Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN

Programa de Matemática Educativa

# Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior

Tesis que presenta

**Lic. Norma Gutiérrez Rodríguez**

Para obtener el grado de Maestra en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Directores de tesis:

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza
M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

México, D. F. Junio de 2009

SIP-14

# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

*ACTA DE REVISIÓN DE TESIS*

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 21 del mes de Mayo del 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA-Legaria para examinar la tesis de titulada:

Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior

Presentada por el(la) alumno(a):

| Gutiérrez | Rodríguez | Norma |
|---|---|---|
| Apellido paterno | Apellido materno | Nombre(s) |

Con registro: | A | 0 | 5 | 0 | 3 | 9 | 6 |

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Director de tesis

M.C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

Dr. Apolo Castañeda Alonso

M.C. Karina Viveros Vela

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

M.C. Catalina Navarro Sandoval

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

# *INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL*

## *COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION*

*CARTA DE CESION DE DERECHOS*

En la ciudad de México, D.F. el día 11 del mes Junio del año 2009, el (la) que suscribe Norma Gutiérrez Rodríguez alumno (a) del Programa de MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA con número de registro A050396 adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza y M.C. Juan Gabriel Molina Zavaleta y cede los derechos del trabajo intitulado **Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior** al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección vale0807@hotmail.com permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

C. Norma Gutiérrez Rodríguez

Nombre y firma

# AGRADECIMIENTOS

A Rafael, mi esposo
Por su amor, comprensión y paciencia.

A Frida Fernanda, Valeria Montserrat y Rafael Uriel, mis hijos
Que son mi motivo para superarme
como persona.

A Leonor y Ricardo Rene, mis padres
Por su apoyo incondicional.

Al Dr. Alejandro M. Rosas Mendoza
Por confiar en mí, para la
realización de este trabajo.

Al M. C. Juan Gabriel Molina Zavaleta
Por sus sugerencias hechas en este trabajo.

INDICE GENERAL

**Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior.**


Resumen.

Se sabe que en el programa de nivel medio superior del IPN no se aborda el tema de series numéricas, pero al hacer una pequeña lectura sobre la historia de las series infinitas, surgieron en civilizaciones que no desarrollaron el cálculo como puede verse en Rosas (2007), esto nos condujo a hacer la pregunta de investigación. En las investigaciones de Albert (1996), Douglas (1992), Moreno (1999) y Pérez (1991) lo trabajaron con alumnos de nivel superior y medio superior respectivamente pero que ya había cursado cálculo diferencial e integral.

En este trabajo nuestro objetivo es mostrar los resultados que se obtuvieron durante el desarrollo del problema de investigación que hemos establecido. Para responder esto, nos basamos en el diseño y aplicación de secuencias didácticas, es por ello que esta investigación su marco de referencia gira alrededor de la línea de investigación denominada Teoría de Situaciones Didácticas e Ingeniería Didáctica, buscando que los estudiantes construyan ese objeto matemático por medio de representaciones numéricas y gráficas por medio de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de situaciones didácticas basadas en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (Artigue, 1995).

Por esta razón el trabajo de campo realizado, en la parte gráfica se ha desarrollado en un escenario natural con un grupo de alumnos de tercer semestre de bachillerato formado en equipos. Estos estudiantes solo han cursado las materias de álgebra, geometría, trigonometría y geometría analítica. La secuencia didáctica consiste en lograr que los alumnos trabajen gráficamente con series infinitas usando un paquete simulador graficador Graphmatica para el ambiente Windows. En la etapa numérica se escogieron a estudiantes de tal manera que tuvieron que hacer comparaciones entre la función exponencial y la suma de funciones polinomiales usando su calculadora científica. Los resultados alcanzados muestran que el desempeño es semejante al de los estudiantes que conocen cálculo.

## Abstract

It is known that in the program at a pre University level of the IPN there is not approached the topic of numerical series, but on having done a small reading on the history of the infinite series, they arose in civilizations that did not develop the calculation since it can it turns in Rosas (2007), this led us to do the question of investigation. In the investigations of Albert (1996), Douglas (1992), Moreno (1999) and Perez (1991) it worked with pupils of top and a half top level respectively but that already they had dealed differential and integral calculation.

In this work our aim is to show the results that were obtained during the development of the problem of investigation that we have established. To answer this, we base on the design and application of didactic sequences, it is for it that this investigation his frame of reference turns about the line of investigation called Theory of Didactic Situations and Didactic Engineering, looking that the students construct this mathematical object by means of numerical and graphical representations by means of an experimental scheme based on the didactic accomplishments in class, that is to say, on the conception, accomplishment, observation and analysis of didactic situations based on the confrontation between the analysis to priori and to posteriori. (Artigue, 1995).

For this reason the work of realized field, in the graphical part it has developed in a natural stage with a group of pupils of the third semester of baccalaureate formed in equipments. These students only have dealed the matters of algebra, geometry, trigonometry and analytical geometry. The didactic sequence consists of achieving that the pupils work graphically with infinite series using a package malingerer graficador Graphmatica for the environment Windows. In the numerical stage students were chosen in such a way that they had to do comparisons between the exponential function and the sum of functions polinomiales using his scientific calculator. The reached results show that the performance is similar to that of the students who know calculation.

**Glosario.**

## Acercamiento Sistemático

El objetivo principal de estudio de la Didáctica de la Matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos – formados por los subsistemas: enseñantes, alumnos y saber enseñado – que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza. Hay dos conceptos que vienen a integrarse: la transposición didáctica y el contrato didáctico.

## Contrato Didáctico

Comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente.

## Saber erudito

Es aquel saber reconocido como tal por una comunidad científica, aunque no se enseña bajo esa forma.

## Serie numérica

En matemáticas una **serie** es la suma de los términos de una sucesión. Se representa una serie con términos $a_n$ como $\sum_{i=1}^{N} a_i$ donde N es el índice final de la serie. Las *series infinitas* son aquellas donde i toma el valor de absolutamente todos los números naturales, es decir, $i = 1, 2, 3, \ldots$.Las series *convergen* o *divergen*. En cálculo, una serie diverge si $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ no existe o si tiende a infinito; *converge* si $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = L$ para algún $L \in \mathbb{R}$.

## Situación A-Didáctica

Es el proceso en el que, una vez que el estudiante ha recibido (o construido) el conocimiento, se le plantea un problema fuera de lo que trabajó en la situación didáctica, que que debe afrontar y resolver sin la intervención del docente. Entonces, Situación A-Didáctica se puede ver como una validación del proceso de enseñanza-aprendizaje.

## Situación Didáctica

Es un conjunto de relaciones explicita y / o implicitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender – esto es, reconstruir – algún conocimiento.

## Software Graphamatica

Hoy gracias a internet podemos disponer de Software en muchos casos gratuitos, como por ejemplo **GRAPHMATICA**, recomendado en los Programas Oficiales. Es realmente impactante como los alumnos comprenden rápidamente su uso y lo más importante es la ayuda real que presta en todo lo referente a graficación de funciones, inecuaciones, derivadas y algunas funciones más complejas.

## Transposición Didáctica (Chevallard, 1985).

Es la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado.

# Introducción

La matemática educativa ha llegado a formular preguntas acerca del conocimiento educativo, éstas entorno a la naturaleza, sus formas y condiciones de construcción que deben hacer los individuos para que se dé tal conocimiento. Por otro lado, la didáctica de la matemática no solo atiende la enseñanza sino también el aprendizaje, además estudia las actividades didácticas, es decir, actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tienen de específico de la matemática.

Los resultados, en este dominio, son cada vez más numerosos; tratan los comportamientos cognitivos de los alumnos, pero también los tipos de situaciones empleadas para enseñarles y sobre todo los fenómenos que generan la comunicación del saber, por ello se requiere de un acercamiento sistemático que abarque lo anterior (Artigue, 1992). Este enfoque se encuentra sustentado en la teoría de la transposición didáctica de Chevallard y la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau.

En este trabajo nos interesa saber si el alumno es capaz de construir el concepto de convergencia de una serie numérica infinita, sin usar cálculo diferencial e integral, así como el decir que debido a que se ha hecho cambios en los programas de estudio a nivel bachillerato, ¿qué tan viable sería introducir este objeto matemático a nivel de enseñanza en el nivel medio superior?

Las series numéricas no se abordan en el nivel medio superior actualmente, sin embargo, en algunos libros de texto de álgebra de este nivel que revisamos, se menciona pero de manera muy simple aunque sabemos que en algunos planes de estudio del nivel superior (Licenciatura) y en el aula de clase se enseñan con métodos muy complejos, esto nos conlleva a preguntarnos ¿porqué esperar hasta el nivel superior para enseñar series numéricas?, ¿el concepto de serie se puede abordar con alumnos del nivel medio, en particular, que no hayan cursado Cálculo Diferencial e Integral?

Es por ello que en nuestra tesis se diseño una ingeniería didáctica, en la que se contempla un panorama visual y aritmético, que para su aplicación se tiene que hacer una familiarización con el graficador Graphmatica para el ambiente Windows, para que ellos puedan mirar sus características comunes de las gráficas y así hacer conclusiones pertinentes a nuestra hipótesis.

Este trabajo de investigación comprende cuatro capítulos y una introducción. La introducción explica aspectos primordiales muy sintéticos.

En el capítulo 1, Antecedentes, presentación y planteamiento del problema de investigación, indagamos sobre la problemática actual de las series numéricas en la enseñanza y posteriormente planteamos nuestra pregunta de investigación, señalamos la metodología de investigación, revisamos el plan de estudio del Instituto Politécnico Nacional (IPN) y libros de álgebra de nivel medio superior.

En el capítulo 2, Se presenta el Marco Teórico que sirvió de apoyo para el desarrollo de la Ingeniería Didáctica utilizada en este trabajo.

En el capítulo 3, Diseño y Aplicación de la Secuencia Didáctica, se explicita la metodología utilizada, el análisis preliminar y análisis a priori de la secuencia didáctica.

En el capítulo 4, Análisis de Resultados, se desarrolla y se hace un análisis a posteriori de los resultados.

Por último, en el capítulo 5, se exponen las conclusiones.

# Capítulo I. Antecedentes

La presente investigación encuentra su marco de referencia en la Teoría de Situaciones Didácticas e Ingeniería Didáctica. Su interés principal se enfoca en el estudio y diseño de ingenierías didácticas para matemáticas, en busca de favorecer el desarrollo de habilidades y la adquisición de saberes por parte del alumno en un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de situaciones didácticas basadas en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (Artigue, 1995).

El IPN tiene como función hacer nuevos planteamientos con respecto al nuevo modelo de educación, con la renovación de los contenidos, métodos, prácticas y medios de transmisión del saber, que han de basarse en nuevos tipos de vínculos y en la colaboración con la comunidad y con amplios sectores de la sociedad.

La Dirección de Educación Media Superior está implementando un proyecto de aula cuyo objetivo es desarrollar una cultura de trabajo en el interior del aula que incorpore procesos centrados en el aprendizaje, lo que representa modificar las acciones de intervención del docente, de participación del alumno y un cambio en las formas tradicionales de evaluación, fomentando la enseñanza orientada al desarrollo de habilidades, actitudes y conocimientos en el alumno.

El objetivo fundamental es la construcción de los aprendizajes a partir de lo que el sujeto ya conoce, por lo tanto el aprendizaje significativo ocurre cuando una persona recibe y aplica estos conceptos y los relaciona con otros.

En el programa del bachillerato del IPN en ningún momento se desarrolla el tema de sucesiones ni mucho menos series numéricas. Pero nosotros sabemos que surgieron 2000 años antes de nuestra era con la aparición de los primeros conceptos que dan origen a las series infinitas, las sucesiones en la cultura hindú (De Mora y Ludwika, 2003). Las progresiones aritméticas y geométricas también aparecieron en un libro chino llamado *Jiuzhang suanshu* o Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático, escrito aproximadamente alrededor del 200 a.C. Pero los hindúes vuelven a aparecer 700 años después con avances en las series y son quienes dominarán el desarrollo de esta área de las matemáticas hasta que en Europa surja el cálculo.

Algunas investigaciones que se han realizado acerca de las series infinitas, se han dado tanto aquí en México como en otros países. Se hará una breve descripción de estas y la forma en que surgió nuestra inquietud por este tema.

## 1.1 EL CONTEXTO ESCOLAR

En las aulas escolares aparecen muchos fenómenos didácticos, pero ¿cuántos de ellos son provocados por el programa escolar? No planeamos resolver esta pregunta en este trabajo pero sí pretendemos estudiar un tema que no está incluido en el currículo de la escuela vocacional.

Los estudiantes de nivel medio superior del Instituto Politécnico Nacional cursan las materias de matemáticas Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Probabilidad y Estadística. A continuación detallamos algunos de los programas de estudio con la intención de clarificar el párrafo anterior.

RESUMEN DE APRENDIZAJES

ALGEBRA

UNIDAD 1. NUMEROS REALES

En esta unidad el alumno emplea las operaciones aritméticas y sus propiedades, en los diferentes conjuntos de números, para la solución de problemas relacionados con su entorno académico, personal y social.

UNIDAD 2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En esta unidad el alumno utiliza conceptos, propiedades y relaciones algebraicas en la solución de ejercicios de su entorno académico.

UNIDAD 3. ECUACIONES Y FUNCIONES LINEALES

En esta unidad el alumno emplea las funciones y ecuaciones lineales en la solución de problemas que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal y social.

UNIDAD 4. ECUACIONES Y FUNCIONES CUADRATICAS

En esta unidad emplea las funciones y ecuaciones cuadráticas en la solución de problemas que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal y social.

GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA

UNIDAD 1. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

El alumno aplicará las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas en la resolución de problemas teóricos y de la vida cotidiana.

UNIDAD 2. GEOMETRÍA EUCLIDIANA.

El alumno aplicará los postulados, teoremas y el método axiomático–deductivo de la geometría euclidiana, en particular de los triángulos, polígonos y circunferencias, para resolver problemas disciplinarios y cotidianos.

UNIDAD 3. TRIGONOMETRÍA.

El alumno aplicará las funciones trigonométricas, las leyes de los senos y los cosenos, así como las identidades y ecuaciones trigonométricas, en la resolución de problemas teóricos y de la vida cotidiana.

GEOMETRIA ANALITICA

UNIDAD 1. CONCEPTOS BÁSICOS

En esta unidad reconoce los elementos, los conceptos y las propiedades de pares ordenados y su representación en el plano cartesiano. Aplica el concepto de distancia para hallar perímetro y área de polígonos y resuelve problemas en general aplicando procedimientos relativos a propiedades geométricas y analíticas de la división de un segmento en una razón dada.

UNIDAD 2. LUGAR GEOMETRICO

En esta unidad encuentra el lugar geométrico de una ecuación y viceversa.

UNIDAD 3. LA RECTA

En esta unidad el alumno debe diferenciar entre la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta, saber aplicar las diferentes formas de la ecuación de una recta a la resolución de problemas prácticos y de las ciencias.

UNIDAD 4. ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

En esta unidad el alumno aplicará el concepto y las ecuaciones de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola en la solución de problemas dentro de la matemática y otras disciplinas. Identificará una cónica.

UNIDAD 5. COORDENADAS POLARES

El alumno identificará los elementos, la representación de curvas en coordenadas polares y la relación que existe entre las coordenadas polares y cartesianas y cuáles son las ecuaciones paramétricas para así resolver problemas.

CALCULO DIFERENCIAL

UNIDAD 1. FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

El alumno utilizará las propiedades de funciones, definir el límite de una función y que determine la continuidad o discontinuidad de diversos tipos de funciones.

UNIDAD 2. DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS.

El alumno obtendrá y aplicará la derivada de funciones algebraicas, para resolver problemas en diferentes áreas del conocimiento.

UNIDAD 3. DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

OBJETIVO: Aplicar la derivación de funciones trascendentales, para resolver problemas de las diferentes áreas del conocimiento.

CALCULO INTEGRAL

UNIDAD 1. DIFERENCIALES

En esta unidad el alumno debe aplicar el concepto de la diferencial de una función en la solución de problemas.

UNIDAD 2. INTEGRAL DEFINIDA

En esta unidad el alumno debe obtener antiderivadas de funciones, resolver integrales inmediatas mediante fórmulas y calcula la constante de integración.

UNIDAD 3. METODOS DE INTEGRACIÓN

En esta unidad el alumno resuelve integrales por el método de cambio de variable, sustitución trigonométrica, de integración por partes y resuelve integrales con integrando racional por el método de fracciones parciales.

UNIDAD 4. INTEGRAL DEFINIDA

En esta unidad el alumno comprenderá los problemas que dieron lugar al cálculo integral y su teorema fundamental, resuelve problemas geométricos y de otras áreas utilizando la integral definida.

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

UNIDAD 1. ESTADISTICA DESCRIPTIVA.

El alumno organizará en forma tabular y grafica los datos obtenidos de una muestra o una población, determinando sus medidas de tendencia central y de dispersión, para el análisis de su comportamiento; así como el estudio de la regresión y correlación lineal entre dos conjuntos de datos, en el contexto de la resolución de problemas de diversas áreas de conocimiento.

UNIDAD 2. PROBABILIDAD.

El alumno aplicará los conceptos y leyes de la probabilidad para la toma de decisiones, cuando prevalecen condiciones de incertidumbre, en el contexto de la resolución de problemas de diversas áreas del conocimiento.

UNIDAD 3. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

El alumno aplicará las distribuciones de probabilidad, de variables aleatorias discretas y continuas, para predecir resultados y estimar la media de una población, en el contexto de la resolución de problemas de diversas áreas del conocimiento.

En relación con estos cursos, no se tiene la oportunidad de enseñar el tema de series numéricas, mucho menos con el tema de convergencia de series a nivel medio superior, porque no viene incluido en el temario de cada materia que se imparte.

Con respecto a los libros que se usan en nivel medio superior y nivel superior Cálculo Diferencial e Integral de Granville (Granville, 1990), Cálculo con Geometría Analítica de Swokowski (Swokowski, 1993) y Cálculo con Geometría Analítica de Zill (Zill, 1995), si se aborda el tema de series y sucesiones así como los criterios de convergencia de las series, con una fuerte influencia formalista y algorítmica de las matemáticas.

Además sabemos que el álgebra aparece como una herramienta importante en la manipulación de las series y de los criterios de convergencia, pero no es vital para comprender el concepto de serie infinita. Y aparentemente cuando se necesita estudiar la convergencia o divergencia de la serie, tampoco es necesario el uso o conocimiento del álgebra para elegir el criterio de convergencia a utilizar en cada caso específico. Sin embargo, podemos observar que poseen conocimientos suficientes para obtener la expansión de algunas series (geometría) y para operar con ellas (álgebra).

## 1.2 Las series infinitas

Aunque la historia de las sucesiones y series infinitas puede dividirse de muchas maneras como en (Smith, 2005) y (Rosas, 2007), nosotros sólo vamos a hacer una breve revisión de los desarrollos alcanzados por civilizaciones previas a la aparición del cálculo en Europa.

Las primeras progresiones aritméticas y geométricas, tanto en Egipto como en la India, aparecieron alrededor del siglo XVI a. C. la aparición de los primeros conceptos que dan origen a las series infinitas, son las sucesiones, éstas están en forma de versos como aparecen en el *Mandala II* del *Ṛg Veda* en el himno 18 y cuyo origen está calculado entre los años 2000 a. C. al 1750 a. C.

*Indra, ven hacia aquí con dos corceles castaños,*
*Ven con cuatro, con seis cuando se te invoca.*
*Ven tú con ocho, con diez, para beber el Soma.*
*He aquí el jugo, valiente guerrero, no lo desdeñes*
*¡Oh Indra!, ven tú aquí habiendo enganchado a tu carro*
*veinte, treinta, cuarenta caballos.*
*Ven tú con cincuenta corceles bien adiestrados, Indra,*
*sesenta o setenta, para beber el Soma.*
(De Mora y Ludwika, 2003, p. 28).

Sin embargo, su uso parece estar restringido solamente a la resolución de problemas aritméticos, como lo hicieron los egipcios.

Una época simultánea a la hindú, en Rhind (2006) aparecen en el Papiro de Rhind progresiones aritméticas en donde se busca calcular las proporciones en que se van a repartir panes o medidas de cebada u otro grano, por ejemplo:

**Problema 63. Repartir 700 hogazas de pan entre cuatro hombres en partes proporcionales a 2/3, 1/2, 1/3 y 1/4.**

**<u>Problema 64</u>. Divide 10 hekat de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea 1/8 de hekat. ¿Qué parte le corresponde a cada hombre?**

El siguiente paso que se da es cuando se empieza a calcular elementos específicos de una sucesión aritmética o geométrica, como lo hicieron los griegos, ellos hicieron ejemplos de sucesiones infinitas, a citar a *Zenon de Elea* (490 – 425 a.C.) escribió una obra en la que aparecían 40 paradojas acerca del movimiento y el análisis del continuo, y también *Aristóteles* (384 a.C. – 322 a.C.) hace mención de cuatro de ellas Dicotomía, Aquiles, La flecha y el Estadio.

Así mismo se da el cálculo de la suma de un número determinado de elementos de una sucesión; esto marca el inicio del cálculo de sumas finitas (o series finitas como algunos lo llaman). La primera mención que se tiene de una serie infinita aparece alrededor del 230 a.C. en los trabajos de *Arquímedes* al querer calcular la cuadratura de una curva, en Knopp (1921) además se sabe que *Arquímedes* encontró la expresión pero con notación diferente a la que actualmente usamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

pero se dice que lo que hizo fue mostrar que esta suma siempre es menor que 4/3 para cualquier valor de *n* que se utilice.

De los chinos, se tiene también ejemplos de progresiones aritméticas y geométricas aparecen en un libro chino llamado *Jiuzhang suanshu* ( *Chu Chang Suan Shu)* o Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático, escrito aproximadamente alrededor del 200 a.C. y al cual a lo largo del tiempo se le van agregando comentarios de diversos matemáticos.

En el capítulo 3 *Cui fen* o Distribución por Proporción, se encuentran problemas cuya resolución involucra el uso de progresiones aritméticas y geométricas.

*Zhang Qiujian* (*Chang Ch'iu-Chin* o *Chang Ch'iu-chien*) escribió una obra llamada *Zhang Qiujian suanjing* (Manual Matemático de Zhang Qiujian) entre los años 468 d. C. y 486 d.

C. que consta de 98 problemas divididos en tres capítulos. En esta obra resuelve y calcula la suma de progresiones aritméticas.

Los hindúes vuelven a aparecer con avances en las series con problemas geométricos y son quienes dominarán el desarrollo de esta área de las matemáticas, pues ellos encontraron muchas fórmulas, hasta que en Europa surja el cálculo citare a:

*Aryabhata* escribió la obra *Aryabhatiya* fechada en el 499 d. C. cubre temas como:

- Métodos de inversión
- Operadores aritméticos
- Fórmulas para encontrar la suma de diferentes tipos de series
- Reglas para encontrar el número de términos de una progresión aritmética
- Tablas de valores del seno

El trabajo de Aryabhata fue continuado por *Brahmagupta* (598 d. C. – 670 d. C.) quien escribió la obra *Brahmasphutasiddhanta* (La comprensión del Universo) en la cual aparecen reglas para sumar series, también aparecen reglas para sumar los cuadrados de los n primeros enteros y la suma de los cubos de los primeros n enteros, también *se utilizaron fórmulas tan avanzadas como las que casi 1000 años después descubrirían los matemáticos europeos y serían nombradas* ***fórmulas de interpolación de Newton-Stirling*** *y* ***fórmulas iterativas de Newton-Raphson****; Además Brahmagupta fue el primero en intentar asignar valores a fracciones como* $\frac{n}{0}$ *y* $\frac{0}{0}$ .

Alrededor del año 850, *Mahavira* (o *Mahaviracharya ~Mahavira* el maestro) escribió la obra *Ganitasar Sangraha* considerada como brillante. Él proporcionó muchas fórmulas para trabajar con progresiones geométricas, Pearce (2002).

Los trabajos de *Sridhara* se consideran realizados alrededor del año 900, en particular en su obra *Patiganita* aparecen secciones del libro dedicadas al cálculo de progresiones aritméticas y progresiones geométricas, además de fórmulas para calcular la suma de algunas series finitas que se vuelven una referencia estándar para obras posteriores.

*Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji* nació en 953 en Bagdad, obtuvo los siguientes resultados (en prosa)

*La suma de los cuadrados de los números que se siguen uno al otro en orden natural desde el uno es igual a la suma de esos números y el producto de cada uno de ellos por su predecesor.*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=2}^{n} i(i-1)$$

(En notación actual)

También proporcionó las siguientes fórmulas

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = n\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Hacia el año 1100 d. C. el desarrollo de la matemática hindú recae en *Bhaskaracharya o Bhaskara II*, considerado el más grande matemático hindú de la antigüedad. En su obra *Lilavati* (La hermosa) puede verse en el capítulo 5 la resolución de problemas sobre progresiones aritméticas y progresiones geométricas.

Hacia el 1200 *Ibn Yahya al-Maghribi Al-Samawal* nace en Bagdad. Su obra más importante es *al-Bahir fi'l-jabr* (The brilliant in algebra), dividida en cinco libros en los que incluye el resultado que aparece en el libro 2:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$$

*Al-Marrakushi Ibn Al-Banna* hacia el 1256 nació en Marruecos, escribió 82 obras. Sus obras más famosas son *Talkhis amal al-hisab* (Resumen de operaciones aritméticas) y *Raf* *al-Hijab* que es un comentario que hizo a la primera. E*n Raf al-Hijab, Al-Banna* hace uso de fracciones continuas y da la suma de las siguientes series finitas

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2+1)$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$$

*Zhu Shijie* también conocido como *Chu Shih Chieb* nació alrededor del año 1260 cerca de Pekin, China, escribió dos obras, la primera *Suan xue qi meng* (Introducción a los Estudios Matemáticos) publicada en 1299 trata sobre álgebra polinomial y ecuaciones polinomiales, áreas, volúmenes, regla de tres y un método equivalente al de Eliminación Gaussiana. El segundo libro publicado en 1303 es *Siyuan yujian* (Reflexiones Verdaderas de las Cuatro Incógnitas) en el que aparece el Triángulo de Pascal hasta las octavas potencias. Resuelve polinomios en 1, 2, 3 y 4 incógnitas. Presentó 288 problemas divididos en tres volúmenes de veinticuatro capítulos. Entre las fórmulas que presenta están

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

Entre otras también dio la suma de las siguientes series:

1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 +...

1 + 5 +14 + 30 + 55 + 91 +…

1 + 6 + 18 + 40 + 75 + 126 +…

1 + 8 + 30 + 80 + 175 + 336 + …

En el año 1350 d. C. el matemático *Narayana pandit*, escribió la obra *Ganita Kaumudi* de 14 capítulos. El capítulo 13 de esta obra (llamado Red de números), dice sobre las sucesiones de números y algunos problemas relacionados con las progresiones aritméticas, en el capítulo 14, discute cuadrados mágicos, utiliza fórmulas y reglas para trabajar las relaciones entre los cuadrados mágicos y las series aritméticas.

En el año 1350 d.C. nace el matemático *Madhava de Sangamagramma*. En sus trabajos aparecen expresiones que siglos después fueron descubiertas por los matemáticos europeos. *Madhava* calcula la expansión en serie infinita de la función arctang.

*El primer término es el producto del seno dado y el radio del arco deseado por el coseno del arco. Los siguientes términos son obtenidos por un proceso de iteración cuando el primer término es repetidamente multiplicado por el cuadrado del seno dividido por el cuadrado del coseno. Todos los términos son entonces divididos por los números impares 1, 3, 5,… El arco es obtenido al sumar y restar respectivamente los términos de rango impar y aquellos de rango par. Se toma como condición que el seno del arco o el de su complemento cualquiera de ellos sea el más pequeño sea tomado aquí como el seno dado. De otra manera los términos obtenidos por la iteración anterior no tenderán a la magnitud que se desvanece*.

En verso (The MacTutor History of Mathematics Archive).

$$arctang q = q - \frac{q^3}{3} + \frac{q^5}{5} - \frac{q^7}{7} + \cdots$$

(notación actual)

*Madhava* también conoció las siguientes expresiones:

$$sin\Theta = \Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^5}{5!} - \frac{\Theta^7}{7!} + \cdots$$

redescubierta por Newton, en el tema IV del capítulo 9 de Pearce (2002) y The MacTutor History of Mathematics Archive es llamada Serie de potencias de Madhava-Newton.

De la misma manera conoció $cos\Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2!} + \frac{\Theta^4}{4!} - \cdots$ también es llamada Serie de potencias de Madhava-Newton. Esta también se le conoce como Serie de MacLaurin.

*Madhava* sustituyó el valor de $q = \frac{\pi}{4}$ en $q = \frac{tang\ q}{1} - \frac{tang^3 q}{3} + \frac{tang^5 q}{5} + \frac{tang^7 q}{7} + \cdots$ y obtuvó la serie $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$.... redescubierta por *Leibniz* (casi 300 años después).

Pero es sorprendente que *Madhava* además proporcionó un término de corrección para esta serie. En su trabajo también se encuentran las expresiones que se consideran casos especiales de la Serie de Taylor:

$$\cos(x+h) \cong cosx - \frac{h}{r} sinx + \frac{h^2}{2r^2} cosx$$

$$\sin(x+h) \cong sinx - \frac{h}{r} cosx + \frac{h^2}{2r^2} sinx - \frac{h^3}{6r^3} cosx$$

Para h y r cantidades pequeñas.

*Iyesthadeva* nació en 1500 d. C. en Kerala, escribió la obra *Yuktibhasa* que es un compendio de las matemáticas de Kerala y es un texto donde presenta teoremas y algunas deducciones. Aquí se encuentra la explicación de cómo *Madhava* pudo obtener sus expansiones en series.

En los resultados producidos por los matemáticos hindúes claramente se ve que fueron más avanzados que los que logran más tarde los matemáticos europeos. Aunque no hubo muchos adelantos en series fuera de la India y algunas regiones.

En ese lapso de tiempo empezaron los europeos a hacer sus aportaciones, *Leonardo Pisano Fibonacci* viajó y realizó obras, una de ellas es *Liber abaci* que apareció en 1202, en esta obra aparece una sucesión que hoy es conocida como la sucesión de Fibonacci, así como problemas que involucran sumar series aritméticas y geométricas.

*Nicole de Oresme* en 1360 (Kline, 1972), muestra que la serie a $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$
Diverge cuando sustituye valores menores, es decir:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

El alemán *Michael Stifel* (1487-1567) entre 1543 y 1544 utiliza expresiones como:

"*Divisio in Arethmeticis progressionibus respondet extractionibus radicum en progresssionibus Geometricis*" (Miller, 2006). También encuentra "*Es mag aber die Cossische Progres auch also verzychnet verden*

0 1 2 3

1 1*A* 1*AA* 1*AAA*" (Cajori, 1993, p.144)

Expresando las potencias de la cantidad o cosa (*cossishe*) A con los términos 1AAA en lugar de nuestro $A^3$ actual.

En 1593, Francois Viete que utiliza funciones trigonométricas y funciones geométricas, por ejemplo los problemas de duplicación del cubo, trisección del triángulo, la construcción de la tangente a la espiral arquimediana, calcula ∏ con 10 decimales exactos y representa ∏ de la forma:

Que es la primera vez que aparece pi en forma de producto infinito.

En conclusión, las sucesiones y series infinitas siempre se desarrollaron en verso y las ocupaban para resolver problemas aritméticos y geométricos, pero poniendo énfasis en que ellos nunca utilizaron Cálculo Diferencial e Integral, al menos no como el que usamos en la actualidad.

## 1.3 Origen del Problema de Investigación

Durante los cursos de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa se realizó la lectura de diversas teorías como la de las Situaciones Didácticas y a partir de lo cual se pudo ver que su metodología, la Ingeniería Didáctica, es utilizable en dos sentidos, por un lado permite hacer investigación sobre fenómenos de la enseñanza- aprendizaje de la matemática, o proponer diseños didácticos para favorecer aprendizajes matemáticos, como lo menciona Douady (1996, p. 241):

”*Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse carg*o.”

Al mismo tiempo, como resultado de las investigaciones previas realizadas por (Pérez, 1991), (Moreno, 1999) y (Rosas, 2007) surgió la pregunta ¿el concepto de serie se puede abordar con alumnos que no hayan cursado Cálculo Diferencial e Integral?

Al observar los desarrollos mencionados en el apartado anterior, se tiene la hipótesis de que es posible comprender algunos conceptos relacionados con las sucesiones y series infinitas, solamente con conocimientos de aritmética y álgebra, es por ello que se quiere probar si obtienen los mismos resultados con alumnos de nivel medio superior que no hayan cursado las materias de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral.

Este es un esquema nuevo, como se menciono anteriormente, se pretende trabajar con alumnos de bachillerato sin conocimientos de cálculo, para tratar de averiguar si ellos pueden construir términos de una serie infinita (no necesariamente utilizando la notación formal) pues se sabe que ellos no tienen conocimiento de los conceptos de sumatoria, factorial, etc., así como también se espera que ellos puedan desarrollar conceptos y hacer aplicaciones importantes con las series infinitas.

Al hacer una pequeña lectura sobre la historia de las series infinitas y sabiendo que estas surgieron mucho antes del cálculo, entonces nos condujo a decir el ¿por qué? se reduce a establecer nociones acerca de este concepto, dentro del nivel medio superior. Se sabe que al paso de los años los planes de estudio, han sido modificados, se omitió este concepto y se enseña hasta el nivel superior (Licenciatura). Esto nos conduce a ver si nuestros alumnos de nivel medio son capaces de construir el concepto matemático y además el saber ¿cómo lo abordan solamente con nociones de álgebra?

## 1.4 Estado del Arte

Realizando una consulta de investigaciones sobre el tema de las sucesiones y series infinitas se encontraron diversos trabajos como los de Robert (1982), Mamona (1990), Albert (1996), Douglas (1992), Flores (1992), sólo mencionaremos las dos más vinculadas con nuestras hipótesis:

I) *Sobre la noción de convergencia en los polinomios de Taylor en estudiantes de bachillerato. Análisis de las estrategias que posibilitan la construcción del concepto. Estudio de casos*.

En su obra Pérez (1991), utiliza un marco teórico dentro del Discurso Matemático Escolar y lo utiliza para diseñar lo que ella llama una *experiencia*.

En esta investigación presenta un caso mediante un ambiente gráfico y numérico, la autora intenta averiguar las condiciones o estrategias que les permitan a los alumnos de bachillerato, que ya cursaron Cálculo Diferencial e Integral a construir el concepto de convergencia de una serie de Taylor.

En la primera etapa la autora proporcionó a los estudiantes un ambiente gráfico, donde se hicieron pruebas sobre la función exponencial y de los polinomios de grado finito que proporciona la expansión en serie de Taylor de la función exponencial.

En este ambiente, los alumnos experimentaron con diversas gráficas, ellos no detectan las características comunes entre las gráficas y no aceptan que hacer las gráficas por un lado en papel y a lápiz; y por otra con un graficador (no se menciona cuál usaron), se puede observar que son parecidas las curvas, además que se tiene la intervención de la autora.

En la segunda etapa de la investigación, los estudiantes se dispusieron a realizar los cálculos numéricos para que experimenten la "convergencia" en forma numérica, pero no indica el ambiente que utilizó para operar los cálculos numéricos.

Consistió en evaluar en las funciones ; los puntos x=0.05, 0.75 y 3, y que comparen esos valores con los resultados que obtienen al evaluar los polinomios que surgen de la expansión en serie de Taylor de cada una de esas funciones.

En el análisis de resultados, se observa que los estudiantes logran decir que al evaluar los puntos en la serie que las funciones polinomiales aproximan a la función exponencial, al igual que aceptan la aproximación de los polinomios a la función $ln(1-x)$ indicando la condición de que se cumple aproximadamente entre los valores de x = 0 y cerca de x = 1.70; y finalmente logran encontrar que la función es válida al sustituir valores en el dominio (-0.9, 0.9).

II) *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación.*

El marco teórico en que desarrolló su trabajo de investigación es el de la Teoría de Situaciones Didácticas y lo concluye mediante la construcción de una Ingeniería Didáctica.

El autor realiza un análisis de algunos obstáculos epistemológicos, de las dificultades asociadas a los conceptos necesarios en el cálculo y las series para después analizar los trabajos realizados con la serie de Taylor y la convergencia de series, así como la realización de un análisis de libros de texto y sobre concepciones que presentan los profesores en relación a la enseñanza y el aprendizaje acerca de esos temas.

Su proyecto de investigación inicia con una actividad exploratoria dividida en dos problemas: el primero se genera una serie geométrica y el segundo se presenta mediante una serie trigonométrica.

Los obstáculos epistemológicos que se presentaron fueron el infinito potencial y el principio de permanencia de Leibniz.

El escenario que diseña el autor consiste en representar los términos de la serie trigonométrica mediante un software graficador; los términos de la serie están representados mediante círculos cuyo radio depende del índice del término de la serie que se está considerando, de esta manera, conforme se toman más términos de la serie, el radio del círculo que lo representa decrece.

La ingeniería didáctica consiste en un conjunto de secuencias de clase que son diseñadas, organizadas y manipuladas, para poder lograr el aprendizaje de un conocimiento en un grupo de alumnos en particular; es por ello que una vez que es proporcionada una serie trigonométrica, los estudiantes deben encontrar más términos de la serie y graficar sumas parciales de esta serie.

Con respecto a lo anterior, analizando la tesis de Pérez (1991), se consideró la construcción del concepto de convergencia de una serie en específico, la serie de Taylor en estudiantes de bachillerato, pero se tomaron algunas consideraciones de ésta a mencionar: la secuencia didáctica está dividida en dos partes la del ámbito gráfico y ámbito numérico.

En el ámbito gráfico, solamente aborda funciones polinomiales que se aproximan a la función exponencial. De la secuencia de Pérez (1991) es lo que se considero, ella mostró otras funciones. De está se considero que a los alumnos se les muestra la gráfica de la función exponencial junto con la gráfica de la suma de los dos primeros términos, posteriormente con la suma de los tres primeros términos de la función polinomial y ellos hallarán sus características entre las gráficas y proporcionarán lentamente la posibilidad de la convergencia de las gráficas, sin ninguna intervención del profesor y el medio donde se desarrolla esta actividad es el sofware Graphmatica.

En el ámbito numérico solamente se hará que experimenten la "convergencia" en forma numérica de la función $e^x$ en los puntos x=1/2, ¾, 5, 0, -1 y -5. Se les pide que comparen esos valores con los resultados que obtienen al evaluar los polinomios que surgen de la expansión en serie de Taylor de la función exponencial. La diferencia de la tesis de Pérez es que ella considera otras dos funciones a evaluar.

Respecto al trabajo de Moreno (1999), se tomará en cuenta el marco teórico que desarrolló y sus conclusiones; construcción de una ingeniería didáctica donde permite los estudiantes encontrar más términos de la serie y graficar sumas parciales de esta serie. Las secuencias difieren en todos los aspectos, en cuanto al diseño y él como se aborda la construcción del conocimiento matemático a investigar.

Para nuestro proyecto, las secuencias se diseñaron y aplicaron a alumnos que son de nivel medio superior que no han cursaron Cálculo Diferencial e Integral.

## 1.5 Pregunta de Investigación

Después de las anteriores secciones podemos establecer nuestra pregunta de investigación de la siguiente manera:

¿Pueden los alumnos de nivel medio superior, que no han cursado cálculo, construir el concepto de serie infinita?

Para responder esta pregunta, se optó por utilizar dos situaciones de aprendizaje que se encuentra en nuestro capítulo 4, la primera actividad gráfica, fue tomada de la tesis de

Rosas (2007, pp. 258), y la segunda actividad numérica fue tomada como referencia de la tesis de Pérez (1991, cap. 3, pp. 11).

Se pretende lograr que en la primera actividad gráfica, los alumnos usen un graficador Graphmatica para el ambiente Windows, donde van a interactuar entre las graficas y las características que se tienen de ellas, posteriormente se tiene que ver si ellos pueden encontrar los términos de una serie numérica y la notación que usan.

En la segunda actividad numérica, ellos hacen uso de una calculadora científica para poder decir si hay un cierto acercamiento en valor entre la función $e^x$ y la suma de los términos, nuestro objetivo es determinar si los alumnos pueden concluir que la función $e^x$ y la suma de términos de la serie alcanzan los mismos valores, conforme se toman más términos de la serie de Taylor.

# Capítulo II. Marco Teórico

En nuestra investigación utilizaremos la Ingeniería Didáctica la utilizaremos como metodología de investigación. Sin embargo, en este trabajo nos interesa esclarecer consecuentemente los patrones para poder así elaborar el diseño de situación didáctica en torno a las series numéricas, que tuvieron un auge, desarrollo y aplicación solamente usando la aritmética y el álgebra. Es decir, el cómo las series numéricas son presentadas en el ámbito escolar, y el por qué estas en el ambiente aúlico, se da posterior a la enseñanza de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral.

En este capítulo discutiremos las ideas que sostienen la metodología elegida en este trabajo. Es por ello que la utilizamos como producción de situaciones de enseñanza-aprendizaje, desarrollada por Guy Brousseau.

Según Douady (1995), una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y manipuladas debidamente por un “profesor-ingeniero”, para poder lograr el aprendizaje de un conocimiento en un grupo de alumnos en particular. En otras palabras nos da una mejor organización sobre el sistema educativo. Fundamentalmente los productos son construidos a partir de experimentaciones didácticas realizadas en un medio.

La Ingeniería Didáctica se elabora fundamentalmente por cuatro fases a mencionar: un análisis preeliminar que considera las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir; de un análisis a “priori” y diseño de una situación didáctica, se determinan qué variables didácticas son pertinentes y sobre cuáles se actuará, se establece las hipótesis de trabajo; y una vez que se establecen se diseña la situación didáctica; la experimentación es una “puesta de escena” de la situación didáctica, donde es un “proceso” en el cual el profesor implementa el producto y realiza los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica de clase lo exija y finalmente el análisis a posteriori y validación que consiste en la revisión de los resultados, en las observaciones que se tuvo en la resolución de los estudiantes. Estos se confrontan el análisis a priori.

La Teoría de las Situaciones Didácticas es una de las teorías de la Matemática Educativa y surge de la necesidad de disponer de un modelo de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas en el que se encuentren debidamente representadas todas las relaciones y las operaciones que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, también hay una inquietud por hacer extensiva esta nueva propuesta a todos los profesores, y de que experimenten la vivencia de la puesta en escena de situaciones didácticas en un ambiente propicio de trabajo para poder reconocer con esto que es un instrumento valioso para la enseñanza de las matemáticas y para su propia formación.

## 2.1 Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica es una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo" (Artigue, p. 34). La ingeniería didáctica, desarrollada específicamente en el área de la educación matemática, tiene una doble función. "Ella llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica" (p. 36).

En nuestro trabajo, estableceremos la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación. Nuestro interés es que al saber el cómo se desarrolló, nuestro ente matemático: las series numéricas, para así posteriormente crear el diseño de nuestra secuencia didáctica.

Sabemos que por el capitulo anterior, que las series numéricas tuvieron un auge, desarrollo y aplicación usando solo la aritmética y el álgebra. Es por ello que se hizo el diseño de la secuencia, para una selección de alumnos que tuvieran solamente nociones de estas materias, en específico a nivel medio superior.

Por otro lado, la ingeniería didáctica, nace a principios de la década de los ochentas, y constituye una metáfora de la actividad de los ingenieros, quienes para desarrollar sus proyectos hacen uso de los conocimientos científicos de su dominio y ponen a prueba sus resultados al control de la ciencia de referencia.

Según Douady (1996), una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y manipuladas debidamente por un “profesor-ingeniero”, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje de un conocimiento en un grupo de alumnos en particular. Así también es a la vez, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo a la dinámica de la clase.

Una descripción grosso modo de esta metodología es la siguiente: en esencia se contemplan cuatro grandes fases:

- Análisis preliminar.
- Diseño de la situación didáctica y su análisis *a priori*.
- Experimentación.
- Análisis *a posteriori* y validación.

En detalle, cada una de las fases mencionadas establecen:

- Un análisis preliminar de la situación está integrada por tres componentes: la componente didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza; la componente epistemológica da la explicación del devenir del contenido matemático en juego, así como su funcionamiento y diversas formulaciones; y la componente cognitiva, es decir, las concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que deben de enfrenar para apropiarse de las nociones puestas en juego en la secuencia implementada.

- En la segunda fase se eligen las variables didácticas que se van a controlar y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. También en esta instancia se establecen las hipótesis de trabajo, sobre lo que harán los estudiantes con la situación diseñada, qué avances se consideran dentro de las expectativas, qué errores se perciben persistentes, qué mecanismos se prevé serán utilizados, en fin, todo lo inherente a las hipótesis de trabajo y expectativas del investigador.

  Una vez determinadas las variables didácticas y establecido el objetivo, es decir, caracterizado el obstáculo que se desea confrontar, se pasa al diseño de la situación didáctica en sí misma, la cual debe crear un medio propicio para que el alumno acepte la investigación al juego, se sienta desafiado a apropiarse del saber puesto sobre la mesa.

- En la etapa de experimentación se procede a la “puesta de escena” de la secuencia realizada, es decir, se la implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. las formas en las cuales se recopilará la información son decisión del investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

- En la última etapa, el análisis  a posteriori consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuanto se desvían los resultados de lo  que se esperaba.

De esta confrontación entre los análisis a priori y a posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma. Esta validación, se comporta como un instrumento que impulsa el ciclo entre lo que se quiere y lo que sucede, entre las intenciones del diseño y la puesta en escena de éste. Buscamos la estabilidad de los diseños, en caso de no alcanzar los objetivos se ajusta, bien el diseño o bien el análisis predictivo.

## 2.2 Teoría de Situaciones Didácticas

Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con el fin de permitir a los alumnos aprender - esto es, reconstruir - algún conocimiento. Las situaciones son aquellas donde el alumno desarrolla un trabajo sabio semejante, a la actividad científica, es decir, donde actúe, formule, pruebe y construya modelos de lenguaje, conceptos y teorías que intercambie con los demás, donde reconozca aquellos que están conformes a la cultura y donde recoja aquellos que le son útiles y pertinentes. Son situaciones de creación y no de redescubrimiento.

Como se menciono anteriormente hay dos teorías que dan sustento teórico a la Ingeniería Didáctica, a mencionar, la teoría de transposición didáctica de Chevellard, y la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Para nuestro trabajo nos enfocaremos en esta última.

La Teoría de Situaciones Didácticas fue establecida en Francia por G. Brousseau a finales de los años sesenta del siglo XX, esta teoría busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos; él afirma:

*"Una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción....* (Brousseau, 1983, pp. 169-171).

En la modelización de Brousseau puede identificarse la influencia de Piaget, considera que el alumno aprende de sus experiencias, es por ello que el discurso del profesor debe ser vital, sin errores; para que el alumno construya su conocimiento.

La Teoría de Situaciones está sustentada en una concepción constructivista –en el sentido piagetiano- del aprendizaje, concepción de Brousseau (1986) de esta manera:

"*El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje."*

En torno a esta adaptación, nos dice cuál es la actitud del estudiante frente a una situación didáctica, es decir, "*el conocimiento proviene en buena parte del hecho que el alumno lo adquiera en su adaptación a las situaciones didácticas que le son propuestas*" (Brousseau, 1986, p. 67). Por otra parte, aunque la situación didáctica es propuesta por el profesor, para que se pueda adquirir un conocimiento, tal conocimiento puede confirmarse verdaderamente en su adquisición, cuando pueda ponerlo en acción en un contexto ajeno de toda intencionalidad didáctica. Tal situación es denominada a-didáctica, la cual se especifica del saber aunque carece de la intención de enseñar.

La importancia y el significado de la no intervención del maestro en la situación a-didáctica, queda aún por comprender que la entrada en una fase a-didáctica es algo que debe gestionar el mismo maestro. Esto dio lugar al concepto de "devolución" desarrollado por Brousseau (1988):

"*La devolución es el acto por el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia*".

La situación propuesta por el profesor al alumno, es aquella que le permita dotar al conocimiento que se desea impartir, de un significado propio y plausible de serle útil y de que reconozca su utilidad en la resolución de otro problema. La situación planteada debe tener por objeto que el alumno interactúe con el saber, es decir, que actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le sean útiles (Lezama, 1999).

La perspectiva de diseñar una situación por parte del profesor, para ofrecerla al alumno y se pueda construir un conocimiento, da lugar a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de cualquier problema, sin alguna intervención del profesor en las cuestiones relativas del saber en juego.

Esto muestra que existen características de la situación, que el docente puede variar de manera tal que se modifiquen las estrategias posibles de resolución y en consecuencia el conocimiento a construir, y hacer que el alumno, según su nivel acepte el problema como suyo y así pueda reproducir sus propias respuestas. A estas interacciones entre el docente y el alumno con los problemas que él ha propuesto, es la situación didáctica.

Aunque la situación didáctica es propuesta por el profesor para que el alumno adquiera un conocimiento, este conocimiento puede confirmarse verdaderamente en su adquisición, cuando pueda ponerlo en acción en un contexto ajeno a toda intencionalidad didáctica. Tal situación es denominada a-didáctica, la cual se especifica del saber aunque carece de la intención de enseñar.

Se distinguen tres tipos de situaciones a-didácticas:
- Situación a-didáctica de acción. El alumno debe actuar sobre un problema, la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos, construidos de nociones protomatemáticas, son aquellas que son utilizadas en la práctica para resolver problemas, pero no son reconocidas ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

- Situación a-didáctica de formulación. Un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado o otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar en base al conocimiento contenido en el mensaje.

Surgen las nociones paramatemáticas, son utilizadas como instrumento útil para describir objetos matemáticos, pero no son considerados como objetos de estudio en la cultura matemática.

- Situación a-didáctica de validación. Dos alumnos deben enunciar un modelo explicito y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Surgen las nociones matemáticas, objetos de conocimiento, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas.

- Situación de institucionalización. Es aquella donde se establece la relación que hay entre las producciones de los alumnos y el saber cultural. En ella se produce el reconocimiento del objeto de enseñanza por parte del alumno, por medio de intervenciones, pruebas, formulaciones, construcción de modelos, lenguajes, conceptos, teorías, su interacción con otros, reconocimiento de la veracidad de sus conjeturas y razonamientos, etc., por medio de una actividad matemática y del aprendizaje del alumno por parte del profesor, en una situación de acción, formulación y validación.

En resumen, una situación a-didáctica son aquellas en la cual el profesor no interviene dentro del escenario dejando que el alumno viva esta situación como investigador de un problema matemático, independiente del sistema educativo (Margolinas, 1993). Cada conocimiento tiene situaciones a-didácticas que preservan su sentido, estas situaciones son denominadas situaciones fundamentales (Situación didáctica) por Brousseau.

La teoría de las situaciones forma parte de la matemática educativa y se apoya en la tesis de que el alumno construya un conocimiento matemáticos, mediante un proceso similar al que realizaron los productores originales del conocimiento que se quiere enseñar. El diseño de las situaciones didácticas relativas a un concepto matemático dado se orienta a la construcción de su génesis artificial, que simularía los diferentes aspectos actuales del concepto para los estudiantes y que sin producir el proceso histórico, conduciría no obstante, a resultados similares.

Es por ello, que surge de la necesidad de disponer de un modelo de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas, en el que se encuentren debidamente representadas todas las relaciones y las operaciones que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, también hay una inquietud por hacer extensiva esta nueva propuesta a todos los profesores, y de que experimenten la vivencia de la puesta en escena de situaciones didácticas en un ambiente propicio de trabajo para poder reconocer con esto que es un instrumento valioso para la enseñanza de las matemáticas y para su propia formación.

En resumen, la teoría de situaciones permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase concebidas por el profesor con el fin de disponer de un medio para realizar un cierto proyecto de aprendizaje.

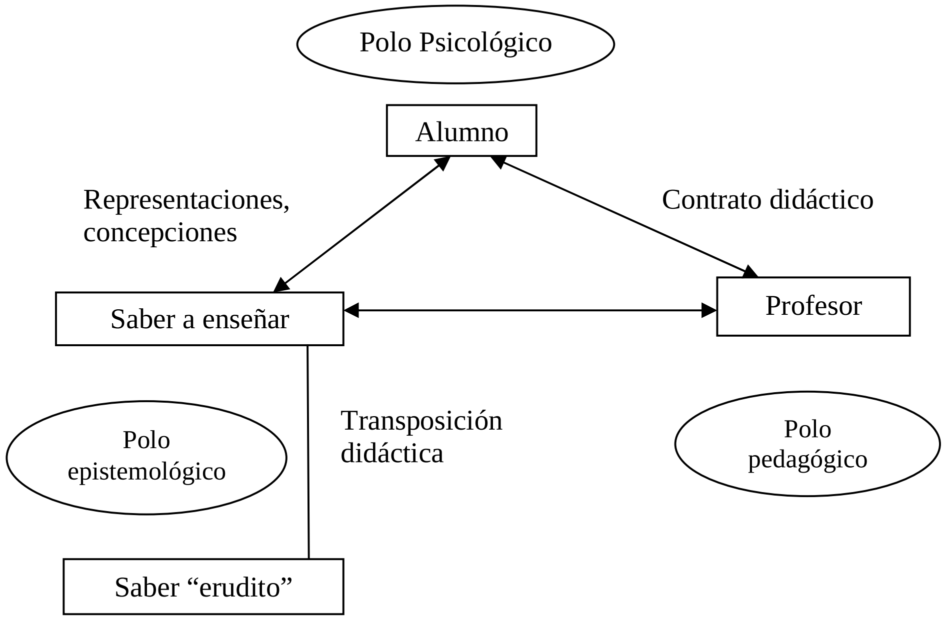
# Capítulo III. Diseño y Aplicación de la Secuencia Didáctica

En este capítulo vamos a mostrar la forma en que se diseñó la secuencia didáctica que se aplicó a los estudiantes. Como señalamos anteriormente, en el diseño de la secuencia didáctica se plantea incorporar, la metodología planteada anteriormente - La Ingeniería Didáctica-.

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989), surge en Francia, tiene un doble objetivo: uno, la *intervención crítica* en los sistemas didácticos (los saberes didácticos fundamentados científicamente acotan la acción); otro, la *prueba de la contingencia* (contraste de las propuestas teóricas elaboradas).

De esta forma, la ingeniería didáctica pretende controlar *a priori* la puesta en escena de proyectos de enseñanza. En una segunda fase, llamada análisis *a posteriori*, el análisis a priori se compara con la realización efectiva y se busca lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales está basado. Esta comparación se realiza distinguiendo tres dimensiones (cognitiva, epistémologica e didáctica) y, por supuesto, teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

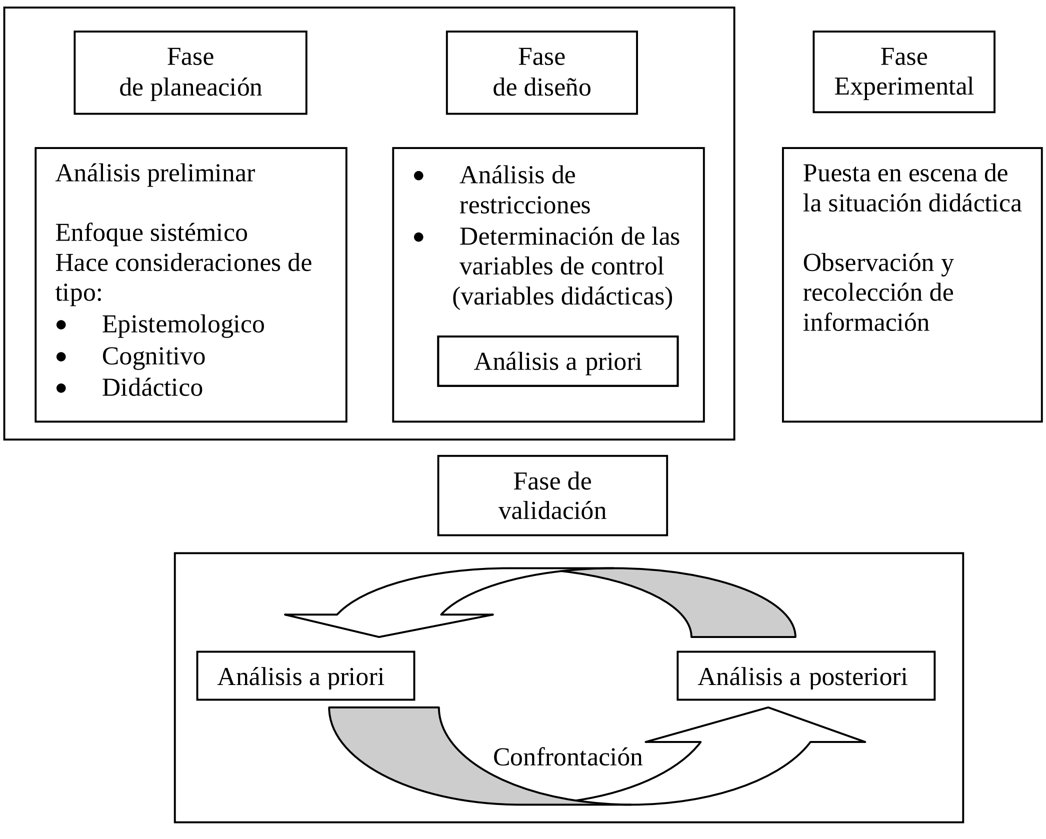
Esta metodología de investigación –Ingeniería Didáctica -, su sustento teórico proviene de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones de **PROFESOR, ALUMNO y SABER ENSEÑADO**.




Lezama y Farfan (2001) resumen esta metodología de la siguiente manera:

**Ingeniería Didáctica**

**Metodología de investigación e instrumento para la elaboración de productos para la enseñanza**



En específico, se necesita intervenir los sistemas didácticos para lograr un mayor aprendizaje (producto de la existencia de un orden), además de elaborar y contrastar teorías que expliquen los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Considero además, que la importancia de la ingeniería didáctica para el aprendizaje, pues implica que el profesor trabaja de acuerdo con los conocimientos científicos que se encuentran respecto a un tema, lo cual a su vez es fundamentado con la teoría, cuya área se restringe a un problema que debe resolver (el ingeniero). Ahora, para resolver estos problemas es que existen dos caminos: el de la investigación y el de la producción.

El diseño de situaciones didácticas, tiene la intención de que sea tratado con un orden específico, los temas y unidades especificas de los planes de estudio y el de los libros de texto. En el capitulo anterior, se mostro el temario de NMS y a continuación los temas de un texto analizado de Algebra, a mencionar *Álgebra con aplicaciones* de Elizabeth P. Phillips, Thomas Butts y Michael Shaughnessy (Phillips, Butts y Shaughnessy; 1988),

Capítulo 10 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS
10.1 FUNCIONES EXPONENCIALES
- Definición y gráficas de la función exponencial.
- Evaluación de funciones exponenciales.
- Crecimiento y decaimiento exponenciales.
- La base natural.

10.2 FUNCIONES LOGARITMICAS
- Definición de la función logaritmo.
- Gráfica de la función logaritmo.
- Evaluación de funciones logaritmo: logaritmos comunes y logaritmos naturales.
- Principios de los logaritmos.
- Crecimiento logarítmico.

10.3 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS
- Antilogaritmos.
- Otras ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

- Determinación de una función de crecimiento o decrecimiento.
- Resumen del capítulo.
- Ejercicios de repaso.

CAPITULO 11 SUCESIONES, SERIES Y LA FORMULA BINOMIAL

11.1 SUCESIONES Y SERIES

- Sucesiones.
- Sucesiones recurrentes.

11.2 SUCESIONES Y SERIES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS

- Sucesiones aritméticas.
- Sucesiones geométricas.
- Series aritméticas y series geométricas.
- Otras series (opcional).

11.3 FORMULA BINOMIAL

- Resumen del capítulo.
- Ejercicios de repaso.

Se observa que en el capítulo 10, se estudia a las funciones exponenciales y logarítmicas y en el capítulo 11; las sucesiones, series y la fórmula binomial. Es por ello que este tema de interés si se aborda en algunos libros de álgebra, pero que en la actualidad, debido a los nuevos diseños de temarios de estudio del NMS los han omitido y de nuestro interés (Series Numéricas) es uno de ellos, ya que este objeto matemático se enseñaba y se aprendía, no a grandes rasgos pero, al menos se trataba de dar sus definiciones y sus aplicaciones, en el aula de clases.

Actualmente, la enseñanza de las series numéricas es posterior al bachillerato, y por lo anterior se muestra, que no hay relación entre ellos (Temario-Libros de Texto), es por ello que se quiere hacer el diseño de una secuencia didáctica, en nuestra investigación, para contribuir en el aprendizaje de las series numéricas, en el nivel bachillerato, mediante la graficación de las funciones y con solo hacer operaciones aritméticas.

De acuerdo con las dimensiones descritas anteriormente, el diseño de la ingeniería didáctica, toma en cuenta, que el aprender series numéricas, de acuerdo a la historia y evolución, estas surgieron con solo el uso de aritmética y algebra, es por ello que en el diseño de la secuencia, se considera solamente operaciones aritméticas y algebraicas. Se hará uso de la visualización, donde los alumnos podrán hacer sus conjeturas con respecto a la similitud de las graficas de las series numéricas.

## 3.1 Descripción de la Ingeniería Didáctica en nuestra Investigación

### ANÁLISIS PRELIMINAR

Se considero las siguientes componentes para la investigación:

- En la componente epistemológica hay evidencia de que los matemáticos hindúes y árabes hicieron sus primeros descubrimientos de sucesiones que dieron origen a las series, quienes solamente usaron conceptos aritméticos, es por ello que hay necesidad de crear escenarios que hagan posible el desarrollo de la convergencia de series numéricas.

- En la componente cognitiva, al elaborar la Ingeniería Didáctica, basada en la visualización e intuición de las gráficas de funciones, los alumnos puedan describir el comportamiento gráfico y distingan las similitudes entre ellas, particularmente de $y = e^x, y = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$.

- La componente didáctica, como menciona Moreno (1999) muestra que los **textos** abordan normalmente el tema series en general y su convergencia desde un enfoque formalista, en el que enfatizan la algoritmia y le conceden poca importancia a la visualización. Los profesores repiten el esquema de los textos y aunque consideren importante la visualización, tienen limitaciones para implementarla en el aula, con respecto a que no se tiene computadoras o que el profesor no tiene una actualización docente. Es por ello que como hay ciertas dificultades en la enseñanza, porque ya no está involucrado en el temario de matemáticas, procuraremos que para el diseño de la secuencia se tenga un ambiente que permita la acción, enfatice la visualización y la asignación de significados.

Debido a que en nuestros cursos de nivel bachillerato, solo se define las funciones, realizando la grafica de la función exponencial, esto nos conlleva a que esta se la única representación gráficas. No se explica que esta función exponencial se puede elaborar su desarrollo mediante la serie de Taylor, aunque se tendría que enseñar, cuando el alumno ya haya cursado cálculo.

**DISEÑO DE LA ACTIVIDAD ESCOLAR**

La ingeniería didáctica que aplicamos para nuestra investigación fue diseñada para alumnos de nivel medio superior, específicamente del Cecyt Carlos Vallejo Márquez. En la primera actividad se trabajará con la dos funciones $y = e^x, y = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$a fin de que por medio de la visualización de gráficas puedan dar ciertas características comunes, harán la construcción del último término del desarrollo en funciones polinomiales de la serie numérica de la función $y = e^x$.

En la segunda actividad trabajará con las mismas funciones, donde ellos dirán si existen o no similitudes entre ellas, de acuerdo a los puntos que se les proporcione. Por lo anterior, decidimos que nuestra Ingeniería Didáctica estuviera constituida *por 2 actividades*, donde sobresalen las dos funciones importantes, mencionadas anteriormente.

En la *actividad numérica*, elegimos a tres grupos de estudiantes del bachillerato. La edad usual de los alumnos oscila entre 15-18 años de edad. La única condición que pusimos para su elección, consistió en restringir su conocimiento del cálculo como disciplina escolar de modo que no hubiesen tenido ningún contacto previo con el Cálculo Diferencial e Integral.

La puesta en escena, contó con 2 fases, la fase de preparación constó solamente de una plática del manejo del software graficador Graphmatica para el ambiente Windows. La siguiente fase, desarrollo de la experiencia, estuvo dedicada al desarrollo de los diseños de la ingeniería. Se tomaron 7 alumnos de tercer semestre, donde ellos actualmente no han cursado la materia de Cálculo, se formaron 3 equipos, un equipo de 3 personas y dos equipos de 2 personas. En esta fase a los alumnos se ***los dejó que*** contestaran libremente y en grupo hicieron sus propias conclusiones. El profesor que aplicó la ingeniería no intervino dando indicaciones ni sugerencias de ningún tipo por lo que las respuestas representan exclusivamente las opiniones de los alumnos.

En la *actividad numérica*, elegimos a 2 personas, aquí no nos importaron sus estudios actuales, su edad al momento de la investigación era de 17 años. Ellos tendrán que decir valiéndose de su Calculadora Científica, qué pasa con la igualdad de las funciones por separado: $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ ; tampoco hubo alguna intervención del profesor y cada equipo trabajó con un instrumento e hicieron sus conclusiones individualmente.

La hipótesis de nuestra investigación, como se describió anteriormente, en el discurso escolar las series numéricas, ha perdido el contexto que le dio origen de este objeto, sin embargo, trataremos que con el diseño de esta secuencia didáctica, se valore este origen, es por ello que por medio de la visualización y con la realización de operaciones aritméticas, puedan concluir que la convergencia de la función exponencial.

**DISEÑO**

A continuación, mostraremos la secuencia aplicada a los alumnos y enunciamos el propósito de cada pregunta que conformó la actividad de la ingeniería didáctica. Posteriormente, daremos a conocer el análisis de los datos que arrojó la aplicación de la secuencia.

PRIMERA ETAPA (GRÁFICA)

**A continuación aparecen unas funciones que deberás graficar por parejas de la siguiente manera:**

**Grafica** $y = e^x$ **con la función 1.**

**Grafica** $y = e^x$ **con la función 2.**

**De la misma manera con todas las funciones hasta la 6.**

$$y = 1 + x$$

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}$$

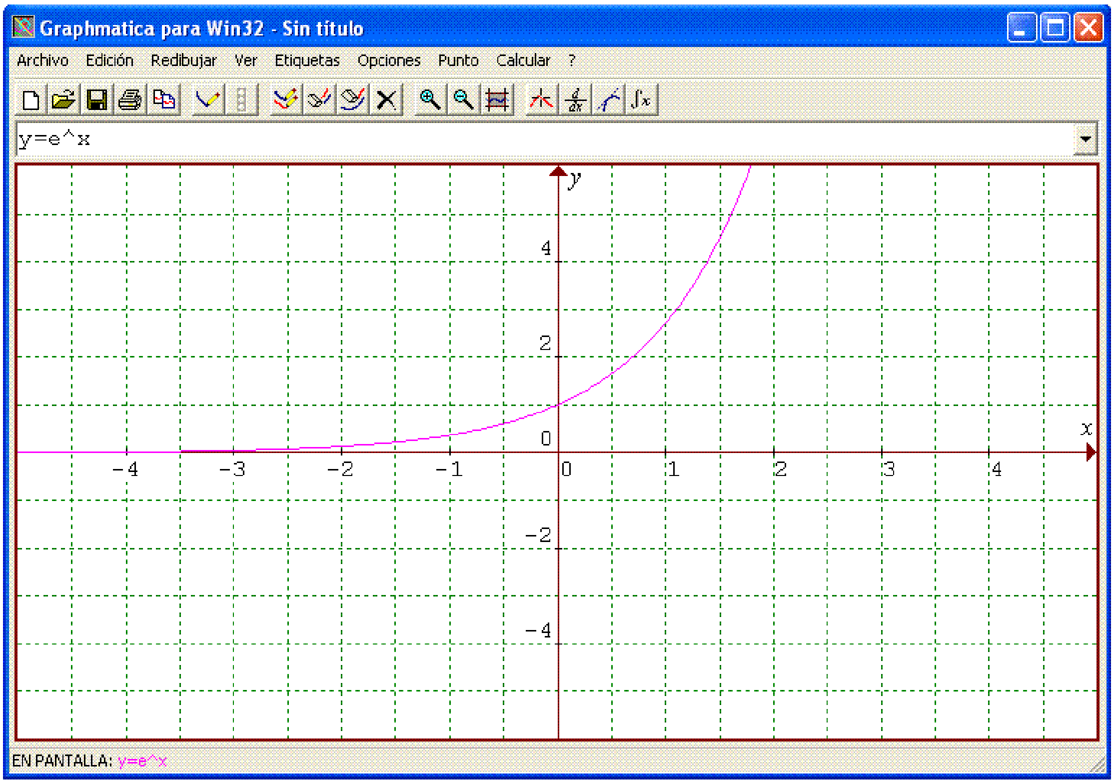
$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

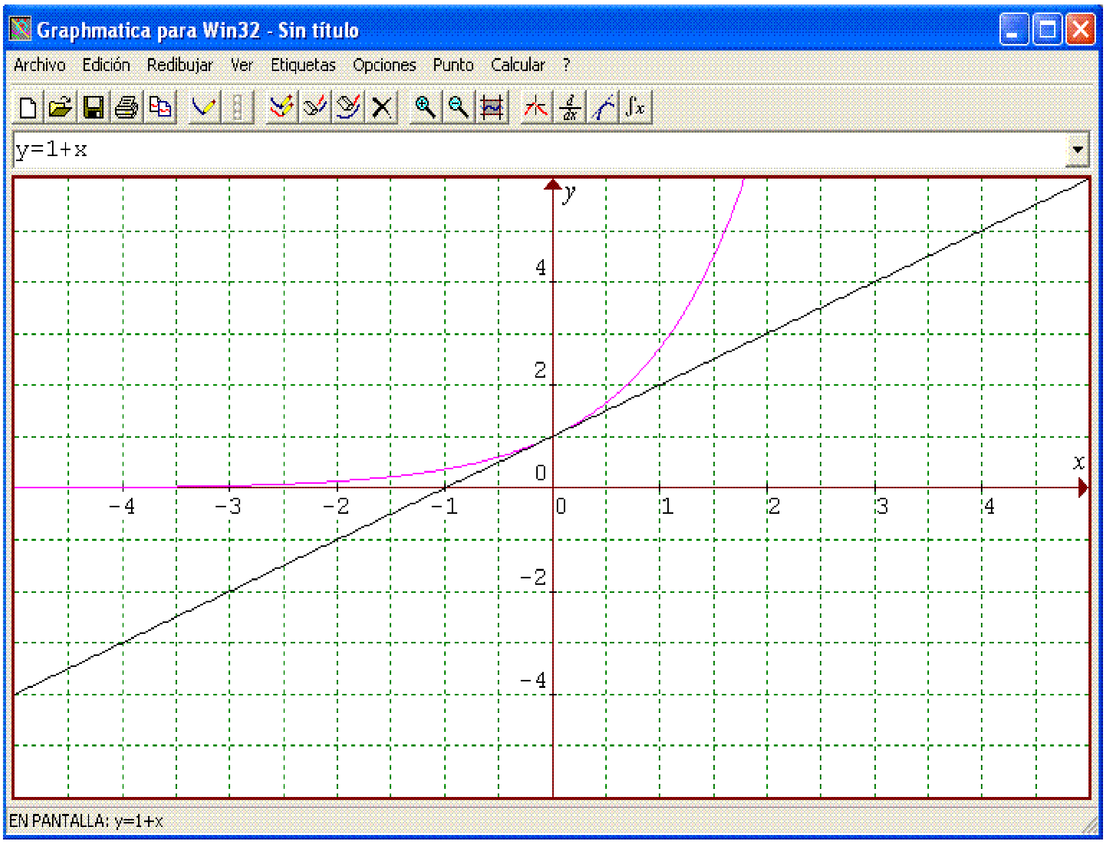
$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

**Por ejemplo, en la primera gráfica vas a comparar la gráfica de $e^x$ que se ve a continuación:**



Graphmatica para Win32 - Sin título
Archivo Edición Redibujar Ver Etiquetas Opciones Punto Calcular ?
y=e^x
y
x
4
2
0
-2
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
EN PANTALLA: y=e^x

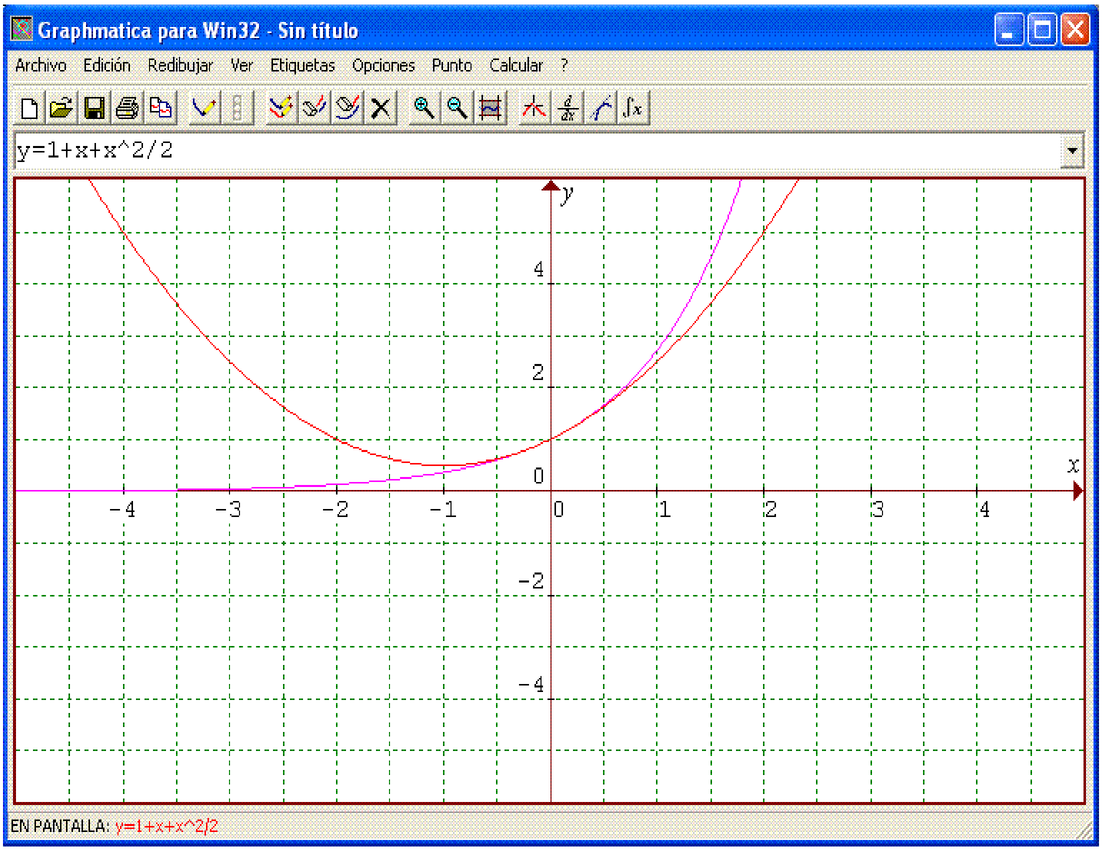
**con la gráfica de la función lineal y = 1 + x lo cual se verá como**



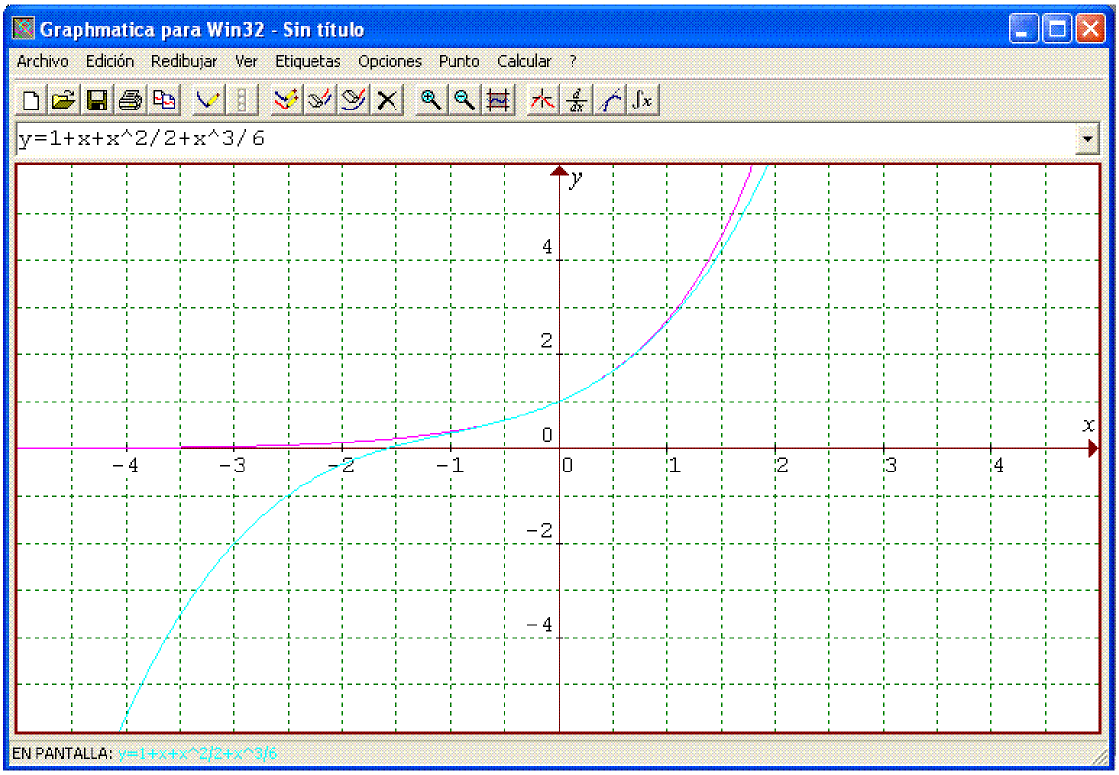

**Aprovecha para observar las gráficas y su comportamiento.**

**En la segunda gráfica se compara $e^x$ y** $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}$**. La gráfica de la cuadrática es una parábola en rojo.**

**(En graphmatica se escribe y = 1 + x + x^2 / 2, es preferible hacer la operación 1*2)**




**Algo semejante con la tercera gráfica, aparecerán $e^x$ y $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. (En graphmatica se escribe y = 1 + x + x^2 / 2 + x^3 /6, otra vez es mejor escribir 6 en lugar de 1*2*3, en las demás funciones calcula el producto y sustitúyelo para graficar, es decir 1*2*3*4 = 24, 1*2*3*4*5 = 120, etc.)**




**Sigue observando lo que sucede con las gráficas de las funciones.**

**Continúa graficando las funciones de esta misma forma en parejas.**

**Responde:**

1. **¿Se parecen las gráficas de $e^x$ y** $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}$ **o son diferentes? ¿Qué tanto?**

2. **¿Se parecen las gráficas de $e^x$ y** $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ **o son diferentes? ¿Qué tanto?**

3. **¿Se parecen las gráficas de $e^x$ y** $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ **o son diferentes? ¿Qué tanto?**

**4. ¿Se parecen las gráficas de $e^x$ y $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ o son diferentes? ¿Qué tanto?**

**5. ¿Qué crees que pase con las gráficas si sigues aumentando la potencia de x?**

**6. Si se necesita encontrar la función 7, ¿qué término agregas al último? ¿Cómo queda la función?**

**7. Si se necesita encontrar la función 8, ¿qué término agregas al último? ¿Cómo queda la función?**

**8. Si se te pide el último término de la función 20, ¿Cómo lo escribes?**

**9. Si se te pide una fórmula para el último término de cualquier función, ¿Cómo la escribes?**

**10. Dibuja las gráficas de $e^x$ y la función 10, ¿cómo son las gráficas? ¿Se parecen?¿Qué tanto?**

**11. Si se te pide que inventes un nombre para lo que observaste con las gráficas, ¿Qué nombre le inventarías?**

SEGUNDA ETAPA (NUMÉRICA)

## Si tenemos la siguiente igualdad:

$$e^{x} = 1$$

$$e^{x} = 1 + x$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2}$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{2 \cdot 3}$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{2 \cdot 3} + \frac{x^{4}}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{2 \cdot 3} + \frac{x^{4}}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^{5}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{2 \cdot 3} + \frac{x^{4}}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^{5}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^{6}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{2 \cdot 3} + \frac{x^{4}}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^{5}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^{6}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^{7}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

## Evalúa para ambos lados, los siguientes valores de x con la ayuda de una calculadora científica:

**x= ½**

**x=3/4**

**x=5**

**x=0**

**x=-1**

**x=-5**

1. **¿Qué puedes decir acerca de los valores que obtuviste a la izquierda y a la derecha de todas las igualdades para el valor x= ½?**
2. **Algo semejante para x= 3/4, …**
3. **¿Observas alguna relación entre los valores que obtienes y el número de sumandos que tiene la igualdad en el lado derecho?**
4. **¿Pasará algo si aumentas más sumandos a la derecha? ¿Qué crees que pase?**
5. **Para x=1/2 calcula la igualdad final pero con otros tres términos. ¿Coincide con lo que dijiste en 4? ¿Por qué si/no?**

El diseño de la actividad, se tomo como referencia, la actividad que elaboró Pérez (1991), surge la posibilidad de diseñar un escenario diferente para que los alumnos del nivel medio superior que no han cursado Cálculo Diferencial e Integral desarrollen sus habilidades para la adquisición de la noción de convergencia.

Para la actividad gráfica y numérica el diseño de la secuencia tiene ciertas modificaciones con respecto a la tesis mencionada. En la secuencia gráfica a los estudiantes se les mostrará algunas gráficas que se hicieron en el paquete Graphmatica y posteriormente ellos tendrán que realizar algunas gráficas utilizando ese mismo programa, en la tesis de Pérez (1991) se les iba cuestionando de modo que eran conducidos a la respuesta que se buscaba, en contrasentido nuestra tesis contiene un cuestionario que los estudiantes responderán sin monitoreo y la selección de los alumnos que es una clave muy importante en nuestra tesis son alumnos que no tienen nociones del Calculo diferencial e integral.

En la actividad numérica Pérez (1991) consideró tres funciones con su respectiva serie de Taylor para ser evaluados con solo tres valores, y después de sus conclusiones ellos usaron la computadora para modificar sus respuestas. En nuestra tesis solamente consideramos la función exponencial $e^x$ con su respectiva serie de Taylor, se le agregan más valores para evaluar, se diseñó un cuestionario para así poder dar conclusiones pertinentes.

En la primera parte del diseño de la ingeniería didáctica se tomó en cuenta las gráficas de la función exponencial $e^x$ con los términos de su serie convergente, donde se espera que puedan escribir un último término de la serie y donde desde un punto visual tendrán que abordar el comportamiento de varias parejas de gráficas y decidir si existe una semejanza creciente entre ellas. En la segunda parte se toma la función exponencial con varios términos de su serie para que al evaluar los puntos que se utilizarán puedan predecir la igualdad numérica entre ellas.

## ANÁLISIS A PRIORI

PRIMERA ETAPA (GRÁFICA)

PREGUNTA 1, 2, 3 Y 4. En estas preguntas suponemos que va a haber ciertas dificultades en que vean las similitudes entre las gráficas, sabemos que por no tener buenos conocimientos de gráfica de funciones, ellos tendrán problemas en decir en que intervalos hay similitud entre las gráficas, pero consideramos suficiente que digan que hay una intersección en un punto (que se ve claramente), es decir, que a partir de este punto continúan juntas las gráficas conforme se aumenta los términos de la serie.

PREGUNTA 5. Ellos tendrán que graficar, solamente se requiere que introduzcan adecuadamente los datos, para ello tendrán que hacer uso del paquete Graphmatica que es muy accesible. Tendrán que ver si hay similitudes o no, entre las gráficas de $y = e^x, y = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$.

PREGUNTA 6-9. Se espera que ellos tengan **buena intuición** para poder explicitar más términos de la serie numérica, por no tener nociones de Cálculo Diferencial e Integral se espera que ellos puedan desarrollar sin ninguna dificultad observando y analizando términos de las anteriores sumas de términos de la serie numérica.

PREGUNTA 10. Ellos no tendrán dificultad en dibujar las gráficas en el paquete Graphmatica por ser accesible, pero al ver similitudes pueden decir que una gráfica tiene forma de parábola y la otra no.

PREGUNTA 11. Puede variar su respuesta, pero dificultad no tendrán en poner el último término de la serie numérica.

SEGUNDA ACTIVIDAD (NUMÉRICA)
PREGUNTA 1-5. No tendrán dificultades en sustituir los valores en la función exponencial y su serie numérica correspondiente. Usando su calculadora correctamente y **teniendo un poco de paciencia** ya que se tiene que usar todos los decimales para así tener la igualdad o no entre las dos funciones.

## FASE EXPERIMENTAL O DE APLICACIÓN

En esta parte se considera la puesta en escena de la secuencia didáctica, posteriormente se hará un análisis a posteriori, basado en los datos obtenidos tanto de sus reportes y la grabación de video.
La secuencia se aplicó a alumnos de tercer semestre del Cecyt Carlos Vallejo Márquez del Instituto Politécnico Nacional y estuvo integrado por 7 alumnos para la actividad gráfica, donde se formaron 3 equipos, 2 equipos con 2 alumnos y un equipo de 3 alumnos y 2 alumnos para la actividad numérica, donde la realizaron individualemnte.

Para las dos actividades se tiene sus reportes y una grabación de video de solo un equipo de la actividad gráfica. El motivo fue que se tuvieron dos alumnos, que nos ayudaron a grabar a los demás equipos, pero se tuvo un percance, de que no se pudo grabar los equipos faltantes.

## 3.2 Aplicación de la Actividad

PRIMERA ETAPA (GRÁFICA):

Los estudiantes leen y aceptan resolver la secuencia, ésta proporciona las graficas de la función exponencial $e^x$ con los términos de su serie convergente en un software graficador (Graphmatica) para que mencionen sus características y similitudes donde se hará uso de la visualización, posteriormente tendrán que escribir los siguientes términos de esta serie numérica. Se tiene como fuente de registro un reporte hecho por los miembros del equipo y se cuenta con la transcripción y digitalización de un video, el cual contiene la grabación de un equipo.

En esta etapa, el escenario en donde se desarrolló fue en un salón de cómputo del Cecyt Carlos Vallejo Marquéz. Se tomaron 3 computadoras, ya que se tuvo que hacer la instalación del paquete Graphmatica, se desarrolló en una sola sesión, duró aproximadamente 1 hora 45 minutos. Se formaron tres equipos, dos equipos de dos personas y un equipo de 3 personas, todos los alumnos eran de tercer semestre de bachillerato, fueron mis alumnos de primer y tercer semestre que eran muy responsables en el aula de clases, cada equipo tenía un observador.

Se observó que trabajaban activamente entre ellos, donde cada equipo entregó su secuencia desarrollada, hubo preguntas con respecto al software graficador, pero de la secuencia no hubo ninguna. Se tienen sus gráficas elaboradas y un video filmado de cada equipo.

SEGUNDA ETAPA (NUMÉRICA):

A los alumnos se les proporcionó la actividad, los alumnos analizaron dos funciones, una con la función exponencial y otra con los términos de la serie numérica, tienen que evaluar ciertos valores, ellos debían encontrar similitudes entre las funciones, usando su Calculadora Científica para posteriormente dar sus conclusiones. En el desarrollo de esta secuencia se tiene el respectivo reporte de cada equipo.

Esta etapa se desarrolló en una sola sesión, fueron 2 alumnos que estaban realizando su servicio social en la academia de matemáticas, que estaban cursando quinto semestre del bachillerato. Estos alumnos trabajaron con su calculadora científica, trabajaron individualmente, se tomaron aproximadamente una hora 45 minutos en terminar su actividad. No hubo monitoreo, y sus dudas fueron con respecto al número de decimales que tenían que usar. Fueron muy entusiastas en resolver su actividad. Cada uno entregó su reporte.

# Capítulo IV. Análisis de Resultados

En este capítulo vamos a realizar el análisis a posteriori, considerando los reportes de cada equipo, las grabaciones de video realizadas por ellos y se hace una tabla comparativa de sus respuestas. En lo siguiente se describen las respuestas de los estudiantes a las dos secuencias que se diseñaron. Se tiene documentación de todo el proceso, solución de la secuencia. Se hace hincapié de algunas respuestas que son identificadas como comunes.

En la primera sesión, donde se realizó la actividad gráfica, los alumnos de cada equipo usaron correctamente el software graficador, donde se realizaron las gráficas de las funciones que se les pedía. Posteriormente cada equipo hizo sus respuestas pertinentes a cada pregunta. Ellos se detuvieron en las últimas preguntas donde estas son las hipótesis de nuestro trabajo.

En la segunda sesión, se realizó la actividad numérica, los dos alumnos hicieron uso de su calculadora científica para poder hacer sus comparaciones de las funciones con distintos valores que se encuentran dentro y fuera del rango establecido de cada función.

La implementación de la ingeniería didáctica consistió en que, los alumnos pudieran abordar el concepto de series, muy diferente a como se ve en el discurso escolar e implementado en los libros de texto. Se trata de que por medio del uso de paqueteria graficador y visual, ellos puedan hacer la observación de que ambas funciones son iguales, que ya en términos matemáticos, decimos que la función exponencial converge a una suma de funciones polinomiales, es decir, el desarrollo de la función exponencial en la serie de Taylor.

## 4.1 Análisis de Resultados de la Actividad Gráfica.

Como se mencionó anteriormente, esta secuencia se aplicó a siete alumnos de nivel medio superior, se organizaron de la siguiente manera: 2 equipos de 2 personas y un equipo de 3 personas. En total, se entregaron 3 secuencias.

A continuación analizaremos la respuesta de las primeras cuatro preguntas de todos los equipos:

1. ¿Se parecen las gráficas de $y = e^x$ y $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ o son diferentes? ¿Qué tanto?
2. ¿Se parecen las gráficas de $y = e^x$ y $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$ o son diferentes? ¿Qué tanto?
3. ¿Se parecen las gráficas de $y = e^x$ y $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ o son diferentes? ¿Qué tanto?
4. ¿Se parecen las gráficas de $y = e^x$ y $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ o son diferentes? ¿Qué tanto?

| Equipo/ Pregunta | Equipo 1 | Equipo 2 | Equipo 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | Son similares, la función exponencial tiene forma de una parábola y la suma de los términos es una parábola bien formada. | Solo coinciden en el punto (0,1). | Si, la primera ($y = e^x$) está más abierta que la segunda ( $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$). |
| 2 | Ya no se parecen, pues la función de la suma de los términos pasa de lo positivo a lo negativo. | Solo coinciden en una parte de la curva. | Diferente forma, pero pasan por el mismo punto (0,1). |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | Son parecidas. | No, dado a que una es recta y la otra es una parábola y tienen dos puntos de intersección. | Abren diferente, se parece a la segunda y pasa por el mismo punto que las otras. |
| 4 | Son parecidas. | Un poco, solo coinciden en la curva, se intersectan en x=0.0988 y=1.1030 | Semejante a la 3 y 4 pero solo se recorre uno. |

*Todos los equipos coincidieron que las graficas son de tipo parábola, se tiene que los equipos 2 y 3 vieron el punto común (0,1) que es la intersección de las dos gráficas, donde se ve que a partir de ese punto coinciden las gráficas.*

5. ¿Qué crees que pase con las gráficas si sigues aumentando la potencia de x?

| Equipo/ Pregunta | Equipo 1 | Equipo 2 | Equipo 3 |
|---|---|---|---|
| 5 | No proporcionó respuesta. | Mientras más aumenta su valor, la parábola se cierra, si ponemos un número par se forma una parábola y si ponemos un número non se va hacia abajo. | Se van separando de acuerdo al aumento. |

*En general solamente el equipo 2 acertó un poco a la respuesta, los demás no pudieron visualizar acertadamente para poder concluir su comportamiento.*

En las siguientes tablas se muestran las respuestas que cada equipo proporcionó a las preguntas 6, 7, 8 y 9.

6. Si se necesita encontrar la función 7, ¿qué término agregas al último? ¿cómo queda la función?

7. Si se necesita encontrar la función 8, ¿qué término agregas al último? ¿cómo queda la función?

8. Si se te pide el último término de la función 20, ¿cómo lo escribes?

9. Si se te pide una fórmula para el último término de cualquier función, ¿cómo la escribes?

| Equipo/ Pregunta | Equipo 1 | Equipo 2 | Equipo 3 |
|---|---|---|---|
| 6 | $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$ | Igual | Igual |
| 7 | $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ | Igual | Igual |
| 8 | $y = 1 + \frac{x^{20}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}$ | Igual | Igual |
| 9 | $y = 1 + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n}$ | $y = \frac{x^n}{1 \cdot n}$ | $y = 1 + \frac{x^n}{n \cdots\cdots}$ |

*Todos los equipos, contestaron similarmente las preguntas 6,7 y 8, aunque se ve que ellos no tuvieron dificultad en hacer el desarrollo, la pregunta 9 se tiene variedad, pero todos quisieron concluir de la misma manera. En el equipo 1 notamos que ellos visualizaron siempre el uno, es por ello que en el último término le ponen este valor y ellos si escriben muy bien este término. El equipo 2, el numerador lo escriben bien, pero el denominador que tiene que ser la multiplicación de números naturales, ellos solamente hacen el producto de 1 y n, en otras palabras* $(1 \cdot n)$. *El equipo 3 también visualizaron el 1, pero en* *la fracción, el numerador esta correcto y el denominador ponen puntos suspensivos después de n (n....).*

A continuación se muestran las respuestas que cada equipo proporcionó a las preguntas 10 y 11.

10. Dibuja las gráficas de $e^x$ y la función 10 ¿cómo son las gráficas? ¿se parecen? ¿qué tanto?

| Equipo/ Pregunta | Equipo 1 | Equipo 2 | Equipo 3 |
|---|---|---|---|
| 10 | No la respondió | No mucho, solo coinciden en unos puntos. | Atraviesan el mismo punto, aumenta la abertura. |

*A lo mejor ellos quieren que las dos funciones tengan la misma similitud, pero podían haber dicho que a partir de cierto punto se tienen la misma gráfica.*

11. Si se te pide que inventes un nombre para lo que observaste con las gráfica, ¿qué nombre te inventarías?

| Equipo/ Pregunta | Equipo 1 | Equipo 2 | Equipo 3 |
|---|---|---|---|
| 11 | Semejanza de gráficas de una función dada. | Funciones con términos a cierta potencia. | Curvas que pasan sobre el mismo eje. |

*Los alumnos contestaron de acuerdo a sus observaciones sin ser influidos en sus respuestas por el profesor.*

## 4.2 Análisis de los Resultados de la Actividad Numérica.

En la segunda sesión, se realizó la actividad numérica, los dos alumnos que participaron en esta etapa hicieron uso de su calculadora científica para poder hacer sus comparaciones de las funciones con distintos valores que se encuentran dentro y fuera del rango establecido de cada función.

A continuación se presenta la respuesta de cada participante a esta actividad.

1. ¿Qué puedes decir acerca de los valores que obtuviste a la izquierda y a la derecha de todas las igualdades para el valor x= ½?

   ALUMNO 1: Se varían los valores por los decimales.

   ALUMNO 2: Varían por decimales.

   ALUMNO 3: Que conforme se aplican más números el valor es igual.

   *Los tres coinciden en que hay una similitud entre las dos funciones, que solamente varían por los últimos dígitos de la cantidad.*

2. Algo semejante para x=3/4,….

   ALUMNO 1: Que varía pero por el lado izquierdo que es $e^x = 5.02$ y los de la derecha nunca se acercaron y varía mucho.

   ALUMNO 2: Varía bastante ya que $e^x = 5.02$ y lo demás va de 1.75 a 2.11699

   ALUMNO 3: Es lo mismo pero en orden creciente.

   *Tienen razón, se nota que nunca tienden al mismo valor de la izquierda, esto quiere decir que los valores tienen una gran variación.*

3. ¿Observas alguna relación entre los valores que obtienes y el número de sumandos que tiene la igualdad en el lado derecho?

   ALUMNO 1: En algunas ocasiones si porque se aproximaba mucho.

   ALUMNO 2: En ocasiones.

   ALUMNO 3: Si, como lo mencione anteriormente son valores semejantes en un orden.

   *Se tiene que si le vamos agregando sumandos se puede llegar al valor exacto pero no en todos los valores se cumplía esta condición.*

4. ¿Pasará algo si aumentas más sumandos a la derecha? ¿Qué crees que pase?

   ALUMNO 1: Pues si, cada vez se va aproximando a la cantidad del valor de la izquierda hasta llegar al punto de exactitud.

   ALUMNO 2: Si, ya que se va aproximando al resultado.

   ALUMNO 3: Aumenta el valor resultante.

   *Ellos afirman que entre más términos se le agrega a la serie las dos funciones son iguales.*

5. Para x=1/2 calcula la igualdad final pero con otros tres términos. ¿Coincide con lo que dijiste en 4? ¿Por qué si/no?

ALUMNO 1: Si, porque resultado llega al punto exacto.
ALUMNO 2: Si, ya que entre más términos se aumente el resultado es un 99.99% igual.
ALUMNO 3: No, porque disminuye.

*Aquí ya se observa que los valores de la función y los valores de las aproximaciones son muy semejantes, es decir que las dos funciones son iguales, pero claro que los estudiantes no pueden concluir que la convergencia de la serie numérica es* $e^x$.

## 4.3 Resultados de la Actividad Gráfica

Equipo 1: EVA Y JAQUELINE

1. Se podria decir que son similares, ya que la función $e^x$ se puede condiderar una parte de una parabola, y la de $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ es una parabola pero ya se observa mejor.

2. Digamos que ya no se parecen por que ahora $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ tiene forma de una curvatura que pasa de lo positivo a lo negativo Dando forma a dos curvas.

3. Son parecidos ya que e^ es una curvatura pequeña, como parte de una parabola y la otra si es una parabola completa.

4. Son parecidas, por que tambien forma una parabola, y como ya se dyo e^ solo es una parte.

Eva y Jaqueline

4. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e^x}$ y $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ o son diferentes? ¿qué tanto?
5. ¿Qué crees que pase con las gráficas si sigues aumentando la potencia de x?
6. Si se necesita encontrar la función 7, ¿qué término agregas al último? ¿cómo queda la función?
7. Si se necesita encontrar la función 8, ¿qué término agregas al último? ¿cómo queda la función?
8. Si se te pide el último término de la función 20, ¿cómo lo escribes?
9. Si se te pide una fórmula para el último término de cualquier función, ¿cómo la escribes?
10. Dibuja las gráficas de $\mathbf{e^x}$ y la función 10, ¿cómo son las gráficas?¿se parecen?¿qué tanto?
11. Si se te pide que inventes un nombre para lo que observaste con las gráficas, ¿qué nombre te inventarías?

6) $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 6}$

7) $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \frac{x^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 6\cdot 7\cdot 8}$

8) $y = 1 + \frac{x^{20}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 18\cdot 20}$

9) $y = 1 + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (n)}$

11) Semejanza de graficas de una funcion dada.

EQUIPO 2: FERNANDO Y LIDIA

1. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2}$ o son diferentes? ¿qué tanto? solo coinciden en el punto (0,1)
2. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ o son diferentes? ¿qué tanto? solo coinciden en una parte de la curva
3. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ o son diferentes? ¿qué tanto?

no, dado a que una es una recta y otra es una parabola, y tienen dos puntos de interseccion

Fernando y Lidia.

un poco, solo coinciden en la curva, se intersecta en $x = 0.0988$ y en $y = 1.1036$ 6

4. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$ o son

diferentes? ¿qué tanto?

5. ¿Qué crees que pase con las gráficas si sigues aumentando la potencia de x?
6. Si se necesita encontrar la función 7, ¿qué término agregas al último? ¿cómo queda la función?
7. Si se necesita encontrar la función 8, ¿qué término agregas al último? ¿cómo queda la función?
8. Si se te pide el último término de la función 20, ¿cómo lo escribes?
9. Si se te pide una fórmula para el último término de cualquier función, ¿cómo la escribes?
10. Dibuja las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y la función 10, ¿cómo son las gráficas? ¿se parecen? ¿qué tanto?
11. Si se te pide que inventes un nombre para lo que observaste con las gráficas, ¿qué nombre te inventarías?

5- Mientras más aumenta su valor, la parabola se cierra, si ponemos un num. par se forma una parabola y si ponemos un numero non se va hacia abajo.

6- $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$

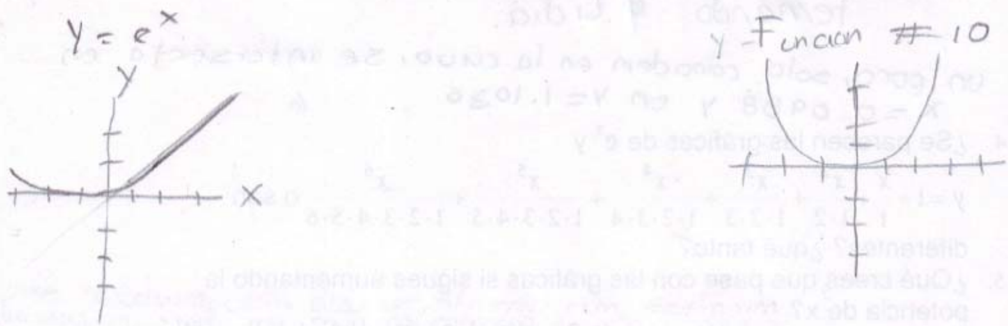
7- $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \frac{x^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$

8 = $\frac{x^{20}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}$

9 = $\frac{x^n}{1\cdot n}$

10 =

6




No mucho, solo, coinciden en algunos puntos

11_ Funciones con terminos a cierta potencia.

EQUIPO 3: JANETTE, FERNANDO Y VICTOR JAVIER

1. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2}$ o son diferentes? si
¿qué tanto? la primera esta mas abierta que la segunda

2. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ o son diferentes? ¿qué tanto? diferente forma pero pasa por el mismo punto (0,1)

3. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e}^x$ y $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ o son diferentes? ¿qué tanto?

Abren diferente se parece a la segunda y pasa por el mismo punto que las otras 3

Janette, Fernando y Victor Javer

4. ¿Se parecen las gráficas de $\mathbf{e^x}$ y semejante a la 3 y 4 pero solo se recorre

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

o son uno.

diferentes? ¿qué tanto?

5. ¿Qué crees que pase con las gráficas si sigues aumentando la potencia de x? se van separando de acuerdo al aumento
6. Si se necesita encontrar la función 7, ¿qué término agregas al último? ¿cómo queda la función? $+\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$
7. Si se necesita encontrar la función 8, ¿qué término agregas al último? ¿cómo queda la función? $+\frac{x^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$
8. Si se te pide el último término de la función 20, ¿cómo lo escribes?
9. Si se te pide una fórmula para el último término de cualquier función, ¿cómo la escribes?
10. Dibuja las gráficas de $\mathbf{e^x}$ y la función 10, ¿cómo son las gráficas?¿se parecen?¿qué tanto?
11. Si se te pide que inventes un nombre para lo que observaste con las gráficas, ¿qué nombre te inventarías?

8º $\frac{x^{20}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}$

9º $\frac{x^n}{n\ldots}$

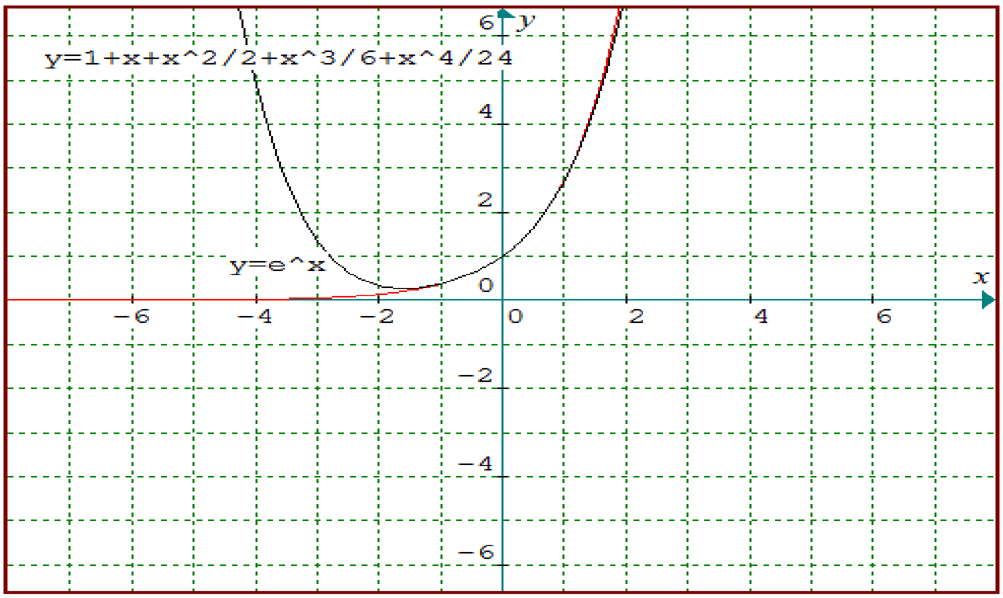
10º Atraviesan el mismo punto, aumenta la abertura

11º Curvas que pasan sobre el mismo eje.

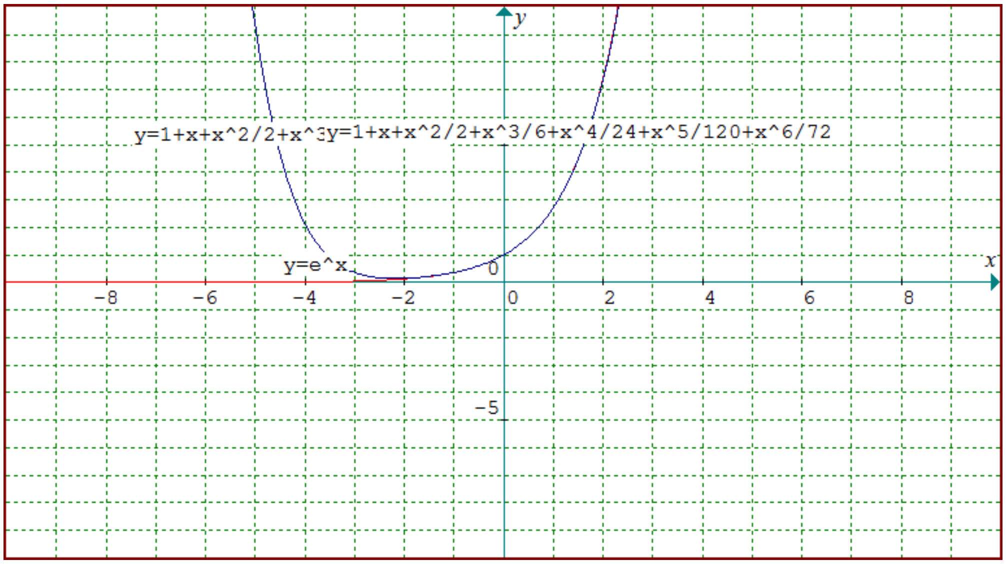
ANALISIS A POSTERIORI

Basándonos en los datos recogidos de la fase experimental, notamos que las soluciones de los tres equipos en algunas son similares, analizaremos sus respuestas.

Respuestas de las preguntas 1 – 4, las gráficas de las primeras dos preguntas están dibujadas en la secuencia, la gráfica de la tercera pregunta, que se muestra a continuación todos los equipos la elaboraron y las respuestas que ellos dan coinciden en que las gráficas no tienen el mismo recorrido, pero si tienen un punto común de intersección, el punto (0,1).




La gráfica de la cuarta pregunta que elaboraron los equipos se muestra a continuación, dos equipos, el equipo de Eva - Jaqueline y Fernando - Lidia responden de la misma forma en que las dos gráficas coinciden en una parte de la gráfica. Con respecto al equipo de Janette solamente indican que coinciden en el punto (0,1).




Respuesta 5, solo dos equipos contestaron la pregunta y uno de los equipos dan en particular la respuesta del comportamiento de la grafica de la suma de términos después de la función 6, mas no que se van pareciendo las dos gráficas.

Repuestas 6 - 8, los tres equipos pueden escribir correctamente como se había dicho anteriormente sin dificultad todos los términos de la función que se les pide.

Respuesta 9, los tres equipos son capaces de construir el último de la serie, que es nuestra hipótesis de trabajo.

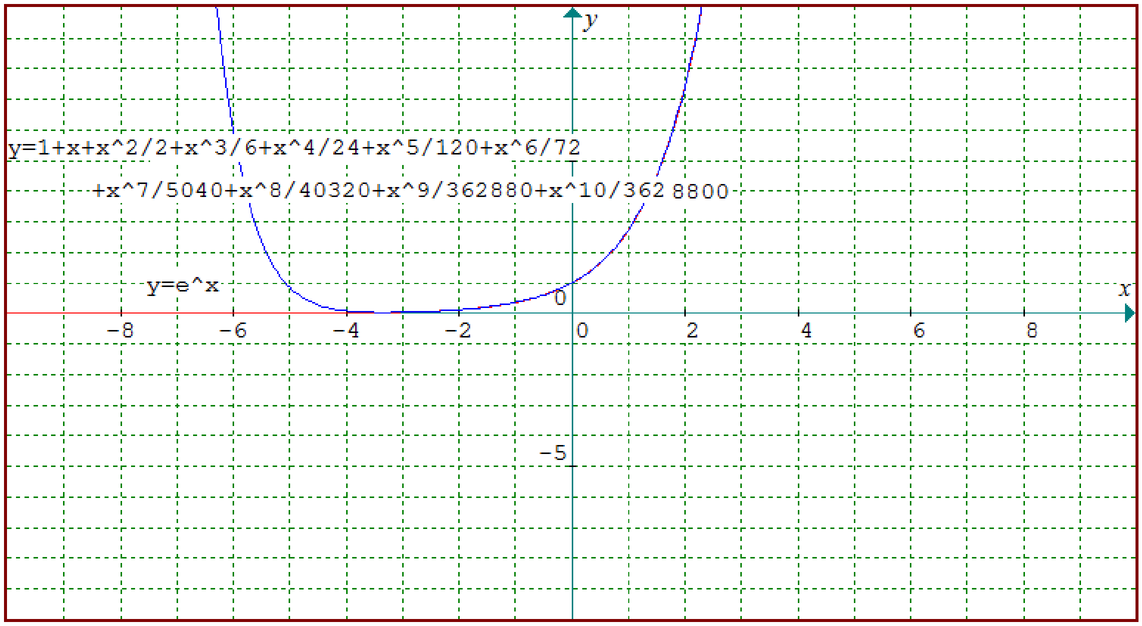
EQUIPO 1: $y = 1 + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n}$

EQUIPO 2: $y = \frac{x^n}{\cdots\cdots n}$

EQUIPO 3: $y = \frac{x^n}{1 \cdot n}$

Viendo las respuestas de ellos, como se dijo anteriormente no pudieron usar las notaciones de sumatoria y de factorial, pero concluyen de una forma que coincide con lo que supusimos que lo harían por su falta de conocimiento de cálculo.

Respuesta 10 Solamente dos equipos la respondieron, como mencionamos anteriormente ven el comportamiento de la grafica de la función, pero no si hay similitud entre ellas.




Respuesta 11. El nombre que le dieron fue de distinta manera, funciones con términos a cierta potencia, curvas que pasan sobre el mismo eje o semejanza de gráficas de una función dada. El último equipo pudo concluir que cuando había que comparar las gráficas había similitud entre ellas.

## 4.4 Resultados de la Actividad Numérica

Sabemos que para esta actividad se tomo a dos alumnos, donde analizaremos sus respuestas después de la fase experimental.

ISMAEL

a) $x = 1/2$

$*\ e^x = 1 = e^{(1/2)} = 1 = \underline{1.35 = 1}$

$*\ e^x = 1 + x = 1.35 = 1 + 1/2 = \underline{1.35 = 1.5}$

$*\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} = 1.35 = 1 + 1/2 + \frac{(1/2)^2}{2} = 1.35 = 1.5 + 0.125 = \underline{1.35 = 1.625}$

$*\ e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/2\cdot3 = 1.35 = 1.62 + 0.020 = \underline{1.35 = 1.645}$

$*\ e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/2\cdot3 + x^4/2\cdot3\cdot4 = 1.35 = 1.64 + (1/2)^4/2\cdot3\cdot4 = \underline{1.35 = 1.648}$

$*\ e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/2\cdot3 + x^4/2\cdot3\cdot4 + x^5/2\cdot3\cdot4\cdot5 = 1.35 = 1.642 + (1/2)^5/120 = \underline{1.35 = 1.6486}$

$*\ e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/2\cdot3 + x^4/2\cdot3\cdot4 + x^5/2\cdot3\cdot4\cdot5 + x^6/2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 1.35 = 1.6422 + (1/2)^6/720 = \underline{1.35 = 1.6487}$

$*\ e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/2\cdot3 + x^4/2\cdot3\cdot4 + x^5/2\cdot3\cdot4\cdot5 + x^6/2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 + x^7/2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 = 1.35 = 1.64222 + (1/2)^7/5040 = \underline{1.35 = 1.64872}$

b) $x = 3/4$

$*\ e^x = 1 = e^{(3/4)} = 1 = \underline{2.117 = 1}$

$*\ 2.117 = 1 + 3/4 = \underline{1.75}$

$*\ 2.117 = 1.75 + (3/4)^2/2 = \underline{2.03125}$

$*\ 2.117 = 2.03 + (3/4)^3/6 = \underline{2.1015625}$

$*\ 2.117 = 2.17 + (3/4)^4/24 = \underline{2.114746094}$

$*\ 2.117 = 2.18 + (3/4)^5/120 = \underline{2.116723633}$

$*\ 2.117 = 2.181 + (3/4)^6/720 = 2.116970825$

$*\ 2.117 = 2.1812 + (3/4)^7/5040 = 2.11699731$

$*\ 2.117 = 2.11699731 + (3/4)^8/40320 = 2.116999793$

$*\ 2.117 = 2.116999793 + (3/4)^9/362880 = 2.117$

$*\ 2.117 = 2.117 + (3/4)^{10}/3628800 = 2.117000016$

$*$

$2.117000017 = 2.117000016 + (3/4)^{11}/39916800$

$= 2.117000017$

c) $x=5$

$* e^x = 1 = 148.41 = \underline{1}$

$* 148.41 = \underline{6} + 5$

$* 148.41 = 6 + \frac{(5)^2}{2} = \underline{18.5}$

$* 148.41 = 18.5 + \frac{(5)^3}{6} = \underline{39.33}$

$* 148.41 = 39.33 + \frac{(5)^4}{24} = \underline{65.37}$

$* 148.41 = 65.37 + \frac{(5)^5}{120} = \underline{91.41}$

$* 148.41 = 91.41 + \frac{(5)^6}{720} = \underline{113.11}$

$* 148.41 = 113.11 + \frac{(5)^7}{5040} = \underline{128.610}$

e) $x=-1$

$* e^x = 1 = \underline{0.36 = 1}$

$* 0.36 = \underline{0}$

$* 0.36 = 0 + \frac{(-1)^2}{2} = \underline{0.5}$

$* 0.36 = 0.5 + \frac{(-1)^3}{6} = \underline{0.33}$

$* 0.36 = 0.33 + \frac{(-1)^4}{24} = \underline{0.37}5$

$* 0.36 = 0.37 + \frac{(-1)^5}{120} = \underline{0.36}$

$* 0.36 = 0.36 + \frac{(-1)^6}{720} = \underline{0.368}$

$* 0.36 = 0.364 + \frac{(-1)^7}{5040} = \underline{0.367}$

3

F) $x=-5$

* $e^x = 1 = 6.73\times10^{-3} = 1$
* $6.73\times10^{-3} = 1 - 5 = -4$
* $6.73\times10^{-3} = -4 + \frac{(-5)^2}{2} = 8.5$
* $6.73\times10^{-3} = 8.5 + \frac{(-5)^3}{6} = -12.33$
* $6.73\times10^{-3} = -12.33 \; \frac{(-5)^4}{24} = 13.70$
* $6.73\times10^{-3} = 13.70 + \frac{(-5)^5}{120} = -12.33$
* $6.73\times10^{-3} = -12.33 + \frac{(-5)^6}{720} = 9.36$
* $6.73\times10^{-3} = 9.36 + \frac{(-5)^7}{5040} = -6.13$

d) $x=0$

* $e^x = 1 = 1 = 1$
* $1 = 1 + 0 = 1$
* $1 = 1 + 0 = 1$
* $1 = 1 + 0 = 1$
* $1 = 1 + 0 = 1$
* $1 = 1 + 0 = 1$
* $1 = 1 + 0 = 1$
* $1 = 1 + 0 = 1$

RESPUESTAS

①.- Se varía los valores por los decimales

②.- Que varia pero por que el lado izquierdo que es $e^x = 5.02$ y los de la derecha nunca se hacercaron y vario mucho

③ En algunas ocasiones SI porque se aproximaba mucho

④ Pues si, cada vez se va aproximando a la cantidad del valor de la izquierda hasta llegar al punto de exactitud

⑤ Si porque el resultado llega a su punto exacto

LUIS ANGEL

a)

- $e^x = 1 \Rightarrow e^{1/2} = 1 \Rightarrow 1.648721271 = 1$
- $e^x = 1 + x \Rightarrow e^{1/2} = 1 + 1/2 \Rightarrow 1.648721271 = 1.5$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow e^{1/2} = 1 + 1/2 + \frac{(1/2)^2}{2} = 1.648721271 = 1.625$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} = e^{1/2} = 1 + 1/2 + \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{(1/2)^3}{2 \cdot 3} = 1.648721271 = 1.645$ ←
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3/6 + x^4/24 = e^{1/2} = 1 + 1/2 + \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{(1/2)^3}{6} + \frac{(1/2)^4}{24} = 1.648721271 = 1.6484$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 = e^{1/2} = 1 + 1/2 + \frac{(1/2)^2}{2} + (1/2)^3/6 + (1/2)^4/24 + (1/2)^5/120 = 1.64872127 = 1.6486$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 + x^6/720 = e^{1/2} = 1 + 1/2 + \frac{(1/2)^2}{2} + (1/2)^3/6 + (1/2)^4/24 + (1/2)^5/120 + \frac{(1/2)^6}{720} = 1.64872127 = 1.6487$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 + x^6/720 = e^{1/2} = 1 + 1/2 + (1/2)^2/2 + (1/2)^3/6 + (1/2)^4/24 + (1/2)^5/120 + \frac{(1/2)^6}{720} + \frac{(1/2)^7}{5040} = 1.64872127 = 1.64872168$

b)

- $e^x = 1 \Rightarrow e^{3/4} = 1 \Rightarrow 5.02 = 1$
- $e^x = 1 + x \Rightarrow e^{3/4} = 1 + 3/4 \Rightarrow 5.02 = 1.75$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 = e^{3/4} = 1 + 3/4 + \frac{(3/4)^2}{2} = 5.02 = 2.03$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 = e^{3/4} = 1 + 3/4 + \frac{(3/4)^2}{2} + \frac{(3/4)^3}{6} = 5.02 = 2.10$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 = e^{3/4} = 1 + 3/4 + \frac{(3/4)^2}{2} + \frac{(3/4)^3}{6} + \frac{(3/4)^4}{24} = 5.02 = 2.114$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 = e^{3/4} = 1 + 3/4 + \frac{(3/4)^2}{2} + \frac{(3/4)^3}{6} + \frac{(3/4)^4}{24} + \frac{(3/4)^5}{120} = 5.02 = 2.1167$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 + x^6/720 = e^{3/4} = 1 + 3/4 + \frac{(3/4)^2}{2} + \frac{(3/4)^3}{6} + \frac{(3/4)^4}{24} + \frac{(3/4)^5}{120} + \frac{(3/4)^6}{720} = 5.02 = 2.11697$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120 + x^6/720 + x^7/5040 = e^{3/4} = 1 + 3/4 + \frac{(3/4)^2}{2} + \frac{(3/4)^3}{6} + \frac{(3/4)^4}{24} + \frac{(3/4)^5}{120} + \frac{(3/4)^6}{720} + \frac{(3/4)^7}{5040} = 5.02 = 2.11699$

c)

- $e^x = 1 \Rightarrow e^5 = 1 \Rightarrow 148.41 = 1$
- $e^x = 1 + x \Rightarrow e^5 = 1 + 5 \Rightarrow 148.41 = 6$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow e^5 = 6 + 5^2 \Rightarrow 148.41 = 18.5$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 = e^5 = 18.5 + 5^3/6 = 148.41 = 39.33$
- $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 = e^5 = 39.33 + \frac{(5)^4}{24} = 141.41 = 65.375$
- $e^5 = 65.375 + \frac{(5)^5}{120} = 141.41 = 91.41$
- $e^6 = 91.41 + \frac{(5)^6}{720} = 141.41 = 113.11$
- $e^7 = 113.11 + \frac{(5)^7}{5040} = 141.41 = 128.61$

2

c)

- $e^x = 1 \Rightarrow e^0 = 1 \Rightarrow 1 = 1$
- $e^0 = 1 + x \Rightarrow 1 = 1$
- $e^0 = 1 + x + x^2/2 = 1 = 1$
- $e^0 = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 = 1 = 1$
- $e^0 = 1 + x^4/24 = 1 = 1$
- $e^0 = 1 + x^5/120 = 1 = 1$
- $e^0 = 1 + x^6/720 = 1 = 1$
- $e^0 = 1 + x^7/5040 = 1 = 1$

— o — o — o — o — o — o — o —

c)

- $e^x = 1 \Rightarrow e^{-1} = 1 \Rightarrow 0.36 = 1$
- $e^{-1} = 1 + (-1) = .36 = 0$
- $e^{-1} = 0 + x^2/2 = .36 = .5$
- $e^{-1} = .5 + x^3/6 = .36 = 0.33$
- $e^{-1} = 0.33 + x^4/24 = 0.36 = 0.375$
- $e^{-1} = 0.375 + x^5/120 = 0.36 = 0.36$
- $e^{-1} = 0.36 + x^6/720 = 0.36 = 0.368$
- $e^{-1} = 0.368 + x^7/5040 = 0.36 = 0.367$

— o — o — o — o — o — o —

- $e^x = 1 \Rightarrow e^{-5} = 1 \Rightarrow 6.73 \times 10^{-3} = 1$
- $e^{-5} = 1 + x = 6.73 \times 10^{-3} = -4$
- $e^{-5} = -4 + x^2/2 = 6.73 \times 10^{-3} = 8.5$
- $e^{-5} = 8.5 + x^3/6 = 6.73 \times 10^{-3} = -12.33$
- $e^{-5} = -12.33 + x^4/24 = 6.73 \times 10^{-3} = 13.70$
- $e^{-5} = 13.70 + x^5/120 = 6.73 \times 10^{-3} = -12.33$
- $e^{-5} = -12.33 + x^6/720 = 6.73 \times 10^{-3} = 9.36$
- $e^{-5} = 9.36 + x^7/5040 = 6.73 \times 10^{-3} = -6.13$

— o — o — o — o — o — o —

1).- VARIAN POR DECIMALES.

2).- VARIA VASTANTE YA QUE $e^x = 5.02$ Y LO DEMAS VA DE 1.75 A 2.11699

3).- EN OCACIONES.

4).- SI, YA QUE SE VA APROXIMANDO AL RESULTADO

5).- SI, YA QUE MIENTRAS MAS TERMINOS SE AUMENTE EL RESULTADO ES UN 99.99% IGUAL

- $e^{1/2} = 1.648721768 + x^8/40320 = 1.648721271 = 1.648721265$
- $e^{1/2} = 1.648721265 + x^9/362880 = 1.648721271 = 1.64872127$
- $e^{1/2} = 1.64872127 + x^{10}/3628800 = 1.648721271 = 1.64872127$

ANALISIS A POSTERIORI.

En esta parte se cumplió con el propósito, los 2 alumnos, fueron muy hábiles en usar su calculadora, para así decir, que se tenía o no valores iguales entre las dos funciones analizadas. Se dieron cuenta que conforme le agregaban mas términos a la función polinomial ellos tenían una igualdad entre ellas. Analizando sus respuestas se tuvo:

Respuesta 1, los dos alumnos coinciden en decir que las dos funciones son iguales y que varían por decimales.
Respuesta 2, como era de esperarse ambos lados de la igualdad no coinciden en sus valores, hay un alejamiento entre ellos y ellos vieron que los valores nunca coincidían.

Respuesta 3. Los alumnos ven que conforme van agregando más términos los valores se van aproximando más al valor exacto.

Respuesta 4. Los alumnos verifican que conforme le van agregando más términos se tiene una igualdad entre las dos funciones.

Respuesta 5. Ellos coinciden como en el punto anterior que se llega a una igualdad entre las funciones si se agrega más términos a la serie numérica.

# Capítulo V. CONCLUSIONES

La serie de Taylor de una función f de números reales o complejos que es infinitamente diferenciable en un entorno de números reales o complejos a, es la serie de potencias:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

que puede ser escrito de una manera más compacta como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

Donde *n!* es el factorial de *n* y $f^{(n)}(a)$ denota la n-ésima derivada de *f* en el punto *a*; la derivada cero de *f* es definida como la propia *f* y $(x\text{-}a)^0$ y 0! son ambos definidos como uno.

Una serie de Taylor de funciones muy importante es la Función exponencial a mencionar

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo } x$$

De acuerdo con la pregunta de investigación de nuestra tesis que se abordo es: ¿el concepto de serie se puede abordar con alumnos que no hayan cursado Cálculo Diferencial e Integral? Para responder esta pregunta se consideró la serie numérica de la función exponencial. En la puesta en escena, se hizo la introducción de registros gráficos y numéricos, en el que los estudiantes interactuaron. Considerando las condiciones en las que se desarrollo la experimentación, podemos concluir que se tuvieron las mismas conclusiones, que de los alumnos que ya habían cursado Cálculo Diferencial.

Las conclusiones pertinentes de nuestra tesis son:

SECUENCIA GRAFICA

- Nuestros alumnos observaron el comportamiento de las gráficas (la función y los polinomios de Taylor), y pudieron concluir que cuando se tomaban más términos de la serie las gráficas de ambas se iban pareciendo, sin embargo nos interesaba ver si ellos podían concluir que las gráficas se traslapaban en alguna región.
- Con respecto a la pregunta de si los alumnos podrían enunciar los siguientes términos de la serie nuestra respuesta fue positiva, consideramos que esto se debió al uso de la visualización ya que ellos tuvieron que observar la notación de los términos de la serie que nosotros les proporcionamos.
- Anotaron el término general de la serie haciendo uso de los conocimientos de que disponían, a diferencia de lo reportado en otras tesis nuestros alumnos no utilizaron el símbolo de factorial pues no lo conocían, pero en general podemos decir que intuyeron adecuadamente la forma del término solicitado.
- Nuestros alumnos de nivel medio superior, pudieron dar conclusiones parecidas a los alumnos que ya cursaron cálculo. De hecho, en Pérez (1991) se reporta que los estudiantes, a pesar de que usaron un graficador, no tenían confianza en los resultados que obtenían; hoy en día se tiene más familiaridad y confianza en los paquetes de computación, es por ello que cuando nuestros alumnos graficaban sus funciones, lograron obtener conclusiones semejantes a las reportadas. Lo que coincide con lo que supusimos que harían por su falta de conocimiento de cálculo.
- Con respecto a la pregunta de investigación podemos decir que los alumnos de nivel medio superior que no tenían conocimientos de cálculo pudieron asimilar el tema de serie, suponemos que el profesor debe tener un comportamiento de moderador para que el alumno sea capaz de construir este objeto matemático. Como no hubo intervención alguna de parte del profesor que aplicó la actividad, los estudiantes pudieron hacer sus propias conjeturas, discutirlas y obtener conclusiones que nos parecen pertinentes y además muy parecidas a las que obtuvieron los alumnos que ya han cursado cálculo.

## SECUENCIA NUMERICA

- Los alumnos, al hacer la evaluación de los valores, pudieron concluir que si se parecen las dos funciones, solamente hay una diferencia en ciertos decimales.
- Verifican que conforme van agregando más términos para la serie numérica, los valores de la función y la suma de términos coinciden; y confirman que hay una igualdad entre la función exponencial y la suma de funciones.
- Los alumnos de nuestra investigación llegaron a las mismas conclusiones de los alumnos que ya conocen cálculo.

# BIBLIOGRAFIA

Artigue, M. (1992). Didactic Engineering. Recherches en Didactique des Mathématiques (Selected Papers, pp. 41-66).

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Pedro Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Albert, J. (1996). La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica. México. CINVESTAV. Tesis de doctorado no publicada.

Brousseau, G. (1981). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. México: Cinvestav-IPN.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemas en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Théorisation des phénoménes d'enseignement des mathématiques. Thése d'Etat, Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cajori, F. (1993). A history of Mathematical Notations. Estados Unidos. Dover.

De Mora, J. y Ludwika, M. (2003). *Apuntes para una historia de las matemáticas y astronomía en la India antigua*. México. UNAM, Instituto de Investigaciones Filológicas.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática, (pp. 61-96). Colombia: Editorial Iberoamérica.

Douglas, J. (1992). Un estudio acerca del discurso matemático escolar: La serie de Taylor. México. CINVESTAV. Tesis de maestría no publicada.

Flores, R. (1992). *Sobre la construcción del concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios*. México. CINVESTAV. Tesis de maestría no publicada.

Granville, A. (1990). Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Limusa. México.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* [Pensamiento Matemático desde la antigüedad hasta los tiempos modernos]. New York. Oxford Press University.

Knopp, K. (1921). *Theory and applicatxponencialion of infinite series*. Londres: Blackie & Son Limited.

Lezama, J. (a) (1999). Un estudio de reproducibilidad. El caso de la funcion exponencial. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN.

Mamoma, J. (1990). Sequences and series-sequences and functions: student' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 21(1), p. 333-3337.*

Miller, J. (2006). Earliest Know Uses of some of the Words of Mathematics. Tomado de la página Web http://members.aol.com/jeffs70/mathword.html

Moreno, J. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación*. México. CINVESTAV. Tesis de maestría no publicada.

Pearce, I. (2002). Indian Mathematics: Redressing the balance. Obtenido de la página de la School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland el 6 de marzo de 2006.

Pérez, V. (1991). *Sobre la noción de convergencia en los polinomios de Taylor en estudiantes de bachillerato. Análisis de las estrategias que posibilitan la construcción del concepto. Estudio de Casos*. México. CINVESTAV. Tesis de maestría no publicada.

Phillips, E., Butts, T. y Shaughnessy, M. (1999). Algebra con Aplicaciones. Editorial Oxford.

Rhind (2006). Papiro de Rhind. Tomado de la página de la organización de Egiptología el 26 de Abril de 2006 http://www.egiptologia.org

Robert, A. (1982). *L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans I'Enseignement Supérieur*. Universite Paris VII. París, Francia. Tesis de doctorado no publicada.

Rosas, A. (2007). *Transposición didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del discurso escolar actual en el nivel superior*. México. CICATA-IPN. Tesis de doctorado no publicada.

Smith, D. (2005). *History of Modern Mathematics* [Historia de las Matemáticas Modernas]. Mathematical Monographs No. 1. 4ta edición. (Versión original de 1906) Obtenido de la página del Proyecto Gutemberg el 17 de marzo de 2006
URL: http://www.gutenberg.org/catalog/

Swokoski, Earl. (1993). Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoaméricana. México. Segunda Edición.

Zill, D. (1995). Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoaméricana. México. Segunda Edición.

Programa de Álgebra. Nivel Medio Superior. Instituto Politécnico Nacional.