}{s}$

$\frac{dA}{dt} = l^2$

$= 2l = 2(4)$

$\frac{dA}{dt} = 8 \frac{cm}{s}$

(b) $1cm \rightarrow 3\frac{cm}{s}$

$\frac{dA}{dt} = l^2$

$= 2l = 2(13)$

$\frac{dA}{dt} = 26 \frac{cm}{s^2}$

$xy = 192 \quad \ldots (1)$

$x + 3y = 0 \quad \ldots (2)$

Despejando y en la ec. (1)

$y = \frac{192}{x}$

Sustituyendo y en la ec. (2)

$x + 3\left(\frac{192}{x}\right) = 0$

$x^2 + 576 = 0$

$-x^2 = 576$

$x = \sqrt{576}$

$x = 24$

Sustituyendo x en la ec. (1)

$xy = 192$

$(-24)(y) = 192$

$y = \frac{192}{-24}$

$y = 8$

3 15000 millas al año — X millas por galon

\$1.25 por galón — X

$$Cx = \frac{1500 \text{ millas por año}}{X \text{ millas por galón}} (\$1.25)$$

Nombre del alumno: Piña Estrada Norma

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1 Sean 2 números positivos A y B

$AB = 192$ $B = \frac{192}{A}$

$A + 3B$ ← mínima $B = 3A$

$(3A)A = 192$

$3A^2 = 192$

$A = \sqrt{64}$ $\sqrt{64}$ $\boxed{A = 8}$

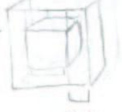
$AB = 192$

$B = \frac{192}{8}$ $\boxed{B = 24}$

2

3 cm

3cm



3cm

$V = L \times a \times h$

$A = L \times L$

L = lado

a = ancho

h = alto

$A = (3)(1) = 3$

$(3)(10) = 30$

x

1.25

$1.25x$

auto año 15 000 millas

"X" millas / galon

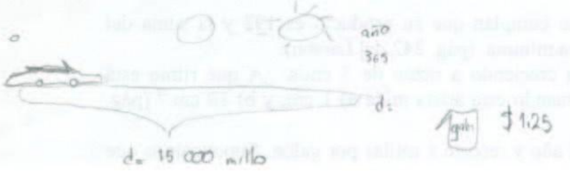
C_{medio} por galón = \$ 1,25

C del combustible consumido como función x

$$\frac{x}{1{,}25} = 15000$$

$$x = 18750$$

x = costo anual



Pablo Agustín García Blancas

Nombre del alumno:

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1

$xy = 192 \qquad x + 3y$

$y = \frac{192}{x}$

$f(x) = x + 3\left(\frac{192}{x}\right)$

$f(x) = x + \frac{576}{x}$

$f(x) = \frac{x^2+576}{x}$

$D_x f(x) = \frac{x D_x x^2+576 - (x^2+576) D_x x}{x^2}$

$D_x f(x) = \frac{2x^2 - x^2 + 576}{x^2}$

$D_x f(x) = 2 - x^2 + 576$

$D_x f(x) = -x^2 + 578$

$-x^2 + 578 = 0$

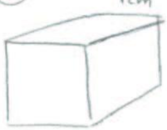
$\sqrt{578} = x$

$f''(x) = -2x$

$f''(\sqrt{578}) = -2(\sqrt{578})$

$f''(\sqrt{578}) = -48.08$

2



a)

$A = L^2$

$\frac{dA}{dt} = 2L\left(\frac{dL}{dt}\right)$

$\frac{dA}{dt} = 2(1cm)(3cm/s)$

$\frac{dA}{dt} = 6\frac{cm^2}{s}$

b)

$A = L^2$

$\frac{dA}{dt} = 2L\left(\frac{dL}{dt}\right)$

$\frac{dA}{dt} = 2(10cm)(3\frac{cm}{s})$

$\frac{dA}{dt} = 60\frac{cm^2}{s}$

3 Datos

$d = 15000 \frac{\text{millas}}{\text{año}}$

$x \frac{\text{millas}}{\text{galón}}$

$\$ = 1.25/\text{galón}$

$C = ?\ F(x)$

$1.25x = C$

$\frac{15000}{x} = 1.25x$

$x = \sqrt{\frac{1500}{1.25}}$

$x = \sqrt{12000}$

$\Rightarrow 1.25(\sqrt{12000}) = C/\text{milla}$

$C = 136.93\ \$/\text{milla}$

$C/\text{año} = (136.93\ \$/\text{milla})\ 15000\ \text{millas}$

$\frac{C}{\text{año}} = \$2053959.59$

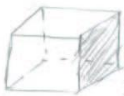
Nombre del alumno: González Hernández Yazmín .

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es $1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1.- $\begin{array}{r} 96 \\ \times 2 \\ \hline 192 \end{array}$ $96 + 3(2) = \underline{102} \rightarrow$ menor a $\underline{192}$

2.-



crecen a razón de $\frac{3cm}{s}$

Area de la superficie $= l \times l =$ arista x arista $= a^2$

↳ con respecto al tiempo ? a) 1 cm ∧ b) 10 cm ?

b) $\frac{dA}{dt} = \frac{dxa^2}{dt} = 2a \cdot \frac{dxa}{dt} \Rightarrow$

$\frac{dA}{dt} = 2(10cm)\ \frac{3cm}{s} = \boxed{60\frac{cm^2}{s}}$

a) $\frac{dA}{dt} = \frac{dxa^2}{dt} = 2a' \cdot \frac{dxa}{dt} =$

$\frac{dA}{dt} = 2\ (1cm)\ \frac{3cm}{s} = \boxed{\frac{6cm^2}{s}}$

3.- $15000\ \frac{\text{millas}}{\text{año}}$ recorre $x\ \frac{\text{millas}}{\text{galon}}$. ¿Cuántas millas recorre por galón?

$\frac{\$}{2}$ combustible es $1.25/galón.

Hallar el costo anual C del combustible función de X..

$x = 15000\ \text{millas}\ (\$1.25 \times 2) = 37,500$ galones de $2.5 al año

$\Rightarrow$ $95 anual

$C(x) = X\ \frac{\text{millas}}{\text{galon}} \cdot (2(1.25))$

Nombre del alumno: Jeniffer Martínez Calderón

PAQUETE 2

1. Calcular dos números positivos que cumplan que su producto es 192 y la suma del primero más el triple del segundo sea mínima. (pág. 242 del Larson).
2. Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 3 cm/s. ¿A qué ritmo está creciendo el *área de la superficie* cuando esta arista mide a) 1 cm. y b) 10 cm.? (pág. 167 del Larson)
3. Un automóvil viaja 15000 millas al año y recorre x millas por galón. Supongamos que el costo medio del combustible es \$1.25 por galón. Hallar el coste anual C del combustible consumido como función de x... (pág. 129 de Larson)

1

$x \cdot y = 192$

$x + 3y = 192$

$x = \frac{192}{4}$ $\quad y = \frac{192}{x}$

2

$3\,\frac{cm}{s}$ ← Razón a la que están creciendo

Medidas de las aristas → a) 1 cm
b) 10 cm

3

15,000 millas al año → A
x millas por galón
1 galón → \$1.25 → B
C → coste anual

15,000 millas → 365 días
x millas → x galones (1.25)

$$x \text{ millas} = \frac{15.000 \text{ millas } (1.25)}{365 \text{ días}}$$

15,000 millas A + x millas (x galones) B = coste anual C
x millas (1.25)

Nombre del alumno: Juárez Tenorio Nayeli Guadalupe

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

①

$\frac{dV}{dt} = \frac{5 ft^3}{min}$ $\quad P = ctc \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$D = \varnothing = 1.5$ $\quad \frac{dV}{dt} = \left(\frac{4}{3}\right)(\pi)(r)^3 = r = \sqrt[3]{\frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{4}{3}\pi}}$

$D = 2r$ $\quad D = 1.5 ft$

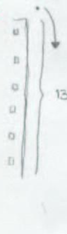
$r = \frac{D}{2}$ $\quad = \sqrt[3]{\frac{\frac{5ft^3}{min}}{4.18}} = 1.06 ft$

$\frac{dr}{dt} = ?$

$V = \frac{4}{3}\pi(1.06 ft)^3 = 5 ft^3$

$V = \frac{4}{3}\pi\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} = \frac{V}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{5 ft^3}{\frac{4}{3}\pi} = \boxed{1.19\ ft/min}$

②



$y = \cancel{y_0}^{0} + \cancel{v_0 t}^{0} + \frac{1}{2}at^2$ $\quad vt^2 + 2t = v = (16.66)^2 + 2(16.66) =$

$y = \frac{1}{2}at^2$ $\quad = 310.87\ m/s$

$a = \frac{v_f - \cancel{v_0}^{0}}{\Delta t}$ $\quad v = (1)^2 + 2(1) = 2\ m/s$

$v_f = a\Delta t$

$t = \sqrt{\frac{2(1362)}{9.81}}$ $\quad v_f = (9.81)(16.66)$

$v_f = 163.46\ ft/s$

$= 16.66\ s$

3

$P = 16cm$

Area Rectangulo: bh

Perimetro$_R$ $= 2b+2h$

Semicirculo: $2\pi r$

$\frac{\pi r^2}{2}$

$x = (bh)(\frac{\pi r^2}{2})$

$= (1+1)+(4\pi r) = 2+4\pi r$

$= 14.56\,r$

$x' = 14.56$

Nombre del alumno: González Calderón David

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

PREGUNTA 2

Inciso (a):

* Posición (x):

$$x_f = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

donde $g = 9.81\ m/s^2 = 32\ ft/s^2$

* Velocidad (v):

$$v_f = v_0 + g t$$

Inciso (b)

$$v_m = \frac{v_A - v_B}{2}$$

$$= \frac{64 - 32}{2} = 16\ m/s$$

Inciso (c):

cuando $t = 1$,

$$\Rightarrow v = v_0 + g(1)$$

$$v = \cancel{v_0} + 32\ ft/s^2 (1)$$

$$= 32\ ft/s$$

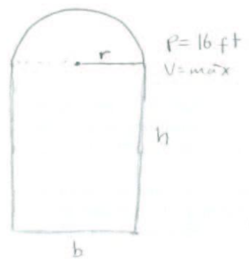
cuando $t = 2$

$$v = v_0 + g t$$

$$= \cancel{v_0} + 32\ ft/s^2 (2s)$$

$$= 64\ m/s$$

PROBLEM ③:



$P_{CIRCULO} = 2\pi r$

$\therefore P_{semicirculo} = \underline{\pi r}$

La base del rectangulo debera ser igual a 2 veces el radio del circulo

$\Rightarrow b = \underline{2r}$

$P_{RECT} = 2r + h$

$\therefore P_{TOTAL} = \pi r + 2r + h = 16ft$

Necesitamos poner el Perimetro en función del radio:

Despues de poner el P_{TOTAL} en funcion del radio

Se escribe el volumen en funcion del perimetro

IRAN OCAÑA RIOS

Nombre del alumno:

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

(1)

$\frac{dP}{dt} = \frac{5 ft^3}{min}$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dr}{dt} = ?$

$d = 1.5\ ft$

$V_1 = \frac{4}{3}\pi (0.75)^3$

$V_1 = 1.7671\ ft^3$

$PV_1 = PV_2$

$P(1.7671\ ft^3) = P(\frac{4}{3}\pi r^3)$

$\frac{dP}{dt}(1.7671\ ft^3) = \frac{dP}{dt}(\frac{4}{3}\pi)(\frac{r^3}{dt})$

$(5\ ft^3/min)(1.7671\ ft^3) = (5\ ft^3/min)(\frac{4}{3}\pi)(\frac{r^3}{dt})$

(2)

$h = 1362\ ft$

$y_0 = 1362\ ft$

$a = 9.81\ m/s^2$

$v_0 = 0$

a).- $v = \int a\,dt$

$v = \int (9.81)\,dt$

$v = 9.81 \int dt$

$v = 9.81t$

$x = \int v\,dt$

$x = \int (9.81t)\,dt$

$x = (9.81)\int t\,dt$

$x = (9.81)(\frac{t^2}{2})$

$x = (\frac{9.81}{2})t^2$

b).- $V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$V_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

$V_m = \frac{19.62 - 4.905}{2-1}$

$V_m = 14.715\ m/s$

en $t = 1$

$x = (\frac{9.81}{2})(1)^2$

$x = 4.905$

en $t = 2$

$x = (\frac{9.81}{2})(2)^2$

$x = 19.62\ m/s$

c).- $V_{ins} = \dfrac{dx}{dt}$

$= \dfrac{\frac{(9.81)t^2}{2}}{dt}$

$= \dfrac{9.81}{2} t$

En $t = 1$

$V_{ins} = \left(\dfrac{9.81}{2}\right)(1)$

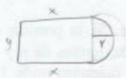
$= 4.905\ m/s$

En $t = 2$

$V_{ins} = \left(\dfrac{9.81}{2}\right)(2)$

$= 9.81\ m/s$

③



Perimetro $= 16$ ft

$A = max$

Perimetro: $2x + y + \dfrac{2\pi r}{\cancel{2}} = 16$ $\qquad y = 16 - 2x - 2r$

$: 2x + y + \pi r = 16$

$A = (2y + 2x)(\pi r)$

$= [(2)(16 - 2x - 2r) + 2x][\pi r]$

$= [32 - 4x - 4r + 2x][\pi r]$

$= [-2x - 4r + 32][\pi r]$

Blanca Cecilia Bobadilla Santana

Nombre del alumno:

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

1. $PV = K$

2. $h = 1362$ ft $x = x_0 + V_0 gt + \frac{1}{2} g t^2$

$\bar{v} = [1,2]$ $V = \frac{dx}{dt}$

$V_{ri} = t = 1$

$t = 2$

a) $x = 1362 + \cancel{0} + \frac{1}{2}(9.81)t^2$ $V = V_0 + at$ $v^2 = v_0^2 + 2gx$

$x = 1362 + 4.9t^2$ $V = 0 + 9.81t$ $v^2 = \cancel{0} + 2(9.81)x$

$x = 1362 + 4.9\left(\frac{v}{9.81}\right)^2$ $t = \frac{v}{9.81}$ $\boxed{v^2 = 19.62x}$

$x = 13.62 + 4.9 \frac{v^2}{96.23}$

$x = 13.62 + 0.050 V^2$

$\boxed{x = 0.050 v^2 + 13.62}$

c) $v = v_0 + gt$

Para $t = 1$

$v = 0 + 9.81(1)$

$v = 9.81\ m/s$

Para $t = 2$

$v_2 = 0 + 9.81(2)$

$= 19.62\ m/s$

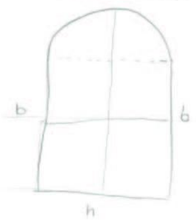
b) $v = \frac{dx}{dt} = \underline{0.1\,v}$

$v = 0.1(\sqrt{19.62x})$

$v = 0.1(\sqrt{19.6(1362)}$

$v = 16.33\ m/s$

3



Yo se lo di

$P_{cir} = 2\pi r$

Perimetro: 16 ft

Area maxima

Perimetro $= (2b + h) + (\frac{2\pi r}{2})$

$16 = 2b + h + \pi r$

$2b + h + \pi r - 16 = 0$

$2b + h - 16 = -\pi r$

$2\pi r = -2b - h + 16$

$r = \frac{-2b - h + 16}{\pi}$

$A = ((b)(h)) + \left(\frac{\pi r^2}{2}\right)$

$A = ((b)(h)) + \left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{-2b - h + 16}{\pi}\right)^2\right)$

César Sandino Portilla González.

Nombre del alumno:

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

$V = \frac{4}{3}\pi$

$V = r^3$

1.5

$V = \frac{4\pi}{3} r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \, dx$

$V = \frac{4}{3}(\pi)(.75)^2 \, dx$

$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{dr}{dt}$

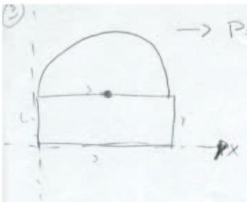
$\frac{dv}{dt} = \frac{3r^2}{dt}$

$\frac{5ft^3}{min} = 3(.75)^2 \frac{4}{3}\pi \frac{dr}{dt}$

$\frac{5ft^3/min}{\frac{4}{3}\pi \, 3(.75)^2} = \frac{dr}{dt}$

$.7073 \frac{ft}{min}$

(3) $\to P = 16p$ $P_C = \frac{1}{2}\pi x$



(2) $v = \frac{\Delta x}{\Delta T}$ $v = \frac{dx}{dt}$ $x = t^2 g$

$s^2 \frac{m}{s^2} =$

$x = t^2 g$

$v = \frac{t^2 (9.81 \frac{m}{s^2})}{dt}$

$v = 2t(9.81 \frac{m}{s^2})$ $x = (2)^2(9.81 \frac{m}{s^2})$

$v = 2(1s)(9.81 \frac{m}{s^2}) = 19.62 \frac{m}{s}$ $x_2 = 39.24\,m$

$v = 2(2s)(9.81 \frac{m}{s^2}) = 39.24 \frac{m}{s}$ $x_1 = 9.81\,m$

$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v} = \frac{39.24m - 9.81m}{2s - 1s} = \frac{29.43m}{1s} = 29.43 \frac{m}{s}$

Nombre del alumno: Zarco Díaz Héctor José.

PAQUETE 3

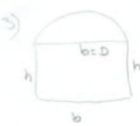
1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$ $\qquad \frac{dr}{dt} = 5\frac{ft^3}{min}.$

$\frac{dV}{dt} \quad \frac{dr}{dt} \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2.$

1362 ft $t=0 \cdot V_0 = 0$ $\qquad V = \frac{dx}{dt} \qquad x = \int V\,dt$

3)



$P = 16ft$

$A_{max} = A_r + A_{c/2}$

$A_{max} = (b \times h) + \frac{\pi r^2}{2}$

$A_{max} = (b \times h) + \frac{\pi (\frac{1}{2}b)^2}{2}$

$A_{max} = (b \times (8 - b/2 - \frac{\pi}{2}b) + \frac{\frac{\pi b^2}{4}}{2}$

$A_{max} = 8b - \frac{b^2}{2} - \frac{\pi}{2}b + \frac{\pi b^2}{8}$

$A_{max} = \frac{64b - 4b^2 - 4\pi b + \pi b^2}{8}$

$A_{max} = \frac{51.43b - 0.8584b^2}{8}$

$b = D \Rightarrow \frac{1}{2}b = r$

$P_{rect.} = h + b + h + b = 2b + 2h$

$P_{circ.} = \pi D$

$P_{tot.} = (2h + b) + \pi D$

$16ft = (2h + b) + \pi D \qquad D = b$

$16 = 2h + b + \pi b$

$2h = 16 - b - \pi b$

$h = 8 - b/2 - \frac{\pi}{2}b$

Nombre del alumno: Ma. Isabel Alvarado Cruz

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

1

$\frac{dv}{dt} = \frac{5\ ft^3}{min}$

$\frac{5\ ft^3}{min}$

$\frac{dr}{dt} = ?$

$d = 1.5\ ft$

$r = 0.75\ ft$

$P = cte$

diametro

$\frac{dA}{dt}\ ?$

$V = \frac{4}{3}\pi(r^3)$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

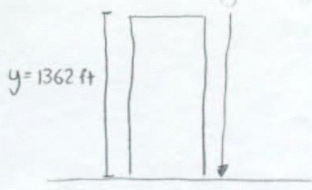
$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{5\ ft^3/min}{\frac{4}{3}\pi 3r^2} = \frac{dr}{dt}$

$\frac{5\ ft^3/min}{\frac{4}{3}\pi 3(0.75\ ft)^2} = \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = 0.70\ \frac{ft}{min}$

②



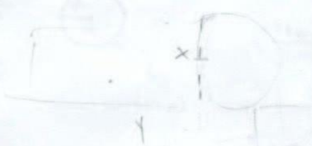
$E = ma$

a) $x = ma$ $\qquad v = \frac{dx}{dt}$

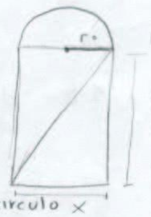
b) $v_m \left[1, ? \right]$

c) v_{inst} $\quad t = 1 \quad t = 2$

$V = \frac{d}{t} = \frac{1362 ft}{t}$



③



$r = \frac{1}{2}x$

$P = 16\ ft$

$A = 16\ ft$

$A =$

Rectangulo

$A = b \times h$ $\qquad P = 2b + 2h$

$16 =$

$P = \pi \times d$

$A = \frac{\pi r^2}{2}$

$P = \left[\frac{1}{2} \pi x + \left[2x + 2y \right] \right]$

$A = \left[\frac{\pi \frac{1}{2} x^2}{2} + x + y \right]$

Nombre del alumno: Julieta Aguilar Sanchez

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

① $r = 5\,ft^3/min$ $\quad P = cte \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad$ ¿? $= d = 1.5\,ft$ (diametro)

$d = 2r$

$r = \frac{d}{2} = \frac{1.5\,ft}{2} = \underline{0.75\,ft}$

$$dV = Dx\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi\, Dx\, r^3 + r^3\, Dx\, \frac{4}{3}\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi\,(3r^2) + r^3\left(\frac{4}{3}\right)$$

sustituyendo r

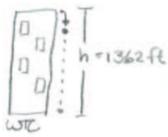
$$= \frac{4}{3}\pi\,(3(0.75)^2) + (0.75)^3\,\frac{4}{3}$$

$$= 4.18\,(3(0.5625)) + \frac{4}{3}\,(0.4218)$$

$$= 4.18\,(1.6875) + 0.5624$$

$$= 7.0537 + 0.5624$$

$$= \underline{7.61\,ft}$$

② 

a) posicion y velocidad de la moneda

$V = \frac{dh}{dt}$

b) velocidad media en el intervalo [1,2]

$$\bar{V} = \frac{V_1+V_2}{2} = \frac{1362 ft/s + 681 ft/s}{2} = \frac{2043 ft/s}{2} = 1021.5 ft/s$$

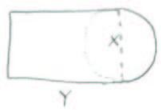
c) Velocidades instantaneas cuando t=1 y t=2

$v = \frac{d}{t}$ $\quad v_1 = \frac{1362 ft}{1 s} = 1362 ft/s$

$v_2 = \frac{1362 ft}{2 s} = 681 ft/s$

---

③ "Ventana de Norman"



hallar dimensiones:

16ft = perimetro

área = maxima

$P_\square = 2x+2y$

$P_\bigcirc = \pi d = \pi x$

$P_\square + \frac{1}{2}P_\bigcirc = 16ft$

$= (2x+2y) + \frac{1}{2}(\pi x) = 16$

$= 2x + 2y + \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2}x = 16$

$= 2x + 2y + 1.57 \cdot \frac{1}{2}x = 16$

$= 2x + 2y + 0.78x = 16$

$= 2.78x + 2y = 16 \Rightarrow \boxed{2.78x + 2y - 16 = 0}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2.78)(-16)}}{2(2.78)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 177.92}}{5.56}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{181.92}}{5.56} = \frac{-2 \pm 13.48}{5.56}$

$x_1 = 2.06 \quad x_2 = +2.78$

Nombre del alumno: Leonardo David Hernández Varela

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

1 Datos.

$5 ft^3/min$

$P = cte$

$V = 4/3 \pi r^3$

$2r = d = 1.5 ft$

$r = 0.75 ft$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \, dx$

$V = \frac{4}{3}\pi (2r^2)$

$= \frac{4}{3}\pi (2(0.25)^2$

$= 4.71 ft/s$

2

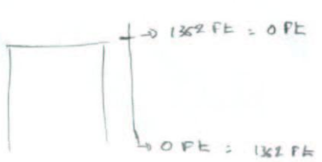
$v_1 = 0$

$d = h = 1362 ft$

$a = g = 9.81 m/s^2 = 32.2 ft/s^2$

$t_1 = 1$

$t_2 = 2$



a) velocidad

$x = t$	$y = v = 2at$
1	64.4
2	128.8
3	193.2
4	257.4

=

Función de velocidad

$= 2at$

Posición

$x = d$	$y = x^2$
1	1
2	4
3	9
4	16

Posición

$x = {}^2$

b) Velocidad media entre 1 y 2

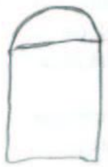
$$U_m = \frac{U_2 - U_1}{t_2 - t_1} = \frac{128.8 - 64.4}{2 - 1} = \frac{64.4}{1} = \underline{64.4\ m/s}$$

c) Velocidad instantánea en $t = 1$ y $t = 2$.

$t_1 =$ $\quad U = 2a\,t$

$$U_1 = 2a\,(1) = 2(32.2\ ft/s^2)(1s) = 64.4\ m/s$$
$$U_2 = 2a\,(2) = 2(32.2\ ft/s^2)(2s) = \underline{128.8\ m/s}$$

3



$P =$ Rectangulo $= 2a + 2b$

P Circulo $= \pi \times d$, como es semicirculo $= \frac{\pi \times d}{2}$

$$P = 2a + 2b + \frac{\pi \times d}{2} = 16\ ft$$

18/Ene/03

Nombre del alumno: Guadalupe Baltazar Sandoval

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

1- $\frac{5 ft^3}{min}$ $p = cte$

Calcular la rapidez de cambio del radio cuando el diametro mide 1.5ft

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$Dx\ V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = 4\pi r^2$

$1.5 ft \left(\frac{0.3048 m}{1 ft}\right)$

$V = 4(0.2286 m))^2$

$d = \boxed{0.4572\ m}$

$\boxed{V = 0.20903\ m} \left(\frac{1 ft}{0.3048 m}\right) = \boxed{0.6858\ ft}$

$\boxed{r = 0.2286\ m}$

2- $h = 1362\ ft$

$\left.\begin{matrix} v = ? \\ x = ? \end{matrix}\right\}$ funciones

$v_m = [1.2]$

$V_{instantanea} = \begin{matrix} t=1 \\ t=2 \end{matrix}$

a) $x = \frac{1}{2}gt^2$

$1362 ft = \frac{1}{2}(9.81)t^2$

$1362/4.905 = t^2$

$\sqrt{277.6} = t$

$\boxed{16.66 = t}$

$V = (9.81)(16.66)$

$\boxed{V = 163.46\ m/s}$

$V_m = \frac{V_f - V_0}{t}$

$V_m = \frac{0 - 163.46}{1}$

$t = 1$ $\boxed{V_m = -163.46}$

$t = 2$ $V_m = \frac{-163.46}{2}$

$\boxed{V_m = 81.73}$

$V_{instantanea} = V_{prom} t$

$t = 1$ $(81.73)1 = 81.73$

$V_{instantanea}$

$t = 2$ $(81.73)(2) = 163.46$

Yo se las di:

$x = \frac{1}{2}gt^2$

$V = gt$

3.- 

$16\ ft = P$

$C = \pi d$ $A = \pi r^2$

$\boxed{A = \frac{\pi r^2}{2} + b \times h}$

$\boxed{P = \frac{\pi d}{2} + 2(a+b)}$

$A_{círculo} = \frac{\pi x^2}{2} + xy$

$y = 2x$

$P = \frac{\pi(x_1 + x_2)}{2} + 2(2(x_1+x_2) + x)$

$f(x) < g(x)$

$\Rightarrow \int [g(x) - f(x)]\, dx$

$= \int_{x_1}^{x_2} [3x - \frac{\pi x^2}{2}]\, dx$

$= \pi \int [3x - \frac{x^2}{2}]\, dx$

$= \pi \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2}$

$=$

Nombre del alumno: Noé Cruz Pichardo

PAQUETE 3

1. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 5 pie^3 por minuto. Si la presión se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a cuatro tercios de π y al cubo del radio. ¿Cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 1.5 pie? (Ana Olazábal)
2. Se deja caer una moneda desde lo alto del World Trade Center, que tiene una altura de 1362 pies. Hallar: a) las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda, b) su velocidad media en el intervalo [1,2], c) sus velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$...(pág. 129 del Larson)
3. Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 pies de perímetro y área máxima. (pág. 243 del Larson)

- PROBLEMA No 1

$\frac{dv}{dt} = 5\frac{ft^3}{min}$ $\quad v = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad$ Diametro = 1.5 ft $\therefore r = 0.75 ft$

$\frac{dr}{dt} = ?$ $\quad \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi\, 3r^2 \frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{4/3\,\pi\, 3r^2} \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{4\ ft^3/min}{4/3\,\pi\, 3(0.75\,ft)^2} = \frac{ft^{\cancel{3}}/min}{\cancel{ft^2}}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = 5.588\ \frac{ft}{min}$$

- PROBLEMA No 2

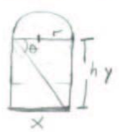
c) $V = \frac{1}{2}gt^2$ $\quad v = \frac{1}{2}(9.81\,m/s)(1)^2 = 4.905\,m/s$

$v = \frac{1}{2}(9.81\,m/s)(2)^2 = 19.62\,m/s$

b) $V_m = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$ $\quad V_m = \frac{19.62\,m/s - 4.905\,m/s}{2s - 1s}$ $\quad V_m = 14.715\,m/s$

a) $\underline{V = \frac{1}{2}gt^2}$ $\quad \int \frac{1}{2}gt^2 \quad \frac{1}{2}g\int t^2 = \frac{1}{2}g\frac{t^3}{3} = \frac{1}{6}gt^3$ } Posición

- PROBLEMA No 3 $\quad$ 16 ft ← Perímetro



$P = \pi \cdot D$ $\quad 16ft = \pi \cdot D$

$D = \frac{16ft}{\pi}$ $\quad D = 5.092 ft$ $\quad \therefore r = 2.546 ft$

$A = b \times h$ $\quad \cos\theta = \frac{y}{D}$ $\quad y = \cos\theta\, D$

$A = (5.092 ft)\, y$ $\quad y = (5.092ft)\cos\theta$

$f'(y) = 5.092 ft$ $\quad \therefore$ Area máxima = $(5.092ft)\cos\theta \cdot 5.092 ft$