INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA. UNIDAD LEGARIA

SOBRE EL CONCEPTO DE *SOLUCIÓN* DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Tesis que para obtener el grado de

Doctora en Matemática Educativa

Presenta:

Teresa Cristina Ochoviet Filgueiras

Directora de Tesis:

Dra. Asuman Oktaç

2009, Montevideo – Uruguay.

La directora de tesis Dra. Asuman Oktaç es investigadora titular del Cinvestav-IPN.

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 23 del mes de enero de 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Sobre el Concepto de Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas"

Presentada por el(la) alumno(a):

Ochoviet	Filgueiras	Teresa Cristina
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: B 0 5 1 5 7 8

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Asuman Oktaç

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dra. María Dolores Lozano Suárez

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de Montevideo el día 23 del mes febrero del año 2009, el (la) que suscribe Teresa Cristina Ochoviet Filgueiras alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro B051578, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra. Asuman Oktaç y cede los derechos del trabajo intitulado Sobre el concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección cristinaochoviet@gmail.com.

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Teresa Cristina Ochoviet Filgueiras

ÍNDICE

Glosario

Enseñanza secundaria: Se refiere a la enseñanza posterior a la primaria. Abarca un total de seis años que se dividen en tres de Ciclo Básico (1º, 2º, 3º) y tres de Bachillerato (4º, 5º, 6º). La enseñanza secundaria completa habilita el ingreso a la Universidad.

Ciclo Básico: Se refiere a los tres primeros años de enseñanza secundaria en Uruguay. Abarca la franja de edades que va de los 13 a los 15 años aproximadamente.

Bachillerato: Se refiere a los tres últimos años de la enseñanza secundaria en Uruguay. Abarca la franja de edades que va de los 16 a los 18 años aproximadamente.

Modos de pensamiento: Sierpinska (2000) distingue tres modos de pensamiento en álgebra lineal: sintético-geométrico, analítico-artimético y analítico-estructural. Señala que cada uno de estos modos de pensamiento conduce a diferentes significados del objeto porque cada uno de ellos permite una mirada diferente del objeto algebraico en cuestión.

Imagen del concepto: Esta imagen es definida en por Vinner (1991) como algo no verbal asociado en la mente al nombre del concepto. Esto puede ser una representación visual del objeto, si la tiene, o puede ser una colección de impresiones o experiencias relacionadas con el concepto.

Relación de cuadros, tablas y gráficas

SOBRE EL CONCEPTO DE *SOLUCIÓN* DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Resumen

Como primer objetivo en este trabajo nos propusimos estudiar qué concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales construyen los estudiantes uruguayos (de 14-15 años y 17-18 años) cuando la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas 2x2.

Como segundo objetivo nos propusimos diseñar una secuencia de enseñanza y de actividades, para los estudiantes de 14–15 años, del concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, que tiene en cuenta los datos relevados a partir del primer objetivo.

De acuerdo a las dificultades de los estudiantes que detectamos, sugerimos enseñar el concepto de solución de un sistema de ecuaciones, no restringido al ámbito de los sistemas de dos ecuaciones. Podemos ofrecer a los estudiantes diferentes tareas, donde tengan que enfrentar distinto tipo de situaciones que involucren dos o más ecuaciones lineales. También recomendamos que los sistemas de ecuaciones deberían ser presentados en diferentes modos de pensamiento como los presentados por Sierpinska (2000): el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico estructural. Diferentes maneras de pensar a los objetos matemáticos permitirán a los estudiantes una comprensión más profunda de ellos.

Consideramos que de esta forma, los estudiantes construirán una visión más amplia del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales que les permitirá en el futuro aprender estructuras más generales y abstractas.

A STUDY CONCERNING THE CONCEPT OF *SOLUTION* OF A SYSTEM OF EQUATIONS WITH TWO UNKNOWNS

Summary

In this thesis we explore what secondary students (between 14-15 and 17-18 years old) learn about the concept of solution of a system of linear equations with two unknowns when teachers teach this topic starting with systems of two equations.
We also designed a sequence of activities for teaching this topic for secondary students ranging between 14 and 15 years old.

According to students´ difficulties detected in this research, we suggest to teach the concept of solution of a system of equations, not restricted to the context of systems of two equations. We could offer students different tasks, where they would face different situations involving two or more linear equations. We also recommend that systems of equations should be presented in different modes of thinking as the ones presented by Sierpinska (2000): synthetic-geometric, analytic-arithmetic and analytic-structural. Different ways of thinking about the mathematical objects will allow students a deeper understanding of them.

We think that in this way students will construct a wider vision of the concept of solution of a system of linear equations that will allow them in the future to learn more abstract and general structures.

SOBRE EL CONCEPTO DE *SOLUCIÓN* DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Cómo está organizado este trabajo

En la primera sección presentamos la introducción a este trabajo. Realizamos una presentación explicando nuestra motivación para realizar el mismo. Relatamos brevemente los estudios exploratorios realizados y determinamos los objetivos.

En el Capítulo I realizamos una revisión bibliográfica donde relevamos varios trabajos que consideramos como antecedentes importantes ya sea porque la temática que abordan se relaciona con la nuestra o porque sus resultados nos ayudan a una visión más rica de los fenómenos que decidimos estudiar.

En el Capítulo II describimos el marco teórico que guía nuestro trabajo. Utilizamos los modos de pensamiento presentados por Sierpinska (2000) y los complementamos con la noción de imagen del concepto presentada por Vinner (1991).

En el capítulo III realizamos un estudio del método de investigación y lo definimos. Justificamos por qué hicimos esa elección y no otras. También presentamos la descripción de dos libros de texto, el diseño del cuestionario y el análisis a priori, las observaciones de clases y las consideraciones que se tendrán en cuenta para el diseño de una secuencia de enseñanza.

En el Capítulo IV presentamos los resultados obtenidos que surgen de la aplicación del cuestionario y realizamos el análisis de las respuestas de los estudiantes.

En el Capítulo V presentamos las conclusiones y recomendaciones didácticas que se desprenden del primer objetivo de esta investigación.

En el Capítulo VI tomamos las recomendaciones del capítulo V que, sumadas a todo el estudio realizado en el Capítulo III, nos permiten presentar el diseño de una secuencia de enseñanza y de actividades de aprendizaje del concepto *solución* de un sistema de ecuaciones. Reportamos la puesta en práctica de esa secuencia en dos grupos de estudiantes. Al finalizar esta puesta en práctica propusimos a estos estudiantes el cuestionario diseñado en el Capítulo III y reseñamos los resultados obtenidos. Realizamos conclusiones a la luz de la puesta en práctica de la secuencia.

SOBRE EL CONCEPTO DE *SOLUCIÓN* DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Introducción

Teresa la bisabuela, Teresa la abuela,
Teresa la madre, Teresa la hija.

1. Presentación

En el Uruguay, aproximadamente a los 14–15 años de edad, se inicia el estudio de los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas para tratar en cursos de Bachillerato posteriores, los sistemas lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas. Tradicionalmente, el estudio de los sistemas 2x2 ha marcado el punto de partida para introducir al alumno en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, donde la atención se sitúa principalmente en el aprendizaje de los métodos de resolución, en la ejercitación de los mismos y para finalizar la enseñanza del tema, se proponen problemas en lenguaje verbal que pueden resolverse traduciendo la información que da el enunciado de dichos problemas a través de un sistema de ecuaciones.

Nos preguntamos si es adecuado introducir a los estudiantes en el estudio de los sistemas lineales por medio del caso particular de 2x2. Cuando cuestionamos la adecuación de esta opción didáctica apuntamos a una reflexión en torno a si el concepto *solución* de un sistema que se construye, favorece posteriormente la comprensión del concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con mayor número de ecuaciones e incógnitas o por el contrario obstaculiza visiones más generales y abstractas. Tradicionalmente, el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, aparece en el currículum en el tercer año de la enseñanza secundaria desde el inicio de la enseñanza secundaria en Uruguay y parecería que nadie ha cuestionado ni su inclusión, ni las maneras de abordar este tema ya que no encontramos grandes cambios en los currícula en este sentido.

Lo que comentamos no es exclusivo de Uruguay. Alcanza con mirar cualquier texto de matemática para alumnos de 14-15 años, de origen argentino, francés, español[1],

[1] Ver por ejemplo:
Kaczor, P., Schaposchnik, R., Franco, E., Cicala, R., Díaz, B. (1999). Matemática I. Buenos Aires: Ediciones Santillana. Pág. 60.

por citar solamente algunos casos, para poder ver que la enseñanza de este tema se hace en forma similar en los diferentes países.

Tomando en consideración las dificultades que muestran los estudiantes con este tema (Ramírez (2008 y 2005), Cutz (2005)) y con el fin de plantear alternativas a su enseñanza, es que proponemos el presente trabajo de investigación. Consideramos que nuestro estudio nos permitirá una visión más clara del aprendizaje de los alumnos en torno a los sistemas de ecuaciones y nos permitirá realizar recomendaciones sobre la enseñanza de este tópico.

2. Estudios exploratorios

Para hacer preguntas tengo que saber algo.
Déjà Vu

Se realizaron estudios exploratorios con varios propósitos. En primer lugar para obtener evidencias de que los estudiantes uruguayos presentaban dificultades al reconocer el número de soluciones de un sistema, poniendo en evidencia la problemática existente. En segundo lugar para mostrar que hay problemas que persisten a lo largo de la enseñanza. En tercer lugar se pretendía ver cómo reaccionaban los alumnos frente a las preguntas que se diseñaron y qué dudas manifestaban frente a la redacción de las mismas, para luego realizar las modificaciones que fueran pertinentes hasta lograr su formulación definitiva para ser utilizadas en el presente trabajo. Las preguntas fueron contestadas por escrito en forma individual. Más adelante describimos los estudiantes con los que trabajamos y los cuestionarios utilizados.

2.1 Los estudiantes con los que trabajamos

Los estudios exploratorios fueron realizados en varios grupos de estudiantes que describimos a continuación. Más adelante presentamos los cuestionarios usados.

(1) Un grupo de 22 alumnos de tercer año liceal de 14–15 años. Los estudiantes de este nivel estudian por primera vez sistemas de ecuaciones. Ya tenían experiencia en los

---

Lanoëlle, A., Perrinaud, J., Porté, D., Rivoallan, L. (1999). Dimathème 3^{e}. Paris: Les Éditions Didier. Pág. 112.
Seminario de Matemáticas de Santillana (1999). Órbita 2000 Matemáticas 3º. Madrid: Grupo Santillana de Ediciones. Pág. 77.

sistemas 2x2, resolución por el método gráfico y por el de reducción. No habían estudiado sistemas 3x2. Respondieron un cuestionario con 7 preguntas.

(2) Un grupo de 7 estudiantes de segundo año de Bachillerato de 16–17 años. Los estudiantes de este nivel estudiaron en cursos anteriores sistemas 2x2 y sistemas 3x3. No estudiaron sistemas no cuadrados. Respondieron un cuestionario con 4 preguntas.

(3) Un grupo de 11 estudiantes de tercer año de Bachillerato de 17–18 años. Estudiaron resolución de sistemas con cualquier número de ecuaciones e incógnitas pero básicamente las prácticas se centran en los sistemas cuadrados. De forma que estos estudiantes tenían amplia experiencia con sistemas de ecuaciones y sus métodos de resolución. Respondieron un cuestionario con 4 preguntas.

(4) Un grupo de 11 alumnos de segundo año de profesorado de matemática con edades variadas entre 21 y 30 años. Estos estudiantes tenían amplia experiencia con sistemas 2x2 y 3x3. Por provenir de diferentes orientaciones en Bachillerato, algunos estudiaron matrices y determinantes y otros no. Respondieron un cuestionario con 4 preguntas.

(5) Un grupo de 14 alumnos de cuarto año de profesorado de matemática, con edades que variaban entre los 24 y 40 años. Tenían amplia experiencia con sistemas de ecuaciones. Todos cursaron Álgebra Lineal. Respondieron un cuestionario con 3 preguntas.

2.2 Los cuestionarios

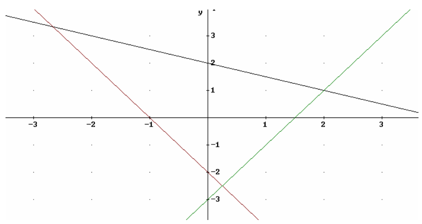
Tomando en cuenta los modos de pensamiento presentados en Sierpinska (2000)[2], diseñamos cuatro cuestionarios con pequeñas diferencias para poder experimentar y finalmente decidir qué tipo de preguntas íbamos a incluir en el cuestionario a aplicar en la fase empírica del presente trabajo.

En los cuestionarios se incluyeron preguntas con algunas diferencias ya que se trataba de grupos con diferentes niveles educativos y con distinto nivel de conocimientos. A continuación presentamos los cuestionarios que se aplicaron a cada uno de los grupos mencionados.

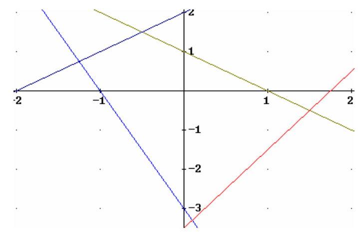
[2] Los modos de pensamiento presentados por Sierpinska (2000) se describen en el Capítulo II.

Grupo (1)

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Justifica tu respuesta.



2) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de cuatro ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Justifica tu respuesta



3) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees. ¿Tiene solución el sistema? En el caso de que tu respuesta sea negativa explica por qué y en el caso de que sea afirmativa indica cuántas.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

4) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas:

a) ¿Puede tener una única solución?
b) ¿Y sólo dos soluciones?
c) ¿Y sólo tres?
d) ¿E infinitas?
e) ¿Y ninguna?

Explica cada una de tus respuestas e ilústrala a través de una representación gráfica.

En la pregunta 1, cuando hablamos de *rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas* nos referimos a las rectas como figuras geométricas correspondientes a cada una de las ecuaciones lineales del sistema. Sabemos que toda ecuación lineal con dos incógnitas tiene por representación gráfica una única recta del plano cartesiano, es a esta recta que nos referimos y decimos que esta recta está asociada a tal o cual ecuación.

Resolver un sistema es determinar su conjunto solución por algún procedimiento (mental o con lápiz y papel, algebraico o gráfico).

Un sistema es un conjunto de ecuaciones a las cuales exigimos que se verifiquen a la vez. Solución de un sistema es cada uno de los pares ordenados de números reales que verifican todas las ecuaciones del sistema. Un par ordenado es una solución. Es así que si existe un único par ordenado que verifique todas las ecuaciones del sistema, decimos que el mismo tiene solución única. Si no existe ningún par ordenado de reales que verifique a todas las ecuaciones del sistema decimos que el sistema no tiene solución o lo que es equivalente: el conjunto solución del sistema es vacío.

Como un sistema de ecuaciones lineales puede admitir más de un par ordenado solución, es válido preguntar cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones lineales. Es el caso de las preguntas 1, 2 y 3.

5) (a) Presenta un sistema de ecuaciones que tenga como solución única el par (2, 1).
Explica cómo lo haces e interpreta geométricamente la situación.

(b) Presenta un sistema de ecuaciones que tenga como una de sus soluciones el par (2,1).
Explica cómo lo haces e interpreta geométricamente la situación.

6) Explica qué es para ti un sistema de ecuaciones.

7) Explica qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones.

Las preguntas 6 y 7 fueron realizadas al final porque queríamos en primer lugar sondear las intuiciones de los alumnos e interrogarlos luego acerca de posibles definiciones personales de los conceptos en juego. De preguntar primero por las definiciones, el alumno podría intentar adecuar sus respuestas a éstas y pensamos que se podrían bloquear las intuiciones respectivas.

Grupo (2)

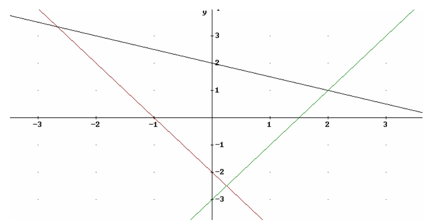
1) Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, por el método gráfico y por otro método a tu elección. Redacta tus comentarios acerca de la solución de cada uno de ellos.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

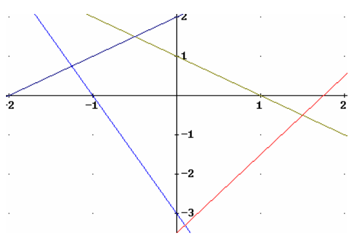
b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x + 3y = -3 \end{cases}$

2) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Qué puedes decir acerca de la solución del sistema formado por las tres ecuaciones?



3) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a cuatro ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Qué puedes decir acerca de la solución del sistema formado por las cuatro ecuaciones?

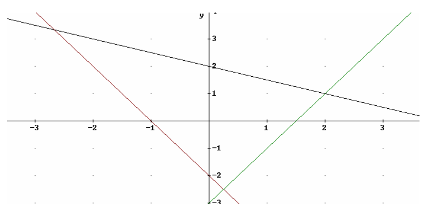


4) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees. ¿Tiene solución el sistema? En el caso de que tu respuesta sea negativa explica por qué y en el caso de que sea afirmativa indica cuántas.

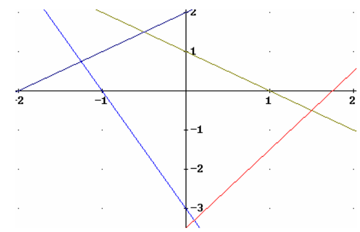
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Grupo (3)

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Qué puedes decir acerca de la solución del sistema formado por las tres ecuaciones?



2) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a cuatro ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Qué puedes decir acerca de la solución del sistema formado por las cuatro ecuaciones?



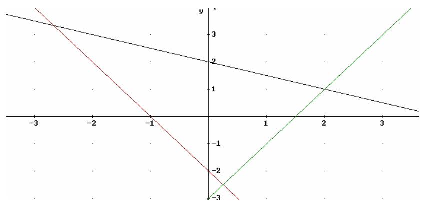
3) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees. Redacta tus comentarios acerca de la solución del sistema.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

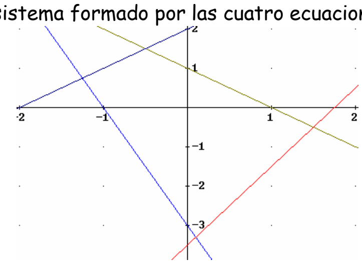
4) ¿Qué significa para usted un sistema de ecuaciones? Explique ampliamente su respuesta.

Grupo (4)

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Qué puedes decir acerca de la solución del sistema formado por las tres ecuaciones?



2) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a cuatro ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Qué puedes decir acerca de la solución del sistema formado por las cuatro ecuaciones?



3) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees. ¿Tiene solución el sistema? En el caso de que tu respuesta sea negativa explica por qué y en el caso de que sea afirmativa indica cuántas.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

4) a) Martín resolvió un sistema de ecuaciones por el método de reducción. ¿Puedes interpretar geométricamente cada uno de los sistemas equivalentes que fue obteniendo para llegar a la solución?

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 8 \\ -x - y = -2 \end{cases}$$

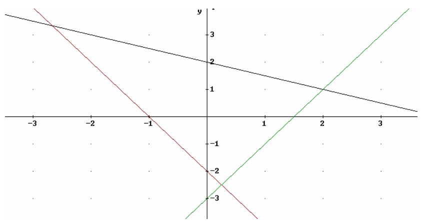
$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

S= {(4, -2)}

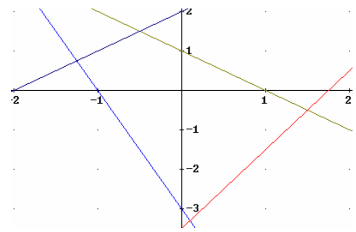
b) Explica cómo pasa de un sistema al otro.

Grupo (5)

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Justifica tu respuesta.



2) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de cuatro ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Justifica tu respuesta



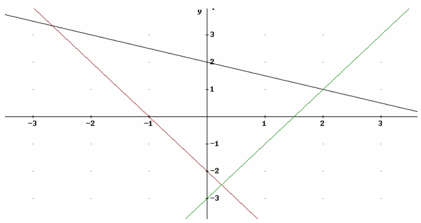
3) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees. ¿Tiene solución el sistema? En el caso de que tu respuesta sea negativa explica por qué y en el caso de que sea afirmativa indica cuántas.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Como podrá observarse en los cuestionarios, se experimentó con diferentes tipos de preguntas y redacciones. Vemos a continuación dos redacciones para una misma propuesta. Finalmente optamos por la redacción del tipo B para el cuestionario final, como se verá en el capítulo III, pues la versión A resultó confusa, no quedaba del todo claro a los estudiantes lo que se les estaba preguntando.

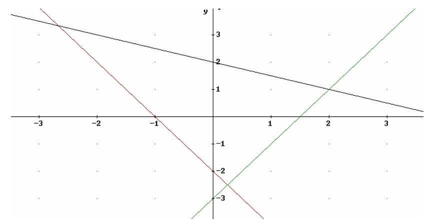
(A)

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Qué puedes decir acerca de la solución del sistema formado por las tres ecuaciones?



(B)

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Justifica tu respuesta.



2. 3 Algunas impresiones que surgen a partir de la aplicación de los cuestionarios exploratorios

Reportaremos a continuación algunas respuestas dadas por los estudiantes, que creemos comienzan a aportar información valiosa acerca del tema en el que nos hemos concentrado.

Para exponer las primeras impresiones nos referiremos a la pregunta 1 de los cuestionarios (1), (3), (4) y (5) y en el caso del cuestionario (2) a la pregunta 2. Creemos que esta pregunta, aun con pequeñas diferencias en su redacción, nos permite explorar tanto la noción de sistema como de solución de un sistema que los estudiantes han construido. Pudimos observar que las experiencias previas de los estudiantes no les permitieron interpretar adecuadamente la actividad que se les planteó.

Los estudiantes del grupo (1) se habían iniciado en el estudio de las ecuaciones lineales con dos incógnitas y los sistemas lineales 2x2. De forma que al tratarse de su primer acercamiento al tema, podemos presumir que sus primeros aprendizajes constituirán la base para la adquisición de posteriores conceptos, más generales y más abstractos. En este grupo 12 estudiantes contestaron a la pregunta 1 que el sistema tiene 3 soluciones, 7 que no tiene solución y 3 dieron otro tipo de respuesta. Los que respondieron que el sistema de ecuaciones tiene tres soluciones, identificaron cada punto de corte de las rectas con una solución del mismo. Entendemos que hay básicamente dos razones por las cuales estos estudiantes consideran que el sistema de ecuaciones asociado tiene tres soluciones:

- Asocian solución con punto de corte de dos rectas. Los alumnos escribieron respuestas como las siguientes: "*hay tres soluciones porque hay tres puntos de corte*" o "*si se cortan una sola vez es una solución si se cortan dos veces o más, hay más soluciones*".
- Al tratarse de un sistema con tres ecuaciones dudan si solución del sistema significa que verifique las tres ecuaciones o tomadas de dos en dos, aun cuando al preguntarles qué significa que un par sea solución de un sistema respondan que debe verificar todas las ecuaciones. Es así que insisten con respuestas como "*no hay solución del sistema pero sí tomadas de a dos*". Este grupo sólo tenía experiencia con el caso 2x2 y así la generalización que se les pedía hacer tenía que ser totalmente por su propia cuenta.

En el grupo (2) de estudiantes del segundo año de Bachillerato, 3 alumnos manifestaron que el sistema presentado en la pregunta 2 tenía tres soluciones, identificando cada punto de corte como una solución del sistema. Ningún estudiante contestó que el sistema no tenía solución y 4 alumnos dieron otro tipo de respuestas. De aquí que nos cuestionemos si la tradicional secuencia de aprendizaje estructura en forma adecuada el concepto de solución que el alumno construye.

Por otra parte, estos estudios exploratorios nos permitieron observar que muchos estudiantes conciben un sistema de ecuaciones como lo que *se puede hacer* con él, es decir resolverlo. Ante la presencia de un sistema de ecuaciones el estudiante piensa en cómo obtener la solución y no en qué condiciones debe cumplir esa solución. Esto queda evidenciado, por ejemplo, en las siguientes respuestas de dos estudiantes ante la pregunta "Explica qué es para ti un sistema de ecuaciones":

Estudiante 1: "*Un sistema de ecuaciones para mí es la forma de hallar las incógnitas x e y*".

Estudiante 2: "*Para mí, un sistema de ecuaciones es un modo de encontrar valores para las incógnitas de dichas ecuaciones*".

En el grupo (3) de estudiantes del último año de Bachillerato, 2 contestaron que el sistema tiene 3 soluciones, 2 que no tiene solución, 4 dieron otro tipo de respuesta como por ejemplo que el sistema tiene una solución y 3 no contestaron. Estos estudiantes tenían amplia experiencia con sistemas de ecuaciones y sus métodos de resolución.

En el grupo (4) de estudiantes de profesorado de matemática, 6 estudiantes contestaron que el sistema formado por las tres rectas no tiene solución, 4 dieron respuestas de otro tipo y 1 no contestó.

En el grupo (5), de estudiantes de profesorado de matemática, 3 contestaron que el sistema de la pregunta 1 tenía 3 soluciones y 11 que el sistema no tiene solución.

En este grupo, uno de los estudiantes que contestó que el sistema tiene 3 soluciones, identificó cada punto de corte con una solución del sistema: "*tiene 3 soluciones porque el corte de ellas implica que ese punto pertenece a ambas rectas por lo que sus coordenadas van a satisfacer la tercera*". Otros manifestaron confusión con el concepto de sistema, dando una respuesta similar a la de los estudiantes más pequeños: "*tiene tres soluciones (si tomamos del sistema dos ecuaciones de las tres)*".

3. Determinación de objetivos

Consideramos que si aún a nivel terciario persisten problemas con la adecuada interpretación del número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y con el concepto de sistema, este problema merece ser analizado en procura de poder arrojar luz sobre su enseñanza y aprendizaje. Nos proponemos entonces estudiar qué concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales construyen los estudiantes uruguayos a partir de la secuencia de enseñanza habitual que se desprende de los programas vigentes, poniendo atención en las dificultades que presentan cuando se los enfrenta a interpretar la solución de sistemas de más de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y planificaremos una secuencia de enseñanza del concepto *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas para los alumnos de 14–15 años. Consideraremos entonces los siguientes objetivos de investigación:

1) Explorar el concepto de sistema y de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales que construyen los estudiantes de enseñanza secundaria de 14–15 años y los de 17–18 años.

Nos concentraremos en los estudiantes de 14–15 años y en los de 17–18 años porque pretendemos explorar, por un lado, la noción que construyen los alumnos que se inician por primera vez en el tema y también la de los estudiantes que están en el último año de Bachillerato, para poder realizar comparaciones, para observar cómo han evolucionado. En los dos casos se trata de una exploración, partiendo de las secuencias habituales de enseñanza de este tema y el objetivo es dar cuenta de la problemática. Nos proponemos también aquí identificar qué dificultades presentan los estudiantes al momento de interpretar los sistemas de ecuaciones lineales y el concepto de solución de un sistema que está ligado a la interpretación del número de soluciones del mismo.

2) Diseñar una secuencia de enseñanza y actividades para el aprendizaje del concepto *solución* de un sistema de ecuaciones lineales para estudiantes de 14-15 años y ponerlas en práctica.

Aquí proponemos actividades de aprendizaje para los estudiantes más pequeños, del concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales. El objetivo es generar un conjunto de actividades para el alumno que no obstaculice visiones más generales o más abstractas del concepto. Para ello pondremos especial atención tanto en las dificultades que manifiesten los estudiantes como en las nociones que les permiten superar esas dificultades. Estas actividades serán trabajadas con dos grupos de estudiantes y se reportarán los resultados obtenidos.

CAPÍTULO I

Revisión bibliográfica

A continuación reportaremos algunos trabajos que por sus objetivos de investigación o problemática de estudio, guardan relación con la temática que nos proponemos abordar.
La presente sección estará organizada de la siguiente manera:

- Resultados referidos a aportes teóricos para interpretar el desarrollo del pensamiento algebraico.
- Resultados de investigación referidos a las dificultades que enfrentan los estudiantes en el estudio del álgebra.
- Resultados referidos a puestas en escena de diseños de enseñanza o a la actividad del profesor.

Presentaremos estos diferentes resultados en orden cronológico para que pueda observarse cómo ha evolucionado en el campo la problemática que nos interesa. Al final de las reseñas realizaremos una síntesis de los diferentes resultados de investigación y ubicaremos este nuevo trabajo.

Resultados referidos a aportes teóricos para interpretar el desarrollo del pensamiento algebraico

Reportaremos dos importantes puntos de vista en relación al desarrollo del pensamiento algebraico: Sfard y Linchevski (1994) y Sierpinska (2000). Este último trabajo, como se verá más adelante, es el que adoptaremos como referente teórico.

Sfard y Linchevski (1994) sitúan su atención en qué es lo que un individuo es capaz de percibir y notar cuando observa símbolos algebraicos. Su principal foco de atención es la versatilidad y adaptabilidad del conocimiento algebraico de los estudiantes. El análisis que realizan usa como marco teórico la teoría de la reificación. Sostienen que existe una dualidad proceso-objeto en la mayoría de los conceptos matemáticos, la concepción operacional (orientada hacia los procesos) emerge en primer lugar y los objetos matemáticos (concepción estructural) se desarrollan a través de reificaciones[3] de procesos. Desde el punto de vista de esta teoría, la característica principal de las construcciones matemáticas se refleja bien en la siguiente cita:

> […] la matemática es una estructura de varios niveles donde básicamente las mismas ideas son vistas de forma diferente cuando son observadas desde diferentes posiciones. (Sfard y Linchevski, 1994)[4]

Para el análisis, las autoras utilizan una perspectiva epistemológica y fundamentada en observaciones históricas. Después de identificar las etapas en el desarrollo del álgebra, concluyen que el álgebra es una estructura jerárquica en la cual lo que es concebido operacionalmente en un nivel, debe ser percibido estructuralmente en un nivel más alto.

La teoría de la reificación conjetura que el crecimiento cognitivo de los estudiantes en el estudio del álgebra sigue la lógica de las etapas que identificaron en el desarrollo histórico del álgebra.

En este trabajo las autoras presentan el caso de una estudiante de 9º año de secundaria (3er. año de secundaria en Uruguay) en torno a un sistema de ecuaciones que admite infinitas soluciones, para ejemplificar el acercamiento funcional al álgebra. Esto supone situar la atención en la habilidad de los estudiantes para pensar en las fórmulas algebraicas en términos de funciones y poder aplicarlo siempre que sea apropiado a la resolución de problemas. El problema que se está enfrentando es entonces, la versatilidad y adaptabilidad del pensamiento algebraico del estudiante.

A la mencionada estudiante se le propuso un sistema de ecuaciones 2x2 donde las dos ecuaciones eran equivalentes. Las autoras señalan que sin una aproximación funcional a las expresiones algebraicas, es difícil darse cuenta que un sistema puede tener infinitas soluciones:

> Si las letras en las ecuaciones representan números desconocidos pero fijos, ¿cómo puede alguien esperar que uno o ambos de esos números fijos podrían ser "cualquier número"? (Sfard y Linchevski, 1994)[5]

Observan que en el caso de un sistema 2x2 donde las ecuaciones son equivalentes, el conjunto solución es una función donde para cada valor de x existe un único valor de y que le corresponde. Para visualizar esto, el estudiante debe estar preparado para entender que cada ecuación del sistema puede ser entendida como una función y que los gráficos

[3] Para Sfard y Linchevski la reificación es la capacidad del estudiante para visualizar casi simultáneamente, los resultados de los procesos como objetos permanentes inseparables de los procesos subyacentes de los cuales surgen.

[4] […] mathematics is a multi-level structure where basically the same ideas are viewed differently when observed from different positions. (Sfard y Linchevski, 1994)

[5] If the letters in the equations represent unknown but fixed numbers, how can anybody expect that one or both of these fixed numbers will be "any number"? (Sfard y Linchevski, 1994)

de esas funciones son el mismo. Sostienen que solamente si el estudiante se da cuenta de esto, podrá interpretar adecuadamente una tautología como 0 = 0, que es comúnmente obtenida al aplicar alguno de los métodos algebraicos de resolución a este tipo de sistemas.

Sfard y Linchevski concluyen que la aproximación funcional no es fácilmente accesible para la mayoría de los estudiantes, inclusive para los de mejor rendimiento. Esto sugiere que en la enseñanza se debe comenzar por aproximaciones operacionales más que con objetos matemáticos ya hechos, si bien no se descarta que puedan diseñarse secuencias de aprendizaje en base a enfoques funcionales desde temprana edad y que resulten exitosas.

Sierpinska (2000) se concentra en algunos aspectos del razonamiento de los estudiantes, que podrían ser los responsables de algunas dificultades en el estudio del álgebra lineal. La autora argumenta que los estudiantes tienden a pensar más en forma práctica que teórica, y señala que esta tendencia afecta negativamente el razonamiento en el ámbito del álgebra. Distingue tres modos de pensamiento en álgebra lineal: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. Estos tres modos de pensamiento aparecen en la historia de la matemática de forma secuencial, pero ninguno de ellos eliminó a los otros dos. La autora señala que:

> [...] el hecho más interesante es que el álgebra lineal puede ser vista como el resultado de la superación de dos obstáculos o dos posiciones dogmáticas opuestas: una rechazando la entrada de los números en la geometría, y la otra de la “intuición geométrica” en el dominio puro de la aritmética. (Sierpinska, 2000)[6]

Según Sierpinska (2000), estos modos de pensamiento no constituyen etapas en el desarrollo del pensamiento algebraico sino que son vistos como modos de pensamiento que son igualmente útiles, cada uno en su contexto, y para propósitos específicos y especialmente cuando están en interacción.

Cada uno de estos modos de pensamiento utiliza un sistema de representación. El sintético-geométrico usa el lenguaje de las figuras geométricas. En el modo analítico-aritmético, las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de *n*-uplas de números que cumplen cierta condición. En el modo de pensamiento analítico-estructural

[6] […] the most interesting fact is that linear algebra can be seen as the result of an overcoming of two obstacles or two opposed dogmatic positions: one refusing the entry of numbers into the geometry, and the other that of `geometric intuition´ into the pure domain of arithmetic. (Sierpinska, 2000)

los objetos del álgebra son vistos como un todo estructural, es decir que pueden ser identificados a partir de un conjunto de propiedades. Cada uno de estos modos de pensamiento conduce a diferentes significados de la noción involucrada, porque cada uno de ellos permite una mirada diferente del objeto algebraico en cuestión.

Como nuestra temática de estudio guarda relación con el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales, nos centraremos ahora en un caso reportado por Sierpinska (2000) donde a un estudiante se le muestran tres planos intersecándose en una única recta. El estudiante señala que ello representa un sistema de ecuaciones con solución única. Se observa que el alumno está generalizando el concepto de solución para sistemas 2x2 a sistemas 3x3, desde un punto de vista sintético-geométrico pero no de un modo analítico. Todavía no puede ver que las generalizaciones de dos a tres dimensiones en el álgebra lineal no se hacen geométricamente de puntos a rectas ni de rectas a planos, sino aritméticamente, esto es, de puntos de dos coordenadas a puntos de tres coordenadas.

La autora concluye que independientemente de la forma en que trataron de aproximar el álgebra lineal a los estudiantes, las dificultades persistieron. La razón podría estar en que nunca se abandonó la presentación estructural de la teoría. Señala que no es suficiente con hacer los contenidos estructurales más concretos a partir del trabajo en bajas dimensiones y usar visualizaciones.

Resultados de investigación referidos a las dificultades que enfrentan los estudiantes en el estudio del álgebra

Existen varios trabajos de investigación que analizan desde diferentes puntos de vista y en diferentes niveles educativos las dificultades de los estudiantes en el estudio del álgebra. Reportaremos a Duval (1998 y 1992), Acuña (1998), Marines y Monroy (1998), Eslava y Villegas (1998), Barrera et al. (1998), Panizza et al. (1999), Mora (2001), Filloy et al. (2003), DeVries y Arnon (2004), Cutz (2005), Ramírez (2008 y 2005), Alcocer (2007), Manzanero (2007), Barrera (2008), Monroy (2008).

A continuación reportaremos el trabajo de Duval (1992) que si bien no trata directamente con sistemas de ecuaciones, analiza las dificultades que presentan los estudiantes al leer e interpretar representaciones en un sistema de ejes cartesianos. Como en el trabajo que estamos elaborando planificamos trabajar con representaciones gráficas y ello requerirá la interpretación de representaciones en un sistema de ejes coordenados, consideramos que es valioso conocer lo estudiado por este autor.

Duval (1992) señala que en numerosas investigaciones se han detectado dificultades de lectura y de interpretación de las representaciones cartesianas. Frecuentemente no se relaciona el concepto de pendiente con el de dirección, se confunde pendiente con altura y resulta difícil deducir la ecuación de una recta a partir de su representación gráfica. Aún después de estudiar las funciones afines, los alumnos no logran articular el registro de las representaciones gráficas y el de las ecuaciones. La razón de estas dificultades se debería al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de las representaciones gráficas y el de la escritura algebraica. Para el paso de la representación a la ecuación, la aproximación punto a punto no solamente es inadecuada sino que constituye un obstáculo.

No puede haber una utilización correcta de las representaciones gráficas si no se discriminan explícitamente las variables visuales pertinentes[7] y si no se establecen los valores de esas variables y las unidades significativas de la escritura algebraica.

Los resultados de investigaciones realizadas a alumnos de preparatoria, donde se proponía asociar una recta con su ecuación, muestran el gran abismo que separa la vía del punteo y la vía de la interpretación global. Esta última exige una discriminación de todas las variables visuales pertinentes, cosa que no se induce de la construcción de las rectas a partir de su ecuación.

El autor señala que sin una vía de interpretación global, no hay utilización posible de las gráficas para expresar analíticamente las propiedades geométricas o para interpretar las gráficas en las cuales los ejes representan magnitudes heterogéneas (tiempo, distancia, velocidad, etc.). Los ejercicios de construcción en el plano y las tareas de lectura que ponen en juego asociación punto-coordenadas, resultan insuficientes para que los alumnos logren competencia en la interpretación de las representaciones gráficas cartesianas. Se ha observado que los estudiantes permanecen en una aproximación sincrética e inoperante frente a las representaciones gráficas.

La dificultad para pasar de un registro a otro dependería de la congruencia[8] entre los registros de representación. A mayor congruencia correspondería mayor tasa de éxitos.

[7] En el caso en que la representación es una recta, las variables visuales correspondientes son: el sentido de inclinación del trazo –ascendente, descendente–, ángulos con los ejes, corte con el eje vertical –arriba, abajo, en el origen).

[8] Se entiende que hay congruencia entre registros cuando se da correspondencia uno a uno entre unidades significantes (Duval, 2002).

Duval (1998) señala que el cambio de representación semiótica de un conocimiento es causa de dificultades del aprendizaje conceptual. Muchas de las dificultades que presentan los estudiantes pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación.

En el caso del sistema semiótico de representación gráfica se define una regla de codificación: a un punto le corresponde un par ordenado de números y cualquier pareja de números codifica un punto del plano. Sin embargo, esta regla de codificación resulta insuficiente al momento de cambiar de registro, por ejemplo, cuando se quiere pasar de una relación como $y = x$ a la representación gráfica correspondiente. La regla permite representar tantos puntos como se desee pero no nos dice nada al respecto del trazo continuo que debe realizarse para obtener la representación de la recta:

> Para ello, es necesario interpolar y aceptar la pertinencia de la ley gestaltista de contigüidad. (Duval, 1998)

La insuficiencia de la regla también se revela al tener que pasar de la representación gráfica a la algebraica, a excepción de la lectura de las coordenadas de un punto. En actividades que requieren de este tipo de conversión los estudiantes exhiben mayores dificultades. En estudiantes de 16 años que habían estudiado funciones afines y realizado un trabajo en diferentes registros, se detectó que menos de dos tercios de los alumnos tuvieron éxito en reconocer $y = x$ e $y = - x$ en las dos representaciones gráficas correspondientes y menos de un tercio en reconocer $y = 2x$ e $y = x + 2$. Duval señala que las tareas de conversión son descuidadas en la enseñanza y esto acarrea problemas, por el papel fundamental que éstas juegan en la conceptualización.

A continuación reportaremos el trabajo de Acuña (1998) que si bien no trata directamente con sistemas de ecuaciones, realiza una aportación en relación a las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con representaciones en un sistema de ejes coordenados. Como en el trabajo que estamos elaborando planificamos trabajar con representaciones gráficas y ello requerirá de la localización de puntos en un sistema coordenado, creemos importante tener en cuenta lo detectado por esta autora.

Acuña (1998) observa el manejo que hacen estudiantes de 16 años de la ubicación espacial de conjuntos de puntos en el plano cartesiano. Para ello propuso varios cuestionarios con ejercicios que requerían de la conversión entre el registro gráfico y pareja ordenada en tareas de localización de puntos y movimiento de figuras geométricas. Desde el punto de vista teórico se basa en Duval (1993), considerando que la relación entre las diferentes representaciones como son la gráfica, la algebraica o el lenguaje natural la lleva a colocarse en una interpretación semiótica del fenómeno. Esto es, sobre la relación entre distintos sistemas de signos utilizados que representan el mismo objeto.

La autora concluye que los estudiantes pueden desempeñarse exitosamente en tareas de representación de puntos y de conjuntos de puntos siempre que cuenten con una identificación de los ejes cartesianos. Las tareas se complican cuando la consigna de trabajo incluye conceptos como: la ordenada, la abscisa, los puntos de intersección, la recta que pasa por los puntos, los puntos que corresponden a una determinada zona, los puntos que están sobre alguna recta, entre otros. En la utilización de la estrategia de localización horizontal-vertical de puntos, observa que hay dos tareas involucradas que son diferentes: una que va del registro gráfico al de pareja ordenada y la otra en sentido inverso. La primera es más compleja que la segunda pues implica la elección de puntos que se deben traducir a través de parejas ordenadas. Señala finalmente que la articulación de los registros de pareja ordenada y gráfico, en el tipo de tareas que ella trabajó, no está establecida.

Marines y Monroy (1998) estudian las dificultades que se presentan en el pensamiento del estudiante al relacionar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, partiendo de una representación gráfica a su correspondiente representación analítica. La investigación se desarrolla en base a una entrevista, partiendo de una descripción verbal, pasando posteriormente a una representación gráfica y finalizando con una parte analítica, todo aplicado a los sistemas 3x3. Las entrevistas fueron propuestas a un grupo de maestros que habían recibido cursos de álgebra lineal y que impartían la materia álgebra lineal a nivel superior.

Observaron que en general existen dificultades al transitar del pensamiento sintético al pensamiento analítico, mayor es la dificultad al trabajar en el nivel de tres dimensiones. Los autores consideran que esto se debe a que cuando se habla gráficamente de soluciones, sólo se realiza en un contexto bidimensional y no tridimensional, lo que hace que no se pueda generalizar. Detectaron que existen categorías que son más difíciles de pensar, como es el caso de tres planos concurrentes, planos intersecándose dos a dos, dos planos coincidentes y uno secante a ellos, dos planos paralelos y uno secante a ambos y dos planos coincidentes y uno paralelo a ellos. Existe una categoría en la que todos pensaron que es la de tres planos distintos y paralelos. En el trabajo se señala que faltan estrategias de graficación y visualización que permitan pasar de la forma analítica a la forma geométrica y mucho más de la forma geométrica a la analítica.

Marines y Monroy concluyen que en general, la mayoría de los profesores no tratan en sus cursos normales los sistemas 3x3 en modo gráfico, lo cual coincide con los programas de estudio y los libros de texto. Consideran que para que un sistema 3x3 se pueda relacionar con más facilidad con su representación geométrica, es posible aplicar algunos de los siguientes conceptos: vector perpendicular, productos punto entre vectores, dependencia e independencia lineal entre vectores y la función determinante, esto facilitaría el modo de pensamiento analítico-estructural.

Eslava y Villegas (1998) analizan los modos de pensamiento sintético y analítico en la representación de las posibles posiciones relativas de tres rectas en el plano. Para ello realizan entrevistas a ocho estudiantes del nivel medio superior. Los autores concluyen que los alumnos entrevistados presentaron dificultades para identificar de manera detallada las diferentes posiciones relativas de tres rectas en el plano (sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas). Además, los estudiantes no tienen claro el concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones; algunos pensaron que la solución del sistema de ecuaciones es la intersección de las rectas con los ejes coordenados. Al plantearles el caso de tres rectas en el plano que se intersecan dos a dos, de tal forma que los puntos de intersección son vértices de un triángulo en el plano, más de la mitad de los estudiantes entrevistados afirmaron que el sistema representado tiene tres soluciones. Esto revela que los estudiantes asocian cualquier intersección entre rectas con *solución* del sistema.

Los estudiantes presentaron también dificultades para relacionar los dos tipos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético, al no corresponder sus gráficas diseñadas con sus ecuaciones propuestas.

Barrera et al. (1998) estudian la relación y coexistencia que se presenta entre los modos de pensamiento geométrico y analítico en el estudiante, partiendo de una representación geométrica hacia una representación analítica y también analizan el concepto que los estudiantes tienen de solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. La investigación se desarrolla en base a una entrevista, partiendo de una descripción verbal, pasando posteriormente a una representación gráfica y finalizando con una parte analítica, todo aplicado a los sistemas 3x3. Las entrevistas fueron propuestas a un grupo de maestros que impartían la materia álgebra lineal a nivel superior.

Observan que el concepto solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, en la mayoría de los entrevistados, está entendido a través de la definición, pero no está aprendido, ya que manifiestan dificultades al aplicarlo en una situación geométrica. El nivel de entendimiento en sistemas 2x2 es mayor, ya que su representación geométrica se realiza en el plano y aparece en la mayoría de los textos de álgebra lineal. Razón por la cual los profesores lo manejan en su discurso matemático escolar. Obtuvieron evidencias de que tres planos que se intersecan dos a dos y dos planos paralelos y uno secante a ellos, son considerados por los entrevistados como sistemas que tienen solución (las rectas de intersección), cuando en realidad estos sistemas no poseen solución. La categoría menos pensada por los entrevistados fue la de tres planos coincidentes porque consideraban que se trataba de un solo plano.

Concluyen que en el discurso matemático escolar vigente, el concepto de solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es tratado en el contexto analítico aritmético, a través de algoritmos y métodos para la obtención del conjunto solución. Esto conduce a estudiantes y profesores a trabajar en forma mecánica y no se logra interiorizar el concepto de solución. Proponen que se trabaje también en el ámbito del pensamiento sintético-geométrico y en la relación entre estos dos tipos de pensamiento para poder llegar así a un nivel de pensamiento analítico-estructural.

Panizza et al. (1999) presentan el trabajo de seis estudiantes en relación al tema ecuación lineal con dos variables[9]. Los estudiantes habían previamente elaborado la concepción de ecuaciones como igualdades numéricas en las que las letras designan números a ser encontrados y habían además, estudiado recientemente los sistemas de ecuaciones 2x2. Las autoras se preguntaron si los estudiantes podrían concebir una ecuación con dos variables aislada de los sistemas de ecuaciones, si serían capaces de otorgar entidad al objeto ecuación de dos variables y al mismo tiempo reconocerlo como parte de un sistema de ecuaciones lineales y cómo enfrentarían la situación de que una ecuación puede tener infinitas soluciones, habida cuenta de la concepción de las letras como incógnitas que habían elaborado previamente. También se cuestionaron si los conocimientos aritméticos ayudarían a los estudiantes como cuando estudiaron ecuaciones con una incógnita y si la noción de variable es utilizada en el trabajo con los estudiantes en el ámbito de las ecuaciones o su mención se restringe al contexto de las funciones que en general se enseñan en forma separada.

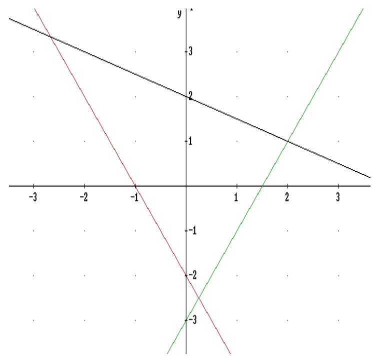
Si bien señalan que no es su intención contestar a todas estas interrogantes, las autoras concluyen que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los estudiantes

[9] Se respeta la denominación que utilizan las autoras del trabajo.

como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Cuando la ecuación aparece en un sistema, estos adaptan bien la concepción de letra como incógnita a la resolución de sistemas con solución única en el sentido de que ahora en lugar de determinar únicamente a x hay que determinar x e y. Parecería que la noción de incógnita no resultaría eficaz para interpretar el rol de las letras en una ecuación con dos variables, objeto éste que debería ser comprendido si los sistemas de ecuaciones lineales fueran concebidos como un conjunto de condiciones independientes a las cuales se les exige que se deben cumplir a la vez. Por otra parte, a pesar del tratamiento de la ecuación lineal con dos variables como ecuación de la recta, los alumnos tienen dificultades en establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

La posibilidad de aproximarse a las infinitas soluciones de una ecuación lineal con dos variables apareció bajo dos concepciones diferentes y centradas en objetos distintos. Un estudiante interpretó la ecuación lineal como una función lineal, a partir de la cual pudo construir soluciones otorgándole valores a una de las variables. Los otros estudiantes, concibieron las infinitas soluciones a partir de las distintas soluciones únicas que se fueron encontrando a sistemas de ecuaciones donde una misma ecuación permanecía fija. Estos alumnos parecen estar más lejos de hacer confluir en el objeto ecuación lineal las nociones de variable y de dependencia para obtener soluciones. Esto significa que si centran su atención en la concepción de letras como incógnitas, estarían más lejos de construir un sentido para el nuevo objeto. Las investigadoras que llevaron adelante este trabajo dejan asentada finalmente la importancia de avanzar en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de las nociones de incógnita y variable, para arrojar luz sobre la relación entre la aritmética y el álgebra.

Mora (2001) estudia algunas dificultades asociadas a la interpretación del concepto *solución* de un sistema de ecuaciones lineales. Menciona lo reportado por Eslava y Villegas (1998) que detectaron que la mayoría de los estudiantes contestan que un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas donde las rectas asociadas a las ecuaciones tienen una configuración del tipo que muestra la imagen siguiente, tiene tres soluciones pues las asocian a los puntos de corte que surgen de tomar las rectas dos a dos.



Mora también menciona que en las prácticas de aula, los docentes evitan proponer a los estudiantes sistemas de ecuaciones incompatibles o indeterminados, sobretodo al momento de emplear un método algebraico de resolución, pues conducen a situaciones donde aparecen por ejemplo expresiones del tipo 0 = 0 o 0 = 5, que acarrean dificultades al momento de ser interpretadas. Específicamente, Mora se propuso entonces, estudiar qué afirman los estudiantes cuando al resolver un sistema de ecuaciones lineales llegan a expresiones del tipo 0 = 0 o 0 = r donde r es un número real distinto de cero, y trató de explicar a lo largo de su investigación, qué significado tiene esto para los estudiantes en el contexto de los sistemas de ecuaciones, y cómo podría darse a estas expresiones una interpretación geométrica. Su objetivo de investigación fue lograr una conexión en los modos de pensamiento analítico y sintético-geométrico a través de una secuencia de problemas, que permitieran ver en juego estos dos modos de pensamiento enfocando la construcción de la noción de *solución* de un sistema de ecuaciones.

En la secuencia que aplicó a los estudiantes aparecían sistemas de ecuaciones que no tenían solución y sistemas que tenían infinitas soluciones. La intención fue provocar un debate entre los estudiantes que los condujera a una situación de aprendizaje, de tal manera que estuviera en juego el concepto de *solución* de un sistema y pudieran distinguir los tres casos que se pueden presentar en un sistema, tanto analítica como geométricamente. Comprobó que el modo de pensamiento geométrico funciona como una herramienta de apoyo para dar significado a los procedimientos analíticos y además motiva a la reflexión matemática en el estudiante. Al analizar las expresiones del tipo 0 = 0 y 0 = 1, observó que los estudiantes ofrecen algunas respuestas basadas únicamente en la memoria, recordando lo que sus profesores les enseñaron. Lo que sí mostraron con claridad al resolver la secuencia es que buscar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, gráficamente es encontrar las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.

Mora señala que el hecho de que el 0 = 0 sea siempre cierto y el 0 = 1 sea siempre falso desde un punto de vista aritmético, podría constituir un tipo de obstáculo para permitir profundizar en su significado geométrico dentro de los sistemas de ecuaciones. La falta de una interpretación geométrica directa de estas expresiones causa dificultad.

En su análisis pudo constatar que los estudiantes manejan un pensamiento analítico y un pensamiento geométrico más o menos elaborado, pero no logran establecer una relación clara entre ambos pensamientos. Después de haber analizado algunas expresiones verbales y escritas de los estudiantes, pudo detectar algunos trazos de pensamiento analítico y sintético-geométrico y vio que este último les proporciona información más natural para contestar correctamente ciertas cuestiones matemáticas. Es en la interacción entre ideas intuitivas y formales que los estudiantes no logran establecer, por ejemplo, las equivalencias entre una expresión 0 = 0 y dos rectas coincidentes.

Filloy et al. (2003) analizan el significado del signo de igual que es generado cuando los estudiantes utilizan el método de sustitución o igualación para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Estos métodos son usualmente presentados a través de un proceso de extensión de la sintaxis y significados enseñados para resolver ecuaciones lineales con una incógnita. A través de estos procesos algunos estudiantes pudieron dar sentido a los métodos y generar nuevos significados. Los autores concluyen que la dialéctica entre la sintaxis y la semántica constituye el principal obstáculo en la ocurrencia de errores cuando se sigue una regla para la cual es necesario usar una o más reglas que requieran de competencia previa.

DeVries y Arnon (2004) reportan una investigación realizada en el marco de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), que aborda el concepto de solución de un sistema de ecuaciones. Las entrevistas que realizaron revelaron varias concepciones erróneas del concepto *solución* de una ecuación.

El propósito del trabajo que reportan fue lograr una aproximación a las ideas que los estudiantes poseen sobre *solución* y comenzar a realizar una primera versión de descomposición genética para este concepto.

En particular, señalan que en esta primera fase de su investigación y de acuerdo a las deficiencias del cuestionario que aplicaron, pudieron obtener muy poca información acerca del concepto de *solución* de una ecuación.

Reportan que algunos estudiantes confunden la solución de una ecuación (o sistema), con la constante que está escrita, en muchos casos, a la derecha de la ecuación (o sistema), es decir cuando la ecuación está escrita de la forma $f(X)=k$ con k real. Esto guarda relación con las investigaciones que señalan que estudiantes de diferentes edades tienden a pensar que el signo de igual significa "el resultado es".

Otros estudiantes confunden el concepto de *solución* con *resolver*. Es decir que, en lugar de utilizar el procedimiento de verificación para determinar si estamos o no frente a una solución, optan por resolver en lugar de sustituir. En este caso los autores interpretan que el concepto de solución que desarrollaron los estudiantes consiste en la acción de resolver una ecuación (o sistema de ecuaciones), más que en la acción de sustituir. En el nivel de acción el estudiante tampoco puede predecir cuál será la forma de la solución que obtendrá sin pasar por el proceso de resolución. Los investigadores predicen que usar la acción de sustituir como base para el desarrollo del concepto de solución favorecerá la interiorización de la acción y su transformación en un proceso.

Los autores terminan sugiriendo una secuencia de aprendizaje que surge de la descomposición genética por ellos realizada. Proponen comenzar ayudando a los estudiantes a construir el nivel de Acción del concepto de ecuación, incluyendo el concepto de solución, la habilidad de identificar en ella dos funciones, la intersección de sus dominios, sus codominios, y solución como un elemento del dominio, tal que al realizarse la sustitución permite obtener una proposición verdadera. En esta instancia proponen sustituir por elementos del dominio común y ver si son o no soluciones.

Para el nivel de ecuación como Proceso, incluyendo el concepto de solución, sugieren que se debe enseñar a los estudiantes a identificar las dos funciones, sus dominios y codominios para diversas formas de la ecuación. No se les aportan soluciones de las ecuaciones y se les pide que describan el formato de las posibles soluciones y no soluciones.

Para alcanzar el nivel Objeto del concepto de solución, recomiendan trabajar con conjuntos finitos. Con ayuda del programa ISETL, se les pide a los estudiantes diseñar un programa tal que al ingresar una ecuación, la computadora les devuelva el conjunto solución. El programa lo que hace es ir chequeando uno por uno los elementos del conjunto dado y de allí obtiene los que verifican. Cuando los estudiantes enfrenten más tarde sistemas de ecuaciones sobre conjuntos infinitos, deberán sentir la necesidad de otros métodos, ya que no es posible la verificación uno a uno de los elementos del conjunto dado por ser infinito. Aprender a resolver algoritmos incluirá ahora el entendimiento de lo que el algoritmo hace: produce solamente sustituciones que generan proposiciones verdaderas y sólo esas sustituciones. A partir de esto diseñaron un segundo cuestionario para continuar con sus investigaciones.

Cutz (2005) analiza algunos fenómenos relacionados con la representación geométrica del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, y las dificultades de los estudiantes relativas al tránsito entre diferentes representaciones de los sistemas de ecuaciones lineales: la geométrica y la analítica.
Utiliza como marco teórico el presentado en Sierpinska (2000) relativo a los diferentes modos de pensamiento en álgebra lineal y propone diversas actividades a los estudiantes que ponen en juego estos modos de pensamiento. Cutz concluye que la mayoría de los estudiantes entrevistados presenta una gran dificultad para lograr un tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales tanto de dos como de tres incógnitas. En particular, los estudiantes presentan problemas con el concepto solución en el momento de efectuar un pasaje del modo sintético-geométrico al analítico-aritmético o analítico-estructural.
También quedó en evidencia que los estudiantes tienden a relacionar a la solución de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, con el punto de intersección de al menos dos de las rectas que representan gráficamente al sistema.
Recomienda relacionar a la solución de un sistema de ecuaciones lineales con su representación gráfica y poner mayor atención al significado del concepto, evitando que la explicación quede sujeta a los métodos de resolución. Sugiere buscar estrategias que favorezcan el tratamiento de los sistemas en los diferentes modos de pensamiento y proponer actividades a los estudiantes que requieran el tránsito entre ellos.

Ramírez (2005) se plantea identificar y analizar las dificultades que presentan los estudiantes en la representación gráfica y la presentación analítica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Utiliza como marco teórico los modos de pensamiento presentados por Sierpinska (2000).
Los estudiantes que entrevistó evidenciaron dificultades al trabajar con sistemas con infinitas soluciones y su representación gráfica; tuvieron problemas para plantear las ecuaciones de un sistema dado, mostrando dificultades con el tránsito entre el modo de pensamiento geométrico y el modo analítico. Manifestaron dificultades también para interpretar la expresión 0 = 0, señalando que el sistema no tiene solución.
Ramírez recomienda el diseño de situaciones novedosas que involucren diferentes modos de pensamiento y que requieran tanto el análisis de sistemas con solución única, como los casos sin solución o con infinitas soluciones, sin privilegiar el primero de ellos.

Alcocer (2007) se propone profundizar en el entendimiento de las dificultades que presentan los estudiantes del nivel superior con el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales en los contextos analítico y geométrico, considerando los casos de solución única, infinitas soluciones y el caso de no solución. Como marco teórico utiliza los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000). Alcocer observa que los estudiantes de Ingeniería con los que trabajó, consideran como solución de un sistema de ecuaciones lineales los puntos de intersección de las rectas del sistema tomadas de a dos o los puntos de intersección de las rectas del sistema con los ejes coordenados. También observó que los estudiantes piensan que el número de soluciones de un sistema está relacionado con el número de incógnitas del sistema, esto es, si un sistema tiene dos incógnitas tendrá dos soluciones, si tiene tres incógnitas tendrá tres soluciones, etc. Los estudiantes con los que se trabajó no pudieron distinguir los diferentes casos de solución para un sistema, presentando por ejemplo un sistema con solución única cuando se les pedía un sistema sin solución. Estas concepciones erróneas permanecieron aún después de un curso de álgebra lineal que tuvo énfasis en corregir los errores antes mencionados. Alcocer sugiere entonces que no basta con tratar ejemplos aislados, sino que es necesario dotar de sentido a los conceptos y procedimientos que se desea enseñar.

Manzanero (2007) identifica las dificultades que presentan los estudiantes al estudiar el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Sustenta su trabajo en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema).

Entrevistó a seis estudiantes del nivel superior y observó que ningún estudiante mostró tener una concepción objeto para el concepto de conjunto solución y que pocos de ellos mostraron haber construido un proceso de solución, en particular en el caso de los sistemas con tres variables. También se apreciaron dificultades con la parametrización.

Manzanero recomienda que en vías de lograr la encapsulación es necesario presentar a los estudiantes la solución de los sistemas de ecuaciones en forma algebraica, trabajando en forma coordinada con la construcción y solución del sistema en forma geométrica. La coordinación de estas dos representaciones permitirá lograr una mejor comprensión en la solución de los sistemas de ecuaciones. También sugiere presentar a los alumnos todos los casos posibles de solución de un sistema de ecuaciones, utilizando diferentes representaciones y no limitarlos a la solución de ejemplos prototípicos. Recomienda además presentar a los estudiantes problemas no triviales para la resolución de sistemas de ecuaciones, con el fin de que se enriquezca su esquema del concepto de solución.

Estos problemas necesitarán al menos de una concepción proceso para resolverse y deben incluir preguntas que inviten a la reflexión para lograr la encapsulación; un ejemplo son los problemas que involucran parámetros o los problemas presentados en un contexto geométrico.

Barrera (2008) analiza los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural en álgebra lineal (Sierpinska, 2000), que se ponen en juego en la solución y planteamiento de una selección de problemas de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con dos incógnitas, y su relación con conceptos de dependencia e independencia lineal, así como las estrategias y dificultades que presentan los estudiantes de los primeros semestres de la carrera de ingeniería. Barrera detecta que existen dificultades en la transición entre los diferentes modos de pensamiento y con el concepto de sistema homogéneo. Detecta también que no existe una conexión entre los distintos modos de pensamiento en los estudiantes al abordar los problemas de sistemas de ecuaciones lineales y de conceptos estructurales relacionados como ser combinación lineal y dependencia lineal. Observa que los estudiantes utilizan un modo de pensamiento y no recurren a otros aun cuando la situación matemática lo requiera. Por ejemplo, algunos estudiantes utilizan el modo de pensamiento analítico-estructural, y no otros, mientras que algunos estudiantes trabajan en el modo de pensamiento sintético-geométrico y no pueden pasar a los otros modos de pensamiento.

Ramírez (2008) retoma los resultados que obtuvo en Ramírez (2005) y se aboca en este trabajo a profundizar en el entendimiento de las concepciones de los estudiantes de nivel superior respecto a los sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres ecuaciones con dos incógnitas, utilizando como marco teórico los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000). Los cinco estudiantes con los que trabajó, habían terminado un curso de álgebra lineal en donde habían estudiado los sistemas de ecuaciones lineales. Ramírez concluye que la mayoría de los estudiantes no logra determinar el caso de infinitas soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, analíticamente tres ecuaciones equivalentes y gráficamente tres rectas coincidentes. Los estudiantes evidencian dificultades en el modo de pensamiento analítico-estructural pues no consideran las propiedades de los sistemas.

Monroy (2008) estudia las estrategias y dificultades que presentan los estudiantes de los primeros semestres de la licenciatura de la carrera de ingeniería y los profesores de matemática que imparten álgebra lineal a nivel de licenciatura, en relación al concepto de solución y planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con tres o más incógnitas y su relación con conceptos de dependencia e independencia lineal. Realiza su análisis en base a los tres modos de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, propuestos por Sierpinska (2000).

Monroy encuentra evidencias de que los estudiantes y algunos profesores de álgebra lineal tienen dificultades para transitar entre los diferentes modos de pensamiento al trabajar con sistemas de ecuaciones lineales homogéneos que tienen diferente número de ecuaciones que de incógnitas así como en la interpretación del concepto de solución en relación con el concepto de dependencia e independencia lineal.

Recomienda que tanto los libros de texto como el profesor en clase, den menor relevancia al pensamiento analítico-aritmético en los sistemas homogéneos, dedicando menos tiempo a la parte algorítmica con los casos más comunes (problemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas con solución trivial). Monroy sugiere dar mayor importancia a los casos que permitan unir un conocimiento con otros mediante el diseño de actividades donde el estudiante descubra la relación que tiene este tema en particular con los conceptos de dependencia e independencia lineal, base, dimensión, transformación lineal y espacio vectorial. Asimismo sugiere que los libros de álgebra lineal y el profesor, tengan en cuenta el desarrollo histórico de los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos para implementar actividades didácticas que permitan al estudiante reflexionar y construir su propio conocimiento recreando quizás, las condiciones en que fue creado.

Monroy concluye que el modo de pensamiento estructural es el menos favorecido en el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos tanto en el desarrollo del tema que aparece en los libros de texto como por parte de los profesores, por lo tanto recomienda trabajar en sentido inverso de cómo se trabaja normalmente: partir de conocer la solución del sistema homogéneo (pensamiento analítico-estructural) para plantear el sistema correspondiente (pensamiento analítico-aritmético) y hacer su gráfica si existe (pensamiento sintético-geométrico). También sugiere que la utilización de algún software podría facilitar el trabajo con temas fundamentales del álgebra lineal como los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Resultados referidos a puestas en escena de diseños de enseñanza o a la actividad del profesor

En esta sección reportaremos los trabajos de Coulange (2001), Segura (2004) y Häggström (en progreso).

Coulange (2001) aborda el estudio de la actividad del profesor apoyándose en el enfoque antropológico de Yves Chevallard y de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau. Estas herramientas le permiten cuestionar la actividad de un profesor en relación a su proyecto de introducción de los sistemas de ecuaciones en una clase de tercer año de secundaria y de su puesta en práctica en un grupo de estudiantes de ese nivel. También realiza un análisis de los programas, de los textos del alumno y entrevistas a profesores.

El estudio muestra las limitaciones de los significados dados a los sistemas de ecuaciones inducidos por las intervenciones del docente en situación de clase: más allá de su elección inicial, las elecciones y las decisiones del profesor hacen aparecer el sistema como traducción algebraica del enunciado que permite culminar a través de una sustitución en una ecuación con una incógnita, que aparece a fin de cuentas como la única herramienta de resolución a los problemas planteados.

La autora concluye que a partir de los diferentes análisis realizados sobre un estudio de caso, se dibuja un plan metodológico para estudiar la actividad del profesor en la elaboración, la instalación y la gestión de las situaciones de enseñanza.

En Segura (2004) se reporta un trabajo cuyo objetivo consistió en diseñar y poner a prueba una secuencia de enseñanza que hiciera asequible el aprendizaje y solución de los objetos sistemas de ecuaciones lineales, con miras a propiciar comportamientos matemáticos y cognitivos en el quehacer de los alumnos, haciendo que el tratamiento y pasaje de registros de representación fuera el eje para la construcción de las actividades.

En este trabajo se mencionan algunas dificultades de los estudiantes, asociadas a los sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, se señala que los estudiantes resuelven un sistema de ecuaciones y no verifican la solución. Es decir, que existe una desarticulación entre el objeto sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución (Panizza et al., 1995; referido en Segura, 2004). Se ha observado también que los estudiantes no realizan correctamente el pasaje del registro verbal al algebraico de un problema que involucre un sistema de ecuaciones lineales y recurren pocas veces al pasaje del registro gráfico al algebraico para resolver un sistema de ecuaciones lineales (Pérez Donoso, 1998; referido en Segura, 2004). Por otra parte, se señala que los alumnos dan al registro de representación gráfico un estatus inframatemático, no utilizándolo para resolver sistemas de ecuaciones lineales (Ramírez, 1997; referido en Segura, 2004).

En cuanto a la situación didáctica diseñada, se buscó que las actividades giraran en torno al pasaje entre registros de representación semiótica y tratamiento entre ellos, es decir la conversión dentro del mismo registro. Los registros utilizados fueron el verbal, el gráfico y el algebraico. Se trabajó en el campo de los números reales, abarcando sistemas de ecuaciones lineales con conjunto solución unitario, vacío o infinito.

Con el fin de desarrollar y observar los comportamientos matemáticos de los alumnos se utilizó la teoría de situaciones, mientras que para los cognitivos la teoría de registros de representación semiótica.

Al término de la secuencia, y de todas las actividades planificadas la autora afirma que se pudo constatar el logro de las intenciones didácticas propuestas y el respeto al objeto matemático seleccionado. En forma posterior a la experimentación con la secuencia, se observó que quedaron subsanados algunos fenómenos como ser: la desarticulación entre los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. Esto se logró partiendo de la solución del sistema y generando las ecuaciones lineales que tuvieran esa solución. De esta forma son los alumnos que deciden que tal sistema tenga a esa solución, por lo cual se afirma la articulación. Luego de esto se pasaría a la forma habitual de enseñar los sistemas, que consiste en empezar por los sistemas y hallar la solución.

El trabajo con los tres registros de representación posibilitó que el alumno identificara al objeto sistema de ecuaciones en todos los registros ya que se emplean en forma indistinta para simbolizarlo. Es importante destacar que la secuencia utilizada no asocia el objeto sistema de ecuaciones lineales con los métodos de resolución, por lo cual evita que se confunda el objeto con los procesos de resolución.

Häggström (en progreso) analiza tres lecciones sobre la enseñanza de los sistemas de ecuaciones 2x2 por parte de tres profesores diferentes y de diferentes lugares geográficos (Hong Kong, Shanghai y Suecia). Encuentra entre ellas diferencias importantes. Sostiene que lo que los estudiantes aprenden o no aprenden, en cierto contexto, depende de las características y de los contenidos con los que los estudiantes pueden experimentar. Su marco teórico es la *teoría de la variación* que sostiene que es necesaria la experiencia en la variación para poder discernir sobre nuevos aspectos de un objeto de aprendizaje. Como ejemplo propone el caso en que a un estudiante se le ofrecen tres sistemas de ecuaciones 2x2 para resolver, uno con solución única, otro con infinitas y el tercero sin solución. Dice que un estudiante que experimenta con estos tres tipos de sistemas seguramente advertirá que el número de soluciones de un sistema no es algo que podamos dar por supuesto. En el artículo hace mención a Pang (2002) que en su tesis demostró que lo que los estudiantes aprenden o no aprenden puede ser explicado por los patrones de variación que se les han ofrecido a través de la enseñanza.

En las observaciones de clase, el autor detecta varias diferencias en las características del concepto sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que se presentó a los estudiantes. Uno de los aspectos refiere al concepto de sistema como método para resolver problemas. En una de las clases observadas, a diferencia de las otras dos, los sistemas no se presentaron como una herramienta para resolver problemas. Señala que es difícil que los estudiantes de esa clase adviertan este aspecto de los sistemas de ecuaciones, al menos durante la secuencia de aprendizaje observada. Otro aspecto diferente que encuentra entre las tres clases es que en una de ellas el profesor plantea a sus alumnos varios sistemas de ecuaciones para que ellos indiquen si son lineales y en dos incógnitas. Les permite a los estudiantes experimentar y analizar diferentes tipos de ecuaciones y sistemas, y brinda elementos para poder decidir cuándo están ante un sistema lineal y cuándo no. Esta experiencia no fue ofrecida a los estudiantes de los otros dos grupos sino que se pasó inmediatamente de la presentación de un sistema a su resolución. Estos últimos estudiantes podrían dar por supuesto que cualquier sistema es lineal y con dos incógnitas. Häggström no saca conclusiones terminantes por ahora, sino que señala que debe continuar con su investigación, analizando más clases para poder obtener mayor información.

A manera de síntesis

Entre los trabajos reseñados, los hay de diversa índole. Duval (1998 y 1992) y Acuña (1998) reportan diferentes aspectos de la problemática referida a las dificultades de los estudiantes en la lectura e interpretación de las representaciones cartesianas y los tránsitos entre diferentes registros de representación, sin situarse específicamente en el ámbito de los sistemas de ecuaciones.

Sfard y Linchevsky (1994) ofrecen una teoría acerca de qué es lo que un individuo es capaz de percibir y notar cuando observa símbolos algebraicos. Este trabajo ha constituido una importante contribución a la comprensión de cómo se desarrolla el pensamiento algebraico.

Panizza et al. (1999) analizan el trabajo de seis estudiantes y sus dificultades para concebir una ecuación con dos variables aislada de los sistemas de ecuaciones. Recomiendan avanzar en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de la noción de incógnita y el de la noción de variable para llegar a conocer la compleja relación entre la aritmética y el álgebra, pero no llegan a proponer actividades para la enseñanza del tema.

Sierpinska (2000) se concentra en algunos aspectos del razonamiento de los estudiantes del nivel superior, que podrían ser los responsables de algunas dificultades en el estudio del álgebra lineal y realiza aportes teóricos para interpretar esas dificultades.

Häggström (en progreso) y Coulange (2001) observan lecciones de enseñanza, aunque con diferentes objetivos. El primero para saber qué oportunidades de variación en las actividades se ofrecen a los alumnos y cómo esto redunda en su aprendizaje y la segunda para establecer un plan metodológico para estudiar la actividad del profesor.

Filloy et al. (2003) analizan el significado del signo de igual que se genera cuando los estudiantes utilizan el método de sustitución o igualación para resolver un sistema con dos incógnitas. No se ubica en la construcción de la noción de solución en forma previa al abordaje de los métodos de resolución.

DeVries y Arnon (2004) trabajan en el análisis del concepto de solución que han construido estudiantes de álgebra lineal. Presentan a sus estudiantes el trabajo con matrices, ecuaciones con diferente número de incógnitas sin concentrarse específicamente en los sistemas 2x2. Reportan que por las deficiencias del diseño del cuestionario no pudieron recoger toda la información que buscaban.

Segura (2004) trabaja con alumnos del nivel medio. Diseña y pone a prueba una secuencia de enseñanza para el concepto solución de un sistema 2x2. Esta investigadora reporta resultados positivos de la puesta en escena de su diseño, pero no aplica un cuestionario posterior a la puesta en escena en clase de su secuencia, que ponga a prueba los conceptos construidos por los estudiantes y evidencie la transferencia del concepto a situaciones nuevas. También asume, acríticamente que la enseñanza de los sistemas debe iniciarse por el caso 2x2, punto que se cuestiona en este trabajo.

Barrera et al. (1998), Eslava y Villegas (1998), Marines y Monroy (1998), Mora (2001), Ramírez (2005), Cutz (2005), Alcocer (2007), Manzanero (2007), Barrera (2008), Ramírez (2008), Monroy (2008) estudian las dificultades de los estudiantes del nivel medio superior, superior y de docentes del nivel superior que enseñan álgebra lineal, en relación a los sistemas de ecuaciones, la interpretación del concepto solución y el tránsito entre las representaciones gráfica y analítica. Estos trabajos dan cuenta de la problemática, aportan conclusiones y sugerencias didácticas pero no avanzan en el diseño de una secuencia de enseñanza del tema que recoja sus hallazgos.

Nuestro trabajo se propone por un lado dar cuenta de la problemática en torno al aprendizaje del concepto *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en estudiantes uruguayos del nivel medio y medio superior, para luego proponer una secuencia de enseñanza del concepto para estudiantes del nivel medio. La importancia de nuestro trabajo radica en que el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en el nivel medio (estudiantes de 14-15 años), puede ser considerado como la puerta de entrada al álgebra lineal. Dadas las dificultades reportadas en alumnos del nivel superior y en docentes de ese nivel que enseñan álgebra lineal, relativas a su comprensión del concepto *solución* de un sistema de ecuaciones lineales y a las relaciones entre las representaciones geométricas y gráficas, consideramos que es relevante comenzar a aportar elementos que contribuyan a mejorar la enseñanza del tema desde su puerta de entrada, para facilitar el aprendizaje en niveles subsecuentes y que las nociones adquiridas tempranamente no constituyan obstáculos posteriores para el aprendizaje.

Es nuestro objetivo brindar elementos concretos para mejorar la enseñanza del tema y no ubicar nuestro trabajo en el puro análisis de las dificultades de los estudiantes. Deseamos brindar información y actividades de clase, basadas en la investigación, que puedan resultar útiles a los profesores de matemática para repensar sus prácticas.

CAPÍTULO II

Marco teórico

El hombre es la medida de todas las cosas
Protágoras

En esta sección se abordan los aspectos teóricos que nos permitirán dar interpretación al pensamiento de los estudiantes. Utilizaremos el punto de vista de Sierpinska (2000) complementado con la perspectiva de Vinner (1991) sobre la formación de conceptos. La inclusión de estos aspectos se fundamenta en la necesidad de poseer elementos teóricos para analizar e interpretar las concepciones de los estudiantes y poder así, dar explicaciones a la problemática que se estudia.

Consideramos que los modos de pensamiento presentados en Sierpinska (2000) (sintético-geométrico, analítico-aritmético, analítico-estructural) son apropiados para interpretar los fenómenos en los que nos hemos concentrado. Cuando hablamos de modos de pensamiento nos referimos a que los objetos matemáticos adquieren diferentes significados al trabajar en diferentes modos. Esto podría ser causa de dificultades cuando, por ejemplo, presentamos una pregunta en el modo sintético y pedimos al estudiante que dé una interpretación analítica. Como ya señalamos en el capítulo precedente, estos tres modos de pensamiento aparecen en la historia de la matemática de forma secuencial, pero ninguno de ellos eliminó a los otros dos. La autora señala que:

> [...] el hecho más interesante es que el álgebra lineal puede ser vista como el resultado de la superación de dos obstáculos o dos posiciones dogmáticas opuestas: una rechazando la entrada de los números en la geometría, y la otra de la “intuición geométrica” en el dominio puro de la aritmética. (Sierpinska, 2000)[10]

Según Sierpinska (2000), estos modos de pensamiento no constituyen etapas en el desarrollo del pensamiento algebraico sino que son vistos como modos de pensamiento que son igualmente útiles, cada uno en su contexto, y para propósitos específicos y especialmente cuando están en interacción.

[10] […] the most interesting fact is that linear algebra can be seen as the result of an overcoming of two obstacles or two opposed dogmatic positions: one refusing the entry of numbers into the geometry, and the other that of `geometric intuition´ into the pure domain of arithmetic. (Sierpinska, 2000)

Los modos de pensamiento no sólo constituyen formas de pensar y entender los objetos matemáticos sino que también actúan como herramientas heurísticas al resolver problemas. Cada uno de los modos de pensamiento constituye una vía de acceso a los objetos matemáticos aunque la coordinación y tránsito entre ellos permite, por un lado, un pensamiento más versátil, y por otro, ver diferentes facetas del objeto matemático, ofreciéndonos diferentes aspectos según el registro en el que se ubique. Tal como Sierpinska lo señala, cada uno de estos modos de pensamiento conduce a diferentes significados del objeto, porque cada uno de ellos permite una mirada diferente del objeto algebraico en cuestión.

En el modo sintético-geométrico (SG) los objetos son presentados al estudiante mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos. Las interpretaciones se dan mediante las operaciones que están definidas entre conjuntos, en este caso de puntos, esto es la unión, la intersección, etc. La visualización matemática[11] juega un rol fundamental en lo que es la resolución de problemas en este modo de pensamiento.

En el modo analítico-aritmético (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como *n*-uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas. En este modo el pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas o simbólicas.

En el modo analítico-estructural (AE) recurrimos más bien a las propiedades de los objetos o a su caracterización a través de axiomas. Las matrices, funciones, sucesiones, entre otras, pueden ser vistas como elementos genéricos de un espacio vectorial.

Los modos de pensamiento, como ya dijimos, son formas de ver y entender los objetos matemáticos. Estos dependen de los tipos de relaciones y objetos que evoquemos al momento de pensar en un objeto algebraico o al intentar resolver una tarea. Indudablemente el tipo de tarea que se le presenta a un estudiante guarda estrecha relación con el modo de pensamiento que éste utiliza para resolverla. Ya sea porque se le pide razonar en un determinado registro o porque la tarea misma así lo requiere. Por otra parte también debemos tener en cuenta que por los enfoques que habitualmente se realizan en los niveles educativos que nos interesan en este trabajo, los estudiantes funcionarán más bien en los modos SG o AA.

[11] En el sentido de Zimmermann y Cunningham (1991)

Como ya se señaló, el tipo de tareas a las que se enfrenta un estudiante de alguna forma contribuye u orienta a que se utilice un determinado modo de pensamiento o a que la coordinación entre varios de ellos sea necesaria.

Agunos ejemplos que ilustran el marco téorico

A continuación se propondrán, a modo de ejemplo, algunas actividades y se analizarán qué modos de pensamiento se ponen en juego al enfrentarlas, con el objetivo de mostrar de qué forma el marco teórico elegido permite interpretar el trabajo que realizan los alumnos.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x - 7y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ -x + y = -3 \end{cases}$$

Si el estudiante solamente ha estudiado métodos algebraicos para resolver sistemas 2x2, funcionará en el modo AA, ya que no tiene otra vía de acceso al conocimiento. Las soluciones del problema son parejas ordenadas de reales que verifican a la vez las dos ecuaciones. Si ha estudiado además el método gráfico podrá por un lado optar por el método a emplear, pasando al registro gráfico si lo considerara pertinente pero además podría interpretar la situación en el modo SG aún cuando no utilizara el método gráfico para resolver el sistema. Me refiero a razonamientos del tipo: "cada ecuación está asociada a una recta, debo investigar si se trata de rectas secantes o paralelas (distintas o coincidentes)". Para ello podrá utilizar un método algebraico, pero su modo de pensamiento es SG que luego coordinará con el modo AA al tener que interpretar los resultados obtenidos por el método algebraico para poder dar respuesta al problema. Vale aclarar que aún cuando el estudiante resuelva el sistema por el método gráfico necesitará pensar en relaciones numéricas que le permitan obtener puntos para graficar y por tanto estará usando modos de pensamiento propios del modo AA. Si los estudiantes hubieran estudiado la condición de paralelismo entre rectas (usando la proporcionalidad de los coeficientes de las ecuaciones) cabría la posibilidad de que algún estudiante observara el segundo sistema y contestara que tiene infinitas soluciones sin necesidad de ensayar algún método de resolución o de pensar en rectas paralelas, por lo que podría encuadrarse en el modo AE. Al pensar en la condición de paralelismo se ponen en juego relaciones numéricas que podrían denotar un modo de pensamiento AA pero el estudiante estaría pensando en una propiedad.

Si la tarea anterior la proponemos de otra forma, por ejemplo pidiendo a los estudiantes que clasifiquen los sistemas[12], se ponen en juego otros modos de pensamiento. Vemos a continuación una actividad de este tipo:

Clasifica los siguientes sistemas según sean compatibles (determinados o indeterminados) o incompatibles.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x - 7y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ -x + y = -3 \end{cases}$$

Ahora no es necesario resolver los sistemas para responder a la consigna. Sin embargo para muchos estudiantes será necesario hacerlo, y para ello funcionarán en los modos SG o AA según el método que empleen o la coordinación de ambos. Al no tener que determinar el par ordenado solución en el primer caso, simplemente se podrá utilizar la condición de paralelismo (proporcionalidad de coeficientes en las ecuaciones) para dar respuesta al problema, cuestión que podría denotar un pensamiento AE.

Investiga si el par (3, 2) es solución del siguiente sistema:

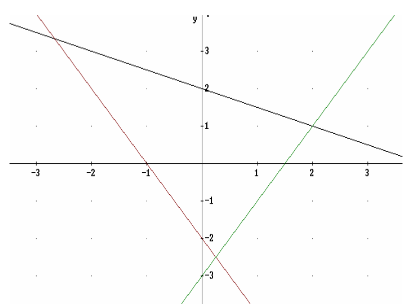
$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ x - 7y = -5 \end{cases}$$

[12] Decimos que un sistema de ecuaciones lineales es compatible cuando tiene solución. Si esta es única decimos que es un sistema compatible determinado y si tiene infinitas, decimos que es compatible indeterminado. Cuando un sistema no tiene solución decimos que es incompatible.

En este tipo de tareas la mayoría de los estudiantes necesita pasar por la resolución del sistema en lugar de verificar, tal como lo reporta Segura (2004). Esto refleja un pensamiento del tipo AA. De utilizar el procedimiento de verificación también se pondrían en juego relaciones numéricas pero si bien la persona piensa en el modo AA también denota conocimientos de orden teórico, razón por lo cual podría decirse que se trata de un pensamiento más del tipo AE pues refleja claramente los conceptos de sistema de ecuaciones y solución de un sistema.

Se presentarán a continuación algunas actividades propuestas en los estudios exploratorios que ya se reportaron en la primera sección de este trabajo, resueltas en esta ocasión por estudiantes de profesorado de matemática, y se intentará interpretarlas a la luz del marco teórico de los modos de pensamiento. Se comentará en primer lugar la siguiente actividad:

A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Qué puedes decir acerca de la solución del sistema formado por las tres ecuaciones?



Sebastián, un estudiante con amplia experiencia en sistemas 2x2 y 3x3 responde: *"Sé que si las 3 rectas son secantes en un punto, el sistema es compatible determinado. Creo que, si las rectas son paralelas o coinciden, el sistema es incompatible, ¿sería compatible indeterminado?*

El estudiante evidencia un modo de pensamiento SG pues reflexiona acerca de la solución única en términos geométricos. No logra articular adecuadamente la configuración geométrica que corresponde a un sistema 3x2 sin solución. Parece reconocer en cada punto una solución (aunque no lo hace explícito) pues termina preguntándose acerca de la posibilidad de que sea compatible, es decir que haya solución y quizás con indeterminado se refiera a que hay más de una. Por otra parte evidencia ciertos conocimientos teóricos en relación a la clasificación de los sistemas según el número de soluciones, y trata de encuadrar el que se le presenta en alguno de ellos. Este conocimiento teórico no representa un modo de pensamiento AA, ya que el estudiante no recurre en ningún momento al uso de relaciones numéricas. Tampoco representa un modo de pensamiento AE pues el alumno solamente da nombre a los diferentes tipos de sistemas sin que esto constituya un modo de pensamiento que le permite dar significado a la situación.

En referencia a la misma actividad Flavia escribe lo siguiente:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \\ gx + hy = i \end{cases}$$

"Que si tengo tres ecuaciones para hallar 2 incógnitas, uno no es necesario".

Esta respuesta denota un pensamiento AA pues recurre a ecuaciones para expresar los objetos que se le presentan. La respuesta verbal que da nos muestra un pensamiento basado en procedimientos algorítmicos y no parece dar significado a un sistema 3x2 pues señala que una de las ecuaciones no es necesaria. Parecería estar pensando en hallar una solución, "las dos incógnitas" pero esto sería aplicable, para ella, sólo a sistemas 2x2.

Gonzalo dice: *"No existe un par (x,y) que verifique simultáneamente las tres ecuaciones. Sí existen soluciones considerando las ecuaciones tomadas de a dos"*.

La respuesta al problema es dada en términos de pares (x,y) y parece tener claro el concepto de sistema de ecuaciones, ¿evidencia esto un modo de pensamiento AE? Más tarde, cuando se le preguntó si el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

tiene solución, agregó:

"El par (4,-2) verifica las dos primeras ecuaciones. No verifica la tercera ecuación. Pienso en lo infrecuente de encontrar un sistema que tenga más ecuaciones que

incógnitas. Ni en la secundaria ni en el mismo IPA[13] *uno encuentra sistemas de este tipo. Entonces la cabeza de uno dice `es encontrar un par de valores que verifique simultáneamente ambas ecuaciones´. Extrapolando este pensamiento digo ´el sistema no tiene solución´. Pienso, divago, ¿qué sucedería si alguien dijera por allí ´en un sistema con más ecuaciones que incógnitas consideramos soluciones a los pares de valores que verifican las ecuaciones tomadas de a dos´?*
Es decir, pienso en la forma en que nuestra cabeza está estructurada a los ´problemas tipo´."[14]
No es del todo claro si reflexiona realmente sobre los modelos de pensamiento que se estructuran a través de la experiencia o si se trata de una forma encubierta de mostrar su inseguridad en referencia a qué significa resolver un sistema 3x2, si bien anteriormente pareció dejar en claro que entiende el concepto de sistema. Su pensamiento se realiza en términos teóricos tratando de dar significado a la situación, pensando en ecuaciones que se verifican o no simultáneamente. Puede encuadrarse en el modo AE.

Compararé ahora dos procedimientos que son muy similares pero que sin embargo denotan diferentes modos de pensamiento.
Para resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Hermione presenta:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

Sistema incompatible
No tiene solución

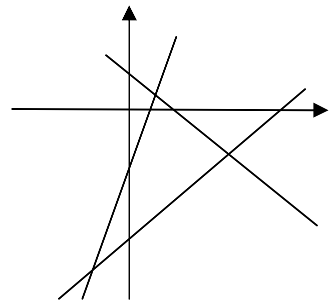
Néstor presenta:

[13] IPA es el Instituto de Profesores "Artigas", institución de nivel terciario de formación de profesores. Si bien en el currículo los alumnos tienen un curso de Álgebra Lineal, para este estudiante son inusuales los sistemas como el que se le presentó.
[14] Comentarios similares a los de Gonzalo, joven de 30 años, fueron realizados por estudiantes de 14 – 15 años a este respecto. Los adolescentes insistían una y otra vez que si tomábamos las rectas de a dos sí había solución y además tenían dudas acerca de si en un sistema 3x2, la solución debía verificar las tres ecuaciones o debíamos encontrar soluciones por cada dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x = 8 \\ 4x = 5 \end{cases}$$

La solución es $S = \phi$

Luego presenta la representación gráfica de las tres rectas:



En el primer caso se recurre a notación matricial, para llegar a que el sistema es incompatible. En el otro el estudiante utiliza las ecuaciones pero presenta además una representación gráfica para dar apoyo al resultado que ha obtenido algebraicamente. Quizás la representación gráfica le dé al estudiante mayor sensación de seguridad a la respuesta que da basada en un procedimiento algebraico. En el primer caso se utiliza un modo de pensamiento AA y en el segundo se articula el modo AA con el SG.

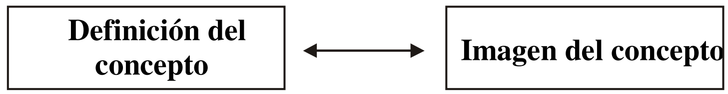
Complementando dos puntos de vista: Sierpinska (2000) y Vinner (1991)

Complementaremos el punto de vista de Sierpinska (2000), con el presentado por Vinner (1991) sobre la formación de conceptos en tanto además de querer interpretar la forma en que piensan los estudiantes queremos explicar la naturaleza del concepto *solución* de un sistema de ecuaciones lineales que se construye con las secuencias tradicionales de enseñanza y de aquí nuestro interés en considerar los ejemplos, no-ejemplos, situaciones problemáticas, textos y toda la batería didáctica que los docentes aportan durante la enseñanza y que son los que contribuyen a la formación del concepto por parte de los estudiantes. Por otra parte, nuestro segundo objetivo es elaborar una secuencia de enseñanza del concepto solución de un sistema y de ahí nuestra necesidad de centrar la atención en los ejemplos y no-ejemplos que será imprescindible trabajar con los estudiantes, con el objetivo de que construyan imágenes ricas de los conceptos en juego. La aproximación que proponemos es similar a la utilizada en Dreyfus et al. (1999) donde se complementa el punto de vista de los modos de pensamiento con el de Vinner (1983) sobre formación de conceptos.

Con el fin de presentar sus ideas a través de diagramas, Vinner (1991) modela la estructura cognitiva de un individuo asumiendo la existencia de dos celdas. Una celda es para la definición y la otra para la *imagen del concepto*. Vinner señala que la imagen del concepto es "algo" no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Esto puede ser una representación visual del concepto, en caso de que la tenga; también puede ser una colección de impresiones o experiencias asociadas al concepto.

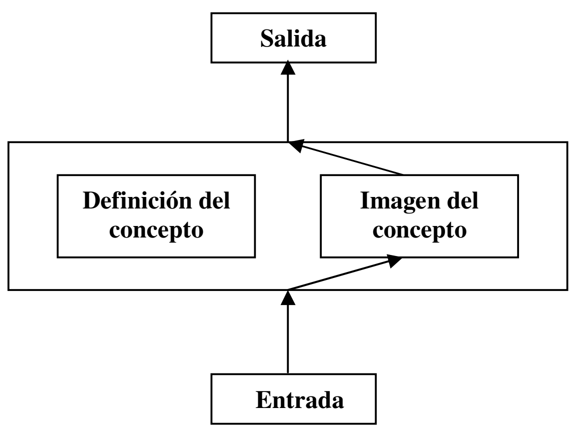
Una o las dos celdas pueden estar vacías. La celda de la imagen del concepto se considera vacía hasta que algún significado se asocie al nombre del concepto. Esto sucede, en muchos casos, cuando se memoriza la definición sin entender el significado. Debería haber interacción entre estas dos celdas aunque se pueden formar independientemente.

Según Vinner, cuando un alumno se enfrenta a la resolución de tareas matemáticas sería deseable que consultara las definiciones de los objetos matemáticos involucrados, pero este autor sostiene que en los hechos esto no sucede así. Lo que el alumno consulta para contestar es la imagen del concepto. En los ambientes cotidianos o no técnicos las personas no están habituadas a consultar las definiciones porque no las necesitan para poder comunicarse o entender el mundo que las rodea, les alcanza con consultar las imágenes asociadas a las ideas o conceptos. Esta situación que se da en los contextos cotidianos es transferida a los contextos técnicos pues es difícil entrenar al sistema cognitivo a actuar en forma contraria a su naturaleza y forzarlo a consultar la definición ante la resolución de una tarea. Si la imagen de un concepto no es lo suficientemente rica, si no contiene ejemplos y no-ejemplos del objeto, si solamente contiene aspectos parciales del mismo, el alumno podrá cometer errores al responder. Es importante destacar que la imagen de un concepto es propia de cada persona y que puede contener aspectos inconsistentes. Entonces solamente es posible hablar de imagen del concepto relacionada a un individuo específico, y además éste podrá evocar diferentes aspectos de esa imagen según la situación, por lo que debería hablarse de *imagen del concepto evocada*. Vinner considera que adquirir un concepto es formar una imagen de ese concepto. Destaca que conocer la definición de un concepto no garantiza entenderlo. Entenderlo significa poseer una imagen del concepto, cierto significado debe ser asociado al nombre del objeto. El proceso de formación de un concepto requiere de interacción entre la imagen del concepto y su definición.



Interacción entre la definición del concepto y la imagen del concepto

Respecto de la resolución de tareas, Vinner señala que los docentes están convencidos de que los estudiantes usarán las definiciones para dar una respuesta, sin embargo, en la práctica, esto no es lo que sucede. Así como en la vida cotidiana no consultamos las definiciones de los objetos para poder entender el mundo que nos rodea, en los ambientes técnicos, debido a la influencia que ejerce el modo de pensamiento cotidiano, tampoco nos vemos llevados a consultarlas. Pero en los ambientes técnicos no consultar las definiciones puede conducir a cometer errores. Este autor describe de la siguiente manera, el proceso seguido por los estudiantes para dar una respuesta que califica como *intuitiva*:



Respuesta intuitiva

Como puede apreciarse en el esquema, los alumnos consultarán la imagen del concepto y desde allí se producirá la respuesta. Si la imagen del concepto no es rica, el estudiante seguramente cometerá errores.

Vinner sostiene que los conceptos matemáticos deben ser adquiridos en el modo cotidiano de adquisición de conceptos y no en el modo técnico, esto implica empezar dando algunos ejemplos y no-ejemplos para que se forme la imagen conceptual.

Considera que para que nuestros estudiantes logren utilizar las definiciones como principal criterio en la resolución de tareas, deberían proponerse actividades que no se puedan resolver solamente usando la imagen conceptual.

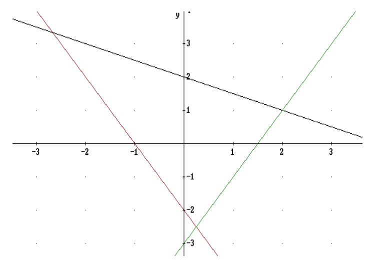
Realizaremos una reflexión a priori sobre cuál es la imagen del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales que el estudiante podría estar construyendo y cómo ésta podría estar incidiendo en la interpretación de un sistema de tres ecuaciones lineales, cuando las tres rectas son secantes dos a dos. Como ya comentamos, el punto de partida para los estudiantes que se inician en el estudio de este tema, al menos en el Uruguay, son los sistemas lineales 2x2. Ya sabemos que en este caso la representación gráfica correspondiente al caso de solución única está constituida por un par de rectas secantes. Podría estar sucediendo que cuando el estudiante ve pares de rectas secantes dos a dos como representación gráfica de un sistema de ecuaciones, evoca la imagen que tiene construida y la reconociera en cada una de las intersecciones de las rectas graficadas, dando una interpretación incorrecta a esta situación. En este caso el estudiante centra su atención en los puntos de corte. Parecería que ha construido la noción de solución asociada al punto de corte de dos rectas y no a la condición de rectas concurrentes. Es claro que presentar un sistema 2x2 no hace posible diferenciar la noción de corte de dos rectas con la noción de concurrencia. Esto realmente se hace posible cuando aparecen por lo menos tres rectas representadas.

Con esto nos referimos a que el estudiante centraría su atención localmente, observando los puntos de corte de las rectas y reconociéndolos como soluciones[15] y no en la configuración global que es adecuada a un sistema que posee solución única, que es la de un conjunto de rectas concurrentes. Parecería entonces que la imagen que se construye asociada a solución única en sistemas 2x2 podría estar obstaculizando la interpretación de casos sin solución cuando se presentan más de dos rectas.

En la secuencia exploratoria observamos también que los alumnos asocian “no hay solución” a la existencia de rectas paralelas distintas, que es la única configuración posible asociada a este caso, cuando se trata de los sistemas 2x2. Para ejemplificar, presentaremos el caso de un estudiante de segundo año de Bachillerato que frente a la actividad que presento a continuación respondió *“Tiene solución porque no son paralelas o sea se cortan”*.

[15] Reconocemos un abuso de lenguaje cuando llamamos soluciones del sistema a los puntos, ya que la solución la constituye el par ordenado de reales que son sus coordenadas pero creemos que esta imprecisión facilita la comunicación escrita.

A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Qué puedes decir acerca de la solución del sistema formado por las tres ecuaciones?



Incorporar sistemas con un número mayor de ecuaciones manteniendo la cantidad de incógnitas creemos que permitiría incorporar otras configuraciones en el plano asociadas al caso de *no solución*, que posibilitarían entonces al estudiante distinguir el caso de rectas concurrentes en un punto como el único que refleja la existencia de solución única.

Nos preguntamos en consecuencia, si es apropiado introducir al alumno en el estudio de los sistemas de ecuaciones a través del caso 2x2 únicamente, pues este tipo de sistemas restringe tanto el caso de solución única como el de no existencia de solución a una única configuración gráfica posible que luego es transferida a otras situaciones en forma incorrecta. Pensamos que el trabajo con sistemas 2x2, 3x2, 4x2, entre otros, podría facilitar el entendimiento del concepto *solución* de un sistema, no restringiéndolo al trabajo en los sistemas 2x2 ni a la imagen del concepto *solución* o *no solución*[16] que se construye asociado a ellos. Es decir que, desde este punto de vista, sería posible enriquecer la imagen asociada al concepto *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ahora bien, si consideramos que nuestros estudiantes deben usar las definiciones como principal criterio al resolver tareas, entonces deberemos diseñar actividades apropiadas que no puedan ser resueltas consultando meramente la imagen del concepto. Es claro que con las actividades tradicionales que consisten en dar un sistema de

[16] Cuando hablamos de *no solución* nos referimos a que no existe ningún par ordenado de reales que verifique todas las ecuaciones del sistema. Es claro que en este caso el conjunto solución del sistema es vacío.

ecuaciones 2x2 y pedirle a los estudiantes que lo resuelvan, no lograremos que el alumno ponga en juego la definición de solución de un sistema.

CAPÍTULO III

Metodología y método

- Gato de Chesire, comenzó ella algo tímidamente..., ¿me dirás por favor, qué camino debería tomar para ir desde aquí?
- Eso depende mucho de dónde usted quiera ir – dijo el gato.
- Poco me preocupa dónde ir – contestó Alicia.
- Entonces, nada importa qué camino tome – replicó el gato.

Alicia en el País de las Maravillas
Lewis Carroll

3.1 Una distinción necesaria

Cuando hablamos de metodología nos referimos al estudio del método. La reflexión metodológica no está dirigida solamente a la descripción de los procedimientos y pasos a dar en el marco de una investigación sino que incluye una justificación y discusión de las opciones a realizar y también de los caminos a desechar. Es frecuente que la palabra metodología se utilice como sinónimo de método. En este trabajo entenderemos por método la descripción de los pasos y procedimientos que seguiremos con el fin de alcanzar los objetivos. El método es un medio para la investigación, la metodología refiere a la reflexión crítica sobre la elección de ese método y no de otros. Creemos que Burton (2002) expresa bien lo que queremos decir:

> En varias tesis de Doctorado que he leído, el capítulo titulado Metodología trata, de hecho, con los métodos usados por el investigador para llevar adelante su investigación. Además, en la mayoría de los artículos en revistas y capítulos de libros, se provee de una descripción de "cómo" hizo el investigador pero rara vez aparece un análisis dando los "por qué" y, más particularmente, de todos los posibles métodos que podrían haber sido usados, qué fue lo que llevó al investigador a realizar la investigación de la manera descrita.[17]

[17] In many of the Ph. D. theses that I have read, the chapter headed Methodology has dealt, in fact, with the methods used by the researcher to undertake their research. Likewise, in the majority of articles in journals and chapters in books, a description is provided of "how" the research was done but rarely is an

3.2 Metodología

El diseño metodológico que proponemos surge a partir de mi preocupación por la falta de conexión entre la investigación en educación matemática y la práctica educativa. Como docente e investigadora es una de las problemáticas hacia las que me siento más sensibilizada.

En este sentido, Wittmann (1998) plantea la posibilidad de considerar a la educación matemática como una ciencia del diseño. Esta propuesta está basada en que la educación matemática debe orientarse hacia la mejora de las prácticas educativas. Según este investigador, tradicionalmente ha existido un menosprecio de los investigadores hacia el diseño de unidades de enseñanza, cuestión que ha sido dejada a cargo de los docentes y autores de libros de texto. Wittman señala que esta tarea es muy difícil y debe ser realizada por expertos en el área. Por tanto la investigación empírica debe estar centrada en el diseño de estas unidades de enseñanza y para el diseño de esas unidades de enseñanza es necesaria investigación empírica.

Schoenfeld (2000, referido en Zazkis, 2002) sostiene que uno de los principales propósitos de la investigación en educación matemática consiste en usar el entendimiento sobre la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje, para mejorar la enseñanza de la matemática.

Es tanto en el sentido de Wittmann como en el de Schoenfeld que me propongo vincular la teoría con la práctica y es por ello que el segundo objetivo de este trabajo está orientado a la elaboración de una secuencia de aprendizaje del concepto *solución* de un sistema de ecuaciones lineales para el caso de dos incógnitas.

A partir entonces de mi preocupación por el vínculo entre la teoría y la práctica, es que propongo una metodología que permita conciliar la investigación con la práctica educativa. Con el fin de concretar esta conexión teoría-práctica es que decidí, por un lado, incorporar a mi trabajo a dos docentes experimentadas y con formación técnico-didáctica y por otro, trabajar con un grupo de alumnos en el que soy la docente a cargo, un desafío tal como lo sostienen Czarnocha y Prabhu (2005) :

analysis given of “why” and, more particularly, out of all the methods that could have been used, what influenced the researcher to choose to do the research in the manner described.

> En consecuencia, el desafío de integrar la investigación con la práctica se viene realizando por dos direcciones complementarias, desde la enseñanza a la investigación a través del desarrollo de metodologías de Enseñanza-Investigación, y desde la investigación a la enseñanza a través de la importación de un laboratorio de enseñanza a la clase de aquellos docentes que, en colaboración con los investigadores, participan en experimentos diseñados.[18]

Propongo una metodología de trabajo que tenga en cuenta los escenarios en los que se producen los aprendizajes, en el sentido que lo plantean Cantoral y Farfán (2003), con el fin de que el saber producido de la investigación sea un saber ajustado a la práctica y no un saber elaborado desde la teoría de quien investiga.

En este sentido coincido con algunos de los principios que plantean Moschkovich y Brenner (2000) para integrar un paradigma naturalista en la investigación. Concretamente, estas autoras asumen que el conocimiento es socialmente construido y negociado en la práctica. Por esto, es importante considerar el contexto en el que se produce el aprendizaje y el escenario natural donde se da ese aprendizaje: la clase de matemática. Por esto es que me interesa concentrarme en el diseño de una secuencia de aprendizaje que sea implementada por una docente "real" en un ámbito "real" de aprendizaje (una clase común y no un grupo de estudiantes elegidos especialmente para un experimento, tampoco voluntarios) y también por una docente-investigadora que a su vez es una docente "real" con veinte años de experiencia en las aulas y en particular con actuación ininterrumpida durante ese período en la enseñanza de los sistemas 2x2.

La metodología que propongo y que llamaré *metodología interactiva* consiste en una forma de trabajo en la que el investigador-docente trabaja junto a otros docentes de forma coordinada con el fin de alcanzar los objetivos de investigación determinados por el investigador. La interacción entre estos actores permite enriquecer a uno su investigación y a los otros su práctica docente. El docente puede aportar su punto de vista como profesor, su conocimiento de los alumnos y su manejo de las situaciones de clase. El investigador aporta su conocimiento de marcos teóricos que sean susceptibles de darle explicación a los fenómenos que está estudiando, la metodología de trabajo, es quien gestiona la investigación. Pero en nuestro caso el investigador también es docente

[18] Consequently, the challenge of integrating the research with practice is being approached along two complementary directions, from teaching to research through the development of the Teaching-Research methodologies and investigations in the classes of individual teachers-researchers, and from research to teaching through the import of the educational laboratory into classrooms of teachers who, in collaboration with researchers, participate in designed experiments.

y utilizará uno de sus grupos para aplicar un cuestionario y para desarrollar una secuencia de aprendizaje. Es así que cuando hablamos de una *metodología interactiva* no sólo nos referimos a un investigador-docente trabajando en acción coordinada con otros docentes, sino que también nos referimos a que desarrollaremos una metodología de corte cualitativo en la que se combina la investigación en el propio grupo del investigador con la investigación en otro grupo que tiene otro docente a cargo. Más adelante precisaremos las ventajas que aporta este montaje.

No estamos planteando un docente al servicio del investigador, sino una acción participativa que permita a ambas partes nutrirse mutuamente dentro de los saberes que cada uno ha construido sobre su práctica: práctica docente y práctica de la investigación. En este sentido Desgagné et al. (2001) proponen un modelo de investigación colaborativa en el que proponen investigar "con" el profesor más que "sobre" su práctica. Definen la investigación colaborativa como una actividad reflexiva que surge a partir de diferentes motivaciones dependiendo de los proyectos, en la cual los investigadores y los docentes interaccionan y exploran juntos algún aspecto de la práctica que sea de interés común. Este tipo de experiencia favorece el desarrollo profesional del profesor al acompañarlo en una actividad reflexiva sobre su práctica. Esta actividad reflexiva se apoya en el análisis de las prácticas de los profesores, dirigida a un punto de interés común definido por el proyecto de investigación.

Para desarrollar el trabajo relativo al primer objetivo, la metodología consistirá en la observación de las clases donde la profesora introduce el concepto de sistema de ecuaciones lineales y de solución de un sistema para poder tomar contacto con su discurso, con las preguntas que realiza, con la orientación que le da al tema, con las experiencias que ofrece a sus estudiantes. Nos interesa observar cómo conduce el proceso de enseñanza del tema en el que nos hemos concentrado, qué dificultades presentan los estudiantes y qué conceptos construyen en base a la secuencia de aprendizaje que la docente ha elegido. Durante estas sesiones la docente no será informada de la problemática en la que nos concentraremos para evitar sesgos en la enseñanza y poder captar la construcción de los conceptos en su secuencia de aprendizaje. La docente será informada de la problemática en el momento en que se aplique el cuestionario a sus alumnos que será en forma posterior a las mencionadas observaciones.

En el momento del diseño de la secuencia de aprendizaje y su puesta en práctica, segundo objetivo de la presente investigación, se espera un papel protagónico de la otra docente con la que trabajaremos, acercando su punto de vista y el conocimiento didáctico que ha sido construido en base a la práctica, que a su vez será confrontado con el punto de vista del docente-investigador. Creemos que estas condiciones permitirán formar un equipo que permita ligar la investigación con la práctica. La tensión entre práctica e investigación que seguramente se dará, queda bastante bien ilustrada a través de las palabras de Zazkis (2002):

> Yo creo que esa intervención [en el proceso de desarrollo del conocimiento] es más exitosa si se basa en el entendimiento de lo que es el conocimiento de los estudiantes, qué es lo que todavía les falta saber, qué es lo que se percibe como difícil. Los docentes con experiencia frecuentemente creen que tienen un "sentimiento" para las dificultades de sus estudiantes. Sin embargo, como se muestra en el ejemplo del siguiente párrafo, esas dificultades pueden aparecer en lugares inesperados.[19]

Con la referencia a un ejemplo, Zazkis se refiere a una experiencia personal como estudiante donde tomando notas de un cuaderno de una compañera observó que cierto teorema se denominaba "teorema difícil". Le preguntó a su compañera el porqué de tal denominación ya que ella no lo veía más difícil que otros del curso. Su compañera le contestó que eso era lo que estaba escrito en la pizarra. Zazkis decidió finalmente que todavía no estaba madura para apreciar las dificultades del teorema. Años después, tomando un curso de Historia de la Matemática fue cuando entendió que su "teorema difícil" era el nombre del Teorema de Cauchy. La palabra hebrea k-o-sh-i, que significa difícil, coincide con la traducción fonética de Cauchy. La distinción entre Cauchy y "difícil" solamente es distinguible por el contexto.

Explicaremos a continuación por qué elegimos este diseño donde combinamos una investigación en primera persona o *desde adentro* como la llama Ball (2000) con una investigación que utiliza al investigador como observador externo o *desde afuera* siguiendo la idea de Ball. Tal como señala esta autora, existen múltiples beneficios al elegir una perspectiva en primera persona. Entre ellos distinguiremos los siguientes:

- El docente-investigador puede registrar en su grupo situaciones que para un observador externo son invisibles.

[19] I believe that such intervention [into the processes of development of knowledge] is more successful if based on the understanding of what students' knowledge is, what is it lacking, what is perceived as difficult. Experienced teachers often believe that they have a "feel" for students' difficulties. However, as the example in the following paragraph shows, those difficulties may appear in most unexpected places.

- El docente-investigador ha establecido un vínculo con sus alumnos que le permite conocerlos mejor. Este vínculo también favorece el compromiso de los estudiantes hacia la actividad de investigación (por ejemplo cuando se enfrentan a la resolución de un cuestionario).
- El docente-investigador tiene acceso a información sobre el grupo que otros no tienen.
- El docente-investigador conoce la forma de expresarse de sus alumnos y su forma de trabajar.
- El docente-investigador conoce la serie de ejemplos, problemas y actividades que se han utilizado en el curso y puede hacer uso de ellos o recordarlos en el curso de su acción.

También debemos reconocer que una perspectiva en primera persona conlleva ciertos riesgos y son estos los que queremos sopesar al incluir el trabajo en otros grupos que no son el del docente-investigador. Ball (2000) distingue los siguientes inconvenientes de utilizar una metodología *desde adentro*:

- Los estudiantes pueden sentir temor de expresar lo que realmente piensan, después de todo es su profesor el que tienen delante de ellos, el que los califica y el que, al final del curso, los promueve o aplaza.
- El docente-investigador puede dar cosas por supuesto.
- El docente-investigador puede sesgar la investigación en el afán de que los estudiantes entiendan y aprendan. Al ser también docente del grupo donde investiga puede involuntariamente "entrenar" a sus alumnos a dar cierto tipo de respuestas.
- El docente-investigador puede no ser conciente de cómo influyen en sus estudiantes determinadas formas de plantear las cosas o de expresarse.

Consideramos entonces que a través del trabajo en un grupo del docente-investigador como con grupos de otros docentes, obtendremos los beneficios de una perspectiva en primera persona, sopesando los riesgos que esto conlleva con la inclusión de otros docentes. Debemos destacar que la inclusión de grupos de otros docentes no se realiza con el fin exclusivo de cuidar los riesgos de una investigación en primera persona sino que también nos permite enriquecer nuestro trabajo, a través del diálogo con los docentes que están a cargo de esos grupos, y vincular la investigación tanto con la propia práctica como con la de otro.

Esta vinculación con la práctica, cobra especial sentido en nuestro proyecto de investigación, por la temática que estamos abordando y por el objetivo de diseño que nos proponemos. La primera de las docentes con la que trabajaremos es autora de uno de los libros de texto más usados en este nivel en el Uruguay. Creemos que esto fortalece nuestra investigación por el tipo de formación que reciben los estudiantes. No sabemos qué valor tendría decir que los estudiantes tienen dificultades con el concepto de solución si sus profesores lo único que han hecho es resolver sistemas de ecuaciones insistiendo en la práctica algebraica en sistemas que además tienen solución única. Nuestros alumnos han trabajado con una sola ecuación con dos incógnitas, han observado que tiene infinitas soluciones, han interpretado geométricamente la presencia de esas infinitas soluciones, han trabajo con sistemas con diferentes tipos de conjunto solución, han ensayado diferentes métodos de resolución, han trabajado con problemas que se resuelven a través de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros aspectos. Si bien todo esto se enmarca dentro del programa de estudios vigente, no todos los profesores abordan las múltiples facetas del tema. Aseguramos con esto un buen punto de partida para nuestras observaciones. Creemos que esto nos permite un abordaje más directo de los fenómenos que pretendemos observar ya que estamos minimizando posibles causas para ellos, además de permitirnos una visión más rica de la problemática en virtud del bagaje de experiencias que tienen los estudiantes, como por ejemplo el trabajo en diferentes registros.

La combinación de una investigación con un docente-investigador y con un docente permitirá una visión amplia de los fenómenos, permitiendo al docente-investigador la posibilidad de experimentar la interacción con los estudiantes y sus puntos de vista y no remitir su papel únicamente a la de observador externo.

Deseamos destacar finalmente algunas diferencias entre la metodología que estamos proponiendo y otras que podrían parecer similares. Creemos que señalar estas diferencias nos permite a la vez, caracterizar mejor nuestra metodología.

La metodología que delineamos no es investigación cooperativa como por ejemplo lo plantean Raymond y Leinenbach (2000), no surge con el fin de solucionar una problemática de clase de otro docente, ni de encontrar un medio para mirar sistemáticamente los problemas que enfrenta en su clase y encontrar soluciones prácticas.

Tampoco se trata de investigación-acción, no son los docentes los que van a investigar sino que es una investigadora, que además es docente, la que lleva la investigación adelante con la colaboración de ellos. No es una investigación que se desarrolla en el transcurso de la acción pedagógica sino que se aprovecha la acción pedagógica para realizar observaciones y experimentos a partir de objetivos determinados por el proyecto de investigación.

Cobb et al (2003) plantean la conformación de equipos formados por un docente, un investigador y dos asistentes para llevar adelante el diseño de experimentos en la investigación educativa. En mi caso las observaciones de clase que realizaré con el fin de tomar contacto con la forma en que la profesora introduce el concepto de sistema y solución de un sistema, no constituyen experimentos, en el sentido de que no han sido situaciones planificadas especialmente sino que yo ingreso a un aula común, y observo la secuencia de aprendizaje que la docente tiene prevista. Con esto nos referimos a que observo una clase habitual y no una especialmente diseñada para un experimento. En una etapa futura, donde se ponga a prueba una secuencia de enseñanza especialmente diseñada, sí estaremos en condiciones de hablar de un experimento. En el planteo de estos autores destaco que la posibilidad de diseñar experimentos para la investigación permite la generación de teorías del diseño que explican porqué el diseño funciona y sugieren cómo podría ser adaptado a nuevas circunstancias. Estos experimentos también son cruciales para generar y testear teorías, punto en el que tenemos especial interés.

En esta etapa futura, en la que diseñaremos e implementaremos un experimento, la metodología tiene puntos de contacto con la que plantean Steffe y Thompson (2000) cuando definen un experimento de enseñanza:

> Un experimento de enseñanza involucra una secuencia de episodios (Steffe, 1983). Un episodio de enseñanza incluye un agente de enseñanza, uno o más estudiantes, un observador de los episodios de enseñanza, y un método para registrar lo que transcurre durante el episodio. Estos registros, si están disponibles, pueden ser usados en la preparación de episodios subsecuentes así como también para guiar un análisis conceptual retrospectivo del experimento de enseñanza. Estos elementos son pertinentes a todos los experimentos de enseñanza[20].

La particularidad de estos experimentos consiste en que no están tanto orientados a la confirmación de hipótesis sino más bien para testear hipótesis y para generarlas. Es así

[20] A teaching experiment involves a sequence of teaching episodes (Steffe, 1983). A teaching episode includes a teaching agent, one or more students, a witness of the teaching episodes, and a method of recording what transpires during the episode. These records, if available, can be used in preparing subsequent episodes as well as in conducting a retrospective conceptual analysis of the teaching experiment. These elements are germane to all teaching experiments.

que la observación de la clase en la que se ponga en juego la secuencia de enseñanza nos servirá para retroalimentarnos y modificar la secuencia en función de la reacción de los estudiantes. Destacamos una diferencia con estos dos autores, la secuencia de enseñanza no será experimentada con uno o más estudiantes, sino que se realizará en el ambiente de una clase de enseñanza secundaria. Punto de encuentro ya reseñado con el paradigma naturalista.

Otro punto de diferencia con la metodología planteada por Steffe y Thompson está en que yo también experimentaré con un grupo de alumnos en el que soy la docente a cargo y en esta instancia no habrá observador externo. En estas instancias no existirá el observador investigador sino solamente el docente-investigador, lo que suprime el punto de vista del observador externo y deja las interpretaciones más ligadas a la subjetividad del docente-investigador.

La metodología que propongo también se diferencia de la que plantea por ejemplo Moschkovich (1999). Ella observó dos grupos de estudiantes durante el estudio de las funciones lineales y cuadráticas, para luego formar un grupo de estudiantes voluntarios que participaran en la investigación. En mi caso los estudiantes no son seleccionados sino que trabajo con un grupo de estudiantes de una institución educativa, no es un grupo especialmente armado para sesiones de investigación sino que es la investigación la que se traslada a uno de los escenarios donde se construye el aprendizaje: la clase de matemática.

Esperamos que de este encuentro entre docente-investigador y docentes surjan ricos elementos que puedan tener un fuerte impacto en las prácticas con el fin de mejorar los aprendizajes en la clase de matemática.

3. 3 Método

En la primera etapa de este trabajo (1er. objetivo de investigación) trabajaremos con dos grupos de estudiantes de 14–15 años, uno a cargo de una profesora experimentada y el otro a mi cargo. Los dos grupos corresponden a alumnos de una institución educativa privada en donde alcanzar la excelencia académica es uno de los objetivos de su misión educativa. Mencionamos esto para dejar en claro que se trata de alumnos que se desenvuelven en un ambiente favorable al estudio, que son apoyados desde la institución y que en general tienen un muy buen nivel socioeconómico.

En el grupo de la docente que llamaremos Martina, asistimos a dos clases, de 80 minutos cada una, que fueron audiograbadas. En ellas pudimos observar cómo introduce los sistemas lineales 2x2, qué actividades presenta, qué sentido le da al concepto de sistema y de solución de un sistema y qué dificultades enfrentan los estudiantes. Como ya dijimos anteriormente la profesora Martina no estaba advertida de la problemática de nuestro estudio, solamente se le informó que nos concentraríamos en los sistemas de ecuaciones. Todo esto para que no se sesgara su enseñanza hacia los puntos que observaríamos.

Una vez que ella dio por terminada la enseñanza de los sistemas 2x2, asistí a su clase y entre las dos propusimos un cuestionario con el objetivo de detectar las concepciones de los estudiantes sobre la noción de solución de un sistema. Presentaremos más adelante este cuestionario. Los alumnos contaron con 80 minutos para contestarlo.

En forma posterior a la aplicación del cuestionario se realizaron entrevistas individuales a 4 alumnos de la profesora Martina para profundizar en las respuestas dadas en el cuestionario. Las mismas fueron audiograbadas.

En forma posterior, visité y audiograbé otra clase en la que le solicité a la profesora Martina que trabajara oralmente con sus alumnos, las actividades del cuestionario. El propósito era observar cómo los estudiantes confrontaban sus ideas, qué argumentos esgrimían para convencer a los otros, qué dificultades presentaban y también qué nociones permitían superarlas. Le pedí a la profesora Martina que se concentrara en algunas actividades ya que los 80 minutos de clase no permitían abordar todas las preguntas. También acordamos cuál sería su metodología de trabajo en la clase: más bien de corte clínico. Con esto nos referimos a que trataría de enfrentar a los alumnos a conflictos y se dedicaría más que nada a escuchar y a hacerlos hablar.

En el grupo que tengo a cargo enseñé el tema sistemas de ecuaciones lineales (más adelante describiré la forma en que lo hice). Realicé hincapié en el concepto solución de un sistema, pero en ningún momento se trabajó con más de dos ecuaciones. Una vez que consideré que el tema estaba dado, apliqué el cuestionario en idénticas condiciones al grupo de la profesora Martina y con los mismos propósitos. En forma posterior realicé una puesta en común con el grupo, de algunas de las actividades, en una sesión también de corte clínico que audiograbé.

El mismo cuestionario fue aplicado a un grupo de tercer año de Bachillerato Opción Economía (estudiantes de 17–18 años) del mismo instituto de enseñanza que los grupos mencionados. Este es el último año antes de ingresar a la universidad. Elegimos a estos alumnos por tratarse de un año terminal (podríamos observar las concepciones de alumnos que egresan del nivel secundario) y en el que además estudiaron los sistemas de ecuaciones en profundidad, ahora desde un punto de vista estructural.

La aplicación del cuestionario se realizó también en una clase de 80 minutos y se entrevistó al docente a cargo para conocer cómo había trabajado el tema sistemas de ecuaciones. Destacamos que al momento de la aplicación del cuestionario el docente no conocía nuestra problemática de investigación más que se trataba de los sistemas de ecuaciones.

En la segunda fase de nuestro trabajo de investigación (segundo objetivo) nos propusimos elaborar una secuencia de enseñanza que será aplicada a dos grupos de 14-15 años: un grupo a cargo de la profesora Mari y el otro a mi cargo. Esta secuencia es elaborada teniendo en cuenta las observaciones de clase, el análisis de las respuestas de los alumnos al cuestionario, las dificultades relevadas, las situaciones que facilitan la superación de ellas y la revisión de la presentación del tema en los libros de texto. El objetivo es brindar elementos para una reformulación del discurso matemático escolar que brinde elementos acerca de cómo realizar una primera aproximación al tema. Estamos pensando en no restringir el concepto solución al caso 2x2 para no generar obstáculos a visiones más amplias del tema en el futuro de los alumnos.

Seleccionamos a la profesora Mari para evitar sesgos en la enseñanza del tema. En forma coordinada con esta docente se decidirá el enfoque del tema teniendo en cuenta la secuencia de trabajo que elaboramos a partir de las conclusiones relativas al primer objetivo de esta investigación. Se realizarán observaciones de clase y se registrará la forma en que se desarrolla el tema de enseñanza y todas las actividades que se proponen a los estudiantes.

En el caso del grupo a mi cargo, utilizaré un enfoque similar a la forma habitual en que enseño el tema, que más adelante describiré, pero incorporando los nuevos aspectos en que deseamos poner énfasis. Una vez finalizado el tema, se aplicará a los estudiantes de los dos grupos el mismo cuestionario que se usó en la primera etapa para observar sus reacciones. No se trabajarán por tanto ninguna de estas preguntas en clase durante el desarrollo del tema tal como se proponen en el cuestionario.

En el siguiente cuadro presentamos a manera de síntesis las diferentes etapas de este trabajo de investigación.

<table>
<tr><td colspan="4">Estudios exploratorios</td></tr>
<tr><td colspan="4">Diseño del Cuestionario</td></tr>
<tr><td>Enseñanza de los sistemas de ecuaciones en la forma habitual en el grupo de la profesora Martina. Alumnos de 14-15 años.</td><td>Visito dos clases de dos horas. Fueron audiograbadas.</td><td>Enseñanza de los sistemas de ecuaciones en la forma habitual en el grupo de la profesora Cristina. Alumnos de 14-15 años.</td><td>Se registran las actividades en un cuaderno de campo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Aplicación del cuestionario en los dos grupos (asisto a aplicarlo al grupo de la profesora Martina)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Entrevistas a cuatro estudiantes de la profesora Martina</td></tr>
<tr><td>La profesora Martina aborda en su clase algunas preguntas del cuestionario para discutir con los alumnos.</td><td>Visita de clase. Fue audiograbada.</td><td>En el grupo de la profesora Cristina ésta discute algunas de las preguntas del cuestionario con todo el grupo.</td><td>La clase es audiograbada</td></tr>
<tr><td colspan="4">Aplicación del cuestionario a un grupo de alumnos de edades que varían
entre 17-18 años (asisto a aplicarlo a este grupo)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Entrevista al docente del grupo anterior.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Análisis de los resultados obtenidos, conclusiones y recomendaciones en relación al primer objetivo de este trabajo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Diseño de una secuencia de enseñanza</td></tr>
<tr><td>Enseñanza de los sistemas de ecuaciones en el grupo de la profesora Mari utilizando la secuencia de enseñanza que surge de este trabajo. Alumnos de 14-15 años.</td><td>Visito dos clases de dos horas en las que tomo notas. La profesora Mari registra sus actividades en un cuaderno de campo</td><td>Enseñanza de los sistemas de ecuaciones en otro grupo de la profesora Cristina utilizando la secuencia de enseñanza que surge de este trabajo. Alumnos de 14-15 años.</td><td>Se registran las actividades en un cuaderno de campo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Aplicación del cuestionario en los dos grupos (asisto a aplicarlo al grupo de la profesora Mari)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Análisis de los resultados obtenidos, conclusiones y recomendaciones en relación al segundo objetivo de este trabajo.</td></tr>
</table>

3.4 Descripción de la presentación del tema *Sistemas de ecuaciones lineales* en dos libros de texto uruguayos

El propósito de esta sección es dar cuenta del escenario didáctico en el que se encuentran los alumnos, ver diferentes enfoques de enseñanza, tomar contacto con las actividades que se proponen habitualmente a los estudiantes, para tener mayores elementos a la hora de decidir qué tipo de preguntas pueden provocar conflictos a los estudiantes que den cuenta de la problemática que nos proponemos estudiar. Además, los aspectos que describiremos en esta sección permitirán entender mejor las condiciones con que los estudiantes enfrentaron el cuestionario propuesto y que presentamos más adelante.
Se irá describiendo el abordaje de los Sistemas de ecuaciones lineales que cada uno de los textos presenta y los modos de pensamiento de Sierpinska (2000) que subyacen en cada uno de estos.

3.4.1 Descripción de dos libros de texto para los alumnos de 14–15 años

Consultamos los dos textos más usados por los estudiantes cuando inician el estudio de los sistemas 2x2. Nos referimos a los alumnos de 14–15 años. Creemos que esta consulta nos permite reflexionar acerca del estado actual de la enseñanza en relación a este tópico. Como señala Chevallard (2000), los textos norman una progresión en el conocimiento y autorizan una didáctica. Es por ello que los consideramos un reflejo de las prácticas de aula y nos permiten tener una noción de qué se enseña y cómo se enseña. También nos brindan información acerca del discurso matemático escolar y de los enfoques didácticos de los temas.

El primer texto

En primer lugar abordaremos el texto que utilizan los dos grupos de alumnos de 14–15 años con los que trabajamos. Se trata de Borbonet, et al. (1997) *Matemática 3.* Montevideo: Editorial Fin de Siglo.

Descripción general del enfoque del tema "Sistemas de ecuaciones"

A través de una situación contextualizada se llega al planteo de una ecuación con dos incógnitas. Se observa que esa ecuación tiene infinitas raíces, que es la denominación que las autoras utilizan para lo que en este trabajo llamamos *solución*, y se llega a la representación gráfica de la recta asociada a la ecuación a través de la representación de varios de los pares de números reales que la verifican. Se concluye que las ecuaciones con dos incógnitas tienen infinitas raíces y que los puntos que las tienen como coordenadas están sobre una recta y recíprocamente. Luego se agrega otra información a partir de la cual se obtiene otra ecuación. Teniendo en cuenta las dos ecuaciones se plantea el sistema de ecuaciones (abarcándolo por una llave) y se dice que para expresar que estas condiciones, dadas por las ecuaciones, deben cumplirse simultáneamente, se ha formado un sistema de ecuaciones, que se indica con una llave. Resolverlo significa hallar las posibles raíces comunes a ambas ecuaciones. Luego se trabaja el método gráfico a partir de un caso con solución única.

Luego ante la excusa de que el método gráfico no es siempre práctico, en el sentido de que si las coordenadas del punto solución fueran no enteras sería difícil su lectura, se presentan dos métodos algebraicos de resolución, el de sustitución y el de reducción.

Descripción de la presentación del tema en el texto

El capítulo se inicia con una situación contextualizada referida a una reunión entre chicos y chicas. Una chica, Lucía, desea saber cuántos chicos y chicas asistieron y conoce solamente la siguiente información "Había dos chicos más que chicas".

Se plantea:

$x \rightarrow$ cantidad de chicas

$y \rightarrow$ cantidad de chicos

$$y = x + 2$$

Luego el texto agrega: "Esta es una ecuación con dos incógnitas. Resolverla implica hallar todos los pares de números $(x\ ,\ y)$ que al sustituirlos en la ecuación la convierten en una igualdad numérica. A cada uno de estos pares se le llama raíz de la ecuación".

Posteriormente se plantea una tabla de valores y se observa que por cada valor que se le dé a una de las incógnitas, la otra queda determinada, concluyendo que existen infinitos pares ordenados que son raíces de la ecuación. Se omite decir que en el contexto planteado no existe un número infinito de pares que verifiquen la ecuación sino un número finito de ellos. Hasta aquí el enfoque es AA pero inmediatamente de esto se pasa a la representación cartesiana de los pares ordenados que son raíces de la ecuación, observando que están alineados. La explicación de esto último se fundamenta en que se puede asociar a la ecuación $y = x + 2$, la función $f{:}R \rightarrow R \ / \ f(x) = x + 2$, que ha sido estudiada en el curso anterior dentro de las funciones de la forma $f(x) = ax + b$, observando que su gráfico es una recta pero para lo cual no se ha dado ninguna justificación. Es decir que, la alineación de los puntos que verifican la ecuación $y = x + 2$ se basa en una función dada anteriormente para la cual no se ha más que observado, sin justificación de ningún tipo, su gráfica característica. Por este tipo de enfoque funcional que adoptan, parecen perder de vista las ecuaciones de la forma $x = a$ que no están asociadas a funciones de R en R y que juegan un importante papel en la transformación de sistemas en procura de ecuaciones paralelas a los ejes que sean equivalentes a las dadas. Las autoras concluyen "que las ecuaciones con dos incógnitas tienen infinitas raíces y que los puntos que las tienen como coordenadas están sobre una recta y recíprocamente".

Hasta aquí el texto le propone al alumno dos modos de pensamiento, dos formas diferentes de entender el conjunto solución de una ecuación lineal con dos incógnitas: como un conjunto de infinitos pares ordenados de reales o como infinitos puntos alineados cuyas coordenadas verifican la ecuación dada. Lo que no se advierte al estudiante es que la ecuación dada recibe el nombre de ecuación de esa recta que se ha obtenido al representar los pares. Esto permitiría la asociación ecuación con dos incógnitas-ecuación de la recta, que le será muy útil al estudiante al momento de entender el significado de un sistema desde un modo SG.

A partir de ahora el libro transita entre una presentación SG y una AA, ya que se propone introducir otra condición para obtener una segunda ecuación aludiendo a que Lucía no pudo resolver su problema por tener la ecuación infinitas raíces para finalmente llegar a la representación gráfica de las dos ecuaciones. Con la idea de presentar la noción de sistema se agrega la condición: "en total concurrieron 10 personas" y se presenta la ecuación:

$$x + y = 10$$

Teniendo en cuenta ambos datos se presenta el sistema formado por las dos ecuaciones abarcándolas con una llave, aclarando que esta llave es lo que nos indica que las "trabajamos juntas". Dicen que resolver el sistema significa hallar las posibles raíces comunes a ambas ecuaciones.

Se preguntan luego si habrá una raíz que verifique las dos ecuaciones a la vez. Contestan que si esto sucede debe haber algún punto que pertenezca a ambas rectas. Se propone la gráfica de las dos rectas que se cortan en (4, 6) y se escribe el conjunto solución S= {(4, 6)}. Bajo el título "Para ordenarnos", se escribe:

Para resolver un sistema por el método gráfico:

- Dibujamos ambas rectas en un mismo par de ejes.
- Buscamos las coordenadas de los puntos que tengan en común.

Observemos que si el estudiante hace extensiva la idea *buscamos las coordenadas de los puntos que las rectas tengan en común* a los sistemas 3x2 puede generalizar incorrectamente y contestar que cada punto de intersección, es una solución del sistema. En este caso el estudiante estaría interpretando "dos rectas" literalmente, en lugar de traducirlo a "todas las rectas". Y así, aplicando una idea que en el contexto de los sistemas 2x2 conduce a una respuesta correcta, al cambiar de contexto conduce a un error.

Luego se plantea a los alumnos tres sistemas, donde aparecen uno con solución única, otro con infinitas y otro sin solución, facilitándoles tablas de valores y ejes cartesianos para que realicen rápidamente las gráficas respectivas.

Si bien las autoras hacen énfasis en que el par ordenado solución debe verificar todas las ecuaciones a la vez, vemos que el concepto se termina remitiendo a la pertenencia a las dos rectas, que podría ser extrapolable por parte los alumnos a una representación gráfica de un sistema 3x2, conduciéndolos a cometer errores. No aparece tampoco la verificación del par ordenado en ambas ecuaciones a la vez, esto es:

$$6 = 4 + 2$$
$$4 + 6 = 10$$

que permitiría reafirmar la noción de condiciones que se verifican simultáneamente, no relegando solamente el concepto al punto de corte de dos rectas.

Antes de introducir los métodos de resolución algebraica, no se abre una etapa de actividades que permitan al alumno incorporar elementos para decidir si un par ordenado es solución o no de un sistema, ya desde un modo de pensamiento SG ni de un modo AA, ni planteando interacciones entre ambos, para que posteriormente el alumno no necesite resolver el sistema cuando solamente se le pregunta si un par dado es solución o para que adquiera la noción de solución independientemente de los métodos de resolución, problemática que reporta Segura (2004). Entendemos entonces que faltan actividades para que el alumno pueda reflexionar sobre el concepto solución de un sistema en forma previa a la incorporación de los métodos de resolución quedando este concepto asociado solamente al punto de corte de dos rectas. Al final del capítulo se presentan dos actividades del tipo al que estamos aludiendo. Uno en el que se dan tres pares ordenados y se pide escribir para cada uno de ellos un sistema que lo tenga como raíz y otro ejercicio "Verdadero o Falso" donde se propone a los alumnos decidir si tal o cual par es solución de un sistema dado. No aparecen actividades de este tipo dadas en un contexto geométrico, si bien cabe la posibilidad que para contestar el alumno recurra a un modo de pensamiento SG.

Ante la pregunta "¿Es práctica la resolución gráfica?", se introducen los métodos de resolución algebraica. Parecería que para las autoras la introducción de la representación gráfica fue útil para introducir la noción de solución de un sistema pero rápidamente se descarta como poco práctica y no útil para encontrar soluciones como (3/2, 9/4) o (5/4, 5/2). Queda en evidencia el estatus inframatemático que se le concede a la representación gráfica y la sobrevaloración de los métodos algebraicos. No aparecen los modos de pensamiento en interacción sino que el modo SG es abandonado para estabilizarse en el modo AA. Esto remite a una visión parcializada de los objetos matemáticos en lo que resta del capítulo.

Describiremos ahora cómo es abordado uno de los métodos de resolución algebraica. Elegiremos el método de reducción o de Gauss por ser el que tiene mayor proyección en los estudios posteriores que realizará el alumno.

Se señala que "se trata de obtener una ecuación con una sola incógnita, \`combinación lineal´ de las ecuaciones del sistema". Se explicita que " \`combinación lineal´ es una ecuación que se obtiene multiplicando cada ecuación por un número y sumando miembro a miembro". Se indican los "pasos para resolver" de la siguiente manera:

- Multiplica ambas ecuaciones por números convenientes de modo que queden términos opuestos.
- Suma miembro a miembro las ecuaciones obtenidas.
- Resuelve la ecuación obtenida (debe tener una sola incógnita).
- Sustituye el valor hallado en una de las ecuaciones con dos incógnitas y halla el valor de la otra.

Se omite la discusión de los casos que conducen a expresiones del tipo $0 = 0$ o $0 = k$ ($k \neq 0$).

En ningún momento se habla de sistemas equivalentes ni de ecuaciones equivalentes, solamente se da un conjunto de pasos a seguir. Tampoco se interpretan esta serie de pasos a seguir desde un punto de vista geométrico, cuestión que posibilitaría ver, para el caso de solución única, rectas del haz concurrentes en un punto.

El segundo texto

Abordaremos ahora el texto Belcredi, L. y Zambra, M. (2000). *Matemática. Gauss 3*. Montevideo: La Flor del Itapebí.

Descripción general del enfoque del tema "Sistemas de ecuaciones"

Se presenta una situación contextualizada que conduce al planteo de ecuaciones con dos incógnitas. Se observa que una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene más de un par solución pero no que tiene infinitas. Se agrega luego lo que ellos llaman "ecuación suplementaria" a una dada, se pide que se verifique que una solución de una de las ecuaciones no lo es de la otra necesariamente y se solicita hallar las incógnitas sabiendo que deben cumplirse ambas condiciones a la vez. Se asienta que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es encontrar todas las soluciones comunes a las dos ecuaciones. Se continúa con los métodos algebraicos de resolución (sustitución y reducción) para pasar finalmente al método de resolución gráfico a partir de una situación con solución única.

Descripción de la presentación del tema en el texto

El texto presenta una situación contextualizada, referida al conocido juego *Monopoly*: “Paula compró cuatro casas en sus solares azules y una sobre los solares verdes y gastó $230. ¿Puedes averiguar el precio respectivo de cada casa sobre los solares azules y sobre los solares verdes?” Esta situación, al igual que la planteada en el texto anterior que analizamos, da la sensación de que con una sola ecuación no es posible determinar el valor de las incógnitas. Consideramos que el texto intenta conducir al estudiante a la idea de que no existe un único par de valores que verifiquen la ecuación, pero parecería que la idea que dejan asentada es que una sola ecuación refleja “indeterminación” de valores para las incógnitas. Una cosa es no poder escribir físicamente todos los pares que verifican la ecuación y otra cosa es que no estén determinados, que de hecho sí lo están dada la ecuación.

Luego se propone al estudiante el planteo de una primera ecuación: “Si a es el número de casas sobre los solares azules y v el número de casas sobre los solares verdes, traduce el hecho de disponer de $230 para su compra mediante una ecuación que ligue a y v. Llámala E_1. Verifica que puedes elegir $a = 40$ y $v = 70$”.

Bajo el título “Ecuaciones equivalentes; otras soluciones” se pide al estudiante que escriba v en función de a obteniendo una nueva ecuación a la que llamará E'_1. Se pide verificar si (40; 70) es solución de esta nueva ecuación y que se den otras soluciones para la compra de Paula. Se agrega lo que se denomina una hipótesis suplementaria “Paula decide comprar tres casas para sus solares azules y cuatro en los solares verdes por $270” y se pide al estudiante escribir una ecuación (E_2) que ligue a y v traduciendo esta relación. Se solicita verificar que (70; 15) es una solución de E_2 pero no de E_1. Luego se pide determinar el precio de cada casa en los solares azules y verdes, si se sabe que deben cumplirse las condiciones E_1 y E_2. Como podemos ver el enfoque es totalmente AA además de que presenta a las variables pertenecientes a un conjunto discreto pues representan número de solares. Otra observación que surge es que dado el contexto utilizado cada una de las ecuaciones no tiene infinitas soluciones. Pensamos que esto puede dificultar luego la idea de que una ecuación con dos variables sí las tiene cuando se trabaje en RxR. Esto no se hace explícito en ningún momento del desarrollo del tema. Como consideración general, pensamos que la presentación del tema se dirige rápidamente a la noción de sistema y falta trabajo con una sola ecuación. Esto puede dejar la impresión al estudiante que se necesita igual número de ecuaciones que incógnitas, y también implícitamente favorecer la solución única.

Luego el texto se encamina hacia el estudio de los métodos de resolución algebraicos. Describiremos cómo se resume el método de reducción o de combinación como lo llama el texto:

> Resolver un sistema de dos ecuaciones por el método de reducción consiste en multiplicar una, o ambas ecuaciones, por números convenientemente elegidos (no nulos), de manera tal que en esas nuevas ecuaciones una de las incógnitas se pueda . . . sumando o restando miembro a miembro las ecuaciones.

En los puntos suspensivos los alumnos deben completar con la palabra que falta.

Como se puede observar no se habla de ecuaciones equivalentes, si bien la noción fue introducida al menos en forma somera en la parte introductoria del tema, ni de sistemas equivalentes, ni de ecuación combinación lineal. No se hace referencia a situaciones donde se obtienen expresiones del tipo $0 = 0$ o $0 = k$ (con $k \neq 0$). Hasta aquí la visión que da el libro es la de que un sistema de ecuaciones permite encontrar dos números si bien en los márgenes se aclara que "resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y es encontrar las soluciones comunes a las dos ecuaciones, es decir, hallar todos los pares de números (x, y) para los cuales las dos igualdades se verifican. Esos pares son las soluciones del sistema". Creemos que de acuerdo a las actividades propuestas a los alumnos, éstos no pueden apreciar la potencia del enunciado anterior. Nos da la impresión que son mensajes más bien dirigidos a los docentes que a los estudiantes o el tipo de mensaje que "tranquiliza" al escritor de texto de haber cumplido con la misión que se propuso: la de enseñar la noción de sistema de ecuaciones, aun cuando el estudiante no haya comprendido el tema.

En cuanto al enfoque del método gráfico, éste se realiza mediante una situación contextualizada que hace referencia a la conocida paradoja de Zenón y la tortuga dando lugar a la representación de dos semirrectas (pues se trabaja con distancia recorrida en función del tiempo) que tienen un único punto en común.

Se expresa que:

> Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones consiste en asociar a las dos ecuaciones del sistema las dos rectas correspondientes. Las coordenadas del punto de intersección constituyen la . . . del sistema.

En los puntos suspensivos el alumno debe completar con la palabra que falta.

Si bien se señala que una solución de un sistema debe verificar todas las igualdades (refiriéndose a las ecuaciones), este enunciado como ya dijimos al comentar el texto anterior, puede ser extrapolado a situaciones con sistemas con mayor número de ecuaciones lineales con dos incógnitas, conduciendo a los alumnos a una generalización incorrecta al situar su atención en el punto de intersección y no en el conjunto de dos rectas secantes.

Bajo el título "De la gráfica a la discusión del sistema" se presentan graficadas en un mismo sistema de ejes coordenados las rectas de ecuaciones:

$$y = 2x - 1 \qquad \text{(Er)}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \qquad \text{(Es)}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1 \qquad \text{(Et)}$$

Luego se pregunta si (2; 3) es **la**[21] solución del sistema formado por Es y Et (pensamos que se quiso escribir Er), qué rectas pasan por el punto (0; -1) pidiendo que se identifique un sistema que tenga como única solución ese par y finalmente se pide que el alumno indique cuántas soluciones tiene el sistema formado por Es y Et. No se propone en todo el desarrollo del tema un problema o situación que dé origen a un sistema con infinitas soluciones. Aparece una única mención con letra pequeña en un margen que dice que si las rectas son "*Coincidentes*, el sistema tiene infinitas soluciones". Consideramos que esta última propuesta donde se consideran tres rectas graficadas conjuntamente tomándolas siempre de a dos, constituye un obstáculo a la conceptualización de un sistema con mayor número de ecuaciones, ya que tal como lo reportamos anteriormente, en los estudios exploratorios pudimos observar que aun estudiantes de nivel terciario, frente a un sistema 3x2 dudan si deben tomar las ecuaciones de a dos o considerar las tres.

[21] La negrita es del original.

El texto no presenta actividades de tránsito entre los modos de pensamiento SG y AA más que la de pasar de la ecuación a su representación gráfica. Tampoco se enfatiza que esas rectas que se obtienen están formadas por todos los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación dada, lo que conlleva a una visión de la recta como dibujo de la ecuación y no como el objeto representado en otro registro. La noción de solución queda asociada básicamente a par único que verifica dos ecuaciones dadas y estrechamente ligada a la acción de resolver un sistema.

3. 5 El cuestionario y el análisis a priori

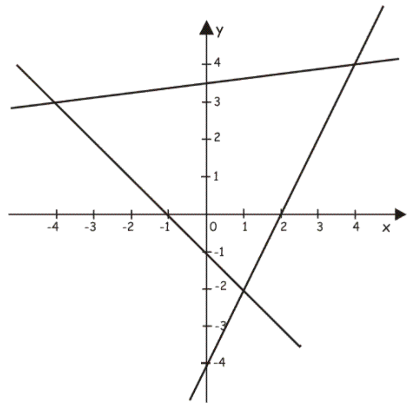
Presentamos a continuación el cuestionario de dieciocho preguntas que fue aplicado a los tres grupos de estudiantes anteriormente reseñados (dos grupos de 14–15 años -26 y 22 alumnos respectivamente- y uno de 17–18 años -21 alumnos-) con el fin de evidenciar las nociones que construyeron sobre sistema de ecuaciones y solución de un sistema de ecuaciones a partir de las secuencias de enseñanza desarrolladas. El mismo permite observar los modos de pensamiento que se ponen en juego al resolver las diferentes actividades. Algunas de éstas pueden resolverse pensando en un solo modo, fundamentalmente el SG y otras requieren el tránsito entre los modos SG y AA. A priori no esperamos observar rasgos de un pensamiento AE en los alumnos de 14–15 años aunque seguramente sí en los alumnos de 17–18 años. Los estudiantes contestaron este cuestionario en forma individual.

Las preguntas diseñadas tienen por objetivo observar las reacciones de los alumnos, un estado de conocimientos y no tienen el propósito de producir aprendizaje. Sin embargo, dado que por su diseño son situaciones inusuales y en general, se busca en ellas producir un conflicto en el estudiante, consideramos que puede darse aprendizaje y pondremos especial atención en ello.

Para el diseño de las actividades que incluimos en el cuestionario tomamos como referencia el artículo "Diseño de actividades: ejemplos de álgebra lineal**"** de Oktaç et al. (2007). En este artículo los autores toman como referencia a Zazkis y Hazzan (1998), ampliando las categorías y aplicándolas al Álgebra Lineal. De los diferentes tipos de actividades que los autores presentan, seleccionamos para nuestro cuestionario *preguntas de giro*, *actividades de construcción*, *actividades de "dar un ejemplo"*, *preguntas de reflexión* y *actividades novedosas*. Las *preguntas de giro* implican plantearle al estudiante alguna variación respecto de situaciones que él ya conoce y permiten al docente observar si los estudiantes han entendido los conceptos enseñados, razón por la cual decidimos incluirlas. Actividades de este tipo son por ejemplo las preguntas 1, 2, 3 y 4. Las *actividades de construcción* requieren que el estudiante diseñe y presente objetos matemáticos con propiedades específicas como en la pregunta 12. Estas actividades son útiles para saber si un estudiante es capaz de construir un sistema que tenga una solución dada y a partir de ello conocer la noción del concepto solución que ha construido. En las *actividades de "dar un ejemplo"*, como en la pregunta 11, se exige al estudiante realizar una actividad poco común, ya que normalmente es el docente el que le propone los ejemplos. Elaborar un ejemplo adecuado a una situación implica comprensión de los conceptos que es justamente lo que queremos indagar. No es nuestro interés que el alumno realice desarrollos algorítmicos aplicando técnicas bien conocidas por él. Lo que buscamos es desestabilizarlo, ponerlo en conflicto y de ahí que busquemos actividades a las que no está habituado. En las preguntas o actividades *de reflexión* se propone que los estudiantes expliquen y den sus argumentos sobre determinadas situaciones que se les proponen. Son ejemplos de este tipo de actividades las preguntas 5, 17 y 18. Las actividades que los autores denominan *novedosas* consisten en situaciones que presentan algún aspecto nuevo para el estudiante. Éste deberá adaptar sus conocimientos a la situación que no es habitual para él y lo desafiará en su capacidad creativa, permitiendo que el docente evidencie sus intuiciones, sus concepciones sobre los conceptos enseñados, los errores en las interpretaciones, etc. Tenemos ejemplos de este tipo en las preguntas 6, 7 y 8. Es claro que esta clasificación nos sirve a los efectos de reflexionar sobre el tipo de actividades que proponemos a los estudiantes y sus propósitos, pero en general, no las encontramos en "estado puro" sino que a veces una determinada pregunta tiene las características de varias de las categorías reseñadas.

A continuación presentamos las preguntas del cuestionario y su análisis.

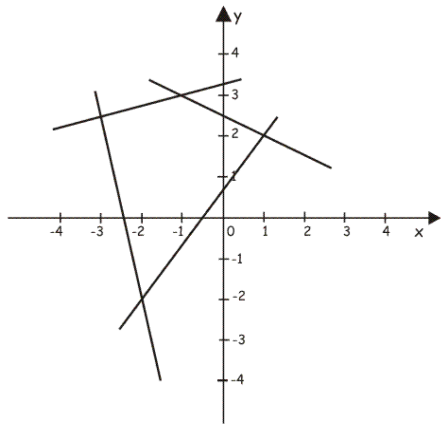
1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



Se presenta un sistema inesperado para lo que son las prácticas habituales de enseñanza que fundamentalmente se concentran en el trabajo con sistemas cuadrados. Se desea detectar qué concepción han construido los estudiantes en relación al concepto de solución de un sistema. Si este concepto, a través del trabajo con sistemas 2x2, ha sido asociado al punto de intersección de dos rectas, posiblemente los estudiantes identifiquen en cada punto de corte, una solución del sistema. Si por el contrario los estudiantes han construido el concepto solución de un sistema como par ordenado de reales que verifica a la vez todas las ecuaciones del sistema y lo han asociado a un conjunto de rectas secantes y no a un punto de intersección, quizás puedan abordar correctamente la cuestión. Del tipo de justificación que den a la respuesta se estima que podrá apreciarse el concepto de solución que han construido y los modos de pensamiento que ponen en juego para responder a las preguntas.

Se trató de que las coordenadas de los puntos de corte de las rectas fueran enteras para que la lectura sea sencilla por parte de los estudiantes por si estos desearan dar las mismas.

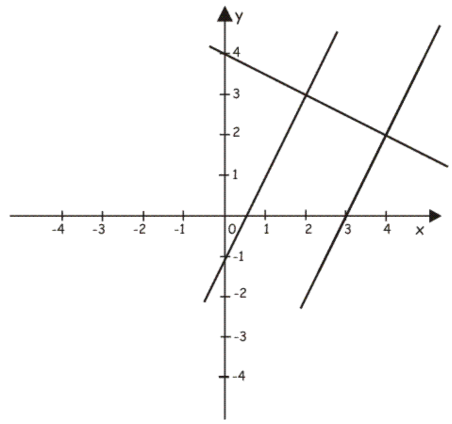
2) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de cuatro ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



Nuevamente se presenta un sistema inesperado para lo que son las prácticas habituales de enseñanza que fundamentalmente se concentran en el trabajo con sistemas cuadrados, como ya señalamos. En este caso se desea explorar el número de soluciones que asignarán al sistema, pues en los estudios exploratorios detectamos que no sólo señalan cuatro soluciones sino seis, buscando todos los puntos de intersección de las rectas dadas tomadas dos a dos. Esto implica ver más allá de los puntos de intersección representados explícitamente ya que los estudiantes deberán prolongar las rectas para representar otros dos puntos de corte. Si los alumnos manifestaran que el sistema dado tiene cuatro o seis soluciones evidenciarían que no han construido correctamente el concepto solución o que bien disponen de elementos insuficientes para poder interpretar esta situación. Creemos que esta situación nos brindaría mayores elementos para poder afirmar que la configuración de dos rectas que se cortan como ejemplo de sistema con solución única obstaculiza la conceptualización del concepto solución en tanto que solamente permite asociar la noción de solución a punto de corte y no necesariamente a conjunto de rectas concurrentes.

Se trató de que las coordenadas de los puntos de corte de las rectas que aparecen en la figura fueran enteras para que la lectura sea sencilla por parte de los estudiantes por si estos desearan dar las mismas. No así con los puntos de corte que no se han representado.

3) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



Se presentan al estudiante dos rectas paralelas y una secante a ambas. Intencionalmente no se explicita que dos de ellas son paralelas para que la lectura de esta palabra no evoque directamente un esquema asociado a un sistema incompatible. Pensamos que el alumno podría contestar basado en la palabra "paralelas" en lugar de interpretar la situación. Reconocemos que visualmente no podemos deducir que dos de las rectas son paralelas pero hemos decidido asumirlo así porque creemos que la situación será más rica en tanto queda totalmente librada al significado que el estudiante le asigne.

Deseamos observar si al igual que en los casos anteriores los estudiantes van a centrar su atención en los puntos de corte, contestando incorrectamente que hay dos soluciones para el sistema o si dicen que el sistema no tiene solución basados en que hay un par de rectas paralelas. Esto nos invitaría a pensar que la única configuración geométrica que tienen asociada a sistema sin solución es la de rectas paralelas, cuestión que podría estar incidiendo en la interpretación de las situaciones 1) y 2), ya que al tratarse de rectas no paralelas interpretarían un sistema con solución.

4) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees. ¿Tiene solución el sistema? En el caso de que tu respuesta sea negativa explica por qué y en el caso de que sea afirmativa indica cuántas y cuáles son.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

En este caso se presenta un sistema como el de la pregunta 1 pero en forma algebraica. Interesa observar qué estrategias utilizan los estudiantes para resolverlo, cómo manipulan las ecuaciones, a qué método de resolución recurren y en definitiva si asignan o no solución al sistema y en caso afirmativo cuántas.

Se trató de que en todos los casos, tomando las ecuaciones de a dos, se llegara a pares de enteros porque no se desea entorpecer el trabajo de los alumnos agregando dificultades operatorias. No es la idea reafirmar el trabajo con enteros pero debemos tener en cuenta que en este momento no tenemos un objetivo de enseñanza sino que el objetivo es observar el trabajo del alumno y que pueda expresarse con facilidad sin enredarse en errores operatorios. Pensamos que los estudiantes realizarán o bien una combinación lineal de las tres ecuaciones determinando un valor para una de las incógnitas y luego por sustitución en cualquiera de las ecuaciones obtendrán la restante o tomarán las ecuaciones de a pares interpretando el sistema 3x2 como tres sistemas de 2x2. Podrán contestar diciendo que o bien hay más de una solución o bien que no existe solución del sistema, si tienen en cuenta que el par solución debe verificar todas las ecuaciones a la vez. También pueden recurrir a un modo de pensamiento SG. Deberán entonces transitar de un modo de pensamiento AA a un modo SG en el que a partir de la representación gráfica de las tres rectas darán una respuesta. Las posibles respuestas que entendemos pueden dar son las ya mencionadas: el sistema tiene tres soluciones o no tiene solución.

5) Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

   a. ¿Puede tener una única solución?
   b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones?
   c. ¿Y exactamente tres?
   d. ¿Puede tener infinitas soluciones?
   e. ¿Y ninguna?

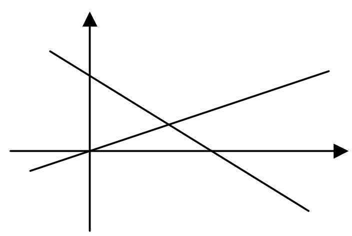
Explica cada una de tus respuestas e ilústrala a través de una representación gráfica.

Las preguntas apuntan a la reflexión del alumno en torno a cuestiones que habitualmente no se tratan en clase ya que la mayoría de las actividades tradicionales consisten en presentar un sistema y pedirle al alumno que lo resuelva.

Las preguntas también implican un cambio respecto de las anteriores donde se le presentaba un sistema en forma gráfica o analítica y se le preguntaba cuántas soluciones tenía. En este caso se utiliza el lenguaje coloquial para presentar el problema y el alumno podrá recurrir a un modo de pensamiento AA o SG para dar una respuesta o a la interrelación entre ambos.

Esta situación creemos que podría conducir al alumno a un conflicto pues debe en la parte (a) construir un conjunto de rectas concurrentes lo que le reforzará la noción de que el par solución debe verificar todas las ecuaciones a la vez. A su vez para construir un sistema que no tenga solución podría usar por ejemplo una configuración similar a la de la pregunta (1) de esta secuencia. Entonces si en función de estas preguntas el alumno reviera lo contestado anteriormente tendríamos en ella elementos útiles para la enseñanza del concepto solución de un sistema.

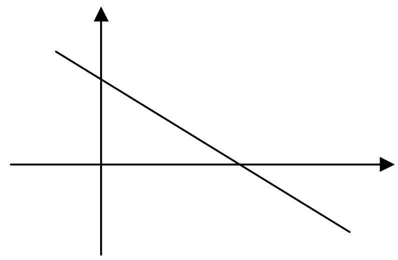
6) ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas no tenga solución? Explica tu respuesta.



Se desea observar qué tipo de pensamiento pone en juego el estudiante al momento de responder. La pregunta es interpretable utilizando el concepto de solución y trazando una recta que no pase por el punto de corte de las dadas o pensando en una configuración geométrica asociada al concepto de no solución. En el primer caso el alumno estaría pensando en que el par ordenado que verifica las ecuaciones de las rectas dadas no debe verificar las ecuaciones de las que dibujará (modo AA). En el segundo caso podría responder desde la globalidad de una configuración geométrica asociada a un sistema sin solución sin pensar necesariamente en el concepto de solución como par ordenado que verifica todas las ecuaciones o como punto que debe pertenecer a todas las rectas (modo SG). También podremos observar si recurre al trazado de rectas paralelas para que no haya solución o si utiliza una representación como la de la pregunta (1).

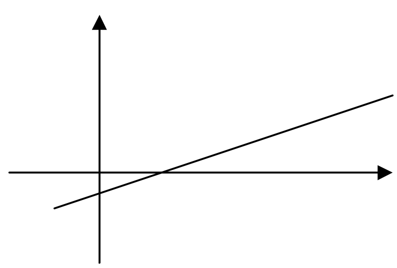
En Cutz (2005) hubo un estudiante que trazó una recta que visualmente no tocaba a las rectas dadas mostrando que pensaba en las rectas como si se tratara de segmentos. Pensamos que esta dificultad en la comprensión de la representación de una recta puede presentarse.

7) ¿Puedes representar tres rectas más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas tenga solución única? Explica tu respuesta.



Se desea observar si el alumno construye la configuración geométrica asociada a un sistema con solución única. Esto es, un conjunto de rectas concurrentes. Consideramos valiosa esta situación en tanto podremos utilizarla en la sesión de puesta en común para confrontarla con las preguntas (1) y (2).

8) ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a las dos rectas tenga solamente dos soluciones? Explica tu respuesta.

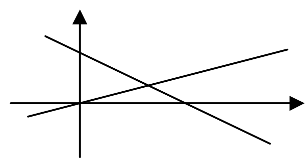


Creemos que en esta situación podría surgir la condición de linealidad en tanto la recta que deben trazar puede cortar en un punto a la dada pero no puede "curvarse"[22] para volver a cortar a la recta dada. Consideramos que la situación puede contribuir a que el

[22] Esta expresión fue detectada en los estudios exploratorios.

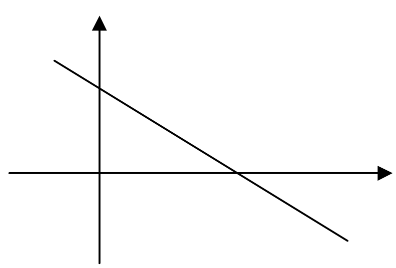
alumno vaya sacando conclusiones en cuanto a que si el número de soluciones es finito, no puede ser más de uno.

9) ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas tenga infinitas soluciones? Explica tu respuesta.



Se desea observar a qué tipo de argumento recurre el estudiante para responder la situación. La pregunta es interpretable desde el concepto de solución en tanto las rectas dadas tienen un único punto en común y entonces ya no puede haber infinitas soluciones o usando la idea de que las rectas no se "curvan" para "volver" a cortarse o puede decir que considera una recta coincidente con una de las dadas e interpretar incorrectamente que por tener infinitos puntos en común con una de ellas hay infinitas soluciones para el sistema.

10) ¿Puedes representar dos rectas más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas tenga infinitas soluciones? Explica tu respuesta.



La situación pide trazar dos rectas más para marcar una diferencia con las situaciones tradicionales donde a lo sumo se tratan dos rectas coincidentes. Se desea observar si los estudiantes pueden construir la configuración geométrica asociada a un sistema con infinitas soluciones que es la de rectas coincidentes. Para ello podrán pensar en la idea de rectas coincidentes como configuración geométrica global o en la idea de que necesitan infinitos puntos en común para que existan infinitos pares ordenados que verifiquen todas las ecuaciones.

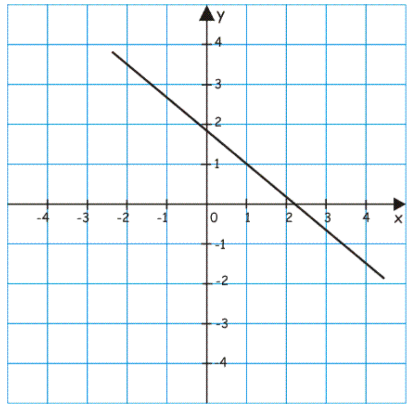
11) Presenta un sistema de ecuaciones de primer grado que tenga como solución única el par (2, 1). Explica cómo lo haces.

El estudiante podrá pensar en modo SG realizando una representación gráfica o en modo AA presentando dos ecuaciones que cumplan con la condición dada. Para dar la solución en el modo de pensamiento AA, el alumno deberá elegir cómo designar las incógnitas y seguramente pensará en "cuentas" de forma tal que asignándole a las incógnitas los valores dados permitan obtener una igualdad numérica.
Se desea observar qué modos de pensamiento se ponen en juego y si se da interacción entre ambos. La pregunta también implica pasar del par solución a las ecuaciones o a las rectas y pone en juego el concepto de solución de un sistema de ecuaciones.

12) ¿Puede un sistema de ecuaciones tener como solución el par (2, 1) y además otras soluciones? Si tu respuesta es negativa explica por qué no es posible y si tu respuesta es afirmativa presenta un ejemplo explicando cómo lo consigues.

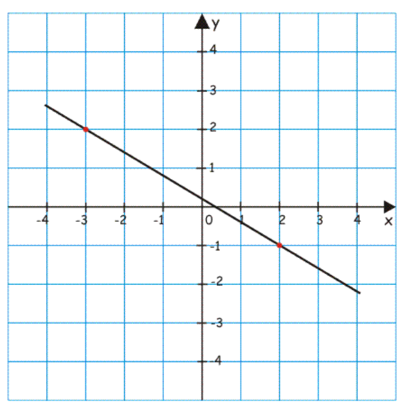
Nuevamente se desea observar qué modos de pensamiento se ponen en juego al responder la pregunta que puede hacerse desde un modo SG o desde uno AA.
La pregunta también implica pasar del par solución a las ecuaciones o a las rectas y pone en juego el concepto de solución de un sistema de ecuaciones.

13) ¿Puedes representar una recta más para que el sistema de ecuaciones asociado a ellas tenga como solución al par (3,4)?



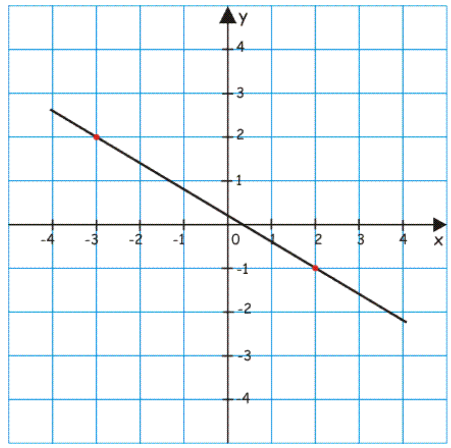
La pregunta pone en juego el concepto de solución en tanto requiere que el alumno considere que si el punto (3,4) no está en la recta dada ya no puede generar un sistema con esa solución. Podremos observar qué tipo de pensamiento se pone en juego ya que el estudiante puede expresar que (3,4) no verifica la ecuación de la recta dada o decir que el punto (3,4) no pertenece a la recta dada.

14) ¿Puedes representar una recta más para que el sistema asociado a ellas tenga como solución solamente a los pares (-3, 2) y (2, -1)? Explica tu respuesta.



Se pone en juego nuevamente el número de soluciones de un sistema. Veremos si los estudiantes utilizan el argumento de la imposibilidad de que una recta se "curve" o que solamente pueden darse los casos de una sola solución, infinitas o sin solución. El alumno deberá ahora situarse en los pares ordenados dados mientras que en preguntas anteriores solamente se hablaba de solución en forma genérica sin especificar los pares ordenados concretos como por ejemplo en la pregunta (6).

15) ¿Puedes representar una recta más para que el sistema de ecuaciones asociado a ellas tenga entre sus soluciones a los pares (-3, 2) y (2, -1)? Explica tu respuesta.



Se pone en juego nuevamente el número de soluciones de un sistema. Se desea observar si el estudiante puede interpretar que necesariamente deberá recurrir a un caso de infinitas soluciones. Para ello deberá comprender la diferencia con la pregunta anterior que requiere distinguir entre *solamente dos pares* y que tenga *entre sus soluciones a los pares*. Entendemos que esta distinción es difícil para los estudiantes y que posiblemente les parezca que las preguntas (14) y (15) son la misma por no poder entender qué agrega la información *entre sus soluciones*.

16) Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

a. ¿Puede tener una única solución?
b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones?
c. ¿Y exactamente tres?
d. ¿Puede tener infinitas soluciones?
e. ¿Y ninguna?

<u>Explica</u> cada una de tus respuestas e <u>ilústrala</u> a través de una representación gráfica.

Se repite una pregunta ya realizada para observar si la secuencia en sí misma produjo aprendizaje, cambios de punto de vista, nuevos argumentos, etc.

17) Explica qué es para ti un sistema de ecuaciones.

Se desea observar la concepción que tienen los estudiantes de sistema de ecuaciones preguntando en forma explícita. Desde el punto de vista de Vinner (1991) estamos pidiendo una definición personal del alumno que bien podrá elaborar poniendo en palabras su imagen del concepto. En la respuesta que dé el estudiante podrán también distinguirse diferentes modos de pensamiento pues el alumno podrá pensar en varias rectas (en el caso de los alumnos de 14-15 años ya que solamente conocen los sistemas 2x2) o en *algo* que se resuelve (modo AA) o podrán pensar también en términos de un conjunto de ecuaciones que se deben verificar simultáneamente.

En cuanto a las prácticas de aula, en el nivel 14-15 años, los profesores, en general, no dan una definición sino que los sistemas se van caracterizando más bien a través del trabajo con ellos. Como aproximaciones al concepto de sistema, los libros de texto más usados en este nivel presentan la siguiente información:

> Para expresar que estas condiciones [refiriéndose a dos ecuaciones lineales de dos incógnitas] deben cumplirse simultáneamente, hemos formado un sistema de ecuaciones, que indicamos con una llave (Borbonet et al., 1997)

> La llave entre las dos ecuaciones reemplaza la conjunción "y", indicando que deben verificarse las dos ecuaciones simultáneamente. (Belcredi y Zambra, 2000)

En el nivel 17-18 años, depende mucho del profesor que esté a cargo del curso, que explique lo que es un sistema de ecuaciones. En muchos casos lo dan por sobreentendido, ya que cuando los alumnos llegan a este nivel, ya han estudiado sistemas 2x2 y 3x3 en cursos anteriores.

En este nivel hay pocos libros de texto. A continuación mostramos la presentación de los sistemas lineales en uno de ellos (Fernández y Corradino, 2001):

Un sistema lineal (S), de *m* ecuaciones con *n* incógnitas puede ser identificado con una estructura del siguiente tipo:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ...\ + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ ...\ + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ ...\ + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

18) Explica qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones.

Se desea observar la concepción que tienen los estudiantes sobre solución de un sistema de ecuaciones preguntando directamente sobre la cuestión. Valen idénticos comentarios que a la pregunta (17) respecto a la definición del concepto. Esta pregunta también permitirá apreciar modos de pensamiento en tanto el alumno podrá hablar de que la solución es un punto denotando un modo SG o que la solución es un par ordenado (modo AA). Decimos par ordenado ya que es la respuesta esperable en el caso de los alumnos de 14–15 años. Los alumnos de Bachillerato quizás hablen de n-upla aunque sabemos que es un lenguaje difícil de incorporar.

En cuanto a las prácticas de aula, en el nivel 14-15 años, depende del profesor que esté a cargo del grupo que explicite o no lo qué significa solución de un sistema. Es práctica habitual que se presenten de entrada los sistemas 2x2 pasándose inmediatamente a los métodos de resolución, sin que haya un trabajo previo con una sola ecuación y con el concepto de solución en una ecuación. En cuanto a los libros de texto Borbonet et al. (1997) presentan el concepto de solución o raíz ligado al de resolución:

> Esta es una ecuación con dos incógnitas. Resolverla implica hallar **todos**[23] los pares de números (x, y) que al sustituirlos en la ecuación la convierten en una igualdad numérica. A cada uno de estos pares se le llama **raíz** de la ecuación.

En forma similar, en Belcredi y Zambra (2000) aparece:

> Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y es encontrar las soluciones comunes a las dos ecuaciones, es decir, hallar todos los pares de números (x, y) para los cuales las dos igualdades se verifican. Esos pares son las soluciones del sistema.

En el nivel 17-18 años, los profesores hacen un abordaje más formal del curso y la práctica de definir es más habitual. En Fernández y Corradino (2001), libro de texto de este nivel, haciendo mención al sistema descrito en la pregunta 17, se dice que

> La n-upla (x_1, x_2, . . . , x_n) es una solución del sistema (S), si verifica simultáneamente las m ecuaciones del mismo.

3.6 Observaciones de clase

Como ya dijimos, visitamos dos clases de 80 minutos cada una para observar cómo la profesora Martina introducía a sus alumnos de 14–15 años en el estudio de las

[23] Las negritas son del original.

ecuaciones lineales con dos incógnitas y en los sistemas de ecuaciones 2x2 que es lo que pide el programa de estudios vigentes. En la primera clase había 26 alumnos presentes y en la segunda 27. En esta sección se describe el desarrollo de las clases poniendo atención en:

- los modos de pensamiento que la docente promueve.
- la secuencia de enseñanza que sigue.
- los modos de pensamiento que los estudiantes ponen en juego frente a las situaciones que se les plantean en clase.

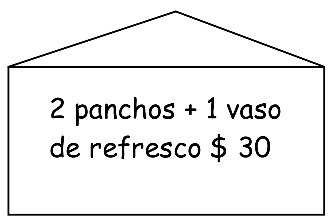
Estos elementos nos serán útiles a la hora de analizar e interpretar las respuestas de los estudiantes al cuestionario ya presentado.

Primera clase

La docente comienza presentando a los estudiantes una situación contextualizada:

P: Bueno chicos, ayer fui a la cantina y había un cartel que decía esto

y presenta en el pizarrón lo siguiente[24]:



Luego pregunta a los alumnos cómo podría escribirse esta información en lenguaje matemático a lo que surge de inmediato la utilización de las letras x e y para denominar el precio de cada pancho y del vaso de refresco respectivamente y plantean $2x + y = 30$ sin dificultad. La profesora pregunta qué es lo que han obtenido y los alumnos contestan que se trata de una ecuación apoyándose en que tiene incógnitas para averiguar, un signo de igual y un resultado:

> Verónica: Una ecuación
>
> Profesora Martina: Una ecuación. ¿Cómo sabés que es una ecuación?
>
> V: Porque tiene 2 incógnitas que tenés que averiguar... y ta.
>
> P: ¿Y ta?

[24] Cantina es el nombre que se da comúnmente en Uruguay al comedor de los colegios y la palabra panchos denomina a lo que se conoce en otros países como salchichas o *hot dogs*.

> V: Tiene signo de igual.
> P: Tiene signo de igual, bien.
> V: Tiene resultado.
> P: En realidad tiene dos miembros, tiene escrito algo en los dos miembros, ¿sí? ¿Cuántas incógnitas tiene esta ecuación?
> Alumno: Dos.
> P: Dos incógnitas, esto es una ecuación con dos incógnitas. Ustedes el año pasado trabajaron con ecuaciones con una incógnita, ¿se acuerdan?
> Alumnos a coro: Sí

Luego la docente se encamina a tratar de develar el valor de las incógnitas. Para ello se apoya en una ecuación de primer grado con una incógnita $x + 3 = 5$, y para provocar a los alumnos dice que 8 es solución a lo que una alumna contesta que no porque 8 + 3 no da 5. La profesora dice que si sustituimos x por 8 no obtenemos una *igualdad numérica*. Luego afirma que si sustituimos x por 2, que es el valor que dio otro alumno, sí se obtiene una igualdad numérica. Luego comienza a hacer un razonamiento similar ofreciendo en primera instancia el par (12, 6) como solución de la ecuación de dos incógnitas, para llegar a la idea de que los pares que verifican la ecuación son los que permiten obtener una igualdad numérica:

> Profesora Martina: Cuando yo sustituyo los elementos del par en esta ecuación que tiene dos incógnitas la convierten en una igualdad numérica, ¿sí? ¿Es el único par que yo puedo encontrar?

Los alumnos comienzan a ejemplificar con distintos pares que van verificando en la ecuación y la profesora pregunta finalmente cuántos podrán encontrar, a lo que los alumnos contestan muchos y la profesora agrega que es posible encontrar infinitos.

A partir de aquí se desarrolla una discusión en torno a si son o no infinitos basados en los siguientes puntos:

- Cada pancho no puede valer más de 15 pesos, pues si así fuera nos tendrían que “pagar” dinero cada vez que consumimos, como ellos mismos lo sugirieron. Por ejemplo, si el pancho sale \$16, entonces 2 . 16 + (- 2) = 30 entonces nos devuelven 2 pesos.
- Dificultades para ver que entre 0 y 15 hay infinitos números, los alumnos piensan primero en valores enteros para el precio de cada pancho.
- Surge el problema de que el menor valor de las monedas existentes es 50 centésimos, lo que dificulta concebir precios como \$ 12, 20.

- En la vida real las cosas no cuestan por ejemplo \$ $12,\widehat{3}$ y si algo saliera eso, ¿cómo lo pagaríamos?

A partir de este problema entre la realidad y la adecuación de los números a ella, la profesora comenta:

> Profesora Martina: Y entonces ahí ¿qué pasa? ¿Entienden lo que estamos hablando? ¿Entienden por qué en un momento pensaron que no eran infinitos? Primero dijeron, son infinitos los pares, pero después dijeron no, porque estamos en este problema. Acá hay dos cosas, por un lado los infinitos pares que yo puedo colocar acá y convertir esto en una igualdad numérica y ahí sí son infinitos ¿o no? ¿Son infinitos los pares de valores, uno para x y otro para y? ¿Son infinitos, independientemente del problema?

Después de una ardua discusión llegan a que si salimos del problema tenemos efectivamente infinitos pares ordenados de números que verifican la ecuación y la profesora resume el concepto de lo que para ella significa resolver una ecuación y repasa la noción de par ordenado:

> Profesora Martina: Bueno, a ver, yo quiero que a todos les haya quedado claro. Nosotros tenemos acá una ecuación con dos incógnitas, resolver esa ecuación es hallar los pares de valores que la convierten en una igualdad numérica, si estos pares son pares ordenados, ¿verdad? Porque, no es lo mismo que yo les diga por ejemplo, supongamos, yo digo, el par (12,6) ¿es solución de esta ecuación?
>
> Alumno: Sí.
>
> P: ¿No importa que yo diga (12,6) o (6,12)?
>
> A: Importa sí.

La profesora pasa luego al análisis de cómo podemos obtener pares ordenados solución:

> Profesora Martina: Y ¿cómo voy encontrando esas infinitas soluciones? ¿Si yo quisiera que cada uno de ustedes encontrara una distinta? ¿Cómo harían?
>
> Alumno: Cambiando
>
> P: ¿Cambiando qué?
>
> A: La x y la y.
>
> P: Pero, a ver, contame específicamente, a ver Bruno, si yo te digo quiero un par que sea solución de esta ecuación ¿qué es lo que ustedes hacen? Quiero que me cuenten, porque yo no quiero que me digan el par, quiero que me digan lo que ustedes elaboran en sus cabezas para llegar a ese par. A ver Martín.
>
> Martín: En el lugar de la x vos ponés 5,50.
>
> P: Bien, bien, pará, te paro ahí un poquito, ese 5,50 ¿de dónde lo sacaste?
>
> M: Lo inventé, 5,50 y se lo puse a la x, eso te da doce y después...
>
> P: Cinco con cincuenta por dos ¿te da?

> A: Te da once.
>
> P: Me da once y ¿entonces? Despejás te da una ecuación de una incógnita, despejo, obtengo el valor del vaso, ¿eso qué significa? Que cada vez que yo le dé un valor a la x, el que yo invente, obtengo y queda determinado un valor para la y. ¿Podría haberlo hecho al revés? ¿Podría haberle dado un valor a la y? ¿El que se me antoje? ¿Y qué pasaría con la x? ¿Sería el que se me antoje?
>
> A: No.
>
> P: Bien quedaría determinado. Estos pares, a ver, vamos a escribir algunos de los pares solución de esa ecuación... cuando yo tengo una ecuación con dos incógnitas ustedes me acaban de decir que tengo infinitos pares que son solución de esa ecuación, al conjunto de todos esos pares que son solución de esa ecuación, se le llama conjunto solución.

Los alumnos parecen manejar con naturalidad la relación funcional entre las dos variables, lo que les facilita una estrategia de obtención de pares que verifiquen la ecuación. La profesora compara el número de soluciones de una ecuación de este tipo con las que los alumnos conocían del año anterior. También aprovecha para introducir a los alumnos en un modo de pensamiento geométrico:

> Profesora Martina: Bien... (15,0), (12,6), bueno, acá no los puedo poner todos, es decir son infinitos esos puntos suspensivos, quiere decir que sigue infinitamente. No los puedo escribir todos, pero el conjunto solución es el conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación que en este caso son pares. ¿Vieron la diferencia con las ecuaciones que el año pasado hacíamos? ¿Vieron la diferencia? ¿Qué teníamos dentro de las llaves en el conjunto solución?
>
> María Inés: Un solo número.
>
> P: Se acuerdan que hablábamos de que a veces podríamos tener más de un número, sí, no sólo se puede poner más de un número, sino que a veces las soluciones de estas ecuaciones en vez de ser un número, son dos ¿y podrán ser tres?
>
> A: Sí.
>
> P: ¿En qué caso podrían ser tres? A ver ¿qué opinan?
>
> A: Cuando hay tres incógnitas.
>
> P: Cuándo hay tres incógnitas las soluciones son tres, una terna de números ¿no? bueno pero eso lo dejamos. Ahora, estos pares ustedes saben, ya han trabajado con el profesor de Ciencias Físicas, con gráficas, ¿sí? ¿Verdad? ¿Cómo trabajan? Con un par de ejes...
>
> A: Cartesianos.
>
> P: Bueno y ¿qué es?
>
> A: Las abscisas y las ordenadas.

En este diálogo se presenta una confusión de la cual la docente no parece darse cuenta, cuando dice que la solución en vez de ser un número son dos y pregunta si podrían ser tres. La docente no enfatiza en la diferencia entre un conjunto de reales y un conjunto de pares ordenados de reales, la diferencia entre un conjunto con dos elementos y un conjunto que tiene un par ordenado por elemento. También es confuso el planteo del caso de una ecuación con tres incógnitas, cuando dice que las soluciones son tres números o una terna de números, lo que consideramos que no es lo mismo. En este sentido pensamos que si bien la profesora promueve la discusión con sus alumnos a medida que se fueron presentando los nuevos aspectos del concepto que se estudia, no abre un espacio de discusión para distinguir la diferencia entre dos números y par solución.

A partir de aquí la docente pide a los alumnos que grafiquen los pares ordenados solución que tienen para preguntarles luego si observan algo a nivel gráfico:

> Profesora Martina: No, vamos a representar pares para la solución de esta ecuación. Ta? Nos olvidamos de esto, ta? Vamos a representar estos cuatro... Chiquilines. Bueno chicos, la consigna es la siguiente, hacen un par de ejes y en ellos representan estos cuatro pares de números buscan los puntos que los tienen como coordenadas. ¿Terminaron?
>
> [...]
>
> Profesora Martina: Bueno los que hicieron los puntos ¿algo para observar?
>
> Gonzalo: Se puede trazar la recta que los tiene todos.
>
> P: ¡Ah! muy bien, ¿a ver si es cierto? dice que están alineados, que se puede trazar una recta que los tiene a todos. Comprueben lo que dijo Gonzalo.

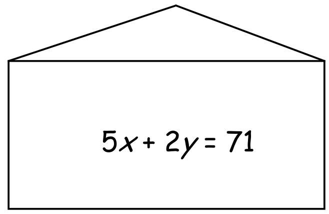
Casi todos los alumnos llegan a este resultado salvo algunos que han cometido errores al graficar, confundiendo abscisas con ordenadas o equivocando lecturas en los ejes.

La profesora repasa los resultados obtenidos y hace también la explicación de la condición recíproca: si un punto pertenece a la recta, sus coordenadas verifican la ecuación.

> Profesora Martina: Bueno chicos entonces comprobamos que los puntos que dibujamos están todos sobre una recta, ¿verdad?
>
> Alumno: Sí.
>
> P: Bueno, el tema es así, si yo siguiera tomando valores, pares, pares solución de aquella ecuación, pares que estén dentro de este conjunto, ¿que pasaría?
>
> Alumnos: Seguirían en la recta (a coro).
>
> P: ¿Siguen siendo puntos de esta recta? Y si hiciera al revés, si tomara un punto cualquiera de la recta y buscara sus coordenadas? También.

> P: Si hiciera esto por ejemplo, tomara un punto cualquiera de acá, hiciera esto, hiciera esto, indicara el par de valores, ¿qué pasaría?
> Alumnos: Serían iguales, cómo se dice, serían pares ordenados (a coro y desordenados).
> P: A ver chicos vamos a ordenarnos, si yo hiciera al revés tomara un punto de la recta hallara sus coordenadas, ese par de valores de coordenadas del punto de la recta, ¿qué me podrían decir de ese par de valores?
> Alumno: También resuelven la ecuación.
> P: O sea también sería un par solución de la ecuación, ¿sí?
> Pablo: Serían iguales.
> Profesora: [...] Pablo ¿qué me decías?
> Pablo: Tienen igualdad numérica entre los dos pares.
> Profesora: No, ¿tienen igualdad numérica? Es que yo pongo los valores del par en la ecuación y esa ecuación se convierte, deja de ser una ecuación, porque no tiene más incógnitas, si yo pongo los números en lugar de las incógnitas dejó de ser una ecuación y pasa a ser una igualdad entre números, una igualdad numérica, ¿está bien? Sí, bueno, entonces lo que sucedió con las soluciones de aquella ecuación con dos incógnitas es que si representamos todos los pares nos quedan sobre una recta, todos los pares, todos los puntos que tienen como coordenadas esos pares están sobre la recta y recíprocamente, cualquier punto que yo tome sobre la recta, el par de coordenadas de ese punto, son solución de la ecuación por eso a esta ecuación de dos incógnitas se le llama ecuación de la recta. Se habla de la ecuación de la recta cuando se tiene una ecuación de este tipo ¿verdad? Bien supongamos que hoy vamos a la cantina... y aparece, se modernizaron en la cantina y en lugar de poner ese cartel pusieron este cartel y al lado pusieron otro que dice... dice esto.

A partir del momento en que la docente introduce el modo geométrico de pensar la ecuación lineal y sus soluciones, continuará en forma permanente interactuando entre los modos sintético–geométrico y analítico–aritmético. A los alumnos les cuesta verbalizar el significado de solución en los términos que maneja la docente que refieren a la condición de igualdad numérica, sin embargo parecería que manejan bien la idea de que al sustituir en la ecuación obtendrán una igualdad. Obsérvese cómo al final del discurso aprovecha para introducir otra ecuación lineal. Ahora realiza el proceso inverso al inicial, propone la ecuación en términos de x e y y pide que los estudiantes interpreten lo que quiere decir pensando en panchos y vasos de refresco. El cartel que presenta es el siguiente:



Sólo tres alumnos levantan la mano y uno de ellos realiza la interpretación adecuada, luego la profesora pregunta qué significa el cartel si lo sacamos de la cantina.

> Profesora Martina: Bien Matías te despertaste, qué bueno, a 71 pesos, estamos de acuerdo, bien este cartel que puso la cantina, este cartel, vuelve a ser, si lo sacamos del contexto de la cantina ¿qué?
>
> P: Una ecuación. Levantamos la mano. Vuelve a ser ¿qué?
>
> Alumno: Una ecuación.
>
> P: ¿De qué tipo? Gonzalo.
>
> Gonzalo: Una ecuación de una recta o algo así.
>
> P: A ver una ecuación de una recta ¿por qué te das cuenta? ¿Por qué? ¿Qué vemos en esta ecuación?
>
> Gonzalo: Dos incógnitas.
>
> P: Dijo es otra ecuación de una recta, dijo Gonzalo, es decir esta ecuación tiene ¿cuántas soluciones?
>
> Alumno 1: Muchas.
>
> Alumno 2: Infinitas
>
> Alumno 3: Depende de si estamos comprando panchos.

La confusión nuevamente acerca de si la ecuación tiene infinitas soluciones o no y cómo el contexto está complicando en este sentido. La profesora agrega que no están en el contexto de los panchos.

> Profesora Martina: No, no, ahora me olvidé de los panchos, tiene infinitas soluciones, cada una de esas soluciones ¿qué es? ¿Es un número? ¿Qué es?
>
> Alumno 1: Un número
>
> P: ¿Un número?
>
> Alumno 2: Muchos números.
>
> P: ¿Muchos números cada solución?
>
> Alumno 2: No, cada par.
>
> P: Dos números, un par, sí, un par de números estamos de acuerdo. Bien, entonces...
>
> Alumno 2: Pero ahí tiene más de un par.
>
> P: Claro, cada solución es un par, lo que pasa... ¿cuántas soluciones hay?
>
> Alumno 2: Muchas.
>
> P: Infinitas.

> Alumno 2: ¡Ah!
>
> P: Así que acá lo que me dio es el conjunto solución que está formado por todas las soluciones de la ecuación, que está formado por infinitos pares, acá volvemos a tener una ecuación con dos incógnitas, que es la ecuación de una recta, que tiene infinitos pares solución de la ecuación y que si yo los represento en un sistema ¿qué va a pasar? Represento todos los pares...
>
> Gonzalo: Quedan sobre una recta.
>
> P: Quedan sobre una recta como dijo Gonzalo. Bueno ¿vamos a representarlo? En el mismo par de ejes, para no tener que ir al locker a buscar otra hoja cuadriculada.
>
> En el mismo par, ¿qué tendría que hacer para representar esta ecuación? A ver Matías ¿qué tengo que hacer?

Aparece nuevamente la confusión entre par y dos números que la docente parece manejar como sinónimo, si bien ella tiene claro que son pares, a veces formula expresiones como *Dos números, un par* que creemos no son sinónimos. De todas formas pensamos que esto no invalida que se esté conceptualizando la noción de par como solución de la ecuación.

Ante el requerimiento de la profesora, Matías responde acertadamente cómo obtener pares solución usando la noción de función, esto es, dando un valor a una de las incógnitas y determinando la otra en consecuencia. Como ya mencioné anteriormente, esto no parece traer dificultades a los estudiantes. Los estudiantes grafican la segunda ecuación, la profesora pasa por los bancos para ayudar y atender dudas. El gráfico en el pizarrón no ha quedado demasiado bien pero la profesora les dice que miren los gráficos de sus cuadernos.

> Profesora Martina: Quedó feo, no importa a ustedes les quedó bien, ¿les quedó más o menos así?
>
> Alumnos: Sí (a coro)
>
> P: Muy bien, muy bien. Bueno entonces...
>
> Pablo: A mí me quedó algo raro.
>
> P: ¿Qué pasó con el dibujo? ¿Qué tienen ahí? ¿Qué pueden observar? ¿Se cortaron?
>
> Alumno 1: Que tienen un valor en común.
>
> P: Tienen un punto en común, a ver Gonzalo qué pensaste cuando dijiste que tienen un valor en común.
>
> Gonzalo: Que comparten los mismos valores paralelamente.
>
> P: Ta, entonces lo que pensaste es que hay un par de valores que es solución de una y de la otra. Eso es lo que pensó, está bien, hay un par de valores que es solución a la vez de las dos ecuaciones. ¿Sí o no? ¿Cuál es este par de valores?

Alumno 1: (11,8)

P: No sé, no les pregunto los números. ¿Pero cómo lo puedo ver de acuerdo a lo que vimos en el cuaderno?

Alumno 1: Donde se cortan las dos rectas...

P: Hay un punto que pertenece a ambas rectas.

Alumno 2: La vamos a hacer cortar.

P: Esperen hay un punto que pertenece a ambas rectas, ¿sí o no?

Alumnos: Sí.

P: Si se cortaron este punto tiene dos números que son sus coordenadas que es un par y este par por pertenecer a ambas rectas ¿qué sucede con las ecuaciones con ese par de números?

Alumno 3: Tiene que dar para las dos igual.

P: O sea que, ¿son solución de las dos ecuaciones a la vez?

Alumno 4: Tienen que serlo.

P: Tienen que serlo, entonces, chiquilines cuando tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas y resolvemos esas ecuaciones tratando de encontrar las soluciones comunes, lo que hicimos fue resolver lo que se llama un sistema de ecuaciones. ¿Qué es un sistema de ecuaciones? Es un conjunto de varias ecuaciones con varias incógnitas, ¿sí?, que todas esas incógnitas representan los mismos números en todas las ecuaciones. Entonces lo que nosotros buscamos al resolver un sistema de ecuaciones, son las soluciones comunes (si es que las hay) a todas las ecuaciones del sistema. Lo que nosotros vamos a trabajar este año son sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas cada una, que lo escribimos: $2x + y = 30$, $5x + 2y = 71$ y los unimos con una llavecita. Lo que la llave nos indica es que estas dos ecuaciones no son ecuaciones aisladas y separadas una de la otra, sino que nosotros las vamos a trabajar de tal manera que la solución que quiero encontrar es la solución común a ambas. Si es que hay ¿verdad?, ta.

Alumnos: Ta.

P: Entonces a ver si me escuchan, lo que nosotros hicimos hoy, es resolver este sistema y lo pudimos resolver y encontrar la solución, ¿cuál es la solución de este sistema?

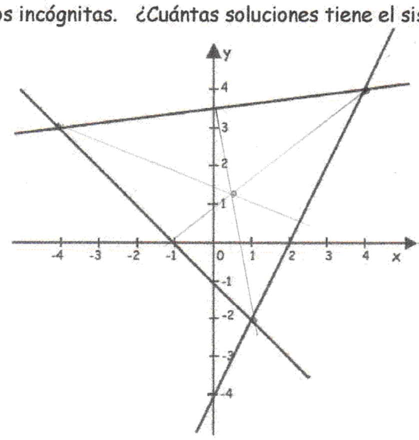
Matías: El par de números donde se cortan las rectas.

P: El par de números donde se cortan las rectas. Bien Matías, para la clase que viene, quiero que piensen si existirá un sistema que no tenga solución, si el sistema siempre tiene solución.

En el diálogo puede apreciarse cómo los alumnos recurren a un modo de pensamiento analítico–aritmético para describir lo que está sucediendo entre las dos rectas, hablan de *Que tienen un valor en común*, y la profesora corrige *Tienen un punto en común*, luego rechaza la lectura que hacen los alumnos cuando identifican el par (11, 8) e insiste en que digan que ese punto pertenece a las dos rectas y que por tanto sus coordenadas son solución de las dos ecuaciones a la vez. La profesora parecería desear una lectura paso a paso de la situación geométrica a la analítico–aritmética y trata de que los alumnos no salteen ese modo de pensamiento. En cuanto a la noción de sistema, que presenta hacia el final de la clase, vemos que está totalmente apegado a la noción de resolver el sistema. El objeto sistema es presentado en forma simbiótica con la noción de resolverlo, de la misma forma fue presentada la noción de ecuación lineal. Parecería que el sistema no puede existir independientemente de la voluntad de querer resolverlo o parecería que ver un sistema apareja la idea de resolverlo. La frase de la profesora donde dice que un sistema de ecuaciones "*Es un conjunto de varias ecuaciones con varias incógnitas, ¿sí?, que todas esas incógnitas representan los mismos números en todas las ecuaciones*" es problemática pues por un lado se describen x e y como invariantes y por otro se las hace variar para obtener soluciones de cada una de las ecuaciones en procura de puntos que permitan graficar las rectas.

Es interesante observar lo que queda institucionalizado al final de la clase por parte de un alumno y que la docente confirma: la solución del sistema es el par de números donde se cortan las rectas. Como veremos más adelante Matías es uno de los alumnos que frente a un sistema 3x2 dado en forma gráfica por tres rectas que se cortan dos a dos, responde que el sistema tiene tres soluciones. Vemos su respuesta en la siguiente imagen:

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



TRES SOLUCIONES: PORQUE LAS RECTAS SE CORTAN TRES VECES FORMANDO TRES PUNTOS (SOLUCIONES)

Segunda clase

La segunda clase observada también fue de 80 minutos. La docente retoma lo dado en la clase anterior y escribe en la pizarra el sistema trabajado la clase pasada. Pregunta qué es lo que escribió y los alumnos hablan primero de una ecuación con dos incógnitas, después de dos ecuaciones con dos incógnitas. Luego los estudiantes mencionan que las dos ecuaciones tienen las mismas incógnitas aludiendo a que las dos tienen *x* y las dos tienen *y*.

> Profesora Martina: Y bueno, cuando decimos que tienen la misma incógnita, querrán decir que aparece la misma letra y entonces si es la misma letra ¿qué va a suceder? María Inés.
>
> María Inés: Tiene el mismo valor.
>
> P: ¿Qué me indica de lo que tengo escrito en el pizarrón, que la *x* que está en esta ecuación y la *x* que está en esta ecuación tienen que ser la misma? ¿Hay algo que me lo indique, porque capaz que podrían darme diferente?
>
> Lucía: La llave.
>
> P: La llave. Esta llave, qué les parece, ah bueno, es lo mismo, no, no es lo mismo. Porque si yo les pongo a ustedes resuelvan estas ecuaciones, y pongo varias, y todas tienen *x*, ustedes van a resolver todas por separado y van a encontrar *x*, para esas *x* de cada ecuación van a encontrar diferentes valores y van a quedar contentos ¿sí o no? Pero en cambio acá lo que vamos a buscar es

> un par de valores para la primera ¿se acuerdan que dijimos que la solución para cada una de esas ecuaciones eran pares de números?

La docente no menciona que necesitamos la misma *x* y la misma *y* si lo que queremos es un par solución del sistema. Eventualmente todas las soluciones de las dos ecuaciones pueden ser distintas y en ese caso el sistema no tiene solución. Esto no invalida la escritura del sistema como tal abarcando las ecuaciones con una llave.

La docente continúa con el repaso preguntando cuántas soluciones tiene cada ecuación si las consideramos por separado. Surgen varias ideas por parte de los estudiantes que conducen a una larga discusión: una solución, dos soluciones, infinitas si no se habla de dinero pues recuerda que la clase pasada las incógnitas designaban dinero. Parecería que los que dicen una solución confunden la solución del sistema con las soluciones de cada ecuación. Los que hablan de dos parecerían referirse a que las soluciones son pares. La docente debe aclarar que dejen atrás el problema del dinero. A partir de ese momento los estudiantes aceptan que cada ecuación tiene infinitos pares solución.

> Profesora Martina: También infinitos, y cuando nosotros decimos que quiero buscar un valor para *x* y otro para *y* que sea solución de ambas ¿qué estoy buscando?
>
> Alumno 1: La incógnita.
>
> P: Sí ¿a ver?
>
> Alumno 2: La incógnita, nada...
>
> P: Pero que no te escucho, este...
>
> Alumno 2: No sé lo que preguntaste.
>
> P: ¿La incógnita dijiste? A ver.
>
> Alumno 2: Van a ser iguales, o sea los mismos pares van a resolver las dos ecuaciones.
>
> P: Es decir...
>
> Alumno 3: De todos los pares que la puedan resolver, los que sirvan para las dos.
>
> P: De todos los pares, infinitos pares, que tengo de solución de esta ecuación y de todos los pares infinitos que tengo solución de esta ecuación yo estoy buscando, si es que lo encuentro, si es que hay, un par que sea solución de las dos a la vez ¿sí? ¿Y eso qué es? Estoy resolviendo lo que dijimos que es un... ¿dijimos cómo se llama esto? ¿O no dijimos?
>
> Alumno 4: No.
>
> P. ¡Ah bueno!
>
> Alumno 5: Sistemas.
>
> P: Sistema de ecuaciones. Esto es un sistema de ecuaciones ¿Esto qué es? Es un conjunto de dos ecuaciones con dos incógnitas, le pongo una llave, esa llave

significa que estoy buscando el mismo valor, la misma solución para ambas ecuaciones. Que en este caso tiene dos ecuaciones y dos incógnitas. Existen sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, de cuatro con cuatro, de tres ecuaciones con dos incógnitas, de dos ecuaciones con tres incógnitas, existen distintos tipos de sistemas ¿ta? Pero nosotros vamos a trabajar este año con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, vamos a trabajar con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. ¿Cómo hicimos para buscar esa solución común a ambas ecuaciones? ¿Cómo hicimos la clase pasada para encontrar una solución común?

Alumno 6: La gráfica.

Observemos cómo la docente dice que cuando le ponemos la llave a las dos ecuaciones significa que estoy buscando el mismo valor, la misma solución para dos ecuaciones. Parecería que para la docente la presencia de un sistema implica buscar su solución y la representación gráfica sirve para tal propósito. No presenta a los alumnos una instancia de indagación de soluciones de un sistema en forma independiente a un procedimiento de resolución, quizás esto tenga que ver con lo que reportan DeVries y Arnon (2004) cuando observan que los estudiantes no usan la verificación para decidir si un par ordenado es solución o no de un sistema y prefieren resolverlo.

Continúan dialogando acerca de la representación gráfica:

Profesora Martina: Hicimos una gráfica y esa gráfica ¿qué hicimos?

Alumno: Donde se unían las rectas...

El estudiante evidencia dónde ha centrado su atención, parecería que en el punto de intersección de ambas rectas. Surge ahora un diálogo donde interactúan diferentes modos de pensamiento.

Profesora Martina: Ahí está, y ¿esas rectas qué eran?

Alumno 1: Los pares de ecuaciones.

P: Cada una de esas ecuaciones, dijimos que se llama la ecuación de una recta, ¿por qué? Porque si yo voy a graficar ¿qué encuentro?

Alumno 2: Una recta.

P: Una recta. ¿Cómo hicimos para llegar a esa recta?

Alumno 3: Obtuvimos puntos de los pares que se podían hacer y de ahí...

P: Obtuvimos puntos, mejor dicho llevamos, este..., ubicamos en el plano puntos y las coordenadas de esos puntos ¿las sacamos de dónde?

Alumno 3: De los pares, de los resultados que podían, y de ahí...

P: Ahí está! De los pares solución de la ecuación, en cada ecuación. Y ahí dibujamos las dos rectas y ¿qué vimos?

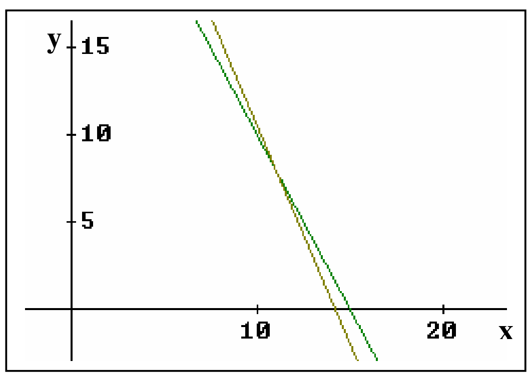
Alumno 3: Que se cruzaban.

P: Que se cortaban ¿ta?

> Alumno 3: Bueno, cortaban.
>
> P: Que se cortaban ¿ta? Que tenían en ese caso un punto en común las dos rectas que quedaban, ¿a ver cómo quedaba? ¿Quién lo tiene dibujado?
>
> Alumno 4: Yo.
>
> P: Pero ahí tenes una ... quedaba algo así, no importa, quedaba algo así ¿no?, y acá tengo un punto y este punto tiene determinadas coordenadas ¿no? Un valor para la *x* y un valor para la *y* ¿sí? No sé bien cuál es ¿se pueden fijar cuál es?
>
> Alumno 5: (11,8)

Vemos que los estudiantes manejan con naturalidad la relación ecuación-recta, par-punto del plano, transitando sin dificultades entre modos de pensamiento AA y SG.

Pero surge un problema relativo a las representaciones, las rectas graficadas parecen tener una "zona" de intersección y las rectas secantes parecen tener más de un punto en común, esto lleva a una calurosa discusión, sobre todo con uno de los alumnos que sostiene que las dos rectas pueden tener más de un punto en común, por ejemplo cinco (sin que se trate de rectas coincidentes). Vemos la representación gráfica de las dos ecuaciones:



La profesora no consigue argumentos para convencerlo con las herramientas que posee al momento, aun cuando trata de explicarle que son representaciones, dibujos, que para dibujar las rectas en la pizarra usó drypens que son gruesos, que las rectas no tienen grosor no tienen espesor, etc. No consigue convencerlo.

La profesora trata de conducir a los alumnos hacia el análisis de las posibles posiciones de dos rectas en el plano y pregunta a los alumnos cómo asegurarse de que la lectura del par ordenado solución es correcta. Si bien la profesora realiza un interesante tránsito con los alumnos entre diferentes modos de pensamiento, pensamos que concede a la representación gráfica un estatus inframatemático.

Profesora Martina: Podría ser, capaz ¿qué puede suceder si yo les digo dibujen dos rectas?

Pablo: Que se corten o no se corten.

P: Que se corten o no se corten, empezamos de vuelta con eso que dijiste: que se corten o no se corten. Si no se cortan, no tienen puntos en común, ¿cómo son las rectas en un plano que no tienen puntos en común?

Alumno 1: Paralelas.

P: Se llaman paralelas, ¿y si se cortan? ¿Cuántos puntos en común pueden tener solamente?

Alumno 2: Un punto.

P: ¿Uno? ¿O?

Alumno 3: Todos.

P: Todos ¿y qué pasa cuando los tienen todos?

Alumno 4: Forman una sola.

P: Coinciden, decimos que las rectas coinciden. Bueno, entonces nosotros vamos de vuelta a nuestro sistema de ecuaciones, ¿sí? Tengo un sistema de ecuaciones que, ¿qué hice? Representé cada una de esas ecuaciones, su representación gráfica, si yo hago una representación gráfica es una recta, esas dos rectas tienen un punto en común, en lo que hicimos ese punto aparentemente es el (11,8), según lo que están diciendo. ¿Y si yo dijera que a mí no me dio (11,8)? Yo que sé si es (11,8) o no. ¿Tendré alguna forma de verificar que realmente el punto que dijo la compañera que le dio está bien? Por más que a mí el dibujo no me haya quedado muy bien. Porque las rectas quedaron medias así como las hizo Pablo y no me puedo dar cuenta cuál es, ¿si Lucy?

Lucy: No, que hay tres maneras, ¿puede ser?

P: ¿De qué?

Lucy: Para averiguar las ecuaciones.

P: Ta, pero tú te estás yendo a otra cosa que estudiaste y no me estás contestando lo que estoy preguntando yo.

Lucy: No, pero yo te pregunto si hay.

P: Sí, hay más, hay cuatro, pero sí, ahora vamos a eso. Sí Verónica, qué cuenta hago, a ver pasá a hacer la cuenta. Yo les pregunté, a ver escuchen, yo les pregunté ¿habrá alguna forma de verificar lo que dijo Camila? Que yo no le creo porque a mí no me quedó (11,8), a mí me quedó más arriba, ella dice que hay una forma de verificar que está bien lo que dice Camila ¿Y? ¿Qué hiciste? Contame.

Verónica: Puse el 11 en la x.

P: Sí, en lugar de la x.

Verónica: Y el 8 en el lugar de la y

P: Y al 8 en el lugar de la y , ¿y entonces?

Verónica: Me dio 30.

P: ¿Te dio?

Verónica: 30.

P: ¿Y está bien esto?

Verónica: No sé.

P: ¿Por qué está bien?

Verónica: Porque...

P: No, ¿por qué está bien esto?

Verónica: Ah! Porque 2 por 11 es 22 más 8, 30.

P: Ah bueno, muy bien ¿están de acuerdo? Ella dice: fijate que está bien lo que dijo Camila porque 2 por 11 es 22 más 8, 30 ¿y con eso ya está? ¿Me conformé?

Verónica: No, me falta otra.

P: ¿Con esto que acabo de verificar? ¿Verifiqué que (11,8) es la solución del sistema? ¿Verifiqué eso?

Alumno 5: No.

P: No, ¿qué verifiqué? A ver, levantando la mano, Juan Pablo.

Juan Pablo: Que es la solución de una ecuación.

P: Que es la solución de ésta, quedó verificado y me convenció Camila, pero sigue sin convencerme que es solución del sistema ¿Qué hago Bruno entonces?

Bruno: Hacés con la otra ecuación.

La profesora conduce a los alumnos a la necesidad de verificar la "aparente" solución del sistema pues se está trabajando con una representación gráfica. También insiste en la necesidad de verificar en las dos ecuaciones dadas para que el par sea solución del sistema.

Profesora Martina: Es solución porque si yo sustituyo la x y la y por esos números verifica, obtengo una igualdad numérica. Entonces Bruno comprobó que ese par es solución de una ecuación, Verónica comprobó que ese par es solución de la otra ecuación. El mismo par. Y ahora entonces sí ¿qué podemos afirmar?

Alumno 1: Que es un punto de los que está en la gráfica que se corta, donde se corta.

P: Sí, nosotros hicimos al revés, tomamos el punto donde se cortan, y con esas coordenadas comprobamos que es solución de una y que es solución de la otra ecuación, y al comprobar que es solución de las dos ecuaciones ¿a qué conclusión llegamos?

Alumno 2: Que es la solución del sistema.

Vemos en este diálogo cómo en la clase se han introducido con naturalidad dos modos diferentes de ver los objetos matemáticos y los alumnos logran interpretar el par ordenado solución como el punto de corte de las rectas dadas.

Una alumna pregunta a la docente si un sistema de ecuaciones puede tener más de una solución.

> Lucía: Tengo una pregunta ¿y un sistema puede tener más de una solución?
>
> Alumno: Sí
>
> Profesora: Piensen, y levanten la mano para contestar ¿podrá un sistema tener más de una solución? ¿Gastón qué opinas?
>
> Gastón: Este tiene.
>
> Prof: ¿Este sistema tiene más de una solución? ¿El sistema tiene más de una solución?

Los alumnos discuten activamente. Unos dicen que no, una alumna dice que quizás por otro procedimiento diferente sea posible obtener otra solución y el alumno para el cual las dos rectas se cortan en una "zona" usa el argumento que la profesora le dio cuando intentaba convencerlo de que las rectas no pueden cortarse en más de un punto para decir que no puede haber otra solución. Sin embargo repite los argumentos de la profesora sin estar convencido.

> Pablo: Vos me estás preguntando si hay más soluciones, quiere decir que hay más puntos donde se cortan las dos rectas, y si vos me dijiste que no habían más puntos donde se cortaban las rectas, eso quiere decir que no hay más solución que esa.
>
> Profesora Martina: A ver, resumo: como yo le dije que las rectas podían tener un solo punto en común cuando se cortaban, pero no sé si te convencí, ¿te convencí de eso?
>
> Pablo: No pero...
>
> Profesora Martina: No te convencí ¿podría ser que tuvieran 2 o 3 puntos?
>
> Pablo: No sé.
>
> Profesora Martina: Bueno, entonces después lo vamos a seguir discutiendo.

Ante la discusión de si pueden existir otros pares solución del sistema, un alumno menciona un valor muy próximo a 11 y aflora la concepción de solución que ha construido un alumno cuando sostiene que la solución del sistema es *cambiar las letras por números*.

> Profesora Martina: Bueno, acá estamos metiendo un montón de cosas. Por ejemplo él dice: bueno, pero si yo hago la gráfica y me da 11,0001, eso es otro resultado con margen de error. Ahora, vamos a pensar bien en qué quiere decir la solución de un sistema. Vamos de vuelta. ¿qué quiere decir la solución de un

> sistema? ¿Qué dijimos que es la solución de un sistema? ¿Quién me dice? Independientemente cuántos va a tener, que eso lo dejamos un poquito, que ahora vamos. ¿Qué quiere decir hallar la solución de un sistema? ¿Qué Matías?
>
> Matías: Cambiar las letras por los números.

Los alumnos dicen que 11,0001 y 8,0002 podrían ser solución porque al hacer las cuentas y redondear obtendrían una igualdad numérica. Este problema guarda relación con la experiencia de trabajo que el alumno realiza en física donde realizan aproximaciones que se consideran legítimas y no siempre se distingue *igual* de *aproximado*. Supongamos que representamos con la letra d una cierta distancia en un contexto de la física. En física d = 8, no quiere decir que necesariamente la distancia d sea 8. En matemática si escribimos d = 8 significa que d es exactamente 8.

La profesora intenta convencer a los alumnos de que no hay otra solución, ya sea por aproximaciones o por otro procedimiento.

> Profesora Martina: Ahora, lo que tú estás pensando acá de repente es: Si yo para hallar la solución del sistema hago esta gráfica, que hicimos, busco el punto de corte, y no me queda muy claro como Lucía dice: a mí no me quedó muy (11,8), capaz por ahí estoy haciendo con lo que tú hacés una aproximación, probando con valores cercanos al 11, cercanos al 8 ¿sí o no? Y entonces estoy viendo si se acerca, sustituyendo a lo que se tiene que acercar ¿ta? Pero no es.
>
> Bien, entonces vamos a resumir lo siguiente, a ver si en esto estamos, si en esto sí estamos todos de acuerdo, Pablo a ver si vos también estás de acuerdo conmigo en esto: resolver un sistema es hallar un par de valores, un par de números, un par ordenado de números de tal manera que al sustituir ese par por las incógnitas en cada ecuación las verifique, o sea, sea una solución común a ambas ecuaciones ¿estamos todos de acuerdo en eso? Bueno ¿qué vimos? Que podíamos dibujar, graficar cada una de esas rectas que son las gráficas de esas ecuaciones y vimos que se cortaban en un punto y comprobamos que las coordenadas de ese punto verifican a la vez las dos ecuaciones y por lo tanto la llamamos solución del sistema, y podríamos decir que la solución de ese sistema (¿se acuerdan que siempre poníamos solución así?), en este caso es el par (11,8) Bueno, y ahora ¿qué nos pasó? Nos metimos en el lío de saber si ese sistema podrá tener otra solución ¿verdad? aparentemente no, a menos, quedó en el interrogante, a menos dice Verónica, que si yo resuelvo el sistema por otro método me dé otro par de números. Mi pregunta es la siguiente: ¿podrá ser que yo resuelva bien por dos métodos diferentes (miren lo que pregunto) podré yo resolver una misma situación por dos métodos diferentes bien (hablando en estas situaciones matemáticas ¿no?) y llegar a resultados distintos?

> Alumnos: No (a coro)
>
> P: ¿Podré pensar que si yo hago algo más de lo que ustedes pueden, una operación combinada supónganse ¿ta?, y uno lo hace por un camino y otro por otro y lleguen a distintos resultados?
>
> Alumno 1: No, uno tiene que estar mal.
>
> P: Uno tiene que estar mal. Entonces Verónica ¿podrá ser que yo aprenda otros métodos de resolución de sistemas, sí eso puede ser, y que yo llegue a resultados diferentes? Entonces significaría que cada sistema puede tener, de acuerdo al camino que haga el que lo está resolviendo, una solución diferente? No. Entonces podremos aprender otros métodos de resolución pero ¿a qué vamos a tener que llegar?
>
> Alumno 2: Al mismo resultado.

Consideramos que esta discusión no resulta del todo positiva ya que la docente no posee demasiados argumentos para convencer a los estudiantes. Lamentablemente la discusión se realizó sobre el sistema que estaban trabajando y no sobre un sistema ficticio. Es así que surgieron problemas para poder convencer a los alumnos pues no se encuentran disponibles en este nivel ni a la altura del desarrollo del tema, herramientas matemáticas que permitan afirmar con contundencia que el sistema es compatible determinado. Fundamentalmente tenemos el problema de las representaciones que parece difícil de superar y la alumna que insiste en que por otro procedimiento quizás sea posible obtener otra solución. No queda claro si se refiere a otra distinta (conservando la solución única) o a otra más además de la que tiene. La profesora parece asumir que es el primer caso y no ofrece argumentos para el segundo. Consideramos que se hubiera hecho necesario trabajar previamente con las posiciones relativas de dos rectas en el plano, planteando distintas actividades que condujeran a los alumnos a que dos rectas coplanares se cortan (y cuando lo hacen el punto de intersección es único) o son paralelas (distintas o coincidentes). Parte de las dificultades que afloraron podrían haberse evitado seleccionando mejor las rectas iniciales para que la visualización no entorpeciera ver un único punto de corte de las rectas. En realidad la discusión centrada en el sistema dado debería haberse evitado. Cabe destacar que la profesora no preguntó si este sistema tenía otra solución sino si un sistema podía tener más de una solución, el problema fue que Gastón dijo que el sistema con el que trabajaban tenía otra solución y la profesora devolvió la pregunta a la clase. Creemos que esta decisión resultó inadecuada pues los alumnos no tenían otra referencia para apoyar su razonamiento más que el sistema con el que estaban trabajando.

La docente dirige ahora la discusión hacia las distintas posibilidades que se podrán dar al graficar un sistema. Va a introducir la noción de sistema compatible e incompatible. La profesora repasa cómo obtener puntos de las rectas y los alumnos responden acertadamente acudiendo a la relación funcional entre las variables. Los alumnos discuten en forma adecuada en términos de puntos de corte y número de pares solución. Aparece siempre la idea de que hay que graficar las rectas y buscar su punto de corte para encontrar la solución, la profesora reafirma esto pero insiste en la necesidad de verificar las coordenadas del punto obtenido en las dos ecuaciones.

> Profesora Martina: [...] Bueno, esto tiene nombre. Un sistema se llama compatible cuando tiene solución, incompatible cuando no la tiene, y dentro de ser un sistema compatible, cuando tiene una sola solución se llama compatible determinado porque puede determinarse la solución, y cuando tiene infinitas se llama compatible indeterminado porque las soluciones son infinitas ¿se entendió?
>
> Bueno, entonces vamos a hacer lo siguiente, vamos a hacer un esquemita con esto de compatible, incompatible. Yo les voy a poner dos o tres sistemas para que ustedes resuelvan, así gráficamente como resolvimos éste ¿ta?, y después voy a ver cómo convenzo a Pablo que las rectas no pueden tener solamente cinco puntos en común.

La profesora propone dos sistemas para graficar:

$$\begin{cases} 2x + y = 30 \\ 4x + 2y = 60 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 30 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

Una alumna hace una observación interesante. Observa que en el segundo sistema los primeros miembros de las ecuaciones son iguales y eso la lleva a pensar que se trata de rectas iguales. Es un compañero el que señala que las rectas van a ser paralelas distintas. Hacia el final del diálogo la docente concede nuevamente un estatus inframatemático al método gráfico, no es claro si las dudas del alumno iban en ese sentido.

> Profesora Martina: ¿Qué Leti?
>
> Leti: Ahí lo que vos pusiste $2x + y = 30$ y después $2x + y = 18$...
>
> P: ¿Y entonces?
>
> L: ¿Se averigua igual?
>
> P: ¿Qué es lo que te llamó la atención? ¡Contame!
>
> L: Son iguales.
>
> P: ¿Y entonces? ¿Podés llegar a alguna conclusión? Decí nomás lo que pensás, ¿qué te llamó la atención? ¿Te llamó algo la atención ahí?
>
> L: Que como están iguales...

P: ¿Y entonces qué pasa? ¿Qué es lo que está igual?

L: Eh... las incógnitas, no, los datos.

P: ¿Cómo se llama esto de esta ecuación? ¿Te acordás? Primer miembro. El primer miembro de la primera ecuación ¿qué pasa con el otro? ¿qué es lo que observaste?

L: Que es igual.

P: Es igual al otro, que el primer miembro de la segunda ecuación ¿y los segundos miembros?

L: Son distintos.

P: Y entonces ¿qué conclusión podes sacar?

L: Que no podés.

P: ¿Qué te va a pasar? Poder podés pero, ¿qué te va a pasar? ¿Qué te va a pasar con las rectas?

L: Que van a ser iguales.

P: ¿La misma? Pensalo un poquito, ¿qué te va a pasar Bruno? Vos qué dijiste que era lo que sucedía.

Bruno: Eh, no te van a quedar... te quedan paralelas.

P: Bien, bien.

Otro alumno: Una pregunta, no entendí, cuando se cruzan en dos puntos ¿cómo sabés cuál? Bueno, cuando te parece que se cruzan en un punto.

P: Es que no lo podes determinar ¿viste? vos de repente..., es como decía.. ¿Cuál te parece qué es? ¿Será este? Entonces compruebo, me puedo ir acercando, por eso este método no es muy confiable.

En el siguiente ejemplo podemos observar cómo un estudiante parece obtener mentalmente la solución de un sistema y cómo su docente insiste en que realice el procedimiento enseñado. Pensamos que si lo que se quiere es “obligar” al estudiante a emplear una herramienta matemática, el sistema a resolver debe ser lo suficientemente complejo como para que amerite emplear la herramienta. El alumno utiliza un modo de pensamiento AA que evidencia la comprensión que ha desarrollado en el tema. La profesora parece no valorar la habilidad que ha desarrollado este estudiante y lo amenaza con proponerle más ejercicios.

Alumno: Yo eso lo hago mentalmente, si la mirás ya sabés el resultado.

Profesora: Bueno, perdón, disculpame que son tan genios. Resolvelo como lo resolvió el compañero.

Llega el momento de la puesta en común y se discute el caso de infinitas soluciones y el caso de no solución. Un alumno realiza una observación interesante que le permite no tener que graficar para saber que el sistema es compatible indeterminado. Observa que puede pasar de una ecuación a la otra multiplicando una de ellas por 2. La profesora no hace mención a ecuaciones equivalentes, solamente dice que *Entonces es como si fuera la misma ecuación*. Trata a las ecuaciones de la misma forma que si se tratara de rectas. Consideramos que es importante destacar en cada modo de pensamiento las propiedades de los objetos para poder diferenciar las propiedades que se utilizan en cada modo y las propiedades que se evidencian en ellos. Por ejemplo, si a nivel gráfico tengo dos rectas coincidentes yo no puedo develar de qué ecuaciones provienen, si bien puedo dar una ecuación o las que quiera que se adapten a la situación, sin embargo, si estoy trabajando analíticamente, partiendo de las ecuaciones, tengo biunívocamente determinadas las rectas del plano correspondientes. Consideramos entonces importante observar con los alumnos que podríamos conseguir infinitas ecuaciones equivalentes a la dada y que por tanto están asociadas a la misma recta del plano. También podría haberse institucionalizado a partir de la observación del alumno, cómo es posible obtener esas infinitas ecuaciones.

> Profesora Martina: ¡Chicos! ¿El primero lo pudieron resolver? A ver, levantando la mano, ¿qué les pasó? ¿Gonzalo?
>
> Gonzalo: Que todos los puntos de la recta coincidieron.
>
> P: ¿Coincidieron? ¿O sea que es la misma recta? ¿Y tú las graficaste?
>
> Gonzalo: Sí.
>
> P: ¿Y te pasó eso?
>
> G: Sí.
>
> P: ¿Tú las graficaste? Te pasó que era la misma recta entonces Gonzalo, ¿qué te quedó? ¿Qué era un sistema cómo?
>
> G: Compatible indeterminado
>
> P: Compatible indeterminado. Marcelo no las graficó.
>
> Alumno 1: Yo tampoco.
>
> Alumno 2: Y yo tampoco.
>
> P: ¿Nos contás?
>
> Marcelo: Porque el de abajo es el doble que el de arriba entonces va a dar el mismo resultado.
>
> P: A ver, ¿ven lo que dice él? ¿Qué sucede acá? La segunda ecuación la puedo obtener a partir de la primera multiplicando por dos, ambos miembros de esta ecuación ¿sí o no? Si multiplico por 2 esto ¿qué me queda? $2x$ por 2 igual $4x$, $2y$ por 2 igual $4y$ y 30 por 2 igual 60. Entonces es como si fuera la misma ecuación.
>
> Alumno 3: Claro.
>
> P: No son la misma pero..
>
> Alumno 4: Vale lo mismo.
>
> P: Cuándo voy a hacer los puntos...

Alumno 5: Son las mismas incógnitas.

P: Las mismas incógnitas, digo, los valores que estoy buscando, eso sucede en todo ¿estamos de acuerdo?

Alumno 5: Sí

P: Entonces él dijo: si yo multiplico por 2 ambos miembros de la primera ecuación y obtengo la segunda, la recta me va a quedar la misma. Y es correcto ¿y en la otra?

Alumno 6: Es un sistema incompatible.

Gonzalo: Te das cuenta de entrada.

P: ¿Y te das cuenta de entrada Gonzalo? ¿Por qué?

Gonzalo: Porque tenés, son los mismos valores y las mismas incógnitas y te da diferente resultado, entonces eso no puede ser.

P: O sea, lo que vos hiciste fue darle valores a la x en cada una y obtuviste el valor de y, y te dio distinto ¿qué fue lo que hiciste? Contanos como te diste cuenta que no puede ser.

Gonzalo: Si $2x + y = 30$, lo mismo no te puede dar 18.

P: Ahora sí, ahí está. Yo tengo que $2x + y$ por un lado me da 30, y siendo x e y los mismos números, por otro lado $2x + y$ me da 18 ¿puede ser?

Alumnos: No (a coro)

P: ¿Sí? A ver, ¿me están atendiendo o bajamos los brazos? Lo que dice Gonzalo es: (que muchos pensaron eso ¿no?) En estas dos ecuaciones ¿qué sucede? Esta parte es idéntica y entonces me están diciendo que un número por 2 más otro número me da 30, pero también que el mismo número que tenía arriba por 2 más el otro mismo número, o sea, la misma operación ¿me da qué? Dos resultados diferentes ¿puede ser?

Alumnos: No (a coro)

P: No. Entonces, si no puede ser, no voy a poder encontrar un par de valores y entonces el sistema, ¿cómo va a ser?

Alumno 7: Incompatible.

P: Incompatible. ¿Las rectas cómo me deben quedar?

Alumno 8: Paralelas.

El caso de incompatibilidad también surge en un modo de pensamiento AA a partir de la observación de que $2x + y = 30$ y $2x + y = 18$, no pueden verificarse para el mismo valor de x e y. La docente sostiene que la misma cuenta no puede dar dos resultados distintos. Si bien con esta observación enfatiza una idea bastante generalizada en los alumnos que consiste en pensar que el signo de igual significa "el resultado es", consideramos que los dos sistemas propuestas por la docente fueron bien elegidos ya que permitieron a los alumnos detectar relaciones a nivel de un pensamiento AA, que les permitió conjeturar cuáles serían las representaciones gráficas correspondientes. Se podría a partir de estas ricas observaciones de los alumnos haber institucionalizado otros aspectos referidos a ecuaciones equivalentes en lugar de centrar exclusivamente la atención en la resolución de los sistemas.

La docente invita a los alumnos a pensar para la próxima clase si este método gráfico que han aprendido es siempre útil. Es la excusa que utiliza para presentar los métodos de resolución algebraica tal como se reportó en el análisis del primer libro de texto.

> Profesora Martina: Yo lo que después quiero que piensen para la clase después del escrito es si este método que aprendimos para resolver, es un método que nos sirva para determinar siempre bien la solución en un sistema.

Reflexionemos sobre la noción de sistema y solución de un sistema que se ha construido a lo largo de estas dos clases. La docente ha enfatizado en que cada ecuación lineal tiene infinitas soluciones, si bien no se ha detenido demasiado en la obtención de algunas de ellas más que para obtener dos que sirvan para graficar la recta asociada a la ecuación. Tampoco se han realizado actividades ya sea en el modo AA, preguntado por ejemplo a los alumnos que averigüen si un par ordenado dado es solución o no de una ecuación dada, lo que llevaría a la noción de verificar como herramienta útil para tal fin. Consideramos que esto permitiría que los alumnos separaran la noción de solución de la noción de resolver. En el modo SG tampoco aparecen actividades de clase como por ejemplo decidir a nivel gráfico si un par ordenado dado es solución o no de la ecuación cuando se conoce solamente la representación gráfica pero no la ecuación de la recta. Es así que la profesora se dirige rápidamente a la resolución de un sistema por el método gráfico. La docente insiste en que, si existen, el par o pares solución son los que verifiquen todas las ecuaciones del sistema y en efecto, pide a los alumnos que verifiquen las coordenadas del punto encontrado en las dos ecuaciones. A nivel gráfico la solución del sistema es identificada como el punto de corte de dos rectas, no se hace mención a que la representación gráfica de un sistema 2x2 con solución única es un conjunto de dos rectas secantes. Se trabaja el caso de rectas paralelas y el de rectas coincidentes, mencionando en cada caso los conjuntos solución aunque no se menciona cómo escribir el conjunto solución para estos dos casos cuando sí se hizo énfasis en cómo escribirlo para el caso de solución única. Esto podría invitar a los alumnos a pensar que estos sistemas no pueden resolverse o que no tienen conjunto solución en virtud de que no se les ha exigido escribirlo. No se hace mención a ecuaciones equivalentes sino que se las trata *como si fuera la misma ecuación*. Esto resta posibilidades a los estudiantes de introducirse en la reflexión de un importante concepto matemático que luego cobrará especial importancia en el tratamiento algebraico de los métodos de resolución.

3.7 Enfoque de la enseñanza de los sistemas de ecuaciones en el grupo a mi cargo (Prof. Cristina)

Comienzo diciendo a los estudiantes que ya hemos estudiado las ecuaciones de primer grado con una incógnita y que ahora estudiaremos las de primer grado con dos incógnitas o también llamadas ecuaciones lineales con dos incógnitas. A continuación les presento una ecuación cualquiera, que sea sencilla, como por ejemplo $x + y - 3 = 0$. Con el adjetivo *sencilla* me refiero a que debe resultar fácil a los estudiantes obtener soluciones en forma mental, que será la primera tarea que propondré. Observamos a continuación que para dar soluciones a la ecuación será necesario dar un valor para x y otro para y, es decir pares de valores. Convendremos que en primer lugar daremos el valor de x y luego el de y, de manera que estamos buscando pares ordenados de la forma (x, y) que verifiquen la ecuación.

Les pido ahora que den ejemplos de pares solución de la ecuación. No tienen dificultades para comenzar a darlos. Dicen por ejemplo (2,1) entonces escribimos en el pizarrón ¿2 + 1 – 3 = 0? Vemos que sí y escribimos debajo que "*el par (2,1) es solución de la ecuación*". Así continúan, dando otros pares y trato de que aparezca uno o más que no verifican, a veces ellos mismos cometen errores con los signos al operar mentalmente y proponen pares como (-4,1). Observamos que – 4 + 1 - 3 es distinto de cero y escribimos que "*el par (-4 , 1) no es solución de la ecuación*".

Después de tener unos cuantos pares que verifican, ellos mismos dicen que hay infinitos y escribimos a manera ilustrativa el conjunto solución de la ecuación:

S={(0,3), (4,-1), (-1,4), (1,5;1,5), ...}

Les pido luego que grafiquen en un sistema cartesiano todos los pares que tenemos, con un color los que verifican la ecuación y con otro los que no la verifican, y que redacten lo que observan. Surge de inmediato que los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación están alineados y no sucede lo mismo con los que no verifican. De ahí que la ecuación reciba el nombre de ecuación *lineal*. Trazamos la recta que contiene a los puntos que están alineados. Elijo un punto de la recta (uno al que sea sencillo leerle sus coordenadas) y les pido a los estudiantes que me digan sus coordenadas. Observamos que verifican la ecuación. La idea es que ellos vean que todos los pares ordenados que verifican la ecuación están alineados y que todo punto de la recta cumple que sus coordenadas verifican la ecuación. Luego les digo que diremos que esa recta tiene ecuación $x + y - 3 = 0$, en virtud de que las coordenadas de los puntos que pertenecen a ella verifican esa ecuación y sólo ellos. Vemos expresiones equivalentes como $x + y = 3$ o $y = 3 - x$, usando manipulaciones que ellos ya han trabajado en las ecuaciones de primer grado con una incógnita, como la transposición de términos de un miembro al otro. Les digo que cada vez que estemos ante una ecuación de este tipo, podremos hablar de la ecuación o abusando del lenguaje, señalaremos la ecuación y diremos "*esta recta*", entendiendo que nos referimos a la representación gráfica de los pares que verifican la ecuación.

Después practicamos graficando algunas rectas dadas por sus ecuaciones. Vemos que es suficiente determinar dos puntos para obtener la gráfica y realizan la determinación de sus coordenadas mentalmente a partir de la ecuación. De esto se desprende que en esta etapa trabajamos con ecuaciones sencillas. Observamos también que es posible despejar una incógnita en función de la otra y darle valores a una para obtener los de la otra. Pero no hacemos demasiado énfasis en esto. Yo prefiero que deduzcan mentalmente los pares y que vayan fácilmente a la gráfica.

También realizamos otras actividades como la de determinar un coeficiente de la ecuación, conociendo una solución. Por ejemplo: "*Hallar a para que el punto de coordenadas (2,3) pertenezca a la recta de ecuación* $a.x - 4y - 2 = 0$".

Luego les propongo la siguiente actividad, donde van a aparecer las tres posiciones relativas de dos rectas en el plano.

"*Graficar conjuntamente, en cada caso, los siguientes pares de rectas*"

a) $x + y = -5$	b) $x + y = 3$	c) $x + y = 1$
$x - y + 1 = 0$	$2x + 2y = 6$	$x + y = 7$

En el caso a) vemos que las rectas son secantes y deducimos de la gráfica las coordenadas del punto de corte. Observamos que hay un único par que verifica ambas ecuaciones. En el caso b) las rectas son paralelas coincidentes. Vemos que todo par que verifica una, verifica la otra y recíprocamente. Los estudiantes dicen que una es el "*doble*" de la otra y les explico que siempre que multipliquemos una ecuación por un número real distinto de cero obtendremos una ecuación equivalente, eso significa que ambas tienen el mismo conjunto solución, es decir que los pares que verifican una y otra son los mismos. En el caso c) vemos que las rectas son paralelas distintas y que no existe ningún par que verifique a la vez las dos ecuaciones. Desde el punto de vista analítico y por la particularidad de las ecuaciones elegidas: $x + y = 1$ y $x + y = 7$, es fácil observar que no es posible encontrar un par de números x e y tales que su suma sea a la vez, 1 y 7. De ahí que sea razonable obtener rectas que no tienen punto alguno en común.

Vemos luego que como estamos trabajando en el plano, no hay otra posibilidad para dos rectas: dos rectas coplanares son secantes o paralelas (disjuntas o coincidentes).

A continuación les digo que vamos a trabajar con sistemas de ecuaciones. Un sistema es un conjunto formado por dos ecuaciones que abarcaré con una llave y esto significa que las voy a considerar juntas. Resolver un sistema de ecuaciones significará determinar, si existen, las coordenadas de los puntos que las rectas tienen en común.

En el caso en que las ecuaciones representan rectas secantes tendremos solamente uno, ese par se dice que es la solución del sistema. Cuando las rectas de las ecuaciones son paralelas distintas no hay ningún punto en común y diremos que el conjunto solución es vacío. Si fueran coincidentes tenemos infinitos pares solución y no escribiremos el conjunto solución pues tiene infinitos elementos. Resolvemos gráficamente algunos sistemas más. Si observando las ecuaciones tienen elementos para justificar que son paralelas coincidentes o distintas, no tienen necesidad de realizar la representación gráfica. Pueden observar si una ecuación se obtiene de la otra multiplicando por un número real u observando por ejemplo que los coeficientes de x e y se multiplicaron por el mismo número pero el término independiente no y así deducir que se trata de rectas paralelas distintas.

Luego les propongo algún caso donde las coordenadas del punto de corte de dos rectas secantes son fraccionarias para que vean que gráficamente no podemos realizar en forma eficiente la lectura de las mismas y pasamos a un método algebraico de resolución como el de reducción o también llamado método de sumas y restas.

Como ya vimos que multiplicando una ecuación por un real distinto de cero obtenemos una ecuación equivalente no hay problema en sustituir una ecuación por otra equivalente (pues es la misma recta) de forma que al sumar logremos eliminar una de las incógnitas.

Si aplicando este método llegamos a expresiones de la forma $0x + 0y = 0$ o $0x + 0y = k$ (k distinto de cero), tratamos de entender qué significado tienen. Como ya vimos la interpretación geométrica y las características de las ecuaciones en cada caso, podemos discriminar si se trata de rectas paralelas coincidentes o disjuntas. En el caso de obtener

$0x + 0y = 0$ discutimos que cualquier par ordenado verifica esta expresión y por tanto tenemos infinitas soluciones para el sistema (dadas por las soluciones de cualquiera de las ecuaciones dadas). En el caso de obtener $0x + 0y = k$ (k distinto de cero) observamos que ningún par ordenado verifica esta condición y por tanto no habrá ningún par solución para el sistema y que geométricamente se trata de rectas paralelas distintas.
Continuamos con la resolución de sistemas que requieren mayores destrezas algebraicas como por ejemplo cuando se presentan ecuaciones con denominadores y resolvemos problemas que plantean una situación en lenguaje verbal que puede ser traducida a través de un sistema para llegar a la respuesta.

3.8 Elementos a tener en cuenta en el diseño de una secuencia de enseñanza

A partir de las dificultades ya reseñadas en los estudios exploratorios con la interpretación del número de soluciones de un sistema 3x2 en el caso en que las tres rectas se cortan formando un "triángulo", alguien podría bien pensar que si no enseñáramos la interpretación geométrica de un sistema 2x2 podríamos evitar todos estos problemas. Sin embargo el problema se presenta igualmente si se trabaja en el modo AA o AE, tal como quedó en evidencia en los estudios exploratorios. Lo ejemplificaremos presentando dos casos. El primero corresponde a Sebastián, alumno del tercer año de Bachillerato que recién había terminado de estudiar sistemas de ecuaciones con cualquier número de ecuaciones e incógnitas. A este estudiante se le propuso la siguiente actividad:

> Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees.
> Redacta tus comentarios acerca de la solución del sistema.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Frente a este sistema 3x2 dado por sus tres ecuaciones el estudiante cree que hay varias soluciones tomando las ecuaciones de a dos. Vemos su trabajo en la siguiente imagen:

$$+\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases}$$
$$2x = 8$$
$$\boxed{x=4}$$

$$3.4-y=3$$
$$-y=3-12$$
$$-y=-9$$
$$\boxed{y=9}$$

Para la solución que encontre para el sistema no es compatible para todo el sistema, solo para $3x-y=3$

$$(x-1)\ \begin{cases} x-y=6 \\ 3x-y=3 \end{cases}$$
$$2x+0=-3$$
$$\boxed{x=-3/2}$$

$$3\cdot -3/2 - y = 3$$
$$-y=\frac{15}{2}$$
$$y=-\frac{15}{2}$$

Volvi a resolver el sistema y llego a lo mismo, que la solución de este sistema solo es compatible para $3x-y=3$.

Supongo que por los siguientes ~~casos~~ sos sucedera lo mismo.
Por lo tanto tengo varios soluciones para el sistema.

El segundo caso corresponde a Gastón, estudiante de segundo año de profesorado de matemática que además tiene experiencia en el dictado de clases de matemática porque da clases particulares en su casa. Frente a un sistema 3x2 dado por sus ecuaciones que se le pide resolver, el estudiante contesta que "*Es imposible resolverlo debido a que tengo tres ecuaciones que no son combinación lineal (una de las otras dos). Para resolverlo debo tener la misma cantidad de incógnitas como de ecuaciones linealmente independientes*". El estudiante está altamente influenciado en su respuesta por sistemas con solución única que parecen ser los únicos que para él "pueden resolverse". Vale preguntarnos qué hubiera pasado si se le hubiera presentado un sistema 2x2 o 3x2 con infinitas soluciones.

Fundamentaremos entonces, primero que nada, por qué no relegar un enfoque geométrico. Con esto no pretendemos declarar que es el enfoque geométrico el más importante, sino que distintos enfoques son necesarios y que el tránsito entre los diferentes modos de pensamiento es relevante para pensar en álgebra lineal. Coincidimos con Sierpinska (2000), en que todos los modos de pensamiento son igualmente útiles, cada uno en su contexto, y para propósitos específicos y especialmente cuando están en interacción.

Mora (2001) constató que el modo de pensamiento geométrico funciona como una herramienta de apoyo para dar significado a los procedimientos analíticos y además motiva a la reflexión matemática en el estudiante.

Esto coincide con la justificación que da Gueudet–Chartier (2003) sobre la necesidad de un modelo concreto en álgebra lineal sobre el cual apoyar los razonamientos. La geometría brinda ese modelo.

Barrera et al. (1998) proponen que se trabaje en el ámbito del pensamiento sintético–geométrico y en la relación entre los tipos de pensamiento sintético-geométrico y analítico–aritmético para poder llegar así a un nivel de pensamiento analítico-estructural.

Dreyfus, Hillel y Sierpinska (1999) eligen una entrada geométrica al álgebra lineal basados en la historia de la matemática y en los análisis de Dorier:

> We refer to Dorier´s (1997) analysis which stresses the importance of geometric sources of many algebraic concepts. For example, Grassmann openly admitted to a geometric inspiration when he introduced his notion of vector as a “displacement”.

Nosotras trabajaremos en una secuencia de aprendizaje para estudiantes de 14–15 años que se introducen por primera vez en el estudio de ecuaciones lineales con dos incógnitas y en los sistemas de ecuaciones. De acuerdo al marco teórico que hemos elegido prepararemos una secuencia de aprendizaje que tenga en cuenta los diferentes modos de pensamiento (Sierpinska, 2000), el tránsito entre ellos y los aportes de Vinner (1991) referidos a la formación de conceptos, donde enfatiza la importancia del conjunto de ejemplos y no-ejemplos que se proveen a los estudiantes para la formación de la imagen del concepto.

Es nuestra intención no ligar la enseñanza del concepto solución a los procedimientos de resolución de un sistema en tanto se ha observado que los alumnos tienden a confundir que un sistema significa resolverlo, confundiendo un objeto con un proceso (Segura, 2004; De Vries y Arnon, 2004).

A partir de la revisión de textos y de las observaciones de clase realizadas, tampoco creemos conveniente comenzar la introducción al tema sistemas de ecuaciones a partir de situaciones contextualizadas en tanto esto exige a los estudiantes continuas contextualizaciones y descontextualizaciones por problemas de dominio de las variables que alejan al estudiante de una correcta construcción del objeto ecuación lineal con dos incógnitas al menos en una primera aproximación. En general, las situaciones contextualizadas exigen una modelización matemática para convertir en objeto de análisis el fenómeno que se desea estudiar, surgen así las necesarias adecuaciones del objeto matemático a la realidad en tanto es difícil encontrar situaciones contextualizadas que respondan a variables que varían sobre todos los reales. En las clases que observamos vimos que la docente eligió una relación entre precios de comidas para modelar en forma de ecuación: dos panchos[25] y un vaso de refresco salen 30 pesos. Si bien podría asumirse que estos precios podrían variar en R^+ y que por tanto la ecuación podría tener infinitos pares solución (aún con la restricción de R^+ x R^+), surge luego el problema de que no existen más que monedas de 50 centésimos, cuestión que lleva a que la ecuación que modela el fenómeno tiene un número finito de pares solución. Esto exigió una gran discusión en la clase en tanto los alumnos no tenían claro cuándo estaban trabajando en contexto y cuándo no, exigiendo a la docente permanentes aclaraciones para saber si estaban ante una ecuación con infinitas soluciones o no. Sostenemos que es valiosa la modelización matemática como abstracción de problemas de la realidad que muestra a los estudiantes la potencialidad de la matemática pero en etapas posteriores a la adquisición de los primeros conceptos. Veamos qué aporta al respecto la noción de *ruido* utilizada por Skemp (1993, pág.33):

> Se entiende por ruido aquellos datos que son irrelevantes en una comunicación dada; así, lo que es ruido en un contexto puede no serlo en otro. (Por ejemplo, si estamos escuchando música cuando suena el teléfono, el sonido del timbre aporta *información* de que alguien nos está llamando, pero es *ruido* en relación con la música). Cuanto mayor es el ruido, más penoso es formar el concepto.

Más adelante Skemp nos habla sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos (pág. 37):

> Los buenos profesores ayudan intuitivamente a sacar una definición con ejemplos. Elegir una colección adecuada es, sin embargo, más difícil de lo que

[25] Como ya dijimos panchos significa salchichas o *hot dogs*.

> parece. Los ejemplos han de tener en común las propiedades que forman los conceptos, pero no otras. Para decirlo de modo diferente, deben ser similares en las vías en que han de abstraerse, y cualquier otra cosa que difiera lo suficiente, respecto de las propiedades no esenciales de este concepto particular, basta para rechazarlo o, con más precisión, lo elimina para su adquisición. Recordando que estas propiedades no esenciales puedan considerarse como ruido, podemos decir que cierto ruido es necesario para la formación del concepto. En las primeras etapas es conveniente bajo ruido – clara envoltura del concepto, con poco detalle distractivo – pero a medida que el concepto se consolida fuertemente, el incremento de ruido enseña al receptor a extraer las propiedades conceptuales a partir de ejemplos más difíciles, y reduce así su dependencia respecto del profesor.

Es así que nos inclinamos por una introducción directa del objeto ecuación lineal con dos incógnitas, la reflexión acerca de esas dos incógnitas, qué representan (distintos números o números iguales), la infinitud de pares de números reales que la verifican y la observación de la condición gráfica que cumplen dichos pares. Antes de introducir la noción de sistema consideramos importante reafirmar la noción de ecuación lineal con dos incógnitas trabajando con pares ordenados que la verifican tanto en un modo de pensamiento analítico–aritmético como sintético–geométrico.

Para elaborar la secuencia tendremos en cuenta las reflexiones anteriores, las recomendaciones que surgirán del primer objetivo de esta investigación (Capítulo V) y también las recomendaciones o consideraciones que surgen de otros trabajos de investigación y que consideramos pueden enriquecer el trabajo con los estudiantes, como las de Cutz (2005), Ramírez (2005) y Häggström (en progreso). Presentaremos la secuencia en el capítulo VI después de las conclusiones y recomendaciones didácticas que surgen del primer objetivo de esta investigación.

CAPÍTULO IV

Análisis de los resultados referidos al primer objetivo de la investigación

> ...si bien prefería el carácter racional de las cosas, creía que la razón, sustentada en la lógica, es un juego que logra dar una justificación a posteriori y que en su camino no encuentra necesariamente la verdad. La realidad siempre es avasallante, impenetrable, incognoscible...
>
> G. Franco

Como primer objetivo de este trabajo nos propusimos explorar el concepto de sistema y de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que construyen los estudiantes de enseñanza secundaria de 14–15 años y los de 17–18 años. Es a partir del cuestionario que aplicamos y que presentamos en la sección anterior que realizaremos el análisis.

Clasificaremos a los estudiantes de cada nivel en tres grupos de acuerdo a la respuesta dada en la primera pregunta del cuestionario:

a) Los que contestan que el sistema no tiene solución.
b) Los que contestan que el sistema tiene tres soluciones.
c) Los que dan respuestas de otro tipo.

De cada uno de estos grupos iremos reportando los casos que creemos aportan mayor información para entender la forma en que piensan los estudiantes, las dificultades que enfrentan y las ideas que permiten superarlas.

Dentro del grupo a) nos interesa centrarnos en el tipo de argumentos que dan a lo largo del trabajo y distinguir así en qué aspectos han centrado su atención los estudiantes para dar una respuesta correcta. También observaremos qué modos de pensamiento ponen en juego y trataremos de describir la imagen del concepto que han construido.

Dentro del grupo b) nos interesa también observar los argumentos que dan en sus respuestas que seguramente pondrán en evidencia aspectos de la imagen de los conceptos que han construido y trataremos de indagar qué aspecto de esa imagen está llevando a los alumnos a interpretar que el sistema tiene tres soluciones. Destacaremos dentro de este grupo a aquellos alumnos que a lo largo del cuestionario cambiaron de opinión y centraremos la atención en cuáles son las preguntas que contribuyeron en este sentido. Esto en su turno nos da elementos para el posterior diseño de la secuencia de aprendizaje.

Del grupo c) observaremos qué otro tipo de argumentos llevan a los alumnos a una interpretación diferente de las relevadas en los casos a) y b), qué modos de pensamiento ponen en juego y también, al igual que en el grupo b), centraremos la atención en cuáles son las preguntas que contribuyen a un cambio de opinión. También nos interesa observar las diferentes concepciones que tienen los estudiantes respecto al concepto solución y cómo sale a la luz en este contexto específico geométrico.

4. 1 Primeras impresiones

El cuestionario fue aplicado a los siguientes grupos:

1. Un grupo de 26 alumnos de 14–15 años de la profesora Martina.
2. Un grupo de 22 alumnos de 14–15 años de la profesora Cristina.
3. Un grupo de 21 alumnos de 17–18 años.

Para una primera impresión acerca de cómo se distribuyen las respuestas a la pregunta 1, presentaremos los datos en una tabla. No es nuestra intención realizar un análisis cuantitativo pero creemos que las tablas permiten una visión rápida de los primeros resultados y evidencian la aparición de un error que consideramos relevante para explorar la noción de *solución* de un sistema construida por los estudiantes.

Grupo 1		
Respuestas a la pregunta 1	**Número de alumnos**	**Porcentaje**
El sistema no tiene solución	7	27
El sistema tiene tres soluciones	14	54
Otras respuestas	5	19
Total	26	100

Grupo 2		
Respuestas a la pregunta 1	**Número de alumnos**	**Porcentaje**
El sistema no tiene solución	5	23
El sistema tiene tres soluciones	10	45
Otras respuestas	7	32
Total	22	100

Grupo 3		
Respuestas a la pregunta 1	**Número de alumnos**	**Porcentaje**
El sistema no tiene solución	6	29
El sistema tiene tres soluciones	7	33
Otras respuestas	8	38
Total	21	100

A primera vista llama la atención que el porcentaje correspondiente a la respuesta "el sistema no tiene solución" es aproximadamente el mismo en los tres grupos –recordemos que el Grupo 3 corresponde a estudiantes pre-universitarios– y que en este último caso se observa, conjuntamente, una disminución, respecto de los Grupos 1 y 2, del porcentaje de la respuesta "El sistema tiene tres soluciones", y un aumento de los porcentajes en la respuesta "el sistema no tiene solución" y en "Otras respuestas", con énfasis en esta última opción. Parecería que a medida que el estudiante avanza en sus estudios y profundiza en los conceptos, no se contribuye necesariamente a la consolidación de los mismos sino que se diversifican los tipos de respuestas que es capaz de dar. El docente a cargo del Grupo 3 nos relató cómo enseñó el tema sistemas de ecuaciones lineales en ese grupo de 3er. año de Bachillerato Diversificado Opción Economía[26]. Le pedimos que nos explicara cómo introducía el tema y la secuencia de enseñanza que seguía. Su respuesta fue:

> En la parte práctica comenzamos con un repaso operatorio que incluye lo que se vio en años anteriores sobre la resolución de sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3 aplicando sustitución, igualación y reducción, ya que en Geometría Analítica aplicamos todos ellos en la parte práctica fundamentalmente. En la parte teórica comenzamos con Matrices y Determinantes y luego vemos como una aplicación, la resolución de sistemas lineales, en particular se ve el método de Cramer. Completamos el estudio del tema con el método de escalerización (Gauss) haciendo especial hincapié en la aplicación de la equivalencia de ecuaciones y por supuesto en la discusión de los sistemas paramétricos por ambos métodos, estudiando en especial los grados de libertad de los sistemas compatibles indeterminados y la forma de expresar la solución en este caso.

Por lo que el docente expresa parecería que su curso plantea fundamentalmente una visión analítico-aritmética de los objetos algebraicos. En ningún momento comenta

[26] Este curso consta de tres horas de clases teóricas y dos horas de clases prácticas.

haber realizado una interpretación geométrica, en el caso que fuera posible, ni interacciones entre diferentes modos de pensamiento.

Frente a la pregunta: *¿Explica a los estudiantes qué es un sistema de ecuaciones lineales? Le pedimos que justifique por qué sí o por qué no y en caso de respuesta afirmativa nos relate cómo lo hace,* el docente nos respondió:

> Sí. Es un conjunto de m ecuaciones con p incógnitas de exponente 1, cuyos coeficientes son números reales (los coeficientes son elementos de un cuerpo K). Lo hago porque creo que es importante a este nivel (6° año[27]) formalizar determinados conceptos, que además en el caso específico de esta orientación, son de gran aplicación prácticamente en toda su carrera.

Luego le preguntamos al profesor del Grupo 3 cómo explicaba a los estudiantes el concepto "solución" de un sistema. Nos contestó así:

> El conjunto p de números reales que verifican simultáneamente las m ecuaciones del sistema. Por supuesto explicamos que el sistema puede tener infinitas soluciones o no tener solución.

Observamos nuevamente que la propuesta del docente enfatiza una visión AA de los objetos algebraicos.

A partir de los resultados obtenidos en el Grupo 3 surge irremediablemente una pregunta –que no sabemos si podremos contestar pero plantearla resulta inevitable– para quienes somos educadores e investigadores: ¿Por qué al avanzar los estudiantes en sus estudios no se produce un aumento notorio del porcentaje correspondiente a la respuesta correcta?

¿Será porque los nuevos conceptos o abordajes de los mismos no contribuyen a una mejor comprensión? Parecería que vamos agregando nuevos conceptos, nuevas visiones cada vez más abstractas como las matrices y los determinantes, avanzamos en el nivel de formalización, tal como lo señala el profesor del Grupo 3, pero esto parece no contribuir demasiado en la comprensión de los conceptos y en la interpretación que los estudiantes realizan de las situaciones planteadas.

[27] La enseñanza secundaria en Uruguay consta de seis años que se dividen en dos niveles que son el Ciclo Básico y el Bachillerato Diversificado de tres años de duración cada uno. El último año de la enseñanza secundaria se suele denominar tanto 6º año como 3er. año de Bachillerato Diversificado.

4. 2 Análisis de los resultados

Realizaremos el análisis de los resultados agrupando a los estudiantes de acuerdo a la respuesta dada a la pregunta 1 del cuestionario:

a) Los que contestan que el sistema no tiene solución.

b) Los que contestan que el sistema tiene tres soluciones.

c) Los que dan respuestas de otro tipo.

Como ya señalamos, de cada uno de estos grupos iremos reportando los casos que creemos aportan mayor información para entender la forma en que piensan los estudiantes, las dificultades que enfrentan y las ideas que permiten superarlas.

Dentro del grupo a) nos interesa centrarnos en el tipo de argumentos que dan a lo largo del trabajo y distinguir así en qué aspectos han centrado su atención los estudiantes para dar una respuesta correcta. También observaremos qué modos de pensamiento ponen en juego y trataremos de describir la imagen del concepto que han construido.

Dentro del grupo b) nos interesa también observar los argumentos que dan en sus respuestas que seguramente pondrán en evidencia aspectos de la imagen de los conceptos que han construido y trataremos de indagar qué aspecto de esa imagen está llevando a los alumnos a interpretar que el sistema tiene tres soluciones. Destacaremos dentro de este grupo a aquellos alumnos que a lo largo del cuestionario cambiaron de opinión y centraremos la atención en cuáles son las preguntas que contribuyeron en este sentido. Esto en su turno nos da elementos para el posterior diseño de la secuencia de aprendizaje.

Del grupo c) observaremos qué otro tipo de argumentos llevan a los alumnos a una interpretación diferente de las relevadas en los casos a) y b), qué modos de pensamiento ponen en juego y también, al igual que en el grupo b), centraremos la atención en cuáles son las preguntas que contribuyen a un cambio de opinión. También nos interesa observar las diferentes concepciones que tienen los estudiantes respecto al concepto solución y cómo sale a la luz en este contexto específico geométrico.

Al final de esta sección se presenta un análisis más profundo y una síntesis de los resultados.

4. 2. 1 Estudiantes que contestan la pregunta 1 del cuestionario diciendo que el sistema no tiene solución

En primer lugar nos centraremos en los estudiantes que responden a la pregunta 1 del cuestionario contestando que el sistema de ecuaciones no tiene solución. Como ya dijimos, dentro de este grupo nos interesa centrarnos en el tipo de argumentos que dan a lo largo del trabajo y distinguir así en qué aspectos los estudiantes han centrado su atención para dar una respuesta correcta. También observaremos qué modos de pensamiento ponen en juego y trataremos de describir la imagen del concepto que han construido.

Carolina (14 años, alumna de la Prof. Martina) da una interesante respuesta a la pregunta 1 en la que refleja el significado de solución de un sistema que ha construido y la interpretación que realiza de este tipo de sistema que ella nunca había visto anteriormente. Contesta de la siguiente manera:

> Para mí, el sistema no tiene solución. Para que el sistema tenga solución las tres rectas tendrían que cortarse en un punto; y en este caso, no hay ningún punto donde se corten las tres rectas.
>
> Las rectas se cortan, pero de a dos rectas, eso quiere decir que hay solución para resolver dos de las ecuaciones; y de otras dos y de otras dos; pero ninguna que resuelva las tres.

En la entrevista mantenida con la estudiante volvimos sobre esta pregunta manifestándole que otros compañeros habían contestado que el sistema tenía tres soluciones, queríamos observar cómo volvía a argumentar sobre el asunto:

> Entrevistadora: Vos sabés que en esta pregunta, la número 1, ¿te acordás lo que hicimos? Muchos compañeros opinan que este sistema tiene 3 soluciones, ¿tú que dices a ello?
>
> Carolina: Para mí es que por ejemplo, esta recta que representa a una ecuación y esta otra recta que representa a la otra ecuación tiene esa solución y lo mismo con ésta y ésta, tienen esta solución, y ésta con ésta. Pero no que tiene 3 soluciones.
>
> E: ¿Por qué no podría tener 3 soluciones para ti?
>
> C: Porque no se intersectan las tres rectas en un mismo punto en común, son de a dos, o sea, dos rectas se intersectan en un punto, otras dos en otro punto y otras dos en otro punto.

Mientras que en el cuestionario utiliza un modo de pensamiento SG, en la entrevista maneja con fluidez el pasaje de este modo de pensamiento al modo AA, interpretando cada recta como una ecuación y los puntos como soluciones de las ecuaciones que corresponden.

Carolina responde adecuadamente todas las preguntas del cuestionario y se esmera en todas las explicaciones que da. Nos interesa destacar la noción que emplea para explicar, en la pregunta 5, por qué un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas no puede tener exactamente dos soluciones. Lo dice así: "*No, porque para eso las rectas de las tres ecuaciones se deberían cortar en dos puntos, y eso para mí es imposible, porque para eso las rectas tendrían que ser curvas*". Esta noción, como veremos más adelante, aparece en varios trabajos y la consideramos muy importante porque le permite al estudiante descartar un número finito de soluciones mayor que uno y llegar a que si dos rectas tienen puntos en común, tienen uno sólo o infinitos. Cuando Carolina debe responder si un sistema puede tener exactamente tres soluciones, lo hace así: "*No, tampoco. Porque las rectas no se pueden cortar en tres puntos. O se cortan en uno o en infinitos*". Para la última posibilidad la palabra cortarse no es la ideal, pero de todas formas creemos que Carolina logra una respuesta matemáticamente correcta.

Nos interesa destacar que para la parte e) de la pregunta 5, da como configuración para un sistema sin solución un conjunto de rectas paralelas. Hacemos hincapié en esto ya que si bien Carolina sabe que la configuración "triángulo" corresponde a un sistema sin solución, opta por rectas paralelas. La inmensa mayoría de los alumnos con los que trabajamos, que respondieron a esa parte de la pregunta, tomaron la misma decisión. Pensamos que esto es consecuencia de iniciar el estudio de los sistemas por el caso 2x2 ya que imprime en el alumno la configuración rectas paralelas como configuración prototípica de un sistema incompatible y por lo que vemos obstaculiza la incorporación de otras configuraciones para el caso de sistemas incompatibles con un mayor número de ecuaciones.

Quizás esta configuración no puede ser fácilmente evocada como caso de no solución pues los estudiantes todavía no han establecido conexiones entre ella y los otros conocimientos sobre el tema, por tratarse de una situación nueva no analizada durante los procesos de formación del concepto solución.

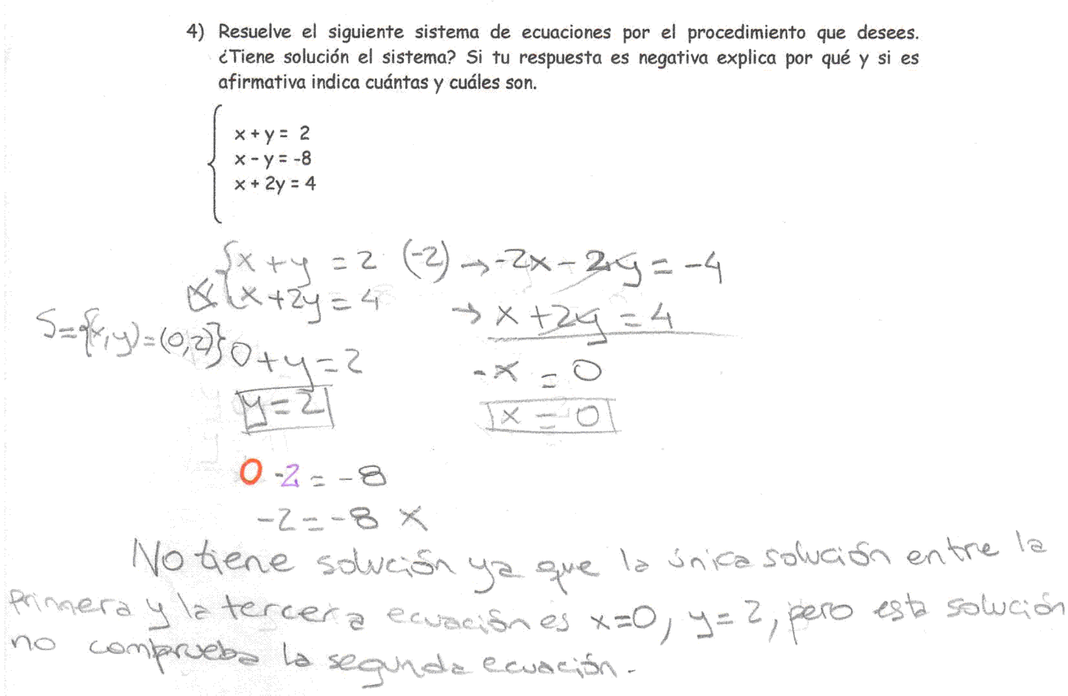
En cuanto a qué es un sistema de ecuaciones, Carolina dice que: "*Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que tienen la misma solución*". A la pregunta 18 responde: "*Una solución que resuelve todas las ecuaciones de un sistema*". Somos concientes que estas preguntas de carácter teórico son extremadamente difíciles para los alumnos de este nivel, ya que tienen dificultades para utilizar el vocabulario técnico apropiado y porque les es muy difícil poner en palabras lo que piensan. En este nivel, si bien se pide que los alumnos argumenten lo que hacen y que den explicaciones y fundamenten sus respuestas, la enseñanza se sitúa más bien en un saber hacer, en un conocimiento práctico más que teórico.

Como se podrá ver más adelante, la concepción que tiene Carolina sobre sistema y sobre solución de un sistema, no difiere demasiado de la de aquellos alumnos que respondieron incorrectamente las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario. Más adelante esbozaremos una posible explicación de este fenómeno.

Como ya dijimos, esta estudiante manifestó un manejo fluido al interpretar rectas como ecuaciones, lo que interpretamos como una interacción entre dos modos de pensamiento. Sin embargo, alumnos de este mismo nivel que utilizaron solamente un modo de pensamiento SG, pudieron contestar adecuadamente también, como veremos más adelante.

María Inés (14 años, alumna de la Prof. Martina) contesta a la pregunta 1 diciendo que el sistema no tiene ninguna solución: "*Ninguna ya que para que tengan una solución las tres rectas deben cortarse en un mismo punto y en este caso se cortan, pero en diferentes puntos*". Con el mismo criterio contesta a las preguntas 2 y 3, respondiendo que los sistemas no tienen solución.

María Inés demuestra también un buen manejo de los conceptos en un modo de pensamiento AA. Vemos su trabajo en la pregunta 4:



4) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees. ¿Tiene solución el sistema? Si tu respuesta es negativa explica por qué y si es afirmativa indica cuántas y cuáles son.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$\begin{cases} x + y = 2 \quad (-2) \rightarrow -2x - 2y = -4 \\ x + 2y = 4 \quad\quad\quad \rightarrow x + 2y = 4 \end{cases}$

$-x = 0$

$\boxed{x = 0}$

$S = \{(x, y) = (0, 2)\}$ $0 + y = 2$

$\boxed{y = 2}$

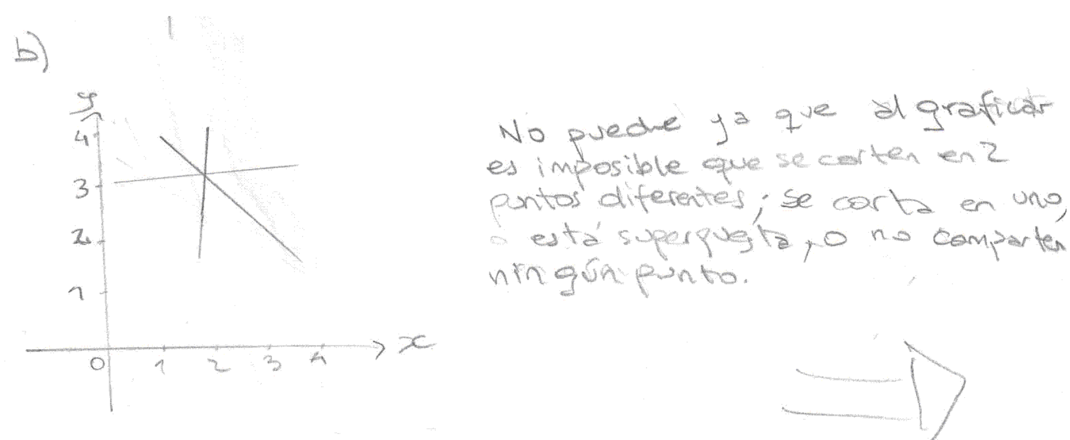
$0 - 2 = -8$

$-2 = -8$ X

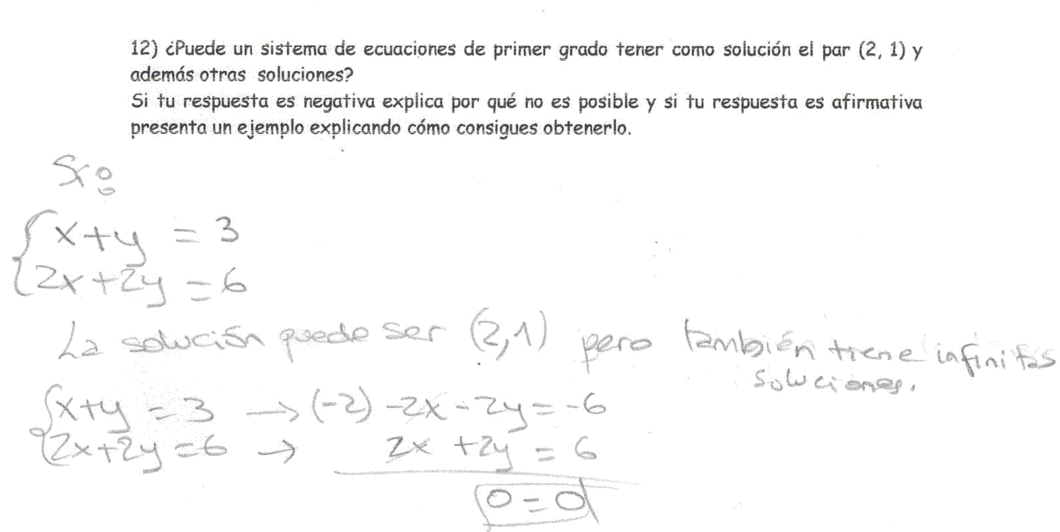
No tiene solución ya que la única solución entre la primera y la tercera ecuación es x=0, y=2, pero esta solución no comprueba la segunda ecuación.

Por su respuesta inferimos que para ella una solución del sistema debe verificar las tres ecuaciones dadas.

María Inés, al igual que Carolina, no tiene dudas acerca de la cantidad de puntos que dos rectas pueden tener en común, creemos que esto facilita la interpretación del concepto solución de un sistema. Vemos cómo responde a la pregunta 5 parte b):



María Inés contesta en forma adecuada todas las preguntas del cuestionario. Seleccionamos la siguiente porque refleja un excelente trabajo para una alumna de su nivel. Para contestar la pregunta 12 utilizó un modo de pensamiento AA, es capaz de proponer un sistema con infinitas soluciones y aparentemente interpreta la expresión 0 = 0 como un indicador de ello:


12) ¿Puede un sistema de ecuaciones de primer grado tener como solución el par (2, 1) y además otras soluciones?
Si tu respuesta es negativa explica por qué no es posible y si tu respuesta es afirmativa presenta un ejemplo explicando cómo consigues obtenerlo.

Si:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$$

La solución puede ser (2,1) pero también tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x+y=3 \rightarrow (-2)\ -2x-2y=-6 \\ 2x+2y=6 \rightarrow \quad 2x+2y=6 \end{cases}$$

$$\boxed{0=0}$$

En cuanto al concepto de sistema, María Inés responde que "*Son dos o más ecuaciones relacionadas por sus incógnitas*" y que una solución "*Es un par o más números ordenados que comprueban las ecuaciones*". Concepciones que se reflejan en el trabajo que ha realizado.

Marcelo (15 años, alumno de la Prof. Martina) resuelve correctamente todo el cuestionario. En el caso de la pregunta 1 evidencia dos modos de pensamiento en interacción el SG y el AA, interpretando las rectas como ecuaciones. Contesta de la siguiente forma: "*el sistema no tiene solución porque si cada recta representa 1 ecuación, las 3 rectas tenían que cortarse o cruzarse en un mismo punto para que el sistema tenga una solución*". Podríamos objetar que utiliza la palabra cortarse como sinónimo de cruzarse, pero eso no invalida la correcta interpretación que realiza de la situación. Con el mismo criterio responde 2 y 3.

En la pregunta 4 despeja x de la ecuación 1 y la sustituye en la ecuación 2. Despeja y obtiene $y = 5$. Sustituye este valor en la ecuación 1 y determina que $x = -3$. Luego investiga si el par (-3, 5) verifica las tres ecuaciones dadas, sustituyendo en las tres. Responde que "*No porque una de las ecuaciones no verifica o su resultado no coincide con las otras*". De forma que manifiesta saber que para que un par sea solución del sistema debe verificar todas las ecuaciones dadas.

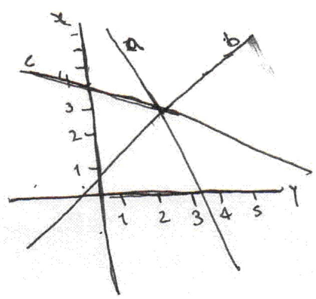
Marcelo manifiesta saber, al igual que sus compañeras anteriores, la cantidad de puntos que dos rectas pueden tener en común, aun cuando no presenta una justificación. Así lo refleja en su trabajo en la pregunta 5:

5) Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

- ¿Puede tener una única solución?
- b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones?
- c. ¿Y exactamente tres?
- ¿Puede tener infinitas soluciones?
- ¿Y ninguna?

Explica cada una de tus respuestas e ilústrala a través de una representación gráfica.

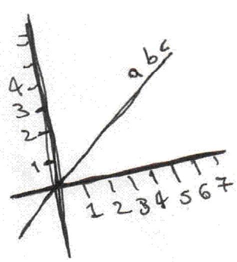
a) puede tener una solució si se cruzan en un solo lugar



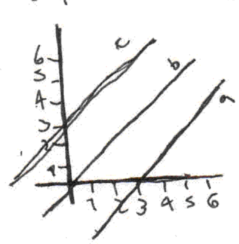
b) porque tres rectas no se poden cruzar o contarse en dos. lugares

c) porque tres rectas no se podon cruzar en 3 lugares

d) puede infinitas soluciones si las rectas se super ponen



e) puede no tener solucion si las rectas son paralelas.



En la pregunta 6 agrega otra recta formando la configuración "triángulo" y dice que "*el sistema no tiene solución porque las tres rectas no se cruzan en el mismo punto*". Debería haber dicho que las rectas no se cortan en el mismo punto. Igualmente es clara su referencia a rectas concurrentes como configuración gráfica de un sistema con solución. En la pregunta 7 presenta rectas concurrentes y dice que "*el sistema tiene una única solución porque las 4 rectas se cruzan en un solo punto*". En la pregunta 8 responde que "*no, porque dos rectas no pueden cruzarse en solo dos puntos*". Vemos que usa permanentemente, la palabra cruzarse como sinónimo de cortarse, es una confusión frecuente en los alumnos dado que en la vida cotidiana se usa frecuentemente la palabra "cruzarse" para indicar, por ejemplo, que dos calles se cortan.

En la pregunta 9 contesta que "*no, porque las 3 rectas tienen que superponerse y hay dos de ellas que se cortan en un solo punto*". De su respuesta se desprende que conoce la configuración gráfica de un sistema con infinitas soluciones. En la pregunta 10 propone rectas coincidentes para un sistema con infinitas soluciones.

Al responder las preguntas 11 y 12 utiliza un modo de pensamiento AA, a diferencia de otros estudiantes que acompañaron las situaciones con representaciones gráficas. Destacamos la aclaración que realiza en la respuesta que da a la pregunta 11, cuando explícitamente indica que debe chequearse que una ecuación no se obtenga de la otra multiplicando por un número real para asegurarse que la solución (2, 1) sea única (solamente dos alumnos chequearon que el sistema no fuera indeterminado, aunque como veremos más adelante, lo hicieron de distinta forma). Vemos la forma en que él lo hace:

11) Presenta un sistema de ecuaciones de primer grado que tenga como solución única el par (2, 1). Explica cómo lo haces.

$x + 2y = 4$

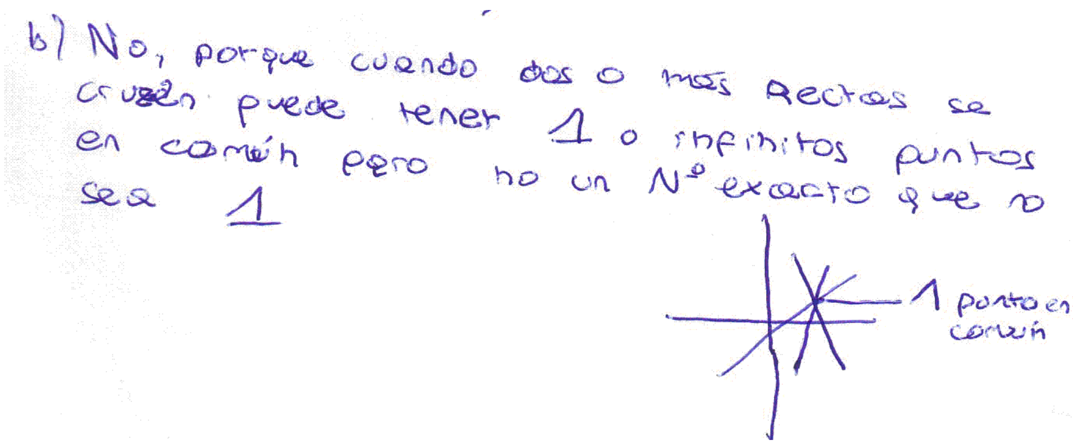
$x + y = 3$

Verificando que las ecuaciones no sean una el doble de la otra y tenga porlomenos un resultado.

En la pregunta 13 contesta que "*no porque la primera recta no pasa por ese punto*" manifestando saber que es necesario que el punto pertenezca a la recta para que sus coordenadas verifiquen la ecuación de la recta. En la pregunta 14 responde que "*no porque dos rectas no pueden cruzarse en dos puntos distintos, salvo que tengan infinitos resultados, ahí todos los puntos se cruzan*". El alumno se refiere a que las rectas no pueden tener solamente dos puntos en común. Si tuvieran infinitos puntos en común, allí sí tendrían dos puntos en común. En la pregunta 15 propone una recta coincidente con la dada.

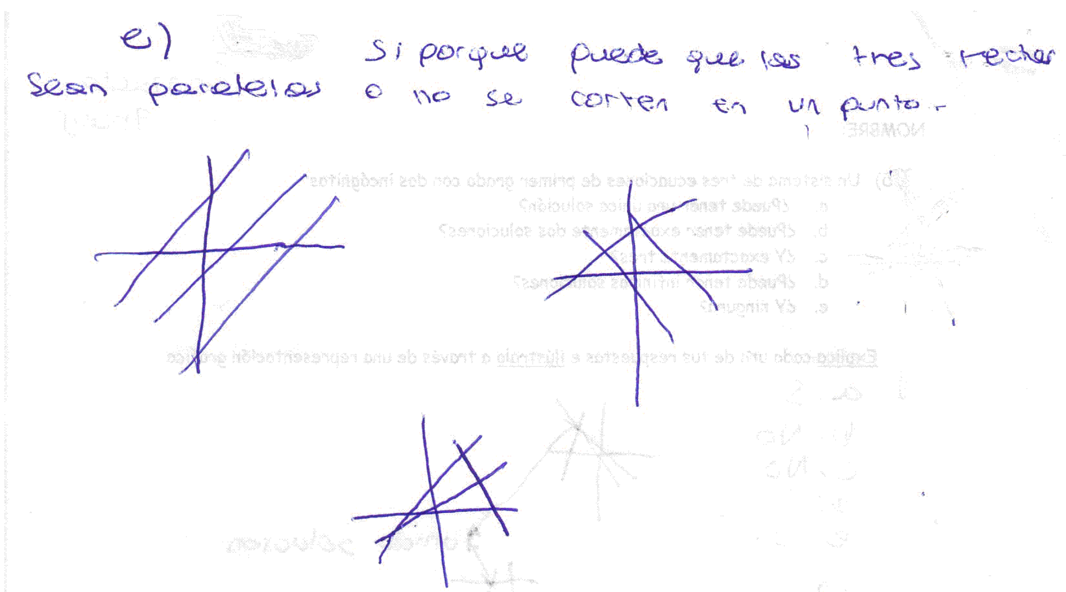
Para Marcelo un sistema es "*un conjunto de dos o más cuenta (sic) que tienen números que uno no sabe cual (sic) es (la incógnita)*" y una solución es "*un número que verifica cada ecuación es decir con ese nº se puede resolver la cuenta*". Obsérvese que por el tipo de formulación que logra en este último enunciado no está viendo a esa solución como "números" que verifican a todas las ecuaciones a la vez sino que habla de "*que verifica cada ecuación*". No es claro que esté pensando en una *n*-upla que es solución de todas las ecuaciones dadas o quizás tiene dificultades para expresarlo. Tengamos en cuenta que estas preguntas requieren una reflexión teórica que demanda del alumno un pensamiento basado en propiedades. En general, el desempeño que logró este alumno en su trabajo fue excelente.

Gonzalo (14 años, alumno de la prof. Martina) responde correctamente a todas las preguntas del cuestionario. En el caso de este estudiante deseamos destacar un aspecto que no apareció en otros trabajos al responder la pregunta 5 y en particular su originalidad al contestar la parte e) de la misma. En la parte b) cuando se le pregunta si un sistema 3x2 puede tener exactamente dos soluciones, llama la atención la precisión que logra en su respuesta al incorporar un comentario referido a que no pueden tener en común "*un nº exacto que no sea 1*", refiriéndose a un número entero con la expresión "*exacto*":



Volvemos a destacar que en todos estos alumnos aparece claramente la idea de que dos rectas pueden tener un punto en común, infinitos o ninguno.

Este alumno es el único que presenta como respuesta a la parte e) de la pregunta 5, otras configuraciones posibles para el caso en que el sistema es incompatible, además de las rectas paralelas. Lo vemos en la siguiente imagen:



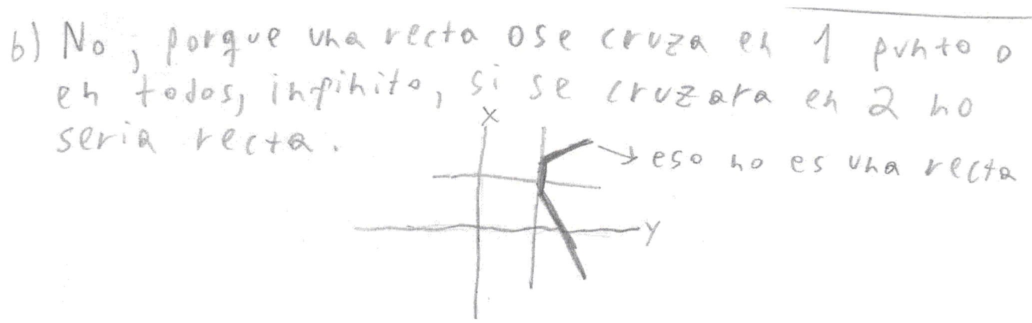
Respecto de su noción de sistema nos dice que para él un sistema de ecuaciones es: "*Un número de operaciones, con cierto nº de incógnitas y que dichas incógnitas tienen un valor numérico que debe cumplirse en todas las operaciones en las que estén presentes*".

Es confuso el enunciado que logra pero creemos se refiere a que una solución, para ser tal, debe verificar todas las ecuaciones a la vez. En el momento de hablar de lo que para él significa solución, nos dice "*La solución es el valor numérico de la incógnita*".

Joaquín (14 años, alumno de la Prof. Cristina), a diferencia de los estudiantes anteriores, tuvo un bajo desempeño en las preguntas que requerían un modo de pensamiento AA como la 4, la 11 y la 12 (si bien estas dos últimas eran abordables desde lo geométrico, presentando figuras y no ecuaciones). Sin embargo, su modo de pensamiento predominante, aunque no exclusivo, que fue el SG, le permitió contestar correctamente el resto de las preguntas del cuestionario logrando una adecuada interpretación del concepto solución de un sistema. Responde a la pregunta 1 de la siguiente manera: "*No tiene ninguna solución para el sistema porque no hay un punto en el cual se crucen las 3 rectas, es decir, para cada ecuación hay infinitas soluciones, pero para el sistema no hay, solo se encuentran para 2 ecuaciones en cada cruce de rectas*".

Responde con el mismo criterio las preguntas 2 y 3. En la pregunta 4 considera las ecuaciones 1 y 2, determinando $x = -3$. Luego sustituye este valor en la ecuación 1 y determina $y = 5$. Contesta que "*Hay 1 solución* = {(-3, 5)}". No constata si ese par verifica todas las ecuaciones del sistema. Creemos que siguiendo el proceso de resolución estudiado en clase, donde después de adquirir práctica algorítmica ya no siempre se exige verificar el par obtenido en las ecuaciones, el estudiante se queda conforme con el par encontrado y cree haber encontrado la solución del sistema. Cabe preguntarse por qué resolvió bien la pregunta 1 y no la 4, en virtud de que se trata de la misma pregunta presentada en distintos modos de pensamiento. En el modo analítico los objetos no son dados en forma directa como en el modo geométrico. Quizás Joaquín tuvo dificultades en la conexión entre estos dos modos de pensamiento y no pudo ver las ecuaciones de la pregunta 4 como rectas y estar prevenido de que aun habiendo encontrado un par ordenado que verificara dos de las ecuaciones, podría estar ante una configuración gráfica como la de la pregunta 1. Seguramente su respuesta en 4 se vio influenciada por las prácticas habituales de resolución de un sistema y esto bloqueó la conexión con otros modos de pensamiento que le hubieran permitido arribar a una respuesta correcta. Al llegar a un par ordenado se sintió seguro y no se vio llevado a pensar la pregunta desde otro modo.

Joaquín responde correctamente la pregunta 5, presentando rectas concurrentes para la parte a), rectas coincidentes para la parte d) y paralelas para la parte e). Nos interesa destacar cómo responde a la parte b) referente a si un sistema puede tener exactamente dos soluciones. Veamos su respuesta:



Agrega luego que la respuesta a la parte c) es no, por "*exactamente el mismo motivo de la b)*".

Volvemos a destacar que este alumno conoce bien que dos rectas pueden tener un único punto en común, infinitos o ninguno. Creemos que esto resulta importante para descartar un número entero de soluciones mayor que uno.

Contesta correctamente todas las preguntas siguientes, a excepción de la 11 y la 12 que no las aborda.

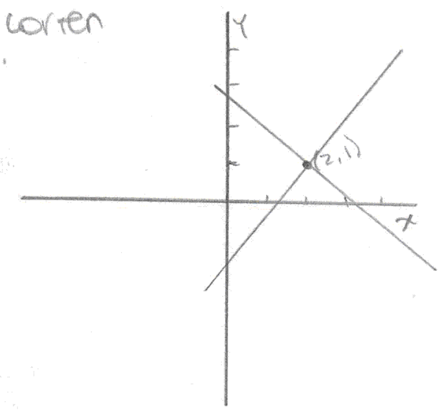
Cuando explica qué es para él un sistema de ecuaciones, realiza una interesante aclaración que es la siguiente: "*Son ecuaciones que se encuentran dentro de un mismo plano*". Identifica plenamente ecuaciones con rectas y aclara que está trabajando en un plano. Esta última aclaración es importante ya que es la que determina las posibles posiciones de dos rectas cualesquiera de un plano: se cortan, son paralelas distintas o coincidentes.

En la pregunta 18 responde que: "*es una solución que si se utiliza en cualquier ecuación del sistema, funciona como sol. del mismo*". Su redacción es confusa. Pensamos que sabe que esa "*solución*" debe verificar todas las ecuaciones del sistema aun cuando no pueda precisar qué tipo de objeto matemático es.

Lucía (15 años, alumna de la Prof. Cristina), utilizó principalmente un modo de pensamiento geométrico si bien hay interacciones con el modo de pensamiento AA. Responde a la pregunta 1 diciendo que: "*Ninguna, porque las 3 rectas no tienen ningún punto en común las tres. Me refiero que no hay ningún par que verifique a las 3 a la vez*". Responde las preguntas 2 y 3 con el mismo criterio, señalando que no hay solución. No responde a la pregunta 4. Contesta correctamente a todas las partes de la pregunta 5, presentando rectas concurrentes en la parte a), rectas coincidentes en d) y paralelas en e). Para contestar b) y c) señala que "*No porque o tienen 1 punto en común, todos, o ninguno*". Volvemos a destacar una vez más la presencia de este conocimiento en los alumnos que responden acertadamente a las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario. Responde correctamente las restantes preguntas del cuestionario. Nos detendremos en primer lugar en su respuesta a las preguntas 11 y 12 para mostrar los modos de pensamiento que utiliza en una y otra. Para dar la solución a la pregunta 11 utiliza un modo de pensamiento SG y en la pregunta 12 utiliza los modos SG y AA, es capaz de interpretar que las ecuaciones $x + y = 3$ y $2x + 2y = 6$ representan rectas paralelas coincidentes.

11) Presenta un sistema de ecuaciones de primer grado que tenga como solución única el par (2, 1). Explica cómo lo haces.

hago un par de rectas secantes, que se corten en el punto (2, 1).



12) ¿Puede un sistema de ecuaciones de primer grado tener como solución el par (2, 1) y además otras soluciones?
Si tu respuesta es negativa explica por qué no es posible y si tu respuesta es afirmativa presenta un ejemplo explicando cómo consigues obtenerlo.

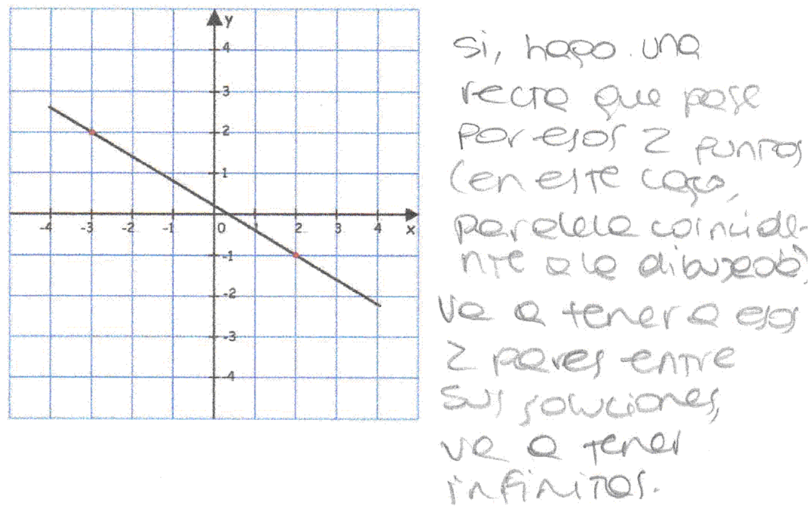
si, puede tener el (2, 1) e infinitos más, (o infinitos o una o ninguna).

Con un par de rectas paralelas coincidentes.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

En segundo lugar nos interesa mostrar la respuesta a la pregunta 15 porque demuestra saber que si un sistema tiene dos soluciones entonces tiene infinitas y nos permitirá hacer una aclaración sobre su respuesta a la pregunta 17.

15) ¿Puedes representar una recta más para que el sistema de ecuaciones asociado a ellas tenga entre sus soluciones a los pares (-3, 2) y (2, -1)? Explica tu respuesta.



Nos centraremos ahora en cómo responde a la pregunta 17. Para Lucía un sistema de ecuaciones es "*Un conjunto de dos o más ecuaciones, en el que no se puede buscar solución individual, sino una en común para todas*".

Si bien a partir de la lectura podríamos decir que no sabe que cada ecuación del sistema tiene infinitas soluciones, la respuesta que dio a la pregunta 15, que reportamos anteriormente, nos permite inferir que lo que Lucía quiso decir es que para estar ante una solución del sistema, esta debe verificar todas las ecuaciones a la vez, no es suficiente con que verifique una ecuación en forma individual.

Responde a la pregunta 18 de la siguiente manera: "*Una solución para mí, es un resultado, o par que verifique a todas las ecuaciones que constituyen al sistema a la vez*". Visión del concepto solución que creemos contribuyó a una interpretación adecuada de las situaciones que se le presentaron.

Como podemos ver, la única pregunta que dejó de contestar es la número 4 y respondió las restantes correctamente. Quizás el no poseer un algoritmo algebraico pre-establecido para abordar la pregunta, la inmovilizó y no recurrió a otros procedimientos que hubieran estado disponibles como el método gráfico. Lucía es una de las mejores alumnas del grupo. Tal vez no quiso ensayar procedimientos con los cuales no se sintiera segura de lo que hacía.

También puede haber sucedido que debido a las prácticas habituales de enseñanza donde una vez introducidos los métodos algebraicos se abandona el método gráfico, esta alumna no evocara este método como una vía de abordaje del problema. Al no contar entonces con un acceso por la vía del cálculo, ni por la vía geométrica, y carecer de un repertorio de propiedades que le permitan contestar si el sistema tiene solución sin recurrir a un modo SG ni AA, no contesta la pregunta.

Lucy (17 años) contesta a la pregunta 1 que "*No existe solución porque las 3 rectas no se intersectan (sic) en ningún punto (se cortan de a dos pero nunca las tres)*". Deseamos destacar en su respuesta cómo enfatiza que no hay punto de corte de las tres rectas a la vez. Responde con el mismo criterio las preguntas 2 y 3, señalando que no hay solución. En la pregunta 4 considera las ecuaciones 1 y 2, obteniendo $x = -3$. Sustituye este valor en la ecuación 1 y determina que $y = 5$. Contesta que el sistema no tiene solución porque este par de valores no verifican la última ecuación.

Responde la pregunta 5, trabajando con dos rectas y no con tres como se pide. Todas las respuestas que da son coherentes con esa consideración, presentando rectas concurrentes para un sistema con solución única, coincidentes para el caso de infinitas soluciones y paralelas para el caso sin solución. Para las partes b) y c) aclara que dos rectas no pueden cortarse dos veces sin dar justificaciones de ello.

En la pregunta 6 presenta la configuración "triángulo" y en la pregunta 7 rectas concurrentes. En la pregunta 8 responde que no es posible lograr un sistema que tenga solamente dos soluciones porque "*no puedo hacer que dos rectas se corten en dos puntos (no serían rectas)*". Contesta las preguntas 9 y 10 correctamente manifestando que para que haya infinitas soluciones las rectas deben ser iguales. Responde la pregunta 11 presentando la gráfica de dos rectas que se cortan en (2, 1) sin dar sus ecuaciones. Aun cuando sabe, como ya señalamos, que para que existan infinitas soluciones las rectas deben ser iguales, como ella las llama, en la pregunta 12 contesta que no es posible que un sistema tenga como solución a (2, 1) y además otras soluciones porque las rectas "*tendrían que doblar en algún momento para volverse a intersectar (sic)*". Seguramente pensó que la pregunta se refería a un número entero de soluciones mayor que uno y fue por eso que respondió negativamente eludiendo la posibilidad de que existieran infinitas soluciones. En la pregunta 15 muestra esta última posibilidad señalando que "*La recta que dibujé es la misma que ya estaba $\Rightarrow$ pasa por esos dos puntos (además de otros). (el sistema tiene ∞ soluciones)*".

Responde correctamente la pregunta 16, ahora sí, considerando tres rectas y presentando solamente rectas paralelas para el caso de sistema sin solución.

En la pregunta 17 dice que: "*No sé explicarlo... Es un conjunto de ecuaciones de las que quiero hallar los puntos en los que se intersectan (sic)*" y en la 18 responde que: "*Una solución es hallar los puntos de corte*". Como veremos más adelante este tipo de concepción llevó a los estudiantes a cometer errores interpretando puntos de corte con soluciones para el caso de los sistemas 3x2, sin embargo en el caso de Lucy esto no fue un obstáculo, quizás porque tiene presente, aun cuando aquí no lo aclare, que ese punto de corte debe involucrar a todas las rectas del sistema, tal como lo explicita al responder la pregunta 1. Lucy es de las pocas estudiantes que dan su definición de solución en términos que revelan un modo de pensamiento SG pues la mayoría habló de números, resultados o pares ordenados. Si bien a partir de su respuesta a las preguntas 17 y 18 parecería que la imagen construida del concepto solución es punto de corte, ésta se ve complementada con propiedades de ese punto como ser la de que debe ser común a todas las rectas del sistema. Podríamos decir que se produce una interacción entre la celda de la imagen y la de la definición del concepto, logrando una respuesta correcta para las preguntas 1, 2 y 3, que revela la conexión entre los modos geométrico y estructural en tanto la alumna responde la pregunta 1 aludiendo a puntos de intersección pero que poseen una propiedad: el de no pertenecer a las tres rectas dadas.

Agustina (18 años) responde a la pregunta 1 del cuestionario diciendo que el sistema es incompatible "*porque las 3 rectas nunca se intersectan (sic)*". Elegimos su trabajo porque contesta correctamente todas las preguntas del cuestionario y porque como veremos más adelante, al igual que Lucy, realiza una interpretación del concepto solución en un modo de pensamiento geométrico.

Agustina contesta las preguntas 2 y 3 diciendo que el sistema no tiene solución porque las rectas no se intersecan. En la pregunta 4 realiza una combinación lineal de las ecuaciones 1 y 2, obteniendo x = -3; sustituye en la ecuación 2 y determina y = 5. Constata que esos valores no verifican la ecuación 3 y responde que el sistema es incompatible.

En la pregunta 5 presenta rectas concurrentes para la parte a), contesta que no a las partes b) y c) diciendo que tres rectas no se pueden cortar sólo dos veces. Presenta rectas coincidentes para la parte d) y paralelas para la parte e).

En la pregunta 6 presenta la configuración "triángulo". En la pregunta 7 dibuja rectas concurrentes y dice que es "*un haz propio*". Responde la pregunta 8 señalando que "*No, porque dos rectas no se pueden intersectar (sic) solo 2 veces*".

En la pregunta 9 donde se presentan dos rectas secantes y se le pregunta si puede agregar otra de forma que el sistema tenga infinitas soluciones, contesta que "*No, puede ser que tengan una o ninguna pero no infinitas*", aludiendo a que como ya las dos rectas dadas tienen un punto en común, la restante podrá pasar por el mismo punto obteniendo un sistema con solución única o de lo contrario se obtendrá un sistema sin solución.

Responde la pregunta 11 presentando un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, formado por las siguientes ecuaciones: $x + y = 3$, $x - y = 1$, $2x + y = 5$.

En la pregunta 12, responde correctamente que "*Sí, puede tener infinitas soluciones y ese par ser una de ellas*" pero no presenta un ejemplo.

En la pregunta 13 contesta que "*No, porque por ese punto no pasa la recta que ya está dibujada entonces ese punto no puede ser solución*". Evidencia saber que necesariamente el punto debe pertenecer a la recta para que sus coordenadas verifiquen la ecuación. Consideramos que esto es importante al momento de interpretar sistemas como el de las preguntas 1, 2 y 3. Así como en el trabajo en el modo AA, a los estudiantes se les pide que verifiquen si un par es solución de todas las ecuaciones del sistema, poniendo en evidencia la propiedad que cumple una solución que es la de verificar todas las ecuaciones, un trabajo similar debería hacerse en el modo SG. Esto permitiría dotar a ese "punto de corte" tan utilizado para dar una respuesta de una propiedad: la de pertenecer a todas las rectas del sistema. Consideramos que de esta forma se complementaria la interpretación de los conceptos en el modo SG o AA con la del modo AE donde es necesario recurrir a propiedades para interpretar los conceptos u objetos involucrados.

Agustina contesta la pregunta 14 de la siguiente manera: "*No, dos rectas no se pueden intersectar (sic) solo 2 veces*". En la pregunta 15 contesta que es posible si se considera una recta igual a la que está dibujada. En la pregunta 16 mantiene la misma respuesta que la dada en la 5.

Cuando explica qué es para ella un sistema de ecuaciones explica: "*Un conjunto de ecuaciones que tienen incógnitas, el sistema puede tener una sola solución, ninguna o infinitas*".

En la pregunta 18 evidencia, como ya señalamos, un modo de pensamiento geométrico y un sólido conocimiento sobre el número de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales, que ya hemos destacado como importante al momento de decidir que un sistema no puede tener un número entero de soluciones mayor que uno. Vemos cómo explica qué es para ella una solución de un sistema: "*es el punto en que se intersectan (sic) las rectas si tiene una solución, si tiene infinitas es una misma recta. Si no tiene es que las rectas nunca se intersectan (sic)*". Destacamos la parte en que dice "*es el punto en que se intersectan (sic) las rectas si tiene una solución*" porque creemos que la idea de punto de intersección unida a la de solución única es la que le permite no cometer el error de interpretar cualquier punto de corte de rectas como una solución del sistema. En este caso podemos observar cómo la imagen del concepto en términos de configuración geométrica, interacciona con un conocimiento del tipo estructural como podría ser el de número de soluciones posibles para un sistema. Esta complementación de puntos de vista le permite a la estudiante dar una respuesta correcta.

4. 2. 2 Estudiantes que contestan a la pregunta 1 del cuestionario diciendo que el sistema de ecuaciones tiene tres soluciones

Nos referiremos ahora a los estudiantes que contestan a la pregunta 1 del cuestionario, diciendo que el sistema de ecuaciones tiene tres soluciones. Como ya señalamos, dentro de este grupo nos interesa observar los argumentos que dan en sus respuestas que seguramente pondrán en evidencia modos de pensamiento y aspectos de la imagen de los conceptos que han construido y trataremos de indagar qué aspectos de esa imagen están llevando a los alumnos a una interpretación incorrecta de la situación. Destacaremos dentro de este grupo a aquellos alumnos que a lo largo del cuestionario cambiaron de opinión y centraremos la atención en cuáles son las preguntas que contribuyeron en este sentido.

Verónica (15 años, alumna de la Prof. Martina) contesta a la pregunta 1 diciendo que: "*En mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes, los cuales por lo menos en los sistemas de dos ecuasiones (sic) indican la solución*".

La alumna interpreta punto de corte como solución del sistema. Este concepto lo ha trabajado con su profesora para el caso de los sistemas 2x2. Vemos que realiza una generalización incorrecta que la lleva a cometer el error en su respuesta, pues interpreta para el caso del sistema 3x2 que se le plantea, que cada uno de los puntos de corte de las rectas son soluciones del sistema. Su modo de pensamiento es sintético-geométrico, al menos en esta situación no interpreta los puntos de corte como parejas de números reales que verifican las ecuaciones asociadas a las rectas dadas. Consideramos entonces, que el error de la alumna es consecuencia de interpretar punto de corte como solución del sistema y que este error proviene de una generalización incorrecta del caso de los sistemas 2x2 con solución única. Veamos cómo explica Verónica en clase (en la sesión de puesta en común del cuestionario) por qué contestó a la pregunta 1 que había 3 soluciones:

> Verónica: [...] había puesto que tenía 3 soluciones pero después me di cuenta que no tenía ninguna.
>
> Profesora Martina: ¿Y en qué te basaste para poner eso al principio?
>
> V: En que antes eran dos rectas nada más y ta y se cortaban en un punto, entonces ta.
>
> P: ¿Y entonces qué te llevó a decir que había 3 soluciones?
>
> V: Porque habían 3 puntos de corte.
>
> P: ¿Y cómo te diste después cuenta de que, o cómo cambiaste después tu opinión con respecto a eso?
>
> V: Porque los puntos de corte sólo se cortan en dos rectas. Si el sistema tiene 3 ecuaciones tendrían que ser las 3 rectas que se corten en un solo punto, tendría una solución común.

Verónica mantiene la creencia de que punto de corte es solución del sistema a lo largo de toda la prueba adaptando esta creencia a todas las preguntas realizadas manteniendo siempre coherencia interna. Si bien en la pregunta 5 parte (e) no se pide ejemplificar todos los casos posibles de sistemas sin solución, ella presenta el caso de tres rectas paralelas lo que nos reafirma la interpretación realizada anteriormente.

5) Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

a. ¿Puede tener una única solución? Si, cuando las 3 rectas se cortan en un mismo punto

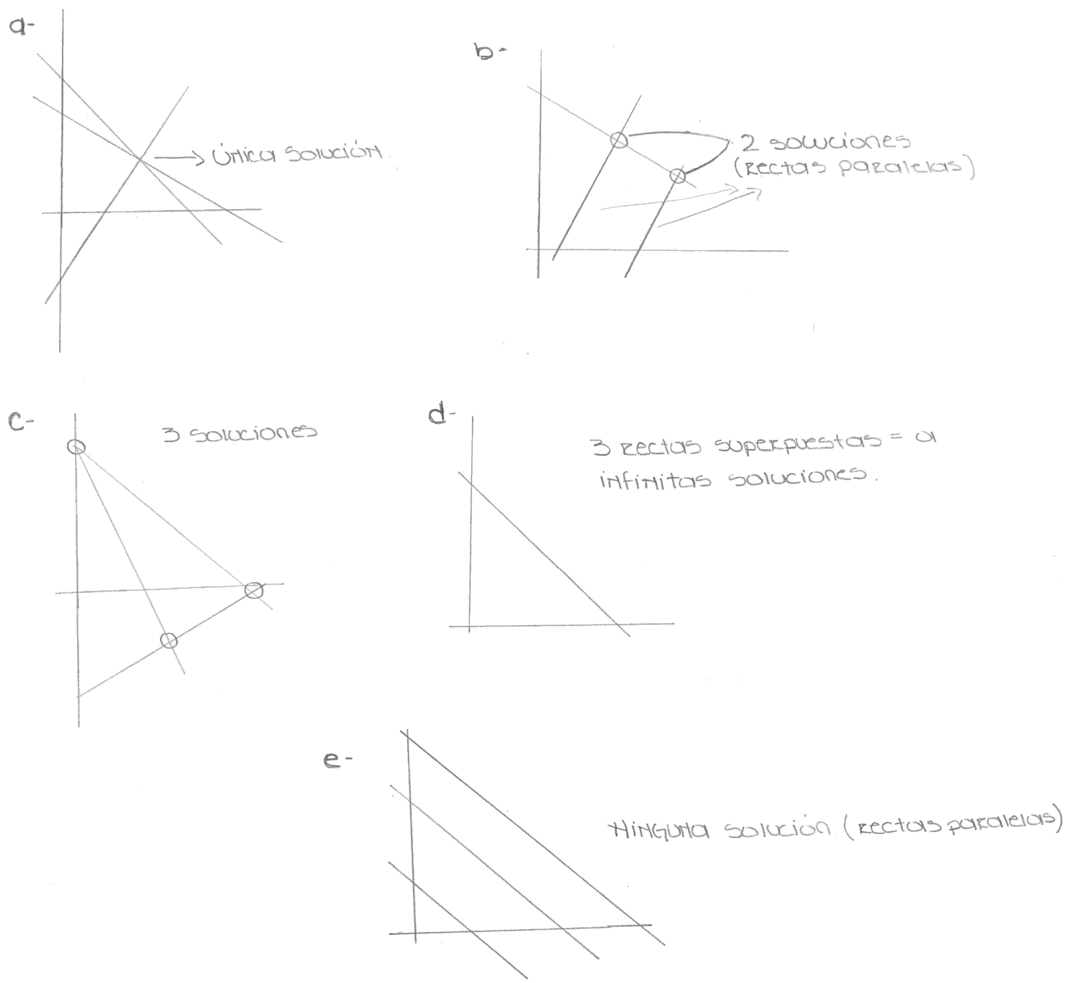
b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones? Si, cuando las rectas se cortan en 2 puntos diferentes

c. ¿Y exactamente tres? Si, cuando, las rectas se cortan en 3 puntos diferentes.

d. ¿Puede tener infinitas soluciones? Si, cuando las rectas se superponen

e. ¿Y ninguna? Sí, cuando las 3 rectas son paralelas.

Explica cada una de tus respuestas e ilústrala a través de una representación gráfica.



Verónica utiliza, fundamentalmente, un modo de pensamiento sintético-geométrico para dar la mayoría de sus respuestas. Cuando se le pregunta qué es para ella un sistema de ecuaciones responde recurriendo a un modo de pensamiento analítico-aritmético, señalando que un sistema es: "*Un conjunto de ecuasiones (sic), cuyas incógnitas deben representar, si tiene solución, los mismos números*".

Verónica repite prácticamente en forma textual la definición que la profesora Martina le ha dado en clase que es la siguiente:

> Es un conjunto de varias ecuaciones con varias incógnitas, ¿sí?, que todas esas incógnitas representan los mismos números en todas las ecuaciones...

Si bien la definición que da Verónica es confusa parece reflejar que una solución debe verificar todas las ecuaciones dadas. Sin embargo, cuando identifica puntos de corte con soluciones del sistema en la pregunta 1, no se da cuenta que cualquiera de los puntos de corte tiene asociado un par ordenado de números reales que solamente verifican dos de las ecuaciones asociadas al sistema. Parece entonces, no poder articular los modos de pensamiento SG y AA pues por un lado, como ya vimos, interpreta tantas soluciones del sistema como puntos de corte haya de las rectas tomadas dos a dos, y por otro, como vemos en su definición de sistema, dice que si el sistema tiene solución, las incógnitas deben representar los mismos números. Al realizar esta observación estamos asumiendo que cuando dice que "*deben representar los mismos números*" se refiere a que el par solución debe verificar todas las ecuaciones a la vez.

Cuando Verónica debe explicar qué es para ella una solución de un sistema de ecuaciones contesta que: "*Los números, representados en las ecuasiones (sic) por letras, que al cambiarlos por estas y hacer la operación dan el resultado escrito*".

En este caso la estudiante parece estar confundiendo solución del sistema con solución de una ecuación. Cuando la profesora Martina comenzó la enseñanza del tema sistemas de ecuaciones empezó trabajando con una sola ecuación lineal con dos incógnitas y en ese escenario explicó lo siguiente:

> Profesora Martina: Es decir, cuando yo sustituyo como dijo Martín, sustituyo en esa ecuación el par por los valores si, mejor dicho las incógnitas por esos números del par en el orden que nosotros habíamos establecido, eso te da una igualdad numérica, verifican esa ecuación, entonces resolver una ecuación con dos incógnitas es hallar el par de valores ordenados que la verifica, que al sustituirlos en la ecuación la convierten en una igualdad numérica. Esto ¿queda claro?
>
> [...]
>
> Profesora: Bien... (15,0), (12,6), bueno, acá no los puedo poner todos, es decir son infinitos esos puntos suspensivos[28], quiere decir que sigue infinitamente. No los puedo escribir todos, pero el conjunto solución es el conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación que en este caso son pares. ¿Vieron la diferencia con las ecuaciones que el año pasado hacíamos? ¿Vieron la diferencia? ¿Qué teníamos dentro de las llaves en el conjunto solución?

[28] Se refiere a los infinitos elementos del conjunto solución de la ecuación $2x + y = 30$.

María Inés: Un solo número[29].

Es así que Verónica habla de que al "*hacer la operación dan el resultado escrito*" seguramente refiriéndose a la igualdad numérica de la que su profesora le habló. En este caso se ve desdibujado el concepto solución del sistema ya que de lo que expresa Verónica se infiere que podríamos tomar diferentes pares ordenados como solución del sistema con tal que ellos verificaran alguna de las ecuaciones. Sin embargo, esta interpretación no es correcta. Pudimos constatarlo en la entrevista mantenida con esta estudiante donde le propusimos la siguiente cuestión:

¿Son los pares (3, 2), (2, 1) y (1, 4) soluciones del siguiente sistema?

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

Para responder, Verónica constató si cada par verificaba las tres ecuaciones y respondió que: "*No es ninguno porque al sustituir esos números en las ecuaciones los resultados no son correctos*".

De forma que parece tener claro que para que un par ordenado sea solución del sistema debe verificar todas las ecuaciones dadas. En efecto manifestó lo siguiente.

Entrevistadora: Primero te quería preguntar: ¿qué es para vos la solución de un sistema de ecuaciones?

Verónica: Es uno o más números que cuando los cambiás por las letras de las ecuaciones te dan el resultado de esa ecuación, pero tiene que ser en ambas el mismo número.

E: Tú me dijiste ambas, ¿y si fueran más de dos ecuaciones?

V: Supongo que las tres también, el mismo número.

E: ¿Y si fueran cuatro o cinco ecuaciones?

V: También, el mismo número.

[...]

Entrevistadora: Y gráficamente, ¿cómo te das cuenta que un sistema tiene solución?

Verónica: Cuando se cortan las rectas.

E: Porque para ti donde se cortan... ¿qué es?

V: Ese número, o sea el punto ese marca los números que son la solución.

En la última oración aparece una doble interpretación, la de solución como punto y como par de números si bien la alumna solamente dice "*ese número*". En este caso

[29] Se refiere a las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

parece darse una interacción entre los modos de pensamiento SG y AA que durante la resolución del cuestionario no pudo apreciarse.

En la entrevista evidencia dudas frente a la respuesta dada a la pregunta 1 del cuestionario y luego realiza la interpretación correcta:

> Entrevistadora: Pasemos ahora a ver el trabajito que hicimos en la clase. Acá se te presentaba... ¿te acordás? Un sistema de ecuaciones donde están representadas las rectas asociadas a ellas y te preguntaban cuántas soluciones tenía el sistema. Tú contestaste que el sistema tiene tres soluciones porque las rectas se cortan en tres puntos distintos, ¿podrías decirme cómo te das cuenta que el sistema tiene tres soluciones?
>
> Verónica: No estoy segura si tiene tres o ninguna porque ta, hay tres rectas que representan los tres sistemas, eh... las tres ecuaciones del sistema, pero creo que se deberían cortar todas en el mismo punto para que ese fuera el resultado, entonces capaz que eso está mal.
>
> E: A ver, ¿y cuál sería el problema? Vamos a suponer que las coordenadas de este punto fueran solución ¿podría ser o no?
>
> V: O sea...
>
> E: Si yo te pregunto, a ver, vamos a suponer que este punto tuviera coordenadas (-4,3), ¿podría ser el par (-4,3) solución del sistema?
>
> V: Podría ser solución de esas dos ecuaciones no de todo el sistema, porque falta la otra recta que debería también tener un punto ahí.
>
> E: ¿Y por qué cambiaste de opinión?
>
> V: No sé, razoné.
>
> E: ¿Ya lo habías pensado antes o ahora te diste cuenta?
>
> V: No, ahora.

La estudiante parecería asociar que para que las coordenadas del punto verifiquen la ecuación éste debe pertenecer a la recta, cuestión que fue trabajada con su profesora en clase. Creemos que en esta ocasión también logra interpretar los puntos como “números” y esto le permite evocar el hecho de que esos “números” deben verificar la ecuación de la recta para constituir una solución. Detectamos de esta forma una interacción entre dos modos de pensamiento que sumado a lo que la estudiante estudió en clase, contribuyeron a la superación del error que había cometido.

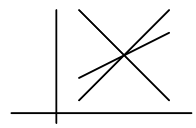
Sin embargo, resulta interesante observar cómo continúa la entrevista. Las dudas que manifiesta Verónica nos permitirán constatar que el aprendizaje no es lineal, que es necesario volver una y otra vez sobre los conceptos y que aún cuando parezca que el estudiante ha superado un error, información contradictoria puede continuar coexistiendo en su mente y puede volver a cometer el mismo error que creíamos superado.

Entrevistadora: Entonces, ¿podrías representar gráficamente un sistema de ecuaciones que tuviera solución?

Verónica: ¿Cualquiera?

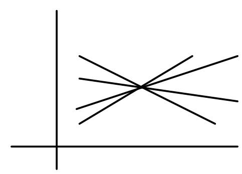
E: Sí, cualquiera.

Presenta lo siguiente:



E: ¿Y si el sistema fuera de cuatro ecuaciones lineales?

Presenta lo siguiente:



E: Y decime, ¿puede ser que un sistema de ecuaciones tenga 3 soluciones?

V: Sí.

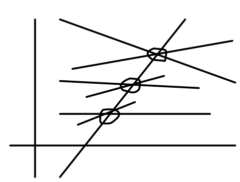
E: ¿Te animás a dibujar uno que tenga 3 soluciones?

(silencio)

V: No sé... ¿En una sola gráfica?

E: Sí, un sistema, cuando estamos hablando de un sistema y lo representamos gráficamente lo hacemos conjuntamente ¿verdad? Es decir, todas las rectas las representamos en el mismo sistema de ejes.

Presenta lo siguiente, circulando los tres puntos de corte como se muestra en la figura:



E: Bueno y ¿cuáles serían allí las tres soluciones?

V: Los tres puntos.

E: Sería un sistema... ¿de cuántas ecuaciones Verónica?

V: Ese de tres.

E: Yo te estoy preguntando el último.

V: Siete.

E: O sea que para ti, este sistema tendría siete ecuaciones y tendría 3 soluciones.

V: Sí.

E: ¿Cómo te das cuenta que tiene 3 soluciones?

V: Porque no sé, se cortan en tres puntos y cada recta representa una ecuación en el sistema.

Vemos que aquí, por un momento, la estudiante vuelve a la idea de que cada punto de corte indica una solución del sistema aun cuando las rectas no sean concurrentes. Por otra parte la estudiante no considera otros puntos de corte de las rectas representadas que no son visibles en la gráfica que realiza. Interpretamos que no maneja adecuadamente la representación de recta y la considera como si se tratara de un segmento.

Entrevistadora: Y entonces, este sistema, ¿por qué no tiene 3 soluciones?[30]

Verónica: Puede ser, sí, puede ser que tenga 3 ecuaciones.

E: ¿Qué tenga tres...? estamos hablando de soluciones no de ecuaciones, o sea tres ecuaciones de hecho las hay.

V: O sea si estuviera la cuenta, si corregís a ver si está bien capaz que te da bien.

E: ¿A qué te referís con la cuenta?

V: Si cambiás las coordenadas por las x y las y o las letras, en todas te da, o sea si cambiás todas y te dan los mismos números puede ser.

E: Pero nosotros no tenemos en este caso las ecuaciones, ¿cómo podrías hacer para saber si el sistema tiene tres soluciones?

V: No sé, veo donde se cortan las rectas.

E: Gráficamente, ¿cómo te das cuenta de que hay solución?

V: Porque las rectas se cortan en un mismo punto.

E: ¿Y cada corte te indica una solución?

V: Te indica sí, un par de números.

E: ¿Y cada corte te indica una solución del sistema?

V: No, te indica una solución de la ecuación que representa la recta.

E: A ver, por ejemplo, este punto de corte, nos estamos refiriendo al ejercicio 1, ¿te indica una solución? ¿de qué Verónica?

V: De una ecuación del sistema.

E: Y si yo te pregunto... ¿Este punto de corte te indica una solución del sistema?

V: Ah sí, o no, no sé, porque el sistema son las tres ecuaciones juntas.

E: Sí, ¿entonces?

[30] Se refiere al de la pregunta 1 del cuestionario que en la primera parte de la entrevista reconoció que no tenía solución.

V: Entonces sí, o no, porque te indica sólo de una, tendría que indicarte de las tres.

E: ¿Entonces cuál es tu conclusión?

V: Que no tiene 3 soluciones.

E: ¿Cuántas tiene?

V: Creo que ninguna.

E: Entonces, este sistema, el primero que dibujaste, ¿cuántas soluciones tiene?

V: Éste una.

E: ¿Este otro? (Refiriéndose al segundo que presentó)

V: Una.

E: ¿Y este otro? (Refiriéndose al tercero que presentó)

V: Éste ninguna, no éste creo que ninguna.

E: Porque tú me habías dicho que este último sistema que habías dibujado tenía tres soluciones.

V: Sí pero no, creo que ninguna.

E: ¿Te parece que ninguna?

V: Sí.

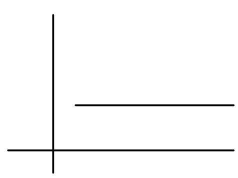
E: ¿Y podrías dibujar uno, Verónica, que tuviera 3 soluciones?

V: No, ni idea cómo.

E: ¿No se te ocurre cómo? ¿Y un sistema que tuviera infinitas soluciones?

V: Sí eso sí, sería así todas las rectas ahí.

Presenta lo siguiente:



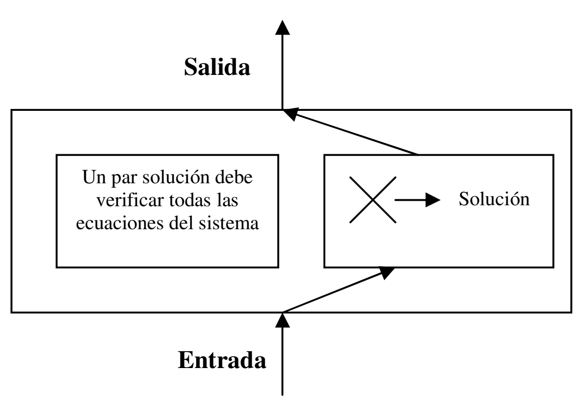
E: ¿Todas las rectas cómo serían?

V: Eh... superpuestas, todas en una.

Observamos que si bien Verónica logra construir la configuración correcta para un sistema de ecuaciones con solución única y también con infinitas soluciones, no logra descartar que un sistema de ecuaciones lineales no puede tener exactamente 3 soluciones. Parecería que para ella continúa existiendo tal posibilidad pero dice que no sabe cómo representarlo. Pensamos que lo que continúa obstaculizando a la alumna es la idea de asociar punto de corte con solución del sistema. La entrevista nos permite ver que para construir el sentido del concepto solución de un sistema de ecuaciones no sólo alcanza con dar respuestas correctas sino que también es necesario rechazar alternativas como la de existencia de un número entero de soluciones mayor que uno. Compartimos con Brousseau (1983):

> El sentido de un conocimiento matemático se define -no solamente por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado en tanto que teoría matemática (semántica en el sentido de Carnap)- no solamente por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que rechaza, de los errores que evita (yo agregaría: las economías que procura, las formulaciones que retoma y muchas otras cosas que forman también parte de su sentido).

Pensamos que el problema de Verónica reside en que en el modo AA ella sabe que una solución verifica todas las ecuaciones pero en el modo SG el punto de intersección de las rectas no está dotado de propiedades claras que lo caractericen. Es posible que no pueda establecer una conexión entre diferentes modos, ya que de pensar en las rectas como ecuaciones y en los puntos como pares podría inferir que el sistema no tiene solución. Pensamos que el modo de presentación de la pregunta 1 inhibe los procesos de reflexión necesarios para dar una respuesta correcta. Por estar planteada en el modo geométrico, los objetos matemáticos son dados directamente a la mente inhibiendo los procesos de análisis o la recurrrencia a otros modos de pensamiento. Se da una respuesta intuitiva que tal como la describe Vinner (1991), se emite consultando la imagen del concepto (que contiene rectas que se cortan como indicadoras de solución) sin consultar la definición del concepto que por lo que la estudiante manifiesta en la entrevista, sabe que una solución debe verificar todas las ecuaciones del sistema. La respuesta de Verónica a la pregunta 1 podría modelarse de la siguiente manera:



Respuesta intuitiva

Creemos que esta situación podría ser remediada en las prácticas solicitando a los estudiantes en forma explícita que expliquen sus respuestas en diferentes modos de pensamiento. No contentarse con la respuesta "el sistema tiene solución porque las rectas se cortan" sino que trataran de explicar qué significa ese punto de corte y por qué se dice que hay solución. Si los docentes trabajan en clase, durante los procesos de formación de conceptos, con diferentes miradas de los objetos y conceptos matemáticos, estarán promoviendo la interacción entre diferentes modos de pensamiento, permitiendo a los estudiantes múltiples interpretaciones complementarias de los objetos y conceptos que a su vez enriquecerán la imagen de dichos conceptos y permitirán a los estudiantes ver que es necesario recurrir a la definición del concepto (en caso de que la posea) para no cometer errores.

Rodrigo (15 años, alumno de la Prof. Martina) al igual que Verónica, respondió a la pregunta 1 del cuestionario que el sistema tiene 3 soluciones. Vemos su respuesta a continuación: "*Tiene 3 soluciones este sistema porque, las rectas que representan a cada ecuación solo se cortan en 3 puntos diferentes*".

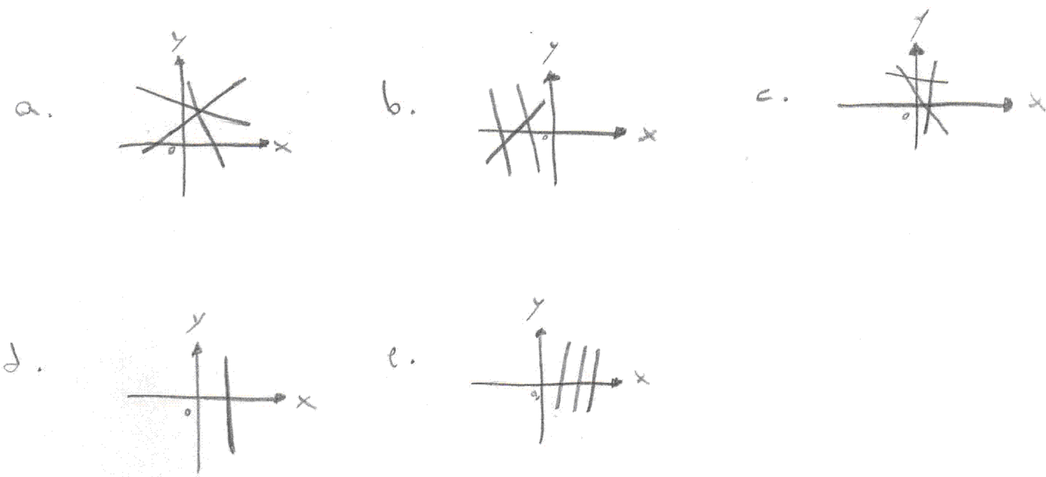
Utiliza el mismo criterio para responder la pregunta 2 y la 3, interpretando en ambas situaciones puntos de corte con soluciones del sistema. A la pregunta 4 responde: "*No creo que tenga solución pero no tengo idea porque, solo porque no la encontré*".

Parece haber intentado encontrar dos soluciones para cada ecuación, ya que aparecen rastros de tres tablas de valores que luego él mismo borra. Suponemos que su idea era la de graficar cada recta. Sin embargo, como ya dijimos, no deja registro de su estrategia y da la respuesta que transcribimos anteriormente.

En la pregunta 5 aparecen aspectos muy interesantes a destacar. En primer lugar logra dar la configuración correcta para un sistema 3x2 con solución única, que consideramos es el primer paso que le permitirá luego descartar la idea de que no siempre punto de corte es indicador de solución del sistema y en segundo lugar, mantiene coherencia interna con su idea de asociar solución con punto de corte. Las configuraciones gráficas que da para sistema con infinitas soluciones y sin solución son correctas. Vemos su trabajo a continuación:

5) Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:
   a. ¿Puede tener una única solución? Si
   b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones? Si
   c. ¿Y exactamente tres? Si
   d. ¿Puede tener infinitas soluciones? Si
   e. ¿Y ninguna? Si

Explica cada una de tus respuestas e ilústrala a través de una representación gráfica.

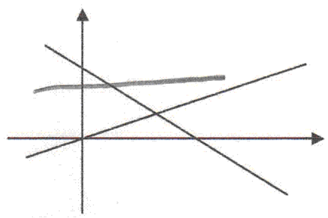


Lo que más destacamos del trabajo de Rodrigo es cómo él logra adaptar su concepción a lo que el ejercicio le pide, acomodando en cada situación tantos puntos de corte de las rectas tomadas de a dos, como sea necesario. En el caso de solución única esto lo conduce al éxito, quizás sin que él sea conciente de que la idea que él tiene a veces lo conduce a respuestas correctas y otras a respuestas incorrectas, dependiendo de la situación.

Vuelve a aparecer aquí, al igual que en el trabajo de Verónica, la idea de que para construir la noción de solución de un sistema, no alcanza con lograr la configuración correcta para un sistema con solución sino que también será necesario que el alumno rechace la posibilidad de existencia de un número entero de soluciones mayor que uno. De aquí la importancia de lo que señala Vinner (1991) acerca de que en la etapa de formación de conceptos deben proporcionarse a los alumnos ejemplos y no-ejemplos de dichos conceptos en procura de que el alumno construya una imagen rica. No podemos olvidar que frente a la resolución de tareas los alumnos consultarán en primera instancia esa imagen y si el alumno siente que desde allí puede dar su respuesta efectivamente la dará. En la medida en que esa imagen sea lo más completa posible estaremos proporcionando al estudiante mayores herramientas con las que enfrentar las tareas en caso de que no se logre una interacción con la definición de los conceptos en juegos.

Al resolver la pregunta 6 Rodrigo se da cuenta de que lo que ha hecho anteriormente estaba mal, veamos la forma en que lo manifiesta:

6) ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas no tenga solución? Explica tu respuesta.



Si, en esta gráfica, las 3 rectas no se cortan por lo tanto no hay ninguna solución.

Todos los ejercicios anteriores estan mal! (en el mismo punto)

Lo sucedido con Rodrigo, también se dio al momento de aplicar esta secuencia en mi grupo. Los alumnos trabajaban individualmente y al momento de estar resolviendo la pregunta 5 o en otros casos la 6, algunos de ellos, espontáneamente y en voz alta, irrumpían el silencio del salón exclamando: ¡Me di cuenta que todo lo anterior lo hice mal![31]

A partir de la pregunta 6, Rodrigo resuelve correctamente las restantes preguntas del cuestionario. Nos detendremos en su definición de sistema y de solución de sistema que da al final de la secuencia. En referencia a qué es para él un sistema responde:

17) Explica qué es para ti un sistema de ecuaciones.

Un conjunto de 2 o mas ecuaciones al que hay que encontrarle una (o más) soluciones comunes

Y para él solución de un sistema es:

[31] ¿Saltos en el aprendizaje? (Sierpinska, 1992) ¿Momentos de ¡Ajá!? (Gardner, 1981)

18) Explica qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones.

Una solución de un sistema de ecuaciones es el resultado común de cada una de las ecuaciones que hay en ese sistema.

Resulta interesante observar cómo este estudiante destaca en sus respuestas las palabras comunes y común. Parece que desea destacar esa "cualidad" que ha encontrado durante la resolución de las distintas actividades de la secuencia en un modo de pensamiento SG y que le permitió transitar exitosamente a partir de la pregunta 6.

Cuando explica qué es para él un sistema aparece conjuntamente la noción de solución, parecería que sistema es algo a lo que hay que encontrarle una o más soluciones. La noción de sistema parecería que es para los estudiantes inseparable de la noción de solución, que es en cierta forma la visión que mostró su profesora como ya reseñamos en el análisis de sus clases.

Cuando Rodrigo explica qué es para él solución de un sistema, no recurre a la noción de punto común sino a la noción de "*resultado común*". En este caso parece recurrir a un modo de pensamiento AA, para abandonar el modo SG que fue el que usó principalmente durante la resolución de la secuencia. Pensamos que ese *resultado* se está refiriendo a un par ordenado de números reales, que él logra expresar de esa manera, y que le permite vincular lo geométrico con lo algebraico, es decir, pasar de rectas y puntos a ecuaciones y pares ordenados. Un cambio de modo de pensamiento que le permite generar visiones complementarias de los objetos matemáticos. Pensamos que este cambio en el modo de pensamiento haya sido lo que le permitió cambiar de opinión en la pregunta 6. Como ya mencionamos anteriormente, cuando una pregunta es formulada en el modo geométrico, los objetos matemáticos son directamente dados a la mente del alumno como sucede en la pregunta 1. Esto parece invitar a los alumnos a dar una respuesta intuitiva que se caracteriza por su inmediatez y autoevidencia. En el caso de la pregunta 6, la recta que se pide trazar no es dada al alumno. Consideramos que esto hace que la respuesta no sea inmediata requiriendo del estudiante un nivel de análisis que le implica no sólo consultar la imagen del concepto sino interactuar con la definición del concepto solución. Esto podría haber llevado al alumno a un modo de pensamiento AE pensando en términos de propiedades como la de "común" que él mismo destaca en las dos últimas preguntas del cuestionario. La pregunta 6 requiere de una construcción racional del conocimiento solución en base a sus propiedades. Las situaciones que por novedosas desestabilizan al alumno, hacen que deba consultar la definición del concepto, tal como Vinner (1991) lo destaca. Consultar la definición del concepto implica cambios en el modo de pensamiento y por tanto miradas diferentes de los objetos. En este caso el alumno "rescata" una propiedad vital para responder correctamente el resto de las preguntas a partir de la 6, que es la noción de solución como punto "común" que ya señalamos.

Martín (14 años, alumno de la Prof. Martina) contestó a la pregunta 1 diciendo que el sistema tiene 3 soluciones. Vemos su respuesta: "*Tiene 3 soluciones porque los puntos donde se cruzan las rectas señalan 1 par de soluciones (x e y)*".

Este alumno, a diferencia de Verónica y Rodrigo, refleja en su respuesta dos modos de pensamiento: el SG y el AA. Por el tipo de respuesta, parecería que interpreta una solución (un par ordenado de números reales) como dos soluciones. Es decir que para él una solución es un "par de soluciones", dos números. Pudimos apreciar esta idea en las clases de la Prof. Martina que observamos. Ella, por momentos, parece plantear que una solución son dos números en lugar de que una solución es un par ordenado de números, si bien hace referencia al significado de par ordenado a lo largo de su clase. Retomemos el siguiente diálogo de la primera clase que observamos de la profesora Martina y que ya fue reseñado en la sección "Observaciones de clase":

> Profesora Martina: Se acuerdan que hablábamos de que a veces podríamos tener más de un número, sí, no sólo se puede poner más de un número, sino que a veces las soluciones de estas ecuaciones en vez de ser un número, son dos ¿y podrán ser tres?
>
> A: Sí.
>
> P: ¿En qué caso podrían ser tres? A ver ¿qué opinan?
>
> A: Cuando hay tres incógnitas.
>
> P: Cuándo hay tres incógnitas las soluciones son tres, una terna de números ¿no? bueno pero eso lo dejamos. Ahora, estos pares ustedes saben, ya han trabajado con el profesor de Ciencias Físicas, con gráficas, ¿sí? ¿Verdad? ¿Cómo trabajan? con un par de ejes...

De forma que la confusión de Martín podría provenir de la enseñanza que fue impartida, esta incide en la forma en que ve los objetos matemáticos.

Volviendo a la concepción de Martín de que el sistema tiene tres soluciones, esta podría estar originada en la identificación de punto de corte con solución del sistema. Vemos que la interacción entre dos modos de pensamiento tampoco resulta suficiente para dar una respuesta adecuada. Martín mantiene la creencia de que cada punto de corte de las rectas tomadas de a dos, indica *una solución conformada por (x e y).*

A la pregunta 4 responde que "*no tiene solución porque no pude encontrar un par x e y por ningún método*" y no resuelve ninguna consigna más de la secuencia, a excepción de la pregunta 17, que responde de la forma que presentamos a continuación, colocando además una flecha que apunta a la pregunta 18, como si estuviera contestando las dos preguntas a la vez:

> Un sistema es para mí 2 o más ecuaciones que sustituyendo las incógnitas de una se resuelven las dos. Ej: $x + y = 2$
> La respuesta sería (2, 0) $xy = 2$

Si bien plantea como ejemplo un sistema no lineal, y el par que elige no verifica la segunda ecuación (seguramente pensó que $2 \times 0 = 2$), interpretamos que considera que un sistema es un conjunto de ecuaciones que deben verificarse simultáneamente para los mismos valores de *x* e *y*. Si bien el trabajo de este alumno en la secuencia fue escaso, nos interesó mostrar cómo transita entre dos modos de pensamiento, que tiene una noción bastante aproximada al concepto de solución de un sistema y sin embargo, fracasa en sus respuestas al interpretar todos los puntos de corte de las rectas tomadas dos a dos, como soluciones del sistema.

Matías (15 años, alumno de la Prof. Martina) contestó a la pregunta 1, de la siguiente forma: "*Tres soluciones: porque las rectas se cortan tres veces formando tres puntos (soluciones)*".

En este caso es bien clara y explícita la asociación entre punto y solución, y como ya lo reseñamos en la sección donde analizamos las clases de la profesora Martina, pensamos que la concepción de Matías es producto del enfoque adoptado en clase. Recordemos el siguiente pasaje de una de las clases observadas y la intervención de Matías:

> Profesora Martina: Entonces a ver si me escuchan, lo que nosotros hicimos hoy, es resolver este sistema y lo pudimos resolver y encontrar la solución, ¿cuál es la solución de este sistema?
> Matías: El par de números donde se cortan las rectas.
> P: El par de números donde se cortan las rectas. Bien Matías, para la clase que viene, quiero que piensen si existirá un sistema que no tenga solución, si el sistema siempre tiene solución.

Como vemos, queda institucionalizado por parte de Matías y la docente lo reafirma: la solución del sistema es "*el par de números donde se cortan las rectas*". Pensamos que esta noción es la que conduce a este alumno a interpretar incorrectamente el número de soluciones de la pregunta 1, pero sin duda, también es consecuencia de estar trabajando solamente en el ámbito de los sistemas 2x2.

Matías aplica el mismo criterio para contestar las preguntas 2 y 3. En la pregunta 4 intenta el método gráfico pero responde que "*no puedo responder a esta pregunta, porque no tengo claro cómo resolver un sistema de tres ecuaciones*". En la pregunta 5 contesta solamente la parte a) diciendo que "*si un sistema de dos ecuaciones puede tener una sola solución, porque (sic) uno de tres no va a poder*". Consideramos que es un buen comienzo para comenzar a pensar la cuestión pero no da ejemplos ni contraejemplos de la misma. Responde vagamente las preguntas de 6 a 10 y contesta la pregunta 11, presentando el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 4x + 1y = 8 \end{cases}$$

En la pregunta 12 contradice lo respondido en las preguntas 1, 2 y 3, diciendo que para él un sistema no puede tener como solución el par (2, 1) y además otras soluciones porque los sistemas tienen sólo una solución.

Para él un sistema de ecuaciones es "*Un par de ecuaciones a las cual (sic) hay que calcular sus incógnitas*". Aparece aquí la noción de sistema asociada a algo que hay que resolver.

En cuanto a qué es para él una solución de un sistema de ecuaciones, responde "*La representación de (x, y) en números*". Esto nos hace pensar en que interpreta la solución como un par ordenado de números sin hacer mención a condición alguna.

La noción de solución que ha construido le resulta efectiva en el caso de los sistemas 2x2, pero creemos que no hay un entendimiento del concepto en tanto no puede interpretar adecuadamente las situaciones que no son habituales para él. Con el conocimiento que posee no puede interpretar nuevas situaciones.

Comentaremos ahora el trabajo de Pablo (14 años, alumno de la Prof. Martina) porque creemos que nos muestra otro aspecto al interpretar un sistema 3x2, que fue detectado en los estudios exploratorios y que no aparece en los trabajos reportados anteriormente. Se refiere a cómo interpretar un sistema 3x2. Cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a un sistema 3x2 no saben si una solución del sistema significa que debe verificar las tres ecuaciones simultáneamente o -haciendo una adaptación del conocimiento que tienen de los sistemas 2x2- piensan que una solución del sistema 3x2 es cualquier par ordenado que proviene de la intersección de las rectas tomadas dos a dos. Recordamos las palabras de Gonzalo (estudiante de segundo año de profesorado de Matemática) provenientes de los estudios exploratorios, donde refleja sus dudas acerca de cómo interpretar qué es solución de un sistema:

> [...] ¿qué sucedería si alguien dijera por allí "en un sistema con más ecuaciones que incógnitas consideramos soluciones a los pares de valores que verifican las ecuaciones tomadas de a dos"?

Pablo contesta a la pregunta 1 diciendo que el sistema "*tiene tres soluciones pero cada una de ellas es para dos ecuaciones*". El alumno reconoce que cada una de las "soluciones" verifica solamente dos de las tres ecuaciones pero contesta que el sistema tiene tres soluciones. Sin embargo al responder a la pregunta 2, evoca la necesidad de que el par solución verifique todas las ecuaciones, es así que contesta: "*Para mí no existe una solución para todas las ecuaciones cada punto que está contado es una solución para dos ecuaciones*". En 3 dice que "*Ninguna solución para el sistema. Hay dos soluciones para dos ecuaciones. Hay dos ecuaciones que no tienen solución, son incompatibles porque las rectas son paralelas*". En 4 contesta que "*Es imposible no existe una sola se encuentran soluciones para dos ecuaciones*" y presenta cierto trabajo algebraico con ecuaciones que él mismo tacha por lo que no queda clara la forma en que razonó. No responde completamente la pregunta 5, solamente aclara que: "*Para representar en una gráfica la solución las rectas de las ecuaciones tienen que cortarse en el mismo punto las tres*".

Responde correctamente las preguntas 6 y 7 y queremos destacar algo que anteriormente marcamos como necesario para el entendimiento del concepto solución de un sistema: que el alumno descarte que un sistema de ecuaciones lineales no puede tener un número entero de soluciones mayor que uno. Este alumno logra descartar esta posibilidad, evidenciándolo en la pregunta 8 cuando se le pregunta si es posible representar un sistema que tenga solamente dos soluciones, a esto dice: "*No. Si dos rectas se cortan solo pueden tener un punto en común*". Es evidente que está pensando en un sistema de 2 ecuaciones.

En la pregunta 16 donde tiene la opción de rever lo contestado en 5, logra las configuraciones geométricas adecuadas para lo solicitado, presentando rectas coincidentes para el caso de infinitas soluciones y paralelas para el caso de ninguna solución (¿evita la configuración "triángulo" por inseguridad?). No atiende la palabra "exactamente" de las partes b) y c) y dice que si un sistema tiene infinitas soluciones puede tener 2 y 3 soluciones, lo que es correcto. Para él un sistema es un conjunto de ecuaciones y en referencia a la pregunta 18 contesta que una solución es: "*Una única solución para distintas ecuaciones o una solución para un sistema*". No es claro lo que quiere decir pero interpretamos que con una *única solución* se refiere a que es el mismo par que debe verificar todas las ecuaciones para ser considerado una solución.

Daniela (15 años, alumna de la Prof. Cristina) responde a la pregunta 1 diciendo que "*El sistema tiene 3 soluciones porque en cada punto que se cortan hay una solución en común*". Nuevamente el problema de identificar punto de corte con solución. Contesta con el mismo criterio las preguntas 2 y 3. A continuación vemos cómo ella explica su confusión al enfrentarse a esta pregunta. Lo manifestó en clase, en la sesión de puesta en común del cuestionario:

> Daniela: En los tres primeros me fue re-mal porque me confundía eso de sistema porque si me decías en un único sistema ta, pero pensaba ta, capaz que sistema podía ser esas dos que se juntan y esas dos que se juntan ahí, ¿sí? entonces no sabía qué contestar.

Vemos por su respuesta que hay otro problema más que el de identificar punto de corte con solución. Este problema consiste en no saber qué significa un sistema de tres ecuaciones, la alumna piensa que quizás signifique considerarlas de a dos y de allí el error que comete.

En la pregunta 4 razona correctamente verificando que el par ordenado que obtuvo (a partir de una combinación lineal de las tres ecuaciones obtiene x y por sustitución en una ecuación determina el valor de y) no verifica las tres ecuaciones dadas.

Vemos que el fenómeno "tres soluciones" se presenta en esta estudiante, al igual que en otros, solamente en el modo SG. Como ya dijimos, por la forma en que se presenta la pregunta, los objetos son dados directamente a la mente del estudiante y hacen que se pongan en juego respuestas intuitivas que por su característica de autoevidencia inhiben el proceso de análisis necesario para dar una respuesta correcta. A esto se suma la noción de solución construida como punto de corte de dos rectas y la ausencia del concepto "verificación" en el modo de pensamiento SG. Como más adelante describiremos, cada modo de pensamiento es tratado por los profesores de diferente forma y caracterizado por diferentes rutinas que le son propias. La falta de conexión entre los diferentes modos de pensamiento (que son promovidas desde la enseñanza) hace que las interpretaciones de los objetos sean propias de cada modo y no se establezcan relaciones entre ellas ni sea vista una misma noción desde diferentes puntos de vista.

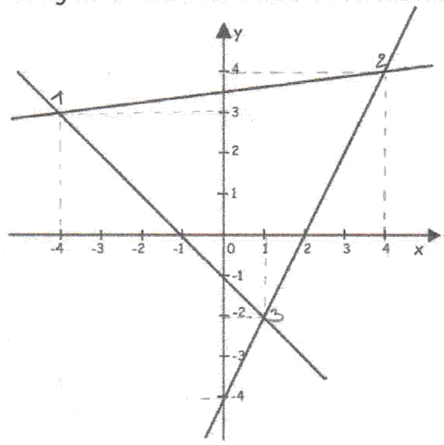
La pregunta 5 le hace cambiar la opinión respecto de lo contestado en 1, 2 y 3. Destacamos el valor de esta pregunta porque permite el paso a nuevas visiones. Creemos que por la forma en que está presentada esta pregunta, requiere de procesos de análisis que llevan a los alumnos a un modo de pensamiento AE pues al no tener ecuaciones, ni representaciones gráficas, el alumno debe pensar en propiedades, para luego interpretarlas gráficamente y presentar los dibujos que se le piden.

Contesta correctamente todas las partes a excepción de la parte d) en la que considera que un sistema no puede tener infinitas soluciones. Sin embargo en la pregunta 8 cuando se le pregunta si es posible representar una recta más para que el sistema representado tenga solamente dos soluciones dice que no es posible "*porque solo se cortarían en un solo punto y así tendrían una solución, y si lo hago arriba de la ya existente tendría infinitas soluciones en común*". De forma que sabe que si dos rectas son coincidentes, tienen todos sus puntos en común y que el sistema asociado tiene infinitas soluciones. Contesta correctamente todas las preguntas restantes y deseamos destacar que por sus respuestas sabe que dos rectas tienen un único punto en común, infinitos o ninguno. Creemos que esto le permite saber que un sistema de ecuaciones lineales puede tener una única solución, infinitas o ninguna. Lo vemos en la respuesta a la pregunta 17: "*Un sistema de ecuaciones son dos ecuaciones o más, que se resuelven para saber si tiene una única solución, ninguna o infinitas*". Nuevamente aparece la noción de sistema asociada a algo que se resuelve. Pero destacamos como muy positivo cómo logra determinar claramente el número posible de soluciones de un sistema. Esto pudo hacerlo básicamente en un modo de pensamiento geométrico en base al número de puntos que pueden tener en común dos rectas.

Respecto de este último punto, abordaremos ahora el trabajo de Leandro (14 años, alumno de la Prof. Cristina) porque utiliza la noción de que una recta no puede cortar a otra en exactamente dos puntos pues "*sería una curva o algo por el estilo*" para responder correctamente la pregunta 8. La idea de que una recta no puede "curvarse" ya había sido detectada en los estudios exploratorios como una noción que permitía descartar un número entero de soluciones mayor que uno.

Leandro contesta a la pregunta 1 diciendo que el sistema tiene 3 soluciones. Maneja un pensamiento SG y AA, ya que habla tanto de los tres puntos de corte como del conjunto solución del sistema formado por tres pares ordenados. Veamos su trabajo.

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



Tiene 3 soluciones {(-4, 3), (4, 4), (1, -2)}, ya que las rectas se cortan entre si 3 veces en los puntos 1, 2, 3.

Con el mismo criterio contesta las preguntas 2 y 3 identificando tantas soluciones como puntos de corte de las rectas tomadas de a dos. En la pregunta 4 razona en forma similar a Daniela contestando que el sistema no tiene solución: verifica que el par ordenado que obtuvo (a partir de una combinación lineal de las tres ecuaciones obtiene x y por sustitución en una ecuación el valor de y) no verifica las tres ecuaciones dadas.

El trabajo de Leandro nos permite observar cómo un cambio en el modo de presentación de una situación (preguntas 1 y 4) puede conducir al alumno a formas de pensamiento inconsistente, es claro que solamente el profesor lo está detectando y Leandro no es conciente de ello. Para contestar la pregunta 1 sitúa su atención en el número de veces que las rectas se cortan, tal como él lo explicita, y cuando la pregunta es presentada en el modo AA sitúa su atención en que el par obtenido no verifica todas las ecuaciones del sistema. Dependiendo entonces de la forma de presentación del sistema se generan distintas interpretaciones que están basadas en distintos conceptos. En el modo SG, pone atención en el único concepto relevante que se ha puesto en juego durante su aprendizaje que parece ser el de "punto de corte como solución del sistema" y en el modo AA, "solución como par que verifica todas las ecuaciones". Pensamos que el problema de Leandro es que no logra una conexión entre diferentes modos de pensamiento y que como consecuencia de esto se mantuvo durante todo el cuestionario en el modo de pensamiento SG, fundamentalmente. Esta falta de conexión entre modos de pensamiento impide una visión compleja de los objetos matemáticos ecuaciones lineales, viéndolos ya como figuras geométricas o ya como ecuaciones, pero no como ambas cosas a la vez.

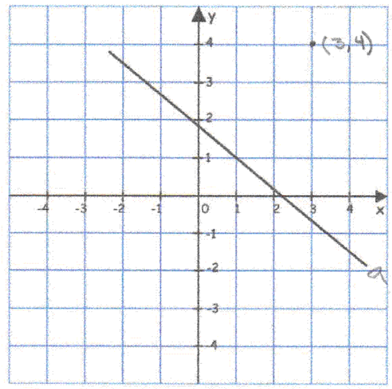
En la pregunta 5 logra una configuración adecuada para un sistema con solución única, sin embargo, continúa sosteniendo que un sistema de ecuaciones lineales puede tener exactamente dos soluciones proponiendo una configuración como la de la pregunta 3 (dos rectas paralelas cortadas por una secante) y que un sistema puede tener exactamente tres soluciones proponiendo la configuración "triángulo". Contesta correctamente las partes d) y e) presentando rectas coincidentes y paralelas respectivamente. Por la forma de presentación de esta pregunta, un cambio en el modo de pensamiento es necesario para responder correctamente. Quizás Leandro se mantuvo solamente en el modo SG y allí la concepción que él tiene de solución como punto de corte lo conduce a una respuesta incorrecta. Si hubiera logrado una conexión con el modo AA, viendo el punto como par de números y las rectas como ecuaciones, podría haber contestado adecuadamente como lo hizo en la pregunta 4.

No logra superar el error de interpretar puntos de corte como soluciones a excepción de las situaciones donde se le pide, como en la pregunta 8, representar una recta más para que un sistema tenga exactamente dos soluciones y contesta que no es posible, como ya dijimos, porque la recta no es curva. Es que la pregunta 8 sólo involucra a dos rectas y esto es una diferencia importante. Contesta correctamente las preguntas 9 y 10 manejando con solvencia que rectas coincidentes representan un sistema con infinitas soluciones.

Leandro es de los pocos alumnos que utiliza un modo de pensamiento SG para contestar tanto la pregunta 11 como la 12. Cuando se le pide un sistema que tenga como única solución (2, 1) representa dos rectas en un sistema cartesiano que se cortan en ese punto. La gran mayoría de los alumnos que resolvieron esa pregunta dieron como solución un par de ecuaciones y no realizaron una interpretación geométrica de la situación. En este caso no sabemos si la opción de Leandro se debe a que el modo de pensamiento SG es menos "tedioso" que el AA pues no involucra cálculos de ningún tipo o por lo que manifestamos anteriormente acerca de sus dificultades para transitar entre diferentes modos.

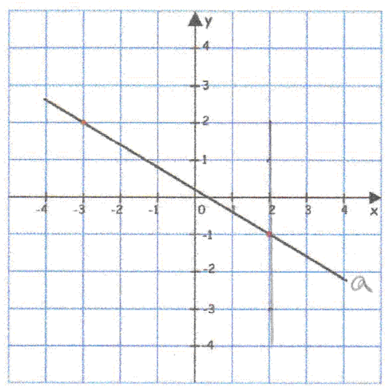
Este estudiante maneja bien la idea de que para que un punto represente la solución de un sistema, las rectas consideradas deben pasar por ese punto, al menos cuando la pregunta involucra dos rectas. Así lo refleja su trabajo en las preguntas 13 y 14, aun cuando en esta última comete un error al interpretar cuál es el punto (-3, 2):

13) ¿Puedes representar una recta más para que el sistema de ecuaciones asociado a ellas tenga como solución al par (3,4)? Explica tu respuesta.



no puedo ya que es Imposible que aplicando una recta mas esta pueda cortar con la otra osea es Imposible la recta a tendria que pasar por el punto (3,4)

14) ¿Puedes representar una recta más para que el sistema asociado a ellas tenga como solución solamente a los pares (-3, 2) y (2, -1)? Explica tu respuesta.



no puedo, ya que la recta solo pasa por el punto (2,-1) y no por el punto (-3,2) y con otra recta tampoco puedo

En suma, Leandro sabe que para que un par ordenado de números reales sea solución de una ecuación el punto correspondiente debe pertenecer a la recta, logra interpretar situaciones contestando que un sistema no puede tener exactamente dos soluciones y sabe que si tenemos rectas coincidentes habrá infinitas soluciones, sin embargo, manifiesta un pensamiento inconsistente sosteniendo en la pregunta 16, donde tenía la oportunidad de rever lo hecho, que un sistema sí puede tener exactamente dos o tres soluciones. La diferencia es que en la pregunta 16 hay más de dos ecuaciones.

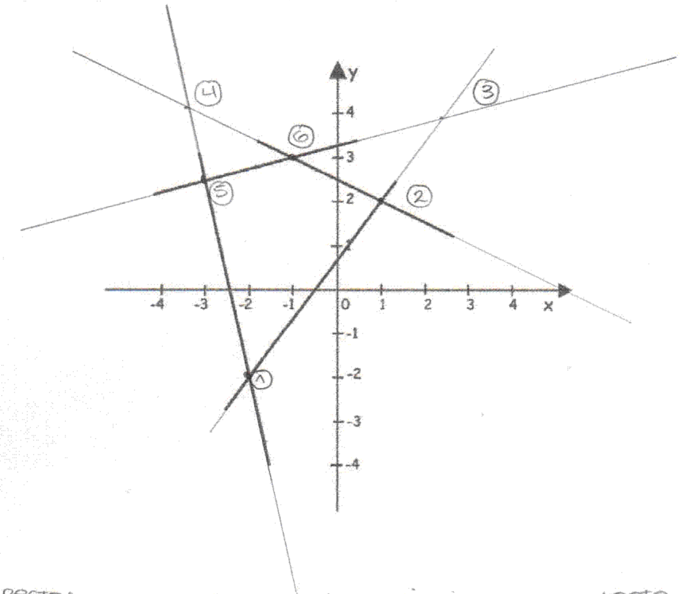
Para Leandro "*un sistema de ecuaciones son (sic) un conjunto de ecuaciones*" y una solución "*es un valor común que debe verificar a x número de ecuaciones*". Si bien su noción de sistema y de solución de un sistema son bastante adecuadas para un alumno de su nivel de estudios, esto parece no incidir en su interpretación incorrecta de las preguntas 1, 2 y 3.

Por la forma en que están presentadas estas tres preguntas, donde los objetos son directamente dados, la mente consulta para responder la celda de la imagen del concepto solución que en el modo SG sólo tiene la imagen de dos rectas secantes como indicadora de solución. Como ya dijimos, podría estar sucediendo que la forma en que se presenta la pregunta y la inmediatez de una respuesta intuitiva inhiba procesos de análisis. Las respuestas a las preguntas 17 y 18, requieren un pensamiento AE pues el alumno debe evocar propiedades para responder. Aunque otros estudiantes respondieron utilizando un modo AA presentando ecuaciones o SG hablando de punto de corte, Leandro maneja bien su pensamiento AE. Pensamos que el problema al responder las preguntas 1, 2 y 3 es que Leandro no logra una conexión entre los distintos modos de pensamiento.

Valentina (15 años, alumna de la Prof. Cristina) contestó a la pregunta 1 de la siguiente manera: "*Este sistema constituido por tres ecuaciones posee 3 soluciones ya que las tres rectas que representan dicho sist. se cortan en 3 puntos, cada uno de los cuales corresponde a una solución*".

En el caso de la pregunta 2 la alumna contesta que el sistema tiene seis soluciones, obteniendo todos los puntos de corte de las rectas dadas tomadas dos a dos. Vemos su trabajo en la siguiente imagen:

2) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de cuatro ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



② Las rectas no poseen principio ni fin, por lo tanto si prolongamos dichas rectas podemos observar que se cortan en 6 puntos, cada uno de los cuales representa una solución

Este sist de 4 ecuaciones posee 6 soluciones

Con el mismo criterio responde la pregunta 3 indicando dos soluciones para el sistema. En la pregunta 4 realiza una combinación lineal de las tres ecuaciones y obtiene $x = -6$ y luego para otra combinación lineal de las tres ecuaciones obtiene $y = 8$. Constata luego si el par (-6, 8) verifica las tres ecuaciones y responde en consecuencia que "*El sist. no tiene solución ya que no existe un par de números que verifique las tres ecuaciones que lo constituyen sino sólo una de ellas*". Evidencia en su trabajo un modo de pensamiento AA y una concepción de solución de un sistema que es adecuada. Cabe preguntarse por qué Valentina respondió mal la pregunta 1 y bien la pregunta 4. Estas dos preguntas plantean la misma situación pero en diferentes modos. Al igual que en alumnos anteriores, un cambio en el modo de presentación de la pregunta, lleva a la estudiante a diferentes interpretaciones de los objetos. Como ya dijimos la pregunta 1 invita a una respuesta intuitiva en tanto los objetos son directamente dados a la mente, de esta forma se inhiben procesos de análisis que podrían haber sido de dos tipos, viendo esos objetos desde el modo AA o recurriendo a un modo AE consultando las propiedades necesarias para responder correctamente.

Valentina fue una de las alumnas que durante la aplicación del cuestionario en clase, en forma individual, dijo en voz alta en determinado momento que se había dado cuenta que lo que había hecho anteriormente estaba mal. Cuando finalizó la clase le pregunté a Valentina en qué momento de la secuencia había cambiado de opinión y ella me contestó: ¡Cuando lo tuve que hacer yo misma! (refiriéndose a la pregunta 5)

En efecto, al responder la pregunta 5 ella debe reflexionar, explicar e ilustrar y se da cuenta que un sistema de ecuaciones lineales no puede tener exactamente dos o tres soluciones. Su respuesta es la siguiente: "*Un sistema constituido por tres ecuaciones puede poseer, una solución, infinitas o ninguna; no puede tener únicamente 2 o 3*". Nos interesaba destacar el trabajo de Valentina porque evidencia la pregunta que la hizo cambiar de opinión en su interpretación incorrecta. Como ya dijimos, al tener que construir ella misma la recta que se pide, se ponen en juego procesos de análisis que en este caso implican una mirada de la situación desde el modo AE, en tanto la alumna debe recurrir a las propiedades del concepto solución para poder dar una respuesta correcta.

Nos resulta interesante la manera en que explica qué es un sistema y qué es solución de un sistema por las ideas nuevas que plantea (un sistema en una incógnita no fue visto en clase), que parecen surgir en ella a partir de la realización del cuestionario.

17) Explica qué es para ti un sistema de ecuaciones.

$\boxed{\text{Un conjunto de ecuaciones}}$ agrupadas, cuya incógnita posee un mismo valor (o no en caso de que el sistema no tenga solución)

Ej:

$$\begin{cases} x + 3 = 5 \\ 2x + 1 = 5 \end{cases}$$

En ambos casos $x = 2$

18) Explica qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones.

Un par de números que verifique la ecuación o las ecuaciones de dicho sist.
↳ o un número (depende de la ecuación)

Ej

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$x = 2$
$y = 1$

$S = \{(2, 1)\}$
↳ así se representa

Más allá de las interpretaciones que podamos hacer acerca de por qué Valentina interpretó incorrectamente las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario, veamos qué nos dijo ella misma, en clase, cuando se realizó la puesta en común de este cuestionario:

> Valentina: Yo pensé que había una solución común, pero después me di cuenta que en realidad no había ninguna.
>
> Profesora Cristina: ¿Y por qué después te diste cuenta que no había ninguna?
>
> Valentina: Y porque en realidad, como dijo Leandro, ahí no hay ningún punto en que se corten las tres, un punto común y pensé con la mentalidad de los otros ejercicios que habíamos hecho, que cuando se cortaban era que había solución, entonces pensé lo mismo y no es lo mismo.
>
> P: ¿Y por qué para ti tienen que cortarse las tres en un punto para que haya solución?
>
> V: Porque ponele, si se cortan en un punto, ahí se están cortando dos rectas y por lo tanto esa solución es para dos de esas rectas, no para las tres ecuaciones, y por lo tanto si sólo verifica dos ecuaciones, no es la solución para las tres ecuaciones.
>
> P: Y cuando me dijiste que vos venías con la idea de los otros sistemas, ¿a qué te referías?

> V: A las ecuaciones que habíamos hecho de dos ecuaciones que cuando se cortaban dos rectas era una solución, entonces por eso.

Consideramos que las palabras de Valentina aportan información valiosa al momento de realizar consideraciones didácticas. Como sostiene Fischbein (1987, p.198), debemos ser cuidadosos en los primeros ejemplos que presentamos, en los primeros acercamientos que hacemos para introducir a los estudiantes en un determinado tema, porque estos pueden obstaculizar visiones posteriores más generales.

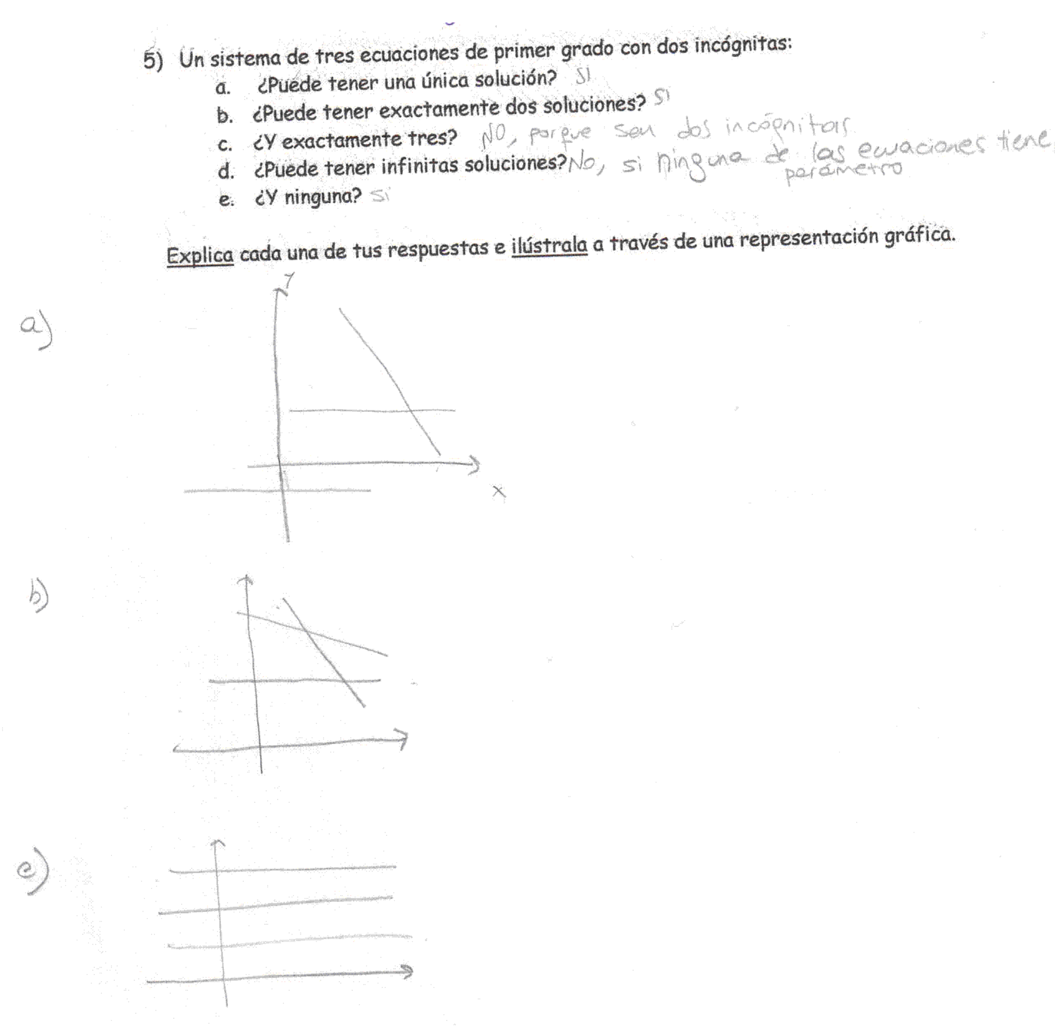
Vamos ahora a analizar algunos de los trabajos de los alumnos del último año de secundaria. Estos alumnos estudiaron, como su profesor lo indicó, matrices y determinantes y luego como una aplicación, la resolución de sistemas lineales, en particular por el método de Cramer. Completaron el estudio del tema con el método de escalerización haciendo especial hincapié en la aplicación de la equivalencia de ecuaciones y en la discusión de los sistemas paramétricos por ambos métodos, estudiando especialmente los grados de libertad de los sistemas compatibles indeterminados y la forma de expresar la solución en este caso. El profesor explicó que un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones con p incógnitas de exponente 1, cuyos coeficientes son números reales (los coeficientes son elementos de un cuerpo K) y que solución de un sistema es "*El conjunto p de números reales que verifican simultáneamente las m ecuaciones del sistema*". Suponemos que el profesor quiso decir que una solución es un conjunto ordenado de p números reales (ya que habló de ecuaciones con p incógnitas) aunque es confusa la forma en que lo expresa. Explicó también que el sistema puede tener infinitas soluciones o no tener solución. Estos estudiantes ingresarán a la universidad el año próximo.

Florencia (18 años) respondió a la pregunta 1 del cuestionario diciendo que: "*Este sistema tiene tres soluciones, ya que hay tres puntos de corte. El sistema nos da la intersección (los puntos de corte)*".

Con el mismo criterio responde a las preguntas 2 y 3, señalando cuatro soluciones y dos soluciones respectivamente. En la pregunta 4 despeja x de la primera ecuación, sustituye en la segunda y obtiene $y = 3$ (con un error operatorio). Con este valor determina que $x = -1$. Luego constata que el par (-1, 3) no es solución de la tercera ecuación y contesta que "*Este sistema no tiene solución, ya que los valores de x y de y para las dos primeras ecuaciones no coinciden para la tercera*".

De su trabajo se desprende que sabe que para que un par ordenado sea solución de un sistema debe verificar todas las ecuaciones dadas, sin embargo, no logra evocar esto cuando responde incorrectamente las preguntas anteriores, o de lo contrario es un conocimiento que maneja solamente en un modo de pensamiento AA y no puede transferir a un modo de pensamiento SG o traducir la situación planteada en la pregunta 1 a un modo de pensamiento AA que parecería manejar con mayor solvencia.

Al responder la pregunta 5 continúa interpretando puntos de corte con soluciones del sistema. Para el caso en que se pregunta si un sistema puede tener solución única, responde que sí y presenta un sistema de tres ecuaciones donde de las tres rectas que dibuja solamente muestra explícitamente la intersección de dos de ellas. Parecería que para Florencia hay un solo punto de corte y por tanto una única solución. Un problema de interpretación de las representaciones: maneja a la recta como si se tratara de un segmento. Con la misma idea responde afirmativamente a la parte (b) y presenta tres rectas que "exhiben" solamente dos puntos de corte.


5) Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

a. ¿Puede tener una única solución? Sí
b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones? Sí
c. ¿Y exactamente tres? NO, porque son dos incógnitas
d. ¿Puede tener infinitas soluciones? No, si ninguna de las ecuaciones tiene parámetro
e. ¿Y ninguna? Sí

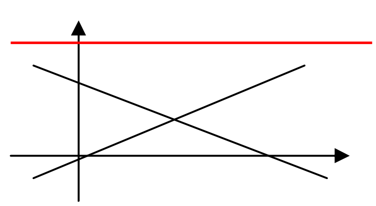
Explica cada una de tus respuestas e ilústrala a través de una representación gráfica.

El trabajo de Florencia evidencia dificultades, que también aparecieron en los trabajos de sus compañeros de clase, con el estudio que hicieron en clase de sistemas paramétricos y el centro de atención puesto entre el número de ecuaciones y el número de incógnitas. Esta estudiante dice que un sistema 3x2 no puede tener exactamente tres soluciones (contradiciendo lo que contestó en la pregunta 1) porque son dos incógnitas. Pensamos que podría estar confundiendo tres soluciones con terna ordenada.

Cuando se le pregunta si un sistema puede tener infinitas soluciones, responde que "*No, si ninguna de las ecuaciones tiene parámetro*". Florencia evidencia una gran confusión. Esta podría sustentarse en que se le han presentado nuevos objetos matemáticos, como los sistemas paramétricos, sin que hubiera conceptualizado con claridad el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Ya comentamos en la sección "Primeras Impresiones", que en el nivel 17-18 años, habíamos notado que no se producía un aumento importante del porcentaje de respuestas correctas a la pregunta 1 (que es lo esperado cuando uno confía en la enseñanza) sino que también aumentaba el porcentaje de diferentes tipos de respuestas que se daban a la misma, comparando con los grupos de 14-15 años. Desde una perspectiva positiva podríamos interpretar que el estudiante ha estudiado nuevos conceptos y que por tanto cuenta con un mayor bagaje de conocimientos desde los cuales interpretar las situaciones que se le presentan. Sin embargo, nos inclinamos por una visión negativa del asunto: se introduce al alumno en una galería de variedades sin que se le haya dado la oportunidad de una mejor comprensión de los objetos matemáticos más elementales.

Observamos en el trabajo de Florencia que la configuración que propone para un sistema sin solución es la de rectas paralelas.

En la pregunta 6 presenta un sistema que para ella no tiene solución "*ya que no hay ningún punto de corte en común entre las tres rectas*". Vemos en rojo la recta que ella agrega:



Nos queda la duda de si para Florencia el sistema no tiene solución porque no se visualizan los cortes de todas las rectas entre sí o porque no son rectas concurrentes. Pensamos que existe alguna razón por la cual ella no traza la recta roja haciendo explícito el corte con las otras dos rectas. Tomando en cuenta su respuesta a las partes (a) y (b) de la pregunta 5, nos inclinamos a considerar que para ella el sistema no tiene solución porque no se visualizan los cortes de todas las rectas entre sí.

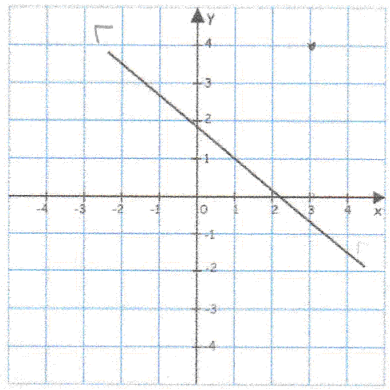
Logra una configuración adecuada para responder la pregunta 7, presentando rectas concurrentes. Contesta correctamente las preguntas 8, 9 y 10, manejando con claridad que para que un sistema tenga infinitas soluciones las rectas deben ser coincidentes y en este caso no evoca para nada los sistemas paramétricos a los que había aludido en la pregunta 5 como condición necesaria para la existencia de infinitas soluciones.

En la pregunta 11 recurre a una representación geométrica pero también presenta un sistema con cuatro ecuaciones donde dos pares son ecuaciones equivalentes. El sistema tiene la solución pedida. Sabe que la solución del sistema debe verificar todas las ecuaciones consideradas.

En la pregunta 13 manifiesta saber que si un punto no pertenece a una recta entonces sus coordenadas no pueden ser solución. Esto es importante sin embargo no lo tiene en cuenta al momento de responder las preguntas 1, 2 y 3. Pensamos que al ver una representación gráfica en la que las rectas se cortan el esquema que consulta su mente es el que le indica que un punto de corte es una solución del sistema, quizás sea el esquema más fortalecido en la experiencia y por ello prevalece ante otros.

Nos interesa destacar su respuesta a la pregunta 14, porque nuevamente aparece una noción que ya habíamos mencionado para descartar que un sistema de ecuaciones lineales no puede tener solamente dos soluciones: la de curva. La estudiante se refiere, en particular, a una parábola.

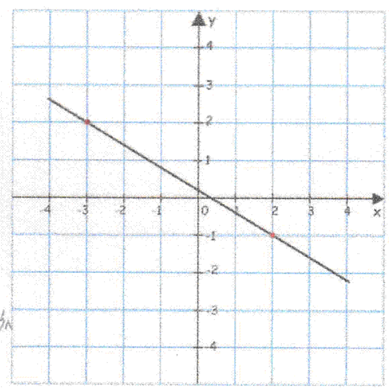
13) ¿Puedes representar una recta más para que el sistema de ecuaciones asociado a ellas tenga como solución al par (3,4)? Explica tu respuesta.



No porque la recta r no pasa por el punto (3,4)

14) ¿Puedes representar una recta más para que el sistema asociado a ellas tenga como solución solamente a los pares (-3, 2) y (2, -1)? Explica tu respuesta.

No, ya que por ser de primer grado, solo cortaría o en el par (-3,2) o en el par (2,-1), no en los 2. Ahora, si fuera una ecuación de segundo grado, (una parábola) su intersección si podría ser en 2 puntos



Florencia alude a que una parábola sí podría cortar a la recta dada en dos puntos pero no una recta.

En la pregunta 16 responde que un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas no puede tener exactamente dos soluciones porque es de primer grado. No queda claro en su respuesta si alude a la condición de recta como representación gráfica, que ya explicó que no puede cortar a otra recta en exactamente dos puntos. Justifica que un sistema en estas condiciones no puede tener exactamente tres soluciones porque "*Para que tuviera 3 soluciones tendría que ser de 3er. grado*". No es claro a qué se refiere pero podría estar pensando en la intersección de una curva con una recta. Para el caso de un sistema con infinitas soluciones propone tres rectas coincidentes y paralelas para el caso de un sistema sin solución. Creemos que nunca terminó de descartar la configuración "triángulo" como la de un sistema con tres soluciones por la respuesta a la pregunta 17:

> **17) Explica qué es para ti un sistema de ecuaciones.**
> un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con 1, 2 o más puntos en común. Dichos puntos, nos señalan cuál es/son el/los puntos de corte entre dichas rectas, parábolas, circunferencias, etc. Para saber si hay intersección entre esas figuras geométricas, resuelvo el sistema de sus ecuaciones

Como en la pregunta no se aclaró que se trataba de un sistema de ecuaciones *lineales*, ella habla en general de cualquier tipo de sistema. Tengamos en cuenta que en el mismo curso donde estudió los sistemas también abordó a la Geometría Analítica y ha trabajado con la intersección de diferentes figuras a partir de sus ecuaciones.

Como ya hemos mencionado, la respuesta a esta pregunta requiere de un modo AE, pues la alumna debería recurrir a propiedades relevantes que caractericen a este concepto. La alumna parece tener problema con este modo de pensamiento y solamente le es posible mantenerse en el modo SG para dar su respuesta. Obsérvese cómo en su respuesta no puede más que aludir a los puntos de corte de las figuras. Esto explicaría el tipo de respuestas que maneja a lo largo del cuestionario.

En la pregunta 18, confirma que para ella efectivamente la solución de un sistema "*es el punto de corte entre las figuras*".

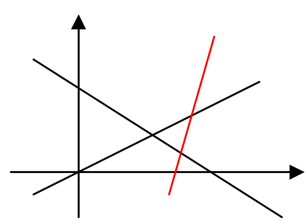
> **18) Explica qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones.**
> La solución, como dije anteriormente, es el punto de corte entre las figuras que representan esas ecuaciones

Veamos ahora el trabajo de Bruno (18 años). Responde a la pregunta 1 que el sistema tiene 3 soluciones "*porque hay 3 puntos de corte*", a la pregunta 2 que el sistema tiene 4 soluciones porque "*hay 4 puntos de corte*", pero en la pregunta 3 contesta que hay 1 solución "*porque cuando hago el sistema es solo una respuesta*". No es clara su respuesta pero podría ser que en ese momento hubiera evocado sistemas que él resolvió por métodos algebraicos (*hago el sistema*) y que tenían solución única.

Responde correctamente a la pregunta 4 que el sistema no tiene solución. Utilizando la ecuación 1 y la 3, halla $y = 2$. Con este valor determina x para cada una de las ecuaciones. Obteniendo respectivamente $x = 0$, $x = -6$, $x = 0$.

Responde correctamente la pregunta 5 pero no justifica por qué un sistema 3x2 no puede tener exactamente dos o tres soluciones. Para el caso de sistema sin solución presenta el caso de tres rectas paralelas. Al igual que Florencia, para el caso de un sistema con infinitas soluciones hace referencia a que puede haberlas "*si tienen un parámetro que varía*".

En la pregunta 6 queda claro que ha cambiado de parecer respecto de lo contestado en la pregunta 1 ya que presenta una figura como la siguiente donde la recta en rojo es la que él agrega:



Responde correctamente la pregunta 7 presentando un conjunto de rectas concurrentes. En la pregunta 8 dice que no es posible agregar una recta más en las condiciones pedidas porque dos rectas sólo se cortan en un punto.

En la pregunta 9 aparece nuevamente la mención a un parámetro como requisito para que el sistema tenga infinitas soluciones. El alumno responde que: "*tiene que ser una recta con parámetro que pase por el punto de corte y que varíe el parámetro*". No reflexiona que en ese caso el sistema tendrá solución única, ya que el punto de corte de las rectas es fijo. Seguramente en los sistemas paramétricos que vieron en clase obtenían como solución una *k*-upla ordenada dependiente de un parámetro y al variar ese parámetro iban obteniendo diferentes soluciones.

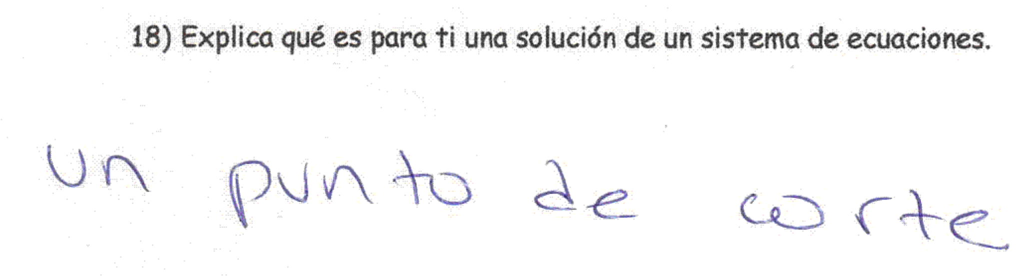
En la pregunta 10 no atina a considerar rectas coincidentes con la dada y responde que no es posible.

Responde la pregunta 11 acudiendo a una representación gráfica donde aparecen rectas concurrentes, no presenta ecuaciones.

En la pregunta 13 contesta que "*no, porque la recta ya dibujada no pasa por ese punto*". De forma que manifiesta conocer que para que las coordenadas del punto sean solución el mismo debe pertenecer a la recta.

Aparece, como en alumnos anteriores, la mención a una curva para responder la pregunta 14. Bruno dice que con una recta no es posible lograr que el sistema tenga solamente dos soluciones que con una circunferencia sería posible.

Si bien consideramos positiva la evolución del trabajo de Bruno a lo largo de la secuencia, ya que logró modificar sus concepciones iniciales donde identificaba puntos de corte con soluciones del sistema, nos preocupa la respuesta que da finalmente a la pregunta 18:


18) Explica qué es para ti una solución de un sistema de ecuaciones.

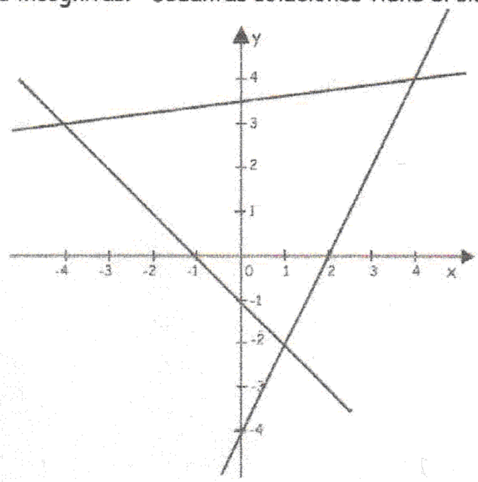
un punto de corte

Consideramos que si no logra cambiar esta idea, volverá más adelante a repetir los errores al interpretar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

El alumno no logra pensar en un modo AE, creemos que por el tipo de respuestas que da, no posee un repertorio de propiedades que le permitan funcionar en ese modo de pensamiento. Como ya lo explicamos anteriormente, creemos que responde mal la pregunta 1 y bien la 4 porque por el modo de presentación de la primera, surgen respuestas de corte intuitivo basadas en que el alumno consulta la imagen asociada al concepto solución que consiste en un par de rectas secantes como indicadora de solución y que, como ha demostrado a lo largo de la secuencia, tiene altamente fortalecida.

Elena (17 años) responde a la pregunta 1 de la siguiente manera:

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



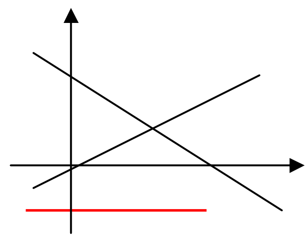
3 SOLUCIONES, LOS 3 PUNTOS DE INTERSECCIÓN – (x, y)
– (x_1, y_1)
– (x_2, y_2)

Si bien su respuesta es incorrecta, vemos que logra interpretar los puntos como pares ordenados, manifestando la interacción de dos modos de pensamiento. Como ya señalamos, el error podría deberse a que la forma en que está presentada la pregunta, invita a una respuesta de corte intuitivo, bloqueando procesos de análisis y el acceso a un modo de pensamiento AE.

Con el mismo criterio contesta las preguntas 2 y 3. En la pregunta 4 despeja x de la primera ecuación, sustituye en la segunda determinando $y = 5$ y luego a partir de este valor obtiene $x = 3$. Constata que el par (3, 5) no verifica la ecuación 3 y contesta que el sistema es indeterminado cuando en realidad es incompatible. Seguramente tiene claro que el sistema no tiene solución y esté confundiendo los nombres de los sistemas.

En la pregunta 5 contesta correctamente la parte a) presentando un conjunto de rectas concurrentes. En b) presenta dos paralelas cortadas por una secante, en c) contesta que no sin explicar, en d) alude –al igual que otros de sus compañeros– que es posible que un sistema tenga infinitas soluciones si alguna de las ecuaciones tiene parámetro y en e) presenta rectas paralelas.

En la pregunta 6 propone una configuración similar a la que realizó su compañera Florencia. Para Elena el sistema no tiene solución porque en la figura que presenta no se "ven" los puntos de corte de las rectas que representa. Lo mostramos en la siguiente figura, en rojo se representa la recta que ella agrega:



Este mismo fenómeno fue observado en Cutz (2005).

En la pregunta 7 contesta correctamente presentando rectas concurrentes y a la pregunta 8 responde que "*no se puede*" sin explicar por qué. No responde las preguntas 9 y 10.

En la pregunta 11 presenta un sistema dado por sus ecuaciones que tiene la solución pedida.

En la pregunta 12 donde se le pregunta si un sistema puede tener como solución a (2, 1) y además otras soluciones contesta que "*no, si es de primer grado, solo encuentro un valor para x y un valor para y*". Pensamos que la estudiante confunde el número de soluciones que puede tener un sistema con la idea de que en una ecuación lineal en x e y, dado un valor de x encuentro uno sólo para y que le corresponde. Aunque también podría estar pensando como Florencia, que el número de soluciones es igual al grado de las ecuaciones.

En la pregunta 13 manifiesta saber que un par es solución de una ecuación si el punto correspondiente pertenece a la recta, aun cuando no logra expresarlo adecuadamente. Ella lo explica diciendo que "*El punto (3, 4) no verifica la recta dibujada*". Pensamos que esto le hubiera resultado muy útil al momento de contestar la pregunta 1, pero saber cuándo una ecuación tiene una solución particular, y coordinar este hecho con la noción de sistema, son dos cosas diferentes. En la pregunta 1 seguramente sabía que un punto tiene que estar en una recta para ser su solución, pero ¿en qué consiste el conjunto solución del sistema? era la pregunta que causaba problemas.

Responde a la pregunta 14 diciendo que "*No se puede. No hay otra recta ≠ que pase por esos 2 puntos*". Reconoce que la recta debería pasar por esos dos puntos pero de su justificación no se desprende por qué un sistema de ecuaciones lineales no puede tener solamente dos soluciones. Da para la pregunta 15 la misma respuesta que para la 14 sin darse cuenta que podría presentar una recta coincidente con la dada. Muchos estudiantes no lograron distinguir la diferencia entre la pregunta 14 y la 15, en una se hablaba de un sistema que tuviera solamente dos soluciones dadas y en la otra se pedía que el sistema tuviera entre sus soluciones a los dos pares dados, por tanto podía representarse una recta coincidente con la dada.

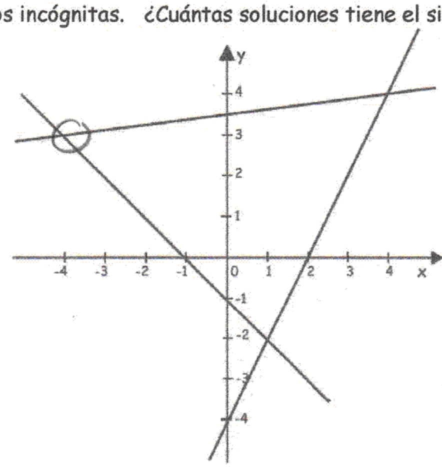
Elena no contesta la pregunta 16. Explica, luego, que para ella un sistema es "*un conjunto de ecuaciones*" y que "*la solución de un sistema de ecuaciones es solución de todas las ecuaciones del sistema*". Si bien consideramos acertadas estas dos respuestas pensamos que la alumna no pudo contestar adecuadamente las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario por estar presentadas en contexto geométrico. Al no poder recurrir a las ecuaciones como en la pregunta 4 que contestó correctamente, solamente le queda consultar la información que posee en referencia al concepto solución en contexto geométrico que es la de "*punto de intersección*" como ella misma lo dice. Pensar en un modo AE hubiera sido necesario, sin duda la forma de presentación de las preguntas 1, 2 y 3 la lleva a dar una respuesta inmediata y a no consultar propiedades para contestar, que como vemos formaban parte de su estructura cognitiva asociada al concepto solución.

4. 2. 3 Estudiantes que contestan a la pregunta 1 del cuestionario dando otro tipo de respuestas

En general, estos alumnos demostraron un desempeño pobre en la resolución del cuestionario y en el grupo de 17-18 años fue más notorio. Hemos seleccionado algunos trabajos que creemos representativos de este grupo: diferentes tipos de respuestas y respuestas que se repiten, alumnos que cambian de opinión respecto de lo contestado en las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario, alumnos que tienen una idea bastante aproximada de lo que significa sistema de ecuaciones y solución de un sistema de ecuaciones pero no logran interpretar adecuadamente las situaciones.

Cecilia (14 años, alumna de la Prof. Martina) responde a la pregunta 1 diciendo que "*El sistema tiene dos soluciones, porque hay dos incógnitas y uno de los cortes de las rectas está fuera de la gráfica*" y circulando el punto de corte de dos de las rectas: el que está en el segundo cuadrante, como vemos en la imagen siguiente.

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?

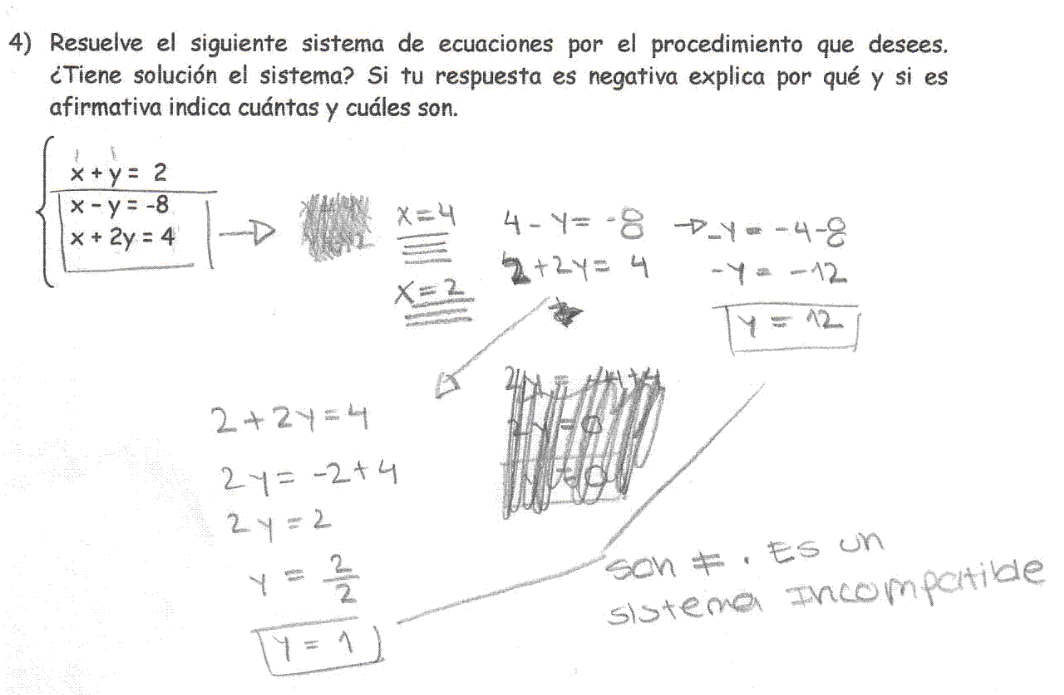


El sistema tiene dos soluciones, porque hay dos incógnitas y uno de los cortes de las rectas está fuera de la gráfica

No es claro lo que quiere decir con que "*está fuera de la gráfica*", quizás en los ejercicios que resolvió el punto de corte de las rectas pertenecía al primer y cuarto cuadrante.

Tanto en la pregunta 2 como en la 3, responde que "*El sistema tiene dos soluciones porque hay dos incógnitas*". Podría estar refiriéndose a que hay dos soluciones pensando en el valor de una y otra incógnita.

En la pregunta 4, no sabemos cómo obtiene $x = 4$ ni $x = 2$, parecería haberles asignado un valor cualquiera. Esta es una práctica habitual en clase cuando dada una ecuación deseamos encontrar soluciones de ella. Vemos su respuesta:



4) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el procedimiento que desees. ¿Tiene solución el sistema? Si tu respuesta es negativa explica por qué y si es afirmativa indica cuántas y cuáles son.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$x=4$

$x=2$

$4 - y = -8 \rightarrow -y = -4-8$

$-y = -12$

$\boxed{y = 12}$

$2 + 2y = 4$

$2 + 2y = 4$

$2y = -2 + 4$

$2y = 2$

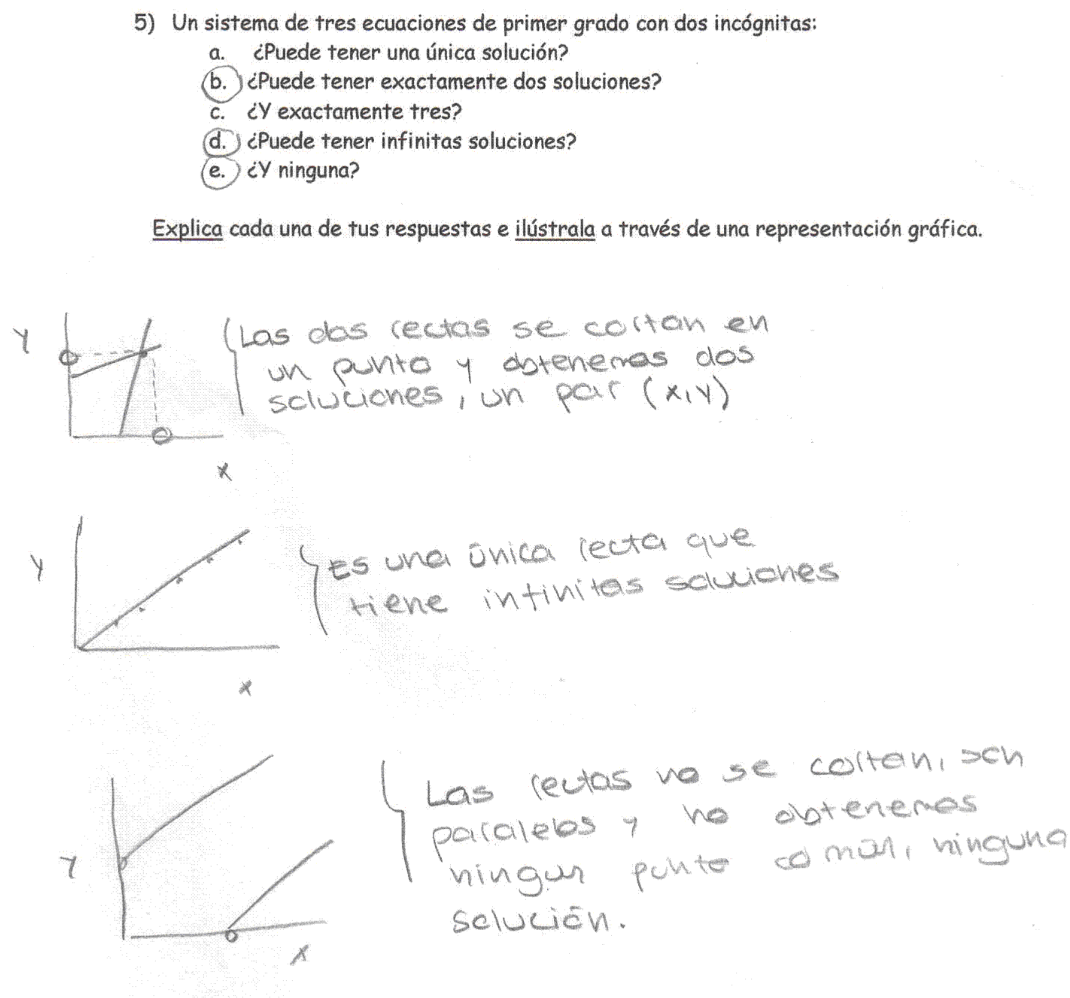
$y = \frac{2}{2}$

$\boxed{y = 1}$

son ≠ . Es un sistema incompatible

Al obtener distintos valores de *y*, interpreta que se trata de un sistema incompatible aun cuando su razonamiento no es correcto.

En la pregunta 5 podemos constatar que cuando habla de dos soluciones se está refiriendo al valor de una y otra incógnita. No considera en su respuesta que son tres ecuaciones. Vemos a continuación su trabajo:


5) Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:
a. ¿Puede tener una única solución?
b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones?
c. ¿Y exactamente tres?
d. ¿Puede tener infinitas soluciones?
e. ¿Y ninguna?

Explica cada una de tus respuestas e ilústrala a través de una representación gráfica.

Es interesante observar cómo al caso de rectas secantes le asigna dos soluciones, es decir, el primer dibujo que hace refiere a la parte b) y no a la a) que por cierto no responde. A partir de lo contestado en d) y e), donde contempla los casos de infinitas soluciones y de ninguna solución, y de las respuestas dadas a preguntas anteriores, podemos afirmar que para ella, si el sistema no está formado por rectas coincidentes o paralelas, entonces siempre tiene dos soluciones.

En la pregunta 6 contesta que "*No porque las rectas ya se cortaron en un punto, encontrando su solución*". Aquí aparece la concepción de punto como solución, no ha incorporado, a partir de las actividades previas, que configuraciones como la del "triángulo" pueden conducirla a un sistema sin solución.

En la pregunta 7 cuando se le pide representar tres rectas más para que el sistema tenga solución única, presenta un conjunto de rectas concurrentes que ahora interpreta como un caso de solución única y no como un caso con dos soluciones, como lo hizo en la pregunta 5.

En la pregunta 8 responde: "*No, porque si las superpongo en un tramo, no puedo asegurar que voy a tener exactamente dos soluciones, sino que voy a tener muchas. Y si las corto en un punto voy a obtener una solución única*". La alumna mantiene la idea de que un corte le asegura solución única y comprende que si exige dos soluciones, habrá infinitas. Contesta 9 y 10 correctamente, manifestando conocer que rectas coincidentes corresponden a un sistema con infinitas soluciones. En la pregunta 11 presenta un sistema con la solución pedida y en la pregunta 12 propone un sistema que tiene la solución (4, 5) pero no la (2, 1) que es la que se exige. Interpreta mal la consigna ya que cuando se le pide que el sistema tenga como solución a (2, 1) y además otras soluciones, entiende que debe construir un sistema con otra solución diferente a (2, 1), que es lo que hace pero no es lo solicitado.

En la pregunta 13 responde que "*No, porque en el lugar donde está la primera recta es imposible que en algún momento se corte en el par (3, 4)*". Interpreta adecuadamente solución como punto de coordenadas (3, 4) y sabe que para que sea solución la recta debería pasar por el punto.

En la pregunta 14 contesta que: "*No, no puedo porque cada par está a ambos lados, diferentes de la gráfica*". No sabemos a qué se refiere en su respuesta cuando habla de "*a ambos lados, diferentes de la gráfica*" pero no evoca lo que respondió en la pregunta 8, cuando descartó que pudieran existir solamente dos soluciones.

En la pregunta 15 responde que no puede por idénticas razones que en la pregunta 14. En la pregunta 16 no cambia las respuestas vertidas en la pregunta 5. Vuelve a circular las opciones b), d) y e) como si se tratara de elegir las opciones correctas (el ejercicio no es múltiple opción sino que hay que estudiar cada una de las opciones). De forma que vuelve a interpretar el caso de dos soluciones como el de solución única donde las dos soluciones son para ella las dos componentes del par solución.

Explica que para ella un sistema de ecuaciones "*Es la agrupación de ecuaciones, con dos incógnitas que forman un par ordenado. Las incógnitas deben resolver las dos ecuaciones para que forme el sistema*". Por su respuesta vemos que se da cuenta de que las dos incógnitas forman *un* par ordenado, sin embargo durante la secuencia manifestó confundir esas dos componentes con dos soluciones.

Para Cecilia una solución de un sistema es "*Un par ordenado de números que solucione las dos ecuaciones*". Consideramos que su noción de solución, aunque restringida a dos ecuaciones, es buena, sin embargo no logra interpretar adecuadamente la mayoría de las situaciones que se le presentaron. Tal como señalan Giraldo et al. (2002), la capacidad de recordar definiciones formales no está necesariamente asociada a una rica imagen del concepto. En este caso estaríamos hablando de la capacidad de enunciar una definición personal ya que no podríamos decir que su profesora le enseñó definiciones formales de estos conceptos. Como afirma Thurston (1990, referido en Giraldo et al. 2002), el entendimiento de la matemática involucra procesos mentales de compresión de ideas que puedan ser evocadas y usadas. De esta forma la estructura cognitiva asociada al concepto solución no contendría solamente la definición personal del alumno sino que éste tendría la capacidad de evocar y relacionar las diferentes piezas de información que contiene la imagen del concepto. Creemos que es posible alcanzar esto si durante la enseñanza del concepto se favorecen las diferentes miradas de los objetos matemáticos, a través de actividades apropiadas que permitan por un lado la explicitación de los conceptos en diferentes modos de pensamiento y por otro, hagan hincapié en la conexión entre ellos.

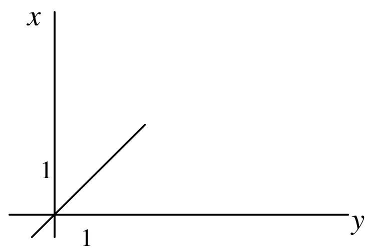
Bruno (14 años, alumno de la Prof. Martina) contesta en la pregunta 1 que hay "*1 sola porque se cortan*". Parecería que para este estudiante si hay rectas que se intersecan entre sí, es un indicador de solución única, no sitúa su atención en que ese punto de corte debe ser común a todas las rectas del sistema. Sin embargo en la pregunta 2 dice que hay 4 soluciones y en la pregunta 3 que hay sólo dos por la presencia de rectas paralelas.

En la pregunta 4 considera las ecuaciones 2 y 3 y mediante combinaciones lineales llega a que $y = 4$ y luego determina por sustitución que $x = -4$. Contesta que: "*No se puede hacer porque no se ajustan los valores x, y de un par al primero*". Seguramente se refiere a que el par que determinó, no verifica la ecuación 1. De forma que, en un modo de pensamiento AA, Bruno sabe que para que un par sea solución del sistema debe verificar todas las ecuaciones.

En la pregunta 5, parece elegir la opción d) pues la circula. Quizás, al igual que otro estudiante que ya comentamos, interpreta mal la pregunta pensando que se trata de múltiple opción cuando no lo es. Presenta entonces como respuesta a la opción d), el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1x + 1y = 1 \\ 1x + 1y = 1 \\ 1x + 1y = 1 \end{cases}$$

y una representación gráfica que interpretamos como rectas coincidentes:



Bruno no contesta las preguntas 6 a 10. En la 11 presenta un sistema que tiene infinitas soluciones y entre ellas a la pedida. No abarca las ecuaciones con una llave como es habitual:

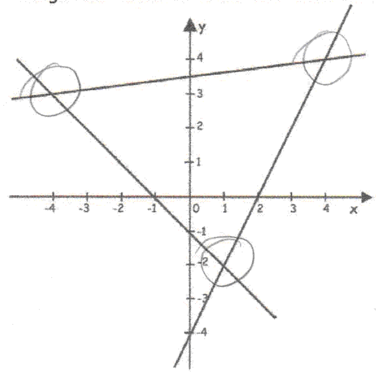
$$1y + 1x = 3$$
$$1y + 1x = 3$$

En la pregunta 12 contesta que "*No, porque el valor 2, 1 es único*". Parecería que pensó, al igual que en la pregunta 1, que la solución de un sistema es única. Nos preguntamos si lo que le lleva a decir que la solución es única es la presencia de un par solución en concreto, en este caso el (2, 1) que se da en el enunciado del problema.

No responde las preguntas 13 a 16. Para él un sistema de ecuaciones "*Es un conjunto de ecuaciones que sus incógnitas valen para ese conjunto*" y explica que una solución es "*La solución de los valores x y y*". Bruno presenta su respuesta en un modo de pensamiento AA. Aun cuando no halla las palabras más adecuadas para expresarse entendemos que su idea de sistema y de solución de un sistema, son bastante adecuadas para un alumno de su nivel y logró expresarlo a través de su respuesta a la pregunta 4. Parecería que su mayor dificultad consiste en interpretar geométricamente un sistema y en articular los modos de pensamientos necesarios para ello. Como ya señalamos, la capacidad de enunciar una definición personal de los conceptos no refleja necesariamente que el alumno posea una rica imagen del concepto que es lo que habitualmente se consulta para resolver las tareas.

El trabajo de Gagge (15 años, alumna de la Prof. Cristina) nos resultó muy interesante. Ella sabe que un sistema de ecuaciones lineales 2x2, que son los que ha estudiado, tiene una solución, infinitas o ninguna. Entonces responde en la pregunta 1 que el sistema tiene infinitas soluciones, ya que por la gráfica que se presenta no puede tratarse de solución única, ni de un sistema sin solución. Vemos su respuesta en la siguiente imagen:

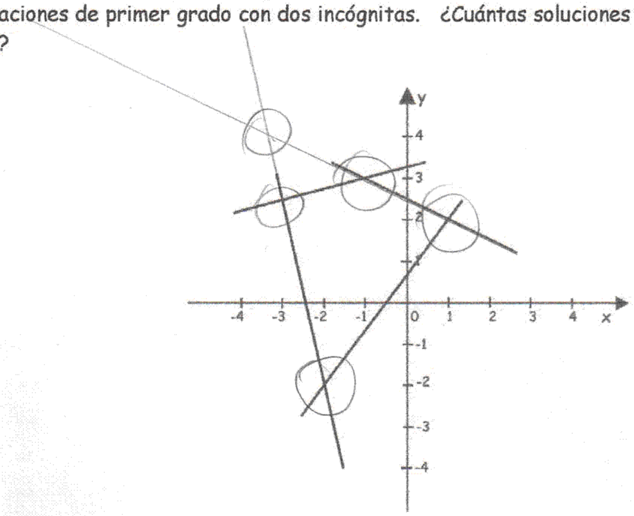
1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



(*) El sistema tiene infinitas soluciones ya que las 3 rectas se cortan más de una vez, xque si se cortaran una vez → 1 solución
· nunca → no hay solución.

La pregunta 2 parece hacerla entrar en conflicto con lo que ha respondido anteriormente, pues ahora contesta que el sistema no tiene solución. A continuación presentamos su trabajo:

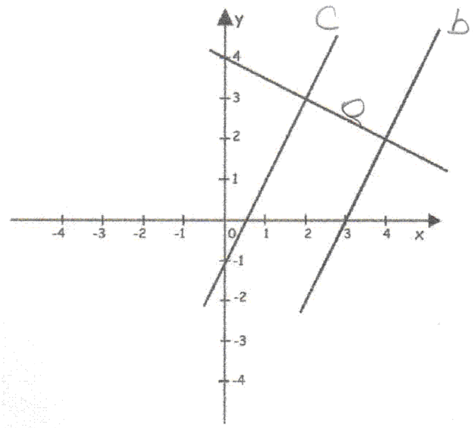
2) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de cuatro ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



El sistema no tiene ninguna solución en común, ya que las únicas posibilidades son que tenga 1 solución, ninguna, o infinitas no puede ser que tenga 5 soluciones.

En la pregunta 3, reafirma la idea manifestada en la pregunta 2 y realiza una interesante reflexión acerca de cómo interpretar el sistema. Veamos su respuesta:

3) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



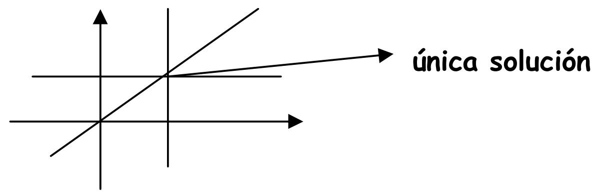
(*) El sistema no tiene ninguna solución ya que hay 2 rectas que son paralelas (y ahí no hay duda que no hay solución), luego hay otra recta que corta dos veces, una vez en cada recta, esto quiere decir que "c" con "a" formarían un sistema con una única solución y a y b otra. Pero los tres juntos no tienen solución.

Gagge logra un pensamiento reflexivo, poniendo en juego propiedades que fueron vistas en clase como el número de soluciones posibles de un sistema de ecuaciones lineales y la noción de que el punto solución debe ser común a todas las rectas. Si bien responde mal la pregunta 1, a diferencia de otros estudiantes, cambia de opinión al contestar las preguntas 2 y 3. En este caso no se inhibieron los procesos reflexivos que la llevaron a un modo de pensamiento AE. Creemos que este modo de pensamiento fue favorecido porque poseía una imagen rica del concepto solución, tanto en lo que refiere al número de soluciones de un sistema (que fue lo que evocó en 2) como a la propiedad que debe cumplir el punto de intersección de las rectas para ser interpretado como solución de un sistema.

En la pregunta 4 realiza una combinación lineal de las tres ecuaciones dadas y obtiene

x = -2. Sustituye este valor en la ecuación 1 y determina y = 0, con un error operatorio al despejar la incógnita. Sustituye estos valores en la ecuación 3 y como no la verifican, responde que el sistema no tiene solución.

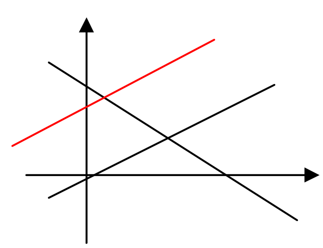
En la pregunta 5 parte a) maneja con seguridad que un sistema puede tener solución única porque "*las rectas se pueden cortar todas en un mismo punto*" y presenta una figura como la siguiente:



En la parte b) contesta "*No, es imposible ya que esa posibilidad no se puede manejar, puede tener 1, ninguna o infinitas*". En la parte c) justifica de igual forma que en b). En la parte d) contesta que "*Sí puede tener infinitas soluciones, si estas son paralelas coincidentes*". En la redacción que realiza parecería tratar a las rectas como soluciones.

En la parte e) responde "*Sí puede tener ninguna solución y en este caso las rectas serían paralelas*". Obsérvese que si bien ella ya ha aceptado otras configuraciones geométricas como casos de sistemas sin solución, cuando trabajó en las preguntas anteriores, en este caso señala que las rectas serían paralelas. Creemos que es consecuencia de tratar el caso de un sistema sin solución en el ámbito de los sistemas 2x2 exclusivamente, ya que la única configuración gráfica de sistemas sin solución, en este ámbito, es la de rectas paralelas.

En la pregunta 6 incorpora otra configuración posible para el caso de un sistema sin solución, presentando una figura similar a la siguiente, donde agrega la recta representada en rojo:



Dice que es posible hacerlo con "*una recta que no corte la coordenada de puntos que cortan las rectas ya dibujadas*" refiriéndose a que la recta a trazar no puede pasar por el punto de corte de las rectas dadas.

En la pregunta 7 presenta rectas concurrentes y en la pregunta 8 contesta que no es posible ya que el sistema puede tener una solución, ninguna o infinitas. Volvemos a reiterar la importancia de este concepto que en varios casos ayudó a los estudiantes a reflexionar ante las situaciones planteadas. Responde 9 y 10 correctamente.

Sorprende la solvencia de esta estudiante al responder la pregunta 11, ya que al igual que Marcelo (15 años, alumno de la Prof. Martina), se asegura que el sistema que presenta tenga solamente la solución pedida. Ella lo hace de la siguiente manera:

11) Presenta un sistema de ecuaciones de primer grado que tenga como solución única el par (2, 1). Explica cómo lo haces.

$$\begin{cases} 3x + 1y = 7 \\ -8x + 1y = 17 \end{cases}$$

* primero pense 2 numeros cualquiera los cuales multiplicados uno por "x" y el otro por "y", y luego sumados me dieron el numero que iba a poner despues de la igualdad.

* Despues busque otros numeros que luego resolviendo la ecuación no me dieran → $0y + 0x = 0$, o que no me diera una igualdad. Para buscar estos numeros hice lo mismo que en la ecuación 1.

En la pregunta 12 plantea el siguiente sistema:

12) ¿Puede un sistema de ecuaciones de primer grado tener como solución el par (2, 1) y además otras soluciones?
Si tu respuesta es negativa explica por qué no es posible y si tu respuesta es afirmativa presenta un ejemplo explicando cómo consigues obtenerlo.

Si puede y en ese caso las soluciones serian infinitas ej:

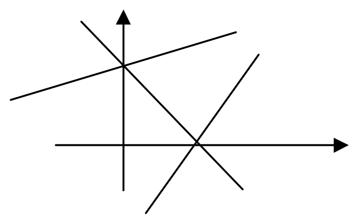
$$\begin{cases} 3x + 1y = 7 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$$

Gagge contesta la pregunta 13 diciendo que no es posible "*porque en ese punto no se cruzan las rectas*". Si bien debería haber dicho que las rectas no pueden cortarse en ese punto ya que éste no pertenece a la recta dada, creemos que por su respuesta relaciona correctamente la idea de punto perteneciente a una recta con solución de una ecuación.

En la pregunta 14 responde que "*Solamente esos dos pares no, tendría esos dos y además muchos más (infinitos)*". Esta estudiante manifiesta comprender claramente la consigna 15, muchos estudiantes pensaron que era igual a la 14, ella expresamente destaca que se pide que "*entre sus soluciones*" tenga a (2, 1) y dice que la forma de lograrlo es considerar una recta paralela coincidente con la dada. A la pregunta 16 no agrega nada, solamente dice que ya contestó esta pregunta (recordemos que es la misma pregunta que la 5). En 17 dice que un sistema de ecuaciones son "*Operaciones matemáticas las cuales contienen incógnitas y a partir de soluciones obtenemos dos pares de puntos y dos números que verifican esas operaciones*". La explicación que da parece describir el proceso que se realizó en clase cuando frente a una ecuación se buscaban soluciones de la misma que luego interpretábamos como puntos que nos permitían obtener gráficamente la recta asociada a la ecuación. Para esta estudiante una solución de un sistema "*Es el par de puntos, los cuales nos permiten formar una recta y así graficarlos en los ejes de las `x´ y las `y´* ". Parece referirse a solución de una ecuación y no de un sistema. Fundamentalmente, manifiesta un modo de pensamiento geométrico, identificando las soluciones con puntos, aunque también presenta rasgos de un pensamiento analítico-aritmético mencionando que esos puntos tienen x e y. En el caso de esta estudiante no apreciamos una buena definición personal de los conceptos sistema y solución, sin embargo, logra un buen desempeño en su trabajo. Creemos que la justificación de esto se encuentra en que posee una rica imagen asociada a estos conceptos, pudiendo establecer conexiones entre las piezas de información que posee dicha imagen y que le permiten diferentes miradas de los objetos matemáticos. Podemos observar esto cuando responde qué es solución de un sistema: es capaz de describir cómo esos puntos que tienen una x y una y, forman una recta.

Flor (17 años) contestó a la pregunta 1 que el sistema "*Tiene dos soluciones porq´ tenés dos incógnitas*". Cuatro estudiantes de este nivel dieron este tipo de respuesta. Responde lo mismo en las preguntas 2 y 3. En la pregunta 4, realiza una combinación lineal de las ecuaciones 1 y 2, obteniendo otra ecuación con dos incógnitas. Luego realiza otra combinación lineal de esta última ecuación obtenida, con la ecuación 3, determinando $y = 12$. Sustituyendo y en la ecuación determina $x = -10$. Contesta, sin explicar, que el sistema es indeterminado, que tiene infinitas soluciones.

En la pregunta 5 parte a) reitera que un sistema no puede tener solución única, que si tiene dos incógnitas tiene dos soluciones. Todavía no es claro a qué se refiere con esas dos soluciones. Quizás al igual que la anterior estudiante que reportamos, piensa que esas dos soluciones son las dos componentes de una solución. En b) responde que sí y presenta la siguiente figura:



Responde escuetamente en c) que no, en d) que sí y en e) que sí. No presenta figuras. En la pregunta 6 identifica el punto de corte de las rectas como indicador de solución. Contesta que "*No, al tener ya esas dos rectas ya tenés solución*". Responde en 7 "*No sé*" y en 8 que no, sin dar explicaciones. En 9 contesta que no sabe. No responde 10. En la pregunta 11 presenta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

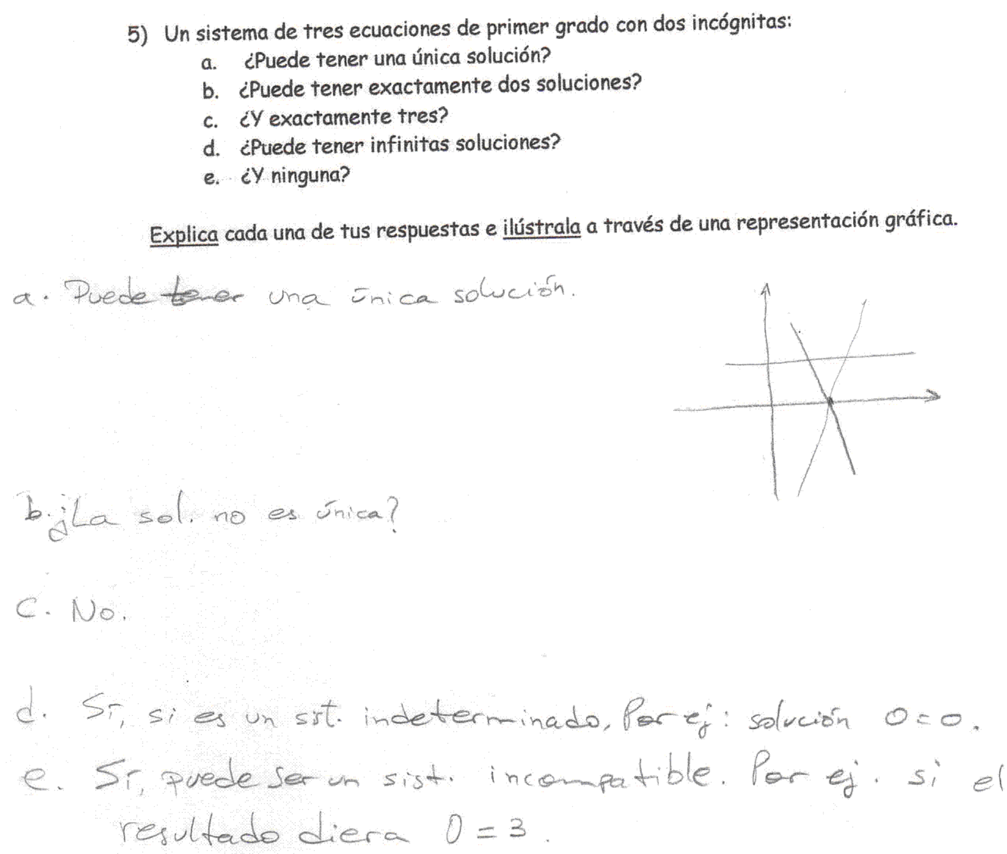
explicando que "*Lo hacés escribiendo la incógnita x por ejemplo sabiendo que vale 2 y la y sabiendo que vale 1 y de ahí sacás los resultados*".

En la pregunta 12 contesta "*No*", sin dar explicaciones. En la pregunta 13 contesta que "*No, tendrían q´tener intersección en ese punto y no hay*". Por su respuesta identifica que para que haya solución las rectas deben ser secantes en ese punto. En 14 y 15 responde que no, sin explicar. Contesta la pregunta 16 igual que lo hizo en 5. Explica en la pregunta 17 que "*Un sistema de ecuaciones, es la intersección de dos o más rectas, cuando necesitás hallar un punto, con una o más incógnitas según el sistema*".

Parecería interpretar que un sistema es su solución y para ella "*la solución es un punto*". Aquí no está claro si con *un* se refiere al objeto punto en forma genérica o si está diciendo que la solución tiene que ser *sólo un* punto. Planteamos esta duda basadas en que si bien sabe que un sistema puede tener infinitas soluciones como lo manifestó en algunas de sus respuestas (4 y 5d), en ningún momento de la secuencia planteó la representación gráfica de un sistema con infinitas soluciones y al estar dando su respuesta en un modo geométrico, quizás sólo conciba en este modo de pensamiento el caso de solución única.

Sebastián (18 años) responde a la pregunta 1 diciendo que el sistema "*Tiene dos soluciones ya que son sus raíces*". Pensamos que confunde el concepto de raíz de una función con el concepto solución de un sistema. Con esas dos raíces se está refiriendo a los dos puntos de corte donde dos de las rectas dadas cortan al eje horizontal. Como los alumnos sitúan su atención en estos puntos cuando interpretan gráficamente las raíces de una función, podría ser que este alumno se refiera a esos dos puntos de corte cuando dice que hay dos soluciones. En 2 contesta lo mismo pero en la pregunta 3 dice que hay "*tres soluciones porque se anulan en tres puntos*". No sabemos a qué está haciendo referencia. En la pregunta 4 realiza una combinación lineal de las ecuaciones 1 y 2 y obtiene x = -3. Luego sustituye este valor en la ecuación 3 y halla y = 7/2 y hace lo mismo en la ecuación 1, obteniendo y = 5. No responde verbalmente a la pregunta.

Veamos la respuesta que da a la pregunta 5:



5) Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:
   a. ¿Puede tener una única solución?
   b. ¿Puede tener exactamente dos soluciones?
   c. ¿Y exactamente tres?
   d. ¿Puede tener infinitas soluciones?
   e. ¿Y ninguna?

Explica cada una de tus respuestas e ilústrala a través de una representación gráfica.

a. Puede ~~tener~~ una única solución.

b. ¿La sol. no es única?

c. No.

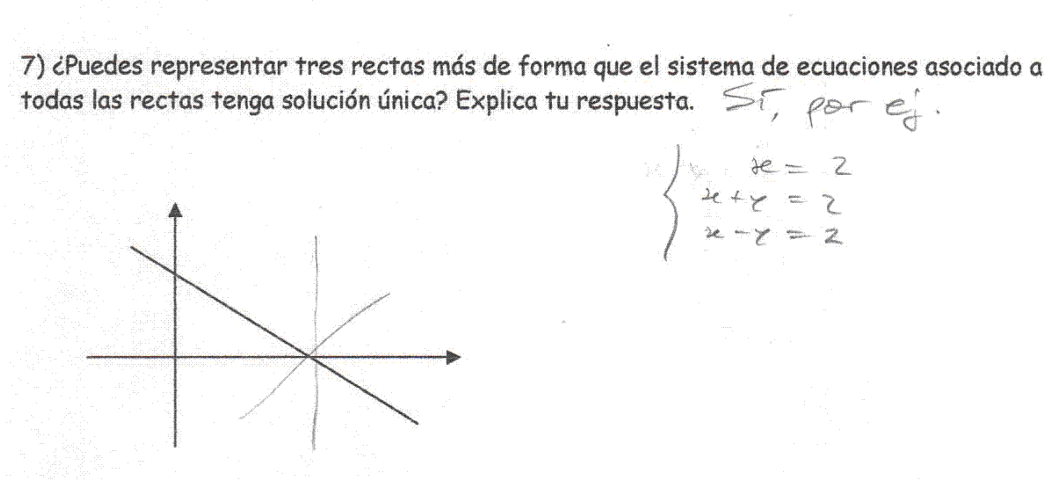
d. Sí, si es un sist. indeterminado, Por ej: solución 0=0.

e. Sí, puede ser un sist. incompatible. Por ej. si el resultado diera 0 = 3.

La figura que presenta en la parte a) refuerza la interpretación que hicimos en la pregunta 1, donde confunde raíz de una función con solución de un sistema. Manifiesta a través de sus respuestas un pensamiento inconsistente como por ejemplo lo que contesta en b) y en d), donde por un lado parece creer que la solución de un sistema es única y luego dice que puede haber infinitas soluciones. Obsérvese cómo logra interpretar las partes d) y e) en un modo de pensamiento AA pero no en un modo SG.

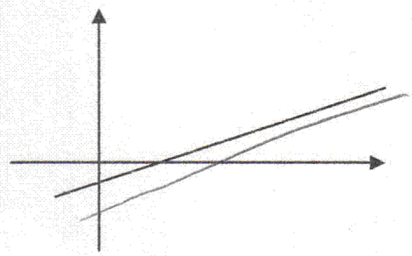
En la pregunta 6 contesta que "*No, ya que siempre va a haber solución en el sistema*". No sabemos si está situando su atención en el punto de corte de las rectas dadas o en los cortes de ellas con el eje horizontal.

En la pregunta 7 volvemos a confirmar nuestra interpretación dada en 1 ya que si bien presenta un conjunto de rectas concurrentes, éstas lo hacen en el punto de coordenadas (2, 0) que es justamente la solución del sistema que presenta. Vemos su trabajo a continuación:



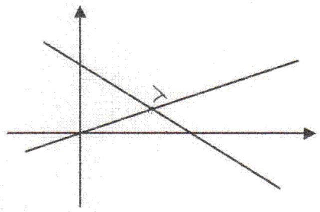
En la pregunta 8 agrega una recta que parece ser paralela a la dada pero creemos que como sitúa su atención en los cortes con el eje horizontal está viendo dos soluciones.

8) ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a las dos rectas tenga solamente dos soluciones? Explica tu respuesta. Si,

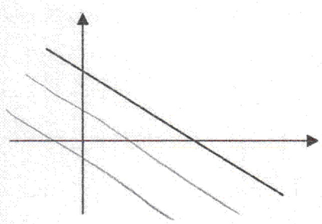


Tanto las respuestas dadas en 9 como en 10 son coherentes con la interpretación que realizamos. En cada caso adapta su respuesta a la situación planteada asegurando que haya infinitos cortes con el eje horizontal (ya que para él son las soluciones del sistema), ya sea por medio de un haz propio o de uno impropio. A continuación se presentan sus respuestas.

9) ¿Puedes representar una recta más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas tenga infinitas soluciones? Explica tu respuesta. Con una recta más creo que no bastaría para que tenga infinitas soluciones. Habría que modificar las ecuaciones. Se puede expreser como un haz propio de centro λ.



10) ¿Puedes representar dos rectas más de forma que el sistema de ecuaciones asociado a todas las rectas tenga infinitas soluciones? Explica tu respuesta. Sí, sería un haz impropio, Siendo las rectas paralelas.



En 11 presenta un sistema que no tiene la solución pedida:

$$\begin{cases} x = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

En la pregunta 12 responde que "*No es posible porque son de 1er. grado*". Aquí podría estar pensando en que una función de primer grado siempre tiene una sola raíz.

En la pregunta 13 contesta que "*Si es un haz impropio*". Quizás esté pensando en una recta paralela a la dada que pase por el punto de coordenadas (3, 4) y crea que de esa forma este par se constituye en solución del sistema. En 14 responde que "*No*" y en 15 que "*Sí*" sin dar explicaciones. En la pregunta 16 responde a todos los ítemes que "*Sí*" agregando en d) que es un sistema indeterminado y en e) que el sistema es incompatible.

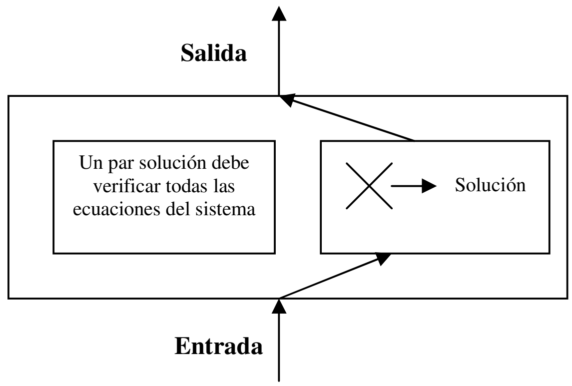
Para él "*Un sistema de ecuaciones es una agrupación de ecuaciones que pueden tener la misma solución, infinitas soluciones o ninguna*" y dice que "*La solución de un sistema es donde las ecuaciones del sistema se anulan*". Creemos que sus respuestas son coherentes con la interpretación que hace a lo largo del cuestionario. El estudiante trata de adaptar los conocimientos que tiene sobre sistemas de ecuaciones a la concepción de solución como raíz de una función.

4. 3 Análisis global

En primer lugar queremos destacar la riqueza de los trabajos de los estudiantes, la multiplicidad de puntos de vista y las distintas interpretaciones que realizaron de las situaciones que se les plantearon. Sin duda nos permitirán tener una visión amplia y rica de sus procesos de pensamiento.

Ya en las interpretaciones de los trabajos de los estudiantes, hicimos referencia a los conceptos teóricos que dan marco a nuestro trabajo. Lo que haremos en esta sección es una profundización de las observaciones y una síntesis, tratando de rescatar, por un lado las nociones que favorecen el entendimiento del concepto solución de un sistema y por otro, las dificultades u obstáculos que creemos necesarios vencer para alcanzar una mejor comprensión del concepto en cuestión.

A priori señalamos que para los estudiantes sería un problema identificar punto de corte de rectas con punto solución. En efecto, esto condujo a varios estudiantes a responder que los sistemas de las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario tenían solución. El problema de los alumnos con estas preguntas es que están planteadas en el modo geométrico. Esta forma de presentación podría inhibir los procesos de análisis necesarios para dar una respuesta correcta, llevando al alumno a dar una respuesta de corte intuitivo basada en la imagen del concepto que posee la noción de solución como corte de dos rectas. El siguiente esquema, basado en los que se presentan en Vinner (1991), modela alguna de las situaciones que ocurren:



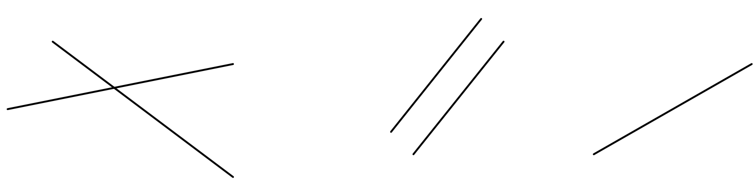
Respuesta intuitiva

Como podemos observar, aún cuando el alumno posea una definición personal del concepto, no es lo que consulta para dar una respuesta.

Observamos que cuando la situación de la pregunta 1 es presentada en el modo AA, los alumnos tienden a verificar si los pares que encontraron por combinaciones lineales y sustituciones verifican las tres ecuaciones. Pensamos que la noción de verificación en el modo SG, entendida a través de la relación de pertenencia, no ha sido construida. Se suma a esto que la noción de verificación aparece usualmente ligada al modo AA, a través de la clásica consigna "Resuelve y verifica" que aparece tanto en las prácticas de aula como en los libros de texto.

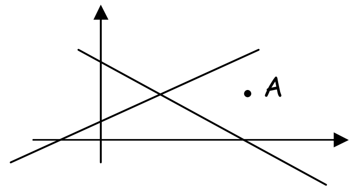
Para reforzar la noción de solución como par ordenado que verifica todas las ecuaciones del sistema, los profesores piden a sus alumnos la verificación, pero esta práctica no aparece en el modo geométrico de pensamiento, veamos por qué.

En el modo geométrico y en el ámbito de los sistemas 2x2, las representaciones gráficas posibles son, como ya sabemos, las siguientes:



En estos casos no hay nada que verificar, ya que resulta obvio lo que sucede con el conjunto solución.

No son habituales en el modo geométrico prácticas con ejercicios como el siguiente, donde se pregunte a los alumnos si las coordenadas de A son solución del sistema.



En consecuencia en el modo SG no se verifica. La noción de verificación en el modo SG utiliza la relación de pertenencia. Actividades como la presentada más arriba permiten articular la noción de pertenencia, con la noción de sistema y de solución de un sistema.

Recordemos que la relación de pertenencia contribuyó a una adecuada interpretación del concepto solución. Nos referimos a que la pertenencia o no de un punto a una recta ayudó a varios estudiantes a distinguir si las coordenadas de un punto podían ser o no solución de la ecuación asociada a la recta. Inclusive esto permitió a algunos estudiantes cambiar de opinión cuando interpretaban cualquier punto de corte de dos rectas como solución del sistema.

El ver el punto de corte como solución del sistema, no interfirió en una correcta interpretación de las situaciones cuando este punto de corte tenía asignada una propiedad: la de ser *común*, *un* punto (aludiendo unicidad) o la de ser un *mismo* punto para todas las rectas. Pudieron hacer esta distinción los estudiantes que manifestaron versatilidad entre los modos de pensamiento SG y AA, asociando rectas con ecuaciones, punto *común* con la necesidad de que se verificaran todas las ecuaciones asociadas a las rectas dadas pero también alumnos que utilizaron fundamentalmente un modo de pensamiento SG y conocen bien las posiciones relativas de dos rectas en el plano, asociándolas con el número de soluciones posibles de un sistema: una sola, infinitas o ninguna. Esto último permite descartar la existencia de un número finito de soluciones mayor que uno. En ambos casos vemos que estos estudiantes recurrieron a propiedades y pudieron relacionarlas con las situaciones presentadas. En este caso se logra una conexión con el modo de pensamiento AE, pues son las propiedades consultadas (número de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales o la propiedad de punto de corte *común*) las que permitieron a los alumnos contestar en forma adecuada.

Los alumnos que identifican cada punto de corte con una solución del sistema, presentando la configuración "triángulo" como el caso de un sistema con tres soluciones, podrían estar teniendo problemas en la conexión entre diferentes modos de pensamiento (ya que la mayoría de ellos responde bien la pregunta 4) o en que el modo de pensamiento AE está bloqueado por falta de un repertorio de propiedades sobre las cuales pueda sostenerse. Como señala Sierpinska (2000) la diferenciación entre conceptos se construye sobre las relaciones de estos conceptos con otros más generales y no usando los ejemplos más comunes. Ante la falta de propiedades a las que recurrir, sólo le resta al alumno evocar la imagen del concepto que comúnmente se le proporciona: la de dos rectas secantes. De aquí que consideremos importante no restringir la enseñanza del concepto solución a los sistemas 2x2 sino presentarlo en un ámbito donde el alumno pueda diferenciarlo de otros casos donde hay intersecciones pero no soluciones.

Los estudiantes evidenciaron dificultades al tener que decidir qué significa un sistema 3x2. Es así que algunos estudiantes señalan en la pregunta 1 que hay solución si tomamos las rectas de a dos o que el sistema tiene tres soluciones pero cada una de ellas es para dos ecuaciones. Con esto nos referimos a que los alumnos dudan si un sistema 3x2 presentado en forma gráfica, es un sistema o son tres sistemas (tomando las ecuaciones de a dos y buscando las soluciones respectivas). Esta misma duda surgió en los estudios exploratorios por parte de un estudiante de matemática de nivel terciario. De forma que parece no ser evidente ni inmediato qué significa un sistema 3x2, ni se hace fácil inferirlo a partir del trabajo en los sistemas 2x2, y tampoco es claro el criterio para poder decidirlo. En el caso de los estudiantes de 14-15 años, con las prácticas habituales que comienzan por la enseñanza de los sistemas 2x2, observan que es un conjunto de dos ecuaciones. Es entendible entonces que frente a un sistema 3x2 duden si también las considerarán de a dos. Como una estudiante del nivel 14-15 años lo manifestó, ella decidió en las preguntas 1, 2 y 3 en base a lo que venía trabajando en su curso, viendo en cada punto de corte una solución o sea tomándolas de a dos.

Otros alumnos hicieron otro tipo de generalización. Sabían que un sistema lineal tiene una única solución, infinitas o ninguna, entonces como el sistema presentado en la pregunta 1 no era de solución única (había más de un corte) ni de solución vacía (había cortes) decidieron que el sistema tenía infinitas. Otros estudiantes en forma similar, pensaron que como en la pregunta 1 había “cortes de rectas” entonces se trataba de un sistema con solución única ya que las rectas no eran ni paralelas ni coincidentes. Es decir que la presencia de rectas que se cortan, sin importar cómo, ya indica un sistema con solución única.

La noción que contribuye a descartar la existencia de únicamente dos soluciones es la de que las rectas no se *curvan* o la idea de que si dos rectas tienen dos puntos en común, tendrán un segmento en común (el determinado por los dos puntos comunes) y de ahí la existencia de infinitos puntos en común y por tanto de infinitas soluciones en común. Como ya comentamos en los trabajos de los estudiantes, no alcanza con que un estudiante sepa que la configuración rectas concurrentes refiere a un sistema con solución única y que el de rectas coincidentes refiere a un sistema con infinitas soluciones, es necesario que descarte la existencia de un número entero de soluciones mayor que 1, para que pueda interpretar correctamente el concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Una forma de superar este problema es dejar de ver tantas soluciones como puntos de corte de las rectas haya y que el alumno interprete adecuadamente esos puntos de corte. Debemos destacar que esta observación cobra sentido cuando salimos del ámbito de los sistemas 2x2. Si un alumno identifica puntos de corte con soluciones, responderá con éxito las tareas al trabajar gráficamente sistemas 2x2, pero basado en una idea que es matemáticamente incorrecta. Es decir que, una idea matemáticamente incorrecta permite al estudiante responder bien cuando trabaja en un ámbito restringido a los sistemas 2x2. A diferencia de lo que manifiesta Brousseau (1983) cuando refiere a que los errores son muchas veces la manifestación de un conocimiento que es correcto en cierto ámbito pero al aplicarlo en otro contexto deja de serlo, aquí tenemos un conocimiento que es matemáticamente incorrecto, que al aplicarlo en el ámbito de los sistemas 2x2 permite resolver las tareas con éxito y que es el ámbito de los sistemas lineales no cuadrados con dos incógnitas el que permite revelarlo. Para aclarar mejor este punto, propondremos otro ejemplo. En Ochoviet (2005) analizamos el problema de la generalización abusiva de la propiedad del producto nulo. En el contexto de los números reales se cumple que si el producto de dos números reales es cero entonces uno u otro es cero. Sin embargo, en el contexto de las matrices no se cumple que si el producto de dos matrices es la matriz nula, una u otra lo es. Un estudiante que conoce la propiedad del producto nulo en el conjunto de los números reales podría aplicarla en el ámbito de las matrices y cometer errores. Se trata entonces de un conocimiento correcto (propiedad del producto nulo en el conjunto de los números reales) que es aplicado en un contexto donde no es válido (el de las matrices) y conduce a errores. En el caso que nos ocupa, un estudiante puede tener la idea matemáticamente incorrecta de que una solución de un sistema es un punto de corte de dos rectas (la idea correcta es que el punto indica una solución de un sistema si pertenece a todas las rectas del sistema) y aplicándolo a sistemas 2x2 no tendrá mayores problemas al resolver las tareas que requieran identificar el número de soluciones de un sistema.

Fundamentalmente en los alumnos del nivel 17-18 años aparecen otras problemáticas como la de relacionar el número de soluciones del sistema con el grado de las ecuaciones. Es así que algunos estudiantes dicen que como el sistema es de primer grado puede tener una sola solución, sin hacer mención a los casos de no solución o de infinitas.

En otros casos, el no ver la solución como un par ordenado y no tener claro las diferentes posibilidades de solución de un sistema, llevó a los estudiantes a decir que hay dos soluciones porque son dos incógnitas.

Algunos estudiantes de este nivel también afirman que un sistema puede tener infinitas soluciones si es paramétrico pero parecerían no concebir la existencia de sistemas indeterminados que no sean paramétricos. Los alumnos parecen tratar a estos sistemas como un caso especial y no los relacionan con los sistemas que no tienen parámetro.

En este nivel también apareció la confusión entre solución de un sistema y raíces de una función. Esto llevó a algunos estudiantes a identificar las soluciones del sistema con los puntos de corte de las rectas dadas, con el eje horizontal, tal como lo reportaron Eslava y Villegas (1998). Tengamos también presente que en Uruguay es muy común utilizar la palabra raíz de un sistema como sinónimo de solución.

En este nivel se presentaron errores provenientes de interpretar en forma inadecuada las representaciones de los objetos geométricos. Para que no existiera solución algunos alumnos representaron rectas que “parecen” no cortarse o de las cuales no se “ve” el punto de corte. De aquí que sea importante trabajar con los estudiantes en el entendimiento de estas representaciones y de sus limitaciones, que sin duda será apoyado por el trabajo con las posiciones relativas de dos o más rectas en el plano.

En cuanto a la noción de sistema y de solución de un sistema que los estudiantes explicitan en las preguntas 17 y 18, observamos que el trabajo de los estudiantes a lo largo de la secuencia no guarda demasiada relación con lo que ellos logran verbalizar. Hubo alumnos que lograron dar muy buenas definiciones personales pero su trabajo en la secuencia no fue bueno u otros que no logran verbalizar buenas definiciones de los objetos sistema y solución, sin embargo realizan buenos trabajos en la secuencia. Por ejemplo, que un alumno diga que una solución de un sistema debe verificar todas las ecuaciones del mismo, no significa que logre evocar o aplicar esto al enfrentar las actividades. Como ya señalamos anteriormente, compartimos con Giraldo et al. (2002), que la capacidad de recordar definiciones formales no está necesariamente asociada a una rica imagen del concepto. En este caso no hablaremos de definiciones formales ya que éstas no se presentan a los alumnos de 14-15 pero sí podemos hablar de que varios alumnos tienen buenas definiciones personales de los conceptos. Como lo puntualiza Vinner (1991), cuando los alumnos enfrentan una tarea matemática consultarán en primer lugar a la imagen para dar una respuesta ya que este es el proceso natural de pensamiento. Si esta imagen es incompleta o si el estudiante no puede establecer relaciones entre las diferentes piezas de información, no podrá contestar adecuadamente. Como afirma Thurston (1990, referido en Giraldo et al. 2002), el entendimiento de la matemática involucra procesos mentales de compresión de ideas que puedan ser evocadas y usadas. De esta forma la estructura cognitiva asociada al concepto solución no contendría solamente la definición personal del alumno sino que éste tendría la capacidad de evocar y relacionar las diferentes piezas de información que contiene la imagen del concepto. Creemos que es posible alcanzar esto si durante la enseñanza del concepto se favorecen las diferentes miradas de los objetos matemáticos, a través de actividades apropiadas que permitan por un lado la explicitación de los conceptos en diferentes modos de pensamiento y por otro, hagan hincapié en la conexión entre ellos.

Destacamos que el concepto sistema de ecuaciones aparece notoriamente asociado a algo que se resuelve, problemática abordada por Segura (2004). Pensamos que es consecuencia de no hacer énfasis en la noción de solución separadamente de la enseñanza de los métodos de resolución o de un excesivo hincapié en actividades del tipo "Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones".

En cuanto a las preguntas que ayudaron a los estudiantes a comprender mejor el concepto de solución de un sistema, jerarquizamos a las preguntas 5 y 6 como aquellas que permitieron a los estudiantes recapacitar sobre lo hecho y lograr una mejor comprensión del concepto solución de un sistema.

En el caso de la pregunta 5, creemos que la forma en que está presentada requiere de procesos de análisis que implican un modo de pensamiento AE, pues al no tener ecuaciones, ni gráficas, los estudiantes deben pensar en propiedades para luego interpretarlas gráficamente y presentar el dibujo que se les pide.

En el caso de la pregunta 6, es el estudiante el que debe agregar una recta para que el sistema no tenga solución en lugar de estar todas las rectas dadas como en el caso de las preguntas 1, 2 y 3. Creemos que esto inhibe la inmediatez de una respuesta bloqueando la intuición y requiriendo del alumno un análisis de la situación que le implica una reconstrucción racional en base a las propiedades del concepto.

Nos centraremos ahora en los aspectos que actúan como dificultades u obstáculos en la comprensión del concepto solución de un sistema.

Observamos que resultó muy difícil para los estudiantes incorporar una configuración gráfica distinta de la de rectas paralelas para un sistema sin solución. Aun cuando algunos estudiantes saben que la configuración “triángulo” corresponde a un sistema de este tipo, al momento de dar un ejemplo presentan el de rectas paralelas. Pensamos que esto se debe a los efectos pedagógicos de comenzar el estudio de los sistemas lineales por el caso 2x2 y de la importancia de los primeros ejemplos y no-ejemplos en la formación de la imagen asociada al concepto solución.

La noción de solución asociada meramente a punto de corte constituye un obstáculo. Los alumnos que muestran una buena coordinación entre los modos de pensamiento SG y AA pueden superar esta dificultad, en virtud de que al trabajar en forma algebraica la mayoría de los alumnos sabe que una solución verifica todas las ecuaciones. Poder asociar recta con ecuación y punto con par ordenado de números reales ayudaría a los estudiantes a superar este problema. Otra posibilidad es que los alumnos logren evocar propiedades referentes al concepto solución (como la de punto *común* o *único* o tener en cuenta el número posible de soluciones para un sistema) y ya desde un modo AE contesten correctamente la pregunta. Esto solamente es posible si al alumno se le han proporcionado experiencias a partir de las cuales pueda construir ese repertorio de propiedades.

La idea de asociar solución con punto de corte, creemos que es consecuencia de enfocar la enseñanza de los sistemas comenzando por el caso 2x2. En este caso se cumple que solución equivale a punto de corte, pero la idea que se está construyendo es matemáticamente incorrecta y es el contexto el que no permite revelarlo. Un cambio de contexto permitió evidenciarlo. Inclusive un alumno con este error, trabajando en el ámbito de los sistemas 3x2, es capaz de presentar ejemplos correctos para el caso de sistemas con solución única, con infinitas soluciones y de sistemas sin solución, recurriendo a rectas paralelas. Actividades novedosas como las propuestas en el cuestionario permitieron evidenciar el error.

Como ya comentamos, no alcanza con que un estudiante sepa gráficamente en qué caso un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única o tiene infinitas, también es necesario que rechace que no puede existir un número entero de soluciones mayor que uno. Si no logra hacer esto, puede continuar construyendo configuraciones gráficas de sistemas con tantas soluciones como se desee. El estudiante no solamente debe saber lo que puede ser sino rechazar lo que no puede ser.

Otra dificultad aparece en la falta de elementos de los estudiantes para poder decidir cómo interpretar un sistema de más de dos ecuaciones cuando éste está dado en forma gráfica. Surgen interrogantes como: ¿Podría ser que solución se definiera de otra forma? ¿Serán soluciones los cortes de las rectas tomadas de a dos? Un sistema 3x2, ¿es un sistema o son tres sistemas?

Estas mismas dudas, en general, no aparecen cuando el sistema está dado en forma algebraica. La mayoría de los estudiantes verifica que el par o los pares encontrados por algún procedimiento verifiquen todas las ecuaciones. No sabemos si esto es porque los alumnos no saben usar la relación de pertenencia como condición gráfica equivalente a la de verificar si las coordenadas de un punto dado son o no solución de la ecuación asociada a la recta dada o porque están más acostumbrados a trabajar en forma algebraica. Sostenemos que cada modo de pensamiento tiene asociadas determinadas rutinas que en algunos casos bloquean a los alumnos y en otras los conducen al éxito, dependiendo del modo en que esté presentada la actividad y de lo que ésta requiera del alumno. Cuando hablamos de rutinas asociadas nos referimos a las prácticas habituales de enseñanza.

En el modo SG se grafican las dos rectas dadas y se observa si son secantes, paralelas distintas o coincidentes. Una vez abordados los métodos algebraicos ya no se grafica más. Recordemos que la excusa para introducir los métodos algebraicos es la imprecisión del método gráfico. En el modo SG no se verifica.

En el modo AA, se resuelven sistemas por diferentes métodos algebraicos. Se privilegian los sistemas con solución única. Se verifica el par solución en las dos ecuaciones dadas ante la clásica consigna "Resuelve y verifica".

De forma que, dependiendo del modo en que esté presentado el problema, es de esperar que cuando el alumno lo enfrente utilice las rutinas que habitualmente practica en ese modo. Esto explicaría por qué la mayoría de los estudiantes verificaron si el par que obtenían en la pregunta 4 a través de manipulaciones algebraicas verificaba todas las ecuaciones del sistema: en el modo AA se verifica.

Como los docentes abandonan la interpretación geométrica una vez que son introducidos los métodos algebraicos, es natural que en la pregunta 4 los estudiantes que no supieron resolverla algebraicamente, no hayan recurrido al método gráfico.

Otra dificultad radica en la interpretación de las representaciones, saber que la recta “no termina” donde acaba su representación es relevante para poder reflexionar geométricamente la solución de un sistema.

Una dificultad que evidenciaron solamente los estudiantes del nivel 17-18 años fue la de asociar número de soluciones con número de incógnitas o número de soluciones con el grado de las ecuaciones o confundir el número de soluciones con la cantidad de cortes de las rectas dadas, con el eje horizontal. Parecería necesario, al menos en este nivel, diferenciar raíz de una función de raíz de un sistema. Creemos oportuno analizar, explícitamente, qué relación existe entre estos puntos de corte con el eje horizontal y el sistema, descartándolos como soluciones en los casos que no corresponden.

CAPÍTULO V

Conclusiones y recomendaciones didácticas que surgen del primer objetivo

5. 1 Conclusiones referidas al primer objetivo de la investigación

Los estudios que realizamos sugieren que el concepto de sistema y de solución de un sistema que los estudiantes construyen está fuertemente influenciado por el significado que tienen estos conceptos en el ámbito de los sistemas lineales 2x2. En muchos casos, estos significados obstaculizan visiones más generales de estos conceptos, aun cuando los alumnos han avanzado en sus estudios y han estudiado matrices, determinantes y sistemas con cualquier número de ecuaciones e incógnitas. Las creencias que más persisten son las de interpretar punto de corte como solución del sistema y concebir un conjunto de rectas paralelas como única configuración gráfica de un sistema sin solución.

Para explicar el concepto de sistema y de solución que los alumnos construyen diferenciaremos lo que los estudiantes explicitan como definiciones de lo que los estudiantes hacen al resolver tareas. Cuando los alumnos deben explicitar qué es un sistema de ecuaciones hablan de un conjunto de ecuaciones asociado generalmente con la idea de algo que se resuelve y a condiciones que se deben verificar para los mismos valores de las incógnitas. En general, manifiestan que una solución de un sistema debe verificar todas las ecuaciones del mismo, expresándolo de diferentes maneras y de acuerdo al vocabulario que el alumno dispone.

Las definiciones personales que los alumnos verbalizan no siempre guardan relación con el trabajo que realizan en las distintas preguntas del cuestionario. Hay quienes expresan muy bien el significado de sistema y de solución y su trabajo en el cuestionario es pobre, y hay quienes realizan buenas interpretaciones y sin embargo no logran explicitar buenas definiciones personales de estos conceptos. Consideramos que el éxito de los estudiantes radica en la riqueza de la imagen que posean y de la versatilidad que logren entre los diferentes modos de pensamiento.

La noción de solución de una ecuación como aquel par que convierte a la ecuación en una igualdad numérica permitió a los estudiantes distinguir los pares que *verifican* de los que *no verifican* pudiendo así detectar los que son soluciones.

En cuanto a lo que los alumnos hacen, observamos que al momento de interpretar un sistema 3x2 que está dado en forma algebraica la gran mayoría de los alumnos verifican que el par de números reales que han obtenido considerando, en general, dos de las ecuaciones, verifique las restantes. Pero cuando deben interpretar sistemas 3x2 o 4x2, que están dados en forma gráfica, no pueden articular adecuadamente el modo de pensamiento analítico-aritmético con el sintético-geométrico e interpretan cada punto de corte de las rectas dadas como una solución de un sistema. Al no contar con las ecuaciones de cada recta no pueden concretar la verificación de cada par en cada ecuación y pierden de vista la condición de verificar todas las ecuaciones del sistema. No todos los estudiantes interpretan en cada punto un par ordenado de números reales y en cada recta una ecuación. Esto impide un adecuado tránsito entre dos modos de pensamiento que les ayudaría a realizar una mejor interpretación de las situaciones.

La presentación de la pregunta en un modo geométrico hace que los estudiantes den respuestas intuitivas bloqueando procesos de análisis que implicarían otros modos de pensamiento, ya viendo las rectas como ecuaciones o pensando en las propiedades que debe tener un punto de corte de rectas para ser solución de un sistema.

Además de la problemática reseñada, observamos que los estudiantes responden utilizando aspectos de la imagen del concepto que han construido en el ámbito de los sistemas 2x2. Nos referimos a presentar rectas paralelas como la única configuración gráfica de un sistema sin solución o a identificar punto de corte con solución del sistema o a creer que un sistema es un conjunto de dos ecuaciones.

Los alumnos que tienen éxito al interpretar el número de soluciones de un sistema que está dado en forma gráfica, aun cuando su modo de pensamiento analítico-aritmético es pobre, son los que han logrado construir la noción de solución como punto común o punto de corte único, esto es, recurren a una propiedad asociada a ese punto y por lo tanto a un modo de pensamiento AE. Conocer las posibles posiciones relativas de dos rectas en el plano y su relación con el número de soluciones de un sistema los ayuda en esta interpretación.

En los dos grupos de 14-15 años se observó que los estudiantes conocían sistemas con diferentes tipos de conjuntos solución y sus correspondientes representaciones gráficas. Algunos de ellos pudieron presentar un sistema indeterminado conociendo la característica de las ecuaciones de un sistema de este tipo: una se obtiene de la otra multiplicando por un número real. Valoramos positivamente el trabajo de clase que tenían los dos grupos de este nivel porque conocer que un sistema puede tener una solución, infinitas o ninguna, ayudó a varios de los estudiantes a un cambio de opinión en el sentido deseado. Creemos que por el tipo de trabajo realizado en clase, los alumnos no presentaron mayores problemas para considerar ejemplos de sistemas con infinitas soluciones.

A diferencia de lo reportado por Panizza et al. (1999), la noción de letras como incógnitas no obstaculizó que los alumnos concibieran las infinitas soluciones de una ecuación lineal. Creemos que la diferencia radica en que sus estudiantes, estudiaron primero los sistemas 2x2 y luego ellas observaron si los alumnos le daban sentido a la ecuación lineal. Nuestros estudiantes de 14-15 años trabajaron primero con una ecuación lineal, observaron que tiene infinitas soluciones, vieron formas de obtener cuántas se deseen y observaron su condición gráfica. Luego se introdujo el trabajo con dos ecuaciones.

En el caso de los alumnos de 17-18 años, algunos de ellos manifestaron confusión entre las soluciones del sistema y las raíces de la función lineal. Parecería entonces que la introducción directa del objeto ecuación lineal con dos incógnitas sería más aconsejable que la dupla función lineal-ecuación lineal con dos incógnitas, donde pueden aparecer objetos matemáticos distintos, nominados de la misma forma, como raíz de la función y raíz de un sistema. Por otra parte la función lineal resulta insuficiente para interpretar cualquier recta del plano en virtud de que no abarca el caso de las rectas verticales por no tratarse de gráficas de funciones.

5. 2 Recomendaciones didácticas

Señalaremos además de recomendaciones generales, una serie de aspectos que creemos importante trabajar en clase con el fin de favorecer la construcción de los conceptos de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y de solución de un sistema de ecuaciones lineales, por parte de los estudiantes que se enfrentan por primera vez al aprendizaje de este tema (14-15 años). Cuando hablamos de aspectos a trabajar en clase, no nos estamos refiriendo a un discurso del docente sino a un trabajo en base a actividades que favorezcan el uso y tránsito entre distintos modos de pensamiento, que permitan la discusión entre los estudiantes y entre los estudiantes y el docente, y que habiliten al docente a realizar la explicitación de los diferentes aspectos en los que se centrará la atención.

Dadas las problemáticas que detectamos y las creencias que persisten en los estudiantes aun cuando hayan avanzado en sus estudios y hayan estudiado a los sistemas de ecuaciones lineales desde un punto de vista estructural, recomendamos no comenzar exclusivamente la enseñanza de los sistemas por el caso 2x2, sino presentar a estos sistemas entre tantos otros con dos incógnitas, al menos en las fases de presentación del concepto de sistema, de solución de un sistema y de la discusión del número de soluciones de un sistema con dos incógnitas.

Sugerimos proponer a los estudiantes actividades que los conduzcan a analizar el número de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales y a rechazar las que no puede tener: un número entero mayor que uno.

Este trabajo puede ser apoyado con el análisis de las posiciones relativas de dos, tres o más rectas en el plano, realizando las interpretaciones correspondientes tanto en el modo de pensamiento sintético-geométrico como analítico-aritmético, interpretando los puntos del plano como pares ordenados de números reales, las rectas como ecuaciones y la noción de pertenencia como equivalente geométrica de la verificación aritmética.

Proponemos enriquecer la imagen conceptual de los alumnos referida a un sistema de ecuaciones sin solución. A través del trabajo sugerido anteriormente, los estudiantes tendrán la oportunidad de incorporar otras configuraciones gráficas posibles a este tipo de sistema además de la de rectas paralelas.

Como la noción de sistema aparece asociada a algo que se resuelve, sugerimos atender las recomendaciones anteriores antes de comenzar con los métodos algebraicos de resolución. Al trabajar gráficamente no es necesario hablar de "método gráfico" sino que se recurre a la representación gráfica como un registro más de representación que permite dar una mirada complementaria a los objetos algebraicos.

Se pueden representar gráficamente las rectas dadas por sus ecuaciones y preguntar a los estudiantes si existen pares de números reales que verifican todas las ecuaciones a la vez. No es necesario hacer mención a si se está o no resolviendo un sistema.

Al trabajar en forma gráfica recomendamos tener la precaución de trabajar en los cuatro cuadrantes, eligiendo los ejemplos de forma conveniente.

Recomendamos tener en cuenta que aun cuando el docente explique detenidamente en clase qué es un sistema y qué es solución de un sistema, es necesario proporcionar a los estudiantes las experiencias necesarias para que a partir de ellas vayan extrayendo ejemplos y no-ejemplos de los diferentes conceptos. Nos referimos a que los alumnos pueden repetir las definiciones que el profesor da y no necesariamente resolver las tareas con éxito.

CAPÍTULO VI

Abordaje del segundo objetivo de investigación

6.1 Diseño de una secuencia de enseñanza y de actividades para el aprendizaje del concepto de *solución*

Para elaborar la secuencia de enseñanza y el diseño de actividades para el aprendizaje del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, tendremos en cuenta las recomendaciones que surgen del primer objetivo de esta investigación (Capítulo V) y también, como ya dijimos, las recomendaciones o consideraciones que surgen de otros trabajos de investigación y que consideramos pueden enriquecer el trabajo con los estudiantes, como las de Cutz (2005), Ramírez (2005) y Häggström (en progreso).

Consideramos que un docente no puede remitirse a un "libreto" ni a situaciones didácticas modélicas porque cada profesor tiene un estilo docente, un discurso que lo caracteriza, una manera de relacionarse con sus alumnos, una forma particular de trabajar y de elegir o diseñar las actividades para sus alumnos. Lo que haremos es una sistematización de los aspectos que deberían tenerse en cuenta al momento de introducir los sistemas de ecuaciones y el concepto de solución y proporcionaremos algunas actividades como ejemplos para trabajar en clase dichos aspectos.

A continuación presentamos la secuencia de enseñanza, destacando los aspectos a tener en cuenta en el desarrollo del tema, previo a la introducción de los métodos de resolución:

- La ecuación lineal con dos incógnitas. Qué representan esas dos incógnitas. Las incógnitas se pueden nominar con distintas letras. La ecuación lineal tiene infinitas soluciones. Esas soluciones son parejas ordenadas de números reales. Cada pareja es *una* solución y no dos soluciones. Condición gráfica que cumplen estos pares solución. Obtener pares solución para una ecuación mediante diversos procedimientos: mentalmente, algebraicamente, gráficamente. No toda ecuación es lineal.

- Dada una ecuación lineal con dos incógnitas, investigar si un par dado es o no solución de la ecuación utilizando diferentes representaciones: la algebraica y la gráfica. La relación geométrica de pertenencia entre punto y recta como equivalente a la relación algebraica de par ordenado que verifica la ecuación. Trabajar con puntos en los cuatro cuadrantes.

- Los sistemas de ecuaciones no son presentados únicamente en el ámbito de los sistemas 2x2, sino que se trabaja el concepto solución en diferentes tipos de sistemas lineales con dos incógnitas: con 2, 3 o más ecuaciones. Todavía no se introducen los métodos de resolución algebraicos sino que se trabaja ayudándose de las representaciones geométricas pero también analizando algebraicamente si un sistema dado tiene o no determinado par solución o los alumnos inventan un sistema de ecuaciones que tenga una solución dada. El trabajo no se remite únicamente al caso de solución única, sino que se presentan sistemas con diferente número de soluciones. Este trabajo se realiza acompañado del análisis de las posiciones relativas de 2, 3 o más rectas en el plano, según corresponda. Las configuraciones posibles en cada caso permitirán a los estudiantes analizar que existe un invariante: un sistema de ecuaciones lineales admite solución única, infinitas o ninguna. El estudio de las posiciones relativas de las rectas en el plano permitirá que el alumno tome contacto con diversas configuraciones para un sistema sin solución y que extraiga la configuración característica de un sistema con solución única y la de un sistema con infinitas soluciones: el de rectas concurrentes y el de rectas coincidentes respectivamente. Esto le permitirá situar su atención en el tipo de configuración en lugar de ponerla en los puntos de corte de las rectas si los hubiera.

- Proponer actividades donde explícitamente el alumno deba argumentar por qué un sistema de ecuaciones lineales no puede tener exactamente 2 o 3 soluciones y en general, por qué un sistema no puede admitir un número entero de soluciones mayor que uno. El estudio de las posiciones relativas de las rectas en el plano asociado a la noción de solución de un sistema lo ayudará a descartar las distintas posibilidades, aunque podrá recurrir a otras nociones *sui generis* para dar explicación a esto.

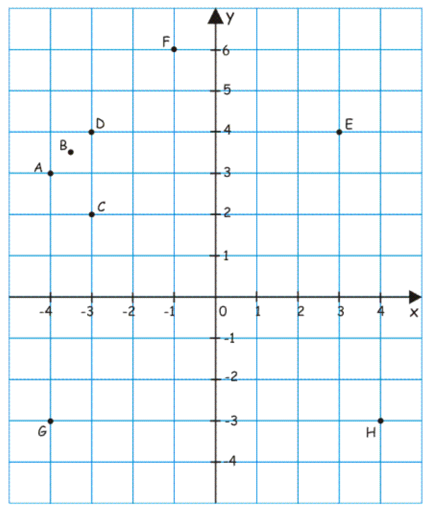
- El trabajo con sistemas con diferente tipo de conjunto solución permitirá situar la atención en las características de las ecuaciones asociadas a rectas coincidentes y a rectas paralelas. Se observa que si se multiplica una ecuación por un número real no nulo, obtenemos una ecuación que tiene asociada la misma recta que la primera. Se introduce la noción de ecuaciones equivalentes. Se pide a los estudiantes que presenten ejemplos de ecuaciones que representan la misma recta y de sistemas indeterminados e incompatibles dados en forma tanto algebraica como gráfica.

Luego el docente podrá introducir los métodos algebraicos de resolución en la forma que esté habituado a trabajarlo con sus estudiantes y mostrar otras visiones complementarias de un sistema de ecuaciones presentándolos como modelos de situaciones problemáticas que permiten arribar a una respuesta del problema tal como sugiere Häggström (en progreso). Lo que habitualmente se denomina traducir un problema en ecuaciones. En este sentido, Segura (2004) señala la importancia de los tránsitos entre diferentes representaciones de un sistema: lenguaje verbal, gráfico, algebraico. No desarrollaremos más este aspecto porque excede los objetivos de este trabajo.

Actividades sugeridas

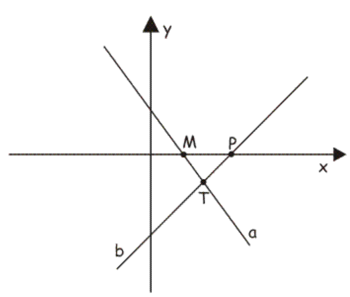
Las siguientes actividades se presentan a modo de ejemplo. Pretenden mostrar cómo pueden trabajarse los aspectos señalados anteriormente. No representan las únicas actividades del curso a trabajar con los alumnos antes de la introducción de los métodos de resolución, sino que son un complemento de las que el docente utiliza al enseñar el tema. En cada caso explicitaremos la intención de la actividad, los posibles abordajes y el aprovechamiento que el docente puede hacer de las mismas.

1) Se representaron varios pares ordenados de números reales, obteniendo los puntos A, B, C, D, E, F, G y H. ¿Cómo puedes averiguar si esos pares son solución de la ecuación $x - y = -7$, sin graficar la recta asociada a esta ecuación?



La actividad requiere que el estudiante interaccione entre los modos de pensamiento SG y AA. Como el enunciado de la actividad pide que no se grafique la recta, el estudiante deberá realizar la lectura de las coordenadas de los puntos y realizar la sustitución en la ecuación, para saber si la verifican o no. Observando la figura, antes de hacer cálculos, puede observarse que hay puntos que "aparentemente" están alineados o puede preguntarse a los estudiantes si observan algo en particular sobre la distribución de los puntos. Luego de que los estudiantes determinen cuáles pares son solución, puede volverse a esto, viendo que efectivamente hay pares que al ser solución de la ecuación, corresponden a puntos que pertenecen a la recta asociada a esta.

2) Juan sostiene que las coordenadas de los puntos M, P y T, son soluciones de la ecuación de la recta *a* y de la ecuación de la recta *b* <u>a la vez</u>. ¿Estás de acuerdo?



La situación brinda una oportunidad para discutir si los puntos de corte de la rectas *a* y *b* con el eje horizontal son solución de cuál de las rectas y por qué, usando la relación de pertenencia. También se podrá discutir si las coordenadas del punto T son solución de las ecuaciones de las rectas *a* y *b* y por qué. La actividad está propuesta para discutir explícitamente qué sucede con los puntos M y P en virtud de que hay alumnos que piensan que son solución del sistema, y confrontar la diferencia de estos dos puntos con el punto T.

3) María José encontró dos soluciones para la ecuación $3x + 5y = 15$: los pares (0, 3) y (5, 0) y sostiene que no es posible encontrar más. ¿Tiene razón?

La actividad tiene por objetivo, descartar que una ecuación lineal con dos incógnitas pueda tener solamente dos soluciones (aunque la ecuación planteada es particular, cubre el caso general). Seguramente los estudiantes podrán encontrar más pares por diferentes procedimientos: gráficos, algebraicos o por cálculo mental. Una oportunidad más para hablar de la presencia de infinitas soluciones para la ecuación dada.

4) a) Presenta cinco soluciones de la ecuación $-x + 2y = 7$.

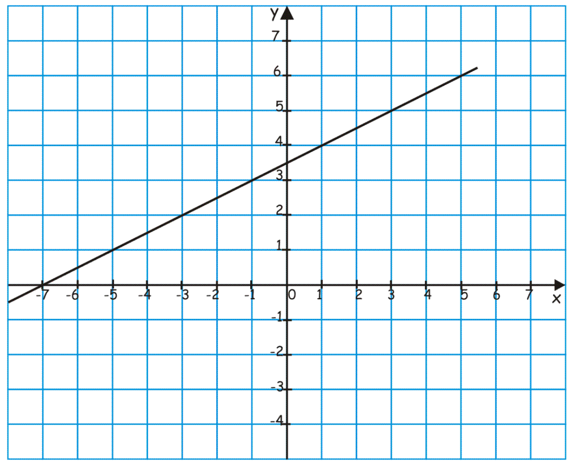
b) Averigua cuánto vale m sabiendo que el par $(13, m)$ es solución de la ecuación $-x + 2y = 7$.

c) ¿Cuánto debe valer n para que el punto de coordenadas $(n, 8)$ pertenezca a la recta de ecuación $-x + 2y = 7$?

d) La siguiente gráfica corresponde a la recta de ecuación $-x + 2y = 7$.

i) Utilizando el gráfico, deduce las coordenadas de cuatro puntos de la recta.

ii) ¿Cómo podrías verificar que efectivamente son puntos de la recta?



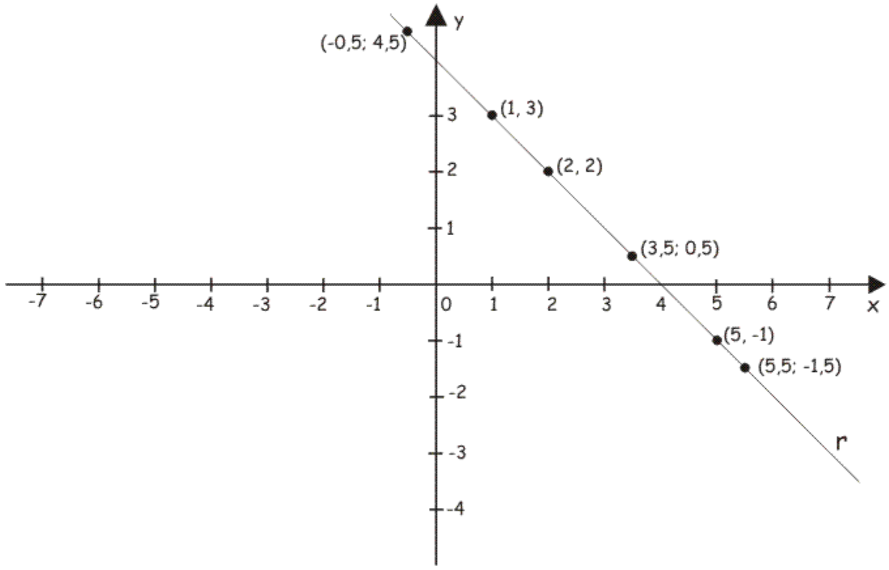
Se continúa trabajando con la posibilidad de encontrar tantas soluciones como queramos para una ecuación lineal con dos incógnitas. Las partes b) y c) implican la misma idea matemática pero están presentadas de diferente forma, en un caso el par como solución de la ecuación y en el otro el par como punto que pertenece a la recta. Creemos que implican visiones complementarias del concepto solución, permitiendo verlo desde dos modos de pensamiento distinto. Es bastante frecuente ir de los pares a la gráfica, aquí se plantea el proceso inverso, se da la recta para evitar su construcción por punteo y que puedan apreciarla globalmente y se pide que los alumnos lean las coordenadas de puntos solución. Para verificar si la lectura fue bien hecha, deberán utilizar la verificación de las coordenadas en la ecuación de la recta.

5) a) ¿Cómo puedes determinar si el punto de coordenadas (105, -102) pertenece a la recta r?

b) Trazamos una recta vertical por el punto (-16, 0). ¿Cortará a la recta r?

Si tu respuesta es negativa explica por qué y si es afirmativa indica en qué punto.

c) Si x indica la abscisa de un punto del plano e y su ordenada, escribe la condición que deben cumplir las coordenadas de un punto (x, y) para que pertenezca a la recta r.



La actividad está planteada para hacer el proceso inverso al que frecuentemente se hace en clase que es el de ir de la ecuación a la recta. Aquí se les presenta a los alumnos varios puntos de una recta donde se explicitan sus coordenadas. Para poder contestar la parte a), los alumnos deberán observar que las coordenadas de todos los puntos de la recta dada suman 4 y que las coordenadas del punto dado no cumplen esta condición, por lo que no es un punto de la recta. La parte b) está propuesta para superar las limitaciones de las representaciones, aunque no veamos el punto de corte, cualquier recta vertical corta a la recta dada, alcanza con determinar cuánto vale y cuando $x = -16$. En la parte c) se espera que los estudiantes generalicen lo observado en a) y puedan expresar la ecuación de la recta $x + y = 4$. Creemos que la actividad plantea una forma sencilla de acceder a la ecuación de la recta y que no implica grandes esfuerzos de cálculo que son los que a veces bloquean el pasaje de la recta a su ecuación. También sostenemos que la actividad permite modelar a través de una ecuación la propiedad que cumplen las coordenadas de todos los puntos de la recta dada y solamente ellos.

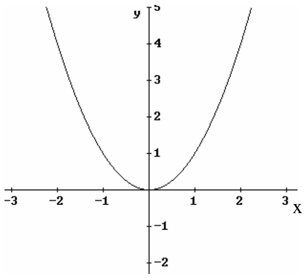
6) Estamos trabajando con ecuaciones lineales con dos incógnitas. ¿Pero existirán ecuaciones con dos incógnitas que no sean lineales?

A continuación se presentan algunas ecuaciones con sus respectivas gráficas.

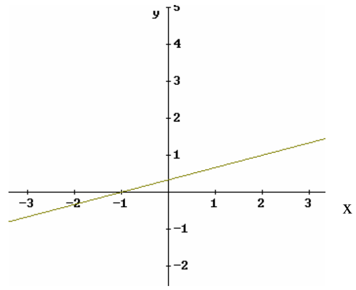
i) Explica cómo es posible generar puntos de cada una de las gráficas.

ii) Indica cuáles gráficas te parece que corresponden a ecuaciones lineales y explica el porqué.

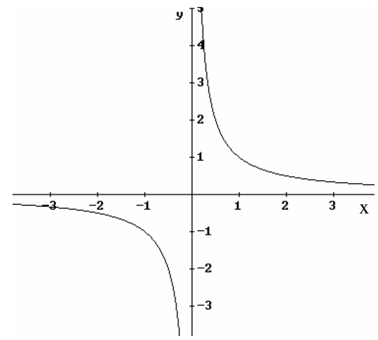
a) $y - x^2 = 0$



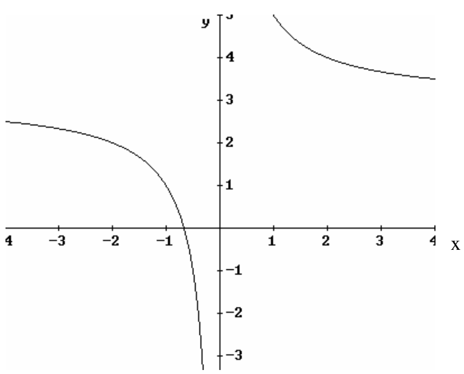
b) $x - 3y = -1$



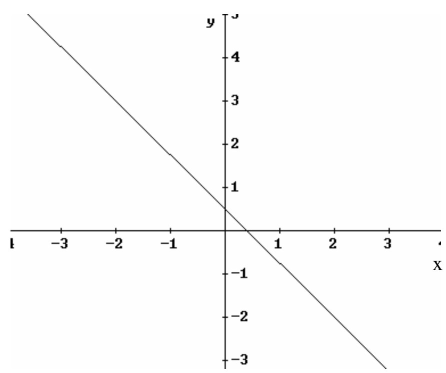
c) $x \,.\, y = 12$



d) $y = \dfrac{2}{x} + 3$



e) $x = \dfrac{2 - 4y}{5}$



La actividad no pretende ser exhaustiva, sino que la idea es presentar a los estudiantes unas pocas ecuaciones no lineales en x e y para que puedan observar que el gráfico correspondiente no es una recta y asimismo puedan describir verbalmente qué características de la expresión algebraica hacen que la ecuación no sea lineal. En la parte i) se espera que los estudiantes puedan generar mentalmente algunas soluciones de las ecuaciones dadas. Creemos que esto fortalece la noción de solución de una ecuación en general. Para contestar la parte ii) los estudiantes podrán recurrir a la representación gráfica, distinguiendo rectas de curvas y también podrán observar características de las ecuaciones dadas para lo que creemos será necesaria la ayuda del profesor.

7) Trabajemos con la ecuación $3x - 2y = -4$ que llamaremos ecuación (e).

a) Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por 5 obtenemos otra ecuación, que llamaremos (e´). Escríbela.

a) ¿El par (-2, -1) es solución de la ecuación (e)?

b) ¿Y de la ecuación (e´)? ¿Cómo puedes explicar esto?

c) ¿Sucederá lo mismo si multiplicamos ambos miembros por un número real cualquiera?

La actividad está propuesta para introducir el concepto de ecuaciones equivalentes que será necesario luego para construir sistemas con infinitas soluciones dados por sus ecuaciones.

8) a) x e y son dos números reales que verifican simultáneamente las ecuaciones

$$x = 2y + 9 \quad \text{y} \quad 4x - 3y = 6$$

¿Puedes averiguar cuáles son los números x e y?

b) ¿Verdadero o falso?

"Dadas dos ecuaciones cualesquiera de primer grado con incógnitas x e y, existe siempre un único par (x, y) que las verifica simultáneamente".

La parte a) de la actividad permite presentar el concepto de sistema de ecuaciones y de solución de un sistema. Los alumnos podrán resolver la situación recurriendo a la representación gráfica de las rectas pues todavía no disponen de métodos algebraicos de solución. Si encontraran mentalmente el par que verifica las dos ecuaciones dadas, el docente podrá preguntar si no existirán otros pares de números que también verifiquen las dos ecuaciones. En la parte b) se busca propiciar una discusión en clase donde para contestar será necesario recurrir a las posiciones relativas de dos rectas en el plano. Después de las propuestas de los estudiantes el docente podrá aprovechar para explicitar cuáles son los posibles conjuntos solución de un sistema.

El profesor puede aprovechar esta actividad para preguntar a sus alumnos si un sistema de ecuaciones lineales puede tener exactamente dos soluciones o tres soluciones dando la oportunidad para que los alumnos den diferentes tipos de argumentos.

9) Vimos que toda ecuación de primer grado con dos incógnitas admite infinitas soluciones. Cada solución es un par ordenado de números reales. En cada uno de los siguientes casos, ¿cuántos pares ordenados verifican a la vez las ecuaciones dadas? ¿Cómo puedes averiguarlo?

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=5 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=-1 \\ -4x-4y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=2 \\ x=3 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$

Para resolver la actividad los estudiantes tendrán que recurrir a la representación gráfica de las rectas de cada sistema, aunque en el caso del sistema b) pueden también darse cuenta de que son ecuaciones equivalentes y no necesitar realizar la gráfica. En este último caso sería oportuno que el docente preguntara qué sucedería si las graficaran, es decir, qué tipo de rectas se obtendrían y destacar que se trata de rectas coincidentes, esto es, que las dos ecuaciones tienen la misma recta asociada. En el caso c) aparece un sistema incompatible, con una configuración geométrica que no es la de rectas paralelas sino configuración "triángulo".

10) Presenta tres configuraciones gráficas distintas que correspondan a sistemas de ecuaciones de primer grado, sin solución.

En esta actividad los alumnos podrán retomar la configuración rectas paralelas que conocen de la actividad 8, a la que podrán agregar la configuración "triángulo" que apareció en la actividad 9. Será necesario "inventar" otra configuración ya que se les piden tres ejemplos. Podría ser la de dos rectas paralelas cortadas por una secante.

11) Presenta gráficamente tres ejemplos de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que tengan solución única. Los sistemas deben tener

diferente número de ecuaciones. Explicita en cada caso cuántas has elegido para dar cada ejemplo.

La actividad tiene por objetivo que el alumno construya rectas concurrentes para cada caso. Consideramos que al pedirle que presente sistemas con diferente número de ecuaciones, le estamos presentando una actividad que requiere por un lado utilizar dos modos de pensamiento, pues tendrá que interpretar las ecuaciones como rectas; y por otro, centrar la atención en la configuración rectas concurrentes como la que indica sistema con solución única. Aquí hay un importante cambio de perspectiva: ya no buscamos punto de corte de las rectas como indicador de sistema con solución sino conjunto de rectas concurrentes.

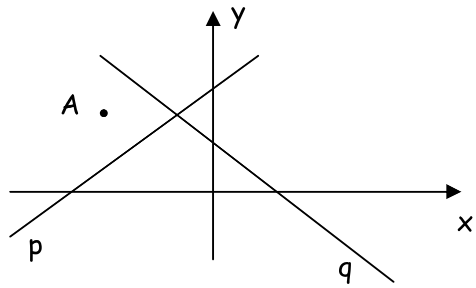
12) Verifica que (7, 30) y (1, 0) son soluciones de las ecuaciones

$$5x = y + 5 \qquad \text{y} \qquad 2y - 10x + 10 = 0$$

¿Tendrán más soluciones en común? ¿Por qué?

Este punto es importante, ya señalamos que el alumno no solamente debe conocer el número de soluciones que puede tener un sistema sino que también debe rechazar las que no puede tener, esto es, un número entero de soluciones mayor que uno. El alumno deberá reconocer que dos rectas no pueden tener únicamente dos puntos en común. Para contestar podrá utilizar diferentes modos de pensamiento respondiendo que las rectas son coincidentes o que las ecuaciones son equivalentes o ambas cosas.

13) a) ¿Son las coordenadas del punto A solución del sistema asociado a las rectas p y q? ¿Por qué?



b) Representa gráficamente un sistema de ecuaciones lineales que tenga a las coordenadas de A como solución. Explica cómo lo haces y por qué.

Como ya dijimos, la verificación es una rutina propia del modo AA, aquí presentamos una actividad donde podrá observarse geométricamente que las coordenadas de A no son solución del sistema en virtud de que las rectas no son secantes en A, lo que llamamos una práctica de verificación en el modo geométrico.

6.2 Puesta en práctica de la secuencia y de las actividades de aprendizaje

No es nuestro propósito introducir nuevas metodologías de trabajo en el aula ni introducir secuencias didácticas modélicas, sino que las profesoras que tienen a su cargo los dos grupos de estudiantes con los que trabajamos, integren a su planificación del tema, las actividades que diseñamos para la enseñanza del concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales y las sugerencias que hicimos en cuanto a determinados centros de atención.

La metodología que utilizan en la clase estas profesoras para la enseñanza de este tema, combinan:

- pequeñas sesiones a cargo del docente donde mediante un juego de preguntas y respuestas se busca dar participación a los alumnos en la construcción del conocimiento,
- sesiones de trabajo individual de los alumnos en la clase, donde luego se da una instancia de colectivización de resultados e ideas puestas en juego a través del diálogo entre los pares y el profesor,

- sesiones de trabajo en pequeños grupos donde el profesor conduce, luego del trabajo en equipos, una sesión de puesta a punto en la que se confrontan los resultados a los que se arribaron y los alumnos exponen cómo llegaron a los mismos, dando lugar más tarde a momentos de institucionalización de conceptos a cargo del profesor.

Nuestro principal objetivo es evaluar los aprendizajes de los alumnos luego de la enseñanza del tema, para el caso en que se utilizan las actividades que diseñamos durante la enseñanza de este tema. Nuestra intención final consiste en discutir qué tanto aportan las mismas en el aprendizaje de los alumnos.

6.2.1 Método

Ya desarrollé y justifiqué ampliamente en el capítulo III titulado “Metodología y método”, el método que emplearía para abordar el segundo objetivo de la presente investigación. En esta segunda fase de este trabajo de investigación, aplicamos las actividades de aprendizaje diseñadas, a dos grupos de 14-15 años: un grupo a cargo de la profesora Mari y el otro a mi cargo. Como ya señalamos, estas actividades fueron elaboradas teniendo en cuenta las observaciones de clase realizadas en el grupo de la profesora Martina, el análisis de las respuestas de todos los alumnos al cuestionario, las dificultades relevadas, las situaciones que facilitan la superación de ellas y la revisión de los libros de texto que realizamos. El objetivo es brindar elementos para una reformulación del discurso matemático escolar que brinde elementos acerca de cómo realizar una primera aproximación al tema. No se restringió el concepto solución al caso 2x2 para no generar obstáculos a visiones más amplias del tema en el futuro de los alumnos.

Seleccionamos a la profesora Mari para poder tener información acerca de la enseñanza del tema en dos grupos distintos, uno a su cargo y el otro al mío. En forma coordinada con esta docente se decidió el enfoque del tema teniendo en cuenta las actividades para los alumnos que elaboramos a partir de las conclusiones relativas al primer objetivo de esta investigación. Se realizaron observaciones de clase y la profesora Mari registró en un cuaderno de campo la forma en que fue desarrollando la enseñanza del tema y todas las actividades que propuso a sus estudiantes.

En el caso del grupo a mi cargo, utilicé el mismo enfoque que ya describí en la sección 3.7 pero incorporando las actividades que ya reseñé más arriba; más adelante explicaré cómo abordé el tema. Una vez finalizada la enseñanza del tema en los dos grupos, se aplicó a todos los estudiantes, en forma individual, el mismo cuestionario que se usó en la primera etapa de la presente investigación para observar sus reacciones. Por tanto, no se trabajó ninguna de las preguntas de este cuestionario en clase durante el desarrollo del tema, tal como están propuestas en éste.

6.2.2 Descripción de la enseñanza del tema en el grupo de la profesora Mari

Este grupo tiene 36 alumnos y sus edades varían entre los 14-15 años. El número total de horas dedicadas a la enseñanza del tema Sistemas de ecuaciones lineales, sin contar las horas que tomaron las evaluaciones, fue de 26 horas, repartidas siempre en módulos de 2 horas, nos referimos a un total de 13 encuentros con los alumnos.

De acuerdo a la entrevista mantenida con la profesora Mari, antes de abordar el tema Sistemas de ecuaciones lineales, estos alumnos estudiaron:

- Funciones Polinómicas (Concepto de función polinómica, aplicaciones de las mismas en la modelación de problemas de la realidad, concepto y cálculo de raíces, ordenada en el origen, signo de la función, cálculo de imágenes. Funciones con diferentes dominios. Interpretación de gráficos).
- Operaciones con Funciones Polinómicas.
- Factorización de polinomios.

Todos estos temas corresponden al programa oficial vigente de la asignatura matemática para alumnos del tercer año de Ciclo Básico de Enseñanza Secundaria en el Uruguay (14-15 años).

A continuación transcribiremos cómo la profesora Mari introduce las ecuaciones lineales en este grupo de estudiantes. Esta clase se visitó, se tomaron notas y también se extrajo información del cuaderno de campo de la profesora.

La profesora comienza su clase recordando que la clase pasada repasaron en forma breve a las ecuaciones de primer grado con una incógnita y señala que no son el único tipo de ecuaciones que existen, dado que surgen otras si se varía, por ejemplo, su grado o el número de incógnitas que estas tienen. Dice a los alumnos que también vieron que el grado de una ecuación determinaba el número máximo de soluciones que esta podía tener, estas soluciones también son conocidas con el nombre de “raíces” de la ecuación. Recuerda que además analizaron un ejemplo de una ecuación de segundo grado, que si bien podía tener como máximo dos raíces o soluciones vieron que la misma no tenía ninguna solución. Es decir que no existía ningún conjunto de números que la verificara, por lo tanto el conjunto solución era vacío.

La profesora Mari dice a sus alumnos que en la clase de hoy estudiarán otro tipo de ecuaciones: las de primer grado con dos incógnitas, que al igual que las vistas anteriormente son útiles, entre otras cosas, para resolver problemas de nuestro mundo “cotidiano”.

La profesora presenta a sus alumnos un primer ejemplo de ecuación de primer grado con dos incógnitas:

$$x + y - 3 = 0$$

Dice que al igual que las ecuaciones que ya conocen, esta ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que solamente se verifica para determinados valores.

Agrega que cuando resolvían ecuaciones de primer grado con una incógnita, buscaban aquel valor que verificaba la ecuación y que si realizan una analogía entre las ecuaciones de primer grado con una incógnita y este nuevo tipo de ecuaciones, resolver esta nueva ecuación implica, del mismo modo que antes**,** encontrar los valores de x y de y que la verifican, es decir, que hacen que la igualdad planteada sea cierta. Por tanto dice a sus alumnos que se busca determinar una pareja de números (x, y) que verifique la ecuación.

La profesora manifiesta a sus estudiantes que ya tienen incorporada de años anteriores la noción de par ordenado de números, que es la misma noción que les permitió convenir que se nombra en primer lugar el valor de x y luego el de y por tanto escribimos (x, y), y no (y, x), pues vimos que los primeros representan puntos del plano. Por tanto retomando lo anterior, lo que se busca al resolver esta ecuación son los pares ordenados de números (x, y) que la verifican. Pregunta a los estudiantes si pueden sugerir, posibles parejas de números que sean solución de la ecuación.

Anota en el pizarrón las posibles soluciones sugeridas por los estudiantes:

(1, 2), (1,3; 1,7), (0, 3), (-1, 4)

Y proceden de la siguiente manera con cada uno de ellos:

¿(1,2) es solución de la ecuación?

(1,2) es solución $\Leftrightarrow 1 + 2 - 3 = 0$ ✓ $\Rightarrow$ (1, 2) es solución de la ecuación.

Luego pregunta a sus alumnos si cualquier par de reales es solución y pide a sus alumnos que den un par cualquiera, a lo que proponen el par (1, 4).

Escribe en el pizarrón:

(1, 4) es solución $\Leftrightarrow$ $1 + 4 - 3 = 0$ ✗ $\Rightarrow$ (1, 4) NO es solución de la ecuación.

Un alumno manifiesta oralmente que los pares solución son pares de números que suman 3 y la profesora parece no escucharlo.

La profesora pregunta a los estudiantes si se podrá trabajar con racionales, es decir, si podremos decir que un par de racionales es solución. Un alumno propone el par (1/2, 5/2) y verifican sustituyendo en la ecuación que efectivamente es solución de la ecuación.

Otra estudiante observa oralmente que las soluciones son pares de números que suman tres. La profesora dice que tenemos resuelta una ecuación cuando tenemos el conjunto solución y pide a sus alumnos que sugieran la forma que tendrá el conjunto solución de la ecuación.

Escribe en el pizarrón: S = {(1, 2), (1,3; 1,7), (0,3), (-1, 4), …}

Un alumno insiste en que en lugar de esto podemos escribir los números reales que sumados dan tres y la profesora escribe:

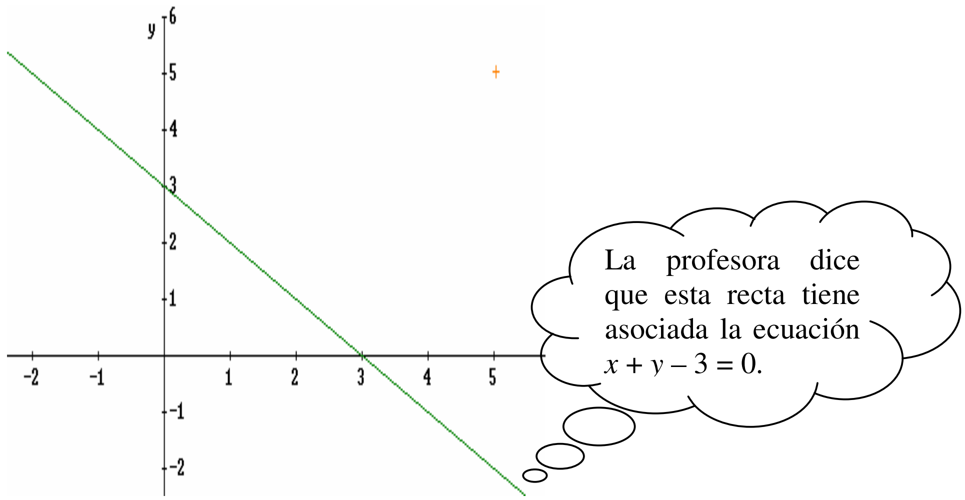
S = {Todas las parejas de números reales (x, y) tal que su suma sea igual a 3}

La profesora puntualiza que las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tienen infinitas soluciones y que las soluciones son la parejas (x, y) que verifican la ecuación.

Agrega que a todo esto [refiriéndose al conjunto S] lo van a llamar conjunto solución de la ecuación.

La profesora específicamente aclara que (1, 2) no son dos soluciones sino que (1, 2) es una solución y que el par ordenado está formado por dos números.

Luego plantea a los estudiantes que van a llevar el conjunto solución a la perspectiva geométrica. Presenta un sistema de ejes coordenados en el que grafican los pares solución y observan que obtienen puntos alineados, los alumnos dicen que "da una recta". En el pizarrón aparece una figura similar a la siguiente:



Graficaron en verde los pares solución de la ecuación y en anaranjado los que no eran pares solución. Puede verse en la figura el punto de coordenadas (5, 5) en anaranjado.

La profesora Mari pregunta por qué podemos trazar la recta y los alumnos contestan aludiendo a que están trabajando con pares de reales. La profesora les propone elegir un punto cualquiera de la recta y ver que sus coordenadas forman parte del conjunto solución. Un alumno propone (-2, 5) y verifican que -2 + 5 -3 = 0.

La profesora institucionaliza que cualquier punto que se tome de esa recta, sus coordenadas pertenecen al conjunto solución de la ecuación.

La profesora pregunta cómo pueden ver geométricamente que la ecuación tiene infinitas soluciones y un alumno responde que la recta tiene infinitos puntos.

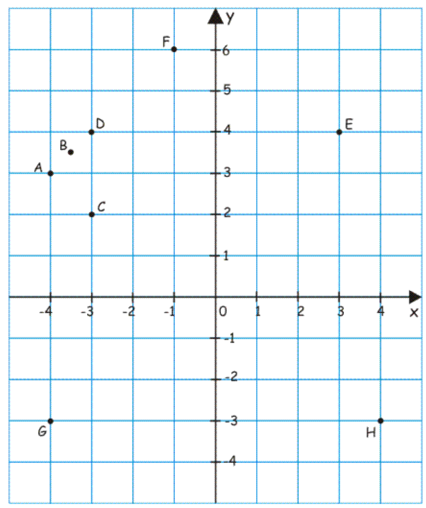
La profesora introduce a continuación el concepto de ecuaciones equivalentes diciendo a los alumnos que pueden manipular estas ecuaciones igual a como lo hacían con las de primer grado con una incógnita. Escribe en el pizarrón:

$$x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x$$

y dice que son ecuaciones equivalentes y que volverán sobre esto más adelante.

La profesora propone a los alumnos la actividad 1 ya presentada y analizada en la sección 6.1.

1) Se representaron varios pares ordenados de números reales, obteniendo los puntos A, B, C, D, E, F, G y H. ¿Cómo puedes averiguar si esos pares son solución de la ecuación $x - y = -7$, sin graficar la recta asociada a esta ecuación?



Deja a los alumnos unos minutos para trabajar individualmente en la tarea. Luego realiza la puesta en común en el pizarrón dando lugar a que los estudiantes pasen al pizarrón a mostrar cómo resolvieron la situación. Los alumnos extrajeron del gráfico las coordenadas de los puntos y recurrieron a la verificación para decidir cuáles pares eran solución de la ecuación. Presentaron algunas dificultades con la resta planteada en la expresión $x - y$ para el caso en que la ordenada del punto es negativa. Estas dificultades operatorias fueron sorteadas con la intervención de la docente.

La profesora pregunta a los estudiantes qué observaron de los pares ordenados que verificaban la ecuación y los alumnos respondieron que están alineados.

La actividad permitió poner en juego dos modos de pensamiento permitiendo que los estudiantes vieran a los pares solución tanto como pares de números reales así como puntos del plano, y permitió a los estudiantes visualizar la alineación de aquellos puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación. Ya comentamos anteriormente la importancia de que los alumnos asociaran el hecho de que un par verifica la ecuación con la pertenencia del punto a la recta.

En la segunda clase la profesora trabaja con sus alumnos en las siguientes actividades que ella misma diseña.

I) Hallar "*a*" para que el punto de coordenadas (2,3) pertenezca a la recta de ecuación $ax + 4y - 2 = 0$.

II) Representa gráficamente el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $- x + y + 4 = 0$

b) $2x - y - 8 = 0$

c) $x + 4y = 12$

La profesora Mari dice a los estudiantes que mentalmente es posible encontrar pares de números que forman parte del conjunto solución de cada una de las ecuaciones planteadas, pero también podemos encontrar soluciones “despejando” tal como lo hacíamos en funciones, es decir cuando expresábamos una variable en función de la otra.
Presenta el siguiente caso a modo de ejemplo:

a) $- x + y + 4 = 0$

$y = - 4 + x$

Señala a sus alumnos que lo que se hizo fue trasponer términos para despejar *y* y que luego se trabaja con una tabla de valores tal como lo hacían con funciones.

x	$y = - 4 + x$
0	$-4 + 0 = 0$
2	$-4 + 2 = -2$

A partir de aquí, para graficar una recta dada su ecuación, los alumnos cuentan con un procedimiento algebraico como el de “despejar *y*” para obtener una variable en función de la otra y construir una tabla de valores o buscar mentalmente pares ordenados que verifiquen la ecuación dada.
Luego de haber graficada rectas de “a una” la profesora propone a los alumnos que grafiquen conjuntamente dos rectas dadas. Presenta la siguiente actividad a sus estudiantes:

Graficar conjuntamente, en cada caso, los siguientes pares de rectas.

1)	2)	3)
$x+ y = -5$	$x + y = 3$	$x + y = 1$
$x - y + 1 =0$	$2x + 2y = 6$	$x + y = 7$

Dice a sus alumnos que la idea es graficar el conjunto solución de cada una de estas ecuaciones en un sistema de ejes. El propósito de la profesora es que los alumnos observen las posiciones relativas de dos rectas en el plano para luego introducirlos en la noción de sistema. Inmediatamente los estudiantes observan que en el caso (2), la segunda ecuación "es el doble de la primera". Lo que luego la profesora tomará para explicar cómo podemos obtener una ecuación equivalente a una dada.

Luego de graficar las rectas en el caso (2) explica que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución y dice que siempre que tengan una ecuación y la multipliquen por un real distinto de cero, obtendrán una ecuación equivalente a la dada.

En cada uno de los casos analiza si existen o no puntos cuyas coordenadas verifiquen las ecuaciones dadas y de haberlos cuántos son. Explica luego que un sistema de dos ecuaciones conforma lo que llamarán sistema de ecuaciones. Dice que resolver un sistema implica encontrar, si existen, las coordenadas de los puntos que las rectas tienen en común, y que por lo tanto, es lo mismo que encontrar las parejas de números reales que verifican ambas ecuaciones a la vez. Registra en los cuadernos la posición relativa de las rectas, de cada caso planteado, y escribe lo que eso implica a nivel del conjunto solución de cada sistema.

En la siguiente clase la profesora, antes de avanzar en el desarrollo del tema, revisa algunos aspectos ya estudiados que considera importantes:

- Posiciones relativas de dos rectas en el plano asociando la noción geométrica con la algebraica: destacando la noción de solución de un sistema y que un sistema puede tener una, infinitas o ninguna solución, asociándolo a la configuración gráfica correspondiente.
- Recuerda la noción de pertenencia de un punto a una recta y su vinculación con una solución de una ecuación.

En esta clase se propone clasificar los sistemas de ecuaciones como compatibles o incompatibles y presentar el método algebraico de reducción para resolver un sistema. La presentación del procedimiento algebraico se realiza en forma paralela con la interpretación gráfica correspondiente. La profesora incluye casos de sistemas incompatibles o compatibles indeterminados al resolver sistemas por reducción e interpreta junto a sus alumnos los casos $0x + 0y = 0$ y $0x + 0y = k$ (con k distinto de 0).

Durante el desarrollo del tema la profesora enfatiza en el número de soluciones posibles para un sistema.

La profesora trabaja con las actividades 5 y 7 de nuestro diseño, que habían quedado como tarea domiciliaria.

Para las clases siguientes la docente se propone presentar situaciones problemáticas que se resuelvan mediante un sistema de ecuaciones y trabajar diferentes representaciones de un sistema: verbal, gráfica y algebraica.

En la séptima clase la profesora retoma la noción de solución de un sistema de ecuaciones dado en forma gráfica y sitúa su atención en los puntos de corte de las rectas con el eje x, discutiendo si son o no solución del sistema. Plantea a sus alumnos la actividad 3 de nuestro diseño y plantea situaciones oralmente como: ¿Puede un sistema tener sólo tres soluciones? ¿Y sólo dos?

Trabaja luego en situaciones dadas en lenguaje verbal que pueden ser modeladas a través de un sistema para llegar a resolverlas. Pretende con esto hacer el tránsito del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

Deja planteada la actividad 9 de nuestro diseño en la que se plantea como objetivos familiarizar a los estudiantes con sistemas 3x2, trabajar con las posiciones relativas de dos, tres o más rectas en el plano, ver nuevamente que un sistema puede tener una sola solución, infinitas o ninguna y presentar configuraciones geométricas de sistemas con diferentes conjuntos solución.

En el octavo encuentro, la docente aborda la actividad 9 de nuestro diseño que había quedado planteada y también se propone trabajar con las actividades 10 y 11.

Para abordar la actividad 9 los alumnos proponen abordajes tanto gráficos como algebraicos a tres situaciones que se plantean en la misma. La profesora comenta en el pizarrón todas las sugerencias de los alumnos y conjuga la resolución algebraica con la gráfica poniendo atención en que por diversos procedimientos se llega a la misma conclusión acerca de la solución de un sistema dado.

La actividad 10 permite a los estudiantes presentar diversas configuraciones para dar respuesta a la misma: dos rectas paralelas y una secante, tres rectas secantes dos a dos, dos rectas coincidentes y una paralela a ellas, y el caso de tres rectas paralelas distintas.

Para la actividad 11 los alumnos plantean como respuesta varios casos: cinco rectas concurrentes diferentes asociándolo a un sistema de cinco ecuaciones, dos rectas secantes asociándolas a un sistema de tres ecuaciones donde dos ecuaciones son equivalentes, dos rectas secantes correspondientes a un sistema de dos ecuaciones y por último tres rectas concurrentes asociándolas a un sistema de cinco ecuaciones donde dos pares de ecuaciones son equivalentes. Se destaca que en todos los casos las rectas concurren en un punto.

Las actividades 8 (b) y 13 de nuestro diseño no fueron trabajadas en clase sino que formaron parte de la evaluación escrita del tema que los estudiantes realizaron en forma individual.

La docente Mari aborda luego el método de sustitución. Para ello presenta un problema dado en lenguaje verbal. Los alumnos lo modelizan a través de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y para resolverlo la profesora enseña el nuevo método algebraico.

En clases subsiguientes la docente continúa con actividades cuyo propósito es reafirmar el método de sustitución. Propone a los alumnos sistemas para resolver por dicho método, precisar cuántas soluciones tiene, verificarlo algebraicamente en caso de obtener solución única, clasificar el sistema y realizar la representación gráfica asociada a dicho sistema para corroborar la solución obtenida algebraicamente.

La docente propone a sus alumnos actividades que ella misma diseña en las que se pone en juego:

- el concepto de solución de un sistema
- el trabajo con sistemas con dos o más ecuaciones lineales con dos incógnitas
- el pasaje entre diferentes registros de representación
- la asociación entre un sistema dado en forma algebraica y su representación gráfica
- el concepto de ecuaciones equivalentes
- el concepto de sistemas equivalentes
- la noción de verificación
- los sistemas como modelizaciones de problemas dados en lenguaje verbal
- la resolución de un sistema de ecuaciones por diferentes métodos
- el trabajo con sistemas que tienen solución única, ninguna o infinitas

6.2.3 Descripción de la enseñanza del tema en el grupo a mi cargo

Este grupo tiene 29 alumnos y sus edades varían entre los 14-15 años. El número total de horas dedicadas a la enseñanza del tema sistemas de ecuaciones lineales, sin contar las horas que tomaron las evaluaciones, fue de 24 horas, repartidas siempre en módulos de 2 horas, nos referimos a un total de 12 encuentros con los alumnos. La enseñanza del tema se realizó en este grupo y en el de la profesora Mari prácticamente en el mismo período (en mi grupo se comenzó la enseñanza del tema 18 días después de que la profesora Mari comenzara a desarrollarlo en su grupo). Esta diferencia se debe a que como se trabajaba con dos grupos "reales" se debía esperar a terminar con el tema anterior (de acuerdo a cómo se venía desarrollando el curso) para comenzar uno nuevo.

La planificación del curso de la profesora Mari en cuanto a la secuenciación de los contenidos del documento curricular es diferente al que yo realizo habitualmente, de ahí que los estudiantes contaran con diferentes conocimientos previos al enfrentarse al desarrollo del tema que nos ocupa.

Antes de abordar el tema Sistemas de ecuaciones lineales, mis alumnos estudiaron:

- Revisión de los conjuntos numéricos.
- Teorema de Pitágoras.
- Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.
- Geometría del espacio. Revisión de las posiciones relativas de dos rectas, de una recta y un plano, y entre dos planos. Poliedros, prismas y pirámides. Áreas y volúmenes.

Todos estos temas corresponden al programa oficial vigente de la asignatura matemática para alumnos del tercer año de Ciclo Básico de Enseñanza Secundaria en el Uruguay (14-15 años).

A continuación reportaré cómo introduje las ecuaciones lineales en este grupo de estudiantes. Para este reporte me baso en las notas que tomé, en lo registrado en la Libreta del Profesor y en el cuaderno de clase de una estudiante. El enfoque utilizado es, en general, el ya descrito en la sección 3.7 con la diferencia de que introduje las actividades diseñadas en este trabajo y que enfaticé especialmente en los puntos señalados en la sección 6.1.

Se recuerda a los estudiantes que ya hemos estudiado las ecuaciones de primer grado con una incógnita y que ahora estudiaremos las de primer grado con dos incógnitas o también llamadas ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se presenta, a modo de ejemplo, la ecuación $x + y - 3 = 0$.

Observamos que para dar soluciones a la ecuación será necesario dar un valor para x y otro para y, es decir pares de números reales. Convendremos que en primer lugar daremos el valor de x y luego el de y, de manera que estamos buscando pares ordenados de la forma (x, y) que verifiquen la ecuación. El conjunto formado por todos estos pares constituye el conjunto solución de la ecuación dada. Los alumnos ejemplifican con pares solución que determinan en forma mental y se realiza en el pizarrón la sustitución en la ecuación para verificar que efectivamente se llega a una igualdad numérica o a una desigualdad en caso de que el par no sea solución de la ecuación dada. Luego se grafican los pares ordenados que tenemos (tanto los que son solución como los que no) en un sistema cartesiano y se aprecia que los que verifican la ecuación corresponden a puntos alineados. A la recta que contiene a todos los puntos cuyas coordenadas son solución le asociamos la ecuación dada. Decimos que la recta tiene ecuación $x + y - 3 = 0$.

A continuación se propone a los estudiantes representar gráficamente la recta de ecuación $2x + y = 3$ y hallar m para que (-5, m) sea solución de la ecuación. Para graficar la recta los alumnos construyen una tabla de valores en la que indican varias parejas y se observa junto a ellos que en realidad nos alcanza con un par de valores para representar a la recta. Para hallar m colocan en la tabla el número -5 en la columna de las x y por sustitución calculan el respectivo valor de y.

En la siguiente clase se plantean las actividades 1 a 4 de nuestro diseño, en las cuales se ponen en juego los aspectos numéricos y gráficos del concepto *solución* de una ecuación lineal. Se enfatiza en la relación par ordenado que verifica una ecuación - punto del plano que pertenece a la recta de esa ecuación. Las actividades diseñadas brindan un ámbito desde el cual trabajar estos aspectos.

En el siguiente encuentro se trabaja con las actividades 5 y 6. En la actividad 5 surge fácilmente por parte de los alumnos que la suma de las coordenadas de los puntos de la recta suman 4 y esto les permite dar la ecuación de la misma. Nuevamente se relacionan los aspectos numéricos, algebraicos y gráficos. La actividad 6 presentó, en general, dificultades para ser abordada. Los alumnos tuvieron dificultad para dar pares ordenados que verificaran las ecuaciones que no son lineales y distinguir qué aspectos de la expresión algebraica hacían que la ecuación no fuera lineal. Si bien desde el punto de vista gráfico fue sencillo distinguir rectas de curvas, desde el punto de vista puramente algebraico parece ser una actividad difícilmente abordable para este nivel. Los alumnos no poseen en este nivel las herramientas para decidir por qué la ecuación $x.y = 1$, para dar un ejemplo, no es lineal, aún cuando estudiaron en el curso anterior el grado de un monomio. Al tratar de distinguir las operaciones presentes en una ecuación lineal, y al tratar de hacerles ver que en $y = \frac{2}{x} + 3$ la x está dividiendo y no es una operación permitida para una variable en una ecuación lineal, los alumnos sostenían que la ecuación $x = \frac{2-4y}{5}$ que sí es lineal por su gráfico, puede transformarse en, por ejemplo, $\frac{5x-2}{y} = -4$, que por la explicación dada anteriormente no sería una ecuación lineal. El problema de la división entre 0, si bien es conocido en este nivel, resulta difícil de manejar para salvar esta situación.

En el cuarto encuentro se presentan las ecuaciones lineales equivalentes. Los alumnos conocen del curso anterior que ecuaciones equivalentes son aquellas que tienen el mismo conjunto solución. Ahora deberán ver este concepto aplicado al caso de las ecuaciones lineales. Se presenta la siguiente actividad:

Trabajaremos con la ecuación $x + y = 5$.

a) Multiplica ambos miembros de la ecuación por 2 y anota la ecuación obtenida.

b) Para cada una de las ecuaciones completa la tabla:

x	*y*
2	
-1	
-10	
11	
6	
0	

x	*y*
2	
-1	
-10	
11	
6	
0	

c) ¿Qué observas?

d) ¿Sucederá esto para cualquier valor que le demos a *x*? Explica tu respuesta.

Se institucionaliza que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución y que si multiplicamos ambos miembros de una ecuación por un mismo número real obtenemos una ecuación equivalente. A continuación se plantea la actividad 7 de nuestro diseño, que permite reafirmar el concepto de ecuaciones equivalentes y aprovechamos para institucionalizar que el número por el cual multiplicamos ambos miembros para obtener una ecuación equivalente no puede ser cero.

Queda planteada como tarea domiciliaria la actividad 8 de nuestro diseño a partir de la cual introduciremos los sistemas de ecuaciones. Los alumnos abordan, en general, esta actividad gráficamente aunque a un alumno se le ocurre sustituir $x = 2y + 9$ en la otra ecuación. Este estudiante comunica en el pizarrón lo que hizo a los otros estudiantes y vemos que por distintos procedimientos se llega a un único par, en este caso, el (-3, -6). Si bien el estudiante utiliza un método algebraico no se aprovecha la instancia para institucionalizarlo ni para introducirlo, ya que se desea terminar con toda la secuencia de actividades de nuestro diseño antes de introducir un método algebraico.

Se aprovecha la actividad 8 para hablar de sistema de ecuaciones. Se dice a los alumnos que un sistema de ecuaciones es un conjunto formado por dos ecuaciones que normalmente abarcaremos con una llave y esto significa que las vamos a considerar juntas. Resolver un sistema de ecuaciones significa determinar, si existen, los pares ordenados de reales que verifican a la vez todas las ecuaciones del sistema. A propósito de la parte 8 (b), discutimos cuál es el número posible de soluciones para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ayudándonos de las posiciones relativas de dos rectas en el plano. En el caso en que las ecuaciones representan rectas secantes tendremos solamente uno, ese par se dice que es solución del sistema.

Cuando las rectas dadas por las ecuaciones son paralelas distintas no hay ningún punto en común y diremos que el conjunto solución es vacío. Si fueran coincidentes tenemos infinitos pares solución y no escribiremos el conjunto solución pues tiene infinitos elementos.

A continuación se plantea la actividad 9 de nuestro diseño. Los alumnos recurren a la representación gráfica para dar respuesta a las preguntas planteadas. Responden sin dificultades los casos a) y b) pero en el caso c) surgen dos respuestas: que el sistema no tiene solución y que el sistema tiene tres soluciones. Los estudiantes argumentan sus respuestas, discuten entre ellos y finalmente se acuerda que el sistema no tiene solución contrastándolo con el caso a) donde el punto solución pertenece a las tres rectas a la vez.

Se indican como tarea domiciliaria las actividades 10 y 11 de nuestro diseño.

En la clase siguiente se hace en el pizarrón la corrección de estas tareas. Los alumnos participan contando lo que ellos dibujaron. Surgen diferentes configuraciones en la actividad 10: Dos rectas paralelas, tres rectas formando un “triángulo” y dos rectas paralelas cortada por una secante. Para la actividad 11 presentan sin dificultades gráficos con dos, tres, cuatro y hasta cinco rectas concurrentes en un punto. Se resuelven luego las actividades 12 y 13 de nuestro diseño. En la actividad 12 los alumnos argumentan que al tener las rectas dos puntos en común tienen infinitos. Algunos recurren a la representación gráfica para mostrar que efectivamente son rectas concurrentes. En la actividad 13 los alumnos dicen que el punto A no pertenece a las rectas y que por tanto no puede ser solución del sistema. Evidencian saber que para que las coordenadas de un punto sean solución de una ecuación, el punto debe pertenecer a la recta asociada a la ecuación.

Una vez finalizada la secuencia de actividades de nuestro diseño se enseña el método algebraico de reducción para sistemas 2x2. Durante cuatro clases se ejercita este método en varios ejercicios donde aparecen sistemas con diferente conjunto solución y se interpreta el caso de expresiones del tipo $0x + 0y = 0$ o $0x + 0y = k$ con k diferente de 0: en el primer caso vemos que existen infinitos pares que verifican $0x + 0y = 0$ y se trata de rectas coincidentes y en el segundo que no existe ningún par que verifique $0x + 0y = k$ (k distinto de cero) y por tanto las rectas son paralelas distintas.

También se presentan a los estudiantes problemas en lenguaje verbal que se traducen a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y se resuelven por el método de reducción. A medida que los alumnos avanzan en la ejercitación, se incrementa también en diferentes ejercicios, la dificultad algebraica haciendo aparecer, por ejemplo, denominadores en las ecuaciones.

6.3 Análisis de los resultados referidos al segundo objetivo de investigación

Una vez finalizada la enseñanza del tema en cada uno de los grupos, se aplicó el mismo cuestionario de preguntas utilizado para concretar el primer objetivo de esta investigación (ver cuestionario en la sección 3.5). El cuestionario no es de aprendizaje sino que busca explorar y obtener evidencia, para dar cuenta de un estado del saber en los alumnos. Se aplicó en una sesión de 80 minutos en cada grupo y los alumnos lo resolvieron individualmente. Las preguntas 1 a 5 se fueron entregando de a una de la siguiente manera: se entregaba a cada estudiante la pregunta 1 y al devolverla se le daba la pregunta 2, así sucesivamente hasta la pregunta 5 inclusive. El objetivo era evitar la re-corrección de lo hecho pues queríamos observar las primeras reacciones de los estudiantes. Luego se entregaban las preguntas de la 6 al final, juntas en un librillo, para ser resueltas también en forma individual. Participaron en esta instancia, 32 alumnos del grupo de la profesora Mari y 28 alumnos del grupo a mi cargo.

6.3.1 Primeras impresiones

Como ya señalamos en el párrafo anterior, el cuestionario, ya presentado y analizado en la sección 3.5, fue aplicado a dos grupos de estudiantes que denominaremos Grupo 1 y Grupo 2:

- Un grupo con 32 alumnos presentes de 14–15 años de la profesora Mari.
- Un grupo con 28 alumnos presentes de 14–15 años de la profesora Cristina.

Para una primera impresión acerca de cómo se distribuyen las respuestas a la pregunta 1, que consideramos nos permite observar la primera reacción de los estudiantes ante una situación que involucra el concepto de solución de un sistema, presentaremos los datos en una tabla y organizaremos la información de acuerdo a lo que el estudiante contesta, distinguiendo los siguientes tres casos, al igual que en la aplicación anterior del cuestionario:

A) El sistema no tiene solución

B) El sistema tiene tres soluciones

C) Otras respuestas

De nuevo queremos enfatizar que no es nuestra intención realizar un análisis cuantitativo pero creemos que las tablas permiten una visión rápida de los primeros resultados y evidencian la aparición de un error que, como señalamos anteriormente, consideramos relevante para explorar la noción de *solución* de un sistema que construyeron los estudiantes, después de una enseñanza del tema que incorporó las recomendaciones didácticas que surgieron del primer objetivo de investigación.

Grupo 1		
Respuestas a la pregunta 1	**Número de alumnos**	**Porcentaje**
A) El sistema no tiene solución	25	78
B) El sistema tiene tres soluciones	5	16
C) Otras respuestas	2	6
Total	32	100

Grupo 2		
Respuestas a la pregunta 1	**Número de alumnos**	**Porcentaje**
A) El sistema no tiene solución	22	78.57
B) El sistema tiene tres soluciones	5	17.86
C) Otras respuestas	1	3.57
Total	28	100

Observamos que un alto porcentaje de estudiantes, en los dos grupos, reconoce que el sistema de la pregunta 1 no tiene solución. Lo que nos llamó la atención y que luego comentaremos con más detalle es que en el caso del Grupo 1, de los 7 alumnos que dan el tipo de respuesta B o C, 3 de ellos cambian de opinión en la pregunta 2 diciendo que el sistema presentado no tiene solución. En el caso del Grupo 2, 4 estudiantes de los 6 que contestan B o C, cambian de opinión también ya en la pregunta 2 diciendo que el sistema presentado no tiene solución. Entendemos que los alumnos desarrollaron un pensamiento más versátil que los estudiantes con los que trabajamos en la primera fase de este trabajo. En esa oportunidad solamente 2 estudiantes de los que contestaron B o C en la pregunta 1 cambiaron de opinión en las preguntas 2 o 3 del cuestionario: 1 estudiante de 19 (en el caso del grupo de la profesora Martina) y 1 estudiante de 17 (en el caso del grupo a mi cargo).

6.3.2. Análisis de los resultados

Como segundo objetivo de este trabajo nos propusimos diseñar actividades de enseñanza para el concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas para estudiantes de enseñanza secundaria de 14–15 años, esto es, alumnos que se introducen por primera vez en el álgebra lineal. Estas actividades las pusimos en práctica en dos grupos de estudiantes de este nivel y ahora reportaremos los resultados obtenidos.

Clasificaremos a los estudiantes de cada nivel en tres grupos de acuerdo a la respuesta dada en la primera pregunta del cuestionario:

- Los que contestan que el sistema no tiene solución.
- Los que contestan que el sistema tiene tres soluciones.
- Los que dan respuestas de otro tipo.

De cada uno de estos grupos iremos reportando los casos que creemos aportan mayor información para entender el estado del saber de los alumnos.

Dentro del grupo a) nos interesa centrarnos en el tipo de argumentos que dan a lo largo del trabajo y distinguir así en qué aspectos han centrado su atención los estudiantes para dar una respuesta correcta. También observaremos qué modos de pensamiento ponen en juego.

Dentro del grupo b) nos interesa también observar los argumentos que dan en sus respuestas que seguramente pondrán en evidencia aspectos de la imagen de los conceptos que han construido y trataremos de indagar qué aspecto de esa imagen está llevando a los alumnos a interpretar que el sistema tiene tres soluciones.

Del grupo c) observaremos qué otro tipo de argumentos llevan a los alumnos a una interpretación diferente de las relevadas en los casos a) y b) y qué modos de pensamiento ponen en juego. También nos interesa observar las diferentes concepciones que tienen los estudiantes respecto al concepto solución y cómo sale a la luz en este contexto específico geométrico.

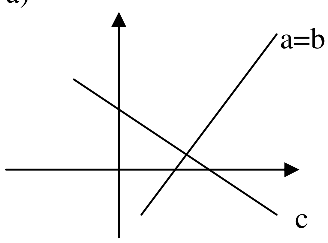
6.3.2.1 Estudiantes que contestan a la pregunta 1 diciendo que el sistema no tiene solución

Como ya señalamos, en el grupo (a) nos interesa centrarnos en el tipo de argumentos que dan los alumnos a lo largo del trabajo, y distinguir así en qué aspectos los estudiantes han centrado su atención, para dar una respuesta correcta. También observaremos qué modos de pensamiento ponen en juego y trataremos de describir la imagen del concepto que han construido.

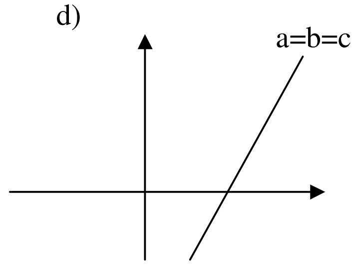
Florencia (14 años), alumna de la profesora Mari, contesta a la pregunta 1 diciendo que: "*Ninguna, porque no existe un punto que pertenezca a las tres rectas, por lo tanto no tiene solución*". En su respuesta podemos encontrar una clara articulación entre el modo geométrico y el analítico, en tanto la alumna puede relacionar el punto perteneciente a las tres rectas con el concepto solución del sistema. En forma similar contesta las preguntas 2 y 3. En la pregunta 4 considera las dos primeras ecuaciones, resolviendo el sistema formado por ellas. Encuentra el par (-3, 5) y luego estudia si verifica la tercera ecuación, hallando que no. Contesta que el sistema *"No tiene solución porque no existe un par (x, y) que verifique las tres ecuaciones"*. La estudiante manifiesta comprensión del concepto solución de un sistema y en sus explicaciones hace énfasis en que el par solución debe verificar todas las ecuaciones dadas. Entendemos que pone en juego una propiedad del concepto solución por lo que pone en juego un pensamiento del tipo analítico-estructural. Evidencia entender la solución del sistema como punto, como par ordenado de números y conoce la propiedad que caracteriza a un par solución del sistema, tanto desde un punto de vista sintético-geométrico como analítico-aritmético.

Responde adecuadamente todas las partes de la pregunta 5 y presenta interesantes representaciones gráficas en las que pone en juego el concepto de ecuaciones equivalentes desde un punto de vista gráfico. Florencia presenta las siguientes figuras para los casos a), d) y e):

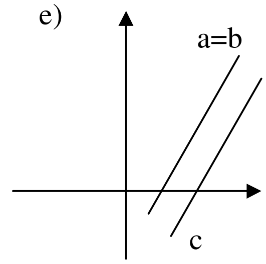
a)



d)



e)



En la pregunta 6 agrega una recta paralela a una de las dadas y explica que "*Si 2 rectas no tienen una solución ya el sistema es incompatible*". En la pregunta 7 agrega rectas que son todas concurrentes en un punto que llama P y agrega que "*Las rectas a, b, c, d y e tienen una solución, el punto P*". En la pregunta 8 dice que "*Si tiene 2 soluciones, tiene infinitas*" pero no explicita que no es posible que es lo que se desprende de su respuesta. En la pregunta 9 contesta que "*No, porque a y b no están superpuestas, tienen una única solución*". En la pregunta 10 plantea agregar las rectas coincidiendo con la dada y dice que "*Son rectas superpuestas, tienen infinitas soluciones*". En la pregunta 11 plantea el sistema formado por las ecuaciones $x + y = 3$ y $x - y = 1$. En la pregunta 12 dice que "*si tiene más de 1 solución, tiene infinitas*" y presenta un sistema formado por un par de ecuaciones equivalentes que son $x + y = 3$ y $2x + 2y = 6$. En la pregunta 13 responde que no es posible porque el punto (3, 4) no pertenece a la recta asociada al sistema. En 14 contesta que "*Son rectas superpuestas, si el sistema tiene más de una solución tiene infinitas*" sin explicitar que no es posible, aunque está implícito en su respuesta. En 15 contesta que "*Sí, el sistema tiene más de una solución, tiene infinitas*" y sobre la recta dada escribe $a = b = c$ como si la recta dibujada representara tres rectas coincidentes. Responde la pregunta 16 de la misma forma que la 5. En 17 dice que un sistema de ecuaciones es "*2 ecuaciones o más que se busca un punto (x, y) que las verifique*". En 18 contesta que una solución de un sistema es:

"*- Encontrar un punto (x, y) que pertenezca a las rectas asociadas al sistema*

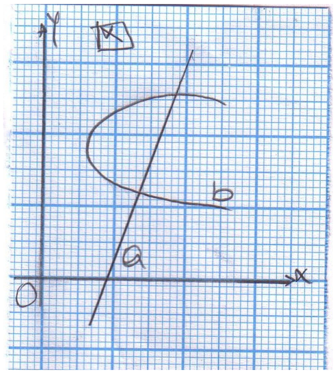
- *Encontrar un punto (x, y) que verifique todas las ecuaciones del sistema"*.

Impresiona la capacidad de esta alumna para ver el concepto solución desde diferentes modos de pensamiento y en forma simultánea. Evidencia fluidez en ver los pares como puntos y como parejas de números, y puntualiza la propiedad que los hace solución que es la de verificar todas las ecuaciones a la vez o la de pertenecer a todas las rectas a la vez. Ya comentamos anteriormente la importancia de que los alumnos entendieran la noción de par que verifica una ecuación desde un punto de vista geométrico como el punto que pertenece a la recta de esa ecuación.

Mauro (14 años), alumno de la profesora Mari, contesta a la pregunta 1 diciendo que "*Ninguna, porque no tienen un punto en común*". De la misma manera contesta las preguntas 2 y 3. Para contestar la pregunta 4 considera el sistema formado por las dos primeras ecuaciones que resuelve por el método de reducción determinando el par (-3,5). Luego estudia si este par verifica la tercera ecuación y contesta finalmente que el sistema "*No tiene solución porque ningún par ordenado verifica las tres ecuaciones simultáneamente*". Responde adecuadamente la pregunta 5 evidenciando que conoce el número posible de soluciones de un sistema e indicando expresamente que si un sistema tiene dos soluciones entonces tiene infinitas, lo mismo si se sabe que el sistema tiene tres soluciones. Conoce que la representación gráfica de un sistema con infinitas soluciones son rectas coincidentes y para el caso en que se pide un sistema sin solución presenta el caso de tres rectas paralelas distintas. En la pregunta 6 presenta una recta que corta a las dos dadas, formando la configuración "triángulo". En la pregunta 7 presenta rectas concurrentes en un punto. En la pregunta 8 contesta que "*No, porque si tienen dos tienen infinitas. Una recta si se corta, se corta en un punto, en todos o en ninguno*".

Este estudiante evidencia conocer bien las posibilidades existentes para los puntos que dos rectas pueden tener en común. Esto lo ayuda a elaborar las diferentes posibilidades para el conjunto solución de un sistema. Contesta la pregunta 9 diciendo que "*No, porque estas dos no son paralelas distintas y si dibujo otra el punto de corte sigue siendo el mismo*". Para la pregunta 10 dice que puede dibujar rectas coincidentes con las dadas. Si bien este alumno logra un buen desempeño algebraico en la pregunta 4, vemos que sus argumentos provienen de interpretaciones que se realizan en el plano de lo geométrico. Para la pregunta 11 presenta el sistema formado por las ecuaciones $x + y = 3$ y $x - y = 1$ explicando que buscó dos ecuaciones no equivalentes que tuvieran por solución el par (2, 1). Su respuesta refleja dominio en el plano de lo algebraico interpretando adecuadamente el concepto de solución tanto para una ecuación como para un sistema, utilizando argumentos numéricos. También da cuenta de que conoce el concepto de ecuaciones equivalentes y de que para que el sistema tenga solución única las dos ecuaciones del sistema no deben ser equivalentes. Utiliza el concepto de ecuaciones equivalentes para responder a la pregunta 12 diciendo que buscó una ecuación con solución (2, 1) y luego la multiplicó para obtener una ecuación equivalente que tiene iguales soluciones. En la pregunta 13 contesta que "*No, porque la recta no tiene como solución el par (3,4)*". En 14 contesta que "*No, porque si tiene 2 soluciones tiene infinitas*". En la pregunta 15 dice que es posible lograr lo pedido representando una recta coincidente con la dada. En la pregunta 16 dice que ya la contestó. Para este estudiante un sistema de ecuaciones *"Son un conjunto de ecuaciones que tienen relación entre sí"* y una solución de un sistema *"Es un par ordenado que verifica simultáneamente las ecuaciones del sistema"*. En su explicación vemos que reflexiona en el modo analítico-aritmético, sin embargo en las restantes actividades dio cuenta de sus posibilidades de pensamiento en el plano geométrico, interpretando adecuadamente las situaciones propuestas. Este estudiante conoce bien las posiciones relativas de dos rectas en el plano y utiliza esta información para reflexionar acerca del número de soluciones posibles de un sistema de ecuaciones lineales, lo que redunda en una interpretación acertada del concepto de solución de un sistema.

Araceli (14 años), alumna de la profesora Mari, responde a la pregunta 1 diciendo que "*El sistema no tiene solución porque no hay ningún punto que pertenezca a las tres rectas al mismo tiempo*". De la misma manera contesta las preguntas 2 y 3. Para abordar la pregunta 4 considera el sistema formado por las dos primeras ecuaciones y determina un par ordenado con el que luego estudia si verifica la tercera ecuación del sistema. Como no verifica, responde que "*No existe ningún par (x, y) que verifique las tres ecuaciones*". Agrega además que el conjunto solución del sistema al que llama S es vacío y que el sistema es incompatible. En la pregunta 5 responde a la situación (a) diciendo que "*Sí, ya que las rectas pueden cortarse en un solo punto*" y presenta como representación gráfica un conjunto de tres rectas concurrentes. Para la parte (b) dice que "*No, porque las rectas comparten uno, ninguno o infinitos puntos. De otra forma podría ser pero no serían rectas*" y presenta la siguiente figura.



Ya habíamos destacado que el hecho de pensar en curvas es una heurística que permite a los alumnos discriminar el número de puntos que dos rectas pueden tener en común.

Para responder (c) alude a los mismos argumentos usados en (b) y para la parte (d) dice que las rectas pueden ser paralelas coincidentes. Para responder (e) alude a rectas paralelas disjuntas contestando que sí es posible.

En la pregunta 6 agrega una recta secante a las dos dadas formando la configuración "triángulo" diciendo que "*Este sistema no tiene solución porque gracias a la recta que agregué, no hay ningún punto que pertenezca a las tres rectas a la vez*". En la pregunta 7 presenta rectas concurrentes y dice que "*Este sistema tiene una única solución porque hay un único punto que pertenece a todas las rectas a la vez*". A la pregunta 8 contesta que "*No puedo porque un sistema de ecuaciones tiene una, ninguna o infinitas soluciones. Nunca dos*". Destacamos en esta alumna su conocimiento de la propiedad que hace que un punto sea solución de un sistema que es la de pertenecer a todas las rectas en cuestión y también su conocimiento del número de soluciones que puede tener un sistema. Ya habíamos valorado que estos dos conocimientos favorecían una adecuada interpretación de las situaciones planteadas. A la pregunta 9 responde que *"No puedo. Porque para que un sistema tenga infinitas soluciones todas las rectas tienen que ser paralelas coincidentes y estas dos ya no lo son"*. En este caso la estudiante articula el caso de infinitas soluciones con la representación gráfica correspondiente mostrando que puede transitar con flexibilidad entre el número de soluciones de un sistema y el número de puntos que las rectas deben tener en común.

En la pregunta 10 agrega rectas coincidentes con la dada y responde que "*Este sistema tiene infinitas soluciones porque las tres ecuaciones tienen la misma representación gráfica y son paralelas coincidentes. Por lo tanto al tener infinitos puntos en común, el sistema tiene infinitas soluciones*". Se evidencia en las dos oraciones de su respuesta a esta pregunta, cómo la estudiante es capaz de interpretar a las soluciones como puntos y a los puntos como soluciones. Si agregamos a esto, que en la pregunta 18 dice que solución de un sistema "*Es el par ordenado (o uno de los pares) que verifica a todas y cada una de las ecuaciones que componen el sistema*" podemos observar que existe una clara articulación entre dos modos de pensamiento, el AA y el SG, lo que entendemos le permitió un muy buen desempeño a lo largo de todo el cuestionario.

Maximiliano (14 años), alumno de la profesora Mari, responde en 1 diciendo que "*El sistema no tiene solución porque no hay un punto en común entre las tres rectas, y por lo tanto, no hay un par ordenado que verifique las tres ecuaciones simultáneamente*". Destacamos en la respuesta de este alumno su flexibilidad de pensamiento para poder ver el concepto solución del sistema como punto con características particulares que él mismo explicita y como par ordenado también con una propiedad que aclara en forma precisa. Entendemos que su forma de pensar da cuenta de que es capaz de realizar un tránsito flexible entre dos modos de pensamiento que le posibilita, por un lado, una interpretación adecuada de la situación y por otro, dar una interesante respuesta que adopta dos puntos de vistas.

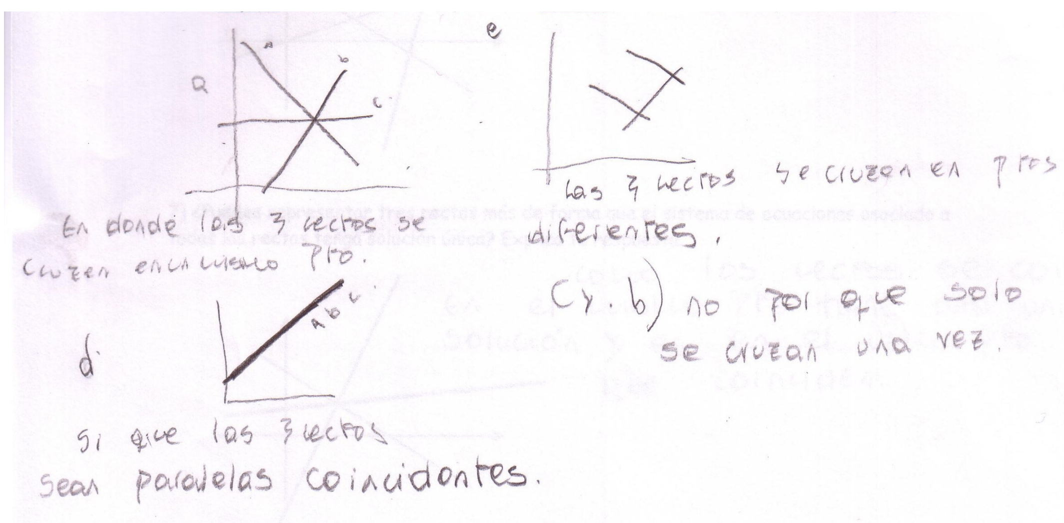
De la misma forma responde las preguntas 2 y 4. En la pregunta 4 despeja x de la primera ecuación y la sustituye en la segunda ecuación, determinando $y = 5$. Con este valor sustituye en la tercera ecuación hallando $x = -6$. Sin explicitar ningún procedimiento de verificación –aunque puede haberla realizado mentalmente– responde que "*El sistema no tiene solución, porque no hay un par ordenado x, y que verifique las 3 ecuaciones simultáneamente*". Responde adecuadamente la pregunta 5 demostrando conocer el número de soluciones posibles para un sistema de ecuaciones lineales aunque no da ninguna explicación de por qué no puede tener solamente dos soluciones. Para el caso de un sistema con solución única presenta rectas concurrentes, para el caso de infinitas soluciones presenta rectas concurrentes y para el caso de ninguna solución presenta rectas paralelas. En la pregunta 6 agrega una recta secante a las dos dadas formando la configuración "triángulo". En la pregunta 7 representa rectas concurrentes en un punto y en la 8 dice que "*Un sistema de ecuaciones no puede tener dos soluciones exactamente, puede tener, infinitas, una o ninguna solución*". En la pregunta 9 contesta que "*No, el sistema tiene una solución, y no podría tener infinitas ya que las rectas están superpuestas*". Conocer el número posible de soluciones de un sistema y su correspondiente representación gráfica lo ayuda a dar una respuesta acertada a la situación. En la pregunta 10 representa rectas coincidentes con las dadas. En la pregunta

11 presenta el sistema formado por $x + y = 3$ y $3x - 2y = 4$ dice que "*Primero, invento una ecuación cualquiera, luego sustituyo (x, y) por (2, 1) y busco un resultado*". Para este estudiante la ecuación es solamente el miembro que tiene "letras", ya que él primero plantea una expresión algebraica lineal en x e y, y luego averigua a qué igualarla. Para la pregunta 12 plantea el sistema formado por las ecuaciones $3x + 2y = 4$ y $-3x - 2y = -4$ y agrega que "*Para que tenga infinitas soluciones, los términos y el resultado de la primera deben ser proporcionales a los de la segunda ecuación*", evidenciando conocer la condición de proporcionalidad entre los coeficientes de ecuaciones equivalentes, que estudió con su profesora en clase. En la pregunta 13 contesta que no es posible porque la recta dada ya no pasa por el punto (3, 4) asociando punto solución con punto que pertenece a la recta. En la pregunta 14 contesta que un sistema no puede tener dos soluciones únicamente, argumentando que solo puede tener una, ninguna o infinitas. En la pregunta 15 dice que para que el sistema tenga entre sus soluciones a las dos dadas debe tener infinitas. En la pregunta 16 repite lo contestado en 5. En la pregunta 17 dice que un sistema de ecuaciones "*Es un conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (x, y) que pueden tener una, ninguna o infinitos conjuntos de solución*". Aquí el alumno parece confundir conjunto solución con soluciones, en virtud de que el conjunto solución es único para cada sistema de ecuaciones y son las soluciones las que pueden ser infinitas. De acuerdo al nivel que el estudiante cursa no maneja conocimientos profundos de la teoría de conjuntos sino que su docente trabajó solamente aquellos conceptos de la teoría conjuntista que fueron necesarios para el desarrollo del curso sin constituir un objetivo en sí mismos. Consideramos que las dificultades que tuvo este estudiante al expresarse, no residen en la comprensión del tema (teniendo en cuenta al desempeño que tuvo a lo largo del cuestionario) sino del vocabulario oportuno para expresarse.

En la pregunta 18 dice que una solución "*Es un par ordenado (x, y) que verifica simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Gráficamente, es un punto en común entre las rectas respectivas a las ecuaciones del sistema*". Aquí evidencia una buena articulación entre dos modos de pensamiento que le permiten ver el punto solución como figura geométrica y como par ordenado.

Andrés (15 años), alumno de la profesora Cristina, responde en 1 diciendo que "*Ninguna porque no hay un punto en que se cruzan las tres rectas*". Si bien debería haber dicho "se cortan" en lugar de "se cruzan" demuestra conocer que ninguno de los puntos en que se intersecan las rectas dadas es solución del sistema formado por las tres rectas. De la misma forma responde las preguntas 2 y 3. Para contestar la pregunta 4, realiza una combinación lineal de las tres ecuaciones dadas y determina $x = -6$. Luego sustituye este valor en cada una de las ecuaciones y observa que obtiene diferentes valores para y. Contesta finalmente que "*el sistema no tiene solución porque en las tres ecuaciones y me dio distinto*". El abordaje que realiza de la pregunta es algebraico y evidencia conocer el concepto solución de un sistema como un par de números que debe verificar a la vez las tres ecuaciones. En la pregunta 5 demuestra conocer que un sistema tiene solución única solamente cuando las rectas se cortan en un único punto, que dos rectas pueden tener un solo punto en común, todos o ninguno y que esto determina que un sistema de ecuaciones lineales no pueda tener solamente dos o tres soluciones. En la pregunta 6 agrega una recta secante a las dos dadas que forman la configuración "triángulo". Explica que "*Como las rectas no se cortan en ningún punto podemos decir que el sistema no tiene solución*". En la pregunta 7 presenta rectas concurrentes en un punto y en la pregunta 8 argumenta, al igual que en la 5, que un sistema puede tener una solución o infinitas pero únicamente dos no. Responde acertadamente las preguntas 9 y 10 señalando que para que un sistema tenga infinitas soluciones, las rectas deben ser lo que él llama "*colineales*", refiriéndose a rectas coincidentes por las figuras que presenta. En la pregunta 11 presenta el sistema formado por las ecuaciones $x + y = 3$ y $-x -y = -3$ y explica que "*Busco un sistema cuya solución sea (2, 1) y luego busco una ecuación equivalente a la primera*". Como en la pregunta 12 responde con el mismo sistema argumentando que tiene infinitas soluciones, pensamos que el alumno no prestó atención a que en la pregunta 11 se le pedía un sistema con solución única. En la pregunta 13 evidencia conocer que para que un par ordenado de números sea solución de un sistema, el punto que los tiene por coordenadas debe pertenecer a todas las rectas de dicho sistema. En la pregunta 14 responde que no basándose en que si un sistema tiene dos soluciones entonces tiene infinitas pero solamente dos nunca. En la pregunta 15 presenta una recta coincidente con la dada. En la pregunta 16 dice que ya quedó contestada en la pregunta 5. Para Andrés un sistema de ecuaciones "*Es un conjunto de ecuaciones, que en una gráfica se representan a través de rectas*". Manifiesta en su respuesta que puede ver a las ecuaciones también como figuras geométricas. Consideramos que esto le permitió un buen desempeño a lo largo del cuestionario, ya que no presentó dificultades al interpretar la mayoría de las situaciones dadas. En la pregunta 18 responde que una solución "*Es un par ordenado de números que verifican todas las ecuaciones de ese* *sistema*", concepto que queda en evidencia al ir contestando las preguntas del cuestionario, aun cuando la situación estuviera planteada en el modo geométrico.

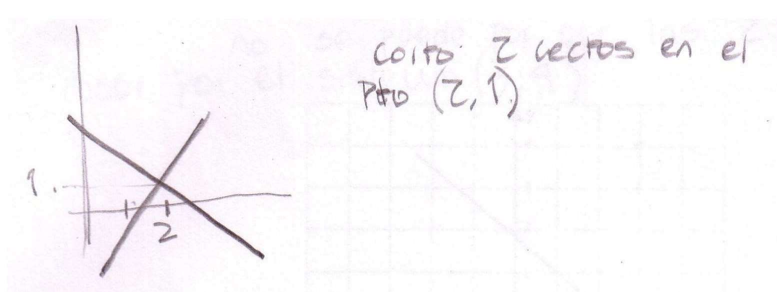
Pedro (14 años), alumno de la profesora Cristina, contesta a la pregunta 1 diciendo que el sistema no tiene ninguna solución porque las rectas se deberían cortar en un mismo punto. De la misma forma responde 2 y 3. Para responder la pregunta 4, realiza una combinación lineal de las tres ecuaciones dadas y con un error operatorio llega a y = - 2,5. Sustituye este valor en la tercera ecuación y comete otro error operatorio llegando a x = - 0,8. Luego sustituye estos valores de x y de y en las tres ecuaciones del sistema y observa que no obtiene igualdades numéricas, a lo que contesta que "*-0, 8; -2, 5 no verifica ninguna de las 3 ecuaciones*". Si bien este alumno comete varios errores operatorios al trabajar algebraicamente, manifiesta conocer que para que una pareja sea solución debe verificar todas las ecuaciones del sistema. Por el otro lado, parece que no conoce el hecho de que los valores que encuentra deben de satisfacer las ecuaciones que utilizó para sacarlos. En la pregunta 5 manifiesta conocer la configuración adecuada para un sistema con solución única y para un sistema con infinitas soluciones. Para el caso de un sistema sin solución presenta dos rectas paralelas cortadas por una secante y dice que un sistema no puede tener exactamente dos ni tres soluciones "*porque solo se cruzan una vez*". Asumimos que el estudiante se refiere a que si dos rectas se cortan tienen un solo punto en común y no pueden tener otro. Presentamos su respuesta a continuación.



Es interesante observar cómo en la parte (a) el alumno señala que las rectas "*se cruzan en el mismo punto*" y en la parte (e) que "*se cruzan en puntos diferentes*" dejando bien en claro que no confunde punto de corte con punto solución.

En la pregunta 6 agrega una recta secante a las dos dadas formando la configuración "triángulo". Justifica su respuesta diciendo que las rectas se cortan en "*lados diferentes*", refiriéndose a puntos diferentes. Para la pregunta 7 presenta rectas concurrentes en un punto y en la pregunta 8 dice que lo pedido "*Es imposible! Estas* [refiriéndose a las rectas] *pueden tener todos los puntos en común o uno solo o ninguno*". Responde adecuadamente las preguntas 9 y 10 evidenciando que conoce que para que un sistema tenga infinitas soluciones las rectas deben tener infinitos puntos en común, es decir, deben ser coincidentes. Refiriéndose a la pregunta 10 Pedro dice así: "*Es posible, ya que tracé las 2 rectas en el mismo eje y al tener infinitos puntos en común tienen infinitas soluciones*". El alumno evidencia en su respuesta que puede ver a las soluciones como puntos de las rectas y como en la pregunta 18 dice que para él una solución "*es un par de nºs que equivalen a las incógnitas y que si las "ponemos"*[32] *en lugar de las mismas solucionan a la vez las 3 ecuaciones o cuantas sean*", podemos decir que es capaz de ver el concepto solución como par, como punto y que además le asigna la propiedad de que verifica todas las ecuaciones del sistema. Creemos que conjuga los tres modos de pensamiento lo que le facilita una interpretación adecuada de las situaciones propuestas.

Deseamos destacar en el trabajo de Pedro su respuesta a la pregunta 11, en virtud de que a diferencia de la mayoría de los estudiantes que optaron por presentar pares de ecuaciones, él presenta un par de rectas que se cortan en el punto (2, 1).



Dadas las dificultades operatorias que evidenció al trabajar con ecuaciones en la pregunta 4, sería comprensible su preferencia por el trabajo en el modo SG, presentando una representación gráfica en lugar de dos ecuaciones. Sierpinska (2000) reporta algunos

[32] Las comillas son del alumno.

casos donde la economía a nivel del pensamiento es una buena motivación para que el estudiante opte por uno u otro modo de pensamiento. En el ejemplo que ella propone un estudiante opta por el modo AE para evitar el trabajo en el modo AA que es más tedioso por los cálculos que implica. En el caso de Pedro interpretamos que opta por dar una respuesta en el modo SG también por razones de economía, evitando pensar en ecuaciones y relaciones numéricas.

Joaquín (14 años), alumno de la profesora Cristina, responde a la pregunta 1 diciendo que "*Ninguna, es un sistema incompatible ya que las 3 rectas no se cortan en un mismo punto. Es decir no tienen ningún punto en común*". Contesta las preguntas 2 y 3 de la misma manera aunque en la 3 agrega que "[…] *y aparte siempre que hay dos paralelas no hay solución*". Si bien manifiesta claramente que los sistemas no tienen solución porque las rectas no tienen ningún punto en común, la presencia de dos rectas paralelas parece darle mayor seguridad a su respuesta o una confirmación de que lo que está contestando está bien.

Para contestar la pregunta 4 considera el sistema formado por las dos primeras ecuaciones del sistema y lo resuelve por el método de sustitución (método que él inventó en clase a partir de la actividad 8 (a) de nuestro diseño. En ese momento se le hizo saber que el método que él proponía se conocía como método de sustitución). Llega a la pareja (-3, 5) y constata que no verifica a la restante ecuación del sistema. No obstante también resuelve el sistema por el método gráfico y al contestar dice que no hay solución porque por el método gráfico las tres rectas no tienen ningún punto en común y agrega que al hacerlo por el método de sustitución "[…] *tampoco me dio. La única solución que hay para la ecuación 1 y 2 no fue, al sustituir la solución de esas 2 en la 3 no me dio correcto*". Además de pensar la situación desde dos puntos de vista, se observa que comprende que el único par que verifica las ecuaciones 1 y 2, sería el único "candidato" a solución pero que al no verificar la ecuación 3 se descarta tal posibilidad. En la pregunta 5 demuestra conocer que rectas concurrentes corresponden a un sistema con una única solución y que para que existan infinitas soluciones, las rectas deben ser coincidentes. Dice que no puede haber exactamente dos o tres soluciones porque dos rectas pueden tener un solo punto en común, infinitos o ninguno. Para el caso (e) presenta tres rectas paralelas distintas. Para responder la pregunta 6 agrega una paralela a una de las rectas dadas. En general, los estudiantes prefirieron en este caso la configuración "triángulo", pero en el caso de este alumno ya comentamos más arriba que la presencia de paralelas parece darle mayor seguridad a la respuesta que está dando.

Responde las preguntas 7 a 10 sin problemas, utilizando configuraciones gráficas adecuadas a las situaciones planteadas. Para contestar la pregunta 11 presenta el sistema formado por las ecuaciones $x + y = 3$ y $x + 2y = 5$ que obtuvo pensando en relaciones numéricas entre el número 2 y el 1. Para la pregunta 12 responde dando una representación gráfica con una recta que pasa por el punto (2, 1). En el caso de este alumno no es claro si no sabe presentar el sistema algebraicamente o si da esta respuesta por razones de economía. Por el desempeño que tuvo en clase durante la enseñanza del tema (se trata de uno de los mejores alumnos de su grupo) nos inclinamos por la segunda interpretación. Responde las preguntas 13 a 15 sin problemas y en la 16 dice que ya la explicó en otra pregunta. En la pregunta 17 dice que un sistema de ecuaciones "*Son más de 1 ecuación que puede tener o no solución*". En 18 manifiesta que una solución "*Es un par ordenado de números*". Por el trabajo realizado en todo el cuestionario demuestra que es capaz de ver las soluciones como pares de números y como puntos del plano y dotarla de una propiedad gráfica que es la de pertenecer a todas las rectas del sistema a la vez (preguntas 1, 2 y 3) o verificar todas las ecuaciones del sistema a la vez (pregunta 4).

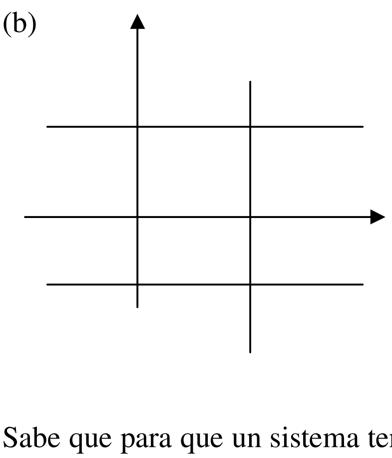
6.3.2.2 Estudiantes que contestan a la pregunta 1 diciendo que el sistema tiene tres soluciones

Como ya dijimos, en dos grupos de estudiantes se experimentó una nueva manera de enseñar sistemas de ecuaciones, no restringiéndolos al caso 2x2 sino que se plantearon a los estudiantes actividades que involucraban sistemas con diferente número de ecuaciones y con diferentes conjunto solución, en situaciones que exigían el trabajo en diferentes modos de pensamiento. Además, las docentes a cargo realizaron hincapié en determinados centros de atención ya reportados en secciones anteriores. El porcentaje de aparición de esta respuesta (el sistema de la pregunta 1 tiene 3 soluciones) fue sustantivamente menor que el que apareció en los tres grupos que estudiamos en la primera fase de este trabajo. En el grupo de la profesora Mari, 5 alumnos de 32 dieron esta respuesta pero deseamos destacar que dos de ellos ya cambian de opinión en la pregunta 2 (diciendo que el sistema no tiene solución) cuando los estudiantes con los que trabajamos en la primera fase del trabajo, de existir un cambio de opinión, aparecía recién de la pregunta 5 en adelante. En el caso del grupo a mi cargo, 3 estudiantes de los 5 que respondieron que el sistema de la pregunta 1 tiene 3 soluciones, cambiaron de opinión en la pregunta 2. Entendemos que los alumnos desarrollaron un pensamiento más versátil que los estudiantes con los que trabajamos en la primera fase de este trabajo. Observamos que lo que posibilitó a estos alumnos un cambio de opinión fue evocar la propiedad de *punto común* para el punto solución. Cuando los alumnos responden solamente aludiendo a puntos de corte es cuando cometen el error de confundir cualquier punto con un punto solución.

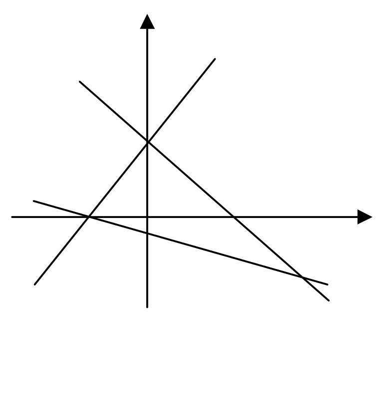
Analizaremos algunos trabajos de estudiantes que ven en cada punto de corte de las rectas de la pregunta 1, una solución del sistema para tratar de entender mejor en qué radicaron sus dificultades.

Paola (14 años), alumna de la profesora Mari, responde a la pregunta 1 diciendo que "*El sistema tiene tres soluciones. Porque hay tres puntos en donde se cortan las rectas*". En la pregunta 2 responde que "*El sistema tiene 6 soluciones. Porque las rectas siguen y además de las 4 que están graficadas aparecen 2 más*", refiriéndose a los dos cortes de las rectas que contienen a los lados opuestos del cuadrilátero. En la pregunta 3 contesta que "*El sistema tiene 2 soluciones porque las rectas se cortan en dos puntos diferentes*". Interpretamos que la estudiante todavía no ha dotado a los puntos solución de la propiedad que los caracteriza que es la de pertenecer a la vez a todas las rectas del sistema. No responde la pregunta 4. En la pregunta 5 parte (a) responde que un sistema puede tener una única solución si las rectas se cortan una vez. Para esta alumna cada punto de corte es una solución y vemos que una concepción como ésta puede llevarla a una respuesta correcta para el caso en que el sistema tiene solución única. Responde las partes (b) y (c) presentando rectas que tienen dos y tres puntos de corte respectivamente, presentando figuras similares a las siguientes.

(b)



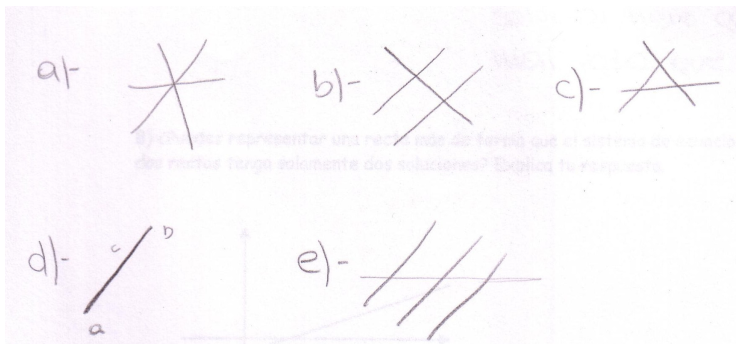
(c)



Sabe que para que un sistema tenga infinitas soluciones las rectas deben ser coincidentes y que un conjunto de rectas paralelas reflejan un sistema sin solución.

En la pregunta 6 dice que "*No porque el sistema ya tiene solución*" y para la pregunta 7 presenta rectas concurrentes en un punto. Para la pregunta 8 dice que "*No, no puedo. Si tiene dos rectas no puede tener dos soluciones porque no hay como se corten en un punto igual*". No queda claro a qué se refiere con *un punto igual* pero interpretamos que sabe que dos rectas no pueden tener solamente dos puntos en común. Responde acertadamente a las preguntas 9 y 10 porque sabe que la configuración gráfica de un sistema con infinitas soluciones es una sola recta. En la pregunta 11 presenta una gráfica con dos rectas que se cortan en el punto (2, 1) y no da ecuaciones. Su respuesta a la pregunta 12 es confusa. Responde "*Sí puede. Por ejemplo el múltiplo de 2 y de 1*" y escribe además que $2 + 1 = 3$, $4 + 2 = 6$ y $8 + 4 = 12$. Podría estar pensando en ecuaciones equivalentes (su profesora le enseñó a obtenerlas multiplicando ambos miembros de una ecuación dada por un número real no nulo) pero sin lograr explicitar las incógnitas de la ecuación. En la pregunta 13 responde que "*No, no puedo. Para eso necesitaría otra recta más*". La alumna se refiere a que agregando una sola recta más no podría lograrlo pero sí agregando dos más y dibujándolas de forma que se corten en el punto (3, 4). Aun cuando la recta dada no pasa por este punto, esto no constituye un obstáculo para ella porque para esta estudiante cada punto de corte de las rectas tomadas de a dos es una solución. Con el mismo criterio responde la pregunta 14 diciendo que precisaría dos rectas más. Responde 15 diciendo que sí es posible representando la recta "*sobre la recta trazada*" y agrega que el sistema tendría infinitas soluciones. No agrega nueva información en la pregunta 16. En la pregunta 17 dice que un sistema "*Son dos o más ecuaciones para resolver*" y que una solución "*Es lo que resuelve al sistema de ecuaciones*". Cuando se refiere a la palabra *resolver* o *resuelve* no es claro el significado que asigna, podría ser simplemente un rótulo que ha visto en algunas de las actividades de clase donde se le pedía resolver un sistema y por tanto ella sabe que un sistema es algo que es pasible de ser resuelto, aun cuando no le asigne a esa palabra un significado preciso. Esta estudiante contesta todo el cuestionario sin enfrentar conflictos porque ella puede formar sistemas con tantas soluciones como se le solicite con tal de que tenga la posibilidad de formar tantas rectas secantes dos a dos como sea necesario. Como ya señalamos, a la alumna le falta dotar al punto solución de la propiedad de pertenecer a todas las rectas a la vez.

Karina (14 años), alumna de la profesora Mari, responde a la pregunta 1 diciendo que "*El sistema tiene tres soluciones porque las rectas se cortan en tres puntos*". En forma análoga responde las preguntas 2 y 3. En la pregunta 4 responde que el sistema no tiene solución pero basada en la expresión 0 = - 8 a la cual llega cometiendo errores operatorios. Contesta la pregunta 5 basada en que cada punto de corte de las rectas tomadas de a dos, es una solución de un sistema. Esta idea le permite dar respuestas acertadas para los casos de solución única, infinitas o sin solución, como podemos ver en su trabajo.



En la pregunta 6 es coherente con lo contestado en 5. Dice que no puede agregar otra recta porque el sistema ya tiene solución. A pesar de la figura que es capaz de presentar en la pregunta 5 (a), en la pregunta 7 dice que no es posible agregar más rectas para que el sistema tenga solución única. Dice que "*No, porque para que tenga una única solución tiene que tener solo una más para que tenga solo una*". Interpretamos que en este momento su mente evocó la imagen de un sistema 2x2 con solución única. En la pregunta 8 contesta que sí es posible pero no realiza ningún trazado. En la pregunta 9 contesta que no porque las rectas deberían "*estar una encima de la otra*". En la pregunta 11 presenta una gráfica con una sola recta que pasa por (0, 0) y por (2, 1) y dice "*Lo hice, buscando el número 2 en la x y el número 1 en la y y luego tracé el punto e hice la recta*". Al considerar una sola recta, estaría planteando un sistema con infinitas soluciones y no con solución única como se le pide. No es claro tampoco por qué representa una sola recta. En la pregunta 12 responde que sí y vuelve a trazar la misma recta que en la pregunta 11 pero representando además el punto (2, 4), para evidenciar que hay otra solución además de la (2, 1) que es lo que se le pide. Aparentemente para ella las rectas siempre deben pasar por el origen. Esto queda reflejado en su respuesta a la pregunta 13 cuando dice "*No, porque si hago el par (3, 4), la solución va a ser (1, 1) porque se van a cortar las rectas ahí*". La estudiante visualiza que de unir el origen con el punto (3, 4), esta recta cortaría a la dada en (1, 1) y por tanto este último par sería la solución y no el (3, 4) que es el que se pide. No es claro por qué hace pasar a todas las rectas que traza por el origen en virtud de que ha trabajado en clase con representaciones de diferentes rectas del plano. En la pregunta 14 responde que "*No, porque ya están los pares*". No es claro a qué se refiere la estudiante. En la pregunta 15 responde que sí pero no escribe ni dibuja nada y en la pregunta 16 no agrega nada. En la pregunta 17 contesta que "*Es un sistema de ecuaciones que hay que resolver para llegar a una solución*". Evidencia al igual que Paola un enfoque operacional, el sistema es algo a resolver. En 18 responde que una solución "*Es la finalización del sistema de ecuaciones*". Ve la solución como un producto a obtener luego de ese *resolver* al cual hace referencia en la pregunta anterior. No aparece un significado claro asociado a la palabra solución más que la idea de que es un producto que se obtiene luego de realizar un proceso con el sistema.

Macarena (14 años), alumna de la profesora Cristina, responde a la pregunta 1 que "*El sistema tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos*". En la pregunta 2 dice que hay 6 soluciones, los cuatro puntos que se visualizan en el gráfico y los que surgen del corte de las rectas que contienen a los lados opuestos del cuadrilátero. En la pregunta 3 responde que "*El sistema tiene 2 soluciones porque se cortan en dos puntos*". Observamos que esta estudiante considera que cada punto de corte de las rectas tomadas de a dos constituye una solución del sistema. Carece de una propiedad asociada a este punto. En la pregunta 4 contesta que hay una solución que para ella "*es -8; 1*". Realiza una tabla de valores para graficar cada una de las rectas del sistema (con errores en las coordenadas de los puntos). Solamente grafica dos de las rectas y como tiene error al determinar una de ellas, observa que se cortan en el punto de coordenadas (-8, 1). No es claro por qué no grafica las tres rectas del sistema si posee tres tablas de valores.

En la pregunta 5 contesta presentando rectas que se cortan de a dos en tantos puntos como se le solicite. Para la parte (a) presenta rectas concurrentes en un punto, en (b) dos rectas paralelas cortadas por una secante, en (c) la configuración "triángulo", en (d) rectas coincidentes y en (e) rectas paralelas. Volvemos a destacar cómo la idea de esta alumna de identificar en cada punto de corte una solución, la lleva a dar respuestas acertadas para los casos de solución única, infinitas o sin solución. El problema de Macarena es que no asocia ninguna propiedad al concepto solución. En la pregunta 6 es coherente con su idea de que punto de corte indica solución, diciendo que no puede agregar otra recta porque ya hay una solución representada. En la pregunta 7 presenta rectas concurrentes. En 8 dice que agregando una sola recta no es posible ya que con una sola recta más solamente podría generarse una sola situación. Está pensando en dos rectas secantes pero no surge la idea de que un sistema no puede tener solamente dos soluciones porque dos rectas no pueden tener sólo dos puntos en común. Ella piensa que si pudiera agregar dos rectas, sí podría conseguir dos puntos de corte (de las rectas tomadas de a dos) y por tanto dos "soluciones". En la pregunta 9 responde que no es posible porque las rectas deberían ser coincidentes y en la pregunta 10 presenta rectas coincidentes. En la pregunta 11 presenta el sistema formado por las ecuaciones $x + y = 3$ y $2x + y = 5$ que obtuvo pensando en relaciones numéricas a partir del 2 y el 1. En la pregunta 12 presenta las expresiones $0x + 0y = 0$ y $0x + 0y + 8 = 8$ que si bien todos los pares ordenados de reales las verifican, no cumple ser ecuaciones de primer grado como se pedía. En 13 contesta que no es posible diciendo que las rectas no pueden cortarse en (3, 4). En la pregunta 14 contesta que "*No, porque la única forma sería haciendo las rectas coincidentes pero habría más de 2 soluciones*". En su respuesta la alumna está considerando que puntos comunes a las rectas son soluciones pero no logra aplicarlo a otras situaciones o tal vez conoce el hecho de que rectas coincidentes representan una situación de infinitas soluciones y nada más, como si se tratara de un rótulo. Para la pregunta 15 propone considerar una recta coincidente con la dada. En la pregunta 16 repite lo hecho en la pregunta 5 sin agregar nada nuevo. En la pregunta 17 contesta que un sistema es "*2 ecuaciones con las cuales se obtienen las coordenadas de una recta*". Su respuesta no es clara aunque con *coordenadas* podría referirse a los pares ordenados que buscamos para obtener puntos con los cuales graficar las ecuaciones del sistema dado. Es decir, dadas dos ecuaciones, supongamos que queremos representar gráficamente el sistema, lo que haremos será buscar dos pares solución para cada una de las ecuaciones. Estos pares son coordenadas del plano cartesiano y tienen asociado un punto. Al graficar los dos puntos tenemos determinada la recta y representando las dos rectas podemos resolver el sistema por el método gráfico por ejemplo. Con esta interpretación, para esta alumna, un sistema es un conjunto de dos ecuaciones que se resuelve por el método gráfico. En la pregunta 18 responde que "*Una solución es un par ordenado de números. Que son las coordenadas de una recta*". Su respuesta es coherente con su idea de sistema. Si con el sistema obtiene *coordenadas de una recta* entonces para ella, una solución son las *coordenadas de una recta.* Ve al sistema operacionalmente pues a partir de ese sistema se obtiene "algo" y una solución es ese "algo". Si bien articula par ordenado con punto de una recta, no tiene una propiedad asociada al par ordenado solución.

Emiliano (14 años), alumno de la profesora Cristina, contesta en la pregunta 1 que el sistema tiene tres soluciones porque las rectas se cortan en tres puntos diferentes. En la pregunta 2 contesta que el sistema tiene seis soluciones, los cuatro puntos que se visualizan en el gráfico y los que surgen del corte de las prolongaciones de las rectas representadas. En la pregunta 3 responde que el sistema tiene dos soluciones porque las rectas se cortan en dos puntos diferentes. En la pregunta 4, como veremos, cambia de opinión. Realiza un abordaje geométrico haciendo una tabla de valores para cada ecuación y graficando las rectas correspondientes. Contesta que "*No porque al realizar la gráfica las rectas no se cortan en ningún punto las tres juntas*". Recién aquí parece evocar la propiedad de que el punto solución debe pertenecer a todas las rectas a la vez. A partir de aquí es coherente con este cambio de opinión. En la pregunta 5 presenta rectas concurrentes en la parte (a), en la parte (b) contesta que "*No, porque después que se cortan en un punto es imposible que las tres rectas se vuelvan a cortar en otro*" y en (c) que no es posible porque si no puede haber dos soluciones no podrá haber tres. Para el caso (d) presenta rectas concurrentes y para el caso (e) tres rectas paralelas distintas. En la pregunta 6 agrega una recta que forma con las dadas la configuración "triángulo", reafirmando nuevamente su cambio de opinión respecto de lo contestado en la pregunta 1. En 7 presenta rectas concurrentes y en la pregunta 8 manifiesta que no es posible porque las rectas pueden tener un punto en común o tenerlos todos pero no solamente dos. Para responder la pregunta 9 contesta que "*No es posible porque no existe una recta que al trazarla coincida con todos los otros puntos, a la vez, de las otras dos rectas*". Intenta enfatizar el aspecto de coincidencia de las rectas pero también debería haber señalado que de hecho las dos rectas dadas no son coincidentes con lo cual no es posible agregar otra recta para que el sistema tenga infinitas soluciones. En la pregunta 10 representa dos rectas coincidentes con la dada y agrega que las tres ecuaciones serían equivalentes. En la pregunta 11 presenta el sistema formado por las ecuaciones $x + y = 3$ y $2x + y = 5$ que formó estableciendo relaciones numéricas entre 2 y 1. No responde la pregunta 12. En la pregunta 13 contesta que no es posible porque la recta dada no pasa por el punto (3, 4) evidenciando que para que el par sea solución debe pertenecer a las dos rectas a la vez. En la pregunta 14 responde que no es posible porque la recta dada no pasa por esos puntos. Si bien los puntos están marcados con rojo en la figura, seguramente no los ve e interpreta incorrectamente los puntos que corresponden a las coordenadas dadas. No contesta la pregunta 15 y dice que la 16 ya la contestó en la pregunta 5. Contesta a la pregunta 17 diciendo que un sistema de ecuaciones "*Son un grupo de ecuaciones que tienen por lo menos una solución*". No es claro por qué exige que el sistema tenga por lo menos una solución cuando a lo largo del cuestionario ha demostrado conocer sistemas sin solución. En la pregunta 18 dice que una solución "*Son* *dos números que verifican las ecuaciones que aparecen dentro del sistema a la vez*". Su interpretación es adecuada, rescata la condición de que verifique a la vez todas las ecuaciones. No está presente en la idea de solución que explicita la imagen geométrica del concepto, si bien la utilizó reiteradas veces para responder y mostró poder relacionar los aspectos algebraicos con los gráficos.

6.3.2.3 Estudiantes que contestan a la pregunta 1 dando otro tipo de respuestas

En esta categoría tenemos a 2 estudiantes de la profesora Mari y a 1 de la profesora Cristina.

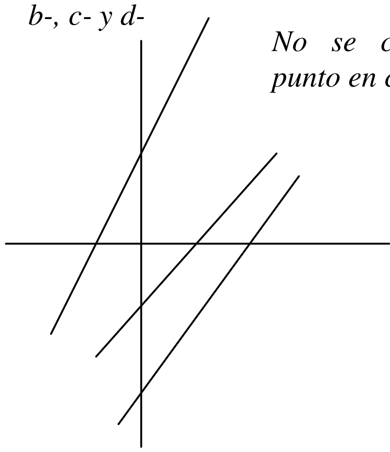
Jimena (14 años), alumna de la profesora Mari, respondió a la pregunta 1 de la siguiente manera: "*El sistema puede tener tres y más ecuaciones porque puede que en una recta haya más de una ecuación asociada*". Pensamos que no entendió lo que se le preguntaba porque en su respuesta parece estar confundiendo número de soluciones con número de ecuaciones del sistema. En la pregunta 2 contesta que "*El sistema no tiene solución porque no hay ningún punto en común que verifique simultáneamente al sistema*" y a partir de allí tuvo un excelente desempeño en todo el cuestionario por lo que nos concentraremos en el otro estudiante de la profesora Mari, que es quien evidenció dificultades. Se trata de Gonzalo de 15 años, quien contestó a la pregunta 1 que "*El sistema tiene infinitas soluciones ya que como está asociado a tres ecuaciones puede tener más soluciones con otras ecuaciones*". El alumno parece creer que aumentando el número de ecuaciones de un sistema puede aumentarse el número de soluciones. En la pregunta 2 contesta que el sistema tiene infinitas soluciones y en la pregunta 3 dice que el sistema tiene una sola solución. En la pregunta 4 contesta que "*Si tiene solución, puede llegar a tener infinitas soluciones siempre que sea como es el ejemplo: (2, 4, -8)*". Los números 2, 4 y -8 son los segundos miembros de las ecuaciones dadas y aunque su respuesta es confusa pensamos que estos números lo hicieron evocar la propiedad que estudió con su profesora de que multiplicando una ecuación por un número real no nulo, obtenía una ecuación equivalente. De ahí que hable de infinitas soluciones.

En la pregunta 5 parte (a) contesta que sí diciendo que "*Puede tenerlas debido a sus tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas*". En la parte (b) dice que "*No, tiene que tener o 3, o una, o infinitas*". En la parte (c) contesta que "*Sí porque tiene las tres ecuaciones*", en (d) que "*Sí porque podemos obtener infinitos resultados*" y en (e) "*No porque en este caso lo mínimo que puede tener es uno*". Lo que podemos interpretar a partir de su trabajo, que es muy confuso, es que para este alumno todo sistema tiene por lo menos una solución. Luego el número de soluciones que sigue a 1 es el que corresponde al número de ecuaciones, esto es, si tengo tres ecuaciones puedo tener 3 soluciones y luego existe la posibilidad de que el sistema tenga infinitas soluciones. No responde las preguntas 6 a 15 y dice que la 16 ya la contestó (pregunta 5). En la pregunta 17 explica que "*El sistema de ecuaciones es aquel que nos da un resultado por medio de una ecuación, un sistema es un conjunto de ecuaciones para obtener resultados varios*". Parece ver un sistema como algo con lo que se obtienen resultados, quizás una concepción similar a otros casos que reportamos más arriba donde el sistema era algo a resolver. En la pregunta 18 dice que "*La solución de un sistema de ecuaciones es el resultado del sistema de ecuaciones*". Esto nos permitiría realizar otra interpretación de lo que contestó en la pregunta 4 cuando escribió la terna (2, 4, -8) formada por los segundos miembros de las ecuaciones del sistema. Este estudiante está pensando en que los números que están escritos en el segundo miembro de la ecuación permiten formar una solución o quizás, para él, tres soluciones si en lugar de ver una terna está viendo tres números reales. Esto sería compatible con el hecho de que para él un sistema de tres ecuaciones puede tener 3 soluciones (los tres números escritos en los segundos miembros de las ecuaciones). Este fenómeno es reportado por De Vries y Arnon (2004), donde señalan que los estudiantes con los que trabajaron, confunden la solución de una ecuación (o sistema) con la constante que está escrita, en muchos casos, a la derecha de la ecuación (o sistema). Es decir, cuando la ecuación está escrita de la forma $f(X) = k$ con k real. No sabemos qué hubiera respondido Gonzalo de tener términos con incógnitas en ambos miembros de las ecuaciones.

Isabel (14 años), es la única alumna de la profesora Cristina que contestó a la pregunta 1 diciendo que el sistema "*tiene 1 solución porque así lo indica la gráfica porque los sistemas tienen 1 solución*". No queda claro en qué esta pensando porque en la pregunta 2 contesta que el sistema "*tiene 0 solución porque no hay ningún punto que pertenezca a las 4 ecuaciones".* Aquí parece rescatar la propiedad de que el punto solución debe pertenecer a todas las ecuaciones. De esta misma forma contesta a la pregunta 3 diciendo que el sistema "*tiene 0 soluciones*". En la pregunta 4 considera el sistema formado por las ecuaciones 1 y 2 y lo resuelve por reducción, lo mismo con las ecuaciones 2 y 3, como llega a diferentes pares ordenados, contesta que el sistema no tiene solución. En la pregunta 5 contesta en la parte (a) sí, en la (b) no, en la (c) no, en la

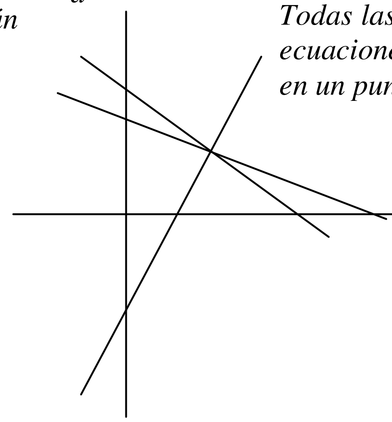
(d) no y en la (e) sí, presentado los siguientes gráficos con las explicaciones que los acompañan.

b-, c- y d-



No se cortan en ningún punto en común.

a-



Todas las rectas de las ecuaciones se cortan en un punto.

e- Sí, porque puede que no se corten en ningún punto ej.: b-, c- y d-

No es claro por qué la gráfica de la izquierda le sirve para ilustrar tanto los casos de dos, tres o infinitas soluciones.

En la pregunta 6 agrega una recta que forma con las dos dadas la configuración "triángulo" y explica que "*Sí, trazando una recta que no pase por donde se cortan las rectas a y b*". Esta respuesta evidencia que cambió de opinión en lo contestado en la pregunta 1. En la pregunta 7 presenta rectas concurrentes en un punto. En la pregunta 8 dice que "*No, porque las rectas solo se cortan en un punto, no en dos*". En la pregunta 9 contesta que "*No porque las rectas solo se cortan en un punto*". Si se refiere a las rectas dadas su justificación es adecuada, si en cambio está pensando en que dos rectas solamente pueden tener un punto en común pero no infinitos sería un problema. Por la respuesta que da en la pregunta 10 donde propone dos rectas "*encima de la ya trazada*" descartamos la segunda interpretación a la pregunta 9. En la pregunta 11 presenta el sistema formado por las ecuaciones $x + y = 3$ y $2x + 3y = 7$ y dice que lo hizo "*sustituyendo las incógnitas por los números dados*" los que nos hace pensar que buscó relaciones numéricas entre 2 y 1. En la pregunta 12 responde que "*No, porque un sistema de ecuaciones solo tiene 1 solución*". Sorprende su respuesta ya habiendo dado evidencias de que concibe sistemas con infinitas soluciones como el de la pregunta 10. En esta pregunta vuelve a repetir los argumentos que dio en la pregunta 1 y que luego abandonó. Podría tratarse de una estudiante que posee dos imágenes asociadas al concepto solución: en una de ellas solamente concibe sistemas con solución única y en la otra sistemas que pueden tener diferentes conjuntos solución. Dependiendo de la imagen que evoque responderá de una u otra forma.

Responde la pregunta 13 diciendo que no es posible porque la recta dada no pasa por (3, 4) y en la pregunta 14 contesta que no porque si traza una recta coincidente con la dada, no tendría solamente a los pares (-3, 2) y (2, -1) sino infinitos. En esta pregunta vuelve a admitir la posibilidad de que un sistema tenga infinitas soluciones y no solamente una como respondió en 12. Responde la pregunta 15 de la misma manera que la 14, quizás porque no llega a comprender la diferencia en los enunciados de las dos preguntas que es sutil para alumnos de esta edad. En la pregunta 16 dice que ya la contestó en 5. Para Isabel "*Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que tienen las mismas incógnitas*". Es una conclusión natural que extrae la alumna a partir de las situaciones que se le han presentado. En la pregunta 18 dice que una solución es "*el valor, o sea, el número que representa a las incógnitas*". En su respuesta no hace mención a la propiedad fundamental de verificar a todas las ecuaciones a la vez. Tampoco incluye ninguna interpretación en el modo geométrico si bien las realizó acertadamente en la mayoría de las preguntas del cuestionario.

6.3.3. Análisis global

La mayoría de los alumnos responden que el sistema de ecuaciones de la pregunta 1 no tiene solución. Estos estudiantes son aquellos que para responder evocan la propiedad que caracteriza a un punto o par solución del sistema: la de ser un punto perteneciente a todas las rectas del sistema o la de ser un par ordenado de números que verifica a todas las ecuaciones del sistema. Esta idea, que puede variar en el modo en que los estudiantes la expresan (punto común, punto que pertenece a las tres rectas), es la que permite a los estudiantes distinguir un punto de corte de las rectas tomadas de a dos, de un punto solución. Los alumnos que piensan de esta forma son los que pueden pensar en un modo analítico-estructural y evidencian además, poder establecer articulaciones entre los tres modos de pensamiento.

Las otras ideas que contribuyen a una adecuada interpretación de las situaciones propuestas son la de conocer el número posible de puntos que dos o más rectas pueden tener en común y su relación con el número posible de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, el concepto de ecuaciones equivalentes y su representación gráfica, y la condición de par ordenado que verifica una ecuación como equivalente a la condición de punto que pertenece a la recta.

Los alumnos que contestan que el sistema de ecuaciones de la pregunta 1 tiene 3 soluciones o que dan otro tipo de respuestas (no reconociendo un sistema sin solución) son los que no pueden pensar en un modo estructural. Con esto nos referimos a que si bien puede haber una articulación entre los modos algebraico y geométrico (ya que de alguna manera estos alumnos han podido establecer –incompleta o parcialmente– una articulación entre puntos y soluciones), esta articulación resulta insuficiente ya que los estudiantes no pueden trascender la visión del punto de corte de las rectas tomadas de a dos como punto solución, por carecer de la propiedad que debe caracterizar a ese punto que es la de pertenecer a todas las rectas del sistema. En general, estos alumnos, son los que ven un sistema de ecuaciones como lo que se puede hacer con él. Lo que hemos llamado una visión operacional del sistema. Estos estudiantes responden la pregunta 1 a partir de un reconocimiento de la situación desprovisto de propiedades, el punto solución no es más que un punto de corte. Los alumnos que logran cambiar de opinión son los que pueden evocar la propiedad que caracteriza a un punto solución que es la de pertenecer a todas las rectas del sistema a la vez.

Para que un alumno pueda evocar esta propiedad debe poseer una definición personal del concepto solución (por ejemplo: la solución es un par que verifica todas las ecuaciones del sistema o es un punto común a todas las rectas del sistema o es un punto que pertenece a todas las rectas del sistema) y por tanto la celda de la definición del concepto contendrá esa definición. De acuerdo a Vinner (1991), sabemos que no es suficiente poseer una definición para poder usarla y que entre en juego en la resolución de problemas. Es necesario proponer al estudiante situaciones que no puedan ser resueltas consultando solamente la imagen. Los estudiantes que no acceden al modo de pensamiento estructural son los que no tienen información en la celda de la definición del concepto solución o los que teniéndola no pueden establecer vínculos con esa información, sin embargo estos estudiantes tienen más que los primeros el potencial para cambiar de opinión.

6.4 Conclusiones y recomendaciones didácticas referidas al segundo objetivo de investigación

De acuerdo al trabajo realizado por los estudiantes, observamos que para la mayoría de los estudiantes con los que experimentamos la forma de enseñanza propuesta, fue posible alcanzar un modo de pensamiento estructural en este nivel de escolarización (14-15 años) y que el estudio del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales requiere de avances en este modo de pensamiento.

La resolución de tareas que ponen en juego diferentes modos de pensamiento contribuye a desarrollar un mejor entendimiento del concepto y posibilita que el estudiante pueda recurrir a diferentes heurísticas para responder a las situaciones.

Las tareas que diseñamos para ser usadas durante la enseñanza del concepto fueron altamente provechosas para poner en juego el concepto solución de un sistema en diferentes modos de pensamiento y con ello contribuir a una visión del concepto que abarque su complejidad.

Destacamos la importancia de dotar al punto solución de la propiedad que lo caracteriza. Aun cuando esta puntualización se haga en la enseñanza de los sistemas 2x2, puede pasar inadvertida por el alumno ya que el punto de corte de las rectas es el único punto de corte que aparece a ser visualizado y esa propiedad no adquiere la relevancia que tiene pues no se le presentan al alumno situaciones donde deba discernir entre una u otra situación. Es así que recomendamos no reducir la enseñanza del concepto solución de un sistema al caso de los sistemas 2x2, sino que sugerimos presentar a los estudiantes situaciones que involucren sistemas con diferente número de ecuaciones y que tengan diferente conjunto solución, situaciones en las que el alumno deba explicar por qué tal o cual punto (par) es solución del sistema o por qué tal o cual punto (par) no lo es.

Las actividades que diseñamos fueron de gran utilidad en la construcción del concepto por parte de los estudiantes y entendemos importante continuar trabajando en el desarrollo y diseño de este tipo de actividades que como ya señalamos, se tratan de preguntas de giro, actividades de construcción, actividades de "dar un ejemplo", preguntas de reflexión (Zazkis y Hazzan,1998) y actividades novedosas (Oktaç et al., 2007). Estas situaciones ponen en juego diferentes modos de pensamiento, procuran su articulación y tienen por objetivo que el alumno construya el concepto de solución de un sistema.

En cuanto a las recomendaciones para la enseñanza del tema “Concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas”, recomendamos que se tengan en cuenta los siguientes aspectos:

- Se introduce la ecuación lineal con dos incógnitas. Se analiza qué representan esas dos incógnitas. Las incógnitas se pueden nominar con distintas letras. La ecuación lineal tiene infinitas soluciones. Esas soluciones son parejas ordenadas de números reales. Cada pareja es *una* solución y no dos soluciones. Condición gráfica que cumplen estos pares solución. Obtener pares solución para una ecuación mediante diversos procedimientos: mentalmente, algebraicamente, gráficamente. No toda ecuación es lineal.
- Dada una ecuación lineal con dos incógnitas, investigar si un par dado es o no solución de la ecuación utilizando diferentes representaciones: la algebraica y la gráfica. La relación geométrica de pertenencia entre punto y recta como equivalente a la relación algebraica de par ordenado que verifica la ecuación. Trabajar con puntos en los cuatro cuadrantes.
- Los sistemas de ecuaciones no son presentados únicamente en el ámbito de los sistemas 2x2, sino que se trabaja el concepto solución en diferentes tipos de sistemas lineales con dos incógnitas: con dos, tres o más ecuaciones. Todavía no se introducen los métodos de resolución algebraicos sino que se trabaja ayudándose de las representaciones geométricas pero también analizando algebraicamente si un sistema dado tiene o no determinado par solución o los alumnos inventan un sistema de ecuaciones que tenga una solución dada. El trabajo no se remite únicamente al caso de solución única, sino que se presentan sistemas con diferente conjunto solución. Este trabajo se realiza acompañado del análisis de las posiciones relativas de dos, tres o más rectas en el plano, según corresponda. Las configuraciones posibles en cada caso permitirán a los estudiantes analizar que existe un invariante: un sistema de ecuaciones lineales admite solución única, infinitas o ninguna. El estudio de las posiciones relativas de las rectas en el plano permitirá que el alumno tome contacto con diversas configuraciones para un sistema sin solución y que extraiga la configuración característica de un sistema con solución única y la de un sistema con infinitas soluciones: el de rectas concurrentes y el de rectas coincidentes respectivamente. Esto le permitirá situar su atención en el tipo de configuración en lugar de ponerla en los puntos de corte de las rectas si los hubiere.

- Proponer actividades donde explícitamente el alumno deba argumentar por qué un sistema de ecuaciones lineales no puede tener exactamente dos o tres soluciones y en general, por qué un sistema no puede admitir un número entero de soluciones mayor que uno. El estudio de las posiciones relativas de las rectas en el plano asociado a la noción de solución de un sistema lo ayudará a descartar las distintas posibilidades, aunque podrá recurrir a otras nociones *sui generis* para dar explicación a esto.
- Se introduce la noción de ecuaciones equivalentes. Se pide a los estudiantes que presenten ejemplos de ecuaciones que representan la misma recta y de sistemas indeterminados e incompatibles dados en forma tanto algebraica como gráfica.

Luego el docente podrá introducir los métodos algebraicos de resolución en la forma que esté habituado a trabajarlo con sus estudiantes y mostrar otras visiones complementarias de un sistema de ecuaciones presentándolos como modelos de situaciones problemáticas que permiten arribar a una respuesta del problema tal como sugiere Häggström (en progreso) y trabajar los tránsitos entre diferentes representaciones de un sistema (lenguaje verbal, gráfico, algebraico) tal como lo recomienda Segura (2004).

En síntesis, sugerimos enseñar el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, no restringido al ámbito de los sistemas de dos ecuaciones. Podemos ofrecer a los estudiantes diferentes tareas, donde tengan que enfrentar distinto tipo de situaciones que involucren dos o más ecuaciones lineales. También recomendamos que los sistemas de ecuaciones deberían ser presentados en diferentes modos de pensamiento como los presentados por Sierpinska (2000): el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural. Diferentes maneras de pensar a los objetos matemáticos permitirán a los estudiantes una comprensión más profunda de ellos.

Consideramos que de esta forma, los estudiantes construirán una visión más amplia del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales que les permitirá en el futuro aprender estructuras más generales y abstractas.

REFERENCIAS

Acuña Soto, C. (1998). La ubicación espacial de conjuntos de puntos en el plano. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 203-223). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ball, D. L. (2000). Working on the inside: Using one´s own practice as a site for studying mathematics teaching and learning. In A. Kelly y R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education,* 365-402. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Barrera, J., Cano, O., Cervantes, J. (1998). Coexistencia del pensamiento sintético y analítico y el concepto de solución en un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. Tesina de Especialidad. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Barrera, J. (2008). Modos de pensamiento en la solución y planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con dos incógnitas. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Belcredi, L. & Zambra, M. (1998). Gauss 3. Montevideo: La Flor del Itapebí.

Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A. & Ravaioli, N. (1997). Matemática 3. Montevideo: Editorial Fin de Siglo.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (La Pensée Sauvage), 4(2), 165 –198. En español en
http://fractus.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm
(20/01/ 2007)

Burton, L. (2002). Methodology and Methods in Mathematics Education Research: Where is « the why » ? En S. Goodchild y L. English (Eds.). *Researching Mathematics Classrooms. A critical examination of methodology*. Praeger Publishers, 1-10.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands. **53**(3), 255 – 270.

Alcocer, I. (2007). Dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en contextos algebraico y geométrico. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.

Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, **32** (1), 9-13.

Coulange, L. (2001). Enseigner les systèmes d´équations en troisième. Une étude économique et écologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **21** (3), 305-354.

Cutz, B. (2005). Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.

Czarnocha, B. & Prabhu, V. (2005). Teaching-Research and Design Experiment – two methodologies of integrating research and classroom practice. HBCSE, TIFR. En http://www.hbcse.tifr.res.in/episteme1/themes/OP_Czarnocha_PrabhuModified.pdf (20/03/2007)

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. et Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, Vol. XXVII, 1, 33 – 64.

DeVries, D., Arnon, I. (2004). Solution-What does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 55-62.

Dreyfus, T., Hillel, J. & Sierpinska, A. (1999). Cabri-based Linear Algebra: transformations. Paper presented at *CERME-1* (First Conference on European Research in Mathematics Education, Osnabrück, August 1998). En http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html. (18/02/2006)

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En R. Cambray, E. Sánchez & G. Zubieta (comp.), *Antología en educación matemática, material de apoyo para el seminario de educación matemática 1*. Maestría en Ciencias, Especialidad en Matemáticas Educativas, Nivel Medio Superior, Cinvestav-IPN, pp. 125-141.

Duval, R. (1993). Sémiosis et Noésis Conférence APMEP, IREM en Lecturas en Didáctica de la Matemática, Escuela Francesa, DME-Cinvestav-IPN, pp. 118-144.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2002). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Ed. Universidad del Valle.

Eslava, M. & Villegas, M. (1998). Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano. Tesina de Diplomado. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Fernández, W. & Corradino, J. (2001). Geometría analítica y álgebra. Montevideo: Edición de los autores.

Filloy, E., Rojano, T., Solares, A. (2003). Two meanings of the `equal´ sign and senses of comparison and substitution methods. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 223-229.

Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach. Dortretch: D. Reidel Publishing Company.

Gardner, M. (1981). Inspiración ¡Ajá!. Barcelona: Editorial Labor.

Giraldo, V.; Carvalho, L. M & Tall, D. O. (2002). Theoretical-Computational Conflicts and the Concept Image of Derivative. *Proceedings of the BSRLM Conference*. Nottingham, England, 37-42.

Gueudet-Chartier, G. (2003). Geometric thinking in a *n*-space. Actas del CERME-III (Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education 28 February- 3 March 2003, Bellaria, Italia).
En http://fractus.uson.mx/Papers/CERME/TG7_draft/index.html. (17/10/2006)

Häggström, J. (en progreso). The same topic - different opportunities to learn. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds), *Proceedings of MADIF5, The 5th Swedish Mathematics Education Research Seminar, Malmö, January 24-25, 2006.* Linköping: SMDF. En www.mai.liu.se/SMDF/madif5/papers/Haggstrom.pdf . (5/01/2007)

Manzanero, L. (2007). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.

Marines, J. & Monroy, J. (1998). Dificultades en la transición del pensamiento sintético y analítico en sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables. Tesina de Especialidad. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Monroy, A. (2008). Modos de Pensamiento en Solución y Planteamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos con tres o más Variables. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Mora, B. (2001). Modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.

Moschkovich, J. (1999). Students´ use of the *x*-intercept as an instance of a transitional conception. *Educational Studies in Mathematics*, **37** (2), 169-197.

Moschkovich, J. & Brenner, M. E. (2000). Using a Naturalistic Lens on Mathematics and Science Cognition and Learning. En A. E. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, Erlbaum, 457-486.

Ochoviet, C. (2005). ¿A.B=0 $\Rightarrow$ A=0 $\vee$ B=0? Reflexiones e implicaciones en la enseñanza de la matemática. Tesis de Maestría. CICATA-IPN. México.

Oktaç, A., García, C., Ramírez, C. (2007). Diseño de Actividades: Ejemplos de Álgebra lineal. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López, C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. México: Ediciones Díaz de Santos, 315-327.

Panizza, M., Sadovsky, P., Sessa, C. (1995). Los primeros aprendizajes algebraicos. Comunicación REM 95-96.

Panizza, M., Sadovsky, P., Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, **17** (3), 453-461.

Peréz Donoso, L. (1998). Pasaje de registros: Ecuaciones. Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de Matemática. Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Ramírez, C. (2005). Dificultades que presentan los estudiantes en los sistemas de ecuaciones lineales en los modos geométrico y analítico. Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Ramírez, C. (2008). Concepciones de los estudiantes de nivel superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.

Ramírez, M. (1997). El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN. México.

Raymond, A. & Leinenbach, M. (2000). Collaborative action research on the learning and teaching of algebra: a story of one mathematics teacher´s development. *Educational Studies in Mathematics*, **41** (3), 283-307.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *RELIME*, **7** (1), 49-78.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, **26** (2-3), 191-228.

Sierpinska, A (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America, 25-28.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Skemp. R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 267-307.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning. En D. Tall (ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer. Dordretch/Boston/London, 65-81.

Wittmann, E. (1998). Mathematics Education as a “Design Science”. En A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, 87-103. Kluwer Academic Publishers. Great Britain.

Zazkis, R. (2002). Do we know the difficulties of our students? Connecting research and teaching practice. *Mathematics and Education Reform Forum Newsletter*. **14** (3). 6-9. En http://www.math.uic.edu/~mer/pages/. (18/02/2007)

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization?. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America.

ANEXO

ENTREVISTAS

Entrevista pautada a la Prof. Martina

¿Cómo enseña el tema sistemas de ecuaciones en 3º año? Le pedimos que nos explique cómo introduce el tema y la secuencia de enseñanza que sigue.

Comienzo planteando un problema que dé lugar a una ecuación con dos incógnitas de forma de que vean que no existe una única solución al problema. Luego introduzco otro dato que dé lugar a otra ecuación con dos incógnitas de modo que se vea que la solución al problema planteado sea la raíz común a ambas ecuaciones. A partir de allí me manejo con lo que ya saben (ecuación de la recta) y graficando las funciones asociadas a cada una, discuto la solución al sistema y al problema. Luego vemos la necesidad de obtener una forma de llegar a la solución de una forma más precisa que graficando y doy la resolución analítica de los sistemas.

¿Explica a los estudiantes qué es un sistema de ecuaciones? Le pedimos que nos justifique por qué sí o por qué no y en caso de respuesta afirmativa nos relate cómo lo hace.

Sí, explico lo que es un sistema. Lo hago porque explico que un sistema es un conjunto de varias ecuaciones con varias incógnitas donde la solución al mismo es, si es que la hay, la raíz común a todas las ecuaciones. Plantear varias ecuaciones aisladas, no es lo mismo que plantear un sistema. En el primer caso puedo resolver cada ecuación independiente de las demás. En cambio en el segundo caso, al resolver un sistema busco la raíz común a todas las ecuaciones.

¿Cómo explica a los estudiantes el concepto "solución" de un sistema?

Como dije antes, explico que la solución de un sistema es la raíz común a todas las ecuaciones que integran el sistema. Digo que la solución es el conjunto formado por las raíces comunes a todas las ecuaciones. Si no las hay, la solución es vacía.

¿Qué es para usted un sistema de ecuaciones?

Un conjunto de varias ecuaciones donde lo que se busca es la o las raíces comunes a todas ellas.

¿Existe alguna relación entre el número de ecuaciones y el número de incógnitas?

Creo que si hablamos de un sistema con igual cantidad de ecuaciones que incógnitas es posible llegar a una única raíz del mismo, aunque no es necesariamente seguro. En el caso de que halla más incógnitas que ecuaciones, no y en el caso contrario puede ser que tenga datos de más. Pero en ninguno de los tres casos es cien por ciento de esta manera. Es decir que creo que no existe una relación en este sentido. (Nunca me había detenido a pensar mucho en esta pregunta y la estoy contestando sin detenerme a pensarlo, tal como si me lo estuvieras preguntando en vivo)

¿Qué es para usted resolver un sistema de ecuaciones?

Hallar las raíces comunes a todas las ecuaciones que integran el sistema.

¿Considera usted que es posible trabajar el concepto "solución" de un sistema de ecuaciones independientemente de los métodos de resolución de sistemas?

Sí, creo que una cosa es el concepto de solución de un sistema y otra es cómo llegar a dicha solución.

Entrevista pautada a un profesor de Bachillerato

¿Cómo enseña el tema sistemas de ecuaciones lineales en 6º año? Le pedimos que nos explique cómo introduce el tema y la secuencia de enseñanza que sigue.

En la parte práctica comenzamos con un repaso operatorio que incluye lo que se vio en años anteriores sobre la resolución de sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3 aplicando sustitución, igualación y reducción, ya que en Geometría Analítica aplicamos todos ellos en la parte práctica fundamentalmente. En la parte teórica comenzamos con Matrices y Determinantes y luego vemos como una aplicación, la resolución de sistemas lineales, en particular se ve el método de Cramer. Completamos el estudio del tema con el método de escalerización (Gauss) haciendo especial hincapié en la aplicación de la equivalencia de ecuaciones y por supuesto en la discusión de los sistemas paramétricos por ambos métodos, estudiando en especial los grados de libertad de los sistemas compatibles indeterminados y la forma de expresar la solución en este caso.

¿Explica a los estudiantes qué es un sistema de ecuaciones lineales? Le pedimos que justifique por qué sí o por qué no y en caso de respuesta afirmativa nos relate cómo lo hace.

Sí. Es un conjunto de m ecuaciones con p incógnitas de exponente 1, cuyos coeficientes son números reales (los coeficientes son elementos de un cuerpo K). Lo hago porque creo que es importante a este nivel (6° año) formalizar determinados conceptos, que además en el caso específico de esta orientación, son de gran aplicación prácticamente en toda su carrera.

¿Cómo explica a los estudiantes el concepto “solución” de un sistema?

El conjunto p de números reales que verifican simultáneamente las m ecuaciones del sistema. Por supuesto explicamos que el sistema puede tener infinitas soluciones o no tener solución.

¿Qué es para usted un sistema de ecuaciones lineales?

Es lo mismo que explico a los estudiantes.

¿Existe alguna relación entre el número de ecuaciones y el número de incógnitas?

No.

¿Qué es para usted resolver un sistema de ecuaciones lineales?

Hallar el conjunto solución.

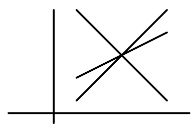
¿Considera usted que es posible trabajar el concepto “solución” de un sistema de ecuaciones independientemente de los métodos de resolución de sistemas?

Sí.

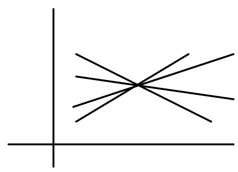
Entrevista a Verónica (15 años, alumna de la Prof. Martina)

Entrevistadora: Primero te quería preguntar: ¿qué es para vos la solución de un sistema de ecuaciones?
Verónica: Es uno o más números que cuando los cambiás por las letras de las ecuaciones te dan el resultado de esa ecuación, pero tiene que ser en ambas el mismo número.
E: Tú me dijiste ambas, ¿y si fueran más de dos ecuaciones?
V: Supongo que las tres también, el mismo número.
E: ¿Y si fueran cuatro o cinco ecuaciones?
V: También, el mismo número.
[...]
E: Y gráficamente, ¿cómo te das cuenta que un sistema tiene solución?
V: Cuando se cortan las rectas.
E: Porque para ti donde se cortan... ¿qué es?
V: Ese número, o sea el punto ese marca los números que son la solución.
E: Bien, vamos entonces ahora a ver qué pensás de esta actividad, dice: ¿es (2,1) solución del siguiente sistema? ¿Cómo harías para averiguar si lo es?
V: Cambiaría la *x* por el 2 en todas las ecuaciones y el 1 por la *y*.
E: A ver cómo lo haces…
V: Ta, esta da, esta no, entonces ya no es solución.
E: ¿Podrías contestar entonces?
(escribe)
V: Que no.
E: Ahora te voy a preguntar si los pares (3,2), (2,1) y (1,4) son soluciones de ese sistema ¿cómo lo harías?
V: Y tendría que hacer en cada ecuación, poner esos pares…
3 + 2 = 5 está bien, 3 – 2 = 1, 3.3 = 9, +2 no, este no da entonces este no es solución, este ya tampoco es, y este tampoco.
E: Ninguno, bueno, ¿podrías contestarlo? No es ninguno porque...
(Escribe)
Entrevistadora: Pasemos ahora a ver el trabajito que hicimos en la clase. Acá se te presentaba... ¿te acordás? Un sistema de ecuaciones donde están representadas las rectas asociadas a ellas y te preguntaban cuántas soluciones tenía el sistema. Tú contestaste que el sistema tiene tres soluciones porque las rectas se cortan en tres puntos distintos, ¿podrías decirme cómo te das cuenta que el sistema tiene tres soluciones?
Verónica: No estoy segura si tiene tres o ninguna porque ta, hay tres rectas que representan los tres sistemas, eh... las tres ecuaciones del sistema, pero creo que se deberían cortar todas en el mismo punto para que ese fuera el resultado, entonces capaz que eso está mal.
E: A ver, ¿y cuál sería el problema? Vamos a suponer que las coordenadas de este punto fueran solución ¿podría ser o no?
V: O sea...
E: Si yo te pregunto, a ver, vamos a suponer que este punto tuviera coordenadas (-4,3), ¿podría ser el par (-4,3) solución del sistema?
V: Podría ser solución de esas dos ecuaciones no de todo el sistema, porque falta la otra recta que debería también tener un punto ahí.
E: ¿Y por qué cambiaste de opinión?
V: No sé, razoné.
E: ¿Ya lo habías pensado antes o ahora te diste cuenta?
V: No, ahora.

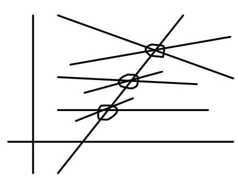
E: Acá, cuando resolviste la pregunta 4 dijiste que el sistema no tenía solución porque no todas las rectas se cortan en un punto y yo vi que acá estas rectas se te cortaban en un punto. Entonces quería saber por qué habías dicho que el sistema no tenía solución porque no todas las rectas se cortaban en un punto.
V: Porque creo que el sistema tiene que tener los mismos números, o sea cuando los cambiás, los mismos números pero en las tres ecuaciones, acá sólo había dos, la otra quedó afuera.
E: Entonces, ¿podrías representar gráficamente un sistema de ecuaciones que tuviera solución?
V: ¿Cualquiera?
E: Sí, cualquiera.
Presenta lo siguiente:



E: ¿Y si el sistema fuera de cuatro ecuaciones lineales?
Presenta lo siguiente:

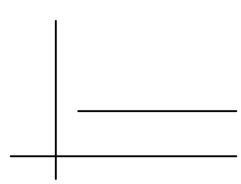


E: Y decime, ¿puede ser que un sistema de ecuaciones tenga 3 soluciones?
V: Sí.
E: ¿Te animás a dibujar uno que tenga 3 soluciones?
(silencio)
V: No sé... ¿En una sola gráfica?
E: Sí, un sistema, cuando estamos hablando de un sistema y lo representamos gráficamente lo hacemos conjuntamente ¿verdad? Es decir, todas las rectas las representamos en el mismo sistema de ejes.
Presenta lo siguiente, circulando los tres puntos de corte como se muestra en la figura:



E: Bueno y ¿cuáles serían allí las tres soluciones?
V: Los tres puntos.
E: Sería un sistema... ¿de cuántas ecuaciones Verónica?
V: Ese de tres.
E: Yo te estoy preguntando el último.
V: Siete.
E: O sea que para ti, este sistema tendría siete ecuaciones y tendría 3 soluciones.
V: Sí.
E: ¿Cómo te das cuenta que tiene 3 soluciones?
V: Porque no sé, se cortan en tres puntos y cada recta representa una ecuación en el sistema.

E: Y entonces, este sistema, ¿por qué no tiene 3 soluciones?[33]
V: Puede ser, sí, puede ser que tenga 3 ecuaciones.
E: ¿Qué tenga tres...? estamos hablando de soluciones no de ecuaciones, o sea tres ecuaciones de hecho las hay.
V: O sea si estuviera la cuenta, si corregís a ver si está bien capaz que te da bien.
E: ¿A qué te referís con la cuenta?
V: Si cambiás las coordenadas por las *x* y las *y* o las letras, en todas te da, o sea si cambiás todas y te dan los mismos números puede ser.
E: Pero nosotros no tenemos en este caso las ecuaciones, ¿cómo podrías hacer para saber si el sistema tiene tres soluciones?
V: No sé, veo donde se cortan las rectas.
E: Gráficamente, ¿cómo te das cuenta de que hay solución?
V: Porque las rectas se cortan en un mismo punto.
E: ¿Y cada corte te indica una solución?
V: Te indica sí, un par de números.
E: ¿Y cada corte te indica una solución del sistema?
V: No, te indica una solución de la ecuación que representa la recta.
E: A ver, por ejemplo, este punto de corte, nos estamos refiriendo al ejercicio 1, ¿te indica una solución? ¿De qué Verónica?
V: De una ecuación del sistema.
E: Y si yo te pregunto... ¿Este punto de corte te indica una solución del sistema?
V: Ah sí, o no, no sé, porque el sistema son las tres ecuaciones juntas.
E: Sí, ¿entonces?
V: Entonces sí, o no, porque te indica sólo de una, tendría que indicarte de las tres.
E: ¿Entonces cuál es tu conclusión?
V: Que no tiene 3 soluciones.
E: ¿Cuántas tiene?
V: Creo que ninguna.
E: Entonces, este sistema, el primero que dibujaste, ¿cuántas soluciones tiene?
V: Éste una.
E: ¿Este otro? (Refiriéndose al segundo que presentó)
V: Una.
E: ¿Y este otro? (Refiriéndose al tercero que presentó)
V: Éste ninguna, no éste creo que ninguna.
E: Porque tú me habías dicho que este último sistema que habías dibujado tenía tres soluciones.
V: Sí pero no, creo que ninguna.
E: ¿Te parece que ninguna?
V: Sí.
E: ¿Y podrías dibujar uno, Verónica, que tuviera 3 soluciones?
V: No, ni idea cómo.
E: ¿No se te ocurre cómo? ¿Y un sistema que tuviera infinitas soluciones?
V: Sí eso sí, sería así todas las rectas ahí.
Presenta lo siguiente:



[33] Se refiere al de la pregunta 1 del cuestionario que en la primera parte de la entrevista reconoció que no tenía solución.

E: ¿Todas las rectas cómo serían?
V: Eh... superpuestas, todas en una.
E: Y en ese caso habría?
V: Infinitas.
E: Bueno Verónica, muchas gracias.

Entrevista a Rodrigo (15 años, alumno de la Prof. Martina)

Entrevistadora: Primero que nada te iba a pedir que me dijeras qué es para ti la solución de un sistema de ecuaciones.
Rodrigo: No sé, un par de... ay no sé, yo qué sé.
E: ¿Un par de...? ¿Qué te parece?
R: No sé, un par común para tres ecuaciones o para las que sean en ese sistema, resultados para cada incógnita.
E: Y cuando dices *común*, ¿qué quiere decir Rodrigo?
R: El mismo par para cada ecuación.
E: ¿Cómo te das cuenta gráficamente si un sistema tiene solución?
R: Depende de cómo sea la gráfica. Por ejemplo, si en una grafica están representadas tres rectas superpuestas, suponte que fueran tres, tiene infinitas soluciones, o si las tres tienen un punto en común tienen una solución o si las tres son paralelas no hay ninguna solución.
E: Bien, entonces te voy a preguntar Rodrigo, ¿es (2,1) solución del siguiente sistema?[34] ¿Cómo lo harías? ¿Cómo podrías averiguar si el par (2,1) es solución de ese sistema Rodrigo?
R: Bueno, primero si se verifica.
(escribe)
R: No porque tiene que cumplir en las tres, y en ésta ya no así que…
E: ¿O sea que no?
R: No.
E: Ok, bien. A ver éste Rodrigo dice: ¿Son los pares (3,2), (2,1) y (1,4) soluciones de ese sistema?[35]
R: ¿Cómo?
E: Te pregunta si cada uno de ellos es solución del sistema.
(escribe)
R: No, ninguna.
E: ¿Por qué no, Rodrigo?
R: O sea, empecé fijándome con cada una, ésta me verificaba en la primera, en la segunda también, pero en la tercera ya no, y la segunda no me verificó en ninguna, y la tercera en la primera pero en las otras no.
E: Decime Rodrigo y ¿sería posible que tú representaras gráficamente un sistema que tuviera tres soluciones?
R: No.
E: ¿Por qué no?
R: Porque, o sea, no sé, no lo puedo explicar.
E: ¿Querés explicarlo con un dibujo, capaz que te ayuda a dar la respuesta?
R: Si fueran paralelas no tendría ninguna, pero no se pueden cortar solo en tres, o sea se cortan en uno solo.
E: A ver este sistema que dibujaste, éste, ¿qué contestás?
R: No tiene ninguna.
E: ¿El segundo?

[34] Se refiere al sistema de ecuaciones formado por las siguientes ecuaciones: $x - y = 1$, $2x + y = 0$, $x + y = 3$.

[35] Se refiere al sistema de ecuaciones formado por las siguientes ecuaciones: $x + y = 5$, $x - y = 1$, $3x + y = 7$.

R: Éste tiene una y este tiene infinitas soluciones.
E: Si fueran… ¿cómo las rectas?
R: Si las tres estuvieran superpuestas.
E: Bien.
R: Pero por ejemplo esto, yo puse que sí, después me di cuenta que no.
E: ¿Por qué, a ver?
R: Porque cada una de éstas verifica dos de las tres, ninguna verifica las tres.
E: Ok. Y después te quería preguntar, cuando contestaste la pregunta 16, y te preguntaban si un sistema puede tener exactamente dos soluciones y tú dijiste no e hiciste esta gráfica. No entiendo qué dibujaste, que son estas rayitas.
R: Sistema de tres ecuaciones. ¡Ah! hice sólo dos.
E: Porque no entendía si son las rectas o si tachaste que no podía ser.
R: Debo haber tachado, ¡ah para! No, tache, tache. Y en el otro creo que también.
E: No, en el otro parecería que no.
R: No.
E: Eso era lo que no entendía bien, como habías puesto que no y después dibujabas. Bueno, es todo. Muchas gracias Rodrigo.

Entrevista a Bruno M (15 años, alumno de la Prof. Martina)

Entrevistadora: Te quería preguntar en primer lugar, ¿qué es para ti la solución de un sistema de ecuaciones?
Bruno: Son las incógnitas, o sea el número que representan las incógnitas del sistema, que no sabés.
E: ¿Y gráficamente cómo te das cuenta si un sistema tiene solución o no?
B: Porque se tienen que cortar todas en un punto, las rectas las tres ecuaciones o dos, depende del sistema.
E: ¿Depende de la cantidad de rectas que sean?
B: Sí.
E: Bueno, en este caso tú, en la pregunta 1, te acordás que hicimos, contestaste que el sistema "*no tiene ninguna solución porque tiene que haber un punto donde se junten las tres rectas, por lo tanto en cualquiera de los tres casos, funciona para dos de las ecuaciones pero para la otra no*". Entonces quería que me explicaras un poco mejor por qué para ti este sistema no tiene solución
B: Y no porque se tendrían que cortar las tres rectas en un punto, porque se cortan dos, tiene solución de éstas pero con esta no.
E: ¿ Por qué este punto no te está indicando una solución para ti?
B: Porque ya a la otra ecuación no tiene solución.
E: Bueno entonces ahora te voy a hacer esta preguntita: ¿es (2,1) solución del siguiente sistema?[36]
(escribe)
B: No, no es no.
E: ¿Por qué no Bruno?
B: Porque acá sí está bien, pero acá no porque 2.2 = 4 más 1 es 5.
E: Y a ver este otro, te dice: ¿son los pares (3,2), (2,1) y (1,4) soluciones de ese sistema?[37]
B: No, éste ya no, ¿sigo con los demás?
E: Dale.
(escribe)
B: Tampoco.
(escribe)
B: Tampoco.
E: Bueno, entonces Bruno, ¿para ti un sistema puede tener tres soluciones?
B: Sí
E: A ver ¿podrías representar gráficamente un caso?
B: No, no puede.
E:¿Por qué no?
B: Porque puede tener una, si cortan.
E: ¿Si se cortan cómo? ¿Podrías hacer un dibujo?
(escribe)
E: Bueno ¿y en ese caso?
B: Tienen un punto en común donde se cortan y esa es la solución
E: Bien, ¿qué más podría pasar?

[36] Se refiere al sistema de ecuaciones formado por las siguientes ecuaciones: $x - y = 1$, $2x + y = 0$, $x + y = 3$.
[37] Se refiere al sistema de ecuaciones formado por las siguientes ecuaciones: $x + y = 5$, $x - y = 1$, $3x + y = 7$.

B: Puede que no tenga ninguna.
E: ¿Cómo sería la representación gráfica si no tuviera ninguna solución?
B: Tendrían que ser paralelas.
E: A ver.
(escribe)
E: Bien, ¿y qué otra cosa puede pasar?
B: Que tengan infinitos puntos en común, o sea, infinitas soluciones, o sea que sean las dos rectas la misma.
E: Bien, decime Bruno ¿y si el sistema tiene más de dos ecuaciones, qué casos pueden darse?, en cuanto al número de soluciones ¿verdad?
B: Sí, sí, lo mismo.
E: A ver.
(escribe)
E: Bueno, en ese caso ¿cuántas ecuaciones tendría el sistema?
B: Tres
E: Tres ¿y cuántas soluciones?
B: Una.
E: Bien ¿hay alguna otra posibilidad?
B: Sí, que no tenga ninguna.
E: A ver, ¿cómo podría ser la figura?
(escribe)
E: Bien, ¿y hay otra forma en que tampoco tenga solución? ¿Hay otros casos o ésta es la única representación gráfica?
B: Sí, que no se corten las tres en un punto.
E: A ver ¿podrías hacerlo?
(escribe)
E: Bien, entonces éste último que dibujaste ¿se trataría de un sistema?
B: Incompatible.
E: ¿Qué quiere decir?
B: Sin solución.
E: Bien y ¿podría un sistema de más de dos ecuaciones tener infinitas soluciones?
B: Sí.
E: ¿Qué dibujaste ahí Bruno?
B: Es una recta que son todas la misma.
E: Ahí está, entonces este sistema ¿tiene, para ti…?
B: Infinitas soluciones.
E: Entonces ¿es posible que un sistema de más de dos ecuaciones tenga tres soluciones?
B: No.
E: ¿Por qué no?
B: Porque si tiene más de tres ecuaciones nunca, por el método grafico nunca vas a llegar a que se corten todas en un punto se corten tres veces tampoco una, bueno una sí pero o sea, no se puede, con dos tampoco, nunca vas a poder hacer que sean tres o cuatro, ahí va a ser como que va a tener más.
E: Y decime, ¿este último caso que tú dibujaste tiene 3 soluciones el sistema?
B: Sí, tiene 3 imágenes.
E: Tiene 3 imágenes, cuando decíamos 3, te referías a exactamente 3.
B: Ta, exactamente 3 no, pero mas de tres sí.
E: Ok, bueno, muchas gracias Bruno.

Entrevista a Carolina (14 años, alumna de la Prof. Martina)

Entrevistadora: Quería primero preguntarte Carolina ¿qué es para ti un sistema de ecuaciones?
Carolina: es un conjunto de ecuaciones que tienen un mismo resultado, un resultado común, un resultado que resuelve ambas ecuaciones.
E: ¿Y cómo se llama eso que tú llamás ese *resultado* que resuelve todas las ecuaciones?
C: La solución del sistema.
E: Entonces si tú tuvieras que decir ¿qué es para ti la solución de un sistema de ecuaciones?
C: Es la solución de ambas ecuaciones del sistema.
E: Dijiste ambas, ¿y si el sistema tuviera más de dos ecuaciones?
C: Eh, también.
E: ¿Qué tendría que pasar?
C: O sea, es la solución de, por ejemplo si tiene 3 de las 3, y si tiene 4, de las 4.
E: Decime ¿y un sistema de ecuaciones, puede tener más de una solución?
C: Sí, puede tener muchas cuando son superpuestas.
E: Bien, ¿cuántas?
C: Tiene infinitas.
E: Y por ejemplo, ¿un sistema puede tener exactamente 3 soluciones? ¿Un sistema de ecuaciones lineales?
C: No.
E: ¿Por qué no?
C: Porque si se intersec.... , si se cruzan, no si se cortan, perdón, ahí tienen una sola solución porque es en un punto solo, y si no pueden ser superpuestas pero no hay otra forma.
E: Vos sabés que en esta pregunta, la número 1, ¿te acordás lo que hicimos? Muchos compañeros opinan que este sistema tiene 3 soluciones, ¿tú que dices a ello?
C: Para mí es que por ejemplo, esta recta que representa a una ecuación y esta otra recta que representa a la otra ecuación tiene esa solución y lo mismo con ésta y ésta, tienen esta solución, y ésta con ésta. Pero no que tiene 3 soluciones.
E: ¿Por qué no podría tener 3 soluciones para ti?
C: Porque no se intersectan las tres rectas en un mismo punto en común, son de a dos, o sea, dos rectas se intersectan en un punto, otras dos en otro punto y otras dos en otro punto.
E: Bien, y ¿cómo explicarías por ejemplo que este punto no te indica una solución?
C: No sé.
E: Del sistema.
C: No sé, porque para mí es la solución de estas dos, pero si no me indica una solución no..
E: ¿Cómo podrías tú explicar que no te indica una solución del sistema?
C: ¡Ah! porque sólo es la solución de dos ecuaciones y no de las tres, en este caso.
E: ¿Y por qué no es de las tres?
C: Porque falta la otra recta que se intersecte en el mismo punto.
E: Ok, bueno Carolina, ahora te voy a preguntar si es (2,1) solución de este sistema[38]. (escribe)
C: Ésta solución es de éstas dos pero de la segunda no es.
E: Entonces ¿qué contestas? ¿Es solución del sistema?

[38] Se refiere al sistema de ecuaciones formado por las siguientes ecuaciones: $x - y = 1$, $2x + y = 0$, $x + y = 3$.

C: No.
E: Bien, vamos a esta pregunta: ¿son los pares (3,2), (2,1) y (1,4) soluciones del siguiente sistema?[39]
(escribe)
C: Ya me di cuenta que no era ¿sigo haciendo?
E: ¿Qué te diste cuenta en este momento? Contame Carolina.
C: El par (3,2) no es porque es solución de las primeras dos ecuaciones pero no de la tercera y ya empecé a probar con el par (2,1) y la primera no me da y no sé, sigo probando, pero ya con la primera no es solución del sistema y pruebo la otra.
(escribe)
C: Y el par (1,4) es solución de la primera y de la tercera ecuación, pero de la segunda no.
E: Bien. Bueno, Carolina decime, vamos a suponer que tenemos un sistema de más de dos ecuaciones lineales. Quiero que representes gráficamente los casos en que no hay solución del sistema.
C: ¿Cuántos me dijiste?
E: Eh… tengo más de dos ecuaciones.
(escribe)
C: Por ejemplo, si tiene tres, cuando son paralelas no se intersectan, por lo que no tiene solución.
E: ¿Y hay alguna otra posibilidad?
C: Eh… sí por ejemplo si son, como pasaba en el otro, si son tres que se…
E: ¿Podrías dibujarlo?
C: Sí.
(escribe)
P: ¿Se te ocurre alguna otra representación?
C: Eh… representando lo mismo, que se me corten dos pero no una.
E: A ver…
(escribe)
E: Bueno y todos estos casos son casos de sistemas cómo?
C: Sin solución.
E: Vamos a suponer que tenemos un sistema con cinco ecuaciones ¿cómo podría ser una representación gráfica de un sistema de cinco ecuaciones que tuviera solución?
(escribe)
E: Y un sistema de ecuaciones, ¿puede tener 3 soluciones?
C: Eh… no.
E: ¿Por qué no?
C: Porque se tienen que, puede tener una cuando se intersecta en un punto, o puede tener infinitas cuando son superpuestas, pero no tres.
E: Bueno, muchas gracias Carolina.

[39] Se refiere al sistema de ecuaciones formado por las siguientes ecuaciones: $x + y = 5$, $x - y = 1$, $3x + y = 7$.