



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA
Y TECNOLOGÍA AVANZADA

CONCEPCIONES DE PROFESORES SOBRE LA
TRANSFORMACIÓN LINEAL EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

Tesis que para obtener el grado de

Maestría en Ciencias
en Matemática Educativa

Presenta:

JUAN ADOLFO ÁLVAREZ MARTÍNEZ

Director de tesis:

M.C. JUAN GABRIEL MOLINA ZAVALA

MÉXICO, D.F. JULIO 2011

ÍNDICE

	PÁGINA
RESUMEN	3
ABSTRACT	4
INTRODUCCIÓN	5
CAPITULO 1	
Objetivo de la investigación	7
Justificación de la investigación.....	10
CAPITULO 2	
Antecedentes sobre aplicación del método.....	11
CAPITULO 3	
Marco teórico.....	13
Tareas y tipos de tareas.....	13
Las técnicas.....	14
Las tecnologías.....	14
Las teorías.....	14
En relación a la intuición y a los modelos intuitivos.....	16
Acerca de los modelos.....	17
Modelos paradigmáticos.....	19
TAD e Intuición.....	20
CAPITULO 4	
Método comparativo.....	23
Fases del método comparativo.....	26
Descripción e interpretación	26
Yuxtaposición.....	51
Comparación.....	55
CAPITULO 5	
Conclusiones.....	58
REFERENCIAS	61
ANEXOS	63

RESUMEN

La transformación lineal es un tema de mucha importancia para las carreras de las áreas de física y matemáticas en el nivel superior; su dominio requiere de una correcta integración de conceptos teóricos y prácticos que en muchas de las ocasiones se da de manera poco eficiente y por ello surge la dificultad en su aprendizaje.

La presente investigación tuvo como finalidad identificar y comparar, bajo el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y de los modelos intuitivos, las ideas, procedimientos, técnicas y teorías que los estudiantes emplean cuando resuelven tareas específicas respecto a este concepto del Álgebra Lineal (AL).

Para analizar la información respecto de los conceptos que movilizan y aplican los alumnos se ha empleado el método comparativo, el cual a través de sus diferentes etapas nos da la oportunidad de conocer las semejanzas y diferencias que muestran dichos estudiantes cuando dan respuesta a las preguntas asignadas, referentes a la transformación lineal.

ABSTRACT

The linear transformation is a topic of a lot of importance for the careers of the Physics and Mathematics areas in the superior level; their domain requires of a correct integration of theoretical and practical concepts which are not in a very efficient way in many of the occasions and for it arises it the difficulty in its learning.

The present research had as purpose to identify and to compare, under the of theoretical framework of the Anthropological Theory of the Didactic thing (TAD) and of the intuitive models; the ideas, procedures, technical and theories that the students use when they solve specific tasks regarding this concept of the Linear Algebra (AL).

Regarding the analysis of concepts that students need to know, to use and the practice it is necessary to apply the comparative method which trough its different stages it gives us the opportunity to know the likeness and differences that those student show when they give answer to the specific questions about linear transformation.

INTRODUCCIÓN

En el proceso de aprender conceptos matemáticos, los estudiantes a su paso por las instituciones educativas van adquiriendo conocimientos, como: experiencias, procedimientos, técnicas; y en general obtienen una formación académica que van adaptando y aplicando según sus necesidades para ir aprendiendo conceptos más complejos.

En particular los estudiantes de nivel superior de las áreas de física y matemáticas, así como de las ingenierías cursan dentro de sus mapas curriculares al menos una asignatura de álgebra lineal en la cual se aborda la Transformación Lineal (TL). Este tema ha sido relevante como objeto de estudio ya que en diferentes investigaciones se ha observado que dado su nivel de abstracción representa dificultades en su aprendizaje para los estudiantes.

Con la intención de conocer las causas de dichas dificultades sobre el aprendizaje del tema es que se desarrolla nuestro trabajo, donde la idea fundamental es identificar las técnicas, tecnologías y teorías¹ que utiliza un grupo de estudiantes para dar respuesta a tareas asignadas y con ello ganar elementos que proporcionen información para comprender las problemáticas a las que se enfrentan estos estudiantes en el proceso de aprender el concepto de la transformación lineal.

En el capítulo 1 explicamos el objetivo de la investigación.

Por otra parte, en el capítulo 2 se exponen algunas investigaciones realizadas que se relacionan con este trabajo, comentando la metodología empleada, los análisis y resultados obtenidos.

¹ Las técnicas, tecnologías, teorías son elementos pertenecientes a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que se describen en el apartado marco teórico.

En el capítulo 3, “Marco teórico”, se discuten los elementos teóricos considerados en este trabajo: la intuición y los modelos intuitivos, de Fischbein (1987 y 1989) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico, propuesta por Chevallard (1999).

El método comparativo, que se ocupa en la investigación, se explica en el capítulo 4, allí se realiza una descripción de cada etapa de éste para identificar la función que tienen en el análisis que se realiza.

En el capítulo 5 se muestran las conclusiones obtenidas, las cuales son resultado de aplicar el método comparativo bajo las consideraciones teóricas de la intuición y la TAD.

CAPÍTULO 1

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En la presente investigación se utilizó el método comparativo para contrastar las respuestas dadas por un grupo de estudiantes a seis preguntas relacionadas con la transformación lineal en \mathfrak{R}^2 . El propósito de plantear la comparación fue dar una respuesta a la pregunta:

¿Cuáles son las semejanzas o diferencias, en las concepciones que tienen estudiantes de una institución educativa concreta, respecto a la transformación lineal?

Una respuesta se puede encontrar al analizar los discursos de los estudiantes al responder las preguntas, enfocando la “mirada” en reconocer y hacer explícitas las similitudes y diferencias de, las tareas, técnicas, tecnologías y teorías que manifiesten, si lo hacen.

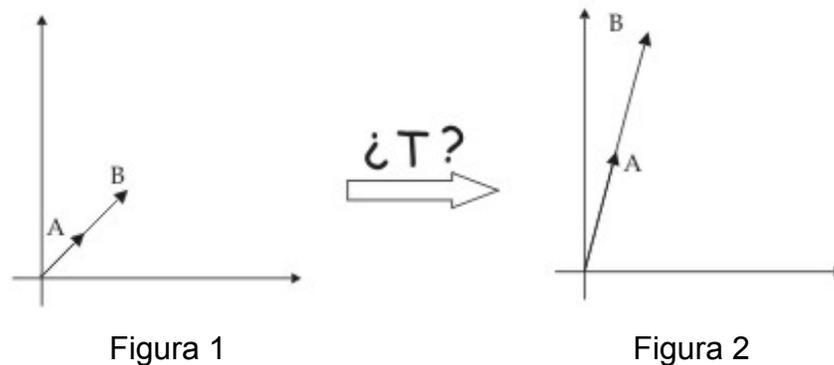
Los términos: tarea, técnica, tecnología y teoría, son retomados de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), ver Chevallard (1999). Estos se discuten en el marco teórico.

Para hacer explícitas las similitudes y diferencias entre esos elementos, empleamos el método comparativo, se procedió utilizando el propuesto en Raventos (1983), el cual es explicado en el apartado “Método”.

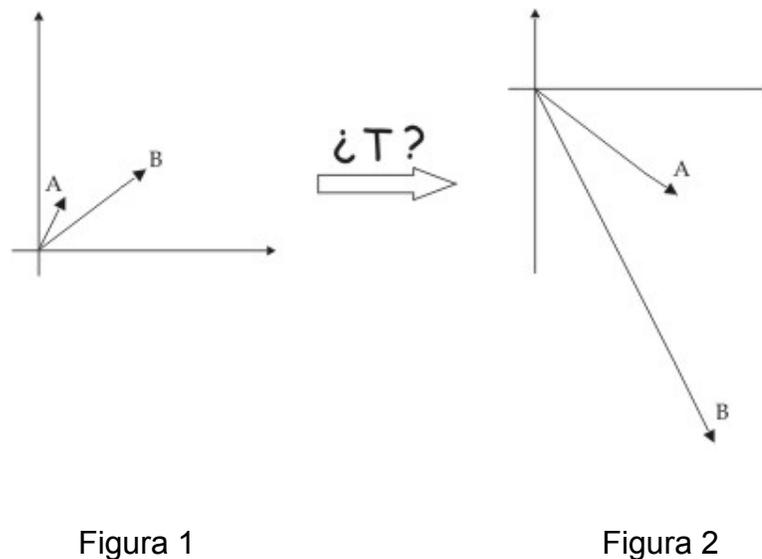
Las respuestas comparadas provienen de las transcripciones de preguntas planteadas en entrevistas del trabajo de Molina (2004), por tal razón, al mirarlo desde la perspectiva de la teoría antropológica no se perciben explícitamente cuál es la tarea, este asunto se discute en el marco teórico.

Tales preguntas son:

- A)** ¿Qué entiendes por transformación lineal?
- B)** Propón un ejemplo de una transformación no lineal y argumenta por qué es no lineal.
- C)** ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



- D)** ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



E) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.

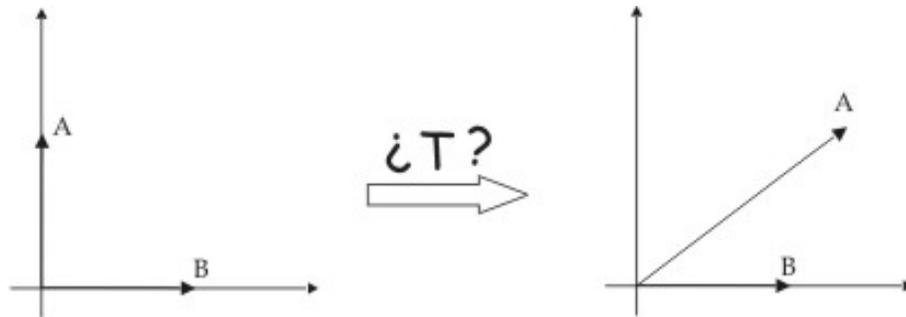


Figura 1

Figura 2

F) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.

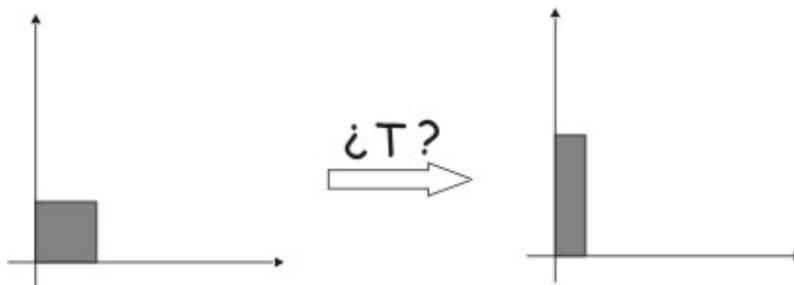


Figura 1

Figura 2

Estas cuestiones se han empleado para identificar las nociones intuitivas de estudiantes, acerca de la transformación lineal. Se realizaron entrevistas a jóvenes que recientemente habían terminado la carrera de licenciatura en enseñanza de la matemática.

En forma natural surge las preguntas, ¿por qué se realizó esta investigación?, o concretamente, ¿por qué nos resultó importante realizar una comparación entre las respuestas de estos estudiantes? Este asunto se discute en el siguiente apartado.

JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La transformación lineal es un concepto muy importante dentro de los mapas curriculares de varias carreras universitarias de las áreas de física y matemáticas, como las ingenierías.

En diversos trabajos de investigación se ha reportado que el álgebra lineal tiene asociadas muchas dificultades para su aprendizaje, dado su alto nivel de abstracción.

Una amplia revisión de este asunto se puede consultar en el trabajo de Andreoli (2009) el cual se muestra al final en la sección de anexos, donde se describen los resultados obtenidos al realizar una investigación al respecto.

Los estudiantes, en el proceso de aprender la matemática van dando significados, construyendo ideas que relacionan con los conceptos. En ocasiones estos significados están relacionados con experiencias previas y con su intuición, y llegan a ser interpretaciones que difieren de los conocimientos formales.

La importancia que tiene conocer cuáles son estas ideas e interpretaciones radica en que permite obtener información para darles orientación. Con esta información un profesor podría ganar elementos para modificar su forma de dar clase y procurar en el estudiante un aprendizaje apropiado acerca de un concepto matemático. Pero ¿Cuáles son las concepciones que sobre la Transformación Lineal tienen los estudiantes de una institución educativa concreta, se asemejan o difieren?, Un estudio comparativo podría dar una respuesta.

Consideramos que en el trabajo de Molina (2004) aunque se discute que los entrevistados manifestaron en sus argumentos la presencia de ciertos modelos, no se realizó un estudio comparativo detallado, por tanto la investigación que

proponemos complementar el trabajo previo y nos da la oportunidad de probar el método comparativo para analizar situaciones concretas.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES SOBRE APLICACIÓN DEL MÉTODO

En esta sección se describe una investigación en la que se aplica el método comparativo para analizar producciones de estudiantes; aunque el tema matemático es distinto, el trabajo nos resulta pertinente por la aplicación que se hace del método. Asimismo la revisión de otras investigaciones que se han realizado sobre el tema de la transformación lineal en nuestra disciplina se pueden consultar en la sección de anexos, pues aunque tratan sobre la TL, pueden romper la continuidad de la exposición de las ideas.

La investigación realizada por Martínez (2011) se enfocó a estudiar las dificultades que alumnos enfrentan cuando resuelven problemas que se les plantean acerca de cálculo aplicado. Para obtener la información y analizarla se diseñaron problemas y se aplicó un cuestionario a los estudiantes para posteriormente hacer la recolección de los datos.

Los alumnos debían proponer una metodología de solución y argumentar las razones por las que eligieron esa metodología, valorar si los pasos que siguieron les condujeron a la solución y si ésta fue correcta. Asimismo se buscó identificar cuáles eran los tipos de conocimientos que ponían en práctica. A saber, de aritmética, álgebra, precálculo o bien procedimientos básicos de cálculo.

El objetivo de la investigación fue identificar las diferencias metodológicas y cognitivas en los procedimientos utilizados por alumnos al resolver problemas de cálculo aplicado, la investigadora aplicó la metodología de comparación propuesta por Raventos (1983), en el siguiente párrafo se explica su interpretación del método.

Dicha metodología consta de 4 etapas: En la *descripción* se proporciona un conocimiento amplio y completo de lo que se pretende comparar; en este caso el

tipo de conocimientos aplicados (aritmética, álgebra, precálculo o bien procedimientos básicos de cálculo) lo que fue considerado como el objeto de comparación, esto se logra mediante su observación, el estudio de la información que se tiene respecto a él y el contacto personal con el mismo; la *interpretación*, aquí se pretende detectar y por consiguiente eliminar errores, analizar e interpretar la información surgida en la etapa anterior. Esto con el fin de explicar las causas y factores que dieron origen o que afectan los objetos de comparación; la *yuxtaposición*, en esta etapa se relaciona y se confronta toda la información sobre los objetos de comparación, su finalidad es establecer una hipótesis que exprese lo que suponemos provoca los hechos que nos interesa explicar, una respuesta anticipada o la posible solución que creemos pueda satisfacer a las preguntas iniciales; y por último *la comparación*, es donde se valoran, se critican y por consecuencia se extraen conclusiones de la información, de las explicaciones a los objetos de comparación, arrojada en las anteriores etapas (Martínez, 2011, p.32).

Los resultados obtenidos en esta investigación son que los alumnos mostraron diferencias significativas en el contexto cognitivo ya que algunos de ellos emplearon sólo una parte de sus conocimientos previos como aritmética, otros utilizaron además álgebra y precálculo y sólo uno aplica el cálculo; sin embargo se pudo comprobar que aunque existe una diferencia importante en los métodos aplicados entre alumnos principiantes y los de semestres avanzados; estos últimos aplican mejor los conocimientos previos pero no tienen una preparación matemática bien fundamentada ya que mostraron errores al aplicar sus conocimientos.

A través de esta metodología el investigador tuvo la oportunidad de observar, detectar, valorar y determinar tanto las diferencias como las semejanzas en las procedimientos empleados y los procesos cognitivos que mostraron los entrevistados con lo cual, para nuestro trabajo aportó el conocimiento sobre la aplicación del método comparativo.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

Como se mencionó, el propósito de esta investigación es reconocer y hacer explícitas las similitudes y diferencias de las tareas, técnicas y tecnologías que manifestaron los estudiantes al responder preguntas relacionadas con la transformación lineal en \mathfrak{R}^2 . Estos términos son retomados de la teoría antropológica de lo didáctico, y son elementos de lo que Chevallard (1999) llama praxeología matemática; que a continuación los explicamos.

Tareas y tipos de tareas

Las tareas (y los tipos de tareas) en el contexto de la escuela, son consignas que se solicitan para que lleve a cabo el alumno, y éstas se expresan mediante un verbo.

En el siguiente ejemplo, la tarea no es explícita por el marco teórico en que fue construida la pregunta, sin embargo, visto desde la TAD, la tarea consiste en que el estudiante produzca una técnica, algoritmo, una demostración o bien un discurso tecnológico en el cual fundamente y su respuesta del por qué sí o por qué no, existe una Transformación Lineal.

¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.

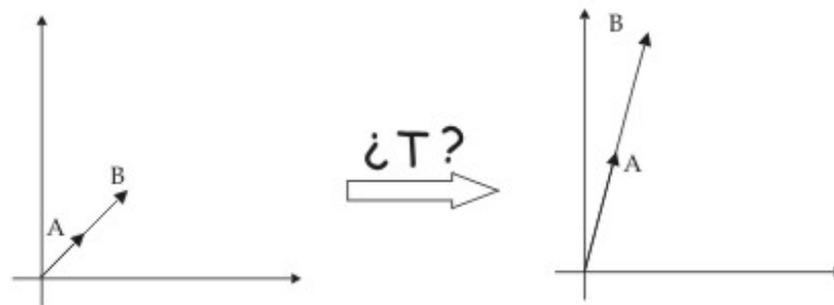


Figura 1

Figura 2

Tarea 1

Ahora bien, un tipo de tarea T es un trabajo no tan específico como la tarea t y se expresa también con un verbo: “Verificar la existencia de la transformación lineal”. La tarea t tiene cabida en el tipo de tarea T y se puede decir que $t \in T$. Por otra parte, la expresión “Verificar” se considera un género de tareas.

Por último, tareas, tipos de tareas, géneros de tareas no son datos de la naturaleza, son “artefactos”, “obras”, construcciones institucionales, cuya reconstrucción en tal institución, por ejemplo en tal clase, es un problema completo, que es el objeto mismo de la didáctica, Chevallard (1999).

Las técnicas

Una tarea para ser realizada requiere de una manera de hacerla, a esto se le llama técnica. Por ejemplo, la tarea 1, mencionada en el apartado anterior podría ser resuelta analizando si en la situación presentada se cumplen las dos propiedades que definen la transformación lineal: si k es un escalar, $T(kA) = kT(A)$ y $T(A + B) = T(A) + T(B)$. Dado el planteamiento, aquí las propiedades de la TL son parte de una técnica para resolver estos tipos de tareas, esta consideración conduce a plantear la siguiente pregunta:

- ¿Qué elementos de la praxeología relativa a esta tarea emergen en las respuestas que dan los estudiantes a ella?

Las tecnologías

“Se entiende por tecnología, y se indica generalmente por θ , un discurso racional –el logos- sobre la técnica –la tekhnê– τ , discurso cuyo primer objetivo es justificar “racionalmente” la técnica τ , para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T , es decir, realizar lo que se pretende.

El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución” (Chevallard,1999, p.226).

Por ejemplo, considerando la técnica de utilizar las propiedades de la TL para realizar la tarea 1, una tecnología para explicar por qué tal técnica funciona es el siguiente discurso del profesor:

“Por la definición de transformación lineal, debe existir la TL si se cumplen las dos propiedades”.

Las teorías

Por esta noción entendemos una explicación detallada de las afirmaciones hechas en el discurso tecnológico, una demostración matemática formal de la afirmación de que se trate. Estamos conscientes de que esta componente difícilmente aparezca, por lo siguiente, las preguntas fueron planteadas desde el marco teórico de la intuición, por tanto promueven argumentos intuitivos, los cuales son distintos a lo formal; según las ideas de la intuición que se retoman en el trabajo de Molina (2004), los estudiantes tienden a preferir lo intuitivo que lo formal, por ello se puede observar que en las respuestas a cada tarea asignada prevalecen el argumento o discurso tecnológico que la demostración formal que es lo que correspondería a la teoría bajo el enfoque de la TAD.

Por ejemplo la demostración formal de la existencia de la TL en la tarea 1, viene a ser la teoría:

Por construcción, se observa que $B = kA$, donde k es un escalar real y A y B son vectores en \mathfrak{R}^2 . Por otra parte, por construcción se observa que $T(B) = wT(A)$, en donde w es un escalar y T una transformación en \mathfrak{R}^2 , $T(A)$ y $T(B)$ son imágenes

de A y B bajo la transformación T. Entonces $T(B) = T(kA) = wT(A)$. De allí que si $k = w$, se cumple la propiedad y la transformación lineal existe, la construcción sugiere que $k = w$.

Un procedimiento semejante se requeriría para verificar que se cumpla la condición $T(A + B) = T(A) + T(B)$.

En relación a la intuición y a los modelos intuitivos

Dado que este trabajo retoma elementos de la investigación de Molina (2004), se requiere la discusión de algunos de los términos teóricos empleados en ese trabajo. Son una explicación sobre la intuición y modelos intuitivos propuestos por Fischbein (1989, 1987).

Respecto a la intuición, Fischbein (1987) menciona que no hay estrictamente definición única, y se refiere a este concepto en el sentido de que son las ideas que las personas aceptan como ciertas porque les resultan evidentes por sí mismas, y no ven la necesidad de algún tipo de argumentación para aceptarlas, a este tipo de conocimiento le llamaremos conocimiento implícito.

El investigador llama modelos intuitivos a uno de los principales aspectos de la cognición tácita, la cual la entiende en el sentido de Polanyi², como un proceso de apropiación del significado (otorgando un significado unitario sobre cierto conglomerado de datos), y que está basado en una actividad de integración básicamente tácita, es decir, que no se percibe directamente, pero que se puede suponer o inferir.

Compartimos la opinión de Fischbein (1989) de que estas operaciones tácitas no son inaccesibles a un análisis explícito, partiendo del supuesto que si el proceso tácito de integración conduce a una solución incorrecta, el análisis de la solución y de los argumentos de quien resuelve permite explicar estas operaciones tácitas.

² EL autor cita el trabajo de Polanyi, M. (1969). *Knowing and being*. Routledge and Kegan Paul: London.

Según Fischbein (1987, 1989) las nociones intuitivas poseen las siguientes características: evidencia, certeza intrínseca, perseverancia, son coercitivas, tienen un estatus de teoría, extrapolación y globalidad.

Acerca de los modelos

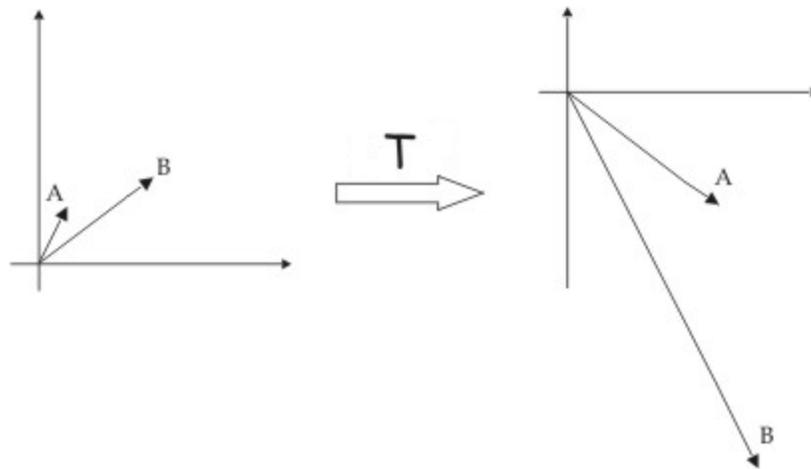
En relación a los modelos, Fischbein entiende un modelo en el siguiente sentido:

Dados dos sistemas, A y B, B podría ser considerado un modelo de A si, en la base de cierto isomorfismo entre A y B, una descripción o una solución producida en términos de A puede ser reflejada consistentemente en términos de B y viceversa (Fischbein, 1989, p.9).

De acuerdo con las investigaciones hechas por el autor, menciona que cada que una persona se enfrenta a una noción que es intuitivamente inaceptable, tiende a generar inconscientemente y en algunas otras ocasiones de manera deliberada, un sustituto de esa noción más accesible, los cuales llama modelos intuitivos.

Comentaremos algunos de estos modelos relativos a la transformación lineal.

Aquellos modelos que las personas crean de manera consciente, para facilitarse la comprensión o la solución de un problema, son llamados modelos explícitos. Por ejemplo, esta es una representación de una transformación lineal en la que rota y expanden dos vectores:



Es un modelo explícito porque fue creado en forma consciente para representar una idea concreta, el efecto de una transformación lineal concreta sobre dos vectores.

Sin embargo, según estas consideraciones teóricas, existen otros modelos que las personas se forman de manera implícita y que no son perceptibles directamente, pero que presentan manifestaciones que hacen suponer su existencia, porque ejercen influencia sobre el entendimiento de las cosas, son los que se han llamado anteriormente: modelos intuitivos implícitos o *tácitos*.

Esta distinción de modelos intuitivos tiene una relevancia importante dentro de nuestra investigación, pues estos modelos ejercen influencia implícitamente en el entendimiento matemático del estudiante.

En Fischbein (1987) se menciona que estos modelos llegan a interferir, sustituir, distorsionar o se imponen al conocimiento formal.

Esta influencia no sólo se da en los niveles elementales de educación sino que va prevaleciendo a lo largo de su formación. Para mostrar la importancia que ejercen estos modelos implícitos citamos el siguiente caso:

Por ejemplo, en el trabajo de Molina (2004) se describe cómo un estudiante piensa que la transformación lineal afecta en forma semejante a todos los vectores del plano, de tal manera que si se le mostraba una figura como la siguiente (Ver Figura 1):

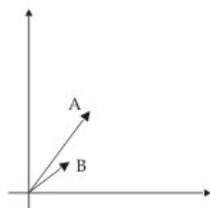


Figura 1

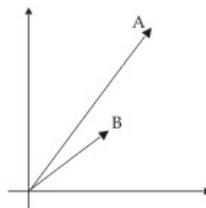


Figura 2

Dicho entrevistado para contestar la situación planteada, procedió aplicando una transformación lineal, digamos una expansión, consideraba que ambos vectores aumentarían de tamaño, como se muestra en la figura 2.

Esta idea es compatible con este tipo de transformaciones lineales, sin embargo, cuando se le preguntaba si podría existir una transformación lineal que mapeara los vectores de la figura 3 en los vectores de la figura 4, el estudiante respondió inmediatamente que no, pues había un vector que no se movía (el vector B) y que la transformación debería afectar a los vectores en la misma forma.

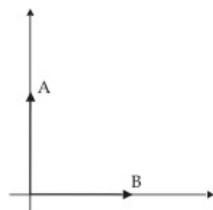


Figura 3

¿T?

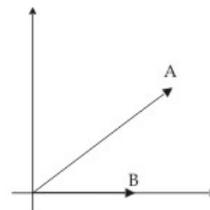


Figura 4

Esta idea del estudiante, que la transformación lineal afecta en forma semejante a todos los vectores del plano es una de esas reglas de su modelo intuitivo, y fue la causante de que el estudiante negara la existencia de la transformación lineal.

Modelos paradigmáticos

Un rasgo de los modelos paradigmáticos es que estos objetos pertenecen a la clase que se quiere representar, y que tienen rasgos comunes (y especiales) a la clase completa. Por ejemplo “agua” actúa como modelo para los líquidos, en el sentido de que, para que algo se considere líquido debe comportarse como agua (Fischbein, 1987).

Nuestro interés en este tipo de modelos es porque según los resultados del trabajo de Molina (2004), los estudiantes tienen un modelo paradigmático de la transformación lineal considerada.

Considerando los gráficos de la figura 3 y 4, para los estudiantes la transformación involucrada no era considerada lineal, porque no la podían expresar en términos de expansiones y rotaciones (o ambas), características que podrían ser los rasgos del modelo paradigmático en los estudiantes.

El autor habla de que los modelos tácitos poseen rasgos bien definidos que se han identificado: no son estructuras de pensamiento aisladas, tienen coherencia, son prácticos, son mejor entendibles) o simplificaciones del concepto original. Estos modelos prevalecen a lo largo del tiempo e influyen en educación formal de los estudiantes.

Sin embargo los modelos intuitivos suelen ser modeladores imperfectos que pueden llevar a dificultar el aprendizaje de la matemática, lo mencionado anteriormente es un ejemplo de ello.

TAD e Intuición

Como se observa en el apartado anterior, se está haciendo referencia a dos enfoques teóricos distintos. Unas preguntas que surgen son: ¿por qué se están

considerando estas dos teorías? ¿Qué están aportando al trabajo? A continuación expondremos esos asuntos.

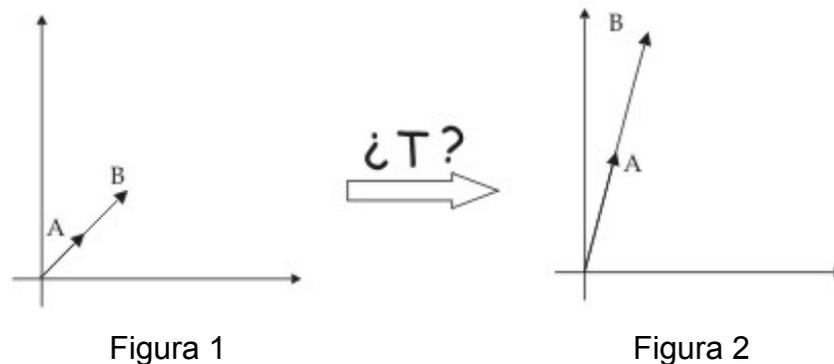
En el apartado de “Justificación de la investigación”, planteamos la pregunta:

¿Cuáles son las concepciones que sobre la Transformación Lineal tienen los estudiantes de una institución educativa concreta, se asemejan o difieren?, Un estudio comparativo podría dar una respuesta.

En primer lugar, las ideas intuitivas que los entrevistados presentan se pueden analizar de manera indirecta a través de las respuestas que han dado a cada una de las tareas asignadas³. Es aquí donde empleamos elementos de la TAD, pues permite organizar la información de nuestro estudio.

Partimos de considerar cada una de las preguntas de la entrevista⁴ como tareas que se han planteado a los estudiantes, por ejemplo:

¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Tarea C

³Esto se discutió en la sección “En relación a la intuición y a los modelos intuitivos” citando a Fischbein (1989, p.9).

⁴Estas preguntas se muestran en la sección “Objetivo de la investigación”.

Por otra parte, se considera a las respuestas que dieron los estudiantes a la Tarea C, como una solución a la tarea. Entonces una pregunta en el marco de la TAD es ¿qué elementos de la praxeología relativa a esta tarea emergen? Supusimos que surgirían tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Un estudiante al dar una respuesta o justificación a la Tarea C, podría usar una demostración formal (la cual la consideramos como teoría); al aplicar un procedimiento en que muestre cómo resuelve la Tarea C, haría explícita una técnica. Si el estudiante pone un ejemplo con intención de verificar su solución, esto podría ser considerado como una tecnología relativa a la Tarea C.

Entonces, de las respuestas que dan los entrevistados, pueden identificarse cuáles son aquellas técnicas, tecnologías o teorías relativas a las tareas. Luego con estos términos: tareas, técnicas, tecnologías y teorías se da una respuesta a la pregunta ¿Cuáles son las ideas que sobre la Transformación Lineal tienen los estudiantes de una institución educativa concreta, se asemejan o difieren?, pues al comunicar las respuestas el estudiante hace referencia a modelos explícitos y usos de la TL, suponemos que a través de “mirar” los modelos explícitos que manifiestan los estudiantes en sus argumentos podemos inferir información sobre las ideas implícitas que ellos pueden tener.

Por otra parte también aporta criterios de análisis, para establecer una comparación (esto se explica en el apartado método).

CAPÍTULO 4

MÉTODO COMPARATIVO

Para abordar el problema consideramos necesario hacer explícitas las similitudes y diferencias entre los elementos de la praxeología relativa a las tareas asignadas a los estudiantes. Para ello empleamos el método comparativo, propuesto en Raventos (1983), el cual es explicado en este apartado. Es necesario definir algunos términos importantes. El primero de ellos es comparar, lo entendemos como “fijar la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o estimar sus diferencias o semejanzas” (Real Academia de la Lengua, 2009), por otra parte por comparación entendemos al método con el cual comparar, y a continuación exponemos.

Consideramos el método de la comparación siguiendo ideas de Raventos (1983), quien hace una exposición de este método al ser aplicado en la educación, el autor señala que esta herramienta no se limita a las ciencias sociales, sino que puede ser empleado en diversos ámbitos.

Raventos (1983) resalta dos aspectos de la comparación, por una parte “la considera como un proceso en el que se unen diversas actividades de descripción, de análisis y de coordinación.

Todas ellas forman parte de un conjunto o sistema de interrelaciones...”, por otro lado la considera en un sentido dinámico, funcional, y de coordinación.

En su trabajo el autor presenta características que fundamentan la comparación, sin embargo, en virtud de lo particular del proyecto que nos ocupa, retomamos sólo algunas de las características que son de utilidad siguiendo la pauta del trabajo de Rosas (2011) quien utiliza este método en otro estudio.

Los párrafos siguientes describen las bases relacionadas con nuestro trabajo:

1. Toda comparación contiene una concepción apriorística de desigualdad o diferencia.

Asumimos que las nociones que los estudiantes manifiestan son distintas. Estas diferencias podrían deducirse en términos de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías que ellos asocien a las tareas que resuelvan.

2. Cualquier comparación debe contar de forma indispensable con unos criterios, ya sean cuantitativos o cualitativos o ambos al mismo tiempo, en función de los cuales sea posible ordenar y relacionar las diferentes variables objeto de estudio.

Los criterios que consideraremos son: la tarea, la técnica, la tecnología y la teoría relativa a cada una de las respuestas de las preguntas que se analizan.

Raventos considera cuatro fases del método comparativo, las cuales abordaremos más adelante.

3. La comparación tiene por finalidad el descubrimiento de las semejanzas, las diferencias y las diversas relaciones que pueden establecerse.

4. La comparación es una acción de pensar relacionado.

Este punto es muy importante, menciona Raventos; “aplicar la comparación a unos datos o hechos concretos sólo puede tener sentido auténtico si se les considera en relación con unos parámetros o valores de carácter superior”, estos parámetros son: los elementos de la TAD retomados y la teoría de los modelos tácitos de Fischbein (1989) discutida en nuestro marco teórico.

5. La comparación supone una afinidad.

Consideramos que esta afinidad existe porque los datos analizados pertenecen a integrantes de una misma institución educativa.

6. La comparación acostumbra a tender hacia una unificación o generalización.

Esto se busca en la última fase de la aplicación del método, al identificar entre lo que se compara, aquellos elementos que se mantienen (por lo menos en estructura).

Fases del método comparativo

A continuación se explicitan las fases del método comparativo.

Descripción e interpretación

En estas etapas procedemos a reunir información sobre aquello que deseamos comparar. Antes de comparar necesitamos conocer los detalles de los objetos, sistemas o productos susceptibles de ser comparados.

En lo que respecta al caso concreto de nuestra investigación, en esta etapa se considera el trabajo de Molina (2004), que describe y analiza las respuestas dadas a preguntas de la entrevista aplicada por el investigador.

“La descripción es el objetivo principal de la comparación...Se trata aquí de conseguir un conocimiento amplio y lo más completo posible de aquello que se pretende comparar... no debe pensarse únicamente en la comparación de sistemas educativos extranjeros; sino que en un sentido amplio, los fenómenos educativos a comparar pueden ser de índole muy diversa: construcciones escolares, niveles educativos, métodos de enseñanza, libros de texto, programas, material escolar, teorías pedagógicas...” (Raventos, 1983, p. 68)

En relación a la interpretación, se realiza una evaluación de la fase anterior, es la explicación y comprensión de factores y fuerzas que incidieron en los resultados, este examen lo realizaremos desde el punto de vista de la TAD, lo cual nos permitirá organizar la información y determinar criterios para su posterior comparación.

Yuxtaposición

Esta etapa es propiamente comparativa, se trata de una etapa de carácter relacionante en la que se confrontan estudios sobre aquello que se desea comparar.

“En la yuxtaposición no interesan de forma individual los datos e informes a que se hacía referencia anteriormente”. Se trata de una etapa eminentemente relacionante, en la que se confrontan diferentes estudios sobre aquello que se pretende comparar, a partir de lo que podríamos designar como conjuntos paralelos.

Es precisamente en esta fase de la yuxtaposición cuando puede detectarse de forma concreta el carácter unificador o generalizador que hemos citado a propósito de las características que fundamentan la comparación...” (Raventos, 1983, p. 70).

Comparación

En esta etapa se hacen explícitas las conclusiones de las fases anteriores, por tanto su objetivo principal es el valorar y permitir extraer conclusiones.

“Puede señalarse que se trata más bien de una etapa de síntesis que de análisis” (Raventos, 1983, p. 71).

Descripción e interpretación

A continuación se muestran en la tabla 1 las preguntas que se han hecho en la entrevista a los estudiantes a fin de conocer los elementos de la praxeología que aparecen en sus argumentos cuando contestan a tales cuestionamientos.

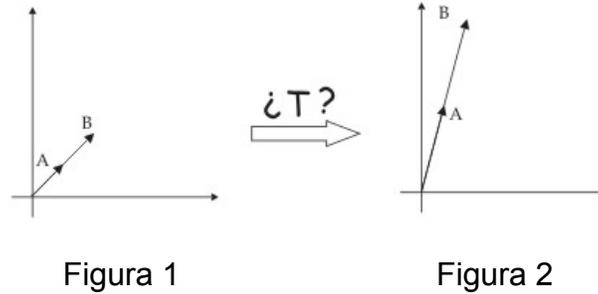
Por otra parte, se realiza la descripción e interpretación de las respuestas obtenidas, a fin de realizar posteriormente una comparación con las respuestas recopiladas.

Tabla 1

Tareas	Criterios: Identificar en la respuesta los elementos praxeológicos.
	En cada una de las preguntas nos referiremos al entrevistado:
A) ¿Qué entiendes por transformación lineal?	Esos elementos podrían ser identificados con preguntas guía; <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Contesta con la definición de transformación lineal? Si ocurre esto, se interpreta que recurre a la <i>teoría</i>. 2. ¿Propone ejemplos? ¿Cuáles? Por ejemplo, si da una fórmula es de la forma $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para $\{a, b, c, d, x, y\} \in \mathbb{R}$, o $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}$ para $\{a, b, x, y\} \in \mathbb{R}$.
B) Propón un ejemplo de una transformación no lineal y argumenta por qué es no lineal.	<ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Propone ejemplos? ¿Cuáles? 2. ¿Recuerda las propiedades que debe cumplir la transformación para que sea considerada lineal? 3. ¿Argumenta por qué su ejemplo no cumple las dos propiedades del operador lineal? Al responder podría mostrar una técnica, al dar su respuesta.
Las siguientes tareas tienen asociada la pregunta:	

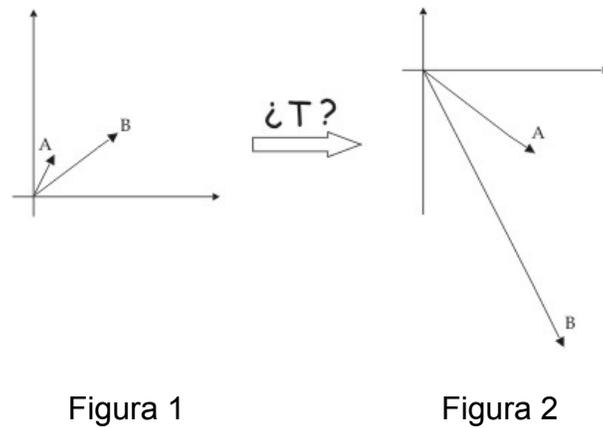
¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.

C)



- ¿Reconoce que se puede cumplir la propiedad $T(kv) = kT(v)$ donde k es un escalar y v un vector en \mathbb{R}^2 ? si es así, utilizaría una teoría.
- ¿Explica la forma en que afecta la transformación lineal a los vectores de la figura 1? Aquí podría mostrar un a técnica y una tecnología.

D)



- ¿Reconoce la existencia de la transformación lineal? ¿Cómo? En esa respuesta podrían ser identificados los elementos de interés.

E)

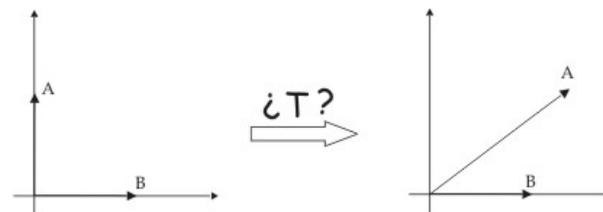
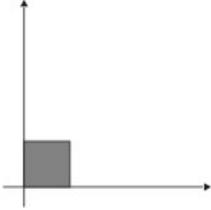
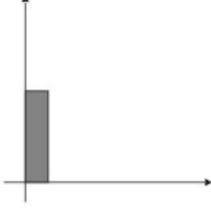


Figura 1	Figura 2
<ul style="list-style-type: none"> ¿Reconoce la existencia de la transformación lineal? ¿Cómo? 	
<p style="text-align: center;">F)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Figura 1</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>¿T?</p>  </div> <div style="text-align: center;">  <p>Figura 2</p> </div> </div>	
<ul style="list-style-type: none"> ¿Reconoce la existencia de la transformación lineal? ¿Cómo? 	

Descripción e interpretación de las respuestas dadas por los estudiantes

Entrevista 1

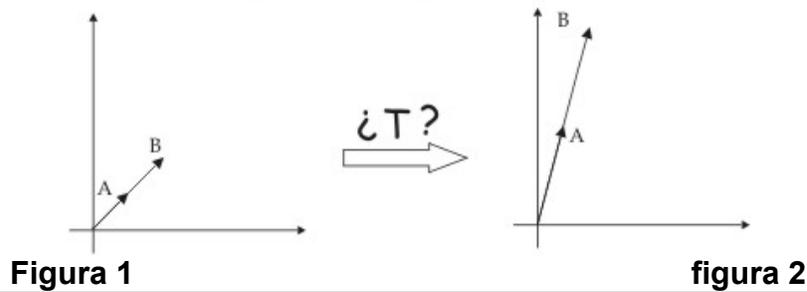
GRIS
A) ¿Qué entiendes por transformación lineal?
<p><i>Descripción</i></p> <p>Ante esta pregunta la estudiante contesta:</p> <p>G1. ¿Una transformación lineal?, para mí es una conversión de un conjunto de vectores a otro conjunto, en el cual pues, eh, vamos a hacer una transformación, como una serie de operaciones, que van a ser, este, efectuadas sobre un primer vector para que te dé otro vector en otro campo, en otra base, bajo esa transformación.</p> <p><i>Interpretación</i></p> <p>En la respuesta se puede observar lo siguiente: la alumna con la expresión “una conversión de un conjunto de vectores a otro conjunto”, está reflejando una tarea que hace con la TL; No la lleva a cabo porque no se le solicita específicamente por ello es comprensible que no aparezca una demostración o definición bien fundamentada en las propiedades que deben cumplirse; con la expresión “como una serie de operaciones” indica la técnica con la cual realiza la tarea. La teoría no se identifica como la consideramos, sin embargo es aludida.</p>
B) Propón un ejemplo de una transformación no lineal y argumenta por qué es no lineal
<p><i>Descripción</i></p> <p>La entrevistada contesta en este caso:</p> <p>G 10: Estoy pensando por ejemplo en x^2 en lugar de x nada más, haciendo referencia al ejemplo $v_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ x+y \end{pmatrix}$ y (señalando con el marcador) que agregaría el exponente 2 a la x de la primera componente del ejemplo dado.</p>

Interpretación

Aquí la técnica que describe el estudiante para realizar esta tarea consiste en agregarle un exponente 2 a al ejemplo de transformación lineal que había dado en una pregunta previa.

Por la respuesta obtenida, se puede percibir que, para que no se cumpla la linealidad deben en la representación algebraica deben aparecer términos de grado mayor a uno, esa podría ser una tecnología que justifica la técnica anterior. En los modelos explícitos estudiados en la escuela relacionados con lo lineal, esa es una de las características distintivas.

C) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumente por qué.



Descripción

En esta respuesta, la entrevistada afirma que sí existe la transformación lineal explicando:

G 58: Si por ejemplo a este componente yo lo multiplico por dos (señala el vector A en la figura 1), el otro también lo multiplico por 2 (señala el vector B en la figura 1), pues va a tener la misma inclinación, aja, lo mismo para las componentes en y, entonces considero que sí podría haber una misma combinación lineal aplicadas a estos dos que me den estos al mismo tiempo. Por simple vista porque están alineados, esa sería mi razón para pensar que sí hay.

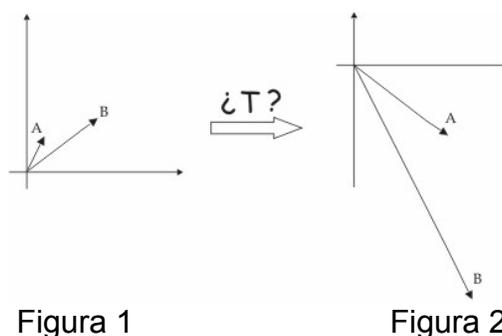
Interpretación

La estudiante en la expresión “este componente yo lo multiplico por dos, el otro también lo multiplico por 2”, la entrevistada muestra la técnica de solución, que puede resumirse como: multiplicar por el escalar 2 los componentes de cada vector de la figura 1.

En la frase “ Por simple vista porque están alineados”, sugiere una tecnología, el discurso que valida su técnica.

En este momento de la entrevista no se amplía la discusión acerca del término combinación lineal, más adelante en la entrevista se aclara que simplemente equivocó el término, y en realidad se refería a una TL.

D) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

En esta pregunta se obtuvo la siguiente explicación:

G 145: Estoy tratando de analizar el comportamiento del vector A y el B;

G 147: Es que estoy pensando como si las transformaciones fueran multiplicar una componente por un escalar (escribe αx ky), pero no siempre va a ser eso.

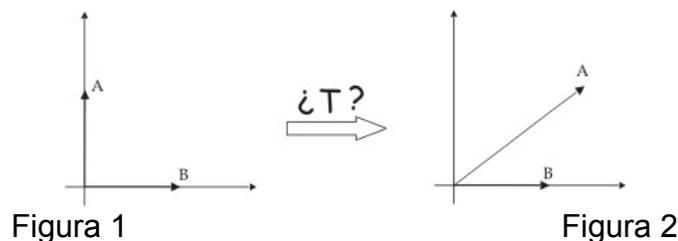
Una transformación lineal no siempre va a ser de este tipo, o sea, el simple multiplicar por un escalar, y eso sí como que me, crea, me causa un poco de conflicto con lo que estoy tomando como una transformación lineal para mostrar nada más el aumento o la disminución de los vectores.

Entonces supongo que me lleva a pensar que sí podría existir, o sea, si me voy con eso, de simplemente el aumento y disminución de los vectores, de las longitudes x, y, sus componentes, pues sí, ¿no? pero igual puede ser una transformación lineal no sólo de este tipo, si no que hay otras formas de transformación lineal.

Interpretación

La técnica empleada para dar respuesta a esta tarea es la misma que en el caso anterior, multiplicar por escalares las componentes de los vectores de la figura 1. Un elemento tecnológico asociado a esta técnica podría reflejarse en la expresión “si me voy con eso, de simplemente el aumento y disminución de los vectores”, porque es la justificación del por qué se ha de multiplicar por escalares. El estudiante está consciente de que puede haber otros tipos de TLS.

E) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

G165: en este caso la respuesta fue, No [...] no., complementando con la siguiente frase:

G 167: Por ejemplo, aquí sería algo, cero, y aquí sería, cero y algo (escribe las coordenadas $(a,0)$ y $(0,b)$ para el vector B y A respectivamente en la figura 1), si a éstas

yo le aplico operaciones, una transformación (señala su expresión $(a,0)$), como éste va a ser cero (señala el cero de su expresión $(a,0)$), $T\begin{pmatrix} 2x+3 \\ 3y \end{pmatrix}$ acá siempre va a ser cero, ¿no?

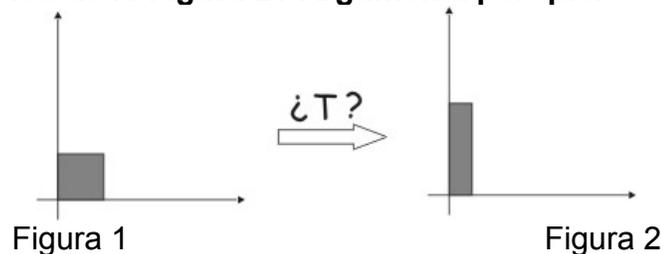
Al iniciar un dialogo sobre el argumento dado, replantea su idea y cambia su respuesta, diciendo:

G171: ¡A no!, claro, estaba confundiendo, aquí a quien debo mantener en cero es x (señala el cero en sus expresiones) aunque sí podría haber una transformación lineal, porque aunque aquí se conserve el cero (señala $(a,0)$).

Interpretación

Aquí se observa que para dar la respuesta, se lleva a cabo la aplicación de la misma técnica referente a la multiplicación por escalares.

F) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

Aquí la respuesta obtenida fue:

G 179: Estoy tratando de ver cómo este (señala un vector dibujado sobre el eje x en la figura 1 y que corresponde con el lado del cuadrado) vector va a llegar a ser éste (señala el vector dibujado sobre el eje y en la figura 1), de qué manera se puede conseguir que sea este vector, ¿no? [...] Sí, sí podría ser.

Y sostiene su argumento apoyándose de una operación donde explica:

G 183: Sí podía dar una combinación lineal para los dos vectores, una transformación lineal, perdón, donde sería para las componentes en x multiplicarlo por un valor fraccionario, por decir un medio y para las y multiplicarlo por un numero entero, o un número mayor que uno, podría ser dos (escribe $T\begin{pmatrix} 1/2x \\ 2y \end{pmatrix}$), entonces sí podría yo conseguir esto; y, entonces sí, sí podría yo tomar una transformación lineal.

Interpretación

Aquí el estudiante utiliza la misma técnica para realizar la tarea, la multiplicación por escalares y propone un modelo explícito para ello.

Entrevista 2

FABI
A) ¿Qué entiendes por transformación lineal?
<p><i>Descripción</i></p> <p>Aquí la respuesta fue:</p> <p>F4: Lo único que pude captar de transformaciones es que eran operaciones, era: tú tienes un [...] conjunto acá (con la mano izquierda señala en el espacio una región) de vectores y [...] tienes acá (con la mano derecha señala otra región en el espacio) otro conjunto, entonces a este conjunto (el de la mano izquierda) le puedes aplicar una transformación y lo pasas a otro (el de la mano derecha) [...] cómo se podría decir [...] e, sí a otro conjunto, a otro; como que le aplicas una función, así lo veo. Complementa su respuesta diciendo:</p> <p>F21: A bueno, pues [...] sé que debe de cumplir dos, dos condiciones ¿no?, o para que sea una transformación tenía que cumplir con la propiedad de la suma, y que multiplicado por un escalar [...] mmm, bueno, la del escalar casi no lo domino, pero sí sabía que tenía que [...] cumplir con la función suma, algo así, debería tener una propiedad, la transformación.</p> <p><i>Interpretación</i></p> <p>En este caso podemos observar que la estudiante responde en términos de lo que hace con la transformación lineal, transformar un conjunto de vectores en otro. La expresión “como que le aplicas una función” sugiere que la tarea es evaluar un conjunto de vectores en una función. El argumento implicado es realizar operaciones aunque no especifica el tipo o características de estas operaciones. Puede percibirse un discurso tecnológico que le permite validar su explicación, sin embargo ello no significa que domine el concepto.</p> <p>Asimismo dentro de su respuesta hace referencia a algunos elementos de teoría, son: la mención de la propiedad de suma y la multiplicación por escalar, sin embargo al no hacerla explícita no cae dentro de la definición que utilizamos, al restringirla y no usar la de Chevallard.</p>
B) Propón un ejemplo de una transformación no lineal y argumenta por qué es no lineal.

Descripción

La estudiante responde:

F34: ¡A ver!, mmm, no, de ese sí no. O sea, no sabría cómo [...] cómo expresar una transformación así.

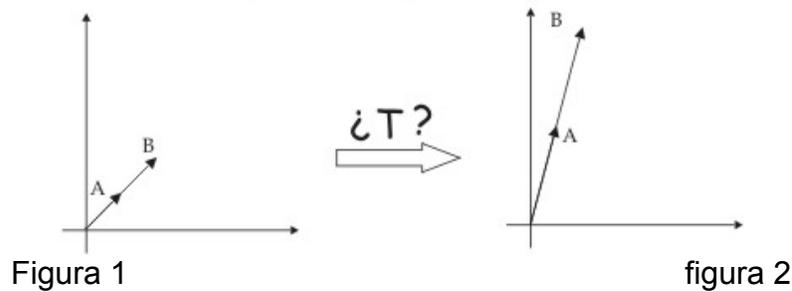
Tratando de indagar aún más la razón por la que no puede tenerse un ejemplo de una transformación no lineal, la entrevistada dice:

F36: Te podría decir que es ésta (haciendo referencia a una transformación que sí es lineal), pero te digo que me limito a los [...] a los ejemplos que están en el libro.

Interpretación

En este caso la estudiante no tiene el conocimiento acerca de las transformaciones no lineales. Esto resulta interesante, sin embargo no nos permite ver elementos de la praxeología. La dificultad para dar respuesta posiblemente se deba a que es un tema que no se profundiza en extenso en cursos de álgebra lineal de su institución, posiblemente es una tarea no escolarizada.

C) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

En este caso la respuesta fue:

F81: Éstos los veo como si fueran los vectores unitarios (señala los vectores de la figura 1).

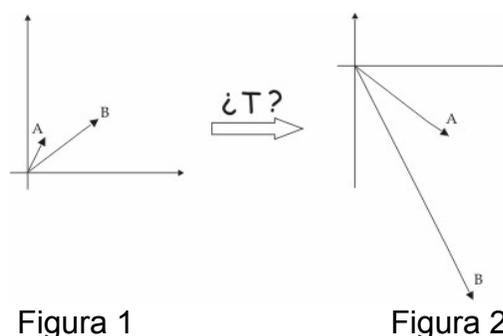
Luego prosigue explicando:

F85:... hay no sé cómo expresarlo. Mmm, eh, por ejemplo multiplicarlo [...] este vector A (de la figura 1) por algún, algún escalar, éste, para que me quede de esta longitud (el A de la figura 2).

Interpretación

Para realizar la tarea planteada, se hace referencia a la técnica de la multiplicación por un escalar, esto se percibe en la expresión “por ejemplo multiplicarlo”. La frase “los veo como si fueran vectores unitarios”, podría reflejar una tecnología relativa a la técnica. Porque en algunos ejercicios de álgebra lineal, multiplicando vectores unitarios se pueden generar vectores del plano.

D) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

Ante esta pregunta responde:

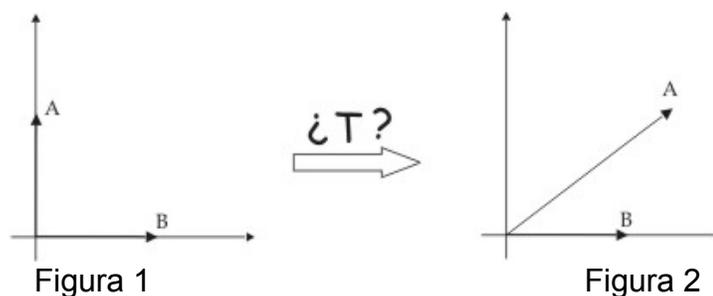
F227: O, o, o, a ver, aquí veo que la rotaste y la hiciste más grandota; diría que no habría una transformación lineal.

Sí, no habría, porque le cambiaríamos totalmente el sentido a la suma, o sea a la dirección ¿no?, sí, te diría que no habría.

Interpretación

La estudiante se apoya en una idea geométrica (la rotación y la expansión). La expresión “no habría, porque le cambiaríamos totalmente el sentido a la suma” lleva a considerar el discurso como una tecnología que la estudiante desarrolló para justificar su respuesta. La estudiante desarrolló el argumento “el sentido de la suma” en una respuesta previa (no considerada en este análisis), refiere a que el vector resultante de la suma de los vectores involucrados en cada figura, debe tener el mismo ángulo respecto al eje x. Con base en lo explicado anteriormente, una técnica implícita en la resolución de esta tarea es verificar si se conserva “el sentido de la suma”.

E). ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



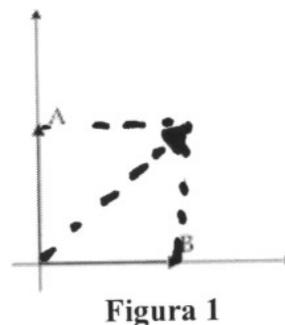
Descripción

Aquí la entrevistada contestó lo siguiente:

F229: A ver, A y B [...] A y B acá me daría la [...] la suma, no, aquí no habría transformación lineal.

Al cuestionarle cuál sería la justificación para que no exista la TL, argumenta:

F 231: Porque, aquí yo busco la suma [...] y me quedaría por acá ¿no?
(Y se apoya en el siguiente dibujo)



Complementa su explicación:

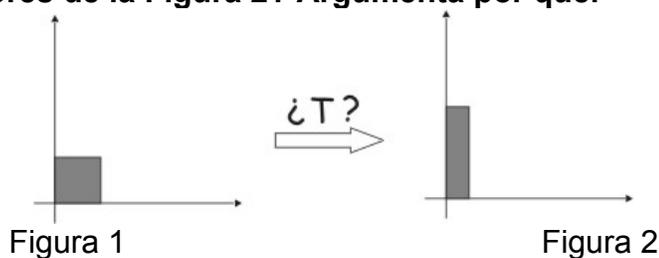
...Y aparte [...] bueno, cuando yo lo multiplico por algún escalar [...] no me quedaría acá, o

sea, no podría hallar algo que me dé esto, estos dos vectores, a menos que haya alguna proyección o algo.

Interpretación

La estudiante utiliza la técnica de verificar si la suma de los vectores de la figura uno tienen el mismo ángulo que la suma de los vectores de la figura 2, lo que llama “el sentido de la suma”, la cual la consideramos una tecnología. Otra técnica que se observa es la de multiplicar por escalares las componentes de los vectores en la figura 1.

F). ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

Ante esta pregunta, la estudiante solicita más información, preguntando si tienen la misma área ya que contesta:

F242: Porque para que yo pueda, para aplicar una transformación tendría que ser una que tenga la misma área [...] solamente que haga que crezca, o que le cambie de forma, multiplicarlo por algo para que me lo cambie de forma. Por ejemplo si es 4 por 4 yo multiplico 8 por 2 para que me quede, ahí sí, si tienen de la misma área sí.

Interpretación

Los modelos explícitos utilizados en esta tarea, sugieren que las figuras 1 y 2 tienen la misma área, esto fue notado por el estudiante, entonces la conservación del área se vuelve un factor que determina su técnica, se desempeña como tecnología. La técnica para resolver la tarea es multiplicar por escalares las componentes de los vectores en la figura 1, de tal forma que se conserve el área. Si lo puede hacer, entonces afirma la existencia de la TL.

Entrevista 3

NAYE

A) ¿Qué entiendes por transformación lineal?

Descripción

En este caso tenemos como respuesta:

N2: Es, es una función que te manda de un espacio vectorial a otro, y bueno, para que sea una transformación lineal debe separar sumas y sacar escalares.

Al preguntar mas al respecto para comprender a lo que se refiere, ella empieza a definir la TL por su notación para lo cual escribe:

$T(u + v) = T(u) + T(v)$ y $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, y dice al respecto; bueno ahí T es una función que manda de un espacio vectorial a otro (anota $T : V \rightarrow W$), señalando que u,v son elementos de V y λ es un escalar.

al solicitarle un ejemplo , ella cita:

$$T : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Interpretación

En este caso en la solución a la tarea se puede percibir el elemento que corresponde a la teoría dentro de la TAD, ya que al apoyarse en la frase: “es una función que te manda de un espacio vectorial a otro, y bueno, para que sea una transformación lineal debe separar sumas y sacar escalares”, se identifica una concepción bien argumentada acerca de la TL. Esto se complementa con las definiciones que da. Aquí los elementos de teoría son: función, espacio vectorial y las propiedades $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ que debe cumplir la transformación para ser lineal.

B) Propón un ejemplo de una transformación no lineal y argumenta por qué es no lineal

Descripción

Inicialmente la respuesta fue:

N32: una que no sea lineal [...] no recuerdo. Sin embargo reflexiona y dice:

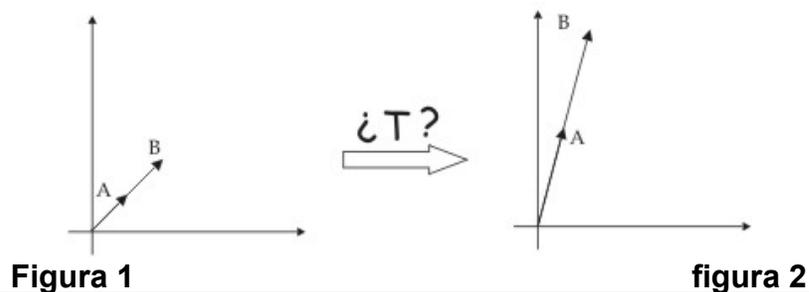
N34: Sí, ya, ya tengo una que no es lineal, la cuadrática, ya pensando en lineal como línea recta, la cuadrática no, no, no separa sumas.

Interpretación

Para esta tarea, la técnica consiste en utilizar términos cuadráticos para responder. Por

otra parte la expresión “no separa sumas” es un elemento tecnológico, ella sabe que una función cuadrática no cumple la propiedad $T(u + v) = T(u) + T(v)$. Tal propiedad es un elemento teórico implícito en la respuesta.

C) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

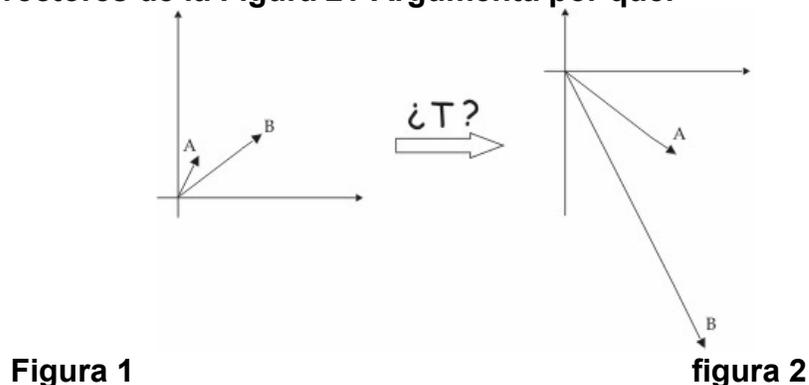
En esta pregunta tenemos:

N57: Haciendo el análisis, sí; sí yo veo aquí que estos dos son (señala la figura 1), eh, B es múltiplo de A o al revés, da igual, los dos son múltiplos, éste, aquí también (señala la figura 1), ya al menos sacando el escalar, yo creo que sí.

Interpretación

Por medio de la expresión “B es múltiplo de A” la estudiante hace referencia a la técnica de multiplicar por un escalar. Si se observa la respuesta N2 de esta entrevista (inciso A), la estudiante con el termino “sacar escalar” se refiere a que se cumpla la propiedad: $T(\lambda v) = \lambda T(v)$. Entonces la verificación de que se pueda “sacar escalares” es una tecnología, y la definición de la propiedad es el elemento teórico.

D) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

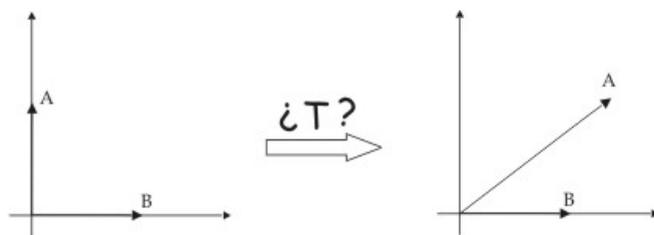
La respuesta que se obtuvo fue en este caso:

N151: Sería como regresar al caso de rotar y además multiplicar por un escalar, entonces sí, sí podría existir una transformación.

Interpretación

Aquí la estudiante describe la técnica con la cual construiría la transformación, es rotar y multiplicar por un escalar. No aparecen elementos teóricos o tecnológicos.

E). ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



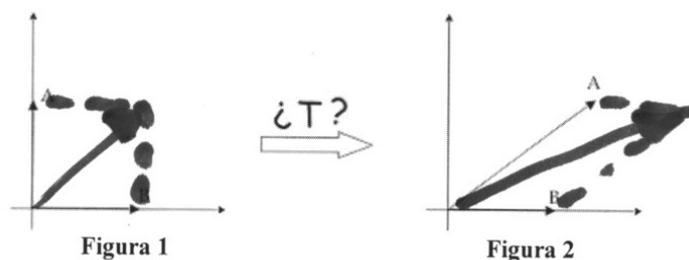
Descripción

La respuesta para este caso es:

N153: [...]B lo mantiene al parecer igual y A se mueve, o sea lo transforma.

Al preguntarle más sobre la razón de su respuesta, la estudiante explica:

N155: [...] Estoy pensando que tal vez si se pueda, o sea, estoy pensando en el plano como algo flexible, para ello dibuja:



Y complementa la explicación diciendo:

N 159: La suma quedaría también ahí mismo, la multiplicación por escalares no sé qué pasaría, supongo que también sí se cumple, nuevamente si tomamos el estiramiento como

transformación lineal. No, este, aquí no puedo aplicar la rotación y multiplicar por escalares porque no estoy rotando este vector.

Termina comentando:

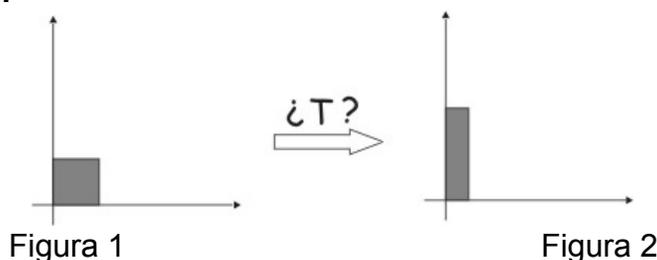
N 177: Me hace pensar que sí es una transformación lineal, no llevé topología, pero sé que mientras un cuerpo se estire sin perder características se sigue considerando topológicamente igual, algo así, entonces topológicamente son iguales estos dos, debe haber alguna función que me mande de aquí para aquí, yo creo que sí.

Interpretación

En este caso, la técnica usada para resolver la tarea se compone de 2 partes: en primer lugar, una en la que la base es considerar el plano como elemento flexible y por otra parte la de considerar las propiedades de suma y multiplicación por escalar, pero sin asegurar que si se verifican. Estirar el plano es la técnica y la verificación de que las propiedades se cumplan es un elemento tecnológico (de este último la estudiante no está segura). Otro elemento tecnológico es expresado en el siguiente discurso “mientras un cuerpo se estire sin perder características se sigue considerando topológicamente igual, algo así, entonces topológicamente son iguales estos dos”.

F). ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2?

Argumenta por qué.



Descripción

La respuesta para esta pregunta fue:

N 179; Sí, como por entrada sería a x sobre dos aproximadamente, o sea a x sobre algún k_1 y a y lo mande a un k_2 por y, se me hace que es como el, la mitad y el doble, ¿o nada que ver?, no, creo que no, es sólo multiplicar, aquí dividir entre un escalar y aquí multiplicar por un escalar, y sería aplicar la transformación a todos los puntos que

están dentro y me los manda a todos los puntos de aquí (escribe $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/k_1 \\ k_2 y \end{pmatrix}$).

Interpretación

La técnica presente es la multiplicación por escalares. El modelo explícito usado en la

tarea le da información sobre cómo deben ser usados los escalares, y la estudiante propone otro modelo explícito para representar tal transformación, este podría ser considerado un elemento teórico.

Entrevista 4:

SARA

A) ¿Qué entiendes por transformación lineal?

Descripción

En esta primera pregunta, la estudiante contesta:

S2: Lo que me acuerdo de la transformación lineal era que por ejemplo dado un vector, se le puede aplicar, no sé si es correcto decir función, o sea, una operación [...].

S4: Si yo le aplico una operación a ese vector, entonces yo voy a obtener una transformación [...].

Con el fin de obtener una idea más clara de lo que ella refiere, se le pide que explique con mayor detalle y para ello responde:

S8: Si yo tengo un vector ¿no?, un vector v en términos, no sé, de x y de y ,

S10: Y me dicen que yo le aplique, por ejemplo esto, x más y y $2y$ ¿no?; Y escribe

$$\vec{v} = (x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2y \end{pmatrix}$$

S12: Esto sería una transformación, la operación, yo a esto le llamo operación.

Al indagar sobre si su ejemplo corresponde a una transformación lineal ella dice:

S20: transformación lineal, o sea, lineal es de recta ¿no?, un vector es un pedacito de recta, vaya, entonces, si a este vector yo le aplico esta operación (señala la fórmula de S10), entonces yo voy a obtener una transformación lineal.

Insistiendo sobre el concepto de linealidad para determinar si éste ha sido bien comprendido se le solicita otro ejemplo de transformación lineal y ella contesta que su ejemplo es lineal:

S28: ¿Porqué le llamo lineal?, pues porque estoy trabajando con vectores. Y apoya su argumento con:

S32: Yo eso de lineal, lo c o m p r e n d o de recta ¿no?, ¿lineal? yo lo entiendo así como de recta. O sea, un vector pues yo lo veo como un segmento de recta.

Interpretación

La estudiante responde indicando qué tarea hace con la transformación lineal, transformar un vector en otro (aplicar una función o evaluar el vector en una función). Una técnica implicada es la realización de operaciones. El concepto de función es un elemento de la teoría evocado. Al explicar por que considera lineal la transformación muestra un elemento tecnológico que ella ideó, que es lineal si involucra líneas rectas: “o sea, lineal es de recta ¿no?, un vector es un pedacito de recta, vaya, entonces, si a este vector yo le aplico esta operación, entonces yo voy a obtener una transformación lineal”.

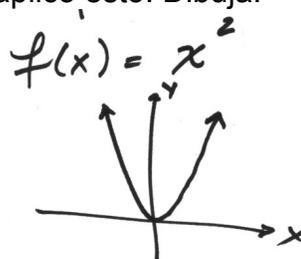
B) Propón un ejemplo de una transformación no lineal y argumenta por qué es no lineal

Descripción

S39: Por ejemplo si yo [...] es que lo manejo como función, ¿puedo poner una función?....

S41: Ok, si yo tengo ésta (escribe $f(x)$), pues yo puedo obtener [...] ésta (agrega $= x^2$ a $f(x)$), ¿no?

Aquí (señala la x en $f(x)$) lo que vería como mi objeto pues serían las x que yo voy a tomar, mis números vaya, entonces si yo aplico esto: Dibuja:



Al cuestionarle sobre la razón de por qué su ejemplo no es lineal contesta:

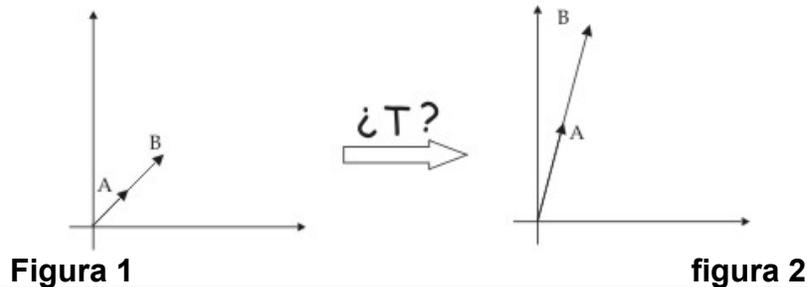
S43: Según yo porque obtengo una parábola ¿no?... Y lo apoya diciendo:

S55: Pues, el grado, este [...] e, la variable en este caso, la x , pues lo que hace, es que a esta recta, vaya, la transforme [...] la haga una curva ¿no?, por eso digo que no es lineal.

Interpretación

Podríamos considerar que la representación gráfica de la curva, corresponde a la técnica de la que se apoya para resolver la tarea (porque aquí no implica líneas rectas). Un elemento tecnológico implícito es que si no involucra rectas no es una TL, y se refleja en su respuesta “la variable en este caso, la x , pues lo que hace, es que a esta recta, vaya, la transforme [...] la haga una curva ¿no?, por eso digo que no es lineal”.

C) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

En esta respuesta, la entrevistada menciona que efectivamente se trata de una T.L. argumentando:

S77: ¿Una transformación? Sí.

S79: Veo así, si bueno, estos vectores tienen la misma dirección y puedo decir que son colineales, ahora, con respecto a esta figura (la figura 2) lo que vemos es que éste, o sea, el ángulo es mayor que el de acá (figura 1), según esto ¿no?, se ve un poquito más cerca con respecto al eje Y.

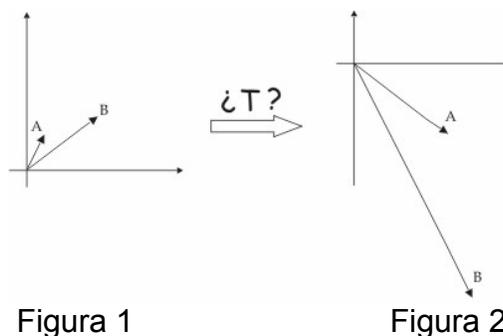
Luego complementa...

S81: Entonces, si a esto (señala las figuras 1 y 2) yo le aplico, no sé, un ángulo [...] acá, obtengo eso ¿no?, más giradito, ahora para que obtenga ésta pues lo multiplico por un escalar mayor que la unidad.

Interpretación

En este caso la técnica ha sido la de verificar la dirección y el ángulo de inclinación para responder. Aunque también puede verse una referencia al elemento técnico de la multiplicación por escalar.

D) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2? Argumenta por qué.



Descripción

Aquí se obtuvo la siguiente respuesta:

S149: Pues igual ¿no? [...] sí. Es decir sí existe la T.L.

Al preguntarle la razón de porqué si hay una T.L. explica:

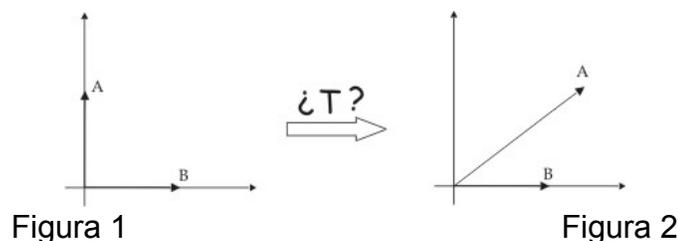
S151: Bueno, yo puedo ver, por ejemplo, no sé, ese vector A así, entonces lo voy a reflejar acá, o sea, con respecto al eje x y lo voy a prolongar, entonces me quedaría, se ve que A, es, o sea, la longitud de ese vector A veo que es mayor que ese, entonces tendría, no sé, alfa veces ese vector, pero como va a quedarme hacia abajo entonces sería $x, -y$ (escribe $\vec{A}(x, y) = \alpha(x, -y)$).

Interpretación

La técnica de solución es aplicar una TL de reflexión y expansión. Un elemento teórico aludido⁵ es la definición de la transformación $\vec{A}(x, y) = \alpha(x, -y)$. Otros objetos a los que se hace referencia para su respuesta son la reflexión y los vectores.

E) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2?

Argumenta por qué.



Descripción

En este caso la respuesta fue:

S155: Considerando ésta, bueno, aquí pues el vector B, se queda ¿no?, se mantiene vaya. Y completa su argumento diciendo:

⁵ Hacemos una diferencia entre elemento teórico aludido y elemento teórico. El primero entra en la definición de teoría de Chevallard, por ejemplo cuando la responsabilidad de la justificación es cedida a otra instancia, con expresiones como “por las propiedades de la transformación lineal...”, aquí sólo se mencionan tales propiedades, pero no se enuncian. En el segundo caso, el elemento teórico se considera presente si es hecho explícito, enunciando propiedades, dando detalles de los objetos involucrados, por ejemplo, “se escribe $\vec{A}(x, y) = \alpha(x, -y)$ ” donde x, y, α son número reales cualesquiera”.

S157: Entonces si se mantiene para mi vector B que es x, y su transformación sería también ¿no? la misma, lo dejo igualito, ahora con respecto a A lo que tiene es que está, este [...] vaya está rotado, entonces, como lo voy a cambiar de posición [...] lo voy a tener que mover un ángulo, ah, pues éste entonces lo roto ¿no?, acá entonces pues se me ocu [...] ah, vamos a ver qué tal sale, no me acuerdo mucho de esa parte eh, tengo ésta y pues yo puedo tener r veces el $\cos \theta$, $r \operatorname{sen} \theta$ [escribe:

$$\vec{B}(x, y) = (x, y)$$

$$\vec{A}(x, y) = \alpha(r \operatorname{Cos} \theta, r \operatorname{Sen} \theta)$$

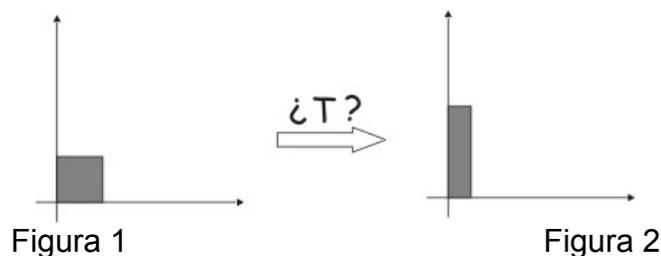
$$\text{donde } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Interpretación

La estudiante no resuelve la tarea en su respuesta. La técnica que muestra en sus argumentos es la multiplicación por escalares, y la rotación para indicar la variación del ángulo. Sin embargo son dos técnicas que las usa por separado, una la aplica al vector A y otra al vector B. Cuando se le señala al estudiante que se pregunta por una transformación lineal que se le aplique a ambos vectores, el estudiante trata de construir tal función, utilizando multiplicación por escalares y suma, esta es una técnica que no la condujo a resolver la tarea.

F) ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2?

Argumenta por qué.



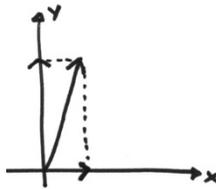
Descripción

Aquí la respuesta obtenida fue:

S195: Vamos a ver, si [...] por ejemplo [...] de esto (señala la figura 1) tengo que pasar acá ¿verdad? (señala la figura 2); si yo consigo buscar estos escalares (escribe $\vec{V}(x, y) = (\alpha x, \beta y)$) y con esa condición (escribe, $0 < \alpha < 1$), β es mayor que la unidad (escribe, $\beta > 1$) entonces yo voy a obtener esos dos vectores.

S201: Pero y si yo hago la suma de estos dos vectores que voy a obtener, entonces ya voy a obtener esta diagonal (señala la figura 2), entonces, o sea, éste [...] si yo logro eso, multiplico por uno [...] mayor que uno, entonces me quedaría como por acá ¿no? ese vector y como acá te digo que es mayor que 1 entonces me va a quedar algo así [...] entonces, si hago la suma de estos dos [...] me va a dar, bueno, el vértice, del

[...] de ese rectángulo (dibuja):



Al tratar de averiguar mas sobre las razones que le llevan a basarse en tales argumentos, ella se apoya diciendo:

S219: Me estoy acordando de algo, por ejemplo, si yo tengo éste, puedo, o sea [...] si yo divido éste a la mitad ¿si?, perpendicular, sobrepongo la figura, tal vez yo obtenga éste de acá [...].

Entonces, pues no sé, si el área, si ya te hablo de área, por ejemplo, es de esta área, o sea, como la [...] la este, la transformo en una así, o sea, si me imagino que es éste, este cuadrado que se vuelve rectángulo, se transforma en rectángulo, entonces pudiera averiguar ¿no? de que éste cuadrado si yo lo divido en dos partes y esa parte yo la encimo de la primera, obtendría este de acá.

Interpretación

La técnica que la estudiante utiliza es la multiplicación por escalares de las componentes. Un elemento teórico que muestra es la expresión " $\vec{V}(x, y) = (\alpha x, \beta y)$ " y con esa condición (escribe, $0 < \alpha < 1$), β es mayor que la unidad (escribe, $\beta > 1$)" pues es la fórmula general de la transformación y delimita los valores de los escalares. La descripción de cómo construye la fórmula es un elemento tecnológico, pues justifica su fórmula. Otro elemento tecnológico asociado a su técnica está basado en la conservación del área: "...es de esta área, o sea, como la [...] la este, la transformo en una así, o sea, si me imagino que es éste, este cuadrado que se vuelve rectángulo. En este caso como en algunos anteriores se percibe que la tecnología empleada no valida su respuesta, sino que solo la justifica: Hay que tener en cuenta que existen praxeologías, cuyos elementos que la integran no siempre resultan ser los más adecuados; es decir, para resolver una tarea específica, no solo existe una praxeología en particular y que ésta sea la correcta sino puede surgir una que sea incompleta o bien incorrecta.

Yuxtaposición

Para llevar a cabo esta parte del método se realizó una confrontación de las respuestas obtenidas en cada pregunta y con base a ello se identificaron los rasgos comunes que muestran los estudiantes en sus argumentos, y asimismo se determinaron las diferencias en éstos.

A continuación mostramos las tablas que fueron de utilidad para comparar cada ítem.

Primera tarea asignada al estudiante

Tarea A	Tareas	Técnicas	tecnologías	teorías
Gris	Conversión de un conjunto de vectores a otro conjunto	Realizar una serie de operaciones	NA	NA
Fabi	Evaluar un conjunto de vectores en una función	Realizar operaciones	NA	NA
Naye	NA	NA	NA	Define la transformación lineal.
Sara	Evaluar un vector en una función	Realizar una serie de operaciones	Dado que los vectores son "pedazos de rectas" y la TL involucra líneas rectas, se trata de TLS	NA

Segunda tarea asignada al estudiante

Tarea B	técnicas	tecnologías	teorías
Gris	Agregar exponente 2	Aparición de términos de grado mayor a 1	NA
Fabi	NA	NA	NA
Naye	Utiliza la función cuadrática	Explica "No separa sumas"	Propiedad de la suma para la TL
Sara	Utiliza la representación grafica de una parábola	Si no involucra rectas es no lineal	NA

Tercera tarea asignada al estudiante

Tarea C	técnicas	tecnologías	teorías
Gris	Multiplicación por escalar	Porque están alineados	NA
Fabi	Realización de multiplicación por un escalar	Por verlos como vectores unitarios	NA
Naye	Verifica que sea posible la propiedad de la multiplicación por un escalar	Porque "saca escalares"	Cumplimiento de la propiedad: $T(\lambda v) = \lambda T(v)$
Sara	Verificación del ángulo. Multiplicar por un escalar mayor que la unidad	Por ser colineales	NA

Cuarta tarea asignada al estudiante

Tarea D	técnicas	tecnologías	teorías
Gris	Multiplicar una componente por	Aumento o la disminución de	NA

	un escalar	los vectores	
Fabi	Técnica geométrica (la rotación y la expansión).	No habría, porque le cambiaríamos totalmente el sentido a la suma	NA
Naye	Rotar y además multiplicar por un escalar	NA	NA
Sara	Reflexión y expansión	NA	Definición de la transformación $\vec{A}(x, y) = \alpha(x, -y)$

Quinta tarea asignada al estudiante

Tarea E	Técnicas	tecnologías	teorías
Gris	Multiplicación por escalares	NA	NA
Fabi	Verificar la suma de los vectores y multiplicación por escalar	NA	NA
Naye	Considerar el plano como elemento flexible y las propiedades de suma, así como multiplicación por escalar	Mientras un cuerpo se estire sin perder características se sigue considerando topológicamente igual	NA
Sara	Multiplicación por escalares, y la rotación para indicar la variación del ángulo	NA	Las fórmulas de la TL: $\vec{B}(x, y) = (x, y)$ $\vec{A}(x, y) = \alpha(r \cos \theta, r \sin \theta)$ donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Sexta tarea asignada al estudiante

Tarea F	técnicas	tecnologías	teorías
Gris	Multiplicarlo por un valor fraccionario, por decir un medio y para las y multiplicarlo por un numero entero	NA	NA
Fabi	Multiplicar por escalares las componentes de los vectores en la figura 1, de tal forma que se conserve el área	Conservación del área	NA
Naye	Dividir entre un escalar y multiplicar por un escalar	NA	Definición de la formula: $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/k_1 \\ k_2 y \end{pmatrix}$
Sara	Multiplicación por escalares de las componentes	Conservación del área: si me imagino que este cuadrado se vuelve rectángulo	Definición de la expresión : $\vec{V}(x, y) = (\alpha x, \beta y)$

Comparación

Una vez mostradas las preguntas hechas bajo el contexto teórico de la intuición y analizadas bajo el enfoque de la TAD donde se busca identificar los elementos praxeológicos que cada entrevistado pone en juego, proseguimos con la parte metodológica referente a la comparación que consiste en relacionar las ideas afines y aquellas en las que se observan diferencias en cuanto a los argumentos para cada una de las tareas.

En lo relativo a la tarea 1, se debía responder ¿qué entiendes por transformación lineal?; a través de las respuestas se pudieron reconocer los aspectos teórico-prácticos comprendidos por cada uno sobre la Transformación Lineal, es decir las técnicas que se produjeron y la forma como las validaron pudiendo reconocer si hubo la presencia de elementos tecnológicos de la praxeología.

El resultado fue que tres de ellos respondieron en términos de tareas que realizan con la transformación lineal, sus respuestas las interpretamos como formas diferentes de enunciar la acción de evaluar un conjunto de vectores en una función.

Al parecer, para estos estudiantes, la concepción que tienen de función es lo que hacen con ella, en otras palabras, asignan lo que hacen con la función al concepto de función. Este problema ha sido reportado en el trabajo de Sierpinska (1992), se refiere a cuando estudiantes confunden el concepto de función con sus representaciones.

En cuanto a las técnicas identificadas para llevar a cabo la tarea, se observa que los entrevistados recurrieron a la realización de operaciones (multiplicar, sumar, restar, etc). Tres de los 4 estudiantes no muestran componentes tecnológicos, es posible que se deba a la forma en que se plantea la tarea, pues en ella se solicita una idea o concepción, no es algo que tengan que resolver o demostrar.

El caso del estudiante que no manifiesta tareas, técnicas o tecnologías, es porque al responder, muestra la teoría relativa a la TL, definiéndola.

Todos los estudiantes relacionan la tarea de evaluar un conjunto de vectores en una función con la TL, sin embargo sólo uno de ellos, Naye, no confunde el concepto de función con las tareas que realiza con la función.

Lo relativo a la tarea 2

Se puede observar que la técnica en común que los estudiantes asocian a la transformación no lineal es aquella expresión algebraica que involucra términos de segundo grado o expresiones cuadráticas, tanto en el contexto de su representación gráfica, como analítica; 3 de los estudiantes contestaron en el sentido de incrementar el exponente o dibujar una curva para dar respuesta a la tarea asignada. Asimismo las tecnologías que aparecen muestran esta misma tendencia de concepción sobre la transformación no lineal, proponiendo "para que una transformación sea lineal, debe involucrar rectas", entonces para el estudiante las expresiones que contengan términos cuadráticos quedan excluidas de esta categoría. Aunque Naye está en ese grupo de estudiantes, ella argumenta que tales expresiones no cumplen las propiedades de la TL.

Puede identificarse en este caso, dos de las funciones importantes que caracterizan a la tecnología; la primera es facilitar la aplicación de una técnica lo cual permite al estudiante utilizarla con eficacia dado que para ellos es evidente reconocer una transformación no lineal cuando se trata de expresiones que contienen exponentes de grado mayor a uno.

La segunda función igualmente importante de la tecnología que aparece en este caso es la de explicar porqué al aplicar la técnica de agregar exponente mayor a uno funciona, ya que si bien el argumento es aceptable tiene un alcance limitado porque no prueba la validez, solo da una legitimación sin llegar a mostrar que no se cumple la propiedad de linealidad.

En cuanto a la tarea 3:

La característica en común que prevalece en las respuestas es la técnica de multiplicar por un escalar las componentes de los vectores de la figura 1; sólo Naye, asocia esa técnica con una propiedad de la TL.

Se puede observar en este caso que la naturaleza de la técnica no es de tipo algorítmico, más bien se pueden percibir elementos tecnológicos que se integran a la técnica; Es decir las explicaciones mostradas tienen una doble función, la de técnica y tecnología que permiten al mismo tiempo encontrar el resultado para dar respuesta a la tarea y también da la oportunidad de justificar por qué la técnica funciona.

Específicamente, dos de los estudiantes mencionan la colinealidad; Naye, alude el cumplimiento de la propiedad de la multiplicación por un escalar. Un estudiante lo relaciona con vectores unitarios, y esta situación lo hace suponer que existe la TL, en este caso la tecnología está implícita. Tal tecnología podría

ser la siguiente: en la clase de álgebra lineal, cuando se estudian los vectores unitarios se suele decir que con dos de éstos, por medio de una combinación lineal se puede generar cualquier vector del plano.

Sólo un estudiante hace explícita la teoría.

Lo relativo a la tarea 4

Se aprecia diversidad de técnicas para determinar la existencia de la TL; en contexto geométrico ocurren tres casos, se mencionan: la reflexión, la expansión y la rotación; en dos casos se menciona la técnica de multiplicar las componentes por un escalar.

En relación a la tecnología, en dos casos no aparece explícita, y dos son de corte geométrico, una de ellas es ideada por el estudiante, el cual percibe que la imagen de la TL debe mantener la misma inclinación.

Sólo un estudiante menciona un elemento teórico, la definición de la

transformación: $\vec{A}(x, y) = (x, -y)$.

Lo relativo a la tarea 5

En todos los casos los estudiantes utilizan la multiplicación por escalares como técnica. Un estudiante imagina al plano como algo flexible, entonces a partir de “estirarlo” genera la transformación mostrada.

Un estudiante verifica el ángulo de inclinación, lo cual consideramos como una tecnología propia que él desarrolló. Otra tecnología mostrada por un estudiante es manifestada en la siguiente afirmación “Mientras un cuerpo se estire sin perder características se sigue considerando topológicamente igual”.

Un estudiante al definir transformaciones concretas, está haciendo referencia a elementos teóricos de su praxeología que ha considerado como suficientes para explicar su respuesta, sin embargo éstas no justifican de manera formal la tecnología que emplea.

Lo relativo a la tarea 6

La técnica que predomina es la de multiplicar por un escalar. En relación a la tecnología, dos estudiantes fundamentaron sus técnicas con la idea de la

conservación del área de las figuras mostradas, al observar el cumplimiento de ésta característica.

Naye y Sara, escriben, como elemento teórico, dos fórmulas de transformaciones.

En esta etapa del método comparativo nos permitimos a través de analizar las respuestas, localizar los elementos comunes respecto a las técnicas tecnológicas y teorías que aparecen en las explicaciones de cada uno de los entrevistados, dichos elementos se pueden encontrar en los argumentos y afirmaciones dados por cada estudiante. No solo se trata en esta investigación de saber si se contestó correctamente y se resolvieron las tareas, sino que al analizar las respuestas esto nos conduce a establecer el nivel de comprensión de la transformación lineal en un grupo de estudiantes por medio de la praxeología que cada uno empleó.

Esto significa que en cada respuesta obtenida al aplicar la teoría antropológica de lo didáctico, podemos observar el razonamiento que prevalece para resolver una tarea, es decir tener información sobre la técnica aplicada (el cómo lo hace), la tecnología (el porqué lo hace) y que es la que legitima o justifica a la técnica y también la teoría (el porqué hace lo que hace) entendiendo ésta última como una justificación de lo formalmente correcto y validado a manera demostración.

Hay que decir por supuesto que el saber-hacer (bloque técnico – tecnológico) identificado en cada estudiante no en todos los casos llevó a contestar correctamente la pregunta. En tal situación se dice que en general no se sabe hacer dicha tarea.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Las preguntas que se plantearon a los estudiantes, en el contexto del trabajo de Molina (2004), tienen el propósito de identificar modelos intuitivos respecto a transformaciones lineales en \mathbb{R}^2 . En nuestro trabajo, hemos retomado estas preguntas y se ha analizado cada una de las respuestas dadas por estos estudiantes aplicando la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Abordaremos en primer lugar los resultados relativos al análisis de las respuestas en términos de la teoría de la intuición.

Los resultados observados en el trabajo de Molina (2004) muestran que los estudiantes al enfrentarse a situaciones donde deben argumentar si es que existe una transformación lineal, proceden a contestar en términos de explicar las propiedades de la TL relacionándolas con rotaciones, expansiones, contracciones y combinaciones de éstas, sin embargo aunque los entrevistados hicieron referencia a dichas propiedades como lo es la multiplicación por escalar, se pudo percibir que, en la mayoría de los casos, no había una comprensión formal y correcta del concepto.

En algunos casos, los estudiantes realizaban una reducción y simplificación del conocimiento, aplicando analogías y explicaciones en las cuales podían relacionar situaciones cotidianas a su entorno y entendimiento. Es decir, en común para los entrevistados resultaba más sencillo y preferible describir la existencia de la transformación lineal empleando características tangibles y observables a su manera, que argumentar por medio de una demostración y una explicación que diera cuenta fehaciente de la comprensión del tema.

Esto puede deberse por una parte como se dice en Fischbein (1989), a que “El estudiante tiende a olvidar las propiedades formales y tiende a mantener en mente aquellas impuestas por un modelo intuitivo”. En este caso los modelos intuitivos relacionados con rotaciones, expansiones, contracciones que prevalecieron no solo ejercían influencia en el aprendizaje del concepto, sino también ocasionan el efecto de simplificar, o bien sustituir el concepto formal e imponer una concepción más accesible y fácil de comprender.

Por otra parte, esta comprensión poco eficiente de la TL se puede deber también a la gran carga de abstracción del concepto y su integración apropiada con otros objetos matemáticos necesarios para entenderla, algunos de estos conceptos asociados a la TL son la combinación lineal y espacio vectorial; esta dificultad para poder comprender el concepto de manera integral ha sido reportado en diversas investigaciones hechas al respecto, las cuales pueden consultarse los resultados en la sección de anexos.

Ahora bien, en el contexto de la TAD, estas mismas respuestas que se analizaron nos dieron la oportunidad identificar cuáles elementos de las praxeologías estaban presentes en cada uno de los entrevistados. Entendiendo

que una praxeología específica representa un modelo del qué, cómo y para qué se realiza el abordaje de unas tareas asignadas, que en este caso fue contestar las preguntas de la entrevista.

Partimos de la premisa que bajo la Teoría Antropológica de lo Didáctico, no existe una praxeología en específico para realizar una tarea, es decir cada persona para llevar a cabo una tarea que se le demanda, puede proceder en particular con un bloque concreto del *cómo hacerlo y para qué hacerlo*, con lo que nos referimos así a la existencia de una dupla particular de (técnica y tecnología), la cual pone de manifiesto para darnos información acerca del dominio teórico y práctico sobre el tema que se cuestiona. De ahí la razón de la existencia de diferentes técnicas y tecnologías que se pudieron reconocer: unas de éstas que solo validan, otras que justifican, las menos que solo explican pero no se verifican.

A esto es necesario decir que la praxeología que cada individuo puso en marcha no resultó ser siempre la más correcta ni la más completa para llevar a cabo cada una de las tareas asignadas. De hecho pudo observarse que en algunos de los casos no se realizó la tarea de manera completa, así como también hubo intentos parciales para realizarla, entendemos esto último como la presencia de vestigios tecnológicos en la praxeología con el fin de realizar la tarea. En estos casos decimos la técnica y tecnología aplicada no fue eficiente por ello el entrevistado en general no sabe hacer dicha tarea propuesta.

Es importante mencionar que en esta investigación no se evaluó si las tareas se resolvieron correctamente o de manera íntegra, sino nuestro objeto de estudio es el análisis de las respuestas obtenidas y a partir de ellas reconocer la presencia de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos en cada una de las praxeologías, es decir nos enfocamos a estudiar el discurso y argumentación que hubo en la contestación a cada pregunta, las validaciones y justificaciones del porqué se eligió una técnica y no otra; identificar aquellas técnicas y tecnologías que fueron comunes para una misma tarea; en suma, discernir y explicitar las causas de dichas respuestas desde la teoría antropológica de lo didáctico.

Por ello el discurso (argumentación) en cada respuesta ha sido el elemento trascendental de estudio ya que nos da la oportunidad de valorar la importancia que tiene la tecnología en la producción de técnicas, tanto es así que tiene las siguientes funciones dentro de una praxeología:

- facilita la aplicación de la técnica
- explica la técnica
- valida la técnica empleada
- evalúa la técnica.

Respecto a estas funciones y dados los resultados al llevar a cabo la aplicación de la TAD en las respuestas, es que se puede observar el sentido y contexto en el que cada entrevistado desarrolla su argumento lo cual podemos interpretar como la tecnología que le permite sustentar sus afirmaciones en cada tarea que realiza; más concretamente esto significa que:

Hubo *tecnologías que explicaron* porqué se aplicó una técnica *pero no la validaron*. En esta situación la tecnología funciona solamente como una descripción de porqué la técnica permite llegar al resultado sin entrar en detalles de mostrar porqué funciona, es decir no hay una comprobación desde el punto de vista de la matemática, sino que la tecnología viene más bien de la aplicación de una técnica eminentemente practica.

Las tareas donde la técnica es explicada pero no validada son los relativos a la tarea 1 en la cual predomina el argumento: evaluar un vector o conjunto de vectores en una función: en este caso aunque se indica que se trata de una función, no se especifica que la función debe tener características en particular y por supuesto no se comprueba que se cumplan las propiedades.

Otra de las tareas donde prevalece este tipo de argumentación en la que solo se explica pero no se valida corresponde a la tarea 2 consistente en mostrar un ejemplo de transformación que sea no lineal. En este caso las técnicas coinciden en dar ejemplos que contengan términos cuadráticos en sus diferentes contextos: algebraicos y gráficos. Puede observarse que para resolver esta tarea tampoco se da una comprobación de por qué razón una transformación que contiene términos de segundo grado es no lineal, simplemente se explica que los términos de segundo grado no se incluyen dentro de la TL.

En La tarea 3 también se pudo identificar de manera similar esta situación de explicar la técnica pero no validarla cuando los entrevistados en común responden que se debe multiplicar por un escalar para mostrar que existe la TL. Esto lleva a inferir que el estudiante aún cuando la propiedad de multiplicación por escalar y que es una característica que debe cumplirse, solo hace referencia a ella y solo se percibe una representación verbal a partir de la que se construye un argumento que en términos matemáticos no es aceptada su validez.

Hay que aclarar en este último caso que como se dice en Castela (2008), existen situaciones en las que algunos elementos tecnológicos son legitimados a partir de procesos no teóricos, esto es; no existe una teoría que valide a una tecnología en el contexto de las demostraciones formales de la matemática, sin embargo estas tecnologías provienen de la aplicación eficiente de técnicas que han probado su utilidad.

En otros casos de la resolución de tareas se pudo ver que también se mostraron ejemplos de *tecnologías que probaron su validez pero no explicaban* la técnica, cuando al contestar con una definición y probar que las propiedades de la TL se cumplían se hacía referencia a un argumento de tipo teórico.

A manera de síntesis sobre las tecnologías y técnicas que comparten los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones donde deben realizar una tarea relativa a la transformación lineal podemos afirmar son las siguientes:

- Es una función;
- Su representación algebraica sólo incluye expresiones de primer grado;
- Se usa para mapear un conjunto de vectores a otro,
- Una técnica que asocian a la TL es multiplicar por escalares.
- La TL la asocian geoméricamente con expansiones, contracciones, rotaciones de vectores;

En cuanto a Las diferencias:

Las diferencias que se identificaron están asociadas a las tareas A y B planteadas, ya que al ser preguntas abiertas éstas dieron origen a argumentos donde los estudiantes desarrollaron explicaciones de diversa naturaleza, ya que al solicitar una concepción, no se pedía en específico la aplicación de una técnica, la comprobación de las propiedades o bien una definición, por ello cada uno procedió desde diferente perspectiva: algunos proporcionando la definición, otros dando ejemplos, los demás describiendo y haciendo referencia a las propiedades de la TL pero sin demostrarlas, mostrando en general argumentos que desarrollaron pero no reconocidos institucionalmente, como lo es una demostración matemática formal. Una diferencia notable es que sólo un estudiante utiliza correctamente el elemento teórico para justificar y validar la respuesta. De ésta última observación de las diferencias se desprende de manera coincidente lo que se ha mencionado con anterioridad: el hecho de que para resolver una misma tarea se procede aplicando distintos elementos de una praxeología según las necesidades y complejidad de la tarea, desde aquellos en los que solo es necesario el enunciar la técnica que debe emplearse, la tecnología que demuestra porqué la técnica es correcta y valida.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos?. *Educación matemática*, 16(3), 5-28.

Andreoli, D. (2009). *Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad* (Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN), México.

Bosch, M., Fonseca, C., y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques* 24 (2-3), 205-250.

Castela, C. (2008). Travailler, avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2) pp.135-182.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado* (C. Gilman, Trad.). Argentina: AIQUE.

Chevallard, Y. (1999). L'Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Dreyfus, T., Hillel, J. y Sierpiska, A. (1998). Cabri-based Linear Algebra: transformations. En Inge Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I*, 209-221.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holanda: Reidel Publishing.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 9, 9-14.

Grossman, S. I. (1987). *Algebra Lineal*. México: Editorial Iberoamérica.

Lang, S. (1974). *Álgebra Lineal*. México: Fondo Educativo Interamericano.

Martínez, M. (2011). *Diferencias metodológicas y cognitivas en los procedimientos utilizados por estudiantes de la carrera de Sistemas Computacionales en la resolución de problemas de cálculo aplicado*. (Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN), México.

Molina, J. G. (2004). *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la transformación lineal en contexto geométrico*. (Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN), México

Ramírez S. (2008). *Modelos intuitivos que tienen algunos estudiantes de matemáticas sobre el concepto de transformación lineal*. Tesis de maestría no publicado. México: CINVESTAV-IPN.

Raventos, F. (1983). El fundamento de la metodología comparativa en educación. *Revista Educar*, 3, 61-75.

Rosas, A. (2011). Elaboración de textos científicos por estudiantes de maestría, semejanzas y diferencias: un estudio comparativo. Manuscrito en preparación.

Uicab, R. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 459-490.

ANEXOS

Distintas teorías y metodologías aplicadas por diferentes investigadores han mostrado que existen dificultades para el aprendizaje de la Transformación lineal; el conocimiento de dichos trabajos permite tener un conocimiento más amplio de los resultados obtenidos acerca del tema que nos ocupa ya que tiene asociados diferentes conceptos que en conjunto contienen un alto nivel de abstracción y ello ha resultado de difícil comprensión para los estudiantes.

La información que se tiene al respecto de cuáles son las problemáticas en el aprendizaje de la transformación lineal (TL) se ha obtenido mediante la realización de entrevistas a estudiantes de la asignatura de álgebra lineal en carreras universitarias.

Una de las investigaciones hechas al respecto es la de Tommy Dreyfus, Joel Hillel y Anna Sierpinska (1998) la cual tuvo como apoyo el marco teórico de la semiótica de Peirce y Raymond Duval.

El trabajo se enfocó en la concepción que los alumnos tenían sobre la transformación lineal a través del uso de un software dinámico denominado Cabri. La función de este software fue solo como apoyo en la investigación no como una herramienta para explicar o resolver problemas de transformaciones lineales.

Durante el desarrollo de la investigación se diseñaron actividades didácticas que permitieron conocer si los alumnos habían comprendido el concepto de la linealidad de las transformaciones, no por fórmulas sino por representaciones en Cabri, es decir identificar si los estudiantes presentaban la problemática del formalismo.

Este formalismo es aquella situación en la que una persona puede describir o explicar un concepto desde su definición formal sin que ello tenga un significado para ellos, y en consecuencia por el afán de comprender,

frecuentemente terminan imitando el comportamiento de los profesores o dando un argumento que se encuentra en los libros de texto.

Esto es lo que no permite expresar su entendimiento a nivel personal, puesto que no existe una explicación fundamentada o que presente los suficientes argumentos de sus procesos. Todo lo anterior hace referencia al origen del obstáculo del formalismo.

Los resultados obtenidos de esta investigación fueron que los alumnos no mostraban tener una comprensión integral de la transformación lineal en los diferentes contextos: el saber (contexto teórico o formal) y el saber hacer (aplicación práctica).

Otro de los trabajos realizado al respecto es el de Rocío Uicab (2006) que aborda el tema del pensamiento sistémico en los estudiantes para dar solución a problemas de extensión lineal.

En este trabajo se trató básicamente de hacer una serie de cuestionamientos a alumnos para que determinaran una transformación lineal a través de las imágenes de vectores.

En los resultados se reporta que frecuentemente los estudiantes presentan la dificultad de que no hacen una integración de los conceptos vistos en el curso de Álgebra Lineal para dar una respuesta a un problema de transformación lineal.

Esto significa que dentro del aprendizaje del concepto se requieren del conocimiento y aplicación de otros temas involucrados como son los espacios vectoriales, base y combinación lineal, a lo cual los estudiantes entrevistados no pudieron hacer las conexiones entre estos elementos y por ello mostraron problemáticas al enfrentar preguntas concretas sobre transformaciones lineales.

Una de las aportaciones que se tienen de este trabajo es que se sugiere tomar en cuenta estrategias que permitan combinar aspectos intuitivos y analíticos de los conceptos teniendo especial cuidado en el aspecto formal.

Así se podrían organizar los contenidos temáticos de manera que los conocimientos previos lleven a una buena comprensión de los conocimientos posteriores y sobre todo se tenga un aprendizaje donde los conceptos no estén aislados sino que sea sistémico.

En otra de las investigaciones, la realizada por Andreoli (2009) la cual se enfocó a identificar los obstáculos que los alumnos tienen en la construcción del concepto de dependencia lineal de vectores, se pudo mostrar lo importante que significa que en los cursos de álgebra lineal haya una reestructuración en la metodología de enseñanza y aprendizaje que le permita a los estudiantes una concepción clara y sistémica del tema.

Esto en primer lugar como ya se ha mencionado por la gran carga abstracta de los conceptos inherentes al área y en segundo a la poca o nula conexión que hay entre tales conceptos y su relación con las aplicaciones.

Dicho trabajo se llevó a cabo por medio de un análisis en diferentes contextos los cuales podemos dividir en dos partes: a nivel teórico se hizo una revisión de los programas de estudio, los textos y bibliografía usada en los cursos de Álgebra lineal y dentro de esta misma línea se hizo una revisión de tipo Histórico-Epistemológico para comprender el origen y desarrollo de esta área de la matemática.

Luego a nivel práctico se realizaron entrevistas a profesores para conocer las metodologías e ingenierías didácticas llevadas a cabo en las aulas.

Finalmente se entrevistó a un número de estudiantes para determinar el grado de dominio sobre el tema de dependencia lineal de vectores. Ello permitió explorar más profundamente qué nivel de comprensión poseen los alumnos en relación con el significado de las definiciones formales, cómo las movilizan,

cómo las vinculan y de qué manera las aplican para contestar preguntas concretas.

Las conclusiones que se obtuvieron y que reflejaron de manera objetiva que en efecto los estudiantes muestran un nivel de conocimiento no adecuado del tema se pueden enmarcar en que los distintos elementos que integran un curso de algebra lineal (tanto a nivel didáctico como a nivel disciplinar) en sus distintos ámbitos; Histórico, epistemológico, pedagógico y ejercen una influencia trascendental en el aprendizaje.

En términos generales el trabajo aportó más elementos de análisis a la problemática que nos ocupa del algebra lineal ya que se pudo constatar que existen obstáculos que entre los más significativos son: el formalismo y la generalización, la gran cantidad de nuevas definiciones; la poca experiencia de los estudiantes en este tema, la falta de conexión entre los nuevos y viejos conceptos, la imposibilidad de concebir toda la teoría como una herramienta eficaz que muestre su lucidez para resolver problemas.

Esto es porque se probó en la práctica que algunos de los alumnos terminaron sus cursos con la certeza de que habían aprendido la parte operatoria pero la parte conceptual no la manejaban, y eso les llevó a resolver los problemas planteados en forma mecánica y memorística, lo que sin duda los condujo a fracasar en la concepción.

De ésta manera, todo el proceso el cual requiere varios niveles de abstracción para los cuales, los alumnos no siempre están preparados lleva a lograr un conocimiento frágil e inconexo.

Mas investigación sobre el tema es la que realiza Ramírez (2008), que se enfoca a hacer un estudio bajo el marco teórico de los modelos intuitivos de Efraim Fischbein (1987) que permite identificar los modelos intuitivos que aparecen en alumnos en relación a la transformación lineal.

En este caso se hizo de igual manera entrevistas a alumnos, diseñando para ello un instrumento que consistió esencialmente en cuestionamientos pero en tres etapas; que fueron:

- La primera consideró algunos casos que se presentan respecto a transformaciones en un ambiente geométrico.
- La segunda etapa mostró una secuencia de actividades en el ambiente analítico que correspondían a cada una de las situaciones geométricas, con la intención de confrontar ambas situaciones en donde se presentaran divergencias, y por último:
- la tercera etapa correspondió a la transformación de figuras geométricas regulares bajo un operador lineal.

Como resultado de este trabajo se pudo comprobar que los alumnos pueden distinguir de manera correcta cuando se trata de una transformación lineal, solo cuando se les presentan casos fácilmente identificables geoméricamente. Es decir al presentárseles modelos que se ajustan a sus modelos mentales.

Pero cuando se les enfrenta a una situación donde no es tan fácil visualizar si se trata de una transformación lineal tienden a rechazarla, y esto es porque tienden a olvidar las propiedades formales del concepto.

Los datos recopilados mediante estas entrevistas nos permiten identificar como es que van apareciendo ideas, significados e interpretaciones preexistentes los cuales ejercen un control sobre el entendimiento de la transformación lineal.

Esto hace que en el conocimiento formal haya una distorsión o también suele suceder que las personas hagan a propósito una sustitución por una conceptualización más simple de aquello que es abstracto y lo matemáticamente correcto por una idea más comprensible y accesible pero incompleta y muchas veces equivocada.

