INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

"UN ESTUDIO SOBRE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA NOCIÓN DE PROMEDIO EN UN CONTEXTO PROBABILÍSTICO "

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

ALLAN TAKESHI DE LA CRUZ OLIVA.

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. GISELA MONTIEL ESPINOSA

CIUDAD DE MÉXICO
NOVIEMBRE DE 2007

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 23 del mes de octubre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

Un Estudio Sobre la Construcción Social de la Noción de Promedio en un Contexto Probabilístico

Presentada por el alumno:

De la Cruz	Oliva	Allan Takeshi
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	5	0	3	9	2

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACIÓN DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

M. en C. Elika Sugey Maldonado Mejía

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 19 del mes de Octubre del año 2007, el (la) que suscribe Allan Takeshi De la Cruz Oliva alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A050392, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra. Gisela Montiel Espinosa y cede los derechos del trabajo intitulado Un Estudio Sobre la Construcción Social de la Noción de Promedio en un Contexto Probabilístico, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección a_sternova@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Allan Takeshi De la Cruz Oliva
Nombre y firma

Dedico ésta tesis con mucho cariño y agradecimiento a mis padres

…gracias; porque después de enseñarme a dar el primer paso,

me fue más fácil aprender a caminar.

Allan Takeshi.

Índice

Tema **Pág.**

CUADROS, TABLAS, DIAGRAMAS, ESQUEMAS, GRÁFICAS, IMÁGENES Y FIGURAS

CUADROS — Pág.

TABLAS

DIAGRAMAS

GRÁFICAS

ESQUEMAS

IMÁGENES

FIGURAS

RESUMEN

Uno de los objetivos del presente trabajo es detectar los motivos por los cuales el concepto de promedio aritmético está tan arraigado en el estudiante que no puede desprenderse de él y lo interpola a otras áreas del quehacer matemático, específicamente el probabilístico. Buscamos entender por qué el alumno tiene problemas en aceptar y reconocer al *valor esperado*[1] como un promedio en éste nuevo escenario.

Una vez planteado el problema de investigación que da origen al presente trabajo de tesis, se procederá a la búsqueda de diferentes investigaciones realizadas sobre el promedio con el fin de establecer un antecedente al respecto.

Posteriormente se realizará un análisis de cómo y dónde se está enseñando el concepto de promedio dentro del sistema educativo mexicano, para lo cual se hace necesaria una revisión de los programas de estudio y libros de texto más utilizados por el docente. Con ello tendremos un panorama de cómo se enseña, para abrir un camino hacia el entendimiento de cómo se aprende, cómo se concibe y cómo se aplica dicha noción matemática.

En el marco teórico se analizará al promedio bajo la construcción social del conocimiento matemático, pues ésta permite la interacción sistémica de las dimensiones didáctica, cognitiva, epistemológica y social en el estudio y explicación de los fenómenos didácticos.

En la componente epistemológica se establecerá la génesis del promedio, su desarrollo y su consolidación en otras áreas de la matemática para dar paso a la componente didáctica, la cual será nuestra explicación de lo que está presente institucionalmente en el sistema educativo mexicano, pues nos permitirá tener un panorama general de cómo surge, se desarrolla y emplea dicha noción en la escuela. La componente cognitiva permitirá establecer nuestra postura ante diferentes elementos de conflicto vinculados al

[1] Conocido también como media o esperanza matemática.

manejo de la noción de promedio. Y puesto que la actividad humana afecta al propio desarrollo de la matemática, es que un acercamiento bajo la componente social nos permitirá comprender porque siendo el promedio una noción matemática escolar que todos los estudiantes conocen y manipulan a cierto nivel no se le asocie un único significado, sino que se le relacione con el contexto donde le dan uso, ya sea a partir del medio escolar o de la vida cotidiana.

Con base en la información recopilada se diseñará una secuencia que introduzca al estudiante en un conflicto con la noción de promedio aritmético, con la finalidad de que éste se percate que no es posible trasladar tal cual éste concepto matemático a la teoría de las probabilidades y comprenda así que ésta noción le es insuficiente para resolver una situación aleatoria. De tal forma que se pueda determinar el vínculo o puente que permita conectar a los escenarios determinístico y aleatorio, al trabajar con dicha noción.

Así mismo se sientas las bases para futuras investigaciones que tengan como elemento modelador al promedio (valor esperado) en contexto probabilística.

ABSTRACT

One of the objectives of the present work is to detect the reasons by which the concept of arithmetic average is so rooted in the student who cannot come off itself and interpolates it to other areas of the mathematical task, specifically the probabilistic. We looked for to understand why the student has problems in accepting and recognizing the awaited value[2] like an average in this one new scene.

Once created the problem of investigation that gives origin to the present thesis work, we'll proceed to the search of different investigations made about the "average" with the purpose of establishing an antecedent on the matter.

Later an analysis of how and where is teaching the concept of average in the Mexican educative system, for this reason is necessary a revision of the training programs and text books most used by the educational one. With this we will have a panorama of the way of how its teach, to lay a way towards the understanding of how it is learned, how it is conceived and how this mathematical notion is applied.

In the theoretical framework, the average will be analyzed under construction social of the mathematical knowledge, because this allows to the systemic interaction of the dimensions didactic, cognitive, epistemological and social in the study and explanation of the didactic phenomena.

In the epistemological component it will established the genesis of the average, their development and its consolidation in the other areas of the mathematical one to take step to the didactic component, which will be our explanation of which is institutionally present in the Mexican educative system, because this will permit us to have a general panorama of how arises, develop, and use this notion at the school.

The cognitive component permits to establish ours posture to different conflict elements in relation with the handling of the notion average. And this since the human activity

[2] well-known also like average or mathematical hope

affects to the own development of the mathematical one, that is an approach under the social component will let us understand why being the average a scholastic mathematical notion that all the students to know and manipulate at certain level, is not associated to only one meaning, but that is related with the context where they give use, this can be in the scholastic environment or in the daily life.

With base in the compiled information we'll design a sequence that introduces to the student in a conflict with the notion of the arithmetic average, with the purpose that he notices that it is not possible to transfer, just like that, the mathematical concept to the theory of the probabilities, and understand that this notion is to him insufficient to solve a random situation. Of such form that can be determined a link or bridge that allows to connect to the deterministic and random scenes, to the work with this notion.

Also the bases for future investigations whose element modeler average (expected value) in probabilistic context.

GLOSARIO

Conceptos

Promedio: Término medio, cantidad igual o más próxima a la media aritmética.

Promediar: calcular el promedio.

Media aritmética: (sinónimo. promedio ponderado). Es una medida de tendencia central, es el valor que resulta de dividir la suma del total de valores de una muestra entre el número de ellos.

Promedio ponderado: Forma un poco más compleja de la media aritmética, cuyo resultado no surge de sumar todos los valores y dividirlos por el número total de valores, sino de asignarle un peso (ponderación) a cada valor para que algunos valores influyan más en el resultado que otros.

Valor esperado: (sinónimo. esperanza matemática), concepto equivalente a la media aritmética, como una forma más sofisticada de ésta. Es el promedio ponderado de los valores posibles de la variable aleatoria ponderados por su probabilidad.

Variable aleatoria: Dado un experimento aleatorio cualquiera cuyos sucesos elementales posibles pueden identificarse fácilmente mediante un número real, se denomina Variable Aleatoria x, al conjunto de estos números. Las variables aleatorias pueden ser continuas o discontinuas.

Contexto determinista: Es aquel en el cual cuando se reproduce en fenómeno en las mismas condiciones, se puede predecir con certeza cual va a ser el resultado.

Contexto aleatorio: Aquel contexto en el cual un fenómeno aunque se reproduzca bajo condiciones idénticas, el resultado no se puede predecir.

Definición de uso: Es aquella definición que solamente indica la forma en cómo calcular una determinada noción matemática, (en este caso el promedio).

Hemiplejia conceptual: Término designado para referirse al concepto que es entendido a través únicamente de una de las diferentes posibles definiciones existentes para dicha noción matemática, resultando así incompleta y quedando limitada y restringida en sus usos e interpretaciones.

Siglas

NMS: Nivel Medio superior

NS: Nivel Superior

IPN: Instituto Politécnico Nacional

CONALEP: Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica

CETIS: Centro de Estudios Tecnológicos Industriales y de Servicios

CCH: Colegio de Ciencias y Humanidades

CBTIS: Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios

CECyT: Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos

UNAM: Universidad Nacional Autónoma de México

UAM: Universidad Autónoma Metropolitana

INTRODUCCIÓN

Se asume que muchos de los objetos matemáticos ya han sido probados y que no hay que cuestionarlos, que se pueden aplicar correctamente aunque no se entiendan. Tal es el caso del concepto de promedio, del cual se da por hecho que su paso de un contexto determinístico a un contexto aleatorio es automático. Sin embargo, hemos detectado en el aula, que esto no se logra cuando se le pide al alumno que calcule el promedio en un caso aleatorio éste no toma en cuenta la probabilidad de cada una de las variables aleatorias y aplica el promedio aritmético.

Planteamiento del problema

Quien suscribe; ha detectado, a través de la experiencia adquirida como docente, que la noción de *promedio aritmético* que el alumno aprende en su educación primaria y secundaria la traslada al contexto probabilístico, lo cual genera un conflicto a la hora de calcular el valor esperado (que también es un promedio) en la teoría de las probabilidades. Es decir; el concepto de promedio conocido como la suma de todos los elementos dividida entre el número de éstos, expresado como:

$$\mathrm{x} = \frac{(\mathrm{x}_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{\mathrm{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

…se transpone al promedio conocido como *valor esperado*, utilizado en probabilidad, y que debe calcularse sumando todas las variables aleatorias multiplicadas cada una por su probabilidad. Esto es:

$$E[x] = \sum_{x=1}^{n} xp(x) \quad \text{; para el caso discreto}$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad \text{; para el caso continuo}$$

Ésta situación se observa conflictiva cuando trabajamos con cursos de probabilidad; pues para trabajar con el valor esperado, el alumno debe tomar en cuenta la probabilidad de cada una de las variables aleatorias.

Es necesario pues, indagar sobre cómo viven y se modifican tales conceptos en el aula y entender el papel que juega la aleatoriedad en el estudiante para poder responder a preguntas tales como: ¿de que manera se aborda y enseña la noción de promedio en los distintos niveles educativos?, ¿en que nivel educativo se introduce por primera vez tal noción matemática?, ¿qué significado adquiere el concepto de promedio en el estudiante?, ¿qué nociones matemáticas requieren mayor atención para preparar el camino hacia la teoría de probabilidades?, entre otras.

Objetivos

Se busca no solo identificar los factores que hacen que el alumno transponga la noción de media aritmética a la de valor esperado, sino también detectar aquellos elementos que deben ser tomados en cuenta para una correcta aplicación del promedio en un contexto probabilísitico y establecer así el vínculo entre estas dos nociones.

Esto se pretende lograr con el diseño de una secuencia que enfrente al estudiante a un conflicto con su noción de promedio y que éste logre percatarse de que es incorrecto aplicar la media aritmética tal cual en una situación aleatoria. Logrando así un nuevo conocimiento: el valor esperado.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

Investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje del promedio

En éste capítulo se reportan algunas de las investigaciones que del promedio se han hecho, lo cual cumple con dos objetivos: tener un marco de referencia al respecto de otros estudios y un antecedente de los resultados que se han obtenido sobre dicho tema. Existen varios artículos, trabajos de investigación, tesis, etc., que analizan al promedio y sus implicaciones didácticas a la hora de trabajar dicha noción con alumnos de diferentes niveles educativos. Sin embargo, investigaciones relacionadas con la Probabilidad son aún escasas, razón por la que quizá hasta este momento no existe ningún trabajo que vincule al promedio con el valor esperado utilizado en probabilidad.

En ésta parte se reportan aquellas investigaciones que consideramos fundamentales en nuestro trabajo de investigación, pues se parte de ellas para sustentar el presente trabajo y permite, a su vez, dirigir nuestros esfuerzos al medio que nos interesa.

1.1 "Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos" de Simón Mochón y María Margarita Tlachy.

En éste trabajo se reporta que el promedio es un concepto que se aplica en circunstancias muy variadas y con datos presentados en diferentes formatos, lo cual se traduce en dificultades. Se reconoce que es un concepto muy importante usado con frecuencia en la vida cotidiana, por ejemplo para da un valor representativo sobre registros de datos variados: calificaciones, encuestas, censos de población, salarios, velocidades, etc., los cuales se encuentran inmersos en varias disciplinas escolares.

En dicha investigación se define media aritmética o promedio aritmético como *la suma de todos los datos dividida entre el número total de éstos*. Los autores señalan que el promedio parece ser un concepto sencillo, sin embargo, la variedad de situaciones en las que surge y las distintas formas en las que se pueden organizar los datos lo hacen bastante más complejo y concluyen que esta es la razón por la cual al promedio se le dan diferentes interpretaciones, específicamente como una regla de cálculo.

El propósito de dicha investigación fue averiguar las concepciones de los estudiantes de diferentes niveles educativos sobre el promedio, así como las estrategias que utilizan al calcular el promedio dada una serie de datos en distintos formatos. Diseñaron un cuestionario que permitió conocer no sólo la forma en cómo calculan los estudiantes el promedio, sino también la interpretación que le dan al valor del promedio. Sus resultados pueden sintetizarse en:

- buena parte de los estudiantes consideraron el valor más frecuente (la moda) como el promedio.

- la interpretación del promedio es más una afirmación del valor, es decir; las interpretaciones se basan en el resultado numérico y no en su intuición sobre la respuesta.

En general se encontró que las respuestas muestran poca *idea conceptual*[3] de lo que significa el valor del promedio. Mochón y Tlachy concluyen que el promedio no es un concepto fácil de entender y lo atribuyen a la enseñanza de tipo de reglas de cálculo y recetas sin que los estudiantes obtengan una comprensión de los conceptos, lo cual provoca que sólo apliquen el algoritmo que conocen de manera mecánica. Establecen entonces que los problemas relacionados con el cálculo del promedio con datos en formatos diferentes, se encuentran principalmente en los estudiantes del nivel medio. Éstos aplican lo que el autor denomina *fórmulas falsas,* es decir, variaciones incorrectas del algoritmo, como sólo sumar. Éstos no solo son errores de cálculo, sino que reflejan que los estudiantes tienen otras concepciones del promedio como por ejemplo, promedio = sumar.

[3] Los autores utilizan este término para referirse a las nociones de representatividad relacionadas con el promedio.

También se reporta que existe una interpretación deficiente del valor obtenido del promedio. Finalmente da una serie de sugerencias para mejorar las prácticas de la enseñanza del promedio, las cuales se citan a continuación:

1. Discutir una gama amplia de tipos de problemas en los que aparezca el promedio.
2. Presentar datos en diferentes formatos.
3. Hacer énfasis en el significado del valor obtenido del promedio en cada caso particular.
4. No enseñar prematuramente la fórmula del cálculo del promedio. Basarse más bien en descripciones numéricas sobre el procedimiento de este cálculo y la razón de éste.

1.2 “Epistemología y Didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales, ponderativo y equilibrium, en la construcción del saber físico matemático” de Carlos Rondero.

En éste trabajo de tesis se hace mención de que en nuestro país (México), la enseñanza de la media aritmética está restringida a la parte algorítmica, mostrando unos cuantos ejemplos de tipo numérico, lo que lleva a los estudiantes a mecanizar sin más significado que sumar los valores de los datos dados y dividir entre el total de ellos, situación que dificulta resolver problemas de contexto y propicia el trasladar las fórmulas de la media simple a problemas cuya relación es más bien con la media aritmética ponderada. Esto produce un vacío de significación y en consecuencia un *sesgo conceptual*[4].

Su investigación gira en torno a encontrar las nociones que vinculan a la aritmética con el cálculo y determina que uno de los conceptos fundamentales en ésta transición es la media aritmética, ya que dicho concepto tiene una relación directa con el promedio en matemáticas y con el equilibrio en física.

---

[4] Término que el investigador emplea para referirse a una desviación o alejamiento del concepto original.

1.3 “Nexos en el razonamiento proporcional: palancas, media aritmética, promedio ponderado, mezclas, porcentajes de bateo y velocidades” de Flores Peñafiel.

En este trabajo se describe la diversidad de circunstancias en las que aparece el promedio. El artículo cita dos maneras equivalentes de calcular el promedio, dependiendo de cómo están presentados los datos. Para una lista de datos: x_1, x_2, …, x_n, el promedio se expresa como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Si por otro lado, los datos están enumerados con sus frecuencias absolutas respectivas (f_1, f_2, …, f_n), el promedio se expresará de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Este procedimiento es conocido como algoritmo del promedio ponderado (el número de veces que aparece cada dato es su peso o su ponderación).

1.4 “The development of children’s concepts of the arithmetic average” de Strauss y Bichler.

Éste es otro de los trabajos pertinentes es el estudio sobre el desarrollo del concepto de promedio aritmético en niños, en él se mencionan siete propiedades fundamentales del promedio:

1. El promedio se localiza entre los valores extremos.
2. La suma de las desviaciones desde el promedio es cero.
3. El promedio es afectado por valores diferentes a él.
4. El promedio no es necesariamente igual a uno de los valores que fueron sumados.
5. El promedio puede ser una fracción que no tiene contraparte en la realidad física.

6. Cuando se calcula el promedio, deben ser tomados en cuenta los valores de cero.
7. El promedio es un valor representativo de los valores que fueron promediados.

1.5 “Children’s concepts of average and representativeness” de Mokros y Russell

En éste trabajo se reporta la investigación de representatividad del promedio con niños en grados escolares del cuarto al octavo grado y encontraron cinco acercamientos diferentes al resolver problemas de promedio, los cuales se dan a continuación:

1. Promedio como moda,
2. promedio como algoritmo,
3. promedio como algo razonable,
4. promedio como punto medio,
5. promedio como punto matemático de balance.

1.6 “Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales” de Batanero y Godino.

En (Batanero, 2000) se analizan las dificultades que los alumnos pueden encontrar en las medidas de tendencia central. Se establece que a los alumnos se les enseñan la definición de la media, mediante una notación sencilla en la cual se evita la sumatoria y la ponderación, se emplean algunos ejemplos de aplicación, limitando al cálculo de las medidas de tendencia central a conjuntos sencillos de datos.

Entre otras cosas Batanero concluye que el cálculo de la media parece sencillo, sin embargo, encontró que incluso alumnos universitarios no pueden calcular adecuadamente el promedio en problemas en los que más bien se aplica el promedio ponderado y en algunos casos encontró que el algoritmo se aplica de forma mecánica sin comprender su significado. Batanero reflexiona además sobre los *varios promedios* utilizados en estadística (media, mediana y moda), medidas de valor central y dispersión relacionadas con características del conjunto de datos.

Dado que la Estadística ha tenido un desarrollo reciente, Batanero afirma que es necesario un periodo dilatado de enseñanza a lo largo de la educación primaria y secundaria para lograr el progresivo acoplamiento de los conceptos estadísticos.

1.7 “An historical phenomenology of mean and median” de Bakker y Gravemeijer.

En ésta investigación se reporta una *fenomenología histórica*[5] sobre el promedio y la media. Su objetivo es identificar el problema o situación que crea una necesidad de organizar ciertos fenómenos y los conceptos que intervienen en ese fenómeno. Uno de los problemas que asocian al origen del promedio de manera intuitiva es el *conteo del número de hojas en una rama*.

El cálculo se hace multiplicando el número de hojas en una sencilla ramita por el número de ramitas en la rama. La selección del promedio de ramitas, envuelve la noción similar a las *representaciones* y *compensaciones*. Es decir, la evaluación representativa de “*a*” tiene un parecido con $n*a$, que es la suma de todos los x_i número de hojas en la rama con n número de ramitas. En términos matemáticos:

$$\sum x_i = n*a\,.$$

Donde: $\sum x_i$ es el número de hojas en la rama y $n*a$ el número de ramas. Este ejemplo no solo es precursor del cálculo intuitivo de la media aritmética, sino que deja entre ver una necesidad por simplificar un conteo. Dichos investigadores concluyen que en los alumnos el promedio eventualmente se acerca a una forma de describir distribuciones en forma de indicador de densidades de datos.

[5] Entendida como un estudio del desarrollo histórico, relacionado con el fenómeno génesis, de un concepto.

A manera de conclusión

Estas investigaciones sientan un antecedente sobre algunos de los problemas que tiene el promedio o media aritmética y nos da muestra de que el problema al cual nos enfrentamos no es nuevo, diversos investigadores han visto la necesidad de reformar aquellos conocimientos que posibiliten un mejor entendimiento de dicha noción matemática. Y los resultados que sus investigaciones han arrojado son una señal de alerta para poner mayor atención a dicha problemática. Ahora bien, puesto que de alguna manera se han mostrado las dificultades de dicha noción y se ha dejado claro que el alumno arrastra el concepto de media aritmética a otras áreas de estudio, es importante decir que todas estas investigaciones se han llevado acabo en el terreno determinista, y que las condiciones en las cuales se trabaja son totalmente ajenas a la aleatoriedad.

Así nuestra investigación pretende analizar un nuevo escenario, el aleatorio. Es ahí donde encontramos el valor del presente trabajo, pues analiza un terreno poco explorado. Situación que esperamos de pie a nuevas investigaciones al respecto del promedio en dicho contexto.

CAPÍTULO II

ESTADO ACTUAL EN LA ESCUELA

Este capítulo busca documentar la forma en la que se enseña el concepto de promedio dentro de los planes y programas de estudio de los distintos niveles del sistema educativo mexicano, así como de los materiales y métodos empleados para su tratamiento, con la finalidad de detectar por qué razones está tan arraigado el algoritmo o la definición escolar de promedio aritmético en el estudiante.

II.1 El promedio en el sistema educativo mexicano

El promedio es un concepto matemático muy utilizado en los distintos niveles del sistema educativo mexicano, es un concepto que se aborda desde el nivel básico primaria y continúa hasta el nivel superior. Sin embargo, su tratamiento se limita a una *definición de uso*[6], es decir, se le define mediante ejemplos clásicos de cálculo de promedio y ello, según la experiencia de aula, podría limitar su esencia y potencialidad, así como su entendimiento en contextos distintos a los que le dan origen. Es por eso que nos hemos dado a la tarea de buscar cómo vive dicha noción en el sistema educativo, para así comprender por qué motivos y causas, si es que las hay, la definición escolar de promedio aritmético está tan arraigado en el estudiante que lo transpone al terreno probabilístico.

Así pues, en este capítulo se presentan los planes y programas de estudio, libros de texto y materiales de apoyo empleados o recomendados institucionalmente, para la enseñanza de dicho concepto en todos los niveles educativos de nuestro país. Posteriormente haremos un análisis de corte didáctico que nos permita conjeturar sus

[6] Utilizamos éste término para referirnos a aquella definición que solamente indica la forma en cómo calcular una determinada noción matemática (en este caso el promedio).

efectos en el discurso matemático escolar y dar así respuesta a las preguntas planteadas en éste trabajo.

II.1.2 Nivel básico[7]

Dentro de los planes y programas de estudio de la educación básica primaria, el concepto matemático de ***promedio***[8] es visto por primera vez, de manera formal, en el 5to grado en la materia de matemáticas bajo la línea temática *Tratamiento de la Información.* Consideramos que el motivo de esto es que para construir el concepto de promedio, en términos matemáticos, el alumno debe tener destreza en las operaciones aritméticas de suma y división, las cuales en éste grado ya se dominan. Sin embargo, de manera informal el término "promedio" ya le es familiar al estudiante, pues comienza a escucharlo desde los primeros ciclos escolares por sus profesores para efectos de evaluación y asignación de calificaciones, aunque el estudiante no tenga conocimiento del procedimiento necesario para calcularlo.

En cada uno de los seis grados del nivel básico se dedica una cuarta parte del tiempo escolar a la enseñanza de las matemáticas. Los contenidos incorporados al currículum giran en torno a seis ejes o *líneas temáticas*[9], a saber:

- Los números, sus relaciones y sus operaciones.
- Medición.
- Geometría.
- Procesos de cambio.
- Tratamiento de la información.
- La predicción y el azar.

[7] Primaria
[8] Por Promedio, nos referimos al Promedio aritmético o media aritmética.
[9] Información extraída del libro *Educación básica primaria, plan y programas de estudio*, Editado por la SEP 1993. Sección: Quinto grado.

La línea temática Tratamiento de la Información se encuentra organizada de la siguiente manera:

- Organización de la información en tablas, diagramas, gráficas de barras o pictogramas.
- Análisis de las tendencias en gráficas de barras: **promedios**, valor más frecuente, la mediana.
- Recopilación y análisis de información de diversas fuentes.

Se consultó el libro de texto oficial, único apoyo tanto para el profesor como para el alumno, para mostrar la forma en que se presenta el concepto de promedio en el nivel básico a partir de 5to grado.

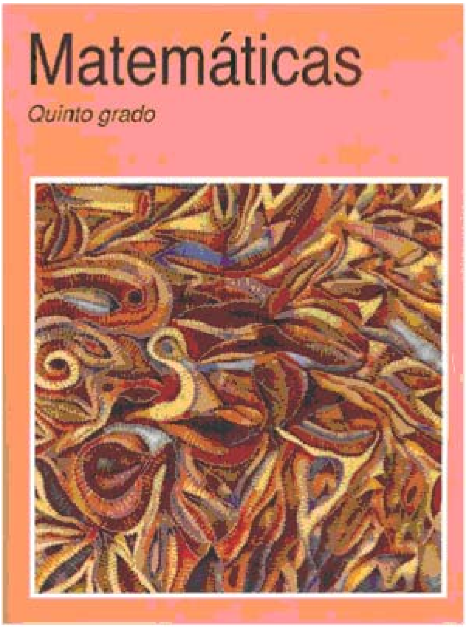


Imagen 2.1 Libro de Matemáticas de quinto grado de primaria

El libro consta de 87 lecciones distribuidas en 5 bloques. La forma de introducir al alumno a la noción de promedio se hace en la lección número 27, bajo el título: ¿Qué tan altos somos?[10]. El texto dice explícitamente:

[10] Lección tomada del libro de 5to grado, Pág. 64.

1. Organiza con tus compañeros de grupo una investigación para conocer la estatura de los alumnos de 5to grado.

Óscar y Ana lo hicieron en su salón. Éstos fueron los datos que obtuvieron en metros:

1.33, 1.34, 1.28, 1.34, 1.38, 1.29, 1.32, 1.32, 1.33, 1.30, 1.31, 1.31, 1.31, 1.33, 1.32, 1.32, 1.33, 1.35, 1.33, 1.36, 1.35, 1.33, 1.34, 1.29, 1.34, 1.33, 1.35, 1.32, 1.35, 1.36.

- Ordena en tu cuaderno los datos de Ana y Óscar, de menor a mayor.
- Junto con tus compañeros, mide la estatura de todos los alumnos del grupo y haz una lista en el pizarrón, ordenando los datos de menor a mayor.

2. Ana propuso encontrar el **promedio** de las estaturas de su grupo. Con su calculadora sumó todas las estaturas y el resultado lo dividió entre el número total de alumnos. Encontró que el promedio de estaturas de su grupo era de 1.328 m.

- Comprueba el resultado de Ana usando tu calculadora. ¿Cuánto te dio la suma? __________ ¿cuántos alumnos hay en la clase de Ana ____________
- Con la ayuda de tu calculadora, encuentra el promedio de los datos de tu salón. ¿Cuál es el promedio de estaturas en tu grupo? ___________________
- Comprueba que el promedio de las estaturas es un valor intermedio entre el menor y el mayor de los datos. ¿Por qué crees que pase esto? Discútelo con tus compañeros.

En promedio, ¿el grupo de Óscar y Ana es más alto o menos alto que el tuyo?

____

- Compara la estura del más alto de tus compañeros con la del más alto de los compañero de Ana y Óscar, ¿cuál es más alto? ___________________________
- Compara la estatura del menos alto de tus compañeros con la del menos alto de los compañeros de Ana y Óscar, ¿cuál es menos alto?_________________

Tabla de frecuencias		
Estatura (metros)	**Marcas**	**Frecuencia**
menos de 1.28		0
1.28	/	1
1.29	//	2
1.30	/	1
1.31	///	3
1.32	/////	5
1.33	///// //	7
1.34	////	4
1.35	////	4
1.36	//	2
1.37		0
1.38	/	1
Más de 1.38		0
Total		30

3. Óscar y Ana se dieron cuenta que algunas de las estaturas se repetían, entonces decidieron hacer la tabla de frecuencias que aparece a la izquierda. La **frecuencia** es el número de veces que se repite cada estatura. Observa con cuidado la tabal y compárala con la lista de datos de Ana y Óscar.

- Haz una tabla de frecuencias con los datos que obtuvieron en tu salón.

¿Cuál es la estatura más frecuente? ______________________

4. Ana y Óscar decidieron también hacer una gráfica de barras con los datos de su grupo y obtuvieron la gráfica que aparece a la derecha. Observa y contesta las siguientes preguntas:

¿Con qué frecuencia se presenta la estura de 1.32 m? ______________

Las frecuencias en la gráfica suben hasta un valor máximo, ¿cuál es éste valor? __________

Fíjate que en el 1.30 m se interrumpe esta tendencia Después del valor máximo, las frecuencias disminuyen. ¿Con qué valor se interrumpe la tendencia a disminuir? ______________________

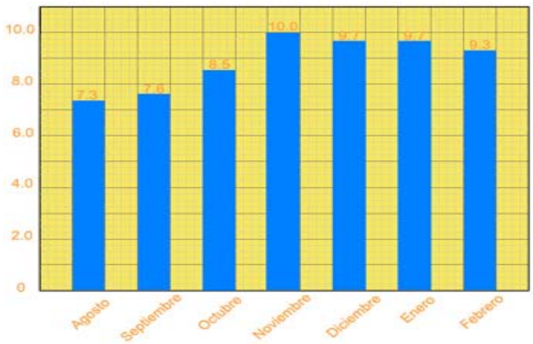
- Haz una gráfica de barras con los datos de la tabla de frecuencias de las estaturas de tu grupo y contesta las mismas preguntas que contestaste con tus compañeros en el ejercicio número 4.

Más adelante, la lección 41 bajo el título: calificaciones y promedios[11], propone lo siguiente:

1. Mateo ha obtenido las siguientes calificaciones durante el año.

Mes	Calificaciones
Agosto	7.3
Septiembre	*7.6*
Octubre	*8.5*
Noviembre	*10*
Diciembre	*9.7*
Enero	*9.7*
Febrero	*9.3*

Con las calificaciones de Mateo se hizo la gráfica de barras que aparece a continuación.



- Observa bien la gráfica. ¿Tú crees que Mateo ha mejorado o empeorado en su desempeño?, ¿por qué? ____________

2. ***Recuerda que el promedio de un conjunto de datos se calcula sumando todos los valores y dividiendo el resultado entre el número de datos.***

- Usa tu calculadora para encontrar el valor de la suma de las calificaciones de Mateo. ¿Cuánto vale ésta suma? ____________

  ¿Cuántos datos tienes? ____________

  ¿Cuál es el promedio de calificaciones de Mateo en lo que va del año?

  ____

- 3. Haz en tu cuaderno una tabla con tus calificaciones mensuales y traza una gráfica de barras con esos datos.
- ¿Cómo ha sido tu desempeño a lo largo del año?, ¿en que meses tuviste mejores calificaciones? ____________

[11] Lección tomada del libro del 5to grado, Pág. 94.

Calcula el promedio de tus calificaciones y compáralo con el de Mateo, ¿es más alto, más bajo o igual? ______

4. En un conjunto de datos ordenados, el dato que está en medio de la gráfica se llama la mediana.

- Ordena de menor a mayor las calificaciones de Mateo y haz una gráfica de barras con los datos ordenados. ¿Cuál es el dato que queda en la parte central? ______

  ¿A que mes pertenece? ______

  ¿Cuál es la mediana de las calificaciones de Mateo en el año? ______

  Cuando se tiene un número par de datos, la mediana es el promedio de los datos que quedan al centro.
- Calcula la mediana de tus datos de calificaciones, ¿es igual, mayor o menor que la de Mateo? ______

  ¿Cuántas calificaciones son mayores a la mediana? ______

  ¿Cuántas son menores? ______

  ¿Cuál puede ser una propiedad de la mediana de un conjunto de datos?

  ______

5. Organízate en equipos de 5 o 6 compañeros y haz una tabla con el promedio de las calificaciones de cada uno de los miembros del equipo; después, traza una gráfica de barras con esos datos.

   ¿Cuál es el promedio de las calificaciones del equipo? ______

   ¿Cuál es la mediana de estos datos?. Recuerda que para encontrar la mediana, los datos tienen que estar ordenados ______

- Compara los promedios de tu equipo con los promedios de los otros equipos del grupo. ¿Qué equipo tiene el promedio más alto? ______
- Compara la mediana de los datos de tu equipo con las de los otros equipos del grupo. ¿Qué equipo tiene la median más alta? ______

¿Coincide esta respuesta con la que diste a la pregunta anterior? ______

¿Por qué crees que pase esto? ______

Coméntalo con tus compañeros y tu profesor.

Para el siguiente año escolar, el libro de matemáticas de sexto grado consta, igual que en el año anterior, de 87 lecciones distribuidas en 5 bloques.

Imagen 2.2 Libro de Matemáticas de sexto grado de primaria

El programa de estudios para éste año mantiene las seis líneas o ejes temáticos antes mencionados (Los números, sus relaciones y sus operaciones, Medición, Geometría, Procesos de cambio, Tratamiento de la información, La predicción y el azar). Igualmente, la noción de promedio esta programada en la línea temática *Tratamiento de la información*, que se encuentra organizada de la siguiente manera[12]:

- Organización de la información en tablas, diagramas, gráficas de barras o pictogramas.
- Análisis de las tendencias en gráficas de barras: **promedios**, valor más frecuente, la mediana.

[12] Información extraída del libro *Educación básica primaria, plan y programas de estudio*, Editado por la SEP 1993. Sección: Sexto grado.

- Uso de la frecuencia relativa en la resolución de problemas.
- Recopilación y análisis de información de diversas fuentes.
- Análisis de problemas en los que se establezca si hay suficiente información para poder resolverlos y se distinga entre datos necesarios y datos irrelevantes.

La primera lección donde aparece tal noción es en la número 17 bajo el título: Las tendencias del grupo[13], la cual trata temas tales como: valor más frecuente, promedio y mediana. Sin embargo, para éste momento, al igual que para las lecciones siguientes que hacen uso de dicha noción, ya no se le explica al alumno el significado de cada uno de éstos conceptos, simplemente se retoman y aplican, es decir; lo hacen sin dar mayor atención al concepto y es visto como un elemento más en la estructura de los ejercicios, lo cual presupone un dominio y/o un entendimiento de dichas cuestiones por parte del alumno. Prueba de ello es ésta lección, en la que se plantea:

1. Para conocerse mejor, organiza una encuesta en tu grupo sobre algunos temas, como los siguientes.

A	¿En qué mes es tu cumpleaños
B	¿Cuántos hermanos tienes?
C	¿Qué materia te gusta más?
D	¿Cuál es tu color favorito?
E	¿Cuántos años tienes?
F	¿Qué día de la semana es tu favorito?
G	¿Cuál es tu deporte preferido?

Forma equipos y sortea los temas para que cada equipo haga una encuesta diferente. Entrevista a todos tus compañeros y compañeras y registra tus resultados en una tabla. Discute primero cómo diseñar la tabla, cuántas columnas debe tener, cuántos renglones, cuáles son los encabezados. Con los datos de la encuesta, contesta las siguientes preguntas.

¿Cuál es el dato que tiene mayor frecuencia? ______________________________

¿Cuál tiene menor frecuencia? ____

[13] Lección tomada del libro de texto de sexto año de matemáticas editado por la sep, páginas 42 y 43.

2. Un equipo de trabajó el tema ¿Cuál es tu color favorito?, hizo una tabla como la siguiente:

Color	Recuento	Frecuencia
Azul	//// ////	10
Verde	//// /	6
Rojo	//// ////	9
Amarillo	//// //	7
Café	///	3
Total de alumnos		35

¿Cuántos alumnos tendrían que haber escogido cada color para que todos los colores tuvieran la misma frecuencia? ________________________________

Éste número es el promedio de preferencia por color.

¿Cuáles colores están por arriba del promedio en la preferencia de los compañeros? ____

¿Cuáles están por debajo del promedio? ______________________________

3. Otro equipo que trabajó el tema. ¿Cuántos años tienes?, obtuvo los siguientes resultados: 11, 12, 13, 12, 11, 12, 11, 12, 13, 13, 13, 14, 12, 13, 14, 15, 11, 12, 13, 13, 12, 13, 11.

¿Cuántos alumnos hay en éste grupo? ________________________________

Continua la lista anotando los datos, en orden de menor a mayor.

11, 11, ____

Encierra en un círculo el dato que quedó en medio de la lista ordenada.

¿Qué número es? _____________ Éste número es la mediana.

¿Qué parte del grupo queda por arriba de la mediana? ___________________

¿Qué parte del grupo queda por debajo de la mediana? __________________

4. En una hoja grande de papel, traza una gráfica de barras o un pictograma con los datos de tu tabla. Discute cuál es el tipo de gráfica que mejor describe tus datos, cuáles deben ser los ejes y cuál es el título más apropiado para la tabla.

5. Después haz con tus compañeros un periódico mural con todas las gráficas del grupo.

¿Qué título le pondrías al periódico? ________________________________

¿Qué muestra el conjunto de gráficas?_______________________________

II.1.3 Nivel educativo secundaria

Uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria es retomar los conocimientos previamente adquiridos por el alumno y profundizar en ellos, producir nuevos conocimientos y alcanzar gradualmente su expresión simbólica.

Así, dicha materia es cursada en los tres años de la educación secundaria y sus contenidos giran en torno a 5 ejes o líneas matemáticas, a saber:

- Aritmética
- Álgebra
- Geometría
- Presentación y Tratamiento de la Información
- Probabilidad.

El hecho de que los dos últimos temas se encuentren programados al final de cada curso representa un obstáculo escolar, pues en aras de darle mayor peso y atención a los temas de álgebra, aritmética y geometría, los temas de Presentación y Tratamiento de la Información así como el de Probabilidad son sacrificados o simplemente no se enseñen. Una explicación de ello puede ser el hecho de que el maestro puede modificar el orden de los temas y organizar sus actividades en la forma que considere más adecuada, lo cual provoca que ciertas partes del programa se vean desfavorecidas.

En lo que respecta a la noción de promedio, ésta se encuentra contemplada para el segundo año de educación secundaria en la materia de matemáticas bajo la línea *presentación y tratamiento de la información,* la cual busca a través de ejemplos muy variados, que los alumnos conozcan y se acostumbren al uso de cantidades absolutas y relativas, tablas, gráficas y otras formas comunes de presentar y tratar la información.

Es así que el programa de estudios para éste año (segundo siclo escolar) señala lo siguiente[14]:

Presentación y tratamiento de la información

- Organización y presentación de datos.
  - Tablas y gráficas de frecuencia absolutas y relativas, incluidos ejemplos de datos agrupados.
  - Tablas y gráficas de datos que varían con el tiempo, con ejemplos de interpolación gráfica.
  - Pictogramas, diagramas de barras y bastones, diagramas sectores y otras gráficas de uso común en la estadística.
- Cálculo y determinación de tantos por ciento, por mil y por millón. Su utilización en la construcción de tablas y gráficas comparativas; en la elaboración de ciertos índices o indicadores.
- Cálculo de **promedios** y densidades, sus usos y limitaciones.
- Ejemplos para introducir la noción de función como una relación entre dos cantidades:
  - Descripción de fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas por medio de una tabla, una gráfica o una fórmula.
  - Paso, en casos sencillos, de una tabla o una gráfica a una fórmula (funciones de las formas $y = mx$, $y = mx + b$, $xy = k$).

En éste nivel educativo, la SEP[15] también proporciona gratuitamente los libros de texto que han de ser utilizados para el tratamiento de los contenidos del plan de estudios. Por ello partimos del libro de texto de matemáticas para analizar cómo vive el promedio en este nivel educativo, al menos institucionalmente.

[14] Información tomada del *libro para el maestro educación secundaria*, referente al área de matemáticas, editado por la SEP, el cual contiene los planes y programas de estudio contemplados para los tres años de estudio en dicha área.
[15] Secretaría de Educación Pública.

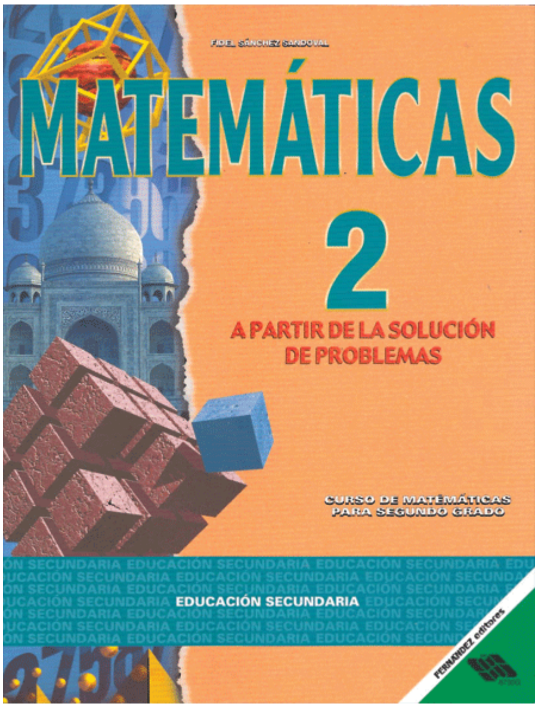


Imagen 2.3 Libro de Matemáticas de segundo año de secundaria

En éste libro, el concepto de promedio está ubicado en la Unidad 9 titulada: Representación y tratamiento de la información. En ésta unidad los temas centrales a desarrollar son la organización y presentación de datos, los cálculos estadísticos y la noción de función.

En la página 246 de éste libro encontramos la lección con el tema "cálculo de promedios y densidades", la cual comienza de la siguiente manera:

Cálculo de promedios y densidades

Actividad 1

El maestro de David y Eloisa les pidió que calcularan el promedio de edad de los integrantes de sus familias y presentaron los siguientes resultados:

David	Promedio = 20	Eloisa	Promedio = 25

Arturo considera que los miembros de la familia de Eloisa son de mayor edad que los de David.

María le dice que eso no se puede concluir y le pide a David y Eloisa que presenten los datos de todos los miembros de las dos familias. ¿Quién crees que tiene la razón, Arturo o María?

David	Papá	Mamá	Hermano	Hermana
13	42	40	3	2

Eloisa	Papá	Mamá	Hermano	Tía	Tío
13	37	35	15	24	26

Actividad 2 (en parejas)

1. Explícale a tu compañero el significado de la siguiente fórmula:

$$\text{Promedio} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

2. Usando los datos de David y Eloisa, analicen en qué casos el promedio puede representar mejor a una colección de datos.
3. ¿Se puede afirmar que el aprovechamiento escolar de Arturo y Estela es el mismo, si ambos obtuvieron un promedio de 9? Justifiquen su respuesta.

Arturo	Estela
9	10
9	10
9	10
9	8
10	9
9	10
9	5
10	10
10	9
8	8
7	10

¿En que caso el promedio 9 representa mejor a la colección de datos?

4. Un automovilista recorre 120 Km a una velocidad media de 80 Km/h y de regreso lo hace a una velocidad media de 50 Km/h. Si quiere hacer el recorrido total empleando el mismo tiempo pero con la misma velocidad media de ida y vuelta, ¿Cuál será la velocidad media adecuada?.

Expliquen la razón por la que la solución no se puede obtener con el promedio de las velocidades medias.

$$v = \frac{80 + 50}{2} = 65 \text{Km} / \text{h}$$

Para el tercer año de secundaria, el programa de estudios señala que el concepto de promedio se aborde nuevamente en la línea *presentación y tratamiento de la información*, el plan de estudios menciona:

Presentación y tratamiento de la información

- Tasas, sus usos y aplicaciones.
  - Estudio de fenómenos que varían a taza constante (ejemplos de proyección a futuro).
  - Crecimiento lineal o aritmético contra crecimiento exponencial o geométrico.
- Descripción de una lista de datos: moda, media (promedio) y mediana.
  - Usos y limitaciones.
  - Formas de indicar la dispersión de los datos de una lista (ejemplos ilustrativos).
- Nociones de población y muestra; de censo y encuesta (ejemplos de proyección a toda la población de los resultados observados en una muestra). Ejemplos de estudios estadísticos.

En el libro de texto de matemáticas de tercer año:

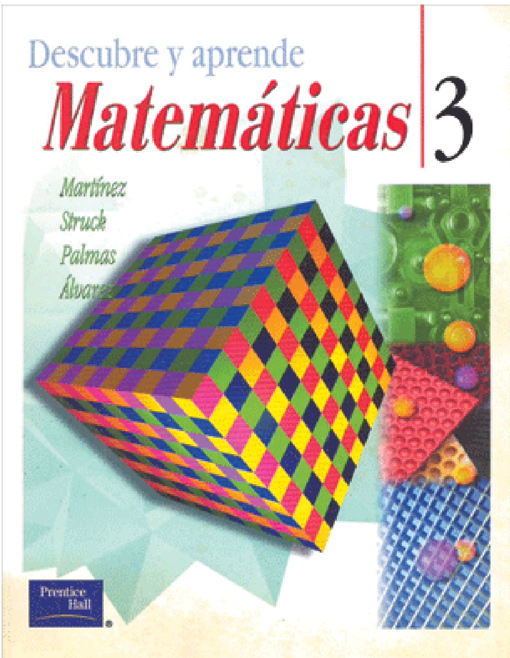


Imagen 2.4 Libro de Matemáticas de tercer año de secundaria

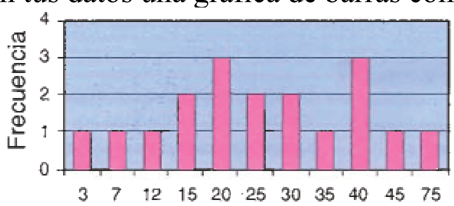
…el promedio ya no es definido, solo se pide como un cálculo más. Esto aparece en la lección 2 titulada *Descripción de una lista de datos* de la unidad nueve *Presentación y tratamiento de la información*, la lección menciona:

Realiza una encuesta entre tus amigos para saber cuánto tiempo hacen desde su casa hasta la escuela. Nosotros hicimos esta encuesta con 18 personas y nuestros resultados fueron: 15, 15, 7, 40, 30, 35, 20, 25, 3, 40, 75, 20, 40, 45, 25, 30, 20, 12 (medidos en minutos).

Organiza los resultados de tu encuesta en una tabla como la nuestra:

Tiempo	3	7	12	15	20	25	30	35	40	45	75
Frecuencia	1	1	1	2	3	2	2	1	3	1	1

Y luego construye con tus datos una gráfica de barras como ésta.



Compara tu gráfica con la de tus compañeros. ¿En que se parecen?, ¿en que son diferentes?.

Reúnan los datos de las encuestas de cinco compañeros y hagan una nueva gráfica de barras. ¿Qué dato tiene mayor frecuencia?.

En ésta encuesta te pedimos sólo unos cuantos datos, pero en general, las encuesta comunes manejan una gran cantidad de información.

Para analizar una lista de dato, existen indicadores que reflejan algunas características relevantes de la colección de datos, tales como la moda, la media o promedio y la mediana.

En nuestra encuesta vemos que 20 y 40 son los datos que tienen mayor frecuencia (3). En éste caso, tenemos dos modas y decimos que el comportamiento de los datos es binomial.

El hecho de que una serie de datos pueda tener una o varias modas hace que, en muchos ejemplos, la moda no sea un dato que nos proporcione una información relevante, sin embargo, en otros casos, por ejemplo en un proceso electoral, es usando la moda como se determina al ganador.

En nuestra encuesta podemos además calcular el promedio o media de los resultados, que es 27.61. ¿Cuál es la media de tus resultados? Compárala como los resultados de tus compañeros.

Al promedio de una colección de datos se le conoce como la media aritmética, o simplemente media de la lista de datos.

Hagamos una lista de los datos de nuestro ejemplo, en orden creciente:

3, 7, 12, 15, 15, 20, 20, 20, 25, 25, 30, 30, 35, 40, 40, 40, 45, 75

Observa que la mitad de los encuestados tardan 25 minutos o menos en llegar de su casa a la escuela y que la otra mitad tarda 25 minutos o más en llegar a la escuela. Es decir, el valor 25 divide a la lista en dos partes iguales. En éste ejemplo 25 es el promedio de los dos datos centrales de la lista: el 9^0 y el 10^0 (aquí ambos son iguales a 25).

En general:

La media es el dato central de una lista ordenada de datos o el promedio de dos datos centrales.

La siguiente tabla contiene los salarios del personal de una fábrica (hipotética); se incluyen los salarios de los obreros, los empleados de intendencia, los empleados administrativos, los supervisores, los gerentes departamentales y el presidente de la empresa, agrupados en número de salarios mínimos.

Salarios Mínimos	1	2	3	4	5	12	20	60
Personas	51	557	215	25	10	3	5	1

¿Cuál es la moda en éste caso?, ¿cuál es la media?, ¿cuál es la mediana?

La moda, la media y la mediana son llamadas **medidas de tendencia central**

La moda nos indica que la mayoría de los empleados de ésta fábrica gana 2 salarios mínimos al mes. La mediana nos dice que al menos la mitad de los trabajadores gana 2 salarios mínimos o menos. Y el promedio nos dice que si el salario de todos fuera el mismo, cada uno ganaría alrededor de 2 y medio salarios mínimos…

II.1.4 Nivel medio superior y superior

En México existe una gran variedad de instituciones educativas de los niveles medios superior y superior. Para el caso del nivel medio superior, se cuentan con escuelas tales como: CONALEP, CETIS, Preparatoria, Bachillerato, CCH, CBTIS, CECyT, etc. Para el nivel superior se cuenta con UNAM, UAM, IPN, así como de instituciones particulares. Sin embargo, los programas y planes de estudio analizados tanto para el nivel medio superior como para el nivel superior, fueron única y exclusivamente los del Instituto Politécnico Nacional.

El Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional es un servicio educativo posterior a los estudios de secundaria. La duración de los estudios es de 6 semestres, y se divide en las siguientes áreas[16]:

Ingeniería y Ciencias Físico-Matemáticas	
CECyT No. 1	"Gonzalo Vázquez Vela"
CECyT No. 2	"Miguel Bernard"
CECyT No. 3	"Estanislao Ramírez Ruiz"
CECyT No. 4	"Lázaro Cárdenas"
CECyT No. 7	"Cuauhtémoc"
CECyT No. 8	"Narciso Bassols García"
CECyT No. 9	"Juan De Dios Bátiz"
CECyT No. 10	"Carlos Vallejo Márquez"
CECyT No. 11	"Wilfrido Massieu Pérez"
CET	"Walter Cross Buchanan"
Ciencias Sociales y Administrativas	
CECyT No. 5	"Benito Juárez García"
CECyT No. 12	"José María Morelos y Pavón"
CECyT No. 13	"Ricardo Flores Magón"
CECyT No. 14	"Luis Enrique Erro"
Ciencias Médico-Biológicas	
CECyT No. 6	"Miguel Othón De Mendizábal"
CECyT No. 15	"Diódoro Antúnez Echegaray"

Cuadro 2.1 Escuelas por áreas en el NMS

[16] Información obtenida de la página: http://www. ipn.mx

Así pues, en el área de nuestro interés (Ingeniería y Ciencias Físico-Matemáticas), la enseñanza de las matemáticas está programada en cada uno de los seis semestres que dura dicha formación académica:

Enseñanza de las Matemáticas en el Nivel Medio Superior	
1er Semestre	Matemáticas I “Álgebra”
2do Semestre	Matemáticas II “Geometría y Trigonometría”
3er Semestre	Matemáticas III “Geometría Analítica”
4to Semestre	Matemáticas IV “Cálculo Diferencial”
5to Semestre	Matemáticas V “Cálculo Integral”
6to Semestre	Matemáticas VI “Probabilidad y Estadística”

Cuadro 2.2 Tira de materias de matemáticas en el NMS

Si bien es cierto que en ésta etapa, el concepto de promedio esta contemplado en el curso de probabilidad y estadística, éste ya no es llamado promedio, ahora se encuentra inmerso en el concepto de **valor esperado**, pues el promedio que se aplica ya no es el promedio aritmético, sino el ponderado.

El programa de probabilidad y estadística tiene las siguientes *líneas de desarrollo*[17]:

- Educación de la intuición sobre fenómenos al azar.
- Apropiación gradual de la simulación como una estrategia para enfrentar situaciones diversas de estadística y probabilidad.
- Apropiación gradual de las ideas fundamentales de la *estadística*, así como de ciertas técnicas que las ilustra.
- Apropiación gradual de las ideas fundamentales de la *probabilidad*, así como ciertas técnicas que las ilustra.
- Aplicación de procedimientos estadísticos y probabilísticos a la solución de problemas diversos

[17] Información extraída del programa de Probabilidad y Estadística del Nivel Medio Superior del IPN.

Así en lo que respecta a la línea temática *Apropiación gradual de las ideas fundamentales de la probabilidad, así como ciertas técnicas que las ilustra*, ésta está programada para la unidad número 4, en ella se tiene:

4.1 Distribución de Probabilidad

- El significado de la variable aleatoria y de la desviación estándar de la misma
- La interpretación de la gráfica de la función de densidad de probabilidad
- La relación entre una distribución de probabilidad y un histograma (entre la probabilidad y la estadística)

Dado que para éste nivel no se tiene un único libro para el desarrollo del curso, ni uno que sea oficial, se revisó la bibliografía sugerida. A continuación se muestra el libro más usado para el curso de Probabilidad y Estadística a éste nivel:

Imagen 2.5 Libro de probabilidad sugerido para el NMS

Dentro de los capítulos de éste libro, encontramos dos muy importantes que abordan el concepto de promedio, el primero de ellos es el capítulo 3 titulado: Media, mediana, moda y otras medidas de centralización, localizado en la página 45, en él encontramos lo siguiente[18]:

[18] Lección extraída del libro: Murria, R (1970) *Estadística, teoría y 875 problemas resueltos,* Mc Graw Hill.

CAPÍTULO 3

MEDIA, MEDIANA, MODA Y OTRAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

NOTACIÓN CON ÍNDICE O SUBÍNDICE

El símbolo X_j (léase << x sub j>>) denota cualquiera de los N valores X_1, X_2, X_3 …, X_N que una variable X puede tomar. La letra j en X_j, la cual puede representar cualquiera de los números 1, 2, 3, …, N se llama índice o subíndice. Análogamente puede utilizarse como subíndice otra letra distinta de j, como i, k, p, q, s.

NOTACIÓN SUMARIA

El símbolo $\sum_{j=1}^{N} Xj$ se utiliza para indicar la suma de todas las X_j desde j=1 a j=N, es decir, por definición

$$\sum_{j=1}^{N} Xj = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

Cuando no cabe confusión posible se representa ésta suma por las notaciones más simples $\sum X$, $\sum Xj$ o $\sum_j Xj$. El símbolo $\sum$ es la letra griega mayúscula sigma, denotando sumación.

Ejemplo 1. $\sum_{j=1}^{N} X_j Y_j = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_N Y_N$

Ejemplo 2. $\sum_{j=1}^{N} aX_j = aX_1 + aX_2 + \cdots + aX_N = a(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) = a\sum_{j=1}^{N} X_j$

Donde a es una constante. Más sencillamente $\sum aX = a\sum X$

PROMEDIOS Y MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

Un promedio es un valor que es típico o representativo de un conjunto de datos. Como tales valores tienden a situarse en el centro del conjunto de datos ordenados según su magnitud, los promedios se conocen también como *medidas de centralización.*

Se pueden definir varios tipos de medidas de centralización, las más comunes son la media aritmética o brevemente media, la mediana, la moda, la media geométrica y la media armónica. Cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes, dependiendo la aplicación de una u otra de los resultados que se pretendan sacar de los datos.

MEDIA ARITMÉTICA

La media aritmética o media de un conjunto de N números X_1, X_2, X_3, …, X_N se representa por $\overline{X}$ (léase << X barra >>) y se define como:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N} = \frac{\sum X}{N}$$

(1)

Ejemplo: La media aritmética de los números 8, 3, 5, 12, 10 es

$$\overline{X} = \frac{8+3+5+12+10}{5} = \frac{38}{5} = 7.6$$

Si los números X_1, X_2, …, X_k se presentan f_1, f_2, …, f_k veces, respectivamente (es decir se presentan con frecuencia f_1, f_2, …, f_k), la media aritmética es:

$$\overline{X} = \frac{f_1 x_1 + f_2 X_2 + \cdots + f_k X_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j X_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N}$$

(2)

Donde $N = \sum f$ es la frecuencia total, es decir, el número total de casos.

Ejemplo: Si 5, 8, 6 y 2 se presentan con frecuencia 3, 2, 4 y 1 respectivamente, la media aritmética es:

$$\overline{X} = \frac{(3)(5)+(2)(8)+(4)(6)+(1)(2)}{3+2+4+1} = \frac{15+16+24+2}{10} = 5.7$$

MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA

A veces se asocia a los números X_1, X_2, …, X_k ciertos factores o pesos W_1, W_2, …, W_k que dependen de la significación o importancia de cada uno de los números. En éste caso:

$$\overline{X} = \frac{W_1X_1 + W_2X_2 + \cdots + W_kX_k}{W_1 + W_2 + \cdots + W_k} = \frac{\sum WX}{\sum W} \qquad (3)$$

Se llama media aritmética ponderada. Nótese la similitud con (2), que puede considerarse como una media aritmética ponderada con el peso f_1, f_2, …, f_k.

Ejemplo: Si un examen final de curso se valora como 3 veces los exámenes parciales y un estudiante tiene una nota de examen final de 85 y notas de exámenes parciales de 70 y 90, su nota final será:

$$\overline{X} = \frac{(1)(70) + (1)(90) + 3(85)}{1+1+3} = \frac{415}{5} = 83$$

PROPIEDADES DE LA MEDIA ARITMÉTICA

(a)La suma algebraica de las desviaciones de un conjunto de números de su media aritmética es cero.

Ejemplo: Las desviaciones de los números 8, 3, 5, 12, 10 de su media aritmética 7,6 son 8 – 7,6, 3 - 7,6, 5 – 7,6, 12 – 7,6, 10 – 7,6, ó 0, 4, - 4,6, - 2,6, 4, 4, 2, 4, cuya suma algebraica es 0,4 – 4, 6 – 2,6 + 4,4 + 2,4 = 0

(b)La suma de los cuadrados de las desviaciones de un conjunto de números X_j de cualquier número a es mínima solamente si $a = \overline{X}$.

(c)Si f_1 números tienen de media m_1,f_2 números tienen de media m_2, …, f_k números tienen de media m_k, entonces la media de todos los números es:

$$\overline{X} = \frac{f_1m_1 + f_2m_2 + \cdots + f_km_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k}$$

Es decir, una media aritmética ponderada de todas las medias.

(d)Si A es cualquier supuesta media aritmética (que puede ser cualquier número) y si $d_j = X_j – A$ son las desviaciones de X_j de A, las ecuaciones (1) y (2) se convierten en:

$$\overline{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{N} d_j}{N} = A + \frac{\sum d}{N}$$

(5)

$$\overline{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j d_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = A + \frac{\sum fd}{N} \qquad (6)$$

Donde $N = \sum_{j=1}^{k} f_j = \sum f$; note que (5) y (6) están resumidas en la ecuación $\overline{X} = A + \overline{d}$

MEDIANA

La mediana de una colección de datos ordenados en orden de magnitud es el valor medio o la media aritmética de los dos valores medios

Ejemplo 1. Sean los números 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 que tienen de mediana 6

Ejemplo 2. Sean los números 5, 5, 7, 9,11,12,15,18 su mediana será ½(9+11) = 10

Para datos agrupados la mediana se obtiene mediante interpolación y viene dada por:

Mediana = $Mediana = L_1 + \left[\frac{\frac{N}{2} - \left(\sum f\right)_1}{f_{mediana}} \right] c$

Donde: L_1 = límite real inferior de la clase mediana (es decir, la clase que contiene la mediana)

N = número total de datos (es decir la frecuencia total)

$\left(\sum f\right)_1$ = suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase mediana

$f_{mediana}$ = frecuencia de la clase mediana

c = tamaño del intervalo de la clase mediana.

Geométricamente, la mediana es el valor de X (abscisa) que corresponde a la vertical que divide un histograma en 2 partes de igual área. Éste valor de X se denota a veces por $\overline{X}$.

MODA

La moda de una serie de números es aquel valor que se presenta con mayor frecuencia, es decir, es el valor más común. La moda puede no existir, incluso si existe puede no ser única.

Ejemplo 1. El sistema 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 tienen de moda 9

Ejemplo 2. El sistema 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16 no tiene moda

Ejemplo 3. El sistema 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 tiene dos modas 4 y 7 y se llama bimodal.

Una distribución que tiene una sola moda se llama unimodal. En el caso de datos donde se ha construido una curva de frecuencia para ajustar los datos, la moda será el valor (o valores) de X correspondientes al máximo (o máximos) de la curva.

De una distribución de frecuencias o un histograma la moda puede sacarse de la fórmula:

$$\text{Moda} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) \bullet c$$

Donde:

L_1 = límite real inferior de clase de la clase modal (es decir, la clase que contiene la moda).

Δ_1 = Exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase contigua inferior.

Δ_2 = Exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase contigua superior.

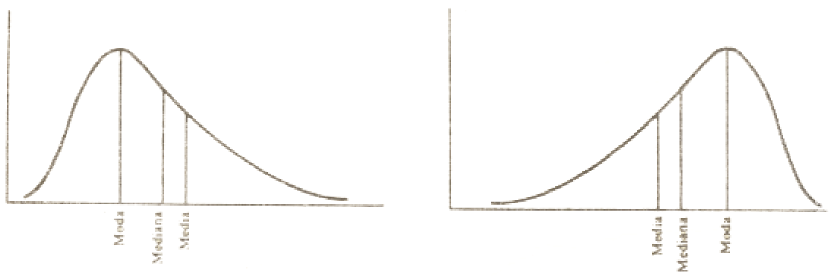
C = tamaño del intervalo de clase modal.

RELACIÓN EMPÍRICA ENTRE MEDIA, MEDIANA Y MODA

Para curvas de frecuencia unimodales que sean moderadamente sesgadas (asimétricas), se tiene la relación empírica:

Media - Moda = 3(Media – Mediana)

En las siguientes figuras se muestran las posiciones relativas de la media, mediana y moda para curvas de frecuencia que están sesgadas a la derecha y a la izquierda, respectivamente. Para curvas simétricas, la media, moda y mediana coinciden.



La segunda lección que aborda el concepto de promedio, en el terreno probabilístico, se encuentra en el capítulo 6 llamado: Teoría elemental de la probabilidad. Dentro de éste capítulo se encuentra la sección *Esperanza Matemática.* Su desarrollo es el siguiente:

ESPERANZA MATEMÁTICA

Si *p* es la probabilidad de que una persona reciba una suma de dinero *S*, la *esperanza matemática* o simplemente la *esperanza* se define como *pS*.

Ejemplo: Si la probabilidad de que un hombre gane un premio de \$10 es 1/5, su esperanza es 1/5(\$10) = \$2.

El concepto de *esperanza* es fácilmente generalizado si X representa una variable aleatoria discreta que puede tomar valores X_1, X_2, …, X_k con probabilidades respectivas p_1, p_2, …, p_k, donde $p_1+p_2+\ldots+p_k = 1$, la *esperanza matemática* de X o simplemente la *esperanza* de X, simbolizada por E(X), se define como:

$$E(X) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots + p_k X_k = \sum_{j=1}^{k} p_j X_j = \sum pX$$

Si las probabilidades p_j en ésta esperanza se sustituyen por las frecuencias relativas f_j/N, donde $N = \sum f_j$, la esperanza se reduce a $\left(\sum fx\right)/N$, que es la media aritmética $\overline{X}$ de una muestra de tamaño, en la que X_1, X_2, …, X_k aparecen con éstas frecuencias relativas. Cuándo N crece, las frecuencias relativas f_j/N se aproximan a las probabilidades p_j. Esto conduce a interpretar que E(X) representa la media de la población de la que se ha extraído una muestra. Si se denota por *m* la media de la muestra, la media de la población vendrá representada por la correspondiente letra griega $\boldsymbol{\mu}$ (mu)

La esperanza puede también definirse para variables aleatorias continuas, pero la definición requiere la utilización del cálculo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

ESPERANZA MATEMÁTICA

56. ¿Cuál es el precio justo a pagar para entrar en un juego en el que uno puede ganar \$25 con probabilidad 0.2 y \$10 con probabilidad 0.4? Resp. \$9

57. Si llueve, un vendedor de paraguas puede ganar \$30 por día. Sino llueve, puede perder \$6 por día. ¿Cuál es su esperanza matemática si la probabilidad de lluvia es 0.3? Resp. \$4.80 por día.

58. A y B juegan un juego consistente en lanzar una moneda 3 veces. El que obtenga la primera cara gana el juego. Si A lanza primeramente la moneda y si el valor total de las apuestas es \$20, ¿con cuánto deberá contribuir cada uno para que el juego se considere justo? Resp. A \$12.50, B \$7.50

59. Hallar (a) $E(X)$, (b) $E(X^2)$, (c) $E[(X-\bar{X})^2]$ y (d) $E(X^3)$ para la siguiente distribución de probabilidad:

X	-10	-20	30
P(X)	1/5	3/10	1/2

Resp. (a) 7, (b) 590, (c) 541, (d) 10.900

61. Una variable aleatoria toma el valor 1 con probabilidad p_1 y 0 con probabilidad $q = 1 - p$. Demuestre que:

(a) $E(X) = p$

(b) $E[(X - \bar{X})^2] = pq$

62. Demostrar que (a) $E(2X + 3) = 2E(X) + 3$, (b) $E[(X - \bar{X})^2] = E(X^2) - E[(X)]^2$

63. Sean X e Y dos variables aleatorias que tienen la misma distribución. Demostrar que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

En el área de Ingeniería del Nivel Superior, la enseñanza de las matemáticas está programada para los primeros 4 de 9 semestres que comprenden los estudios en las escuelas de nivel superior del IPN. Los planes y programas de estudio de las carreras en un área común contemplan el tronco único de asignaturas que tiende a diversificarse en los últimos semestres de los cuatro o cinco años de formación profesional que según la opción elegida por el alumno deberá cursar.

Ingeniería y Ciencias Físico-Matemáticas
ESCOM "Escuela Superior de Cómputo"
ESFM "Escuela Superior de Física y Matemáticas"
ESIA Unidad Tecamachalco "Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura"
ESIA Unidad Ticomán "Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura"
ESIA Unidad Zacatenco "Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura"
ESIME Unidad Azcapotzalco "Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica "
ESIME Unidad Culhuacán "Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica "
ESIME Unidad Ticomán "Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica "
ESIME Unidad Zacatenco "Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica "
ESIQIE "Escuela Superior de Ingeniería Química E Industrias Extractivas"
ESIT "Escuela Superior de Ingeniería Textil"
Ciencias Sociales y Administrativas
ESCA Unidad Santo Tomás "Escuela Superior de Comercio y Administración"
ESCA Unidad Tepepan "Escuela Superior de Comercio y Administración"
ESE "Escuela Superior de Economía"
EST "Escuela Superior de Turismo"
Ciencias Médico-Biológicas
ENCB "Escuela Nacional de Ciencias Biológicas"
ENMyH "Escuela Nacional de Medicina y Homeopatía"
ESEyO "Escuela Superior de Enfermería y Obstetricia"
ESM "Escuela Superior de Medicina"
Estudios Interdisciplinarios
UPIBI "Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología"
UPIICSA "Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas"
UPIITA "Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnológias Avanzadas"
CICS Unidad Milpa Alta "Centro Interdisciplinario de Ciencias de la Salud"
CICS Unidad Santo Tomás "Centro Interdisciplinario de Ciencias de la Salud"

Cuadro 2.3 Escuelas por áreas para el NS

La asignatura de matemáticas entra en lo que se denomina tronco común y son:

Matemáticas en el Nivel Superior	
1er Semestre	Matemáticas I “Cálculo Diferencial e Integral
	Matemáticas II “Fundamentos de Álgebra”
2do Semestre	Matemáticas III “Cálculo Vectorial”
	Matemáticas IV “Ecuaciones Diferenciales”
3er Semestre	Matemáticas V “Transformadas de Funciones”
	Matemáticas VI “Variable Compleja”
4to Semestre	Matemáticas VII “Probabilidad y Estadística”

Cuadro 2.4 Tira de materias de matemáticas en el NS

El programa de matemáticas VII “Probabilidad y Estadística”, considera que el *Contenido Temático* y la presentación del curso deben ser de la manera siguiente:

I. Probabilidad.
II. Variables aleatorias discretas sus distribuciones de probabilidad.
III. Variables aleatorias continuas y sus distribuciones de probabilidad.
IV. Distribuciones de probabilidad bivariadas.
V. Funciones de variables aleatorias.

Así que dentro del programa, para la parte discreta se encuentra en la sección 2.5 se tiene:

2.5 Valor esperado, varianza, desviación estándar de una variable aleatoria discreta.

2.5.1 Definición de valor esperado de una variable aleatoria discreta.

2.5.2 Definición de valor esperado de una función de una variable discreta.

2.5.3 cálculo de valor esperado de las distribuciones Binomial, Geométrica, y de Poisson.

2.5.4 Propiedades del valor esperado.

$E[c]=c$

$E[C_1X_1+C_2X_2)=C_1E[X_1]+C_2E[X_2]$

2.5.5 Definición de varianza y desviación estándar.

2.5.6 Teorema $V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$

2.5.7 Ejercicios.

Para el caso Continuo:

3.2 Valor esperado, Varianza y Desviación estándar de una variable aleatoria continua.

3.2.1 Definición del valor esperado de una variable aleatoria continua.

3.2.2 Propiedades del valor esperado de una variable aleatoria continua.

3.2.3 Esperaza de una función de una variable aleatoria continua.

3.2.4 La varianza y desviación estándar de una variable aleatoria continua.

3.2.5 Teorema $(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

3.2.6 Ejercicios.

Puesto que para dar éste curso, no se cuenta con un libro de texto que oficial, el programa sugiere varios libros de probabilidad y estadística, con la finalidad de apoyarse en ellos y desarrollar algunos temas, por tal razón se eligió uno de los libros más consultados por los profesores y alumnos:

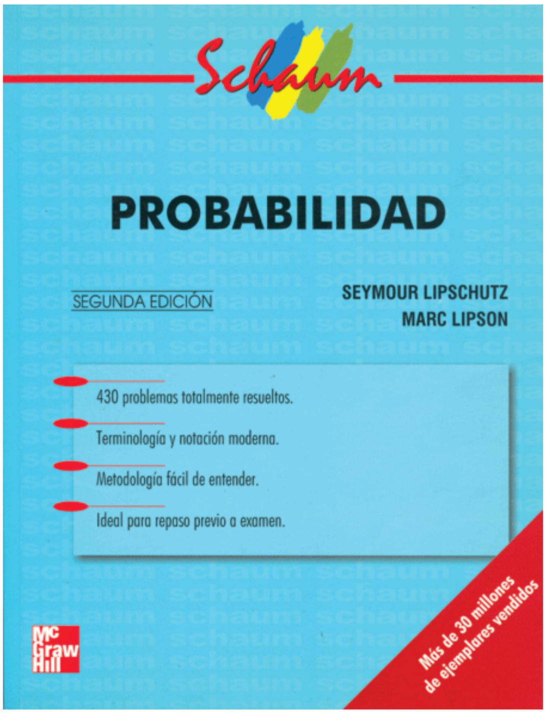


Imagen 2.6 Libro de probabilidad sugerido para el NS

… en el capítulo 5 de éste libro titulado: Variables Aleatorias, se aborda el valor esperado de la siguiente manera (para el caso discreto y continuo):

DISTRIBUCIÓN Y ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA FINITA

Sea X una variable aleatoria de un espacio muestral S con el conjunto imagen finito; a saber, X(S)= $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Convertimos X(S) en un espacio de probabilidad definiendo la probabilidad de x_i como $P(X=x_i)$ que escribimos $f(x_i)$. Esta función f de X(S), o sea, definida como $f(x_i)=P(X=x_i)$, se llama la *función de distribución o probabilidad* de X y se expresa generalmente en forma de tabla:

x_1	x_2	…	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

La distribución f satisface las condiciones:

(i) $f(x_i)\geq 0$ y (ii) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

Ahora si X es una variable aleatoria con la distribución anterior, entonces la *media o esperanza (o valor esperado)* de X, denotada por E(X) o μ_x, o simplemente E o μ, se define como

$$E(X) = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \ldots + x_nf(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

Esto es; E(X) es el **promedio ponderado** de los valores posibles de X, cada valor ponderado por su probabilidad…

Ejemplo 5.4: Un jugador lanza un dado corriente. Si sale un número primo gana dicho número de dólares, pero si no sale un número primo entonces pierde esa cantidad de dólares. Los resultaos posibles x_i del juego con sus respectivas probabilidades $f(x_i)$ son como sigue:

X_i	2	3	5	-1	-4	-6
$f(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Los números negativos -1, -4 y -6 corresponden al hecho de que el jugador pierde sino sale un número primo. El valor esperado del juego es:

$E = 2(1/6)+3(1/6)+5(1/6)-1(1/6)-4(1/6)-6(1/6) = -1/6$

Se dice que el juego es favorable al jugador si E es positivo, y desfavorable si E es negativo. Si E=0, el juego es legal. Por tanto, el juego es desfavorecedor para el jugador puesto que el valor esperado es negativo.

Nuestros primeros teoremas en relación con la noción de valor esperado para operaciones de variables aleatorias son

Teorema 5.1: Sea X una variable aleatoria y k un número real. Entonces (i) E(kX) = kE(X), y (ii) E(X+k) = E(X) + k.

Teorema 5.2: Sean X y Y variables aleatorias del mismo espacio muestral S. Entonces E(X+Y) = E(X) + E(Y).

Un simple argumento de inducción conduce al
Corolario 5.3: Sean X_1, X_2, …, X_n variables aleatorias de S. Luego
$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$

Teorema 5.4:
$E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i)$

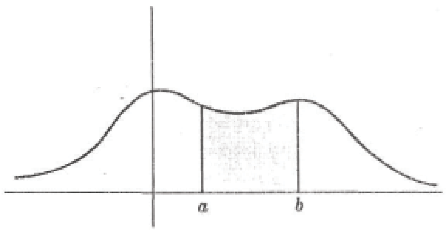
Teorema 5.5: Sean X y Y variables aleatorias independientes. Entonces:
E(XY) = E(X)*E(Y)

Teorema 5.5: Sean X y Y variables aleatorias de un mismo espacio muestral S con Y = ϕ(X). Entonces :
$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(X_i) f(x_i)$
Donde f es la función de distribución de X.
Simultáneamente, se dice que una variable aleatoria Z es una función de X y Y si Z se puede representar por Z = ϕ(X,Y) donde ϕ es una función de valor real de dos variables; esto es, si
Z(s) = ϕ[X(s), Y(s)]
Para todo s $\in$ S. Conforme al teorema anterior, tenemos

Teorema 5.7: Sean X, Y y Z variables aleatorias del mismo espacio muestral S con Z = ϕ(X,Y). Entonces:
$E(Z) = \sum_{i,j} \Phi(x_i, y_j) h(x_i, y_j)$
Donde h es la distribución conjunta de X y Y.

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Supongamos que X es una variable aleatoria cuyo conjunto imagen X(S) es un conjunto continuo de números tales como un intervalo. Recalcamos de la definición de variables aleatorias que el conjunto {a≤X≤b} es un suceso de S y, por consiguiente,



$P(a \leq X \leq b)$ = área de la parte sombreada la probabilidad P(a≤X≤b) está definida. Suponemos que existe una función continua especial f : R→R tal que P(a≤X≤b) es igual al área bajo la curva de f entre x = a y x = b (como se muestra en a la derecha). En el lenguaje del cálculo,

$$P(a\leq X\leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

En éste caso se dice que X es una variable aleatoria continua. La función f es llamada función de distribución o de probabilidad continua (o función de densidad) de X; que satisface las condiciones

(i) f(x)≥0 y (ii) $\int_R f(x)dx = 1$

Esto es f es no negativa y el área total bajo su curva es 1

El valor esperado E(X) se define por

$$E(X) = \int_R xf(x)dx$$

Cuando existe. Las funciones de variables aleatorias se definen justamente como en el caso discreto; y puede demostrarse que su Y = ϕ(X), entonces

$$E(Y) = \int_R \phi(x) f(x)dx$$

Cuando el miembro de la derecha existe. La varianza var(X) se define por

$$Var(X) = E((X-\boldsymbol{\mu})^2) = \int_R \phi(x-\boldsymbol{\mu})^2 f(x)dx$$

Cuando existe. Justamente como en le caso discreto, se puede demostrar que var(X) existe y sólo si $\boldsymbol{\mu}$ = E(X) y $E(X^2)$ existen y, por tanto

$$Var(X) = E(X^2) - \boldsymbol{\mu}^2 = \int_R x^2 f(x)dx - \boldsymbol{\mu}^2$$

La desviación estándar σ_x se define por $\sigma_x = \sqrt{var(X)}$ cuando var(X) existe.

Ya habíamos hecho hincapié en que estableciéramos muchos resultados para variables aleatorias finitas y los daríamos por supuestos en el caso general discreto y en el caso continuo.

Ejemplo 5.9: Sea Sea X una variable aleatoria continua con la distribución siguiente:

$$f(x) = \left\{ \begin{cases} 1/2; si 0 \leq x \leq 2 \\ 0; de\_otra\_forma \end{cases} \right.$$

Entonces:

P(1≤X≤1.5) = área de la región sombreada del diagrama

$$= \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}(1/2 + 3/4) = \frac{5}{16}$$

Calculamos luego el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de X:

$$E(X) = \int_R xf(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\left[x^3/6\right]_0^2 = \frac{4}{3}\right]$$

$$E(X^2) = \int_R x^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^3 dx = \left[x^4/8\right]_0^2 = 2$$

Var(X) = E(X^2) - $\boldsymbol{\mu}^2$ = 2 – 16/9 = 2/9

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

Un número finito de variables aleatorias continuas, a saber X, Y, …, Z, se dice que son independientes si para unos intervalos [a, a'], [b, b'], …, [c, c'], P(a≤X≤a', b≤Y≤b', …, c≤Z≤c') = P(a≤Xa')P(b≤Y≤b') … P(c≤Z≤c') Obsérvese que los intervalos desempeñan el mismo papel en el caso continuo que los puntos en el caso discreto.

II.1.5 Apoyos y recursos

Con el propósito de buscar caracterizaciones alternativas, no propiamente escolares, pero si de carácter educativo (apoyos y recursos), se analizaron diccionarios matemáticos editados para los diferentes niveles educativos. En la mayoría de ellos encontramos que no se encuentra la palabra promedio como un término matemático, o se encuentra y nos remite al término de media aritmética en cuyo caso se da una definición muy ambigua o poco precisa.

Por ejemplo, para el nivel secundaria, el diccionario de matemáticas de la editorial patria, encuentra lo siguiente al buscar el término promedio:

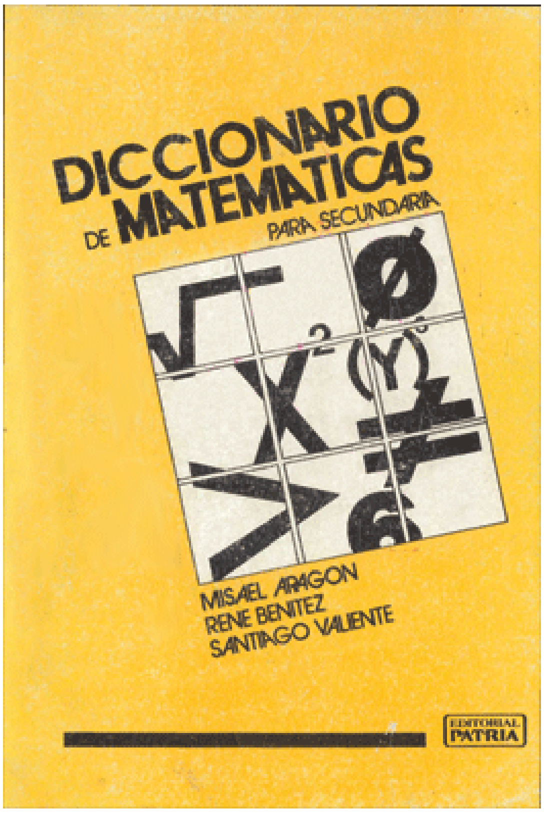


Imagen 2.7 Diccionario para nivel secundaria

Promedio: (Véase media)

⋮

Media: Media aritmética. Valor medio. Promedio. Es una medida de tendencia central. Es el valor promedio del conjunto de valores o cómputos de una muestra. La media, es el valor que resulta de dividir la suma del total de valores de una muestra entre el número de ellos. La media de una muestra se denota con el símbolo (μ) o ($\bar{x}$).

Léase: equis con barra o equis testada.

Si en una muestra se están tomando n valores: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, se tiene que:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Ejemplo: Si en una muestra se están tomando las siguientes calificaciones de un alumno: 7, 8, 8, 9, 10 se tiene que el promedio es: $\bar{x} = \dfrac{7+8+8+9+10}{5} = 8.5$

Para el nivel medio superior, se consultó el siguiente diccionario:

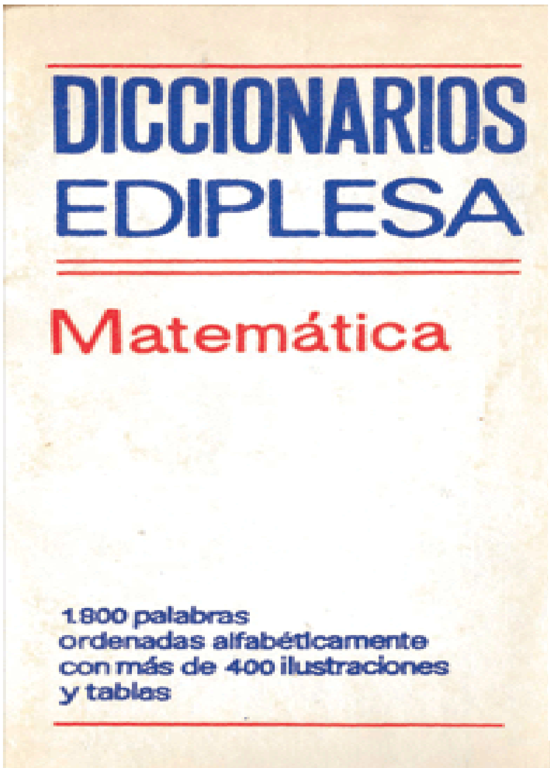


Imagen 2.8 Diccionario para NMS

Al buscar la palabra promedio, no se encontró en el diccionario, así que se procedió a buscar media aritmética.

Media aritmética: A partir de n valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ se calcula cómo:

$$m = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$$

Ejemplo: en un experimento de caída se miden, para la misma altura de caída, los siguientes tiempos: 11,5 seg., 11.4 seg., 11,5 seg., 11,4 seg., 11,6 seg. De aquí resulta la media aritmética:

$$m = \frac{(11{,}5seg + 11{,}4seg + 11{,}5seg + 11{,}4seg + 11{,}6seg)}{5} = 11{,}48seg.$$

Otro diccionario consultado, para el nivel superior, fue el diccionario Larousse, en él encontramos la siguiente definición:

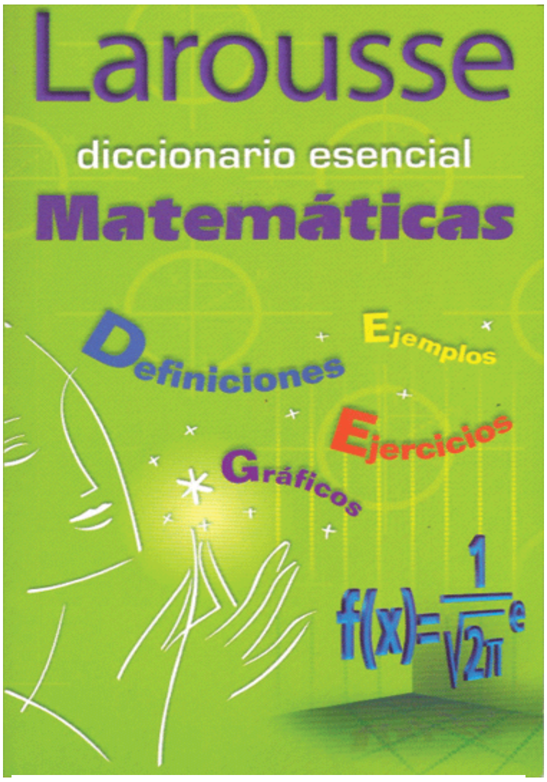


Imagen 2.9 Diccionario para NS

Promedio → Centralización, medidas de

⋮

Centralización, medidas de → Conjunto de parámetros que indican el valor medio de un conjunto de datos determinado, los cuáles son datos más frecuentes o alrededor de qué valores se agrupan. Los parámetros de centralización más frecuentes son la media aritmética simple, la mediana y la moda. También se denominan promedio, aunque en la mayoría de los casos se refiere únicamente a la media aritmética simple.

→ Media aritmética simple, mediana y moda

⋮

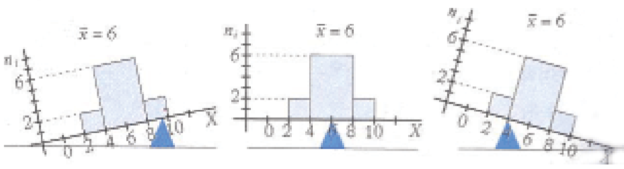
Media → Esperanza matemática

* Media aritmética simple Medida de centralización cuyo valor se obtiene de dividir la suma de todos los datos por el número total de los mismos. Se representa con el símbolo $\overline{X}$. Si x_1, x_2, …, x_p son los valores que toma cierta variable (o las marcas de clase de los Intervalos a estudiar) y n1, n2, …, np sus frecuencias absolutas, la media aritmética simple se puede calcular a través de éstas dos fórmulas:

$$\overline{X} = \frac{x_1 \bullet n_1 + x_2 \bullet n_2 + \ldots + x_p \bullet n_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p} = \sum \frac{x_i \bullet n_i}{N} \; o \; \overline{X} = \sum x_i \bullet f_i$$

Donde n y f son la frecuencia absoluta y relativa de cada dato. Las principales propiedades de la media aritmética simple son:

- Sólo puede usarse para variables cuantitativas, nunca para atributos.
- El valor siempre se encuentra entre los valores extremos del conjunto de datos.
- Gráficamente, puede interpretarse como el punto del eje X que mantiene el equilibrio del histograma de los datos, tal como indica la figura adyacente.



→ Centralización, medidas de

Ejercicio

¿Cuál es la nota media de las calificaciones de un alumno en los ocho exámenes de matemáticas siguientes: 3, 6, 7, 4, 5, 7, 6 y 8?

En primer lugar se calcula la media aritmética simple; así pues la nota media es 5.75, ya que $\overline{X} = \frac{3+6\bullet 2+7\bullet 2+4+5+8}{8} = \frac{46}{8} = 5.75$

Mediana: Medida de centralización representada por M_e cuyo valor divide a la serie ordenada de valores en dos partes iguales. Se puede obtener de dos formas distintas:

a) Si los datos no están agrupados en intervalos, deben ordenarse los datos de la variable a estudiar de mayor a menor (cada uno tantas veces como aparezca) y se elige el valor que ocupa la posición central. En el caso de que haya un número par de datos, el valor central es la media aritmética simple de los datos centrales.

b) Si los datos están agrupados en intervalos, se obtiene la clase mediana que corresponde al primer intervalo que iguala o sobrepasa una frecuencia relativa acumulada de 0.5. El valor de la mediana puede obtenerse a través de la fórmula:

$$M_e = L_i + c \bullet \frac{\frac{N}{2} - N_{t-1}}{n_i}$$, donde L_i es el límite inferior de la clase mediana, c es la amplitud común a todos los intervalos, N/2 es la mitad del número de datos, N_{t-1} la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior al de la clase mediana, y n_i la frecuencia absoluta de la clase mediana.

Ejercicio

¿Cuál es el valor de la mediana del conjunto de datos siguientes: 1, 4, 3, 7, 9, 6, 7, 4, 3, 3, 7, 0, 1, 2?

Dado que los números no están agrupados en intervalos y existe un número par de datos se procede de la siguiente manera:

1. Se ordenan de menor a mayor: 0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 7, 9.
2. El valor central se haya mediante la media aritmética simple de los dos valores centrales: $\overline{X} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$ ya que existe un número par de datos (N = 14).

Moda: Medida de centralización que se obtiene a partir del valor de la variable que presenta la máxima frecuencia absoluta. Se representa por M_0. Cuando los datos se encuentran agrupados en intervalos, se habla de intervalo modal, que es también el intervalo de mayor frecuencia. En estos casos, el valor de la moda se obtiene a partir de la fórmula:

$$M_0 = L_1 + c \bullet \frac{d^-}{d^- + d^+}$$ Donde L_1 es el límite inferior del intervalo modal, c es la amplitud común a todos los intervalos, d^- y d^+ son, respectivamente, las diferencias entre las frecuencias absolutas (n_i) del intervalo modal y las clases de los intervalos vecinos. Algunas distribuciones de datos pueden presentar más de

una moda; en estos casos se habla de distribución bimodal o trimodal si presentan 2 o 3 modas respectivamente.

→Centralización, medidas de

Ejercicio

¿Cual es el intervalo modal y la moda de los siguientes datos de la tabla?

INTERVALO	MARCA	N_i	f_i
[1,5 1,6[	1,55	5	0,06
[1,6 1,7[	1,65	9	0,12
[1,7 1,8[	1,75	16	0,10
[1,8 1,9[	1,85	4	0,32
[2,0 2,1[	2,05	1	0,32

Dado que los valores se encuentran agrupados en intervalos, el intervalo modal es el que posee la frecuencia absoluta mayor (n_i = 16), en este caso [1,7 1,8[.

El valor de la moda se obtiene a partir de la fórmula:

$$M_0 = L_1 + c \bullet \frac{d^-}{d^- + d^+}$$

Donde L_1 =1,7 (límite inferior del intervalo modal), c = 0,1 (amplitud del intervalo: 1,8 – 1,7 = 0,1), d^- = 7 y d^+ = 12 (diferencias entre la frecuencia absoluta del intervalo modal y el intervalo anterior y posterior, respectivamente).

$$M_0 = 1{,}7 + 0{,}1 \bullet \frac{7}{7+12} = 1{,}7368.$$

II.2 A manera de conclusión

A lo largo de la información presentada en éste capítulo se pudo conocer la manera en cómo nace y se desarrolla el concepto de promedio en el sistema educativo mexicano y detectamos entre otras cosas que en el nivel básico primaria el primer acercamiento que el alumno tiene es en función de sus calificaciones, y la definición que se le da del promedio es el siguiente enunciado: “El promedio de un conjunto de datos se calcula sumando todos los valores y dividiendo el resultado entre el número de datos”, el cual se ejercita con base en el cálculo del promedio de sus calificaciones. En el nivel secundaria, se sigue utilizando el ejemplo de las calificaciones para calcular el promedio, pero ésta vez se pasa de la definición de promedio en base a un enunciado a la definición en términos matemáticos:

$$\mathrm{Pr}\,omedio = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Esta será la diferencia más sobresaliente, ya que los ejemplos que se manejan en éste nivel siguen siendo del mismo corte (partiendo de una lista de calificaciones o de situaciones familiares).

En lo que respecta a la aleatoriedad en ambos niveles, ésta se ve seriamente afectada por cuestiones del calendario escolar, estatus de importancia que le de el profesor, etc. En consecuencia el alumno adquiere un manejo limitado de dichas nociones.

En el nivel medio superior y superior, se da un salto de contexto para tal noción, es decir, todos los problemas que hasta la secundaria se analizaron, tenían como característica el corte determinístico, sin embargo, en éstos niveles, el concepto de promedio se utiliza en situaciones aleatorias, en las cuales el promedio a aplicar debe ser el ponderado y no el aritmético. Los problemas puestos en ambos niveles tienen un grado de dificultad mayor a como se venían trabajando en los niveles anteriores. En el caso del nivel medio superior la definición que se tiene del valor esperado es únicamente para el caso discreto: $E(X) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots + p_k X_k = \sum_{j=1}^{k} p_j X_j = \sum pX$

Mientras que para el nivel superior ya se comienza a trabajar con el caso continuo, así que debe presentarse una fórmula para cada caso:

$$E[x] = \sum_{x=1}^{n} xp(x) \text{ ; Caso discreto}$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \text{ ; Caso continuo}$$

El escribir el valor esperado en éste tipo de expresión matemática rompe de algún modo con la idea de promedio que el alumno ha venido manejando. Por lo cual, aunque estamos hablando en ambos casos de promedio, la forma de calcularlo es diferente para el contexto determinístico que para el contexto aleatorio.

A continuación se muestra el cambio en la presentación de la noción de promedio en los diferentes niveles educativos:

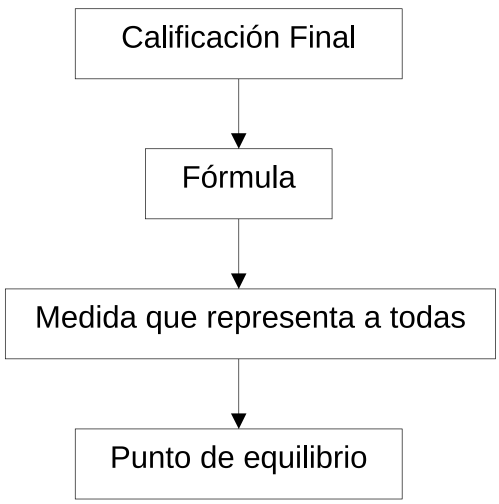


Diagrama 2.1 Cambios en la concepción del Promedio

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

III.1 Panorama general

En el capítulo anterior se analizó, a través de los programas de estudio y la bibliografía que recomiendan, cómo vive institucionalmente el concepto de promedio en los distintos niveles del sistema educativo mexicano. Presentamos ahora el marco teórico que dará fundamento a nuestro trabajo: la construcción social del conocimiento matemático.

Es intencional no hablar de socioepistemología en tanto no se hayan identificado prácticas sociales o prácticas de referencia asociadas a la noción matemática que estamos trabajando en esta investigación. Nuestro estudio hace un primer acercamiento a la dimensión social a través de los usos y significados de las nociones de promedio y valor esperado utilizados en diferentes áreas de la matemática (probabilístico y determinista).

Hablamos de construcción social del conocimiento matemático, en tanto contemplamos la interacción sistémica de las dimensiones didáctica, cognitiva, epistemológica y social en la explicación de los fenómenos didácticos que nos interesan.

Pretendemos, a partir de nuestro estudio, obtener los elementos del análisis preliminar al diseño de una secuencia didáctica que permita al estudiante:

- confrontar su noción de promedio aritmético en un contexto probabilístico y
- construir una herramienta matemática nueva (el valor esperado), a partir de las situaciones problema planteadas.

La socioepistemología asume que las prácticas sociales son normativas de la actividad humana y en esa medida son generadoras de conocimiento. De acuerdo con Martínez-Sierra (2005) las matemáticas surgen como un producto social, un bien cultural, un producto de la actividad humana, las cuales para consolidarse como tal deben pasar por diferentes etapas y momentos. Comienzan por ser manipuladas, formuladas, dotadas de representaciones y significados más precisos hasta llegar a constituirse como toda una teoría. Dentro de la perspectiva socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa, se consideran cuatro componentes que condicionan/determinan la construcción social del conocimiento matemático, tanto en los individuos como en los grupos humanos, a saber: la epistemológica, la didáctica, la cognitiva y la social.

De acuerdo con Cantoral (2002) la socioepistemología se plantea el problema del conocimiento situado como aquel que atiende a las circunstancias y escenarios particulares. El conocimiento en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y factores sociales. Esta consideración general plantea al programa socioepistemológico problemas teóricos y empíricos para explicar la construcción del conocimiento. El principal problema consiste en llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y sus mecanismos de institucionalización vía la enseñanza.

En nuestra disciplina se han desarrollado diferentes acercamientos a lo didáctico, a lo epistemológico y, sobre todo, a lo cognitivo y, más recientemente, a lo social. Por ejemplo, dentro de la metáfora del aprendizaje por adaptación al medio, contenida en la teoría de situaciones didácticas, las nociones de contrato didáctico y obstáculo epistemológico juegan un papel en relación al sistema didáctico. La primera da cuenta de la complejidad del sistema didáctico (constituido por el saber, aquel quien aprende y quién enseña en un medio determinado); ya que el contrato son las cláusulas, mayoritariamente implícitas, que regulan las relaciones entre el profesor y el alumno respecto a un conocimiento matemático. Mientras que la segunda da cuenta de las relaciones entre la cognición y la epistemología; ya que un obstáculo es un conocimiento adecuado para un amplio dominio de situaciones, de ahí la resistencia a ser abandonados.

Ahora bien, dado que el promedio es una noción matemática escolar que se trabaja en todos los niveles educativos del sistema educativo mexicano y que su aplicación se extiende a áreas de conocimiento distintas a la matemática como la ingeniería, administración, arquitectura, medicina, etc., resulta interesante que la mayoría de los estudiantes que reconocen y manipulan a cierto nivel dicha noción, no le asocian un único significado sino que frecuentemente sólo la relacionan con el contexto del problema donde la definen.

Dada esta problemática, es que nos interesa entender cómo se enseña, cómo se aprende, qué significados se adquieren y qué usos se le da a las nociones de promedio y valor esperado. A nuestro modo de ver, una visión sistémica al análisis de dicho fenómeno proporcionará una explicación más amplia sobre el desarrollo del pensamiento ligado a la noción de promedio y valor esperado.

Es por ello que nos apoyamos en la construcción social del conocimiento matemático, por considerar cuatro componentes fundamentales en la construcción de una noción matemática en particular:

- *Componente epistemológica.* Relativa la naturaleza específica del conocimiento matemático en juego.
- *Componente didáctica.* Relacionada con la organización del discurso escolar y los materiales de apoyo comúnmente usados por el docente.
- *Componente Cognitiva.* Propias del funcionamiento cognitivo, de los procesos de aprendizaje por parte del alumno.
- *Componente social.* Relativa a las prácticas sociales que dan origen al conocimiento matemático.

Cada dimensión debe describirse en relación con las otras para ofrecer una explicación sistémica. Sin embargo, haremos un intento por calificar los elementos más significativos de cada una por separado.

III.2 La Componente Epistemológica

En esta sección, utilizando el recurso histórico, se realizará un análisis de la génesis de la noción de promedio, identificando los usos antes de su definición, el tipo de problemas que resolvía y cuándo se reconoce y valida como un concepto matemático.

Dicho análisis nos permitirá conocer las razones del por qué éste concepto ha sobrevivido y ha pasado de generación en generación sufriendo modificaciones hasta llegar a ser considerado como un saber a enseñar.

Con cada nuevo descubrimiento surgen nuevas paradojas que dan pie a más descubrimientos, tal es el caso del problema de doblar la línea, el cuadrado y el cubo que dieron como resultado, entre otras cosas, el surgimiento de una nueva idea: la media aritmética.

El vocablo **promedio** proviene del latín *<pro medio>* que significa término medio. Ésta definición hace referencia, en matemáticas, a aquellas medidas centrales: media aritmética, mediana, moda, etc. Es por ello que no se puede hablar de un único promedio, sino que éste debe ser entendido como representativo de una distribución de datos que obedecen al contexto en el cual estén definidos.

Ésta significación se refleja en el uso que dicha noción tuvo de forma intuitiva para resolver cierto tipo de problemas en la antigua Grecia, a la cual, con el tiempo, se le encontraron aplicaciones y fue tomando formalidad.

En la época de Pitágoras, alrededor del año 500 antes de nuestra era, habían tres formas: armónica, geométrica y media aritmética. Las dos últimas se observan en el problema de doblar una línea, un cuadrado y un cubo. A la vista, estos objetos parecían similares. El cuadrado lo obtenían a partir de líneas, mientras que el cubo de cuadrados. Cuando sometían estos objetos a la acción de doblarlos, quedaba claro que aunque estos objetos parecían visualmente similares, su principio generador era muy diferente. Los griegos fueron los primeros en investigar ésta cuestión. Al reconocer que todos estos objetos visualmente similares, pero cognosciblemente diferentes, estaban contenidos en un solo universo, buscaron un principio unificador que subyace en la generación de los tres.

Hipócrates (460 a.C.–370 a.C) ofreció una noción basada en el principio pitagórico de la conexión entre la música, la aritmética y la geometría. Los pitagóricos reconocieron las relaciones entre los intervalos musicales, a las que llamaron: la aritmética y la geométrica. Ellos hacían referencia a que el número medio *"b"* entre *"a"* y *"c"* era llamado *media aritmética* si y solo si: $b - a = c - b$.

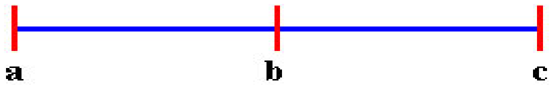


Fig. 3.1 La media aritmética (Donde b es el número medio entre a y c)

Esta situación dio la posibilidad de identificar una de las cualidades que dicha noción tiene: la de que dicho valor medio se encontraba entre dos cantidades extremas. Actualmente una equivalencia de esto sería: $\frac{a+c}{2}$.

La *media geométrica* era definida cuando 3 números estaban en proporción constante: $a{:}b{::}b{:}c$. Por ejemplo, 2:4::4:8

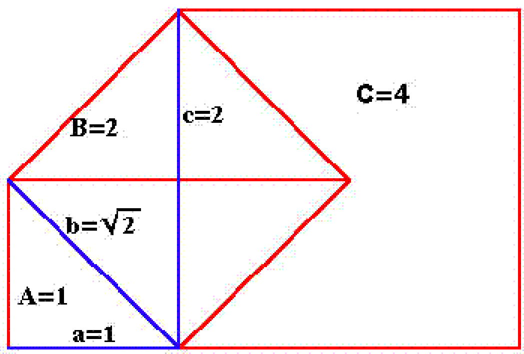


Fig. 3.2 La media geométrica (La longitud b es la media geométrica entre las longitudes a y c. El área B es la media geométrica entre las áreas A y C)

Hipócrates reconoció que la relación aritmética la expresaban los intervalos formados al agregar las líneas, y que la geométrica la expresan los intervalos creados al agregar cuadrados o, más en general, áreas. La formación de figuras sólidas, no correspondía directamente a ninguna de estas relaciones musicales. Sin embargo, la sombra proyectada al doblar el cubo, expresaba una relación que correspondía a encontrar dos medias geométricas entre dos extremos.

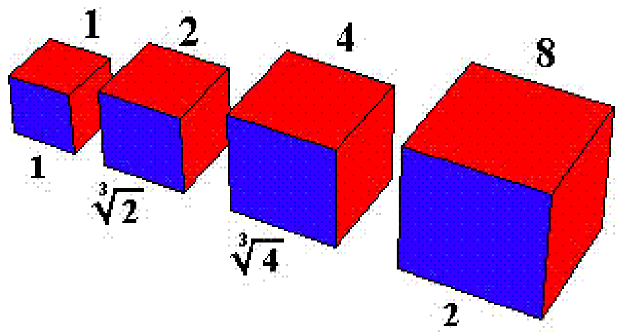


Fig. 3.3 Dos medias geométricas entre sólidos

Las dos medias geométricas entre un cubo de arista 1 y volumen 1 y un cubo de arista 2 y volumen 8. Proporcionalmente, habrá dos medias geométricas entre un cubo de volumen 1 y un cubo de volumen 2

Platón explicaba:

> *"Ciertamente, lo generado debe ser corpóreo, visible y tangible. . . Pero no es posible unir bien dos elementos aislados sin un tercero, ya que es necesario un vínculo en el medio que los una. . . Si el cuerpo del universo hubiera tenido que ser una superficie sin profundidad, habría bastado con una magnitud media que se uniera a sí misma con los extremos; pero en realidad, convenía que fuera sólido y los sólidos nunca son conectados por un* ***término medio****, sino siempre por dos.".*

Platón hablaba también de las investigaciones de las medias geométrica y aritmética:

> *"Algo divino y maravilloso es aquello que se contempla y que refleja cómo la totalidad de la naturaleza está impresa con especies y géneros de acuerdo a cada proporción como un poder. . . Para el hombre que realiza sus estudios de la forma adecuada, todas las construcciones geométricas, todos los sistemas numéricos, todas las progresiones melódicas debidamente constituidas, el*

sistema ordenado de las revoluciones celestes, deberían revelarse a sí mismos, y lo harán, si, como digo, un hombre hace sus estudios con la mente fija en un solo propósito. Como tal hombre lo refleja, recibirá la revelación de un simple lazo de interconexión natural entre todos estos problemas. Si maneja tales materias con otro espíritu, un hombre, como digo, necesitará invocar a su suerte. Debemos dejar sentado que, sin estas capacidades, la felicidad no llegará a ninguna sociedad; este es el método, este es el pábulo, estos los estudios exigidos; difícil o fácil, este es el camino que tenemos que seguir".

Este ejemplo ilustra que si bien no se usaba una fórmula para evaluar el promedio, se aplicaba una definición griega para calcular la media aritmética. Así mismo, recurrían a una representación de barras, forma en la cual los griegos calculaban el valor medio entre dos valores extremos. Es decir, ellos podían mediante una estrategia de compensación visualizar la estimación de dicho valor.

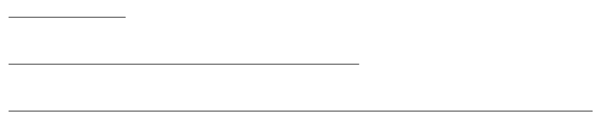


Fig. 3.4 Representación griega de magnitudes por medio de barras (2, 6 y 10)

Esta algoritmia fue adquiriendo muchos usos, por ejemplo en la astronomía, en la cual se presentaba el problema de cómo determinar, a partir de un conjunto de medidas $x_1, x_2, ..., x_n$ la mejor estimación posible del verdadero valor x desconocido, ya fuese para conocer una estimación correcta de la posición de un planeta o el diámetro de la luna. Posteriormente los astrónomos babilónicos al enfrentarse a este problema, lo resolvían calculando la suma total de las observaciones y dividiéndola por el número de datos.

Éstos son los primeros antecedentes, la génesis de la noción de promedio, llamada desde entonces media aritmética, la cual se descubre implícitamente en la solución de problemas prácticos y que más tarde es llevada progresivamente a la aplicación del concepto en la solución de otras situaciones problemáticas. Esta noción no avanzó sola, lo hizo de la mano con otras nociones, lo cual permitió resolver otro tipo de problemas, por ejemplo, la necesidad de estimar cantidades grandes. Con un sencillo algoritmo, fue posible predecir dicho valor. Tal es el caso del cálculo del número de ramas en un árbol, el cual se obtenía multiplicando el número de hojas en una rama por el número de ramas en el árbol. Si bien este valor estaba muy alejado del número real, dicho problema es representativo, pues tiene implícita la noción de media aritmética ponderada, el cual vio su aplicación más adelante en una de las "ramas" de la matemática: la probabilidad.

En conexión con la estimación del número total, la selección del promedio de ramitas, envuelve una noción similar a las representaciones y compensaciones utilizada en la antigua Grecia. En términos modernos, la evaluación representativa de un cierto valor *"a"*, tiene un parecido con $n*a$, que es la suma de todos los x_i con n número de ramas y x_i número de hojas en la rama. Es decir: $n*a$ es: $\sum x_i$

Con el paso del tiempo y ante el surgimiento de nuevos problemas, los matemáticos se dieron cuenta de que la media aritmética podía ser trasladada a otros contextos y que sus aplicaciones resultaban muy útiles para analizar otro tipo de problemas. Solo por mencionar otra área de las matemáticas en donde el promedio se ve inmerso, citemos el caso del cálculo diferencial e integral (cuyo verdadero valor se encuentra en la infinidad de aplicaciones que se le pueden dar). El promedio encuentra su aplicación en la teoría de valles, teorema del valor medio, teorema de Rolle, densidades de frecuencia y media, etc.

Sin embargo, analizaremos la acogida que dicho concepto tuvo en la teoría de las probabilidades, para entender así la forma en como surgió el valor esperado a partir de la media aritmética. Algunos matemáticos o físico-matemáticos de diferentes épocas incorporaron en sus trabajos en forma directa o indirecta, a la media aritmética como método de cálculo o concepto clave de sus investigaciones, tal es el caso de Huygens (1629-1659), Bernoulli (1654-1705), Quetelet (1718-1799), Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855), Von Mises (1881-1973), quienes trasladaron este concepto a la teoría de las probabilidades, encontrando así un nuevo campo de aplicación para dicha noción.

El primer estudio sistemático del valor esperado se debe a Huygens (en su obra *Libellus de Ratiotiniis in Ludo Aleae*, de 1657), que calcula el valor justo de un juego a partir de una respuesta obvia en ciertas situaciones simétricas, y generalizando el valor esperado obtenido a cualquier situación. Comienza suponiendo que:

> Si se espera ganar *a* o *b*, cualquiera de los dos con igual probabilidad, entonces la expectativa vale $\frac{(a+b)}{2}$, es decir, la semisuma de a y b. Generalizando este razonamiento a n posibles resultados $a1,\ldots,an$, teniendo todos la misma probabilidad, conduce a un valor esperado igual a $\frac{(a_1+\ldots a_n)}{n}$

Posteriormente, Huygens considera el caso en que las posibles ganancias son a y b, pero con probabilidades distintas. Supone que hay *p* oportunidades de ganar a, y q oportunidades de ganar b. Por tanto, generalizando de las proposiciones anteriores, considerando un juego equivalente en el que cada uno de los $p+q$ resultados ocurre con la misma probabilidad, pero en p de ellos se obtiene una ganancia a y en los q restantes una ganancia b, el valor esperado será igual a:

$$a \cdot \frac{p}{p+q} + b \cdot \frac{q}{p+q}$$

En definitiva, se utilizaba una idea similar a la acepción vulgar del término esperanza, que sugiere como posible aquello que deseamos o esperamos obtener. De hecho, inicialmente se confundía la esperanza del juego con su resultado positivo.

Posteriormente Bernoulli, retomó esta idea para abordar la situación de un jugador que deseaba ganar el juego en el que participaba. En su razonamiento, Bernoulli utiliza la noción de frecuencia, y no se basaba en la simetría de la situación. Razonó de la siguiente manera: cada vez que se jugaba en una baza o mano concreta del jugador, podía ganar o perder de manera que el resultado era incierto pero a lo largo de una partida el resultado del juego podía valorarse numéricamente a través de ciertos cálculos aritméticos, por lo que llamó a este valor numérico “esperanza matemática”.

Si la ganancia por baza se multiplicaba por el porcentaje de veces que se ganaba y se restaba la pérdida unitaria multiplicada por el porcentaje de veces en que en ella se incurría, se tendría el valor esperado del juego, es decir, designando por E la esperanza:

E[juego] = ganancia (% de veces que se gana) – pérdida (% de veces que se pierde)

La valoración de los porcentajes con que cada alternativa, ganar o perder en el juego, podía presentarse se basaría en la experiencia de partidas anteriores. Estos porcentajes, no otra cosa que la probabilidad de cada uno de estos sucesos, no se convirtieron formalmente en probabilidad hasta que casi un siglo más tarde fueran explicitados como tales por Laplace.

Sin embargo, más recientemente, la aportación de Von Mises permitió intuir el significado estadístico de este concepto: la aplicación de la idea de esperanza matemática a una variable aleatoria que pudiera presentar más de dos alternativas (ganar o perder) llevó a la expresión:

$$\sum_i x_i p(X = x_i)$$

…donde x_i son los valores de las diferentes alternativas y p_i sus respectivas probabilidades.

Así mismo, Quetelet fue uno de los primeros científicos en usar el promedio como un valor representativo en el estudio de una población. Se dio entonces el tránsito de la evaluación real a la evaluación representativa significó un importante cambio conceptual. Uno de los problemas científicos con el uso del promedio era la distinción entre los valores discretos y continuos. El promedio es una medida, esto supone una linealidad, y pudo tal vez de éste modo ignorarse la variación.

Por su parte, Gauss se basó en la media aritmética para construir su teoría de errores. Cuando cualquier número de observaciones igualmente buenas son dadas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, como los valores de una cierta magnitud, *el valor más probable* es su *media aritmética*. El acercamiento de Gauss a la teoría de errores no se apoya en el equilibrio mecánico, sino en la probabilidad. Sin una cuantificación de la incertidumbre, no era posible responder a la pregunta ¿cuál es la mejor medida? Partiendo del principio de la media aritmética, Gauss derivó su ley de los errores, una ley que gobierna la probabilidad de que una simple medida x esté entre dos limites dados.

Si μ es el verdadero valor de la magnitud, entonces el error en la observación es la desviación:

$$e = \mu - x$$

$$P[a < \mu - x < b] = \int_a^b \Phi(x)dx$$

Donde la función error es $\Phi(x)$, y P es la probabilidad de que la variable error $e = \mu - x$ esté entre a y b. Por lo tanto se concluía que la única función error en la que la media aritmética es el valor más probable es: $\Phi(x) = \frac{h}{\sqrt{x}} e^{-h^2 x^2}$, gradualmente, el uso de la media aritmética para reducir errores, se convirtió en un método común en otras áreas.

De acuerdo con Bakker y Gravemeijer (2006) para el siglo XIX, el promedio ya era usado como un término común y aplicado en otras áreas de la matemática. Y sin embargo, tomó un largo tiempo antes de que dicha noción, aunque simple, madurara y diera origen a lo que hoy conocemos como promedio.

De esta manera, es posible entender la evolución que ha tenido dicha noción matemática en otras áreas del quehacer matemático, lo que pudiera parecer una simple idea matemática (el promedio) es en realidad generadora de otros conceptos matemáticos, es decir se tiene su uso de este concepto en otros escenarios distintos al que le dieron origen.

III.3 Análisis Didáctico

En el Capítulo II de este trabajo se reportó el estado actual de la noción de promedio en el Sistema Educativo Mexicano. En este capítulo retomaremos algunos puntos de este reporte para hacer un análisis de las variables que influyen en la concepción del promedio que muestran los alumnos del nivel superior y del por qué no consideran al valor esperado como un promedio.

La *componente Didáctica* nos permite conocer y profundizar en las tradiciones escolares al momento de tratar con la noción de promedio y de cómo vive ésta en la escuela a través de los planes y programas de estudio, así como los libros de texto utilizados en los deferentes niveles educativos, en los cuales se ve reflejado el enfoque que se le da a la noción matemática en cada contexto del conocimiento científico.

Así mismo ésta componente permitirá comprender los diferentes significados que adquiere determinada noción matemática en cada una de las áreas en las cuales se le utiliza, abriendo la posibilidad de entender de algún modo porqué una misma noción matemática que es empleada de diferente manera en distintos contextos, no es reconocida como tal por los estudiantes.

Educación Básica[19]

La primera lección que toca el concepto de promedio (lección #27) correspondiente al 5to año, da la impresión de que se está retomando un elemento que el alumno ya conoce. Sin embargo, es la primera vez que el alumno la aborda en clase de matemáticas como una noción escolar. El autor del texto analizado da la impresión de partir bajo la premisa que el alumno usa su familiaridad con el término promedio, para entender su significado a partir del procedimiento que lo calcula.

Tradicionalmente, el camino a seguir para incorporar al saber del alumno un nuevo conocimiento matemático es primeramente proporcionarle los elementos teóricos relacionados a los conceptos matemáticos, seguido de ejemplificar la aplicación que dichos conceptos tienen. Para el caso de la enseñanza del promedio, éste orden se modifica, se explica el concepto a través de un ejercicio y se procede con la explicación escolar de qué significa el valor encontrado.

[19] De los 6 a los 12 años

La definición que se le proporciona al alumno es una *definición de uso*; no se plantea qué es y qué significa, sino cómo se calcula y se aplica en determinados problemas. Cabe destacar que dichos ejemplos no contienen problemas de índole propiamente matemático, sino que parten de situaciones cotidianas, entornos familiares y problemas comunes para él.

Educación Secundaria[20]

En el nivel secundaria, el concepto de promedio se maneja como una cantidad relativa, o como razón promedio de cambio de ciertas cantidades respecto de otras. En particular, la media aritmética, comúnmente conocida como el promedio es utilizada en éste nivel con frecuencia para describir en forma abreviada los datos de una lista.

En éste nivel, el promedio se estudia dentro de las medidas de tendencia central, en cuyo caso se define con base en una expresión matemática, es decir, se le expresa por medio de la fórmula que lo calcula.

Las lecciones que introducen la noción del promedio para éste nivel, son también de tipo experimental, se proporciona una lista de datos ordenados en una tabla, donde el alumno observa el cambio y/o relación entre éstos, como los son los clásicos ejemplos de las estaturas y calificaciones de los alumnos que conforman el grupo.

Los problemas que se desligan un poco de éstos, son los que tienen que ver por ejemplo con la velocidad promedio de un auto, el contagio promedio de una enfermedad viral en un cierto periodo de tiempo, la ganancia promedio según el incremento y pérdidas en una casa de bolsa, etc. Sin embargo, en dichos ejemplos no se da seguimiento a la idea de frecuencia que se comenzó en la primaria, el cual permite comenzar a construir el promedio ponderado.

En general, en el nivel secundaria no se localizaron alternativas en la definición o caracterización de la noción de promedio. Sin embargo, este nivel se torna interesante

[20] De los 12 a los 15 años.

para nuestro trabajo pues comienza el manejo de las nociones de probabilidad, con un pequeño conjunto de ideas fundamentales, que se desarrollan a lo largo de los tres grados: tales como la idea del azar, uso de diagramas de árbol, nociones frecuencial y clásica de la probabilidad, entre otras.

Sin embargo, no se logra en el alumno que haga una clara distinción entre una experiencia aleatoria y una experiencia determinista, situación que se observa al abordar temas propios de la probabilidad y estadística. Desafortunadamente éstos temas son la última parte de los programas de estudio, por lo que frecuentemente son recortados o excluidos por el calendario y carga temática que maneja el docente.

Educación Media Superior[21]

En el nivel medio superior, el tránsito de un escenario determinista a uno aleatorio, es brusco y poco amable con el concepto de promedio, provocando que el alumno no lo relacione con el valor esperado. Una hipótesis de por qué sucede esto es que no se explicita que el valor esperado surge a partir del promedio ponderado, el cual considera variables aleatorias (discretas y/o continuas). Y esto es porque si bien, en los libros recomendados sí existe un apartado de ello, en la práctica, esto no se ve y se pasa directamente a la definición del valor esperado.

Como todas las asignaturas de matemáticas, la de Probabilidad y Estadística busca asociar lo enseñado en Aritmética, Álgebra, Geometría, etc. Sin embargo, la experiencia de aula muestra, que no se logra o se logra en un nivel deficiente. Regularmente el desarrollo del programa de probabilidad y estadística se centra fundamentalmente en el planteamiento y solución de problemas, por lo cual se dedican largos periodos exclusivamente a ejercitar técnicas estadísticas o probabilísticas, tratando de agotar así los temas.

Consideramos que un punto importante radica en la discusión sobre las diferencias entre sucesos deterministas y sucesos aleatorios, por ejemplo, en el caso del valor

[21] De los 15 a los 18 años

esperado y la desviación estándar, en el contexto aleatorio, indican una tendencia de los resultados, pero no el resultado que deberá tenerse en un intento dado. Esto es, nos permite conocer lo que muy posiblemente ocurrirá si repetimos varias veces el intento, pero no tendríamos certeza en lo que sucederá. No obstante ésta incertidumbre, el conocimiento del valor esperado y su desviación estándar nos permite orientar nuestras decisiones.

En nuestra experiencia de aula hemos detectado que el alumno considera al valor esperado y al promedio como dos conceptos distintos. Y sin embargo, tienden a transponer la media aritmética al valor esperado, lo cual lleva al estudiante a no contemplar la probabilidad de cada variable como parte del cálculo. Además, dado que en probabilidad y estadística, se trabajan con datos, estos datos se organizan de cierta forma para representarlos a todos (un promedio) o una parte de ellos y otro número que nos indique la variación respecto al promedio. Y puesto que no existe un único valor promedio, sino varios: media, mediana, moda, media armónica, media geométrica, etc. Tampoco existe una única manera de señalar la variación; rango, varianza, desviación estándar, etc. De ahí que si el alumno no tiene claro éste hecho, cuando se le define al promedio en éste nivel como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}$$

Y al valor esperado como:

$$E[x] = \sum px$$

… el alumno no logra vincularlos.

Además el tipo de ejercicios en éste último caso tienen una componente azarosa, es decir, que el resultado más probable se da en función no sólo del valor promedio simple, sino de aquel promedio ponderado que toma en cuenta dichas probabilidades, ya sean en el juego o en un fenómeno o comportamiento aleatorio.

Educación Superior[22]

En Cantoral y Farfán (2003) se hace mención de que la educación superior debe estar al servicio de otras ramas o áreas de conocimiento.

Ahora bien, si esto es cierto, se podría preguntar ¿por qué continuar con el estudio de la probabilidad y estadística en el nivel superior? El hecho de que las matemáticas sean de importancia fundamental en el desarrollo de las ciencias y la tecnología y considerando también que son una herramienta valiosa en múltiples problemas relacionados con la ingeniería y puesto que existen infinidad de hechos, fenómenos o situaciones en donde interviene la incertidumbre o el azar, la teoría de la probabilidad y la estadística, ya que son indispensables para crear modelos en los que se puedan estudiar e interpretar en forma adecuada y sistémica este tipo de eventos, es que el estudio de la probabilidad es de suma importancia en las carreras de ingeniería.

Se plantea que el curso de probabilidad y estadística, no sólo sea el sustento básico para el estudio de otras materias, también se pude decir que la teoría de la probabilidad y la estadística son una parte fundamental dentro de la matemática y del estudio de las ciencias en la investigación y en el desarrollo tecnológico.

Sin embargo, el concepto de promedio contenido en los planes y programas de estudio de la materia de probabilidad, presenta un salto que se considera normal, al introducir el concepto de promedio el cual es manejado desde el nivel medio superior, ahora como valor esperado o esperanza matemática. Como ya mencionamos dicho concepto no se ve como un promedio, sino que se le considera más como un punto de equilibrio o como una medida de tendencia central.

Por ejemplo, los problemas relacionados con el valor esperado tienen una estructura diferente a como se ha venido trabajando el concepto de promedio a lo largo de la formación académica del estudiante, y muchas veces se le pide que encuentre el valor esperado de diferentes formas y de manera implícita. Está por ejemplo el siguiente

[22] Después de los 18 años

problema: *Si un hombre compra una papeleta de rifa, en la que puede ganar un primer premio de $5000 o un segundo premio de $2000 con probabilidades 0.001 y 0.003. ¿Cuál sería el precio justo a pagar por la papeleta?* Como podemos observar en el ejemplo lo que se está pidiendo calcular en realidad no es otra cosa que el valor esperado, sin embargo si esto no lo comprende el alumno, dará trastabilleos en su desarrollo. Y si bien lo puede calcular, no se dará por enterado que tal valor es en realidad un promedio.

En resumen, podemos decir que la noción escolar de promedio en cuanto a su presentación por primera vez en el nivel básico primaria, el tipo de ejercicios propuestos para cada nivel y la relación que guardan con el nivel en el que se estudia, dan muestra de una inconsistencia tal y una ruptura en el tratamiento de los niveles avanzados, que el alumno desliga al promedio con el valor esperado, considerando que se trata de cosas totalmente diferentes por el solo hecho de definirse de manera distinta. Y en el mejor de los casos, cuando el alumno tiene clara esta dualidad del promedio en los diferentes contextos (probabilístico y determinista), el significado que le asigna a dicha noción matemática es en función de la aplicación que ésta tiene en cada una de sus carreras.

III.4 Elementos de corte cognitivo

Un acercamiento *cognitivo* a la noción de promedio permite explorar los procesos de aprendizaje por parte de los alumnos ante dicha entidad, parte del cual se ha mostrado en el capítulo I al reportar no solo las diferentes investigaciones que se han realizado sobre el promedio sino también, en algunos casos, exponiendo sus resultados, los cuales muestran la dificultad que representa para los estudiantes el trabajar con ella ya sea para aplicarla o para interpretarla.

También es posible establecer las causas de lo que nosotros hemos llamado *hemiplejia conceptual*[23] en el alumno la cual genera un vacío entre la definición literal y la definición de uso respecto del promedio que le impide ver a dicha noción en todas sus dimensiones pues la restringe y encasilla en un solo contexto, limitando así la posibilidad de trasladarla de maneta natural a otros campos del quehacer matemático, específicamente el probabilístico.

Ahora bien, puesto que existen diferentes elementos de conflicto, es importante establecer nuestra postura ante algunas concepciones necesarias para apropiarse y comprender el concepto de promedio en un nuevo contexto.

Al igual que Piaget, consideramos al conocimiento como una actividad adaptativa, es decir como un tipo de compendios de conceptos y acciones que se han encontrado exitosos, dados los propósitos que uno tiene en mente. Así el aprendizaje ocurre cuando en la aplicación de las nociones previamente construidas resultan insuficientes y el sujeto se ve obligado a hacer adaptaciones, reestructuraciones e incluso rechazos de tales saberes.

Un concepto no se desarrolla, si el alumno nunca tiene una necesidad del mismo. Por ejemplo si todos los casos en los cuales el alumno únicamente utiliza la definición de uso del promedio, es posible que su comprensión de ésta noción quede limitada. Bajo este rubro uno de nuestros objetivos al diseñar una secuencia didáctica consistirá en organizar las situaciones para que el concepto en juego (media aritmética) se muestre insuficiente y el alumno se percate que no es posible trasladar tal cual dicha noción a la teoría de las probabilidades. Surgiendo así la necesidad de buscar un puente entre la media aritmética y el valor esperado.

Nosotros al igual que Tall (1991) y Vinner(1992) consideramos que es necesario hacer una distinción entre el modo que un alumno piensa sobre un concepto y la definición

[23] Utilizamos éste término para referirnos al concepto que es entendido a través únicamente de una de las diferentes posibles definiciones existentes para dicha noción matemática, resultando así incompleta y quedando limitada y restringida en sus usos e interpretaciones.

formal del mismo. En este sentido se da un conflicto entre la estructura de las matemáticas los procesos cognitivos para adquirir determinados conceptos. Es así que el abordaje de dicha definición mediante ejemplos y maneras de manipular y experimentar con la noción, muchas veces no es la correcta cuando se trata de conceptos complejos como lo es el promedio.

De tal forma que se tiene que echar mano de conceptos como la *imagen del concepto* para describir la estructura cognitiva que es asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados con el mismo. Es lo que evoca nuestra memoria, puede ser una representación visual, una colección de nociones intuitivas, experiencias, ejemplos, etc. relacionados con el concepto. Esta imagen del concepto se robustece con el paso de los años a través de usos y aplicaciones, de experiencias y estímulos de diversos tipos. Por otro lado la definición del concepto es una descripción formal del mismo.

Para el caso del promedio la mecanización surge tras una continua aplicación del algoritmo que lo determina, y entre otras cosas también es relacionado con quehaceres cotidianos que le atribuyen una cierta interpretación y significado. De ahí la importancia de distinguir entre el concepto matemático formal y la subjetiva imagen que se tenga del mismo.

Por otra parte para Eisenberg (1991), comprender un concepto matemático básico implica haberlo construido desde una base intuitiva y generalmente, durante el proceso de enseñanza, el estudiante no logra dar sentido ni profundiza en ellos, Esto da como resultado que el alumno no logre adquirir un pensamiento funcional, sino sólo una manipulación de mecanismos. Este hecho se presenta cuando el alumno empieza a escuchar a temprana edad la palabra promedio utilizada por su profesor para referirse a su desempeño académico y si bien no entiende las implicaciones que éste tiene, la relaciona inconcientemente con situaciones que alejan a dicha noción de aquella que le da razón de ser y la vincula a una de tantas aplicaciones que dicha noción puede tener. Por tal razón asumimos también que aprender es sinónimo de superar inconsistencias y conflictos; es decir, implica apropiarse de nuevas nociones e incorporarlas a aquellas que ya posee.

Para el caso del obstáculo epistemológico, al igual que Brousseau (1983), consideramos que éstos son producto de un conocimiento anterior, que se revela falso o simplemente inadecuado. Así analizar las condiciones que deben cumplir las situaciones o problemas propuestos al alumno provocará que éstos se cuestionen sobre sus conocimientos. Es decir que al confrontar su noción ante determinada situación y ver su invalidez ante ciertas situaciones, lo motivará a buscar otros medios para superar el problema. Para ello es importante detectar aquellos errores que son recurrentes en el alumno y una vez identificados establecer la manera de cómo superarlos.

El hecho de establecer nuestra postura ante las diferentes componentes cognitivas nos permitirán atacar de manera científica la problemática surgida de la enseñanza aprendizaje de éste saber matemático.

III.5 Dimensión Social

Dado que la matemática se ha construido socialmente, en ámbitos no escolares, su introducción al sistema de enseñanza le obliga a tomar una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento. Sin embargo, puesto que la actividad humana afecta al propio desarrollo de la matemática, es que podemos comprender que si bien es cierto el promedio es una noción matemática escolar que todos los estudiantes conocen y manipulan a cierto nivel, pues se trabaja con ella en todos los niveles educativos del sistema educativo mexicano, y cuyo uso se extiende a áreas de conocimiento distintas a la matemática como son la ingeniería, la administración, la arquitectura, la medicina, etc., resulta interesante que no se le asocie un único significado, sino que se le relaciona con el contexto donde le dan uso, ya sea a partir del medio escolar o de la vida cotidiana.

A través de entrevistas informales realizadas a alumnos de varios niveles educativos, hemos identificado diferentes significados e interpretaciones que tienen de la noción de promedio. A continuación se presenta una lista con las concepciones más frecuentes:

… el promedio es…

- Es la calificación final
- Una fórmula
- Un punto de equilibrio
- Una cantidad más cercana a todas
- Una distribución equitativa
- Un estándar
- Lo más frecuente
- Aquello que nos da una idea general
- La regularidad de una cantidad numérica

De forma natural nos preguntamos qué hace que se le asocie tal o cual significado a la noción de promedio o qué elementos son tomados en cuenta. En una primera hipótesis diremos que cada una de las interpretaciones dadas al promedio obedece al contexto en el cual fue enseñado o es aplicado, pudiendo ser físico, aritmético, geométrico, etc.

Por ejemplo, asociarle la idea de **un valor central** se debe a que la media aritmética es un tipo de promedio que se puede interpretar no sólo como la acción operativa de sumar valores y dividir ente el total de ellos. Este tipo de promedio tiene otro referente significativo, el de la menor dispersión, o bien podría llamarse de la centración. Este referente adquiere significado cuando el valor resultante de la acción de promediar se posesiona de un lugar tal que ahora el todo, dado por el conjunto de datos que intervienen, se mira a través de él; esto es, hay un nuevo valor de referencia, el origen inicial ya cambió, hay un nuevo origen. Entonces la distancia de los valores que quedan a su izquierda o por debajo, son negativas, las distancias de los que quedan a su derecha o por arriba, son positivas. De este modo el promedio se convierte en un valor centrado, precisamente por el hecho de que la suma total de las distancias izquierdas y derechas es cero.

De aquí podría desprenderse la idea del promedio como un **punto de equilibrio**, ya que podría deberse a que una característica de la equilibración tiene su manifestación, por ejemplo, cuando el área del triángulo se equipara al área de un rectángulo con la misma base que la del triángulo, pero cuya altura es h/2, dado que es la única manera de equilibrar a los dos triángulos que se forman y los cuales son iguales, pudiéndose interpretar además uno por el exceso de *e* y el otro por el defecto de *d*.

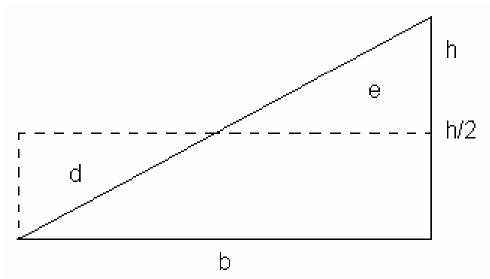


Imagen 3.1 Equilibrio en de un triángulo en base a sus áreas

El promedio surge cuando se hace intervenir a la media aritmética para el cálculo de la altura, que es la que permite equilibrar los triángulos mencionados por exceso y por defecto. Esto es, hay una altura promedio dada por $\frac{h}{2} = \frac{0+h}{2}$, siendo entonces la correspondiente área del rectángulo $A = b\left(\frac{h}{2}\right)$, interpretada como la base, multiplicada por una altura promedio h/2. Por supuesto el área del triángulo rectángulo original es equivalente al área de tal rectángulo, dado que esa altura promedio es la única que permite asegurar que los triángulos por exceso y por defecto son iguales. Es de resaltar cómo es que éste argumento se sustenta en una cualidad del promedio, pues se recurre a dicha cualidad de éste.

Esta característica da origen a que el promedio sea entendido también como una **distribución equitativa**, ya que intrínsecamente la promediación conlleva una fórmula de cálculo, que se podría llamar de *compensación*. Ésta tiene el significado de que si se quiere encontrar ese valor centrado desconocido entre dos valores dados, se establece un proceso mediante el cual, la diferencia entre ellos se parte en dos y luego se agrega o quita según se quiera al valor a la izquierda o a la derecha respectivamente. Evidentemente este proceso se complica cuando se tienen dados tres o más valores, sin embargo, la forma básica de cálculo se sigue manteniendo.

Cuando se dice que el promedio es una **cantidad más cercana a todas**, puede deberse a una característica adicional de la noción de promediación, conocida como de exceso, o defecto. Esta característica, como ya se vio, tiene la cualidad de ser aproximativa, en el sentido de que al intentar encontrar un valor desconocido del que se sabe su existencia, entonces es posible partir de un valor que esté a su izquierda, considerado como un valor por defecto, y luego mediante un algoritmo de aproximaciones sucesivas, se obtiene otro valor aproximado que está a la derecha del valor desconocido, considerado como un valor por exceso. Ahora si a partir de esos dos valores entra en escena la media aritmética simple de ambos, entonces el proceso se enriquece pues ése valor de la media, se asegura por el propio procedimiento que será un valor por defecto, pero más aproximado al valor anterior por defecto. Si el proceso se continúa, además de irse alternando los valores encontrados, por exceso y defecto, se asegura la convergencia de la sucesión de valores, al valor que se está buscando.

Asumir el promedio como la **calificación final** tiene su origen en el contexto escolar donde se usa esta noción. Se tiene entonces un contexto, llamémosle cuanti-cualitativo, pues más que relacionarlo con un concepto matemático, se vincula con el quehacer del alumno en la escuela, con el resultado del desempeño en el trabajo, con el reflejo de sus estudios y el esfuerzo puesto durante el año escolar, etc. El promedio se presenta entonces como un ente abstracto que emerge en la escuela, pero fuera de actividad didáctica (promediar las calificaciones).

En este sentido, consideramos que el significado y, en consecuencia, el aprendizaje de la noción de promedio están íntimamente ligados a la *actividad* que el individuo realiza al usarla.

III.6 A manera de conclusión

Muchos han sido los beneficios y el aprendizaje que hemos podido obtener de este análisis, nos ha permitido establecer no solo la génesis de dicha noción, pasando por su consolidación como noción matemática reconocida, sino también su participación en la generación de nuevos conceptos en otras áreas de la matemática, particularmente la probabilística.

Ahora bien consideramos que poner atención en la componente social nos puede llevar a poner más cuidado en los significados y usos de éste concepto, ya que son éstos quienes pueden evolucionar para construir una nueva noción, el valor esperado, enfrentándonos al hecho de que también algunos de ellos quizás puedan obstaculizar también el paso de lo determinista a lo aleatorio.

CAPÍTULO IV

SECUENCIA DIDÁCTICA

IV. 1 Preámbulo

Puesto que ya se tienen antecedentes de otras investigaciones hechas sobre la media aritmética que dan evidencia de las dificultades que el alumno presenta al trabajar con ésta noción, que ya se ha efectuado un análisis de los planes y programas de estudio en los distintos niveles del sistema educativo mexicano en los cuales se enseña, y que ya se ha planteado un marco teórico para la construcción social del conocimiento matemático, a través de sus distintas componentes; es que ahora podemos hablar de socioepistemología, que permite contextualizar y situar un determinado saber matemático y dar evidencia de la relación entre la práctica social y el conocimiento matemático.

En este momento ya se tienen identificadas prácticas sociales asociadas a la noción matemática que estamos trabajando en esta investigación. Hemos hecho un primer acercamiento a la dimensión social a través de los usos y significados de las nociones de promedio y valor esperado utilizados en diferentes áreas de la matemática (probabilístico y determinista). Podemos ahora detectar aquellas nociones germinales que se encuentran implícitas al usar dicha noción en un área de conocimiento distintas a la matemática como es la ingeniería. Y comprender para este caso porque razón no se le asocia un único significado a dicha noción, sino que se le relaciona con el contexto donde se le utiliza.

IV.2 El promedio en la Ingeniería

Como es sabido, en Ingeniería la enseñanza de las matemáticas es una parte fundamental, pues tal disciplina le permite al ingeniero modelar, desarrollar y resolver problemas propios de su área. Se ha dicho que el ingeniero es aquella persona (hombre o mujer) que posee conocimientos tanto teóricos como prácticos en las ciencias físico-matemáticas, que verifica el producto de su "ingenio" al diseñar, que cuenta con la capacidad para resolver situaciones nuevas, que desarrolla criterios en la solución de problemas de la profesión mediante el análisis y síntesis, que posee el espíritu de observación para investigar el cómo y el porqué de los fenómenos.

Analicemos ahora un caso común de la Ingeniería en donde se usa el promedio para detectar, en base a nuestro marco teórico, aquellas propiedades del promedio que permitieron contextualizar dicha noción matemática en ésta área.

Sea f(t) una función del tiempo definida en el intervalo abierto *(a, b):*

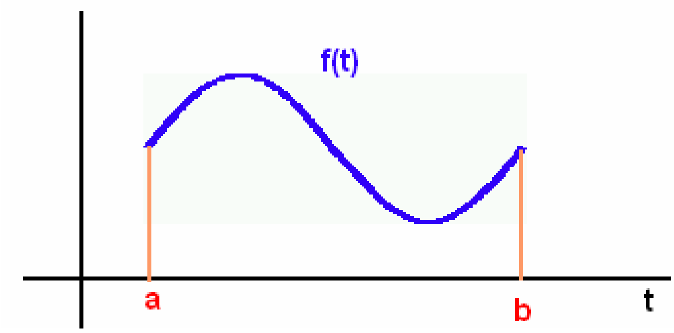


Figura 4.1 Función del tiempo

Se define valor medio o valor promedio, denotado por $mf(t)$, a la relación:

$$mf(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Geométricamente, el valor promedio en el intervalo *(a, b)* puede visualizarse como la altura de un rectángulo con base b-a y área igual al área neta bajo la curva $y = f(t)$. Esto es:

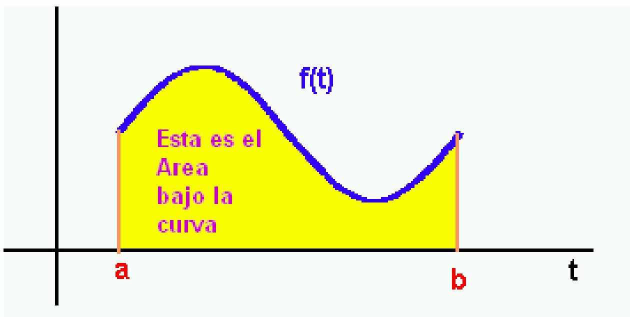


Figura 4.2 Área bajo la curva (a)

Su valor medio será:

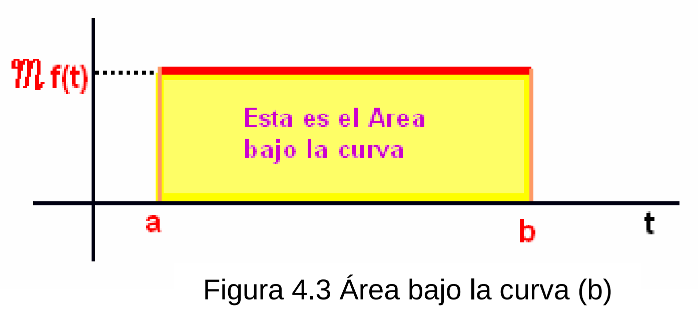


Figura 4.3 Área bajo la curva (b)

Se tiene que las dos áreas son iguales. Por lo tanto el valor medio es el promedio de la función a lo largo del intervalo

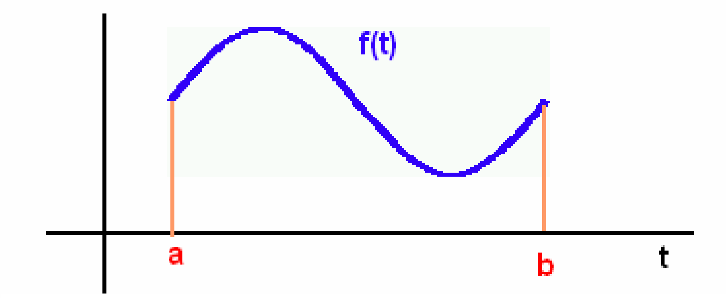


Figura 4.4 Función definida en un intervalo de tiempo

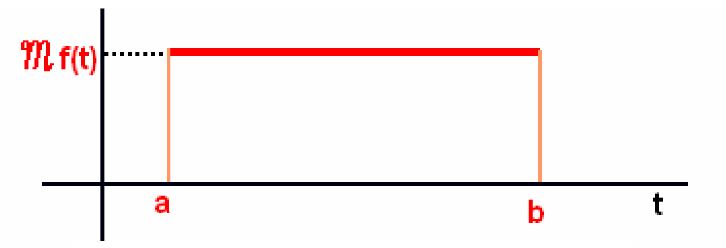


Figura 4.5 Valor medio en la función

Partiendo de éste hecho es que podemos decir que este teorema (del valor medio) puede ser asociado con una de las categorías del promedio: la *compensación*, en la cual cuando se quiere encontrar un valor centrado entre dos valores dados y se establece un proceso en donde la diferencia entre ellos se parte en dos y luego se agrega o quita según se quiera al valor a la izquierda o a la derecha respectivamente.

Este hecho es similar a la idea de conservación que los antiguos griegos manejaban al momento de calcular áreas. En el método clásico de conservación por totalidades, los griegos de la época clásica centraban su atención en lo que llamaban problema de las cuadraturas y problema de las curvaturas, los cuales servían para determinar el área encerrada por una curva o el volumen determinado por una superficie (problemas que hoy son considerados como fundamentales dentro del cálculo integral). En su cálculo, los griegos usaron métodos geométricos y lo hacían de dos formas:

a) La transformación de áreas era un método importante desarrollado por la escuela pitagórica. En ella, abordaron el problema de transformar un polígono particular en un cuadrado con la misma área que el polígono dado. En el proceso de transformar una figura geométrica en otra, subyace el uso de la conservación como un atributo de las áreas.

b) Vía relaciones de proporcionalidad, que lleva implícito la comparación de áreas. El método consistía en suponer que existía una determinada relación entre áreas de figuras geométricas distintas, entre áreas y volúmenes, o bien del área de una figura respecto a alguno de sus elementos.

De tal forma que dos de las aplicaciones más sencillas que se tienen en Ingeniería sobre todo en la teoría de circuitos eléctricos, son:

- Valor medio
- Valor eficaz

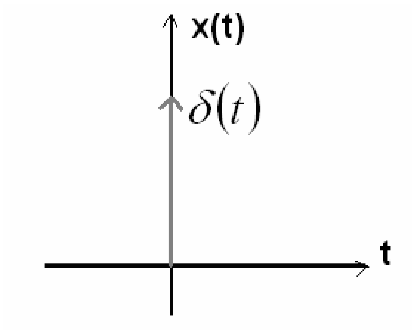
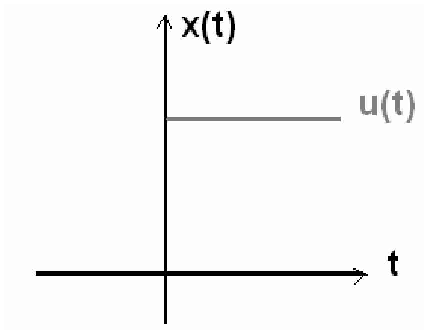
Dichos valores son llamados significativos, pues arrojan información sobre el comportamiento de un circuito. El Valor Medio de una onda de corriente que varía a lo largo de un período T es el valor que tendría una corriente directa si suministrara una cantidad igual de carga en el mismo periodo T. Matemáticamente, como ya se analizó, el valor medio de cualquier onda periódica se obtiene dividiendo el área bajo la curva de la onda en un período T, por el tiempo del periodo.

$$V_{medio} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt$$

El Valor Cuadrático Medio de una onda, conocido también como valor eficaz, se relaciona con su capacidad de suministro de energía. Este valor es igual al valor de una onda de CD que entregaría la misma potencia si sustituyera a la onda variable en cuestión. Cuando se tiene un sistema de corriente directa, es decir un voltaje de DC que en un circuito hace fluir una corriente constante a través de una resistencia, este sistema disipa a través de la resistencia una potencia, el valor de esta potencia es constante porque las magnitudes que la crean son constantes. En el caso de una onda periódica ésta fluctúa en el tiempo entre un valor máximo y un valor mínimo la potencia generada en este caso es igual varia en el tiempo.

$$Vrms = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} [f(t)]^2 \, dt}$$

Sin embargo, no todas las funciones que se analizan en Ingeniería son continuas. Las funciones generalizadas por Ligthill (1973) y/o Challifour (1972), son funciones simbólicas que solo pueden ser definidas en función de sus propiedades integrales.

<table>
<tr><td>Función delta de Dirac</td><td>Función de Heaviside</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>

$$\delta(t) = \begin{cases} 0; \text{ si } t \neq 0 \\ \infty; \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

Su interpretación en función de una integral:

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\xi}^{\xi} \delta(t)dt = 1$$

</td><td>

$$u(t) = \begin{cases} 1; \text{ si } t > 0 \\ 0; \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Su definición en función de sus propiedades integrales es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt$$

</td></tr>
</table>

Tabal 4.1 Funciones Generalizadas

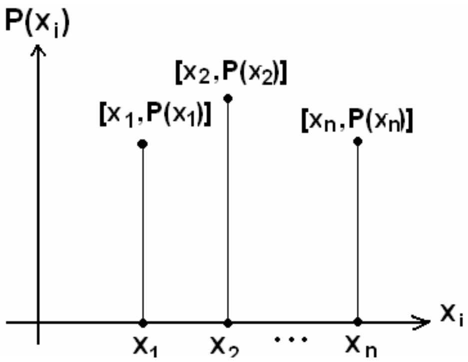
La función delta de Dirac, así como la función de Heaviside, son dos de las funciones más importantes en Ingeniería ya que permiten representar el espectro de frecuencia, de fase y de amplitud de las frecuencias armónicas de una señal.

Está claro que dichas funciones no son verdaderas funciones en el sentido matemático en el que una función debe quedar definida para todos los valores de t. Sin embargo, se ha justificado rigurosamente la función impulso mediante la teoría de las distribuciones de Schwartz[24]. Ahora bien, éstas mismas funciones tiene la versatilidad, dada sus características, de poder ser llevadas a la teoría de las probabilidades para representar de forma gráfica la distribución o densidad de probabilidad (en forma discreta). Y es en éste contexto donde nos interesa analizar la forma en como se concibe el uso del promedio, dado que ello implica hablar de valor esperado, el cual surge en éste contexto, es que analizaremos dichos casos. Analicemos entonces un ejemplo en el cual se tiene el cálculo del promedio en el contexto probabilístico, dadas estas funciones y establezcamos cuales características o propiedades de dicho concepto son las que intervienen para el cálculo de un nuevo promedio: el valor esperado. Sea la siguiente distribución de probabilidades:

x_i	$x1$	$x2$	…	xn
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	…	$P(x_n)$

Tabla 4.2 Distribución de probabilidades

Su gráfica es la siguiente:



Gráfica 4.1 Distribución de probabilidades

[24] M.J. Ligh thill, Fourier Análisis and Generalized Functions, Cambridge University Press, 1959.

Podemos observar que para esta situación, la función delta de Dirac, embona perfectamente en el contexto probabilístico, pues cada evento junto con su respectiva probabilidad es representado por un impulso de la función delta de Dirac,

El promedio en la gráfica representa el punto de equilibrio, esta misma idea es la que se presenta cuando se trabaja con una distribución de datos aproximadamente simétricos alrededor de un valor dado, y se considera la media aritmética como el punto o centro de gravedad que mantiene el equilibrio del histograma de los datos.

Matemáticamente el promedio para este caso tiene más bien que ver con el promedio ponderado, pues es éste quien asigna pesos distintos a cada elemento a promediar. Es decir:

$$\overline{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + \cdots + f_k m_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k}$$

Dicha forma se ve reflejada en el valor esperado:

$$E(X) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots + p_k X_k$$

De forma general sería:

$$E(X) = \sum xp(x);\ \text{para el caso discreto}$$

$$\&$$

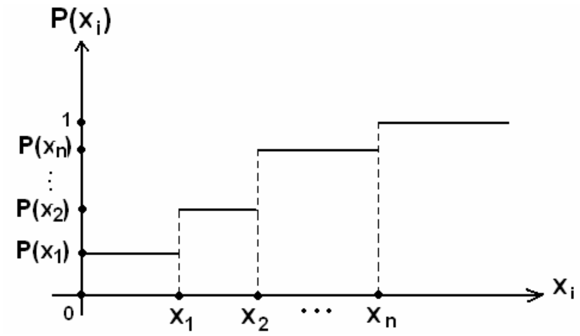
$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\ ;\ \text{para el caso continuo}$$

Para el caso de la función de Heaviside, la representación será una distribución acumulada, la cual es otra forma de expresar la situación anterior. Es decir: sea la siguiente función de Distribución acumulada:

$$F(\underline{X}) = \begin{cases} 0;\ x < 0 \\ P(x_1);\ 0 \leq x < x_1 \\ P(x_2);\ x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots \\ 1;\ x \geq x_n \end{cases}$$

Esquema 4.1 Distribución acumulada

Gráficamente:



Gráfica 4.2 Distribución acumulada

En este caso, la altura entre un escalón y otro es un valor probabilística, pero al igual que el ejemplo anterior, la cualidad del promedio utilizada es la de la equilibración, y la forma de calcular el promedio en este caso (el valor esperado), será la misma.

IV. 3 Intencionalidad

Ahora bien, una vez que se han identificado aquellos elementos o características del promedio que son usados en la Ingeniería, los cuales influyen en la interpretación de dicho concepto en ésta área, es que pretendemos diseñar una secuencia didáctica que permita superar aquellos obstáculos en el alumno que le impiden calcular de manera adecuada el promedio en una situación aleatoria.

Antes de iniciar con el desarrollo de la secuencia didáctica es conveniente decir que en la presente investigación se parte del supuesto de que una de las razones por las cuales el alumno comete errores a la hora de calcular el promedio en un contexto probabilístico es que traslada su noción de media aritmética a la teoría de las probabilidades. Es decir; aplica el promedio aritmético para calcular el valor esperado.

Lo que se busca con esta secuencia es que el alumno se percate de que su noción de media aritmética le es insuficiente para trabajar en situaciones aleatorias, y se espera que surja de manera natural el vínculo o puente que permite conectar a la media aritmética con el valor esperado (promedio ponderado)

Para ello es importante tener en cuenta que:

- En una situación didáctica, se debe tomar en cuenta que el conocimiento matemático que se desea obtener (valor esperado) debe ser el único medio para resolver el problema, siendo ésta quien guíe al alumno al desarrollo de nuevos conocimientos.
- El profesor debe intervenir lo menos posible, la secuencia debe ser la que le indique al estudiante si está bien o está mal.

Un panorama general de la problemática es el siguiente:

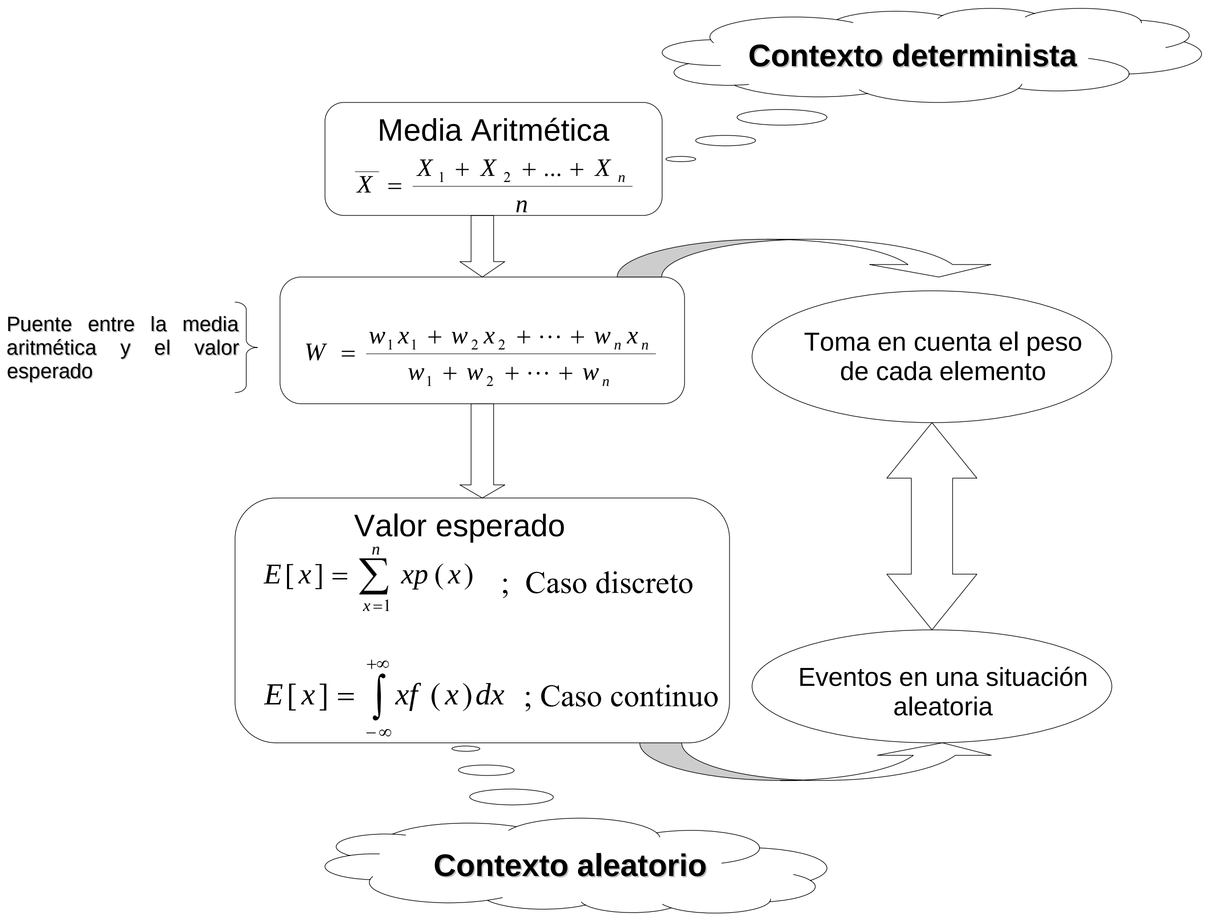


Diagrama 4.1 Panorama general de nuestro problema de investigación.

En dicho esquema establecemos al promedio ponderado como puente de transición entre la media aritmética y el valor esperado.

Debido a que el problema al calcular el promedio (el valor esperado) se presenta en el contexto aleatorio, pues es aquí donde el alumno transpone la media aritmética utilizada en el contexto deternimista, es que la presente secuencia se desarrolla en el contexto aleatorio a partir del cual el alumno se verá forzado a aplicar el promedio ponderado y no el promedio aritmético para resolverla.

La secuencia didáctica está formada por tres etapas. En la primera se le propone al alumno que calcule el promedio de una determinada situación (sin indicarle que es aleatoria), para ver qué promedio aplica: si el aritmético (erróneo para la situación planteada) o el ponderado (la estrategia de solución). Esto con la final de establecer el punto de partida para continuar con el desarrollo de la secuencia que ayude al alumno a vencer dicho obstáculo.

En una segunda etapa se plantearán problemas en los cuales el alumno tendrá que usar el promedio ponderado para resolverlos, esto con la finalidad de que se comience a percatar que utilizar la media aritmética es insuficiente incluso en el contexto determinista.

En una tercera etapa, la final, se busca que el alumno establezca al promedio ponderado como antecedente del valor esperado.

IV.4 Descripción de los alumnos

Los estudiantes a los cuales se le aplicará la secuencia didáctica, son alumnos de nivel superior del área de Ingeniería del IPN, se escogieron alumnos de 3er semestre que ya han cursado: Fundamentos de Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, Ecuaciones Diferenciales, Cálculo Vectorial, Variable Compleja y Transformadas de Funciones. El curso que les resta por cursar es Probabilidad y Estadística.

Se escogieron alumnos de este semestre ya que dicha secuencia podría servir como un elemento previo a su último curso de matemáticas, pues lo que busca es hacerlos reflexionar en el cálculo del promedio en una situación aleatoria en la cual por lo general calculan de manera incorrecta.

Dicho lo anterior, la secuencia didáctica es la siguiente:

IV.5 Diseño experimental

Etapa #1

Como ya se dijo, en esta primera etapa se pretende establecer el problema a partir del cual se desarrolla la presente investigación, lo cual a su vez servirá como punto de partida para comenzar con el desarrollo de la secuencia didáctica. Se comienza con un ejemplo clásico de la Probabilidad:

ACTIVIDAD 1. "Las dos caras de una moneda"

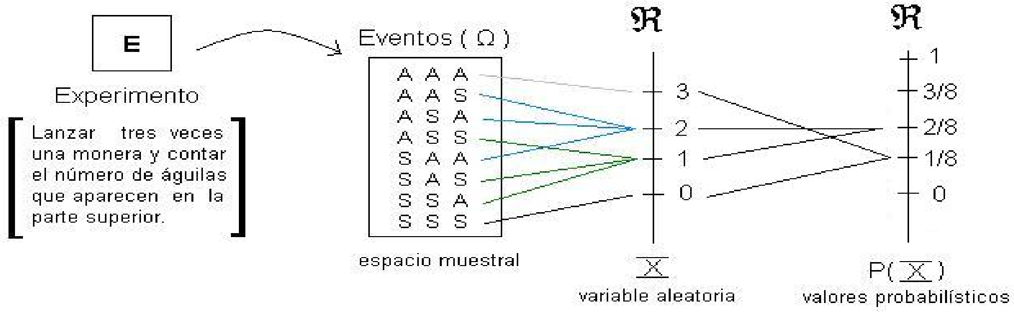
Considera el experimento de lanzar una moneda 3 veces, cuenta el número de águilas que aparecen en la parte superior de la moneda.

a) Registra todas las posibles combinaciones de este experimento en la siguiente tabla:

jugada	primer tiro	segundo tiro	tercer tiro
1	A	A	A
2	A	A	S
3	A	S	A
4			

Tabla 4.3 Registro de combinaciones

En el problema se pide lanzar tres veces la moneda, ya que esto delimita el espacio muestral (eventos posibles), lo cual permite tener un control sobre las respuestas de los alumnos en el experimento.



Esquema 4.2 Problema “Las dos caras de una moneda”

Por otra parte, una razon por la cual se ponen más celdas de las que se van a utilizar en la tabla, es para observar que reacción tiene el estudiante ante aquellas casillas sobrantes. Ya que la tendencia del alumno es, por lo general, llenar todos los espacios.

El alumno debe ser capaz de limitar sus respuestas dado el problema, a llenar únicamente las casillas necesarias, dejando en blanco aquellas sobrantes.

La secuencia continúa de la siguiente manera:

- ¿En cuántas jugadas se tienen todos los resultados posibles (diferentes)?
- ¿Qué probabilidad existe de que en una jugada se obtengan 0 águilas?
- ¿Qué probabilidad existe de que en una jugada se obtenga solo 1 águila?
- ¿Qué probabilidad existe de que en una jugada se obtengan solo 2 águilas?
- ¿Qué probabilidad existe de que en una jugada se obtengan 3 águilas?

La intención que tiene cada pregunta es razonar sobre los datos obtenidos en el experimento. Se espera que el alumno concluya que son 8 las jugadas para obtener todos los resultados posibles y que existe 1/8 de probabilidad de que salgan las 3 águilas o que no salga ningún águila, mientras que para obtener un águila o dos águilas la probabilidad en ambos casos es de 3/8.

Para este momento se cuenta con los elementos necesarios para hacer una de las preguntas más importante de ésta primera etapa de la secuencia didáctica:

> ¿Puedes determinar cuántas águilas salen en promedio? Justifica tu respuesta y conserva todos tus cálculos.

Hasta aquí concluye la primera etapa de la secuencia. En la siguiente etapa se plantearán problemas en los cuales el promedio ponderado sea la solución.

Etapa #2

En esta etapa de la secuencia se exponen dos problemas en los cuales el promedio ponderado se hace presente. Siendo la evaluación un proceso continuo a lo largo de toda su preparación académica, el concepto de promedio esta fuertemente ligado con las calificaciones, es así que la primera actividad se apoya en este hecho para sacar a flote una de sus aplicaciones-explicaciones escolares más comunes.

El segundo ejemplo es menos familiar y trata sobre las distintas velocidades que presenta un automóvil y que para calcular su velocidad promedio es necesario utilizar al promedio ponderado.

La exposición de dos problemas distintos tiene la finalidad de observar si el alumno es capaz de identificar que en ambas situaciones hay una variable más a considerar, en el cálculo del promedio. Ya que se espera que en la primera actividad aplique sin reparo el promedio ponderado que aplica de manera cotidiana en su vida académica, se esperaría que pudiera trasladar su algoritmo a un problema que presenta una situación similar (segundo problema). Es aquí donde podríamos confrontar sus argumentos, explicaciones y concepciones alrededor del promedio ponderado.

El planteamiento del primer problema es el siguiente:

ACTIVIDAD 2.A "Las calificaciones"

Al inicio del curso, tu profesor de matemáticas te presentó la forma de evaluar su materia en cada uno de los tres departamentales, y es la siguiente:

Examen teórico	70%
Tareas	20%
Asistencia	10%
Total	100%

En tu primer examen sacaste 5, de las 15 asistencias que debías tener solo asististe a 12 y de tres tareas en una sacaste 8, en otra 6 y un la última 9.

a) ¿Puedes determinar tu calificación en el primer departamental? Argumenta ampliamente tu respuesta.

b) ¿Cuál es el algoritmo que usaste para determinar tu calificación?

c) ¿Qué porcentaje le darías a cada rubro para subir de calificación?

Este problema es sencillo ya que es algo que ha calculado con frecuencia en su vida académica y que no representa mayor dificultad para él.

Las primeras preguntas van encaminadas a observar el algoritmo que los alumnos emplean para obtener la calificación del primer departamental. Así también al preguntarle al alumno si una variación en los porcentajes pudiera beneficiarlo para obtener una mejor calificación, tienen la finalidad de hacer reflexionar al estudiante de que el peso en cada elemento es un factor importante.

La segunda actividad, desligada de la primera, pues se presenta en un escenario diferente, busca determinar si el alumno es capaz de trasladar el promedio ponderado aplicado en la actividad anterior a un problema que presenta la misma situación (pesos distintos en cada elemento que intervienen en el problema).

La segunda actividad se titula:

ACTIVIDAD 2.B "La velocidad de un auto"

En esta actividad se desarrollan diferentes situaciones, las cuales van encaminadas a que el estudiante logre percatarse de que el promedio no es aritmético, sino el ponderado y genere así el algoritmo indicado.

Esta actividad se aplicará en bloques por separado para evitar que el estudiante no se adelante y responda con base en las preguntas futuras.

Primer bloque:

Si un automóvil viaja a una velocidad de 100km/h durante 2 horas y después viaja a 40km/h durante la siguiente hora.

- ¿Cuál es su velocidad promedio? Conserva todas tus anotaciones.

Segundo bloque:

A su regreso ese mismo automóvil viaja ahora a 40Km/h durante las primeras dos horas y después a 100Km/h en la última.

- ¿Cuál es su velocidad promedio en este caso? Conserva tus anotaciones
- ¿Cómo es éste valor con respecto al caso anterior? Describe con detalle.

Tercer bloque:

En un lapso de 5 horas, el velocímetro del automóvil indicaba periodos con las siguientes velocidades: 60Km/h, 80Km/h y 50Km/h. Dos de éstas velocidades las mantuvo dos horas seguidas c/u y la otra durante una hora. Si su velocidad promedio fue de 60Km/h... ¿cuál es el algoritmo que te permite obtener este promedio? (conserva todas tus anotaciones)

Cuarto bloque:

- Observa con detalle los algoritmos que desarrollaste en todos los cálculos anteriores, ¿en qué se parecen?, ¿en qué son diferentes?, ¿cómo explicas o interpretas las variables en cada uno?

En estas actividades se busca que el estudiante se percate de la importancia que tiene el tiempo al momento de calcular las velocidades promedio. Por ejemplo en las primeras dos actividades se le pide que el estudiante calcule las velocidades promedio para ambos casos, para posteriormente confrontar sus respuestas e ir introduciendo la idea de que el promedio no es el aritmético, sino el ponderado.

En la última actividad se le presenta la misma situación de manera distinta, basándose en sus cálculos realizados previamente y en el cuestionamiento de la variable que debe ser considerada (el tiempo), es que se le da el valor de la velocidad promedio de una serie de velocidades y se le pide que escriba el algoritmo que da como resultado tal velocidad promedio. Esto con la finalidad de que establezca el algoritmo del promedio ponderado.

La finalidad de ésta segunda etapa es determinar si resulta fácil para el alumno aplicar el promedio ponderado en un ejemplo en el cual pudiera cometer el error de no tomar en cuenta los tiempos para calcularlo. Y analizar si es capaz de darse cuenta de este pequeño detalle.

Etapa #3

Ahora bien, dado que en la primera etapa, no se le cuestionó al alumno sobre sus respuestas, el propósito de esta primera parte es ver qué promedio es el que el alumno aplica ante una situación aleatoria. En la segunda etapa, se le enfrentó a la aplicación de una variante del promedio aritmético (el promedio ponderado). En esta etapa final se pretende confrontar ambos algoritmos y determinar si es posible que el estudiante traslade de manera natural el promedio ponderado en lugar del promedio aritmético en una situación aleatoria.

Es decir la secuencia debe lograr que el alumno se percate de la relación que existe entre el evento y su respectiva probabilidad para calcular el promedio. Tal como se espera en la actividad anterior que el estudiante se de cuenta que el tiempo y la velocidad van de la mano.

Queda claro que esta secuencia didáctica quedará restringida en primera instancia al establecimiento del valor esperado: $E(X)=\sum xp(x)$, para el caso discreto. La secuencia no está diseñada para analizar al valor esperado en el caso continuo.

En esta parte de la secuencia didáctica se pretende confrontar los procedimientos efectuados en las actividades anteriores de la etapa uno y dos y llegar al establecimiento de que el promedio que se debe aplicar en una situación aleatoria no es el aritmético, sino el ponderado.

Para ello nos apoyaremos de un ejemplo que tiene su origen en la idea del *equilibrio*, como otro de los usos que puede darse al promedio. Se hace el siguiente planteamiento al alumno:

ACTIVIDAD 3.A "La balanza."

Primer bloque

Observa la siguiente figura:

Imagen 4.1 Balanza con dos pesos

- Para que esta balanza mantenga el equilibrio, ¿que debe ocurrir en los pesos de la izquierda y la derecha?
- Supón que los pesos son diferentes y que no los puedes mover, cambiando el punto de soporte podemos mantener el equilibrio. ¿hacia adónde lo moverías?

Segundo bloque

Supón que tienes ahora tres pesos colgando de la barra, los primeros dos pesan 100Kg y el tercero 40Kg:

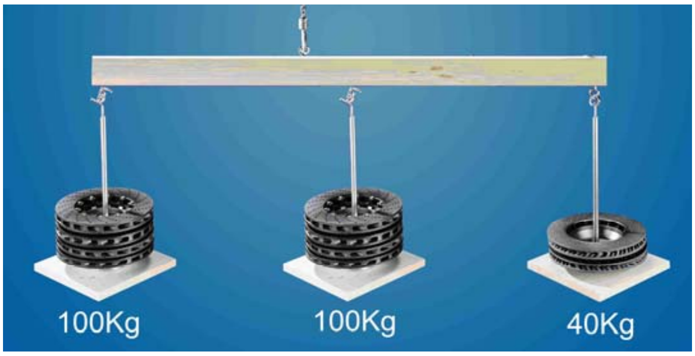


Imagen 4.2 Balanza con tres pesos

- ¿Cuál sería el punto de equilibrio?, ¿en donde estaría dicho punto en la balanza?
- ¿Qué algoritmo te permite determinar el punto de equilibrio?

Los bloques uno y dos de ésta actividad tienen como objetivo que el alumno se percate que el punto de equilibrio y el promedio ponderado son lo mismo. Y que sea capaz de establecer el algoritmo correcto, es decir: $\frac{100+100+40}{3}$. El cual es un algoritmo intermedio entre la media aritmética y el promedio ponderado.

En caso contrario, partiendo del algoritmo que el alumno haya propuesto se le cuestionará sobre el papel que juega cada peso en el punto de equilibrio. Para ello se replantea la problemática de la siguiente manera:

Imagina que un padre tiene tres hijos y que tiene dos billetes de 100 pesos y uno de 40 pesos para repartirlo entre los tres.

- ¿Cuánto dinero le tendría que dar a cada uno para que la repartición sea equitativa (equilibrada)?, ¿cómo determinas esa cantidad?

- Entonces para el problema anterior… ¿cómo tendrías que haberlo calculado para que fuese correcto?

Consideramos que con el replanteamiento de la problemática anterior manejada de ésta forma es suficiente para que el alumno establezcas el algoritmo correcto pues de no hacerlo el problema mismo lo indicaría “al tener la inconformidad de los niños”.

Todas estas formas de presentar un mismo problema van encaminadas a que el estudiante se detenga a pensar en una de las categorías del promedio (el equilibrio) y que se percate de que el punto de equilibrio es el promedio ponderado.

Una vez que el alumno construya el algoritmo correcto para el problema planteado, la actividad finaliza con el análisis de las distintas formas en las cuales se puede expresar el algoritmo del promedio ponderado.

Tercer bloque:

> Se sabe que el precio de una aleación depende del costo y la proporción de los metales que la forman. Si una aleación está formada por 2/3 partes de oro y 1/3 parte de plata y el costo promedio de dicha aleación es de 80 Dólares ¿Cuál es el precio del oro si el precio de la plata se cotiza en 40 Dólares?.

La finalidad de las actividades aplicadas hasta el momento es que el alumno vaya relacionando similitudes entre éstos problemas, no solo en el aspecto algebraico, pues el algoritmo es el mismo, sino también en el hecho de que puede separarlo y relacionar conceptos como son: las proporciones en la aleación de los metales que la conforman con los tiempos diferentes en el viaje del automóvil o con los puntos de soporte en la balanza, así como los precios de los metales con las velocidades mismas del auto o con los pesos en la balanza. De tal forma que éste último problema lo que intenta es descomponer la fracción que compone al promedio en su forma más simple y tener así la posibilidad de visualizar al promedio no solo como la suma de todos los elementos divididos entre el número de éstos sino también como la suma de todos los elementos relacionados con su respectivo peso. El cual es en este caso el trampolín entre el promedio aritmético y el valor esperado.

La actividad número 3, intenta confrontar el promedio que obtuvo al principio con el que obtenga en base a las actividades anteriores. La actividad es la siguiente:

ACTIVIDAD 3.B "Equivalencias"

Retoma la actividad de lanzar una moneda tres veces, contar el número de águilas que aparecen en la parte superior de la moneda, encontrar las probabilidades para cada caso y calcular el promedio…

Ordena los datos que obtuviste de menos a mayor como se te indica en la siguiente tabla:

Variable aleatoria	*0*	*1*	*2*	*3*
Valores probabilísticos				

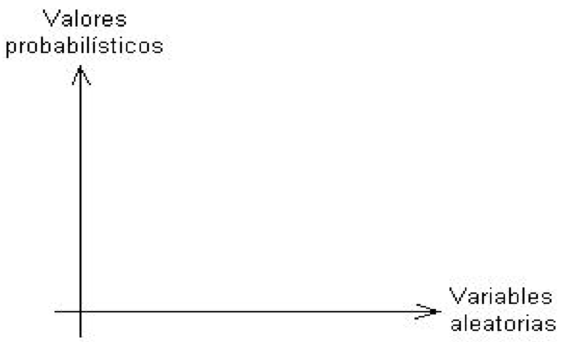
Tabla 4.4 Tabla sintética

Nota: Los valores 0, 1, 2 y 3 se representan por la variable x que es llamada aleatoria porque puede tomar cualquiera de estos valores, valores que tienen su respectiva probabilidad.

En esta parte de la secuencia lo que se busca es que el alumno no sólo organice los datos de menor a mayor, sino también que de algún modo observe la relación que hay entre las variables aleatorias con sus respectivas probabilidades y lo que éstas implican al momento de calcular el promedio, tal como sucedió en los ejemplos anteriores.

La secuencia continua:

Grafica los datos de acuerdo a los siguientes ejes:



Gráfica 4.3 Gráfica:
Variable aleatoria Vs Valores probabilísticos

Apóyate en las actividades anteriores y calcula nuevamente cuántas águilas salen en promedio.

- ¿Es similar al valor que obtuviste la primera vez?, sitúa los dos valores (anterior y actual) en la gráfica. ¿cuál corresponde al punto de equilibrio?.
- ¿Puedes generalizar éste algoritmo en una fórmula?. Utiliza a x para representar a las variables aleatorias y a $p(x)$ para los valores probabilísiticos de cada variable aleatoria.

En la parte final de la secuencia didáctica se busca confrontar los resultados de la primera actividad tomando en cuenta los elementos analizados hasta el momento como lo es el equilibrio para vincular éste razonamiento con aquellos problemas en los cuales se tienen que tomar en cuenta las variables aleatorias y la probabilidad de cada una de éstas, de la misma forma en que es necesario tomar en cuenta los elementos y el peso que cada uno de estos tienen al momento de calcular el promedio.

IV. 6 A manera de conclusión

Se espera, por los elementos considerados en las deferentes actividades, que el diseño de esta secuencia experimental cumpla con los objetivos para los cuales fue creada, y que logre en los alumnos un avance significativo en su aprendizaje, de tal forma que éste logre establecer que el promedio aritmético presenta limitantes no solo en el contexto determinista, sino que es un error el querer trasladar dicha noción a la teoría de las probabilidades. Logrando establecer pos si mismo que el puente entre la media aritmética y el valor esperado (para el caso discreto) es el promedio ponderado.

Los resultados de la puesta en marcha de la secuencia didáctica se expondrán en el siguiente capítulo, en el cual se efectuará un análisis de lo que en realidad se obtuvo al ser aplicada a los estudiantes de Ingeniería del IPN y si es que lograron superar el conflicto que se presenta al trabajar con la noción de promedio en probabilidad.

Este análisis tendrá como propósito probar la eficacia o deficiencia que pueda tener dicha secuencia, de tal forma que se puedan hacer recomendaciones para futuras investigaciones que se encaminen sobre ésta problemática.

CAPÍTULO V

PUESTA EN ESCENA

V.1 Instrumentación de la experimentación

Dado que no existe hasta el momento ninguna secuencia didáctica que aborde específicamente el fenómeno didáctico en estudio y de la cual se pueda partir para implementarse a un grupo mayor de alumnos, es que seleccionamos un pequeño grupo de 6 estudiantes (Javier, Dante, Eber, José Luis, Israel y David), quienes pertenecen a diferentes grupos de tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica y fueron seleccionados en base a su disposición y ánimo. Esto nos permitió contemplar en ellos distintas habilidades y costumbres.

La secuencia didáctica se trabajó de forma individual con los estudiantes, es decir, a cada uno se le proporcionó un cuadernillo con los enunciados de cada actividad y un cuadernillo de trabajo en el cual conservar sus anotaciones.

El tiempo estimado para aplicar la secuencia didáctica era de una hora aproximadamente; sin embargo, el tiempo de aplicación se duplicó, entre otras cosas por el nerviosismo que se observó en los estudiantes al ser video grabados y también porque surgieron variables que no se tenían contempladas. Dichas variables se describirán más adelante.

V.2 Descripción de resultados

Se comenzará por exponer los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica; lo cual entre otras cosas permitirá tener un panorama general de cómo es que aplican los estudiantes la noción de promedio, que algoritmos utilizan para resolver una determinada situación en la cual está inmerso este concepto, bajo que nociones están siendo influenciados, que tipo de problemas se les presentan, cómo los enfrentan, cómo los solucionan, etc.

Se grabó la aplicación de la secuencia didáctica con la finalidad de poder rescatar aquellos elementos importantes que pudieran pasar desapercibidos tales como son el papel que jugó quien suscribe el presente trabajo al aplicar la secuencia didáctica y determinar hasta que punto dicha intervención ayudó a que los estudiantes superaran los obstáculos que se les presentaron, el tipo de preguntas que éstos hicieron hasta construir de este modo un nuevo conocimiento (el valor esperado).

A continuación se expondrán los resultados obtenidos en el orden en cómo fue presentada la secuencia didáctica a los estudiantes[25].

Etapa 1.

Para comenzar con la aplicación de la secuencia didáctica, se entregó a cada alumno un folleto con los problemas y un cuadernillo en el cual conservar sus anotaciones, se les indicó la forma en que se trabajarían los problemas (la cual sería de forma individual y sin adelantarse a la lectura de los problemas siguientes). Después de lo cual se inició con la lectura de la actividad 1.

En esta primera parte, mi intervención fue mínima pues se limitó a aclarar dudas sobre el experimento, es decir, indicar que cada jugada constaba de 3 tiros y que el problema consistía en hallar todas las jugadas que daban diferentes combinaciones entre los tiros.

En la primera actividad de la etapa uno (“Las dos caras de una moneda”) al momento de llenar la tabla se identificaron dos formas de trabajo por parte de los estudiantes: aquellos que llenaron la tabla bajo un cierto orden; es decir, que analizaron primero todas las posibles posibilidades que se generaban al salir en el primer tiro águila y posteriormente todas las combinaciones en las cuales en su primer tiro aparecía sol (Estudiantes tipo A, formado por: David, Israel y Eber). Y aquellos alumnos que llenaron la tabla en forma arbitraria, es decir, que no siguieron una secuencia como lo hicieron

[25] Dada las similitudes en los algoritmos utilizados entre algunos estudiantes, en las figuras se mostrará uno como representante de los demás.

sus otros compañeros (Estudiantes tipo B, formado por: Dante, Javier y José Luis).

jugada	primer tiro	segundo tiro	tercer tiro
1	A	A	A
2	A	A	S
3	A	S	A
4	A	S	S
5	S	A	A
6	S	A	S
7	S	S	A
8	S	S	S

Figura 5.1 Estudiantes tipo A

jugada	primer tiro	segundo tiro	tercer tiro
1	A	A	A
2	A	A	S
3	A	S	A
4	S	A	A
5	S	S	A
6	A	S	S
7	S	S	S
8	S	A	S

Figura 5.2 Estudiantes tipo B

Es interesante decir que en el caso del alumno Eber (integrante del grupo A) fue el único que se apoyó a través de un diagrama de árbol para generar todas las posibles combinaciones y presentarlas de acuerdo a este orden:

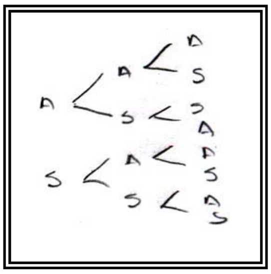
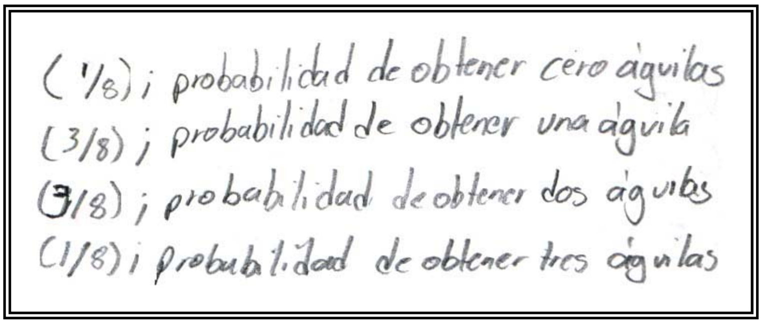


Figura 5.3 Diagrama de árbol de Eber

Los otros dos compañeros David e Israel realizaron el llenado de la tabla en la forma como se llena una tabla de verdad.

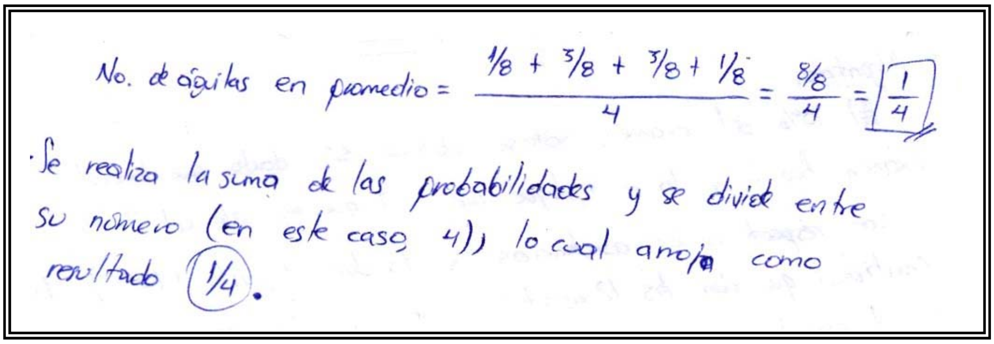
Por otra parte, el hecho de haber presentado 10 casillas en la tabla indujo a los alumnos a creer que en 10 jugadas se tenían todas las posibles combinaciones, sin embargo, al repasar todos los casos y ver que ya no existían otras posibilidades, llevó a los alumnos a concluir que eran 8 el total de jugadas con las cuales se obtenían todos los resultados posibles (diferentes) en el experimento, y como consecuencia establecieron de manera correcta las probabilidades de obtener 0, 1, 2, 3 y 4 águilas.



(1/8) ; probabilidad de obtener cero águilas
(3/8) ; probabilidad de obtener una águila
(3/8) ; probabilidad de obtener dos águilas
(1/8) ; probabilidad de obtener tres águilas

Figura 5.4 Conclusiones de José Luis

Sin embargo, al momento de calcular cuántos águilas salían en promedio, se tuvieron dos estrategias, por un lado los alumnos: Eber, José Luís, Israel, Javier y Dante indicaron que en el experimento solo se pueden tener 0, 1, 2 y 3 águilas, y que dadas las 8 jugadas en las cuales se obtienen todas las combinaciones posibles, existe para cada uno de éstos águilas su respectiva probabilidad, por lo tanto el promedio de águilas en dicho experimento se calcula, según ellos, sumando todas las probabilidades y dividiéndolas entre el total de éstas, teniendo como resultado ¼.



No. de águilas en promedio = $\frac{1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8}{4} = \frac{8/8}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

·Se realiza la suma de las probabilidades y se divide entre su número (en este caso 4), lo cual arroja como resultado 1/4.

Figura 5.5 Razonamiento de Israel

El alumno David siguió una estrategia diferente, en base a su tabla él contó el número de águilas que obtuvo en todos los tiros siendo estos 12 y los dividió entre todos los tiros realizados, es decir 24. Obteniendo así ½. En éste caso mi intervención se limitó a hacerle preguntas de guía que ayudaran al estudiante a percatarse de las situaciones que estaba pasando por alto por ejemplo: ¿tu algoritmo toma en cuenta el caso cuando se tienen cero águilas?, esta pregunta tuvo la finalidad de hacerlo razonar en que su propuesta excluía un evento, también se le hizo la pregunta ¿porqué no utilizaste los datos referentes a las probabilidades obtenidas en los incisos anteriores para calcular el promedio?. Si bien no se trata de decirle al alumno lo que tiene que hacer para responder cada pregunta, mi papel si me da la facultad de guiar, orientar y dirigir sus respuestas para que éstas no se desvíen en otra dirección.

Etapa 2

En la actividad 2.A (“Las calificaciones”) todos los alumnos usaron ya fuese regla de tres, para sacar la proporción de las notas obtenidas con respecto al porcentaje impuesto por el maestro, o multiplicaron con la décima correspondiente a cada porcentaje: 0.7 para el examen, 0.2 para las tares y 0.1 para las asistencias.

Algo que es de llamar la atención es que todos los estudiantes hicieron los cálculos por separado para cada rubro, resultados que al final fueron sumando para obtener la calificación, ningún alumno generó el algoritmo general con el cual calcular dicha calificación. Cabe destacar que a pesar de ello ningún alumno tuvo problemas en el cálculo de la calificación para el primer departamental, todos obtuvieron el 5.8 esperado.

Calif examen: $5 \times .7 = 3.5$

$10/100 = .1$

15 asistencias — 10%

12 asistencias — x $\quad \frac{(12)(10)}{15} = 8\% \times .1 = .8$

Tareas: $8+6+9 = 23/3 = 7.6\overline{6} \times .2 = 1.5\overline{3}$

$3.5 + .8 + 1.5 = \underline{\underline{5.8}}$ promedio final

Figura 5.6 Cálculos de David

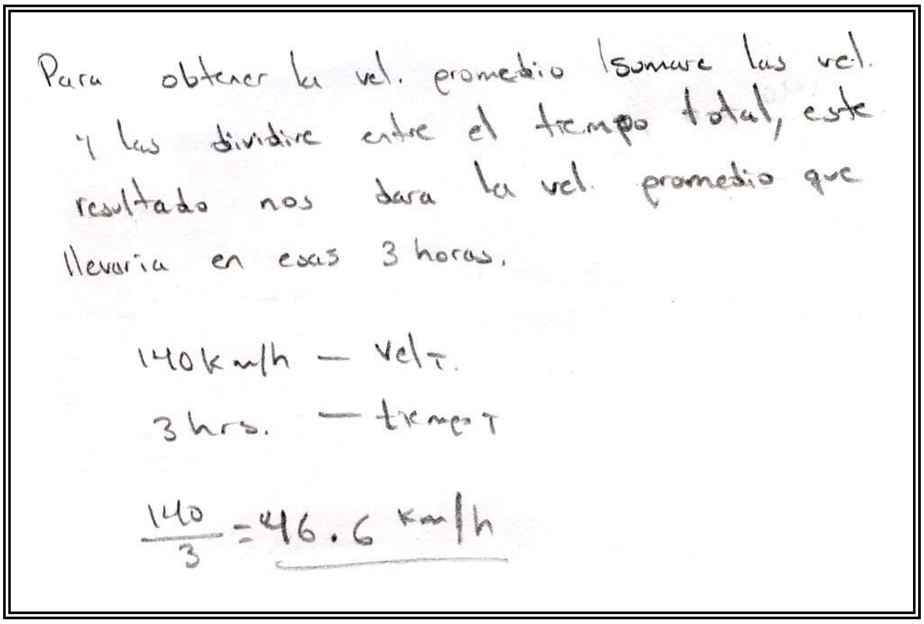
En la variación de los porcentajes para subir de calificación, hubo propuestas muy variadas, desde 40% examen, 50% tareas y 10% asistencia, hasta 90% asistencia, 5% examen y 5% tareas. En todos los casos los alumnos vieron la conveniencia de dar más pesos a aquellos rubros en los cuales su puntaje era más elevado.

En la actividad 2.B ("Las velocidades de un auto") los alumnos Eber, David, Israel y José Luís establecieron el promedio ponderado usando los tiempos como pesos llegando a la respuesta correcta de 80Km/hr. Las diferentes formas en las cuales estos estudiantes presentaron el algoritmo para el cálculo del promedio muestran rasgos de la media aritmética.

$$\bar{v} = \frac{100 + 100 + 40}{3} = \frac{2(100) + 1(40)}{3} = \boxed{80 \text{ km/h}}$$

Figura 5.7 Algoritmo equivalente propuesto por Israel

Sin embargo, los alumnos Javier y Dante no tomaron en cuenta el tiempo para duplicar las velocidades, pero sí en el momento de dividir la suma efectuada entre las tres horas. Su algoritmo fue el siguiente:



Para obtener la vel. promedio sumare las vel. y las dividire entre el tiempo total, este resultado nos dara la vel. promedio que llevaria en esas 3 horas.

140km/h — vel T.

3 hrs. — tiempo T

$\frac{140}{3} = 46.6$ km/h

Figura 5.8 Razonamiento de Javier

En el segundo bloque de ésta actividad, similar a la anterior, pero con velocidades diferentes, los mismos alumnos que habían calculado correctamente el promedio, volvieron nuevamente a aplicar el promedio ponderado llegando al resultado correcto.

El alumno Javier repitió nuevamente el algoritmo incorrecto al momento de calcular el promedio en éste nuevo caso, sin embargo, al responder la pregunta de la actividad que confrontaba los resultados de las dos velocidades promedio calculadas anteriormente, le permitió darse cuenta que el obtener el mismo resultado que en el caso anterior no era lógico. Sus resultados lo hicieron dudar en cuanto a la forma en cómo estaba planteando el promedio en estos casos, situación que lo llevó a replantear el algoritmo, en ésta ocasión duplicó la velocidad que se tenía durante las dos horas, logrando así establecer el promedio ponderado y obteniendo la velocidad promedio correcta.

Por otro lado, el alumno Dante no se percató de este hecho y concluyó que la velocidad era la misma para ambos casos, no logró interpretar los resultados obtenidos y tampoco reparó en la incongruencia que esto significaba.

En el tercer bloque, el alumno Dante comenzó probando con varias combinaciones para ver cual resultaba en la velocidad promedio indicada.

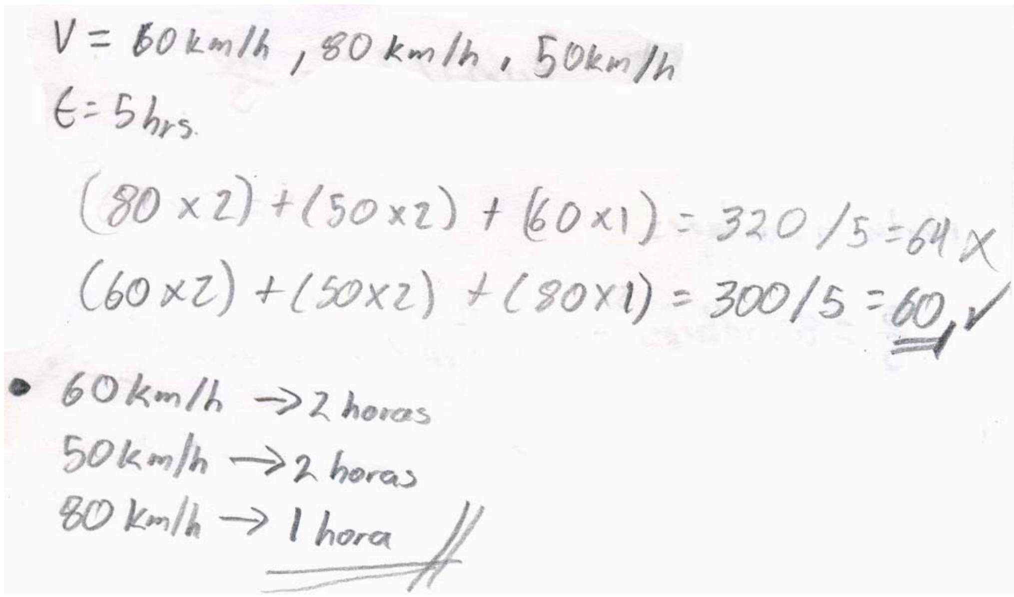


Figura 5.9 Pruebas hechas por Dante

Los demás alumnos encontraron el algoritmo correcto en su primer propuesta al duplicar las dos velocidades más cercanas a la buscada, al preguntarles cual había sido su razonamiento comentaron que dados los ejemplos anteriores en los cuales al duplicar la velocidad ya fuera la velocidad más alta o más baja se tenía una velocidad promedio cercana a la duplicada, entonces el duplicar la velocidad más grande los alejaría de la velocidad indicada.

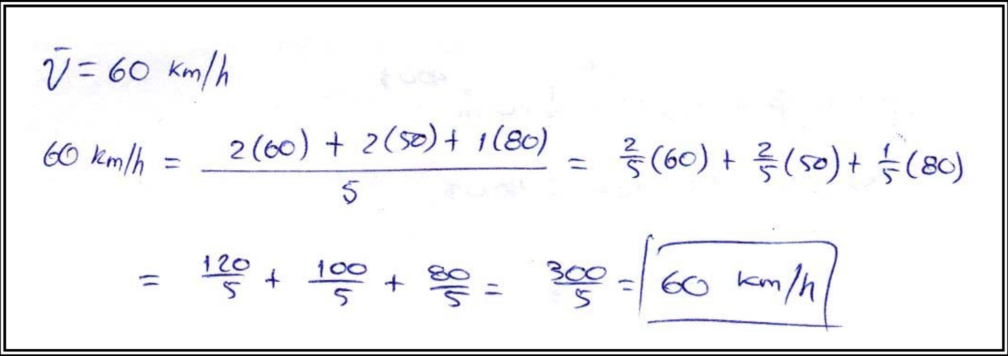


Figura 5.10 Algoritmo de Israel

Las conclusiones a las cuales llegaron los estudiantes indican una relación entre las variables (tiempo-velocidad, calificación-porcentaje).

- En estos problemas una variable depende o está en función de otra.
- Se parecen en que cada variable depende de su proporción, en el caso de las calificaciones, estas dependen del porcentaje que le diéramos y en el caso de las velocidades éstas dependen de su proporción con respecto al tiempo.

Etapa 3

En la actividad 3.A ("La balanza") todos los alumnos concluyeron que para que la balanza tuviera equilibrio, los pesos de la izquierda y la derecha debían ser iguales. En el caso en el cual los pesos son diferentes y se desea mantener el equilibrio en la balanza los alumnos Israel, David, Dante, Eber y Javier se guiaron por la vista y dada la figura concluyeron que el punto de equilibrio debía moverse a la izquierda, sin embargo José Luís fue el único que indicó que el punto de soporte debía moverse hacia el de mayor peso para mantener el equilibrio.

En el segundo bloque, todos los alumnos indicaron que el punto de soporte debía estar a la izquierda para mantener el equilibrio. Sin embargo, solo 4 alumnos (José Luis, David, Israel y Eber) fueron capaces de establecer por si mismos el algoritmo para calcular el peso que dicho punto de soporte debía tener, ellos sumaron los tres pesos y los dividieron entre el total de estos. Pero no concluyeron que el punto de equilibrio y el promedio eran lo mismo.

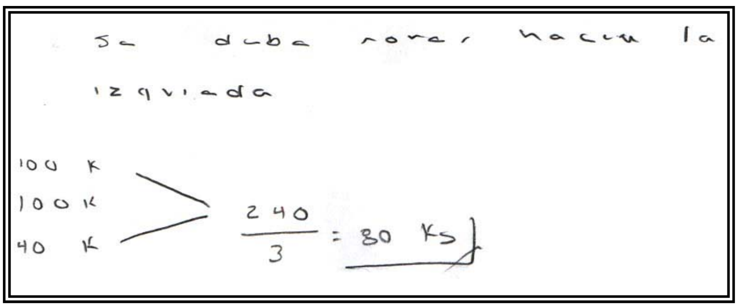


Figura 5.11 Razonamiento de Eber

Con los alumnos que no lograron establecer el algoritmo (Dante y Javier) se trabajo el apartado para éste caso, sin embargo, no quedaron del todo convencidos en que se pudiera aplicar éste hecho con los pesos.

Éste nuevo escenario confundió a los alumnos, ya que en ambos casos (quienes lograron establecer el algoritmo como los que no) ante la pregunta ¿en dónde estaría dicho punto de equilibrio en la balanza?, su razonamiento los llevó a tratar de ubicar este valor en la barra, los alumnos preguntaron cómo se ubicaba éste valor, ya que según ellos, en éste caso no existía una escala en la barra para ubicar dicho peso de manera exacta.

En el tercer bloque de la actividad 3.A todos los alumnos establecieron la ecuación que expresaba dicho problema igualada con el precio promedio indicado. El precio del oro lo obtuvieron por medio de un simple despeje del algoritmo establecido.

$$\frac{2}{3}\text{oro} + \frac{1}{3}\text{plata} = \frac{3}{3} = 1 \text{ aleacion} = \$80 \text{ dlls.}$$

$$\frac{2}{3}\text{oro} + \frac{1}{3}\text{plata} = 80 \text{ dls.}$$

$$\frac{2}{3}\text{oro} + \frac{1}{3}(40) = 80 \text{ dls.}$$

$$\frac{2}{3}\text{oro} = 80 - \frac{40}{3}$$

$$\frac{2}{3}\text{oro} = \frac{200}{3}$$

$$\text{oro} = \left(\frac{200}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{3}}{2}\right) = \frac{200}{2} = \underline{100 \text{ dls}} \ //$$

Figura 5.12 Razonamiento de Javier

En la última actividad 3.B (“Equivalencias”) los alumnos retomaron el ejercicio con el cual comienza ésta secuencia didáctica vaciando los datos obtenidos en una tabla sintética que contenía las variables aleatorias y sus respectivos valores probabilísticos ordenados de menor a mayor.

Variable aleatoria	0	1	2	3
Valores probabilísticos	1/8	3/8	3/8	1/8

Figura 5.13 Llenado de la tabla hecha por José Luis

En el segundo bloque de ésta etapa final, todos los alumnos graficaron los datos a través de puntos que posteriormente unieron con segmentos de recta.

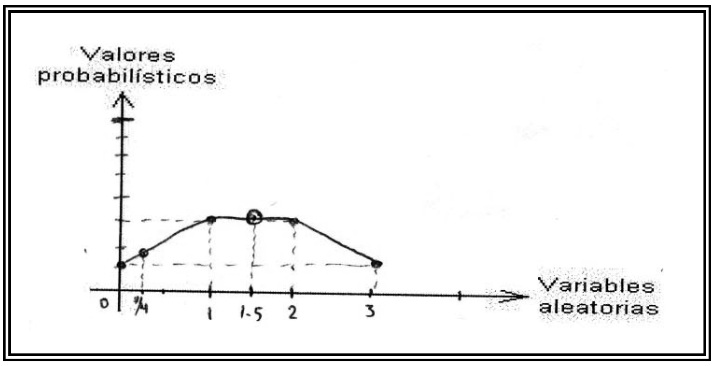


Figura 5.14 Gráfica elaborada por David

En ésta etapa, la parte más importante de la secuencia didáctica (pues en ella se pone a prueba la eficacia o fracaso de ésta al enfrentar nuevamente a los estudiantes al cálculo de cuántas águilas salen en promedio en una situación aleatoria), se tuvo que los alumnos Israel, Eber y José Luís pudieron detectar una vez analizados los ejemplos anteriores, la relación que existía entre las variables aleatorias y sus respectivas probabilidades, de tal forma que al calcular nuevamente el promedio pudieron fácilmente establecer el algoritmo correcto para dicho cálculo, comprendiendo que el promedio que deben aplicar no es el aritmético, sino el ponderado. Por otra parte aunque los alumnos Javier y David también establecieron el algoritmo correcto para el cálculo del promedio de ésta situación aleatoria mostraron cierta desconfianza, pues al establecer la forma general, ésta expresión les causó conflicto, pues no la reconocían como un promedio, aunque reconocieron que el valor obtenido de esta forma si correspondía con el punto de equilibrio en la gráfica.

Finalmente alumnos Israel, Eber y José Luís, David y Dante reconocieron que el promedio correcto para una situación aleatoria no es el aritmético sino el ponderado.

$$\bar{N}_o = 0(1/8) + 1(3/8) + 2(3/8) + 3(1/8) =$$

$$\frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\boxed{\text{Promedio} = \sum_{k=1}^{ne} x_k \cdot p(x)_k}$$

Figura 5.15 Conclusión de Israel

En el caso del alumno Dante, él fue el único que continuó teniendo de manera muy arraigada la media aritmética y no puedo desprenderse de ella, pues nuevamente reprodujo el algoritmo que había establecido a un inicio, sin embargo, puedo percatarse que el promedio aritmético no era el correcto, es decir no correspondía con el punto de equilibrio en la gráfica y que dicha noción le es insuficiente para el caso cuando se trabaja con situaciones aleatorias.

V.4 A manera de conclusión

Gracias a esta secuencia, sino todos, sí la mayoría de los alumnos presentaron un avance significativo en cuando al uso del promedio, pues no solo lograron establecer en la mayoría de los casos el algoritmo correcto, sino que también dado el problema pudieron establecer la expresión equivalente (sofisticada del promedio ponderado), es decir, lograron separar el promedio expresado como un cociente que habían estado manteniendo unido en su equivalente suma de fracciones. Lo cual permitió ver a la expresión correspondiente al valor esperado como un tipo de promedio.

En el siguiente capítulo se analizarán los datos aquí expuestos, con la finalidad de comprender las razones por las cuales los alumnos respondieron de una u otra forma y detectar las nociones bajo las cuales estan siendo influenciados.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE RESULTADOS

VI.1 Observaciones preliminares

En el capítulo anterior se mostraron los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica, es momento de analizar dichos resultados, lo que permitirá entre otras cosas, dar una explicación del porqué los estudiantes interpolan la noción del promedio aritmético a la teoría de las probabilidades e identificar bajo qué nociones están siendo influenciados al responder de tal o cual forma.

VI.2 Análisis de datos

Dados los elementos con los que ya se cuenta y la exposición de los datos que ya se ha hecho (como resultado de haber aplicado la secuencia didáctica), es que podemos pensar en el análisis de dichos datos bajo la luz de nuestro marco teórico.

Etapa 1

En la primera actividad de la etapa uno ("Las dos caras de una moneda") se detectaron dos formas de trabajo por parte de los estudiantes lo cual refleja que entre los alumnos existen diferentes formas de analizar un fenómeno aleatorio, en éste caso lo más importante era que fuese que llenaran la tabla de forma ordenada o no, los alumnos establecieran de manera correcta las probabilidades contempladas para dicho fenómeno.

El hecho de trabajar con este ejemplo clásico, dio la posibilidad de centrar la atención en otro punto, ver de qué forma los alumnos calculaban cuántas águilas salían en promedio. En el caso de los alumnos: Eber, José Luís, Israel, Javier y Dante sumaron todas las probabilidades del evento y las dividieron entre el número de éstas, esto refleja la ***definición de uso*** que tienen del promedio, y que en cuanto se les pide calcular un promedio, lo primero que emplean es el algoritmo del promedio aritmético que aprendieron desde sus inicios en su educación básica, aplicándolo de manera indiscriminada a cuanto problema pueden.

Este hecho se justifica porque como se vio en el análisis didáctico, en los libros y materiales de apoyo se indica que para calcular el promedio de una serie de datos, éstos se deben sumar y dividir entre el total de ellos, lo cual es correcto, pero el no dedicar tiempo a estudiar otras situaciones en las cuales éste algoritmo sufre modificaciones, lleva a creer al alumno que dicha noción es aplicable en todo caso. Pues así fue como lo hizo en la mayoría de los ejemplos en los cuales se les pedía este concepto, ya fuese para calcular el promedio de una colección de datos referentes a calificaciones, estaturas, edades, etc. Y en los siguientes niveles educativos pasa algo similar. Por ejemplo, al estar en los niveles medio superior y superior se comienza a trabajar con el valor esperado como una noción aislada, perdiendo así conexión con el promedio, lo cual provoca que el alumno vea a este concepto y al promedio como elementos aislados. De ahí que el alumno no se detenga a pensar en las limitantes de dicho algoritmo, ni mucho menos en el contexto en el cual se esté trabajando pues tampoco tiene una clara distinción entre una experiencia aleatoria y una experiencia determinística y por lo tanto al utilizar el promedio en probabilidad quiere aplicarlo directamente, como se vio en los datos obtenidos.

En el otro caso, el del alumno David, él contó el número de águilas que aparecían en su tabla y los dividió entre el total de tiros, esta acción también refleja la idea tan arraiga que de la media aritmética tiene, sin embargo, y dado que no consideró el hecho de que el cero también debía ser tomado en cuenta, (por formar parte de los valores que puede tomar la "*variable aleatoria*"), se vislumbró otra dificultad, como lo es éste concepto y todo lo que esto implica, surgiendo así una nueva variable que debe ser analizada en futuras investigaciones relacionadas con éste fenómeno de estudio. En este caso interviene al preguntarle que porqué no consideró al cero, sin embargo, de poco sirvió al observar que el alumno David calculaba nuevamente un promedio aritmético, pero ahora de las probabilidades, igual que el resto de sus compañeros.

Los resultados obtenidos en ésta primera etapa prueban y confirman el problema que dio origen a la presente investigación y muestran que a diferencia de lo que en los planes y programas de estudio se da por un hecho, no es posible el que los alumnos adapten y modifiquen de manera natural (dada la forma en como se presenta y desarrolla éste concepto en las aulas) el concepto de promedio de un contexto a otro.

Etapa 2

Los resultados obtenidos en la actividad 2.A ("Las calificaciones") muestran que ningún alumno tuvo problemas para calcular la calificación del primer departamental, una de las explicaciones de este hecho, nos la da el análisis efectuado en el capítulo dos (estado actual en la escuela), pues como ahí se mostró, el primer acercamiento que los alumnos tienen con éste concepto matemático es mediante el calculo de las evaluaciones, cosa que continúan haciendo a lo largo de toda su vida escolar. Sin embargo, el hecho de hacer los cálculos por separado para cada uno de los rubros utilizando regla de tres y media aritmética y al final sumarlos, muestra que los alumnos ven estos conceptos en forma aislada, y no logran conectarlos pues no generaron ningún tipo de fórmula que les permitiera obtener la evaluación buscada.

En el siguiente caso cuando se les indicó a los alumnos que modificaran los porcentajes de tal forma que subieran su calificación, sus cálculos muestran la desarticulación de éstos conceptos pues incluso hicieron varios intentos por separado para ver cual de ellos daba como resultado una calificación más alta, sin ver la conveniencia de tener un algoritmo para dichos cálculos. Sin embargo, y pese a ello, todos los alumnos se inclinaron por dar mayor porcentaje a las calificaciones más altas, pues ello lograba que la calificación se elevara. El propósito de ésta actividad era que los alumnos vieran que a medida que los porcentajes variaban en relación a las calificaciones obtenidas, el resultado se acercaba a éstos valores.

En la actividad 2.B ("Las velocidades de un auto") el problema trataba que los alumnos comenzaran a desarrollar el promedio ponderado, el cual surge del promedio aritmético. Solo los alumnos: Eber, David, Israel y José Luís establecieron correctamente el algoritmo indicado. Mientras que los otros dos alumnos: Javier y Dante, establecieron la media aritmética sin tomar en cuenta los tiempos en el problema, por lo que no duplicaron las velocidades. Esto se debe a que no se está tomando en cuenta que los datos que se exponen no son aislados sino que están ligados con otras variables (en este caso el tiempo), por lo que en el cálculo del promedio se deben tomar en cuenta para no cometer errores tan comunes y frecuentes como este. Es por esto que se diseñó una segunda parte de ésta actividad y que considera el caso de los alumnos que cometan éste error. Y solo el alumno Javier fue capaz de razonar que algo estaba mal al comparar los datos y ver que los valores eran los mismos, lo cual al no tener sentido, pudo darse cuenta que la variable tiempo era lo que estaba pasando por alto, pues debía tomarlo en cuenta en el algoritmo que él estaba proponiendo. Gracias a este hecho él pudo percatarse de su error y darse cuenta de ésta pequeña fineza. Sin embargo, el alumno Dante no pudo ver éste hecho y simplemente concluyó que las velocidades eran iguales, situación en la que no reparó, pero si lo intrigó.

En el siguiente bloque (el tercero) todos los alumnos, excepto Dante, fueron capaces de determinar en su primer intento las dos velocidades que se estaban duplicando y que al seleccionar las velocidades correctas, el resultado se acercaba al buscado. En el caso del alumno que no logró establecer el algoritmo correcto en los casos anteriores, siguió presentando problemas en su razonamiento, ya que sus anotaciones muestran que no pudo identificar la relación entre las variables implicadas (velocidad - tiempo), pese a las actividades desarrolladas hasta el momento. Este tipo de respuesta muestra que la definición de uso que el alumno Dante tiene es limitada y rígida, pues no logra modificarla y adaptarla al problema que así lo exija.

En el caso del alumno Israel, su algoritmo del promedio comenzó a evolucionar y a adquirir la forma del promedio ponderado, pues aparecen rasgos del promedio ponderado al indicar aquellos elementos que se repiten (que tienen más peso) que los otros.

Los comentarios de los alumnos muestran, en la mayoría de los casos, que comprenden la relación entre las variables y así lo expresan en el algoritmo construido para tal efecto en cada uno de los ejemplos. Sin embargo, aún no se logra ver que los alumnos expresen el algoritmo del promedio en una expresión equivalente.

Etapa 3

Ésta actividad fue la que más problemas presentó, sobre todo porque surgieron otras variables no contempladas. En la primera parte de la actividad 3.A (“La balanza”) todos los alumnos afirman que para que la balanza tuviera equilibrio, los pesos deberían ser iguales, sin embargo, al momento que cambiar la situación y decirles que ahora los pesos eran diferentes, los alumnos: Israel, David, Dante, Eber y Javier razonaron ***según sus sentidos*** y dado que a simple vista el peso de la izquierda aparenta ser mayor al peso de la derecha, todos ellos concluyeron que el punto de equilibrio debía moverse hacia la izquierda para que se siguiera manteniendo el equilibrio.

Sin embargo, solo el alumno José Luís respondió que el punto de soporte tendría que moverse hacía el lado donde se tuviera el de mayor peso (no indicando si el de la izquierda o el de la derecha pesaban más que el otro), este hecho nos permite pensar en una forma distinta de percibir la situación, es decir, si en el caso anterior para que la balanza permaneciera en equilibrio los dos discos de la derecha debían pesar lo mismo que los cuatro discos de la izquierda. Siguiendo esta lógica, éste alumno no se atrevió a asegurar que los discos de la izquierda pesaban más que los discos de la derecha, pues estaba contemplando también el otro caso.

En el segundo bloque de ésta actividad (en el que se presenta la balanza con tres pesos) surgieron problemas para los dos tipos de razonamientos anteriores, es decir, por un lado se tuvo que los alumnos: Eber, David, Israel y José Luís, que habían reportado el promedio ponderando las velocidades por el tiempo correspondiente, establecieron nuevamente en este caso el algoritmo correcto para calcular el punto de equilibrio, pero no pudieron establecer dónde estaría el punto de equilibrio en la balanza.

Por otro, los alumnos Javier y Dante, que no lograron establecer el algoritmo que determinaba el punto de equilibrio, trabajarón el apartado para tal caso, y aunque establecieron el algoritmo correcto para dicho promedio, ponderando las cantidades de dinero por el número de billetes, no quedaron convencidos de que éste mismo algoritmo se pudiera aplicar a los pesos y tampoco pudieron establecer dónde estaría el punto de equilibrio.

Se tuvo que todos los alumnos se desviaron de lo previsto pues tenían la duda de en que punto dentro del lado izquierdo deberían colocar los 80Kgr, para que la balanza mantuviera el equilibrio. Pues según ellos, en éste caso no existía una escala en la barra para ubicar dicho peso de manera exacta. Por lo que la pregunta les pareció vaga y no pudieron concretar este ejemplo. El problema intentaba que los alumnos entendieran que el valor promedio y el punto de equilibrio eran lo mismo. Sin embargo, solo José Luís comentó de manera muy insegura que el peso promedio de los tres pesos tendría que estar ubicado en el mismo punto donde estaba el equilibrio. Razonamiento al que deseábamos que llegaran los alumnos.

Para explicar éste hecho nos apoyamos en la dimensión social que nos permite entender porqué los alumnos tienen problemas con ésta característica del promedio, y es porque los estudiantes que reconocen y manipulan a cierto nivel dicha noción sólo la relacionan con el contexto del problema donde la definen, en el caso de la ingeniería la característica más socorrida es la relacionada con la idea de la compensación que se tiene en áreas y no con pesos para el equilibrio. Interesante sería analizar si un estudiante de otra área tiene dificultades con este elemento o no, dependiendo del uso que le den en su área de saber científico (por ejemplo un médico o un economista).

En el tercer bloque de ésta actividad (3.A) todos los alumnos lograron establecer el algoritmo correspondiente al planteamiento del problema. Esta actividad fue diseñada para que los alumnos expresaran el promedio ponderado en su equivalente suma de fracciones, y lograran vincularlo con los algoritmos anteriores que permanecen unidos. Éste hecho se vería reflejado en la etapa final, en la cual se esperaba que los alumnos fueran capaces de pasar de la media aritmética al valor esperado a través del promedio ponderado.

En la última actividad 3.B ("Equivalencias"), al principio únicamente se le pidió a los alumnos que vaciaran los datos obtenidos de la actividad "Las dos caras de la moneda" en una tabla sintética, con la finalidad de que ellos observaran los datos y relacionaran las variables aleatorias con sus respectivas probabilidades. De igual forma, el graficar dichos datos y ubicar el valor promedio calculado anteriormente en la gráfica tenía como finalidad que los alumnos observaran si dicho valor equivalía o no al punto de equilibrio y entonces actuaran en consecuencia.

Es así que los alumnos: Israel, Eber y José Luís lograron darse cuenta de estos aspectos y fueron capaces de modificar el algoritmo inicial, estableciendo esta vez el promedio adecuado, ponderando las variables aleatorias por su respectiva probabilidad, es decir, tomaron las probabilidades como pesos. Así también fueron capaces de generalizar dicho algoritmo en la fórmula que corresponde al valor esperado.

Los alumnos Javier y David también replantearon el algoritmo del promedio de manera correcta, verificaron que el valor resultante de aplicar este nuevo algoritmo correspondía al punto de equilibrio en la gráfica. Sin embargo, al establecer la fórmula del valor esperado y preguntarles si aceptaban a esta expresión como un promedio, se mostraron escépticos y desconfiados. Ésta resistencia se debe a que si bien para ellos fue coherente y lógica la evolución que tuvo este concepto dado el desarrollo de la secuencia didáctica, no es fácil romper con una noción con la cual se ha vivido muchos años durante su vida académica, de tal forma que al confrontar sus ideas con ésta nueva expresión del promedio, les resultó difícil creerlo a pesar de que ellos mismo la construyeron.

En el caso del alumno Dante, él fue el único que reprodujo nuevamente el algoritmo de la media aritmética para calcular el promedio de dicha situación aleatoria y pese a que observó en la gráfica que dicho valor no correspondía con el punto de equilibrio, no fue capaz de generar el algoritmo correspondiente (promedio ponderado). Ello se debe a que desde el inicio, su definición de uso de la media aritmética estuvo presente en todo momento y se reflejó durante toda la secuencia didáctica, impidiéndole así generar el promedio ponderado que es el trampolín para llegar al valor esperado.

VI.3 A manera de conclusión

Dado el diseño de la secuencia didáctica basado en la construcción social del conocimiento matemático, se puede decir que éste es el camino correcto que permite pasar de forma natural de la media aritmética al valor esperado usando como conector al promedio ponderado, el cual surge del promedio aritmético.

A lo largo de éste capítulo, se comprobó que no únicamente es posible explicar las causas por las cuales los alumnos responden de tal o cual forma, sino que también se probó la utilidad de haber considerado a la construcción social del conocimiento matemático en el diseño de la secuencia didáctica, pues aquello que se había predicho se cumplió tal cual, pese a que surgieron nuevas variables que han de ser tomadas en cuenta en futuras investigaciones.

Afirmamos que la secuencia didáctica diseñada para atacar el problema de estudio es viable y que tanto puede ser mejorada y/o modificada tomando en cuenta las variables que surgieron en la aplicación que no se tenían contempladas, como aplicable a un grupo mayor de alumnos para futuras investigaciones. Pues como se vio, ésta nueva forma de introducir al valor esperado logra que los alumnos avancen una épsilon en su concepción del promedio.

CAPÍTULO VII

CONSIDERACIONES FINALES

VII.1 Reflexión

A través de la presente investigación se ha logrado conocer la génesis, el desarrollo y el establecimiento de la media aritmética dentro de la matemática escolar, por medio de la construcción social del conocimiento matemático, a través de sus distintas componentes. Situación que permitió no solo comprender aquellos elementos que fueron consideraros para su adaptación en áreas como la teoría de probabilidades, o en contextos como el de la ingeniería.

Entender que éste es un concepto sumamente importante porque es aplicado en casi todos los aspectos no solo académicos y científicos, sino también sociales, es que se puede reconsiderar la forma en como se enseña dentro de las instituciones del sistema educativo mexicano y evitar así darle poca importancia, por considerar que el alumno puede pasar de un contexto determinista a uno aleatorio de manera natural, situación que en ésta investigación quedó claro no es posible.

Consideramos que es importante exponer al estudiante a problemas en los cuales la media aritmética es insuficiente incluso en el contexto determinista, como es el caso del problema de las velocidades, desde los niveles básicos de educación para que éste comprenda las limitantes que dicho algoritmo tiene. Y que es otra la forma que adquiere el promedio en el contexto aleatorio.

Es importante que el alumno entienda que el promedio no es necesariamente sinónimo de media aritmética, idea que está muy enquistada en la mente del estudiante, y que se hizo evidente en la secuencia didáctica.

Como ya se ha manifestado, nosotros proponemos que el trampolín para pasar de la media aritmética al valor esperado (ambos promedios, pero situados en diferentes contextos: determinístico y aleatorio), es el promedio ponderado. Es decir que una de las formas para construir el valor esperado es por medio del promedio ponderado que por sus características se adapta perfectamente a las condiciones de la aleatoriedad de las variables en el caso probabilístico.

Cabe destacar que el alumno construye su noción del promedio con base en el uso que se le da y es a partir de esto que el alumno le asocia una interpretación que se adapta a tal situación. Creemos que una mayor atención a los elementos inmersos en la media aritmética, como lo son sus distintas categorías, facilitarán el paso natural entre el promedio aritmético y el valor esperado, pues de no hacerlo, la media aritmética queda relegada a una simple regla en la cual solo hay que sumar los datos dados y dividirlos entre el total de éstos, lo cual limita y refuerza ésta idea en la mente de los estudiantes, situación que se reflejó al momento de trabajar problemas de contexto, pues no solo trasladan la fórmula de la media aritmética simple a problemas cuya relación es más bien con la media aritmética ponderada, sino que les impide ver otras expresiones equivalentes del promedio.

VII.2 Nuevas variables, nuevos problemas de investigación

Desde otras perspectivas, nuevas investigaciones sobre el fenómeno que hemos reportado podrán ofrecer alternativas en el tratamiento del valor esperado en el contexto probabilístico. Esperamos que la presente investigación sirva como un auxiliar en aquellos trabajos que tienen como elemento modelador al valor esperado, es por tal razón que ponemos a consideración nuevas variables que han surgido a partir de éste trabajo y que creemos deben ser analizadas.

Es posible que las investigaciones cambien dependiendo del área en la cual se deseen desarrollar, puesto que son éstas las que determinan la interpretación se que le asocie a la media aritmética. Sin embargo, consideramos, por los estudios realizados en ésta investigación, que una variable importante es el concepto de variable aleatoria, ya que es uno de los conceptos base de la teoría de las probabilidades, no sólo porque en ella se sustentan diversos conceptos, sino también porque gracias a ella el espacio muestral de un fenómeno aleatorio se relaciona con una característica numérica a la que se le asocia un espacio de probabilidades. Además desde una perspectiva de modelación la variable aleatoria permite acotar el contexto y trabajar específicamente con características numéricas y de interés dentro de un problema que involucra algún fenómeno aleatorio. Creemos también que al igual que la noción de promedio, la variable aleatoria debe ser considerada como una idea fundamental dentro de la enseñaza escolar porque se puede desarrollar desde las etapas tempranas del niño hasta niveles más elevados en el nivel superior.

Si bien ya existen investigaciones relacionadas a la teoría de las probabilidades, creemos que es un campo poco explorado y que las investigaciones en Matemática Educativa al respecto pueden arrojar nueva luz sobre éstos conceptos tan sofisticados.

Esperamos contribuir un poco a la revalorización del promedio en todas sus dimensiones con esta investigación y abrir el camino a otras investigaciones que como ésta tienen como su centro de atención la superación de obstáculos por parte de los estudiantes para lograr apoderarse de un conocimiento capaz de afrontar y superar cualquier problema.

VII.3 Recomendaciones para futuras investigaciones

De ésta investigación pueden surgir otros trabajos relacionados con éste concepto, algo interesante será estudiar lo que pasa en el caso continuo, en el cual la integración surge como factor que describe a dicho promedio, o que decir de aquellos eventos que presentan una distribución binomial, en cuyo caso, el valor esperado cambia de una serie a la multiplicación de dos únicos valores.

Consideramos que para cada caso, se tendrán que tomar en consideración otros factores concernientes al promedio, y algo interesante sería estudiar qué nuevos obstáculos surgen en el alumno para llegar a este.

VII.4 A manera de conclusión

Este trabajo ha sido muy enriquecedor para quien lo suscribe, ya que se ha podido profundizar en el estudio de un concepto que muchos consideran una trivialidad, y que no le dan mayor importancia. Sin embargo, con este estudio se demuestra que no es así y que incluso una noción como ésta presenta problemas de cognición sobre todo al momento no solo de interpretarla, sino también al trasladarla a otras áreas del quehacer científico y en otros contextos como son el determinista y el aleatorio.

Éste es solo la punta del iceberg, pues muestra tan sólo una parte de los muchos problemas que se tienen éste campo tan poco explorado, invitamos a otros investigadores a que pongas sus ojos en tan maravilloso campo que es la teoría de las probabilidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTÍCULOS

- Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics 62(1), pp.*149-168.
- Batanero, C. (2000). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Departamento de didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2000). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. Internation Journal of Mathematics. *Education in Science and Technology 25*(4), pp. 527-547.
- Brousseau, G. (1997). *Theory Didactical situations in Mathematics*. Kluwer Academic. Publisher.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problemes en mathemátiques. *Recherches en didáctique des mathématiques 4*(2), 165-198.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una vision de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(1), pp. 27-40.
- Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). New York: EE.UU.: Kluwer Academic Publishers.
- Flores Peñafiel, A. (1995), "Nexos en el razonamiento proporcional: Palancas, media aritmética, promedio ponderado, mezclas, porcentajes de bateo y velocidades", *Educación Matemática*,*7*(2), pp.113-125.
- García, I. y García, J. (2004). La media aritmética. Formación del profesorado e Investigación en Educación Matemática, vol. 6, pp. 197-217.
- Jones Graham A. (2005). *Exploring Probability in school*. Springer, United States of America.

- Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(2), pp. 195-218.

- Mochón, S. y Tlachy, M. (2003). Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos. *Educación Matemática 15*(3)*,* pp. 5-28.

- Mokros, J. y Russell, S. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(1), pp. 64-80.

- Rondero, C. (2001). *Epistemología y Didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales, ponderativo y equilibrium, en la construcción del saber físico matemático*. Tesis de Doctorado, CINVESTAV-IPN, México.

- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. Capter 19in D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning*. NT: Macmillan.

- Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). New York: EE.UU.: Kluwer Academic Publishers.

- Tall, D. & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.

- Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 195-213). EE.UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

LIBROS DE TEXTO REVISADOS

- Aragón, M. (1985). *Diccionario de Matemáticas para secundaria.* Editorial Patria. México.
- Aragón, M. (1988). *Diccionario de Matemáticas para educación medio.* Editorial Patria. México.
- Ávila, A. (2004). *Matemáticas. Quinto grado.* Servicios Editoriales CIDCLI. México.
- Balbuena, H. (2004). *Matemáticas. Sexto grado.* Editoriales CIDCLI. México.
- LipsChutz, S. (1994). *Teoría y problemas de probabilidad.* McGraw-Hill. México.
- Larousse. (). *Diccionario esencial de matemáticas.*
- Matínez, S. (2005). *Matemáticas 3. Nivel secundaria.* Prentice-Hall. México.
- Murray, R. (1970). *Estadística. Teoría y 875 problemas resueltos*. McGraw-Hill. México.
- Sánchez, F. (2005). *Matemáticas 2. A partir de la solución de problemas. Educación secundaria.* Fernández Editorial. México.
- Batanero, C. (2000). *Significado y comprensión de las medidas de posición central*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de granada, núm. 25, pp. 41-58.
- Martín, F. (2006). *Fundamentos de probabilidad,* 2da edición, Ed. Thomson.

PLANES Y PROGRAMAS

- *Programa de matemáticas* 6 (Probabilidad y estadística). Nivel Medio Superior. Instituto Politécnico Nacional.
- Programa de Matemáticas 7 (Probabilidad y Estadística). Nivel Superior. Instituto Politécnico Nacional.
- Educación básica Primaria (1993). Plan y programa de estudios. SEP.
- Educación Secundaria (2000). Libro para el maestro. SEP.

ANEXO

Encuesta de sondeo hecha en diferentes niveles educativos:

Cuestionario
1.- ¿Para ti qué es el promedio?
2.- ¿Qué características tiene?
3.- ¿Cómo lo calculas?
4.- ¿Dónde lo aplicas?
6.- Cita un ejemplo
5.- ¿Consideras que éste es un elemento matemático importante?, ¿Por qué?

ACTIVIDAD 1. "Las caras de una moneda"

Considera el experimento de lanzar una moneda 3 veces, cuenta el número de águilas que aparecen en la parte superior de la moneda.

a) Registra todas las posibles combinaciones de éste experimento en la siguiente tabla:

jugada	primer tiro	segundo tiro	tercer tiro
1	A	A	A
2	A	A	S
3	A	S	A
4			

1

Bloque 2

- ¿En cuántas jugadas se tienen todos los resultados posibles (diferentes)?
- ¿Qué probabilidad existe de que en una jugada se obtengan 0 águilas?
- ¿Qué probabilidad existe de que en una jugada se obtengan solo 1 águila?
- ¿Qué probabilidad existe de que en una jugada se obtengan solo 2 águilas?
- ¿Qué probabilidad existe de que en una jugada se obtenga 3 águilas?
- ¿Puedes determinar cuántas águilas salen en promedio? Justifica tu respuesta y conserva todos tus cálculos.

2

ACTIVIDAD 2.A "Las calificaciones"

Al inicio del curso, tu profesor de matemáticas te presentó la forma de evaluar su materia en cada uno de los tres departamentales, y es la siguiente:

Examen teórico	70%
Tareas	20%
Asistencia	10%
Total	100%

En el primer examen sacaste 5, de las 15 asistencias que debías tener solo asististe a 12 y de tres tareas en una sacaste 8, en otra 6 y un la última 9.

a) ¿Puedes determinar tu calificación en el primer departamental? Conserva tus anotaciones.

b) ¿Cuál es el algoritmo que usaste para determinar tu calificación?

c) ¿Qué porcentaje le darías a cada rubro para subir de calificación?

3

Bloque 1

ACTIVIDAD 2.B "La velocidad de un auto"

Si un automóvil viaja a una velocidad de 100km/h durante 2 horas y después viaja a 40km/h durante la siguiente hora.

- ¿Cuál es su velocidad promedio?. Conserva todas tus anotaciones.

4

Bloque 2

A su regreso ese mismo automóvil viaja hora a 40Km/h durante las primeras dos horas y después a 100Km/h en la última.

- ¿Cuál es su velocidad promedio en este caso? Conserva tus anotaciones.
- ¿Cómo es éste valor con respecto al caso anterior?. Describe con detalle.

5

Bloque 3

En un lapso de 5 horas, el velocímetro del automóvil indicaba periodos con las siguientes velocidades: 60Km/h, 80Km/h y 50Km/h. Dos de éstas velocidades las mantuvo dos horas seguidas c/u y la otra durante una hora. Si su velocidad promedio fue de 60Km/h... ¿cuál es el algoritmo que te permita obtener este promedio (conserva todas tus anotaciones)

6

Bloque 4

Observa con detalle los algoritmos que desarrollaste en todos los cálculos anteriores, ¿en qué se parecen?, ¿en qué son diferentes?, ¿cómo explicas o interpretas las variables en cada uno?

7

ACTIVIDAD 3.A "La balanza."

Observa la siguiente figura:

- Para que esta balanza mantenga el equilibrio, ¿que debe ocurrir en los pesos de la izquierda y la derecha?
- Supón que los pesos son diferentes y que no los puedes mover, cambiando el punto de soporte podemos mantener el equilibrio. ¿hacia adónde lo moverías?

8

Bloque 2

Supón que tienes ahora tres pesos colgando de la barra, los primeros dos pesan 100Kg y el tercero 40Kg:

- ¿Cuál sería el punto de equilibrio?, ¿en donde estaría dicho punto en la balanza?
- ¿Qué algoritmo te permite determinar el punto de equilibrio?

9

Problema en caso de no lograr establecer el algoritmo correcto

Imagina que un padre tiene tres hijos y que tiene dos billetes de 100 pesos y uno de 40 pesos para repartirlo entre los tres.

- ¿Cuánto dinero le tendría que dar a cada uno para que la repartición sea equitativa (equilibrada)?, ¿cómo determinas esa cantidad?
- Entonces para el problema anterior… ¿cómo tendrías que haberlo calculado para que fuese correcto?

10

Bloque 3

Si logra establecer el algoritmo correcto:

Se sabe que el precio de una aleación depende del costo y la proporción de los metales que la forman. Si una aleación está formada por 2/3 partes de oro y 1/3 parte de plata y el costo promedio de dicha aleación es de 80 Dólares ¿Cuál es el precio del oro si el precio de la plata se cotiza en 40 Dólares?

11

ACTIVIDAD 3.B "Equivalencias"

Retoma la actividad de lanzar una moneda tres veces, contar el número de águilas que aparecen en la parte superior de la moneda, encontrar las probabilidades para cada caso y calcular el promedio…

Ordena los datos que obtuviste de menos a mayor como se te indica en la siguiente tabla:

Variable aleatoria	0	1	2	3
Valores probabilísticos				

Nota: Los valores 0, 1, 2 y 3 se representan por la variable x que es llamada aleatoria porque puede tomar cualquiera de estos valores, valores que tienen su respectiva probabilidad.

12

Bloque 2

Grafica los datos:

<u>Apóyate en las actividades anteriores</u> y calcula nuevamente cuántos águilas salen en promedio.

- ¿Es similar al valor que obtuviste la primera vez?, sitúa este nuevo valor en la gráfica. ¿corresponde al punto de equilibrio?.
- ¿Puedes generalizar éste algoritmo en una fórmula?. Utiliza a x para representar a las variables aleatorias y a p(x) para los valores probabilísiticos de cada variable aleatoria.

13