CICATA del IPN

Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN
Unidad Legaria

Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias
en Matemática Educativa

Presenta:
Elías Cruz Mendoza

Director de tesis:
Dr. Javier Lezama Andalón

México, D.F., Noviembre de 2008

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 18 del mes de septiembre del 2008 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática"

Presentada por el alumno:

CRUZ	MENDOZA	ELÍAS
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	2	0	2

aspirante al grado de:

Maestria en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Apolo Castañeda Alonso

CICATA - IPN

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

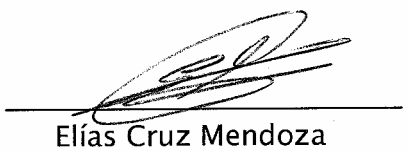
Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 15 del mes Octubre del año 2008, el que suscribe **Elías Cruz Mendoza** alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro **A030202**, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de el Dr. Javier Lezama Andalón y cede los derechos del trabajo intitulado **"Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática"**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones: ecruzme@ipn.mx, ecruzmendoza@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



Elías Cruz Mendoza

Dedicatorias

A Dios, por el tiempo prestado

A mi esposa Lety
por su comprensión y tolerancia

A Yazmín y Jonathan, mis adorados
hijos

A mis padres, en especial a mi mama,
por sus incomparables consejos

A mis hermanos: Mari, Clau, Rafa y Fer
por su agradable compañía

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Agradecimientos

A CICATA del Instituto Politécnico Nacional, por haberme permitido estudiar en sus aulas virtuales

A mis profesores de la maestría, en forma muy especial a Javier Lezama, por sus aportaciones y atinados comentarios.

A mis amigos profesores del Cecyt 15: Georgina Avilés, Wilfrido Flores, Rafael Alfonso Meza, José Antonio Arroyo, Joel Cerna, Juan Manuel Cortes, Justino Salazar, Felipe de la Rosa, Luis Emilio Sánchez, Inocencio Suarez, Francisco Suarez, por su valiosa participación

A los maestros, por sus valiosas aportaciones:

Araceli Rotaeche, Mariangela Borello, Maritza Frinkental, Esteban Martos,

Cecilia Crespo, Gabriel Molina, Alejandro Rosas, Apolo Castañeda

A los alumnos por su valiosa participación

Índice

Resumen…… **7**

Abstract…… **8**

Glosario…… **9**

Introducción…… **10**

Capítulo 1. Ingeniería Didáctica, nuestra metodología de investigación…… **14**

Capítulo 2. Sobre la componente didáctica…… **29**

Capítulo 3. Sobre la componente epistemológica…… **55**

Capítulo 4. Sobre la componente cognitiva…… **70**

Capítulo 5. La suma, multiplicación y diferencia de dos números…… **112**

Capítulo 6. Diseño de la secuencia didáctica…… **132**

Capítulo 7. Comentarios finales…… **187**

Referencias bibliográficas…… **191**

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Resumen

La investigación desarrollada en este trabajo, gira alrededor de la problemática que tienen las personas al tratar de utilizar el método de factorización como método general en la solución de ecuaciones cuadráticas. Para salvar este obstáculo se propone una forma de encontrar dos números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación desde un entorno numérico y geométrico, este conocimiento es utilizado para factorizar cualquier trinomio cuadrado, permitiendo así generalizar el método.

Este trabajo se ubica en una de las líneas de investigación, desarrollada dentro del programa de Matemática Educativa de CICATA del IPN: "Innovación para la enseñanza de las matemáticas"

La investigación realizada es utilizada para el diseño de una secuencia didáctica, que busca que la persona que la lleve a cabo, tenga la oportunidad de apropiarse del conocimiento. Para lograr este objetivo se propone que el alumno trabaje diferentes contextos: numérico, geométrico, algebraico y aplicación. A su vez la estrategia principal es que el conocimiento se obtenga por descubrimiento guiado, una vez que se hayan realizado una serie de actividades de aprendizaje, las cuales involucran habilidades mentales, tales como: observación, deducción, predicción. Ante estas situaciones didácticas se espera favorecer el aprendizaje significativo, con el propósito de incidir positivamente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En el diseño de la secuencia se propone como metodología a la Ingeniería Didáctica, y se toman en cuenta las componentes: didáctica, epistemológica y cognitiva.

Abstract

The research developed in this work around the problem that the people have trying to use the method of factoring as a general method in solving quadratic equations. To overcome this obstacle is proposing a way to find two numbers of which their addition and multiplication are known in a numerical and geometric environment, this knowledge is used by for factorize any trinomial square, thus generalizing the method.

This work is set in one of the lines of research, developed within the IPN program of Mathematics Education CICATA: "Innovation for the teaching of mathematics"

The investigation is used to design a teaching sequence, which seeks that the person, who carries it out, has the opportunity to appropriate of the knowledge. To achieve this goal it is proposed that students work in different contexts: numeric, geometric, algebraic and application. In turn the principal strategy is that the knowledge is obtained by guided discovery, once it has carried out a series of learning activities, which involve mental abilities such as observation, skills as: observation, deduction, and prediction. Faced with these didactic situations one expects to encourage the teaching-learning meaningful, in order to positively impact on the teaching-learning of the mathematics.

The design of the sequence is proposed as methodology to Engineering Didactics, and takes into account the components: didactic, epistemological and cognitive.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Glosario

Algoritmo: Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema.

Metodología: Ciencia del método. Conjunto de métodos que se siguen en una investigación científica o en una exposición doctrinal.

Generalizar: Abstraer lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas.

Epistemología: Doctrina de los fundamentos y métodos del conocimiento científico.

Cognitiva: Perteneciente o relativo al conocimiento.

Génesis: Origen o principio de algo.

Lógica: Ciencia que estudia las formas correctas de razonar. Normalmente al referirnos a la lógica, hacemos referencia a la lógica clásica, cuyas bases fueron sentadas por Aristóteles.

Pensamiento Lógico: Forma de pensamiento basado en la lógica. Posee como base la necesidad de la conservación de la verdad, o sea de obtener proposiciones verdaderas a partir de proposiciones verdaderas.

Razonamiento deductivo: Forma válida de razonar en las ciencias, en el cual la conclusión se sigue necesariamente de las premisas. Su validez significa que siendo las premisas verdaderas, la conclusión también lo será.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Introducción

Hoy en día existen muchas investigaciones científicas del cómo una persona aprende Matemáticas, la mayoría de estas son realizadas principalmente en las aulas y los resultados obtenidos son difundidos cada vez a más personas involucradas con la Matemática Educativa, esta serie de actividades han formado una gran sociedad con un fin común, mejorar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los medios preferenciales para la difusión de resultados de las investigaciones han sido la publicación de revistas especializadas y la organización de congresos, todas estas actividades han sido posibles gracias al interés creciente de la sociedad por la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

La Matemática Educativa ha reclamado su lugar dentro de las disciplinas científicas, y ha logrado consolidarse. Como un factor importante y relevante, nuestra disciplina tiene como objeto de estudio el sistema didáctico, formado por la triada alumno-saber-profesor.

Los productos obtenidos de la investigación en este campo de estudio pretenden incidir positivamente en el proceso enseñanza-aprendizaje, consideramos que es un camino por el que debemos transitar. Las investigaciones realizadas lo han demostrado, el aprendizaje de las matemáticas no radica solo en enseñar procesos, o bien, una simple transferencia de conceptos. El sistema didáctico formado por: el alumno, el profesor y el conocimiento a enseñar; es mucho más complejo e interesante.

El trabajo que presentamos, tiene cobijo en esta disciplina, y nos hemos permitido utilizar una de sus teorías. El problema que nos ocupa, nace como la mayoría de las investigaciones en matemática educativa, en el aula. Cuando un profesor observa los comportamientos, procesos, inquietudes, y principalmente los errores de sus alumnos al manejar un conocimiento matemático. Esto es compatible con lo que menciona Adda (1987) "*La mayoría de los problemas llamados de didáctica de las matemáticas nacen de la práctica".*

Algo similar a la forma de cómo Freudenthal (1981) plantea su primer problema: "¿Por qué Juanito no puede sumar?". También nosotros nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Por qué a los alumnos se les dificulta utilizar el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática con raíces no enteras? Conscientes de que aprender matemáticas no es lo mismo que aprender cómo aprender matemáticas, tal y como menciona Dubinsky (2000) en su viaje personal, nos propusimos mejorar la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, principalmente en la utilización del método de factorización para su solución.

La investigación realizada puede considerarse dentro de una de las líneas de investigación, desarrollada dentro del programa de Matemática Educativa de CICATA del IPN: *"Innovación para la enseñanza de las matemáticas"*. Compartiendo ideas con este grupo de profesores e investigadores, nos hemos propuesto investigar los diferentes escenarios aunados a la ecuación cuadrática, por ejemplo, de tipo algebraico, geométrico, físico. Esto nos permitirá obtener elementos para el diseño de una secuencia de clase, donde el alumno pueda transitar por situaciones problema, que le den la oportunidad de vivir y cuestionar el objeto matemático.

En este sentido pensamos que es importante utilizar diferentes situaciones que involucren este conocimiento, creemos que existen diferentes medios para adquirir un conocimiento y consideramos que involucrar más de uno enriquece el aprendizaje significativo, y aunque el proceso algebraico a tenido prioridad en los últimos años, es bien sabido que por sí solo no es suficiente, por lo menos a lo que se refiere a la enseñanza-aprendizaje.

Claro, esto no quiere decir que debamos dejar a un lado lo algorítmico, de lo que se trata es que el alumno interactué con los diferentes lenguajes matemáticos, dándose la oportunidad de formarse criterios y construir su propio sentir matemático.

Esperamos lograr con este trabajo resultados positivos, entendiendo como resultado, la respuesta a nuestra pregunta. Generalmente una interrogante va acompañada de alguna dificultad, en este sentido, nuestra labor consiste en buscar las formas que nos permitan salvar el principal obstáculo y por el cual gira esta investigación: **¿Se puede utilizar la factorización como método general en la solución de ecuaciones cuadráticas?** , una vez contestada esta pregunta y con la ayuda de la Ingeniería Didáctica, utilizaremos este conocimiento en el diseño de una secuencia didáctica que logre los objetivos de nuestra investigación.

Objetivo general

Buscar la manera de generalizar el método de factorización en la solución de ecuaciones cuadráticas, con el fin de esclarecer algunas de sus formas, usos e interpretaciones de las ecuaciones, y así, dotar de elementos constructores para el diseño una secuencia didáctica, que permita a los alumnos apropiarse de este conocimiento matemático.

Objetivos particulares

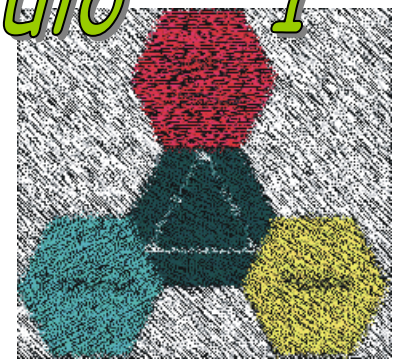
- ***Robustecer el método de factorización, en la solución de ecuaciones cuadráticas.***

- ***Estudiar la interpretación: Geométrica, numérica, algebraica y física de las ecuaciones cuadráticas.***

- ***Diseñar una secuencia didáctica que permita construir el concepto de solución de una ecuación cuadrática utilizando el método de factorización.***

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Capítulo 1



Ingeniería Didáctica,

nuestra metodología de investigación.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Dada la importancia de contar con una fundamentación teórica para nuestra investigación, hemos elegido a la ingeniería didáctica como metodología, por dos razones importantes; una, por los resultados con los que ha contribuido en didáctica de las matemáticas; y la segunda, porque creemos en las ideas que la sustentan. Por lo que dedicaremos este primer capítulo, para comentar un poco sobre las concepciones de esta metodología y las ideas en las cuales se edifica.

Según Artigue (1995) *el término Ingeniería Didáctica, surge a principio de los años ochenta del siglo pasado, dentro de la didáctica francesa de la matemática. El nombre se debe a una comparación con el trabajo de un Ingeniero, pues además de tomar en cuenta resultados científicos, debe tomar decisiones y controlar los distintos componentes del proceso enseñanza-aprendizaje.*

Se denomina ingeniería didáctica, a una forma de trabajo didáctico equiparable al trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo. Al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.

Douday (1995), *una ingeniería didáctica es un conjunto de secuencias de clase, diseñadas y articuladas coherentemente por un "profesor-ingeniero", para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo de alumnos específico,* (Ferrari, 2001, p. 42).

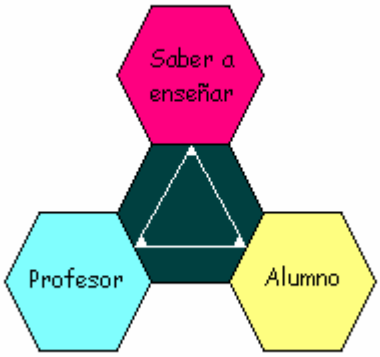
Es importante aclarar que el término de Ingeniería didáctica, es utilizado en dos sentidos dentro de la matemática educativa: por un lado como metodología de investigación y por otro como producción de situaciones de enseñanza-aprendizaje. Y en vista de que nosotros la ocuparemos en ambos sentidos, creemos conveniente hablar de ellas separadamente.

A) Ingeniería didáctica como metodología de investigación

La Ingeniería Didáctica es un instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que nos brinda la posibilidad de desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, pues intenta captar la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje en situación escolar. Como metodología de investigación, se caracteriza fundamentalmente porque sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza; y también porque se ubica en los registros de los estudios de caso y cuya validación es interna, es decir, basada entre la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).

Sistema Didáctico

Es conveniente mencionar que el objeto de estudio de nuestra disciplina (Matemática Educativa), es el **sistema didáctico,** formado por alumno-profesor-saber (ver figura).



Montiel (2002) comenta: *Saber matemáticas y enseñar un conocimiento matemático concreto son fenómenos que giran alrededor de lo que Chevallard (1991) ha llamado* ***sistema didáctico,*** *un triángulo cuyas interacciones se deben mirar de forma sistémica para explicar los acontecimientos que se producen en el proceso de enseñanza y aprendizaje.*

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Fases de una Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica, como metodología de investigación consta de cuatro fases:

- *Análisis preliminar*
- *Diseño de una situación didáctica y su análisis a priori*
- *Experimentación*
- *Análisis a posteriori y validación*

Es importante señalar que en este trabajo no se trabajo completamente la metodología, sólo se han desarrollado las dos primeras fases.

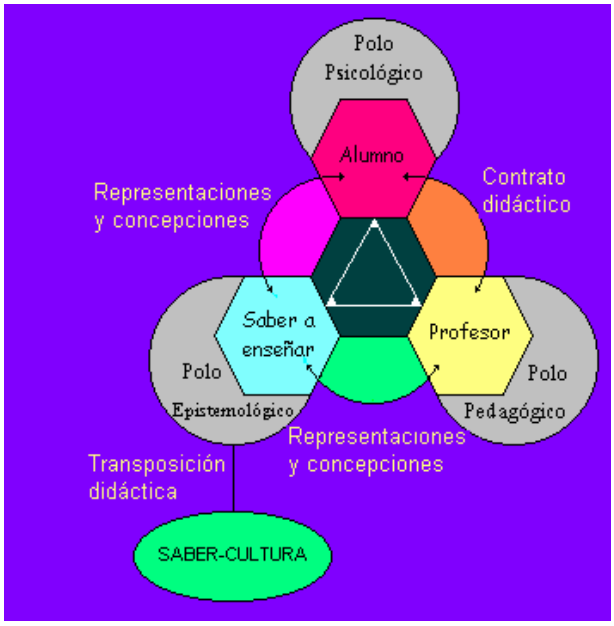
La siguiente interpretación de cada una de las fases, fue tomada de Artigue (1995), distingue tres componentes ligadas a los procesos de enseñanza-aprendizaje.

- **Dimensión epistemológica** (Polo epistemológico). Asociada a las características del saber matemático puesto en funcionamiento.

- **Dimensión cognitiva** (Polo Psicológico). Asociada a las características cognitivas de los alumnos a los qué se dirige la enseñanza.

- **Dimensión didáctica** (Polo Pedagógico). Asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Esta clasificación armoniza con nuestro objeto de estudio, la tríada: alumno-profesor-saber. Así tenemos el siguiente esquema representativo del funcionamiento del sistema didáctico.



Algo similar menciona Ferrari (2001, p. 62)

Análisis preliminar

En el análisis preliminar, luego de establecer los objetivos específicos de la investigación, se analizan y determinan, desde una aproximación sistémica, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos. Para ello, se debe tomar en cuenta:

- El conocimiento matemático que se desarrolla en la escuela así como su devenir en saber, esto en la denominada ***componente epistemológica***.

- Las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y los obstáculos que deben enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego por la secuencia implementada, en la llamada ***componente cognitiva.***

- La enseñanza tradicional y sus efectos, es decir, cómo vive el contenido matemático al seno de la escuela, dentro de la ***componente didáctica***.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Análisis a priori y diseño de la situación didáctica

En esta fase de la Ingeniería Didáctica se eligen las variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. También en esta instancia se establecen las hipótesis de trabajo, es decir qué se espera de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, qué avances se consideran dentro de las expectativas, qué errores se perciben persistentes, qué mecanismos se prevé serán utilizados, en fin, todo lo inherente a las hipótesis de trabajo y expectativas del investigador. Es, en consecuencia, una fase prescriptiva como predictiva.

Una vez determinadas las variables didácticas y establecido el objetivo, es decir, caracterizado el obstáculo que se desea confrontar, se pasa al diseño de la situación didáctica en sí misma, la cual debe crear un modo propicio para que el alumno acepte la "invitación" al juego, se sienta desafiado a apropiarse del saber puesto sobre la mesa.

Experimentación

En esta etapa se procede a la "puesta en escena" de la situación diseñada, es decir, se le implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Los medios de perpetuar los sucesos que se desarrollen, para su posterior análisis quedan bajo la responsabilidad y elección del investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

Análisis a posteriori y validación

El análisis *a posteriori* consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis *a priori* y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuanto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

De esta confrontación entre los análisis *a priori* y *a posteriori* surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma. Esta validación, a diferencia de otros acercamientos tales como los de carácter cuantitativo para los cuales el éxito se mide en tanto el grupo experimental logra mejores resultados que el grupo de control, es decir, entre los resultados externos a la situación planteada en sí misma, en la Ingeniería Didáctica, la validación es interna, pues se confrontan dos fases de la misma, lo esperado y lo que se obtuvo en realidad, entre las conjeturas y expectativas que fueron explicitadas en el análisis *a priori* y los resultados analizados y categorizados en el análisis *a posteriori.*

De las consideraciones realizadas, y del hecho que la validación de una Ingeniería Didáctica surge de la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*, se deducen dos aspectos relevantes de ésta, el estricto control que debe ejercerse en la experimentación y la precisión del análisis preliminar.

B) Ingeniería didáctica como producción de secuencias didácticas

La ingeniería didáctica a su vez, es considerada como una de las teorías que permite diseñar secuencias de clase, donde el alumno construye su propio conocimiento, interactuando con un objeto matemático. Como menciona (Cantoral, et al., 2000, p. 41) en su libro titulado: "Desarrollo del pensamiento matemático". "*Así pues, esta teoría de situaciones permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase concebidas por el profesor con el fin de disponer de un medio para realizar un cierto proyecto de aprendizaje".*

Por otro lado Ferrari (2001, p. 42) Menciona: *"Dos son las teorías que sustentan a la Ingeniería Didáctica, a saber, la teoría de transposición didáctica de Chevallard, y la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Estas teorías surgen en una necesidad de crear acercamientos teóricos menos simplistas que los proporcionados por otras disciplinas como la pedagogía, la psicología, la sociología, la matemática misma, integrando los aportes de todas ellas en un esfuerzo por crear explicaciones propias y por tanto generar una disciplina que atienda la problemática particular que produce el tratamiento de entes matemáticos en un ambiente áulico y los fenómenos inherentes a esta actividad."*

Sobre la génesis del conocimiento

Brousseau nos habla de una "génesis ficticia" de los saberes puestos en juego en el aula con el propósito de facilitar su enseñanza, en la cual se aíslan las nociones y propiedades de las actividades que les dieron origen, sentido, motivo y utilización. Considera a su vez, la necesidad de retornar e incorporar en el discurso escolar, la historia de los saberes, esto es, indagar sobre las dificultades y preguntas que provocaron su aparición como conceptos necesarios y su evolución y uso en nuevos problemas. No deseamos decir con esto que se incorpore el desarrollo histórico de los conocimientos al salón de clase, sino que los saberes adquieran nuevos significados o recuperen sus significantes iniciales, desde esta visión en la cual se los adopta como entes socioculturales. (Ferrari, 2001, p. 43).

Bajo esta perspectiva pensamos que la historia del conocimiento a enseñar es muy importante, en ella podremos encontrar: las necesidades que originaron tal conocimiento, los significados que han tenido en su devenir histórico, la utilización que ha tenido en las diferentes épocas. Precisamente este contexto nos puede brindar elementos para el diseño de una secuencia didáctica, donde los alumnos puedan darle sentido al saber a enseñar.

Una persona no se hace futbolista por el solo hecho de conocer el reglamento de este deporte, si…, no tiene la oportunidad de pegarle al balón, y ¡fallar! en varios intentos, difícilmente manejara habilidades que le permitan triunfar. Por lo que una de nuestras metas es recuperar significados de antaño y encontrar nuevos significados, que nos permitan dotar de un medio apropiado, donde los alumnos puedan incidir y cuestionar el conocimiento en el que están involucrados.

Transposición didáctica

Según Chevallard (1995), el conocimiento generado por la élite de matemáticos, no llega al aula tal y como es producido, sino que sufre un proceso que ha denominado transposición didáctica. Siguiendo sus ideas, el "saber erudito" pasa a ser un "saber a enseñar", luego de ser validado por una "nooesfera" que le confiere el status de conocimiento a ser abordado en la escuela. No se trata de una elementarización burda del conocimiento, ni de una mera simplificación del mismo, sino por el contrario, el producto de los ajustes didácticos que lo hace diferir del conocimiento de origen.

A su vez, para Cantoral (1995), la palabra transponer significa poner una cosa más allá en un sitio distinto del lugar que ocupaba. Por tanto, el término transposición didáctica implica "transponer" un saber al ámbito escolar. Sin embargo, los objetos destinados para ser enseñados no pueden ser analizados como simplificaciones de objetos más complejos producidos por la sociedad científica, sino como el resultado de ajustes didácticos, de una construcción a propósito de su destino, lo cual les hace diferir de los saberes de referencia, (Ferrari, 2001, p. 44).

Debemos reconocer que la transposición didáctica es inevitable, es la propia sociedad la que impone las prácticas educativas, luego entonces, el conocimiento que se enseña en las aulas, de alguna forma, cambia su contexto en el cual se origino, está descontextualizado, no obstante, esto es benéfico, es lo que nos permite avanzar como sociedad humana. Cuando un conocimiento se convierte en un conocimiento a enseñar es porque la sociedad así lo reclama, consiente de que es conveniente enseñarlo, claro que esta decisión en la mayoría de los casos tiene un propósito de utilidad.

En didáctica de las matemáticas, se plantea que un solo significado no es suficiente para que los alumnos puedan entender el concepto. Pensamos que se necesitan una serie de elementos, uno de los cuales puede ser la propia epistemología del conocimiento. Es importante que dejemos que nuestros alumnos puedan vivir experiencia matemáticas, donde puedan significar y resignificar el conocimiento que están adquiriendo.

Teoría de Situaciones Didácticas

Esta teoría es fundamental dentro de la Ingeniería Didáctica, nos permite diseñar secuencias de clase, donde podemos tener un cierto control del sistema didáctico, por ende, haremos uso de ella en nuestro último capítulo.

Guy Brousseau, desarrolla su teoría de las situaciones didácticas reformulando ciertas ideas generadas por Piaget, y que éste plasmara en su teoría de la equilibración, con lo que respecta a la evolución y apropiación de conocimientos por parte de un sujeto. Considera que un individuo aprende en la medida que construye o resignifica un concepto, incorporándolo a su estructura cognitiva.

Una parte que nos parece interesante y que retomaremos en nuestro trabajo, es cuando plantea que; una noción no es aprendida, sino se relaciona con otras que han sido previamente adquiridas; y que además, la noción debe ser útil en la solución de problemas. En sus palabras: "*una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción…"* (Brousseau, 1983).

En el siguiente párrafo, podemos distinguir la diferencia entre lo expuesto por Piaget, y la forma o sentido que le da Brousseau,

"Brousseau, por su parte, replantea las ideas piagetianas pues considera que estudiar la génesis espontánea de los conocimientos no responde completamente a los fenómenos acaecidos en el salón de clases, donde impera una génesis ficticia provocada para la formación de los mismos. Se considera entonces, que el conocimiento es una construcción personal, en tanto que el saber proviene de una elaboración cultural, siendo motivo de interés la génesis, en cuanto a su historia, del saber (Ferrari, 2001, p. 46).

En el párrafo anterior se menciona de una génesis ficticia, entonces, la intención no es que los alumnos transiten por los mismos pasos; de alguna persona, que haya tenido la necesidad de aprender cierto conocimiento, en un cierto tiempo, respondiendo a una cierta necesidad y bajo un contexto social alejado a nuestra comunidad estudiantil; más bien, se trata de que nuestros alumnos tengan un conocimiento personal, que vivan sus propios cuestionamientos, con las ventajas que brinda el tener cierta herencia matemática.

Siempre será de gran utilidad para nuestro quehacer tener un acercamiento teórico; del cómo aprenden las personas ideas matemáticas. Y es una de las consideraciones importantes que se deben tomar en cuenta al diseñar una secuencia didáctica. En ese sentido compartimos las ideas de Brousseau: "*el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas que son la prueba del aprendizaje*" (Brousseau, 1986, p. 48).

Para lograr que el alumno entre en un proceso de desequilibrio (los conocimientos previos no son suficientes) y pueda adaptarse satisfactoriamente al medio (solucionar el problema con sus restricciones), **es necesario que el profesor le asigne un problema que le permita entrar en un proceso incierto, donde él tendrá que encontrar la respuesta, utilizando sus conocimientos anteriores y descubriendo el nuevo conocimiento.** Es importante que el alumno observe que el conocimiento que está adquiriendo es el más idóneo para solucionar el problema, de lo contrario se perderá el interés de obtenerlo.

Por lo que consideramos que un factor importante en el aprendizaje de un concepto matemático, es asignar un problema que tengan un cierto contenido didáctico, que le pueda interesar al alumno, y que además este en juego el conocimiento por adquirir. El acto de por el cual un profesor logra que el alumno acepte la responsabilidad de una situación aprendizaje es conocido dentro de la Teoría de las situaciones didácticas como "devolución".

"*Devolución es el acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de tal transferencia*" (Brousseau, 1988, p. 325).

También es importante que en el diseño de una situación de enseñanza-aprendizaje, el conocimiento que está en juego, tenga utilidad y sentido en el entorno cultural del alumno, además se le brinde la libertad de aprender lo que le pueda ser útil.

*El docente debe proponerle al alumno, una situación que le permita dotar al conocimiento que se desea impartir, de un significado propio y plausible de serle útil y de que reconozca su utilidad en la resolución de otro problema. La situación planteada debe tener por objeto que el alumno interactúe con el saber, es decir, que actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le sean útiles. (*Brousseau, 1986)

Lezama (1999, p. 4), menciona: "*Para que los conocimientos aparezcan el profesor debe elegir con todo cuidado problemas que sean posibles que el alumno acepte y que lo pongan en acción, es decir, a explorar, a conjeturar, a hablar, a reflexionar de tal manera que vayan evolucionando sus ideas y haciendo uso de sus propios recursos. El profesor no propone los conocimientos, sino que permite que éstos sean producidos por el alumno y vigila que sean los que el profesor quiere ver aparecer. El alumno sabe que el problema planteado ha sido escogido para hacerle adquirir un nuevo conocimiento.*"

Se considera que el alumno se ha apropiado del conocimiento, cuando es capaz de utilizarlo fuera del contexto de enseñanza, y en momentos donde no haya indicación intencional, denominándose a éstas actividades, "situaciones no-didácticas". Brousseau, en su teoría, define: situaciones no-didácticas, como aquellas carentes de intencionalidad para enseñar; es decir, esta diferenciándolas de las "situaciones didácticas", que son las que se entablan entre profesor y alumnos alrededor del saber a enseñar, dentro del aula. En ellas se exhibe la intención de enseñar y aprender. Por último, define "situaciones a-didácticas", como aquellas en las cuales el profesor se aparta del escenario dejando que el alumno viva esta situación como investigador de un problema matemático, independiente del sistema educativo (Margolinas, 1993).

***El alumno es consciente de que el problema que se le plantea tiene la intención de que aprenda un determinado conocimiento**, al que debe construir respondiendo a la lógica interna de la situación propuesta por el docente* (Ferrari, 2001, p. 49).

Situaciones adidácticas

Existen diferentes tipos de situaciones a-didácticas, según Brousseau; que inducen a los alumnos a transitar por diversas etapas propias de la actividad matemática: la acción, la formulación y la validación, así como la de institucionalización que quedó definida tiempo después.

La clasificación que tomaremos es la presentada por (Cantoral et al., 2000, p. 43). En esta Obra, se menciona:

"Otro factor que facilita el aspecto de las situaciones didácticas es su clasificación. Se distinguen, entre las situaciones que se producen por su estudio experimental, cuatro tipos cuya secuencia en los procesos didácticos que organizan es la siguiente:"

Nota. Cabe aclarar que las situaciones didácticas a las que se refiere son a las situaciones a-didácticas, donde el profesor esta como espectador. Posteriormente propone la siguiente clasificación

1) ***Situación a-didáctica de acción***: En las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.

2) ***Situación a-didáctica de formulación:*** Cuyo objetivo es la comunicación en información entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

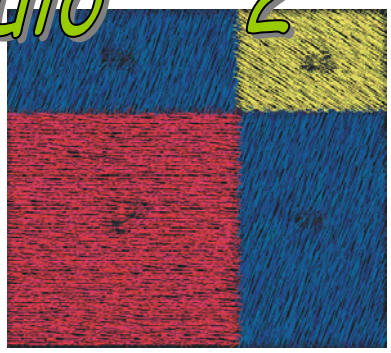
3) ***Situación a-didáctica de validación***: En las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de lo que dicen es cierto; hay que explicar que necesariamente debe ser así.

4) ***Situación de institucionalización***: destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Con respecto a la situación de Institucionalización. En ella se produce el reconocimiento del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del profesor, lo cual es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Capítulo 2



Sobre la componente Didáctica

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Análisis del programa de estudios

Se puede considerar que la ecuación cuadrática es uno de los temas algebraicos fundamentales, conocimiento que ha podido sobrevivir durante siglos y que es considerado por los programas de estudio actuales. Su importancia radica, en la gran utilización dentro de las matemáticas mismas, así, como en otras disciplinas, por ejemplo: en al análisis de funciones cúbicas, problemas de máximos y mínimos, estudio de la parábola, modelación de la caída libre, el análisis del tiro parabólico, etc.

El Programa de estudios implementado en las escuelas de nivel medio superior del Instituto Politécnico Nacional no es la excepción. La primera materia matemática impartida en este nivel lleva el nombre de "Álgebra" (primer semestre), la cual es considerada como una asignatura de formación general y básica. Es tal la importancia del tema de ecuación cuadrática, que en forma implícita el programa de álgebra del 2006 lo retoma en su Fundamentación, veamos:

<table>
<tr><th colspan="2">FUNDAMENTACIÓN DEL PROGRAMA DE ESTUDIOS</th></tr>
<tr><td>VISIÓN DE LA ASIGNATURA O MÓDULO:
El Álgebra contribuirá a que los educandos pongan en práctica los conocimientos adquiridos en el ejercicio del pensamiento y espíritu crítico y que a través del razonamiento matemático resuelva problemas, con el fin de que puedan participar en forma consciente en el mejoramiento de la naturaleza y el desarrollo humano</td><td>MISIÓN DE LA ASIGNATURA O MÓDULO:
El Álgebra en el Instituto Politécnico Nacional a Nivel Medio Superior, fortalece y desarrolla capacidades, habilidades y destrezas, de algebra de nuestros estudiantes, a través de un programa integral con apoyo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación; dando respuesta a las necesidades de la Sociedad, permitiendo al estudiante continuar con estudios de niveles superiores en cualquiera de las áreas del conocimiento, con valores y actitudes que se fomentan a través del aprendizaje significativo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción detallada: ÁLGEBRA
Reconoce y aplica las propiedades de los números en la solución de ejercicios, conoce y maneja estrategias para la resolución de problemas, reconoce y aplica los productos notables y las factorizaciones para resolver las ecuaciones, que involucran un proceso que permita reducir una ecuación dada a otra mas simple hasta alcanzar su solución, desarrolla su capacidad de transitar por distintos registros de representar verbal, tabular, algebraico y grafico, resuelve problemas que dan a lugar a una ecuación de primer grado, segundo grado o un sistema de ecuaciones, así como tener el fundamento para desarrollo posterior de conceptos y métodos algebraicos.</td></tr>
</table>

Otra consideración importante es que el Programa de estudios hace hincapié en la utilidad del conocimiento en la resolución de problemas, le da importancia a la aplicación, esto coincide con las teorías antes planteadas, al alumno le interesará un saber y mejorará su aprendizaje de él, si es que le encuentra utilidad.

Más adelante el programa dedica la unidad cuatro al tema de ecuaciones y funciones cuadráticas en forma más explícita, una vez más se puede ver la importancia de este conocimiento, una unidad completa no se le dedica a un conocimiento sin trascendencia.

UNIDAD IV: ECUACIONES Y FUNCIONES CUADRÁTICAS			
OBJETIVO DE LA UNIDAD: El estudiante conocerá las características y propiedades de las **ecuaciones cuadráticas**, mediante su construcción analítica y gráfica; además resuelve problemas de la vida cotidiana y las ciencias que involucren ecuaciones cuadráticas.			
RESULTADO DE APRENDIZAJE PROPUESTO (RAP) 1: Reconoce las características y propiedades de la ecuación de segundo grado, mediante su construcción analítica y gráfica.		**Tiempo estimado para obtener el RAP**	**5**

ACTIVIDADES		**RECURSOS DIDÁCTICOS**	
DE APRENDIZAJE	**DE ENSEÑANZA**	**REFERENCIAS DOCUMENTALES**	**MEDIOS Y MATERIALES EDUCATIVOS DE APOYO**
• Realiza un trabajo de investigación, referente a las características y propiedades de las ecuaciones cuadráticas. • Identifica la forma general de la función cuadrática: $F=\{(x,y)/y = ax^2+ bx + c,$ con $a \neq 0\}$. • Reconoce las características y propiedades de las ecuaciones cuadráticas a partir de su expresión algebraica. • Construye gráficas de ecuaciones de segundo grado en un sistema de ejes cartesianos por tabulación. • Utilizando un graficador, se analizaran las variaciones de la función de acuerdo al cambio en los valores de cada coeficiente de la ecuación general de segundo grado y/o generalización. • Utiliza los conceptos de función creciente y decreciente para determinar el punto máximo y/o mínimo de la misma, así como el dominio y rango.	• A partir de la presentación de diversos tipos de ejercicios, ejemplifica las características y propiedades graficas y analíticas de las ecuaciones de segundo grado. • Utiliza un sistema de ejes cartesianos para graficar diversas tipos de ecuaciones cuadráticas y muestra sus características como son: función creciente y decreciente, máximo, mínimo, vértice, ecuación de su eje de simetría, intersecciones con los ejes cartesianos	*Álgebra con aplicaciones*, Elizabeth D. Phillips *Álgebra y Trigonometría* Smith Stanley A.	• Pizarrón • Marcadores • Software didáctico (graficadores). • Calculadoras graficadoras. • Calculadora • Internet

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

<table>
<tr><td colspan="2">RESULTADO DE APRENDIZAJE PROPUESTO (RAP) 2:
Resuelve problemas de la vida cotidiana, geométricos y científicos que involucren ecuaciones y funciones cuadráticas.</td><td>Tiempo estimado para obtener el RAP</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTIVIDADES</td><td colspan="2">RECURSOS DIDÁCTICOS</td></tr>
<tr><td>DE APRENDIZAJE</td><td>DE ENSEÑANZA</td><td>REFERENCIAS DOCUMENTALES</td><td>MEDIOS Y MATERIALES EDUCATIVOS DE APOYO</td></tr>
<tr><td>• Realiza un trabajo de investigación referente a los diferentes métodos que se aplican en la resolución de ecuaciones de segundo grado.
• Identifica la ecuación cuadrática como resultado de igualar a cero a la función cuadrática.
• Resuelve ecuaciones cuadráticas por factorización y comprueba su solución.
• Resuelve ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto y comprueba su solución.
• Deduce la fórmula general.
• Analiza la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática con base al discriminante.
• Traza e interpreta la grafica de una ecuación cuadrática y determina los puntos de intersección con el eje X, y el vértice.
• Resolver problemas de la vida cotidiana, geométricos y científicos, que involucren ecuaciones de segundo grado.
• Una vez que se han resuelto los problemas, construir la grafica de manera intuitiva para interpretar el comportamiento.
• Realiza una actividad grupal para explicar el comportamiento de una función de segundo grado que resulte de algún tema de investigación de su área.</td><td>• A partir de la presentación de diversos tipos de ejercicios, ejemplifica problemas de la vida cotidiana, estableciendo una ecuación cuadrática, la cual resuelve por alguno de los métodos que existen para la resolución de este tipo de ecuaciones (factorización, completando Trinomio Cuadrado Perfecto, formula general)
• A partir de la presentación de diversos tipos de ejercicios, ejemplifica problemas de la vida cotidiana, estableciendo una función cuadrática cuyo objetivo principal será la interpretación de la gráfica.</td><td>Álgebra con aplicaciones, Elizabeth D. Phillips
Álgebra y Trigonometría Smith Stanley A.</td><td>• Pizarrón
• Marcadores
• Software didáctico
• Calculadoras graficadoras.
• Calculadora
• Internet</td></tr>
</table>

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Consideramos que el programa antes analizado ya tiene un enfoque constructivista, se puede observar que hace diferencia entre actividades de enseñanza y actividades de aprendizaje, es decir actividades que realizará el profesor y las que realizará el alumno, no obstante, consideramos que le hace falta ahondar en precisar las actividades y las relaciones que se presentaran en la triada alumno-saber-profesor.

También se puede observar que dentro de los objetivos de la unidad, es que el estudiante conozca y aplique las ecuaciones cuadráticas para resolver problemas, además propone que utilice tanto su construcción analítica como gráfica. En este sentido, entendemos que se desea que la enseñanza-aprendizaje de este conocimiento se genere a través de diferentes contextos, con la intención de generar aprendizajes significativos. Esto armoniza con nuestras intenciones.

Sin embargo, aunque este programa propone actividades de aprendizaje y de enseñanza, que de alguna forma coinciden con el sentir de este trabajo., aún no tiene claridad en el diseño de estas actividades, ni en la metodología que se deberá utilizar, más aún, no explica ¿Cuáles serán las habilidades matemáticas que el alumno obtendrá al realizar cierta actividad?. Desafortunadamente la realidad aún está alejada de las buenas intenciones, pero, tenemos la certeza que los cambios se están dando.

En este programa el **saber a enseñar** y los **algoritmos** se mencionan dentro de las actividades de aprendizaje propuestas, denominadas con las siglas "RAP" (**R**esultados de **A**prendizaje **P**ropuestos). En las actividades del RAP2 se proponen métodos para la solución de ecuaciones cuadráticas, con el siguiente orden.

Actividad de aprendizaje	**Método de solución (ecuación cuadrática)**
Actividad 3. Resuelve ecuaciones cuadráticas por factorización y comprueba su solución	factorización
Actividad 4. Resuelve ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto y comprueba sus solución	Completando el trinomio cuadrado perfecto
Actividad 5. Deduce la fórmula general	Fórmula general
Actividad 7. Traza e interpreta la gráfica de una ecuación cuadrática y determina los puntos de intersección con el eje X, y el vértice	Gráfico

Si observamos el cuadro anterior, podremos darnos cuenta que el primer método propuesto es el de factorización, como una opción para la solución de una ecuación cuadrática **(el método que ocupa nuestro interés)**.

Pero, ¿Qué pasa?, volvamos a observar el cuadro anterior, las actividades propuestas están enmarcadas, no se puede encontrar la situación problema a la cual el alumno deba enfrentarse, simplemente son procesos incuestionables, caminos ya terminados, ante esta situación el alumno difícilmente desarrollará habilidades matemáticas importantes, tales como: razonamiento lógico, análisis, predicción, etc.

Ahora bien, durante un curso de álgebra del Nivel Medio Superior, es común tratar con diferentes métodos de solución de ecuaciones cuadráticas, los más utilizados en el ambiente escolar son:

a) Factorización
b) Completando el trinomio cuadrado perfecto
c) Fórmula general (comúnmente deducida del método anterior)
d) Gráfico

Esto concuerda con lo que ya ha mencionado Agüero;

"Al presentar la discusión para resolver ecuaciones cuadráticas, aparecen varios métodos: algebraicos, geométricos o combinación de ambos. De los métodos algebraicos, el de "completar cuadrados" es el más general, ya que conduce a obtener la fórmula general para resolverlas" (Agüero, 2003, p. 61)

Algunas consideraciones importantes que se toman en cuenta en el curso de álgebra, (pero, en la mayoría de los casos sólo en el papel), son las habilidades del pensamiento. Tales como: las perceptuales (observación y relaciones espaciales), de comunicación (oral, escrita y gráfica) y las de elaboración de conjeturas, argumentación, abstracción y generalización. Así que en el diseño de la secuencia didáctica, buscaremos reforzar algunas de estas habilidades.

También es conveniente considerar que los conocimientos incluidos en el curso de "Algebra", son requisitos indispensables para cursar las asignaturas de; Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Probabilidad y Estadística. Al mismo tiempo también son necesarios para poder entender y solucionar problemas relacionados con: Computación Básica II, Dibujo Técnico II, Física I, Química I, Física II, Química II, Biología y aquellas relacionadas con el área tecnológica.

Se menciona que el enfoque metodológico del curso se fundamenta tanto en la concepción del docente como un sujeto facilitador del aprendizaje, a través de la planeación y organización de actividades pertinentes que conduzcan al logro de aprendizajes significativos, así como en la concepción de un alumno capaz, en pleno desarrollo, potencialmente reflexivo y creativo, que aprende a partir de las actividades y experiencias desarrolladas en continua interacción con el objeto de conocimiento, bajo la supervisión y asesoría del docente.

En este sentido, el enfoque didáctico incorpora como método la problematización continua, la formulación de conjeturas y la revisión sistemática de los conocimientos adquiridos, utilizando técnicas grupales para el análisis y la discusión, así como técnicas expositivas y de indagación, apoyadas con recursos audiovisuales y tecnológicos (computadora, calculadora, etc.), procurando que la relación entre el alumno y el objeto favorezca un aprendizaje significativo.

Trataremos, entonces de favorecer ese aprendizaje significativo, pero, ¿Cómo podremos lograrlo? Esta será una pregunta que tendremos presente en nuestras propuestas.

Una parte que nos llama la atención, es que el programa de estudios contempla como primera actividad, resolver una ecuación cuadrática utilizando el método de factorización, podemos deducir que el programa le da cierta prioridad a este método, por lo menos en el orden de aparición.

En la actividad 5 se menciona que el alumno deducirá la fórmula general, ¿será posible que los alumnos la deduzcan?, ¿qué significado le podrán dar a este proceso?, ¿qué tipo de habilidades están desarrollando?

Otra fuente importante en nuestra investigación, son los libros de texto diseñados para la enseñanza. A continuación presentamos la visión de los libros de texto contemporáneos con lo que respecta a la solución de una ecuación cuadrática y temas afines.

Análisis de los libros de texto

Realicemos un acercamiento en la explicación que dan los libros de texto de álgebra, para dar solución a una ecuación cuadrática utilizando el método de factorización, tratando de estudiar sus diferentes comportamientos y aparentes limitaciones.

Al igual que en el Programa de estudios, los libros de texto, de diferentes autores, inician con el método de factorización para darle solución a una ecuación cuadrática, este orden se puede observar incluso en el índice de contenidos. Pero, este método sólo es utilizado cuando se tienen raíces enteras, es decir que la preferencia sólo es transitoria. **Una vez que se presenta una ecuación cuadrática con raíces grandes, racionales, irracionales o imaginarias, el método es desplazado, ya sea por el método de completar el trinomio o el de la fórmula general.**

Entonces, desde nuestra perspectiva, el método tiene ciertas limitaciones, limitaciones supuestas que consideramos se pueden superar. Esto trae la tradición de que las personas piensen que el método solo puede ser utilizado para algunos casos, provocándoles la falta de interés, y una vez que conocen métodos generales, como la utilización de la fórmula general, sencillamente lo desplazarán, pero pensamos que con este desplazamiento también se perderán de grandes significados en la solución de una ecuación cuadrática.

Uno de nuestros retos es generalizar el método de factorización en la solución de ecuaciones de segundo grado. En este sentido, se hace necesario estudiar a detalle los lineamientos en que se basa este método.

Factorización de un trinomio cuadrado, Suma y multiplicación de los mismos números

Cuando tratamos de factorizar un trinomio de la forma $x^2 + sx + m$, es común reflexionar sobre la suma de dos números que den el coeficiente **"s"** y que multiplicados den **"m"**. Podemos mencionar que la mayoría de los libros de texto de álgebra analizados comparten esta idea, si acaso, sólo difieren en la forma de transmitirla.

Nota. En la mayoría de los casos tratados en este trabajo, se ha cambiado la notación más común. En lugar de utilizar las letras b y c como coeficientes de un trinomio cuadrado $x^2 + bx + c$, se utilizan las letras s y m, para darle una abreviación a la suma y a la multiplicación de dos números $x^2 + sx + m$.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Veamos algunos textos: Iniciemos con un libro que ha gozado de cierto prestigio en las instituciones educativas mexicanas desde su publicación, el Baldor:

Baldor (2002)

Caso VI trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
Ejemplo
$x^2 + 5x + 6$ El trinomio se descompone en dos binomios

$x^2 + 5x + 6$ (x) (x)

En el primer binomio después de x se pone signo + porque el segundo término del trinomio +5x tiene signo +. En el segundo binomio, después de x, se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo +5x por el signo de +6 y se tiene que + por + da + o sea

$x^2 + 5x + 6$ (x +)(x +)

Ahora, como en estos binomios tenemos signos iguales buscamos dos números que cuya suma sea 5 y cuyo producto sea 6. Esos números son 2y3, luego:

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

Este autor clasifica las expresiones cuadráticas, para cada clasificación da un proceso de solución, ¿en verdad es necesario clasificar las expresiones?, ¿no es posible generalizar? , en fin, el autor lo etiqueta como el caso VI.

En este proceso se sugiere descomponer el trinomio como el producto de dos binomios, por lo que existe la necesidad de conocer dos números, con ciertas relaciones entre ellos. Dos números que sumen cinco y multiplicados produzcan seis. Además describe muy bien los pasos a seguir, pero, lo más que puede lograr una persona al leer este proceso es obtener una habilidad memorística.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Bello (2004)

Factorización de trinomios de la forma x^2+bx+c

Regla de factorización 1 $x^2+(A+B)x+AB=(x+A)(x+B)$ (F1)

$x^2+8x+15$

$$\underbrace{x^2}+\underbrace{(A+B)}x+\underbrace{AB}$$

$x^2+\quad 8x+\quad 15$

Escribimos los posibles factores de 15 y sus sumas correspondientes

Factores	suma
15,1	15
5, 3	8

Los números correctos son A = 5 y B = 3

$x^2+(A+B)x+AB=(x+A)(x+B)$

$x^2+(5+3)x+5\cdot 3=(x+5)(x+3)$

$x^2+8x+15=(x+5)(x+3)$

En la explicación dada por Bello Ignacio es perceptible la importancia de la suma y la multiplicación de los mismos números. En este caso da el ejemplo de los números que suman ocho y multiplicados producen quince, el cinco y el tres. Números que nos permiten encontrar los binomios. Pero nuevamente faltan significados a los procesos, y además sólo se utiliza el lenguaje algebraico, no obstante consideramos que muestra aceptablemente la aparición de la suma y la multiplicación de dos números.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Galdos (1997)

Ejemplo

Las raíces de una ecuación de segundo grado son 6 y 7, determinar la ecuación solución

Suma $6+7=13$

Producto $6\cdot 7=42$

$x^2-13x+42=0$

En Galdos, se pide una ecuación a partir de conocer las soluciones, no obstante, se sigue teniendo la necesidad de la suma y la multiplicación de los mismos números. Los números que suman menos trece y multiplicados producen cuarenta y dos son el menos seis y el menos siete. Es importante observar que los signos de las soluciones son inversos a los que se presentan en la expresión cuadrática igualada a cero.

No es muy común este tipo de problemas en los libros de texto, sin embargo pueden favorecer a comprender como se puede generar una expresión de segundo grado a partir de una multiplicación de dos binomios con un término común.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Stewart (2000)

Factoring $x^2 + 7x + 12$ by Trial and Error

Solution

In this case, **rs** = 12, so **r** and **s** must be factors of 12 and their sum must be 7. We enumerate the trial factors of 12

r	1	2	3
s	12	6	4
sum	13	8	7

Thus, r=3 and s=4 are the factors of 12 whose sum is 7. The factorization is

$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

Este texto brinda algunos significados, y además acepta que la factorización de los trinomios cuadrados se da por prueba y error. Esta situación es la que queremos cambiar, porque se puede cambiar. Nuevamente aparece la condición de suma y multiplicación. Los números que suman siete y multiplicados producen doce son el tres y el cuatro.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Gobran (1990)

Ejemplo: Factorizar $x^2+8x+15$

Solución El primer término de cada factor es $\sqrt{x^2}=x$

Por consiguiente $x^2+8x+15=(x\quad)(x\quad)$

Como el signo del último término (+15) es positivo, los dos números que faltan en los factores deben tener el mismo signo.

Dado que el signo del término central (+8x) es positivo, los dos números faltantes también deben serlo.

$x^2+8x+15=(x+\quad)(x+\quad)$

Buscamos dos números naturales cuyo producto sea 15 y cuya suma sea 8. Los números son 3 y 5

Por lo tanto, $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$

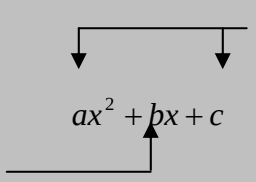
Nuevamente el autor presenta un proceso, un camino que hay que seguir. Pero, reflexionemos lo que menciona en los últimos renglones: "Buscamos **dos números naturales** cuyo producto sea 15 y cuya suma sea 8", ¿Qué pasó?, está limitando la factorización de trinomios cuadrados. Podemos interpretar que sólo podemos utilizar números naturales, que pasa con los trinomios cuadrados que son generados por binomios que incluyen números racionales, o incluso los que incluyen números irracionales.

También en la solución planteada no indica cómo se obtienen los números, debemos de suponer que es por prueba y error. Los números que suman ocho y multiplicados producen quince son el tres y el cinco.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Bello (2004)

Un trinomio de la forma ax^2+bx+c es factorizable si existen dos enteros con producto ac y suma b



Ejemplo factorizar: $2x^2-7x-4$

El número clave para $2x^2-7x-4$ es –8, y –8 tiene dos factores (-8 y 1) cuyo producto es –8 y cuya suma es el coeficiente del término de en medio; es decir, -7. Así $2x^2-7x-4$ es factorizable; aquí tenemos los pasos.

1. Encuentre los números clave $[2\bullet(-4)=-8]$ — $2x^2-7x-4$ — -8

1. Halle los factores del número clave y utilice los apropiados para rescribir el término intermedio — $2x^2-8x+1x-4$

3. Agrupe los términos en pares — $(2x^2-8x)+(1x-4)$; $2x(x-4)+1(x-4)$; $(x-4)(2x+1)$

Por lo tanto, $2x^2-7x-4=(x-4)(2x+1)$

En este ejemplo se puede observar que la suma y la multiplicación de los mismos números cobran importancia, también en los trinomios cuadrados en su forma general. En este caso los números que sumados dan menos siete y multiplicados dan menos ocho son el uno y el menos ocho, también menciona la restricción a números enteros.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Podríamos seguir analizando libros, pero, consideramos que con estos ejemplos se puede entender cuál es el discurso manejado en los textos, que como esperábamos coincide con el discurso escolar.

Debemos tener presente que queremos profundizar en la solución de una ecuación cuadrática, utilizando el método de factorización. Por ese motivo nos iremos introduciendo más a las relaciones existentes entre ellos. Por ejemplo, una ecuación cuadrática está formada por un trinomio cuadrado, entonces, puede existir la necesidad de conocer cómo se puede factorizar el trinomio. Una consideración importante es que los números que hacen posible la factorización de un trinomio cuadrado, son aquellos que quedan relacionados por su suma y su multiplicación.

Para corroborar estas afirmaciones vayamos más atrás, haciéndonos el siguiente cuestionamiento:

¿De dónde se pueden obtener los trinomios cuadrados?

En el ambiente algebraico existe una conexión entre productos notables y factorización de trinomios cuadrados. En este sentido se consideran como procesos inversos, también se puede decir que los productos notables son el inicio, el cual puede producir trinomios cuadrados.

Productos especiales

En la mayoría de los libros de álgebra un tema que cobra importancia antes de tratar con el tema de **factorización** es el de **productos notables**, (también llamados productos especiales) el orden que ocupan en un texto parece acorde a los objetivos buscados, ya que existe una relación directa entre estos dos temas, se podría decir incluso que son procesos contrarios, por ejemplo, Rees (2001) Dice: *"Productos especiales, deberán aprenderse a fin de ahorrar tiempo en las multiplicaciones, y también como preparativo para la factorización"* . Algo similar menciona Bello (2004, p. 290): *"En el capítulo anterior aprendimos a multiplicar polinomios. Ahora aprenderemos como deshacer la multiplicación mediante la factorización".*

Algunos textos, sólo en forma implícita relacionan los productos especiales y la factorización, en ocasiones lo hacen mediante un intercambio a las reglas planteadas, como por ejemplo Stewart (2000), al relacionar el producto especial de **binomios conjugados** y la factorización de una **diferencia de cuadrados,** lo hace utilizando tablas con expresiones intercambiadas, por ejemplo:

En una primera tabla contempla lo siguiente:

"SPECIAL PRODUCT FORMULAS"

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

Mientras que en otra tabla posterior menciona:

"FACTORING FORMULAS"

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$$

Se puede decir entonces justificadamente que los temas de productos notables y factorización están extremadamente ligados y son considerados en los libros de texto. Pensamos que es conveniente que esta relación se tome en cuenta en el aula de clases, pero además podemos obtener más elementos que nos ayuden a comprender y significar la solución de una ecuación cuadrática.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

La suma y la multiplicación de dos números, en el producto especial de dos binomios con un término común

Un producto notable que centra nuestro interés es el producto de dos binomios con un término común, veamos por qué. Analicemos las siguientes propuestas de textos de enseñanza, en cuanto a este producto especial.

Ortiz (2001)

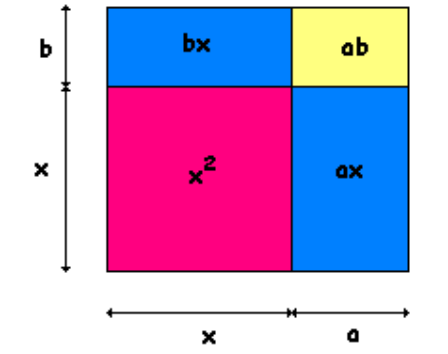
2.6.3 Producto de dos binomios que tienen un término común

Sean x + a y x + b dos binomios que tienen un término común x, en los cuales a y b representan términos algebraicos cualesquiera.

Efectuando la multiplicación en la forma general se tiene:

$$\begin{array}{l} x+a \\ \underline{x+b} \\ x^2+ax \\ \underline{\quad bx+\quad ab} \\ x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

Representación geométrica



Por tanto

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

La forma que pueden tomar los trinomios cuadrados, como producto de dos binomios nos puede brindar, más significados, y diferentes contextos, en este caso además del contexto algebraico aparece el geométrico. Consideramos que todo esto se puede y debe tomar en cuenta en la solución de una ecuación cuadrática. Los trinomios cuadrados los podemos obtener a partir del producto de dos binomios con un término común, y más aún estas relaciones pueden tener una justificación geométrica, como es el manejo de áreas. También observemos que aparece la suma y la multiplicación de los mismos números "a" y "b".

Esta situación de producto de dos binomios con un término común y los trinomios cuadrados, es como ir y regresar, subir y bajar, entrar y salir. Es importante realizar ambas cosas, una justifica y da sentido a la otra.

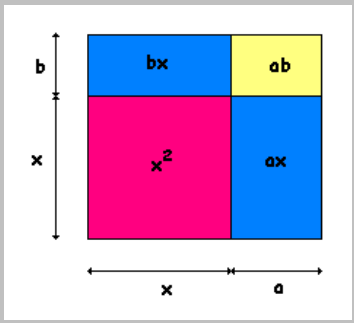
Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Rojano y Filloy (2001)

Capítulo 18 Productos Notables y Factorización

A continuación te presentamos otro problema:

En la figura tenemos un cuadrado que hemos dividido en cuatro partes



Lado de todo el cuadrado = _____ + _____

El área de todo el cuadrado = lado por lado

Área de todo el cuadrado = (_____ + _____) = (_____ + _____)

¿De qué otra manera podemos calcular su área? _____

El área de todo el cuadrado es igual a la suma de las áreas de sus partes, o sea:

Área de todo el cuadrado = _____

Área del cuadrado yado =

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Nuevamente aparece la suma y la multiplicación de los mismos números "a" y "b".

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Rojano y Filloy nos muestran una secuencia guiada, donde el alumno puede descubrir el conocimiento que está en juego. Aquí podemos ver como los autores sacan provecho del contexto geométrico, donde el alumno se le induce a pasar por una secuencia, donde participa, reflexiona, y no solamente absorbe procesos. Consideramos que este contexto también puede ser utilizado en la solución de una ecuación cuadrática.

Carreño y Cruz (2003)

Producto de binomios con término común

Es el cuadrado del término común más el producto del término común por la suma de los términos no comunes y más el producto de los términos no comunes, o sea:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x \bullet (a+b) + ab$$

Creemos que aquí se nos presenta una explicación tediosa de cómo multiplicar dos binomios con un término común, este libro esconde muchas cosas, prácticamente no muestra nada. Evidentemente este libro tendría muchos problemas en el aprendizaje. Hemos notado que los alumnos aborrecen este tipo de recetas, donde sólo se utiliza el lenguaje algebraico.

Sin embargo podemos observar que también aparece la suma y la multiplicación de dos números, en este caso de los términos no comunes, es decir los mismos números "a" y "b"

¿Qué tipo de habilidades podría una persona desarrollar con un texto de estas características?

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Bello (2004)

i) Productos notables

4.7 Productos especiales de polinomios

producto de dos binomios (producto especial 1)

$$(X + A)(X + B) = x^2 + (A + B)x + AB \qquad \text{(PE1)}$$

Por ejemplo, $(x-3)(x+5)$ pueden multiplicarse utilizando PE1 con X=x, A=-3 y B=5. Así

$$(x-3)(x+5) = x^2 + (-3+5)x + (-3)(5)$$

$$= x^2 + 2x - 15$$

Bello Ignacio muestra un ejemplo numérico, asociado a una regla general, en este caso los números sumados y multiplicados son el menos tres y el cinco, o bien A y B. Este libro muestra y significa un poco más la transformación de un producto de binomios a un trinomio cuadrado.

Bueno, hemos visto hasta aquí, cuál es la visión que tienen los programas de estudio así como los libros de texto, sobre la solución de una ecuación cuadrática y temas relacionados. Nos podemos dar cuenta que ambos comparten la forma de ver este conocimiento matemático.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Conclusiones Capítulo 2

1) *Si tenemos un trinomio de la forma,* $x^2 + sx + m$ *este es posible factorizarlo si se pueden conocer los números que sumados den "s" y multiplicados den "m".*

2) *Si "a" y "b" representan los números que sumados dan "s" y multiplicados dan "m", la factorización del trinomio queda de la siguiente manera*

$$x^2 + sx + m = (x + a)(x + b)$$

3) *La forma factorizada de un trinomio cuadrado es el producto especial binomios con un término común.*

4) *Desarrollar el producto de dos binomios con un término común y factorizar un trinomio de la forma* $x^2 + sx + m$ *son procesos inversos.*

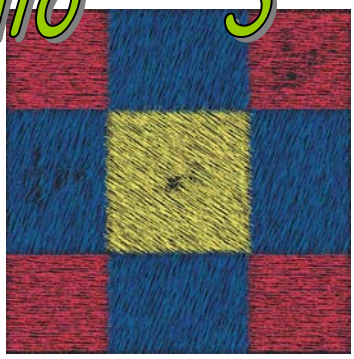
5) *Es posible relacionar el contexto algebraico con el geométrico*

6) *Al solucionar una ecuación cuadrática, se presenta la necesidad de factorizar trinomios cuadrados.*

7) *La forma para encontrar dos números que cumplan con las condiciones de suma y multiplicación, se realiza comúnmente por medio de propuesta-error. (Como cuando se realiza una gráfica en un sistema cartesiano mediante tabulación; se proponen los valores de x y se encuentra el valor de y). En nuestra problemática, se proponen dos números que cumplan con la multiplicación, para posteriormente verificar si cumplen con la suma.*

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Capítulo 3



Sobre la componente epistemológica

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Resulta de gran interés el hecho de que la ecuación cuadrática tiene un gran pasado, y que ocupa un lugar en nuestros programas de estudio. Muchas culturas y generaciones se han beneficiado por el uso de este saber y consideramos que nos seguirá fortaleciendo en nuestro viaje hacia el conocimiento.

Una aproximación socioepistemológica

El acercamiento *socioepistemológico*, como lo ha llamado Cantoral, (1998), cobija una epistemología que no se reduce a una eventual clasificación de *obstáculos*. Pretende conocer y precisar el origen de los conceptos matemáticos al reconocer los usos sociales que se le asocian desde su génesis, los sentidos (u orientaciones) y significados de los conceptos, así como evolución, desarrollo y los procesos de incorporación a los escenarios escolares.

Una de las hipótesis que asume esta perspectiva, es que el aprendizaje de la matemática ocurre en un doble proceso; en lo individual, atendiendo a las funciones mentales involucradas en la adquisición y desarrollo de un pensamiento matemático; esto es, referido a las interpretaciones que tiene la gente (de cualquier época) en relación al contenido matemático, así como a la caracterización o modelación de los procesos de compresión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos (Cantoral, 2000).

Un poco de historia

Una figura importante dentro de la matemática árabe es el geógrafo, astrónomo, y matemático Al-khuwarizmi, de cuya vida poco se sabe, si se exceptúa que fue bibliotecario del califa Al-Mamun, que reinó entre 813 a 833.

Pero, sin duda, el libro más importante de Al-khuwarizmi, y que ha dado el nombre a una rama de la matemática es Hisab al-jabar wa-al-muqabala de traducción no fácil, pero cuyo término al-jabar dio nacimiento a nuestro vocablo álgebra. Echemos un vistazo a la obra de este gran matemático.

Al-khwarizmi

The full title of the treatise is "The Compendious Book on Calculation by al-jabr and al-muqabala". The treatise consists of three parts.

In the first part, Al-khwarizmi explains the solution of six types, to which all linear and quadratic equations can be reduced:

(1) $ax^2 = bx$

(2) $ax^2 = b$

(3) $ax = b$

(4) $ax^2 + bx = c$

(5) $ax^2 + c = bx$

(6) $ax^2 = bx + c$

Where a, b and c are given positive numbers.

Al-khwarizmi clasifica las ecuaciones cuadráticas, algunos libros de texto analizados en el capítulo 2 también.

En esos tiempos no tenían sentido las raíces que no fueran enteras y positivas. Los árabes operaron siempre con ecuaciones de coeficientes enteros y positivos.

La exigencia de los coeficientes positivos aumenta el número de casos de ecuaciones de segundo grado.

Pero en nuestro tiempo ya tenemos el conjunto de los reales y además les hemos dado sentido. Entonces porqué aún estamos aferrados a clasificar las ecuaciones, cuando estás se pueden generalizar.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Regresando con Al-khwarizmi, él considera seis casos posibles (los citados anteriormente) de ecuaciones cuadráticas completas o incompletas, apareciendo como ejemplo de las ecuaciones completas.

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 21 = 10x$$

$$x^2 = 3x + 4$$

Ejemplos que aparecerán durante siglos en la literatura algebraica posterior. En cierto sentido puede decirse que entre los árabes no hay matemáticos puros, ante todo son astrónomos. Ya desde la época de la expansión árabe las prescripciones religiosas plantearon una serie de cuestiones astronómicas: problemas de orientación y de determinación de fechas y de horas que exigieron la instalación de observatorios y el perfeccionamiento de tablas e instrumentos, así como el estudio e investigación de las cuestiones astronómicas y matemáticas.

La ecuación de segundo grado en Al-khuwarizmi. En su escrito la restauración y la reducción son de tres clases, a decir: raíces, cuadrados y números simples, que no se refieren ni a las raíces ni a los cuadrados... Un número que pertenece a una de esas tres clases puede ser igual a uno de los números de las otros dos, por ejemplo, cuadrados igual a raíces; cuadrados igual a números, raíces igual a números". Se hace así referencia a los tres casos de ecuaciones incompletas:

$$ax^2 = bx$$

$$ax^2 = c$$

$$bx = c$$

Casos que se reducen simplemente a la extracción de una raíz o a una ecuación de primer grado.

Después, menciona los tres casos posibles de ecuaciones completas de segundo grado de coeficientes positivos, agregando: "Encuentro que esas tres especies de números pueden combinarse entre sí y dar lugar a tres tipos compuestos que son:

cuadrados y raíces igual a números; cuadrados y números igual a raíces; cuadrados igual a raíces y números", o lo que es lo mismo, distingue los tres casos de ecuaciones.

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 + q = px$$

$$x^2 = px + q$$

Para resolver el primer caso, ateniéndose al ejemplo numérico: ¿Cuál es el cuadrado que sumado a diez raíces da el número 39? ($x^2 + 10x = 39$*) Dice: Debes tomar la mitad del número de las raíces, en este caso 5 y multiplicarlo por sí mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64. Tomas la raíz cuadrada de este número que es 8 y le restas la mitad de las raíces 5 y obtienes 3, que es el valor buscado".*

Se puede observar que se esta utilizando la estrategia de completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP)

Cabe agregar que en un segundo ejemplo de este caso, donde el coeficiente de los cuadrados no es la unidad, aclara que para aplicar la regla anterior debe hacerse ese coeficiente la unidad, dividiendo por el todos los coeficientes.

El segundo caso es interesante, pues la ecuación tiene dos raíces positivas. *Con el ejemplo:* $x^2 + 21 = 10x$ *, dice Al-khuwarizmi: "Debes tomar la mitad del número de las raíces, en este caso 5, multiplicarlo por sí mismo, obtienes 25 al que debes restar los números, en este caso 21, obteniéndose 4. Extraes la raíz cuadrada que es 2 y lo restas del número de la mitad de las raíces que era 5 y obtienes 3 que es la solución. Sí deseas, puedes también sumar ese valor de 2 a la mitad de las raíces que es 5 y obtienes 7, que también es solución.* ***Cuando un problema está dado en esa forma, puedes ensayar con la adición. Sí no resulta, es indudable que resultará con la sustracción****. Este es el único caso, en que hay que tomar la mitad de las raíces, y que puede ofrecer solución por adición o por sustracción. Además hay que observar que sí en este caso el cuadrado de la mitad de las raíces es menor que los*

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

números, no hay solución. Sí es igual a esos números, la solución es la mitad de las raíces sin aumentos o disminuciones".

Podemos darnos cuenta que la ecuación cuadrática era clasificada en varios tipos y que de acuerdo a su tipología se debía tomar una metodología particular, este tipo de visión lo conservan algunos libros de texto, tal es el caso del Baldor, esta obra hace una primera clasificación, así habla de ecuaciones completas y ecuaciones incompletas. Sin embargo consideramos que actualmente este conocimiento se puede generalizar, y forma parte de nuestros objetivos.

Revisemos la forma de abordar un conocimiento en dos épocas diferentes, digamos el caso 1 según Al-khuwarizmi, la ecuación con su forma:

$$x^2 + px = q$$

Para abordar esta ecuación se propone el siguiente ejemplo:

Para resolver el primer caso, ateniéndose al ejemplo numérico: ¿Cuál es el cuadrado que sumado a diez raíces da el número 39? Dice: Debes tomar la mitad del número de las raíces, en este caso 5 y multiplicarlo por sí mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64. Tomas la raíz cuadrada de este número que es 8 y le restas la mitad de las raíces 5 y obtienes 3, que es el valor buscado". (TCP)

Ahora comparemos ésta redacción con la presentada en el texto de Carreño (2003), para abordar el producto de dos binomios con un término común.

Producto de binomios con término común

Es el cuadrado del término común más el producto del término común por la suma de los términos no comunes y más el producto de los términos no comunes, o sea:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x \bullet (a+b) + ab$$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Con respecto a cómo se describen los conocimientos en las dos redacciones estamos de acuerdo, pero… es sólo una forma de verlos, en este caso el punto de vista de los autores, entonces, estas redacciones son buenas, pero… si lo que deseamos es una didáctica de las matemáticas, por sí solas no serían suficientes; en ambas redacciones todo está consumado, no existe la estrategia de que el alumno se enfrente a un problema para descubrir el conocimiento en juego. En la actualidad, para desarrollar un aprendizaje significativo en los alumnos, necesitamos más elementos.

Cuando hacemos que el alumno se enfrente sólo a este tipo de redacciones, lo único que podremos lograr es el desinterés del chico, además de que lo estaremos privando del desarrollo de otras habilidades matemáticas, de su propio desarrollo.

Si nos damos cuenta bien, en muchos casos estamos manejando el conocimiento descontextualizado, a veces lo que enseñamos tiene sólo el contexto de antaño, con los mismos vicios en cuestión de enseñanza-aprendizaje, lo cual no debe ser así, se necesita una transposición didáctica, acorde a nuestro tiempo.

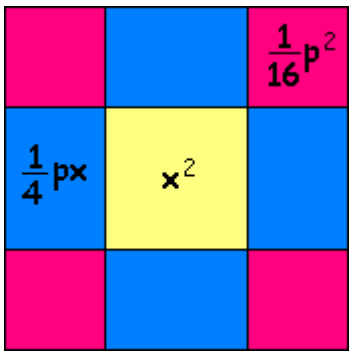
Pero además, a veces, incluso, no utilizamos ni los diferentes contextos utilizados en épocas anteriores, es interesante darse cuenta que desde esa época ya se utilizaban figuras geométricas como representaciones de estos procesos, se relacionaba el conocimiento con alguna aplicación o una situación real. Y ¿qué pasa en las aulas?, en muchos casos se han hecho un lado los diferentes contextos, y se ha abusado, o más bien, sólo se ha utilizado el contexto algebraico, situación que caracteriza la vida matemática del siglo pasado.

Veamos el siguiente ejemplo que nos muestra Al-khuwarizmi. En el que podremos encontrar el contexto geométrico.

Para el primer caso, de forma general $x^2 + px = q$ *y en el ejemplo* $x^2 + 10x = 39$ *da dos comprobaciones geométricas.*

En la primera, supone un cuadrado de lado "x", y por tanto de valor x^2 *, a cada uno de cuyos lados adosa un rectángulo de base "x" y altura* $\frac{1}{4}p$ *; El dodecágono así formado tendrá por áreas* $x^2 + 4\left(\frac{1}{4}px\right) = x^2 + px = q$ *(figura formada por el cuadrado interior y los cuatro rectángulos)*

De ahí que si a esa figura se le agregan los cuatro cuadrados de los vértices de área total: $4\left(\frac{1}{4}p\right)^2 = 25$ *; se obtiene un cuadrado de área:* $\frac{1}{4}p^2 + q$ $\left(25 + 39 = 64\right)$ *y de lado su raíz* (8) *Como ese lado es* $x + 2\left(\frac{1}{4}p\right) = x + \frac{1}{2}p(x+5)$ *se obtiene finalmente el valor:* $x = \sqrt{\frac{1}{4}p + q} - \frac{1}{2}p$ *expresión que justifica la regla aritmética y que en este caso da la solución 3. Cuyo cuadrado 9 más 10 veces su valor, 30, da el valor de los números: 39.*



Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

¡Que interesante! Los principios del álgebra estuvieron acompañados de figuras geométricas, sin embargo, a veces se dan cursos de álgebra, sin utilizar ni una sola figura geométrica. Consideramos que este es un error, este contexto puede brindar elementos que ayuden al aprendizaje significativo. No obstante se puede observar que es difícil entender la redacción y más aún darle sentido a este tipo de problemas.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

El último, cronológicamente de los matemáticos hindúes de importancia es Baskhara del siglo XII. En este periodo aparece cierto simbolismo precursor del álgebra sincopada, así como del uso del cero como símbolo, vieron además los hindúes claramente la diferencia entre números positivos y negativos que interpretaban como créditos y débitos que distinguían simbólicamente, ***hecho que les permitió unificar las ecuaciones de segundo grado en un solo tipo****, cualesquiera fueran los coeficientes y hasta admitir las soluciones negativas, aunque sin tomarlas en consideración, pues como dice Baskhara, "la gente no aprueba las raíces negativas".*

Con respecto al párrafo anterior, si bien, las ecuaciones cuadráticas se pueden clasificar, también se pueden unificar en un solo tipo, lo que buscamos en este trabajo es precisamente la generalización. Si antes de que se aceptaran las raíces negativas, se podía generalizar, ¿cuál es el motivo de que el método de factorización no se generalice, ahora que contamos con un conjunto más amplio de números? En un mundo donde existen cada vez más y más conocimientos consideramos que la generalización es una buena estrategia para la sobrevivencia de conocimientos.

Veamos por último, un problema típico que aparece en Baskhara: *"La raíz cuadrada de la mitad de un enjambre de abejas se esconde en la espesura de un jardín. Una abeja hembra con un macho; quedan encerrados en una flor de loto, que los sedujo por su dulce perfume. Los 8/9 del enjambre quedaron atrás. Dime el número de abejas". El problema exige la resolución de una ecuación de segundo grado, que tiene dos raíces positivas, pero de las cuales: sólo la entera 72 (la otra es 9/2) satisface las poéticas exigencias del problema.*

Interesante, ya desde esa época se involucraba un saber en la solución de un problema, no es de extrañar que actualmente una estrategia bastante utilizada en el proceso enseñanza-aprendizaje se precisamente la solución de problemas. Y es así que nosotros también hemos decidido utilizar un contexto donde se pueda observar la aplicación del conocimiento involucrado. Ya que pensamos que esto ayudará al desarrollo de habilidades y al interés por aprender.

Las expresiones cuadráticas

Una expresión cuadrática puede ser interpretada de diferentes formas, estas formas dependen del contexto en que se trabaje y han surgido atendiendo a preguntas particulares. Algunas de estas han podido sobrevivir en nuestros días y cada una de ellas se mueve en diferentes escenarios.

Así las expresiones cuadráticas las podemos visualizar como:

a) polinomio de grado dos
$\mathbf{ax^2 + bx + c}$

b) ecuación cuadrática
$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ (Se puede observar que aparece el signo de igualdad)

c) función cuadrática

$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ (En este caso aparece una nueva variable **"f(x)"**)

Cabe aclarar que pueden existir más formas. Bazaldua (2007) en su capítulo II, nos presenta diferentes interpretaciones de las expresiones cuadráticas.

No obstante, en este trabajo se consideraron aquellas que bajo nuestra perspectiva nos podrían servir para contestar nuestra pregunta primordial: **¿Se puede utilizar la factorización como método general en la solución de ecuaciones cuadráticas?**

Bajo esta perspectiva consideramos que aunque la segunda forma citada **"ecuación cuadrática"** aparece en la redacción de nuestra pregunta, pensamos que el estudio de la primera forma **"polinomio de grado dos"** nos puede brindar elementos que nos permitan lograr nuestros objetivos.

La utilización del conocimiento

¿Cuál ha sido el motivo por el cual el conocimiento de la ecuación cuadrática ha sobrevivido?, consideramos que un papel fundamental de un conocimiento, es que pueda ser útil, en este sentido creemos que la ecuación cuadrática ha cumplido y sigue cumpliendo, por este motivo seguirá entre nosotros. Un saber tan importante como es la ecuación cuadrática ha sido utilizado muchas veces, en muchas áreas, para muchas aplicaciones. Dentro de las grandes aplicaciones que se le ha dado es la modelación de fenómenos naturales.

Modelando fenómenos con el modelo cuadrático

Una de las ciencias que ha acompañado a las matemáticas en su desarrollo es la Física. Esta ciencia ha tenido la necesidad de utilizar modelos matemáticos para su entendimiento y desarrollo, y a su vez, las matemáticas hacen de la interpretación física uno de sus razones de ser. Purcell (2003, p. 136), *"la tarea de tomar un fenómeno físico y representarlo en símbolos matemáticos se llama modelación matemática"*,

Un pensamiento acorde a nuestros objetivos lo encontramos también en Purcell (2003, p. 136)

El libro de la Naturaleza

"El gran libro de la naturaleza siempre está abierto ante nuestros ojos y la verdadera filosofía está escrita en él... Pero no la podemos leer a menos que hayamos aprendido primero el lenguaje y los caracteres con los cuales esta escrito... Esta escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas".

Galileo Galilei

Es lo que creemos, no existe un solo lenguaje matemático, ni uno debe tener prioridad sobre otro, sencillamente existen y cada persona puede elegir cuál utilizar, el que más necesite o agrade.

El modelo cuadrático, Galileo y la caída libre

La naturaleza del movimiento de un objeto al caer era en la antigüedad un tema de interés en la filosofía natural. Aristóteles afirmaba que "el movimiento hacia abajo... de cualquier cuerpo dotado de peso es más rápido en proporción a su tamaño". Esto es, los objetos más pesados caen más rápidamente. Muchos siglos más tarde, Galileo Galilei (1564-1642) hizo la aseveración correcta: *"si pudiéramos eliminar totalmente la resistencia del medio, todos los objetos caerían a igual velocidad"*.

En 1971, el astronauta David Scott soltó una pluma y un martillo de geólogo en la Luna (sin atmósfera), observando que (dentro del error experimental de su observación) llegaban a la superficie lunar al mismo tiempo.

Si permitimos que un cuerpo caiga en un vacío de modo que la resistencia del aire no afecte su movimiento, encontraremos un hecho notable: todos los cuerpos, independientemente de su tamaño, forma, o composición, caen con la misma aceleración. Esta aceleración es representada generalmente por la letra "g" y, cerca de la tierra su magnitud es aproximadamente 9.8 m/s^2.

Para la obtención de la altura "y" a la que se encuentra un objeto que se deja caer en caída libre se utiliza a menudo la siguiente ecuación $y = \frac{gt^2}{2}$, donde "g" representa la gravedad y "t" el tiempo transcurrido

Sin embargo cuando se tiene la necesidad de conocer tiempos, es decir conocer la variable "t", dado que la altura es conocida, es entonces, cuando aparece la necesidad de resolver una ecuación cuadrática.

El modelo cuadrático está presente en la naturaleza, y esté se pude leer con un lenguaje matemático, la caída libre es un ejemplo. Siempre que tratemos con un modelo cuadrático estará presente la solución de una ecuación cuadrática, para encontrar ciertos elementos, por ejemplo: en el caso mencionado anteriormente, cada que deseemos encontrar los tiempos.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Algunos problemas que llevan a la solución de una ecuación cuadrática

En la actualidad es frecuente encontrar que los autores de libros de texto incluyen problemas donde se aplica una ecuación cuadrática, así es frecuente encontrar problemas: numéricos, geométricos, y de aplicación de ciencias como la física, química, biología, etc.

En realidad los espacios donde se mueve este saber son extensos, prácticamente en todas las ciencias. Para este trabajo hemos decidido tomar un ejemplo, tratando de abarcar los contextos planteados en nuestros objetivos. Así se pretende trabajar las partes: numérica, algebraica, geométrica, y aplicación.

Situaciones que originan expresiones cuadráticas

1)

a) *Dos números que sumados den 5 y su producto sea 6*

b) *Dos números que sumados den 6 y su producto sea 6*

2)

a) *El perímetro de terreno rectangular es igual a 100 metros, y su área es igual a 600 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?*

b) *El perímetro de terreno rectangular es igual a 120 metros, y su área es igual a 600 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?*

En las primeras situaciones se puede trabajar el contexto numérico y algebraico, en cambio en las segundas, se pueden trabajar los cuatro contextos mencionados anteriormente. Una situación similar la estaremos planteando en el diseño de la

secuencia didáctica, como una estrategia para que el alumno justifique el aprendizaje de este saber.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Conclusiones capítulo 3

1) *La ecuación cuadrática es un saber con un gran pasado*

2) *Aunque las ecuaciones cuadráticas se pueden clasificar como completas e incompletas, estas se pueden unificar en un solo tipo, es decir se pueden generalizar.*

3) *La ecuación cuadrática es una forma de interpretar las expresiones cuadráticas*

4) *Existen múltiples aplicaciones de la ecuación cuadrática*

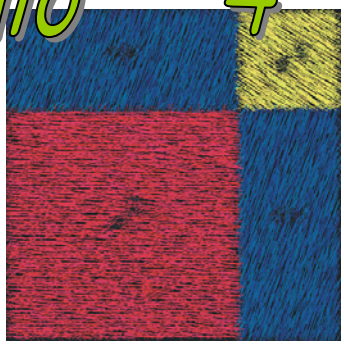
5) *La interpretación de fenómenos utilizando modelos, es una razón de ser de las matemáticas*

6) *La ecuación cuadrática existe en diferentes contextos: numérico, algebraico, geométrico*

7) *La solución de problemas ha sido una estrategia en la enseñanza- aprendizaje de la matemáticas*

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Capítulo 4



Sobre la componente cognitiva

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Concepción escolar de la ecuación cuadrática

Un escenario importante en nuestra investigación es el Escolar. ¿Qué concepciones y preferencias se tienen sobre la ecuación cuadrática? Para darnos una idea de la preferencia de los profesores y estudiantes sobre la solución de una ecuación cuadrática se diseño el siguiente cuestionario.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Cuestionario

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

__Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática__

Nombre:_____
Marca con una x: Profesor ( ) Alumno( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

_____

_____

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$	b) $a^2-1.5a-10=0$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Con respecto al diseño del cuestionario

El diseño del cuestionario giró en torno a nuestro interés, **el uso del método de factorización para la solución de una ecuación cuadrática**, recordemos que uno de nuestros objetivos es generalizar el método de factorización. Pues bien, la primera pregunta tuvo la intención de corroborar si este método está presente en profesores y alumnos.

En el segundo inciso se presentan dos ecuaciones; en la primera ecuación cuadrática se utilizaron raíces enteras (-2 y -3); y en la segunda se involucra una raíz racional (4 y $-\frac{5}{2}$). No se pide un método en particular, sin embargo, se solicita que se resuelvan, y además se indique el proceso utilizado. La intención es visualizar cuáles son los métodos con más preferencia y cuál es la forma en que se utilizan.

Con respecto al inciso (iii), tercera pregunta se presenta una tercera ecuación, sólo que en este caso se solicita que se utilice el método de factorización, también se pide el proceso. Cabe mencionar que esta ecuación no tiene soluciones enteras. La intención es, investigar si alguna de las personas puede utilizar el método de factorización para resolver una ecuación cuadrática, cuando se presentan raíces que no son enteras.

En la última pregunta se pide obtener una ecuación cuadrática si se conocen las raíces, esta pregunta nos dará una idea del dominio del conocimiento en cuestión. También nos dará la oportunidad de revisar si la factorización es vista como un proceso inverso al producto notable y así poder comparar con lo encontrado en los libros de texto.

Cuestionarios resueltos por profesores

El primer bloque de cuestionarios fue resuelto gracias a un grupo de 11 profesores de Academias como: Matemáticas, Computación y Física. Todas estas personas laboran en el Cecyt 15 "Diódoro Antúnez Echegaray", del IPN (Escuela de Nivel Medio Superior).

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

PROFESOR A

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor (X) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

(1) El de completar cuadrados y que da origen al conocido para hallar las raíces.
(2) Factorización (3) Gráfico

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

por factorización

$(x+3)(x+2)=0$

esto implica que

$x_1=-3$

$x_2=-2$

b) $a^2-1.5a-10=0$

por fórmula general se obtienen $x_1=7/2$

$x_2=-5/2$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

no he podido resolverlo por el método que pides.

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

(1) $x^2-x-20=0$
(2) $2x^2-2x-40=0$
(3) $3x^2-3x-60=0$

por ejemplo si $a=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-10=0$

en general

(4) $ax^2-ax-20a=0$ con $a\in\mathbb{R}$.

$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=10$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN

Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

PROFESOR B

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor (X) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

Formula General, factorización por Tanteo, factorización Completando el T.C.P., Método gráfico, fact T.C.P.

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso) Compl. T.C

a) $x^2+5x+6=0$ fact.

$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

$x_1=-3$, $x_2=-2$

b) $a^2-1.5a-10=0$; $a^2-\frac{3}{2}a-$

$a^2-\frac{3}{2}a+\frac{9}{16}=\frac{10}{1}+\frac{9}{16}$

$\left(a-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{160+9}{16}=\frac{169}{16}$

$\sqrt{\left(a-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{16}}=\pm\frac{13}{4}$

$a-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$

$a_1=\frac{13}{4}+\frac{3}{4}=\frac{16}{4}=4$

$\therefore a_1=4$

$a_2-\frac{3}{4}=-\frac{13}{4}$

$a_2=-\frac{13}{4}+\frac{3}{4}$

$a_2=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso) Completando el T.C.P.

b) $x^2+7x+9=0$

$x^2+7x=-9$

$x^2+7x+\frac{49}{4}=-9-\frac{49}{4}$

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{-36+49}{4}=\frac{13}{4}$

$\sqrt{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{4}}$

$x+\frac{7}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$

$x_1=\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{7}{2}$

$x_1=\frac{\sqrt{13}-7}{2}$

$x_2=-\left(\frac{\sqrt{13}-7}{2}\right)$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$x^2-x-20=0$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

Nombre: **PROFESOR C**

Marca con una x: Profesor (X) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

Factorización, Completar cuadrados
Fórmula General

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

$(x+3)(x+2)=0$

$x_1=-3$ $x_2=-2$

Factorización por la forma ax^2+bx+c

b) $a^2-1.5a-10=0$

$a^2-\frac{3}{2}a+\left(\frac{3}{4}\right)^2=10+\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\left(a-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{169}{16}$

$a-3/4=\pm\sqrt{\frac{169}{16}}=\pm\frac{13}{4}$

$a=\frac{3}{4}+\frac{13}{4}=\frac{16}{4}=4$

$a=4$ $a=3/4-13/4=-10/4$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

$x^2+7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2=-9+\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=-\frac{36}{4}+\frac{49}{4}$

$x=\pm\sqrt{\frac{13}{4}}-\frac{7}{2}$

$x_1=\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{13}-7}{2}$

$x_2=-\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{7}{2}=\frac{-\sqrt{13}-7}{2}$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$(a-5)(a+4)=a^2+[(-5)+(+4)]a+(-5)(+4)$

$=a^2-a-20$

$=a^2-a-20$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

Nombre: **PROFESOR D**

Marca con una x: Profesor (X) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

5 métodos, factorización, Completando fórmula general, Tanteos, Gráfica

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

fact.

$(x+3)(x+2)=0$

$x_1=-3$

$x_2=-2$

b) $a^2-1.5a-10=0$

fórmula general.

$a_{1,2}=\frac{1.5\pm\sqrt{2.25+40}}{2}$

$a_{1,2}=\frac{1.5\pm\sqrt{42.25}}{2}$

$a_1=\frac{1.5+6.5}{2}=4$

$a_2=\frac{-5}{2}=-2.5$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

$a+b=9$

$a+b=7$

$b=\frac{9}{a}$

$a+\frac{9}{a}=7$

$a^2+9-7a=0$

$(x+5.3)\left(x+\frac{9}{5.3}\right)=0$

Tanteo.

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$(x+5)(x-4)=x^2+x-20$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

Nombre: **PROFESOR E**

Marca con una x: Profesor (x) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

Buscar dos números $(3)(2)=6$, $(3)+(2)=5$

$(x+3)(x+2)=0$

$x_1=-3$

$x_2=-2$

b) $a^2-1.5a-10=0$

$2a^2-3a-20=0$

$$\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(-10)}}{2(2)}$$

$x_1=1.6089$

$x_2=12.4039$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

No tiene factores enteros

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$(x-5)(x+4)=0$

$x^2+4x-5x-20=0$ $\quad x^2-x-20=0$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

Nombre: **PROFESOR F**

Marca con una x: Profesor (X) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

1) Factorización 2) Trinómio cuadrado perfecto
3) Por fórmula General. 4) Solución Gráfica

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

Por factorización:

$(x+3)(x+2)=0$

se buscan dos números que sumados den el coef. de x (5) y multiplicados el Termino independiente (6); éstos son (+3) y (+2); éste procedimiento concidera que el coef. de x^2 sea (1) $\Rightarrow$ $x+3=0 \therefore (x_1=-3)$

$x+2=0 \therefore (x=-2)$

b) $a^2-1.5a-10=0$

Por formula General $\begin{cases} a=1 \\ b=-1.5 \\ c=-10 \end{cases}$

$x=\frac{-(-1.5)\pm\sqrt{(-1.5)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}$

$x=\frac{1.5\pm\sqrt{2.25+40}}{2}=\frac{1.5\pm\sqrt{42.25}}{2}$

$x=\frac{1.5\pm 6.5}{2} \Rightarrow x_1=\frac{1.5+6.5}{2}=\frac{8}{2}$

$x_2=$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

PROFESOR G

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor ( ) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

_____

_____

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

Ocupe la calculadora Texas Instruments. Voyage 200.

Las soluciones son:

$x_1=-3$

$x_2=-2$.

b) $a^2-1.5a-10=0$

Las soluciones son:

$x_1=4$.

$x_2=-2.5$.

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

Las soluciones son:

$x_1=-5.3027$

$x_2=-1.6972$.

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$(x-5)(x+4)$ $x^2-9x+20=0$.

$x_1=5$

$x_2=-4$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

PROFESOR H (IMPARTE CLASES DE FÍSICA)

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor (X) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

POR LA ECUACION GENERAL

POR FACTORIZACION

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

$(x+3)(x+2)=0$

$x^2+2x+3x+6=0$

$x^2+5x+6=0$

b) $a^2-1.5a-10=0$

$a=1$

$b=1.5$

$c=-10$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\frac{-(-1.5)\pm\sqrt{(-1.5)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}$

$\frac{1.5\pm\sqrt{2.25+40}}{2}=\frac{1.5\pm6.5}{2}=\begin{matrix}4\\-2.5\end{matrix}$

$(a-4)(a+2.5)=0$

$a^2-4a+2.5a-10=0$

$a^2-1.5a-10=0$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

$(x+3)(x+3)=0 \therefore x^2+6x+9=0$

buscamos 2 numeros que sumados den 7 y multiplicados den 9.

$+\begin{matrix}2.0\\3.0\end{matrix}\}10 \quad \begin{matrix}1.698\\5.302\end{matrix}\}9.002$

$+\begin{matrix}1.7\\5.3\end{matrix}\}9.01$

$7.0 \quad 7.0$

Resultado:

$(x+1.698)(x+5.302)=0$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$(x+4)(x-5)=0$

$x^2-5x+4x-20=0$

$x^2-x-20=0$

$a=1$

$b=-1$

$c=-20$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-20)}}{2(1)}$

$\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}$

$\frac{1\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{1\pm9}{2}$

$\frac{1+9}{2}=\frac{10}{2}=5$

$\frac{1-9}{2}=\frac{-8}{2}=-4$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

PROFESOR I (IMPARTE CLASES DE FÍSICA)

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor (X) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

* Formula $AX^2+BX+C=0$
* Factorización

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

$$X=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

b) $a^2-1.5a-10=0$

$$a=\frac{-(-1.5)\pm\sqrt{(-1.5)^2-4(1)(-10)}}{2}$$

$$a=\frac{1.5\pm\sqrt{2.25+40}}{2}=\frac{1.5\pm\sqrt{42.25}}{2}$$

$$a=\frac{1.5\pm6.5}{2}=\frac{8}{2}=4$$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

$(X+1.7)(X+5.3)=0$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$X^2-9X+20=0$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

Nombre: **PROFESOR J (IMPARTE CLASES DE FÍSICA)** FISICA

Marca con una x: Profesor (X) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

$(x+3)(x+2)=0$

$x^2+2x+3x+6=0$

$x^2+5x+6=0$

b) $a^2-1.5a-10=0$

$a=1$, $b=-1.5$, $c=-10$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\frac{-(-1.5)\pm\sqrt{(-1.5)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}$

$\frac{1.5\pm\sqrt{2.25+40}}{2}=\frac{1.5\pm6.5}{2}=\frac{4.0}{-2.5}$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

$(x+1.698)(x+5.302)=0$

Proceso:

$(x+3)(x+3)=0 \Rightarrow x^2+6x+9=0$

$\therefore$ 2 numeros q' sumados = 7 y su multiplicacion = 9

2.0 / 5.0 / 7 } 10

1.7 / 5.3 / 7.0 } 9.01

1.68 / 5.32 / 7.00 } 8.93

1.695 / 5.305 / 7.000 } 8.99

1.698 / 5.302 / 7.000 } 9.002

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$(x+4)(x-5)=0$

$x^2-5x+4x-20=0$

$x^2-x-20=0$

$a=1$, $b=-1$, $c=-20$

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-20)}}{2(1)}$

$\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}$

$\frac{1\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{1\pm9}{2}$

$\frac{1+9}{2}=\frac{10}{2}=5$

$\frac{1-9}{2}=\frac{-8}{2}=-4$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

PROFESOR K (IMPARTE CLASES DE COMPUTACIÒN)

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor (x) Alumno ( )

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

Completar cuadrados

Ecuacion gral

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$

$= \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$= \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

$x_1 = -2 \quad x_2 = -3$

b) $a^2-1.5a-10=0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25+40}}{2}$

$x_1 = \frac{1.5+\sqrt{42.25}}{2} = \frac{1.5+6.5}{2} = 4$

$x_2 = \frac{1.5-6.5}{2} = \frac{-5}{2} = -2.5$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

$x^2+7x =$

$\frac{-7 \pm \sqrt{49-36}}{2}$

$\frac{-7 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\frac{-7+3.6}{2} = -5.3$

$\frac{-7+3.6}{2} = -1.7$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$(x-5)(x+4)=0 \qquad x^2-x-20=0$

$x^2-4x+5x-20=0$

$x^2-x-20=0$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Cuestionarios resueltos por alumnos

Con lo que respecta al segundo bloque de cuestionarios, fueron realizados gracias a la colaboración de cinco alumnos de cuarto semestre, alumnos que ya han tomado los cursos de: álgebra, Geometría y trigonometría, geometría analítica, y estaban cursando el curso de cálculo diferencial. Todos ellos del Cecyt 15, escuela de nivel medio superior del IPN.

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

ALUMNO A

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor ( ) Alumno (X)

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

Completando el Trinomio Cuadrado Perfecto, Factorizando, Fórmula General

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$ Por Factorización

$(x+2)(x+3)=0$

Si $x+2=0$; $x_1=-2$,

Si $x+3=0$; $x_2=-3$,

b) $a^2-1.5a-10=0$ Por factorización

$(a+2.5)(a-4)=0$

Si $a+2.5=0$; $a_1=-2.5$,

Si $a-4=0$; $a_2=4$,

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

Completar el T.C.P.

$x^2+7x+12.25=-9+12.25$

$x^2+7x+12.25=3.25$ ...TCP

Factorizamos

$(x+3.5)^2=3.25$

$\sqrt{(x+3.5)^2}=\pm\sqrt{3.25}$

$x+3.5=\pm\sqrt{3.25}$

$x=\pm\sqrt{3.25}-3.5$

$x_1=1.8027-3.5$

$x_1=-1.6972$,

$x_2=-1.8027-3.5$

$x_2=-5.3027$,

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$x_1=5$ $x_2=-4$

$x-5=0$ $x+4=0$

$(x-5)(x+4)=0$

$x^2-x-20=0$,

$x_1=5$

$x-5=0$,

$x_2=-4$

$x_2=\frac{-8}{2}$

$2x+8=0$,

$(x-5)(2x+8)=0$

$1 \quad -5=-10$

$2 \quad 8=\frac{8}{-2}$

$2x^2-2x-40=0$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

ALUMNO B

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor ( ) Alumno (X)

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

Me acuerdo de dos, Factorización y #formula general

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2+5x+6=0$

Factorización

$(x+3)(x+2)$

$x^2+2x+3x+6$

x^2+5x+6

b) $a^2-1.5a-10=0$ formula general

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{-(-1.5)\pm\sqrt{(-1.5)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}$

$x=\frac{1.5\pm\sqrt{2.25+40}}{2}$

$x=\frac{1.5\pm\sqrt{42.25}}{2}$

$x=\frac{1.5+6.5}{2}$ $x=\frac{1.5-6.5}{2}$

$x=4$ $x=-2.5$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2+7x+9=0$

$(x+\ )(x+\ )$ 1 5 6

$x^2+7x+3.5^2=-9+3.5^2$

$(x+3.5)^2=-9+3.5^2$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$(x+5)(x-4)=0$ x^2+x-20

$x^2+5x-4x-20$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

ALUMNO C

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor ( ) Alumno (X)

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

Trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, factorización.

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+3)(x+2) = 0$

$x+3=0 \quad x+2=0$

$x=-3 \quad x=-2$

b) $a^2 - 1.5a - 10 = 0$

$a=1$
$b=-1.5$
$c=-10$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{+1.5 \pm \sqrt{(-1.5)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}$

$x = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25+40}}{2}$

$x = \frac{1.5 \pm \sqrt{42.25}}{2}$

$x = \frac{1.5 \pm 6.5}{2}$

$x_1 = \frac{8}{2} \quad x^2 = \frac{5}{2}$

$x_1 = 4 \quad x^2 = 2.5$

$x_1 = 4$
$x^2 = 2.5$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2 + 7x + 9 = 0$ -9

3.5^2

$x^2 + 7x + 3.5^2 = -9 + 3.5^2$

$x^2 + 7x + 12.25 = -9 + 12.25$

$x^2 + 7x + 12.25 = 3.25$

$(x+3.5)^2 = 3.25$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$x^2 - x - 20$

$(x-5)(x+4) = 0$

$x-5=0 \quad x+4=0$

$x=5 \quad x=-4$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

ALUMNO D

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor ( ) Alumno (X)

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

Factorización, completando un trinomio cuadrado perfecto.

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ Factorización

$(x+3)(x+2)$

$x+3=0$

$x+2=0$

$x_1 = -3$

$x_2 = -2$

b) $a^2 - 1.5a - 10 = 0$

$(a-4)(a+2.5)$

$a-4=0$

$a+2.5=0$

$a_1 = 4$

$a_2 = -2.5$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2 + 7x + 9 = 0$

$(x+\ \ )(x+\ \ )$ No hay número que al sumarse para poder 9 y 7. Por este método no se puede

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$x^2 - 1 - 20 = 0$

$(x-5)(x+4)$

$x-5=0 \quad x=5$

$x+4=0 \quad x_2=-4$

$x^2 - 1 - 20 = 0$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

CICATA del IPN
Programa de Maestría en Matemática Educativa

Cuestionario: Solución de una ecuación cuadrática

ALUMNO E

Nombre: _____

Marca con una x: Profesor ( ) Alumno (X)

i) ¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces? Menciónalos.

Factorización

ii) Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ $(x+3)(x+2)$

$x_1 = -3$

$x_2 = -2$

b) $a^2 - 1.5a - 10 = 0$

$a \quad b \quad c$

$x_1 x_2 = \frac{-1.5 \pm \sqrt{2.25 + 40}}{2}$

$x_1 x_2 = \frac{-1.5 \pm \sqrt{42.25}}{2}$

$x_1 = \frac{-1.5 + \sqrt{42.25}}{2}$ $x_2 = \frac{-1.5}{}$

iii) Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

b) $x^2 + 7x + 9 = 0$

$a \quad b \quad c$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{}}{}$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 36}}{2}$

$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{}}{2}$

$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{}}{2}$

iv) Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

$x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4) \quad x^2 - 4x + 5x - 20$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Resultados de los cuestionarios

Trataremos de acercarnos a un análisis critico, encaminado a observar el entorno de la solución cuadrática por el método de factorización, para esto nos auxiliaremos de tablas y gráficas.

Análisis de la Pregunta 1

¿Cuántos métodos de solución de una ecuación cuadrática conoces?, menciónalos

Para facilitar la observación de las respuestas de profesores y alumnos se concentro la información en las siguientes tablas.

Conocimiento de los métodos por parte de los profesores

Profesor	Métodos que mencionaron los profesores
A	- Completando el trinomio cuadrado perfecto - **Factorización** - Gráfico
B	- Fórmula general - **Factorización** - Tanteos - Gráfico
C	- **Factorización** - Completando el trinomio cuadrado perfecto - Fórmula general
D	- **Factorización** - Completando el trinomio cuadrado perfecto - Fórmula general - Tanteos - Gráfico
E	***Sin respuesta***
F	- **Factorización** - Completando el trinomio cuadrado perfecto - Fórmula general - Gráfico

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

G	***Sin respuesta***
H	- Fórmula general - **Factorización**
I	- Fórmula general - **Factorización**
J	***Sin respuesta***
K	- Completando el trinomio cuadrado perfecto - Fórmula general

Conocimiento de los métodos por parte de los alumnos

Alumno	Métodos que mencionaron los alumnos
A	- Completando el trinomio cuadrado perfecto - **Factorización** - Fórmula general
B	- **Factorización** - Fórmula general
C	- Completando el trinomio cuadrado perfecto - Fórmula general - **Factorización**
D	- **Factorización** - Completando el trinomio cuadrado perfecto
E	- **Factorización**

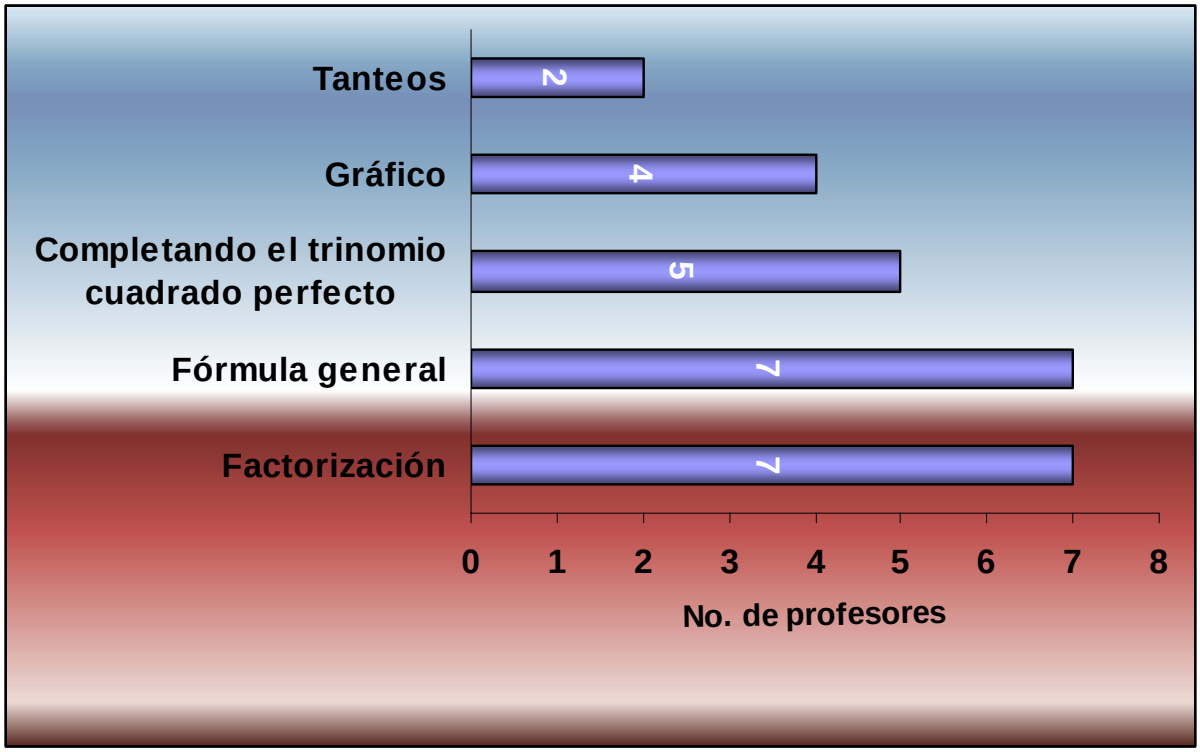
Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Podemos darnos cuenta, que la mayoría de los profesores y la totalidad de los alumnos entrevistados conocen la existencia de el método de factorización para dar solución a una ecuación cuadrática, incluso es el primer método que mencionan en la mayoría de los casos.

Para corroborar estas afirmaciones se realizó una tabla y su correspondiente gráfica, veamos.

Profesores	
Método mencionado	**No. de profesores**
Factorización	7
Fórmula General	7
Completando el trinomio cuadrado perfecto	5
Gráfico	4
Tanteos	2

Gráfica (métodos mencionados por los Profesores)

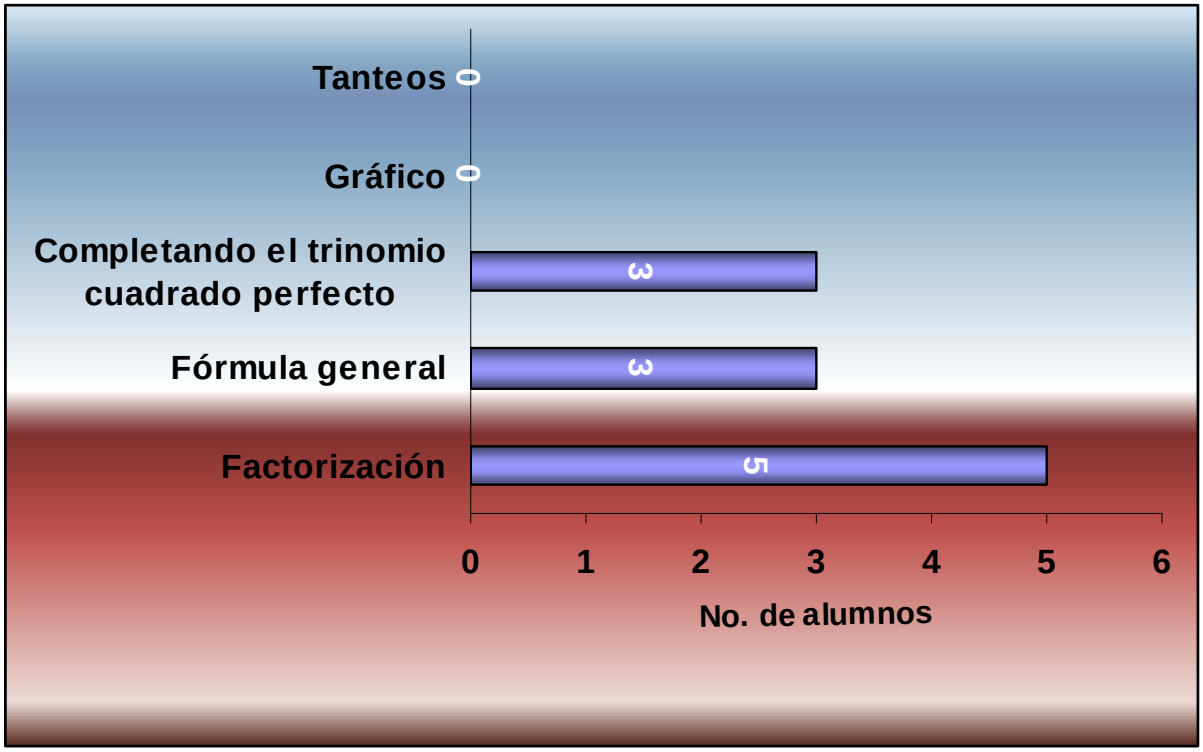


Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

De la tabla anterior con su correspondiente gráfica, podemos decir que los profesores entrevistados recordaron más los métodos de factorización y fórmula general.

Alumnos	
Método mencionado	**No. de alumnos**
Factorización	5
Fórmula General	3
Completando el trinomio cuadrado perfecto	3
Gráfico	0
Tanteos	0

Gráfica (métodos mencionados por los Alumnos)



Con lo que respecta a los alumnos, mencionaron el método de factorización más que cualquier otro, el segundo lugar lo ocupan los métodos de fórmula general y completando el trinomio cuadrado perfecto.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Aunque es una muestra muy pequeña, los tres métodos más mencionados por los profesores, coinciden con los mencionados en los programas y los manejados en los libros de texto: factorización, fórmula general y completando el trinomio cuadrado perfecto (aunque la fórmula general puede verse como una simplificación del método de completar el trinomio).

Una coincidencia más, los alumnos también mencionaron estos tres métodos. Ahora bien, si unimos las opiniones de profesores y alumnos, podemos concluir que el método de factorización es el más asociado a la solución de una ecuación cuadrática y por ende el más recordado.

Podemos concluir que **la mayoría de los profesores y de los alumnos saben de la existencia del método de factorización para dar solución a una ecuación cuadrática.** Pero, como veremos más adelante, aunque es el método más recordado, no es el más utilizado, esto depende del tipo de raíces que tenga la ecuación cuadrática.

Pregunta 2

Resuelve las siguientes ecuaciones (indica tu proceso)

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$	b) $a^2 - 1.5a - 10 = 0$

En esta pregunta se trata de ver si el tipo de raíces de una ecuación cuadrática, es una variable importante en la elección del método de solución, por lo que en la primera ecuación se contemplan raíces enteras, mientras que en la segunda existe una raíz racional.

Para la primera ecuación (con raíces enteras), la mayoría de los entrevistados, tanto profesores como alumnos, no tuvieron problema con el método, y aunque no se les pidió utilizar un método en particular, la mayoría opto por utilizar el método de factorización. Sin embargo dos profesores que imparten la materia de física, a juzgar por sus repuestas, no reconocen qué es solucionar una ecuación, ya que solo se dedicaron a factorizar el trinomio.

Esto demuestra que **para ecuaciones cuadráticas con raíces enteras (pequeñas), tanto a los profesores como a los alumnos no les causa problema utilizar el método de factorización**, esto coincide con lo analizado en los textos, coincide con el discurso actual.

Pero ¿qué sucede sí la ecuación por resolver contiene raíces racionales?, ¿cómo reaccionan profesores y alumnos? Estas preguntas se pueden responder con las respuestas que dieron para la segunda ecuación, los resultados vuelven a coincidir con lo analizado en los textos, con lo expresado en los programas y con el pasado de la ecuación cuadrática. Así como varios autores en los textos aceptan erróneamente que el método de factorización se puede utilizar sólo en casos especiales, también **profesores y alumnos sólo pueden utilizar el método de factorización para cierto tipo de ecuaciones cuadráticas, aquellas que contienen raíces enteras.**

Veamos un concentrado de las respuestas de profesores y alumnos, en cuanto al método utilizado para la solución de las dos ecuaciones, la que contiene sólo raíces enteras y aquella que incluye una raíz racional.

Estrategias utilizadas por los profesores, para resolver las ecuaciones

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Profesor	Ecuación a) Raíces enteras	Ecuación b) Una raíz entera y una racional
A	Factorización	Fórmula general
B	Factorización	Completando el trinomio
C	Factorización	Completando el trinomio
D	Factorización	Fórmula general
E	Factorización	Fórmula general
F	Factorización	Fórmula general
G	Con calculadora programable	Con calculadora programable
H (imparte clases de física)	Factorizó, pero no resolvió la ecuación	Fórmula general
I (imparte clases de física)	Obtuvo una raíz, utilizando la fórmula general	Fórmula general
J (imparte clases de física)	Factorizó, pero no resolvió la ecuación	Fórmula general
K (imparte clases de computación)	Fórmula general	Fórmula general

Estrategias utilizadas por los alumnos, para resolver las ecuaciones

Alumno	Ecuación a) Raíces enteras	Ecuación b) Una raíz entera y una racional
A	Factorización	Factorización
B	Factorización	Fórmula general
C	Factorización	Fórmula general
D	Factorización	Factorización
E	Factorización	Fórmula general

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Podemos ver que el método de factorización tiene preferencia, siempre y cuando las raíces sean enteras. La mayoría de los profesores utilizó este método para solucionar la primera ecuación, el profesor "G" utilizó la calculadora programable y dos profesores utilizaron la fórmula general. Pero en el caso de los alumnos, todos utilizaron el método de factorización.

No obstante en la segunda ecuación, en la mayoría de los casos, ¡el método de factorización fue desplazado! Los profesores optaron por utilizar el método de completar el trinomio cuadrado perfecto, o bien, la fórmula general, que como ya lo hemos mencionado, es el mismo método.

Con lo que respecta a los alumnos ocurrió algo similar, la mayoría opto por utilizar fórmula general, sin embargo dos alumnos "A" Y "D", utilizaron el método de factorización. Así que podemos preguntarnos, ¿Qué es lo que ocasionó el cambio de preferencia?

Para ver las preferencias de profesores y alumnos ante este nuevo escenario se formaron tablas y se realizó para cada una de ellas su gráfica de barras.

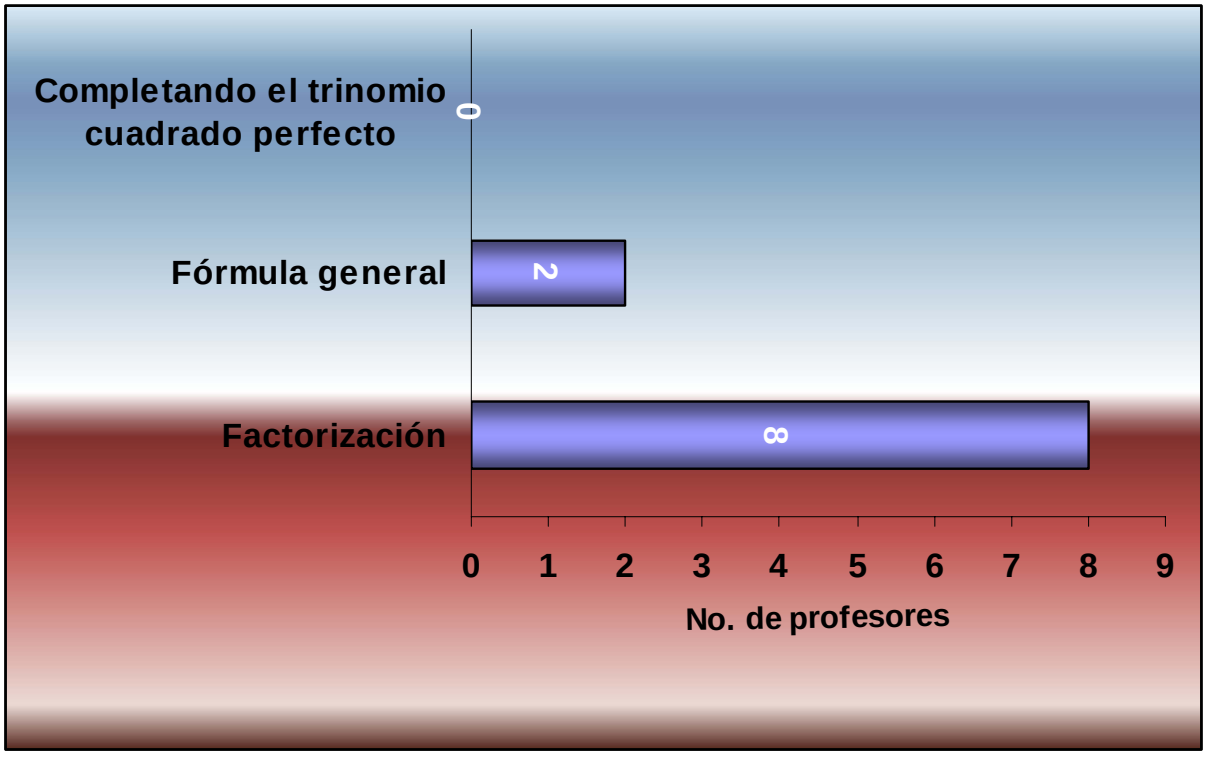
Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Métodos utilizados por los profesores para solucionar la primera ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, (raíces enteras).

Profesores	
Método utilizado	**No. de Profesores**
Factorización	8
Fórmula General	2
Completando el trinomio cuadrado perfecto	0

Nota. Se omitió el profesor que utilizó la calculadora.

Gráfica (Profesores)



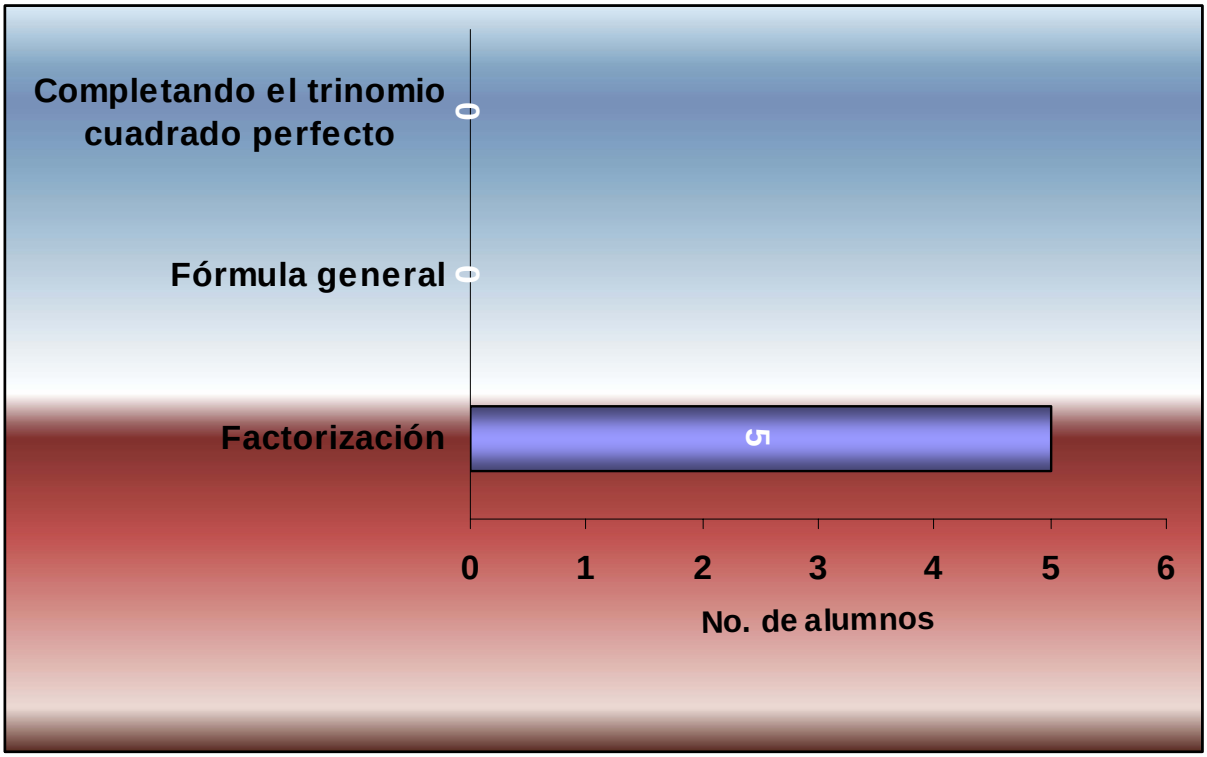
Haciendo la interpretación de la tabla y de la gráfica, podemos decir que la mayoría de los profesores prefieren el método de factorización para solucionar ecuaciones cuadráticas con raíces enteras (pequeñas).

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Métodos utilizados por los alumnos para solucionar la primera ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, (Raíces enteras).

Alumnos	
Método utilizado	**No. de Alumnos**
Factorización	5
Fórmula General	0
Completando el trinomio cuadrado perfecto	0

Gráfica (Alumnos)



Tanto en la tabla como en la gráfica se puede distinguir que los alumnos prefieren utilizar el método de factorización para solucionar ecuaciones cuadráticas con raíces enteras (pequeñas).

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

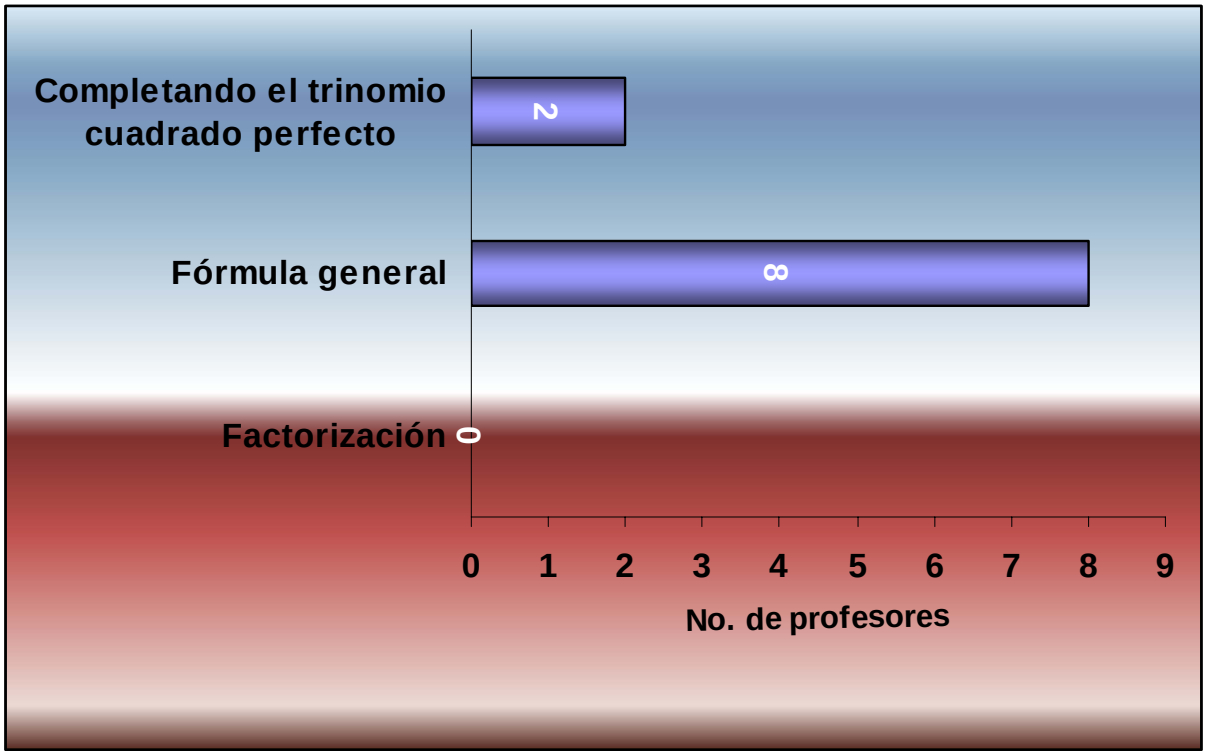
Ahora veamos las tablas y gráficas para la segunda ecuación, aquella que contempla una raíz racional:

Métodos utilizados por los profesores para solucionar la segunda ecuación $a^2 - 1.5a - 10 = 0$, (una raíz entera y una raíz racional).

Profesores	
Método utilizado	**No. de Profesores**
Factorización	0
Fórmula General	8
Completando el trinomio cuadrado perfecto	2

Nota. Se omitió el profesor que utilizó la calculadora.

Gráfica (Profesores)

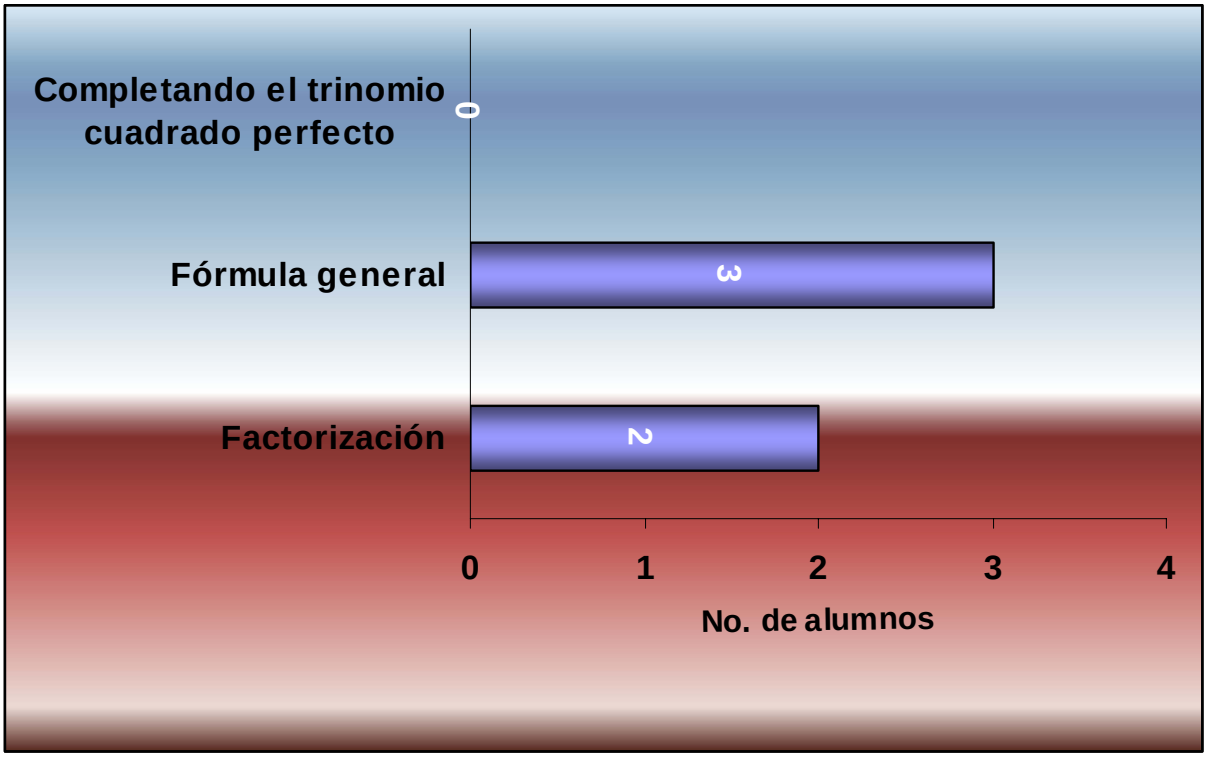


Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Métodos utilizados por los alumnos para solucionar la segunda ecuación $a^2 - 1.5a - 10 = 0$, (una raíz entera y una raíz racional).

Alumnos	
Método utilizado	**No. de Alumnos**
Factorización	2
Fórmula General	3
Completando el trinomio cuadrado perfecto	0

Gráfica (Alumnos)



Si nos ayudamos de los cuadros y las gráficas con respecto a la solución de la segunda ecuación $a^2 - 1.5a - 10 = 0$, que es una ecuación con una raíz entera y una racional, las preferencias cambian, ya no es el método de factorización el preferido, creemos que esto se debe a la existencia de un obstáculo para seguir utilizando este método. **Por lo cual podemos decir que cuando se tiene una ecuación cuadrática con una raíz racional (o ambas raíces racionales), la preferencia es utilizar la fórmula general.**

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Analicemos lo siguiente, si el método de factorización fue el más utilizado al solucionar la primera ecuación, ¿por qué los profesores y alumnos lo hicieran a un lado una vez que se enfrentaron a la segunda ecuación?, pensamos que la causa es que este método no se ha generalizado, es decir la mayoría de los alumnos y profesores utilizan este método, sólo cuando les es posible encontrar dos números que multiplicados den el tercer término del trinomio cuadrado y sumados den el coeficiente del segundo término, sólo así pueden utilizar el método.

Para verificar estas afirmaciones analicemos las respuestas del tercer inciso, donde por instrucción se les pide utilizar el método de factorización, la ecuación presentada $x^2 + 7x + 9 = 0$, tiene la característica de contar con raíces irracionales.

Pregunta 3

Utilizando el método de factorización resuelve la siguiente ecuación (indica tu proceso)

$$x^2 + 7x + 9 = 0$$

Se concentraron las respuestas de profesores y alumnos en tablas. Veamos primeramente las respuestas de los profesores

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Respuestas de los profesores

Profesor	Respuesta	Observación
A	No he podido resolverlo por el método que pides	
B		La resolvió, pero utilizando el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.
C		La resolvió, pero utilizando el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.
D	$(x+5.3)\left(x+\frac{9}{5.3}\right)=0$	Hubo un intento por encontrar los números por tanteos, es una solución aproximada*
E	No tiene factores enteros	
F		Sin respuesta
G		Por calculadora programable
H	$(x+1.698)(x+5.302)=0$	Se encontraron los números por tanteos *
I	$(x+1.7)(x+5.3)=0$	No indica el proceso, y presenta una aproximación
J	$(x+1.698)(x+5.302)=0$	Se encontraron los números por tanteos *
K		La resolvió, pero utilizando la formula general

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Respuestas de los alumnos

Alumno	Respuesta	Observación
A		La resolvió, pero utilizando el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.
B		La intenta resolver pero utilizando el método de completar el trinomio.
C		La intenta resolver pero utilizando el método de completar el trinomio.
D	No hay números que alcancen para dar 9 y 7. Por este método no se puede.	Se da cuenta del obstáculo del método de factorización.
E		La intenta resolver pero por formula general.

Analicemos las respuestas; el profesor "A" menciona: "*no he podido resolverlo por el método que me pides"*, interesante respuesta, consideramos que el profesor entendió muy bien la situación, sólo que le fue imposible utilizar el método, esto coincide con lo que hemos venido mencionando, el método de factorización no es, ni ha sido visto como un método general. Tanto en programas, libros de texto, y en muchos momentos históricos no se le ha dado la oportunidad a este método de ser general.

Algo similar debe haber pasado con los demás entrevistados, por ejemplo el profesor "E", menciona "no tiene factores enteros". Debemos suponer que este profesor tiene la creencia de que solo es posible utilizar el método de factorización para solucionar ecuaciones cuadráticas con raíces enteras.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Ahora bien, comparemos la respuesta del profesor "E": "no tiene factores enteros", con la respuesta del alumno "D": "no hay números que alcancen para dar 9 y 7, por este método no se puede". Que tal, los alumnos aprenden muy bien, lamentablemente ese aprendizaje no los llevará a la autonomía, desafortunadamente no hemos logrado que los alumnos aprendan a aprender, lo que hacemos con nuestros alumnos la mayoría de las veces es que aprendan procesos y verdades absolutas. Si el profesor dice "no se puede", el alumno dice "no se puede".

En este sentido se hace necesario que los alumnos transiten por situaciones problema, que ellos puedan resolver (no que el profesor les diga cómo resolverlos metódicamente), que les permitan ver más que conocimientos acabados.

Por otro lado la mayoría de los profesores no hicieron caso a la restricción de resolver la ecuación por el método de factorización, es decir que no entendieron correctamente la pregunta, o bien, es posible que se hayan dado cuenta del obstáculo, más sin embargo no intentaron salvarlo, sino que le dieron la vuelta y utilizaron ya sea el método de completar el trinomio cuadrado perfecto o el de la fórmula general. Esto coincide con lo mencionado en el análisis de textos. ***"Una vez que se presenta una ecuación cuadrática con raíces grandes, racionales, irracionales o imaginarias. El método es desplazado, ya sea por el método de completar el trinomio o el de la fórmula general"***

Lo más cerca de la respuesta esperada fue por parte de los profesores D, H e I (los que están señalados con un asterisco), ellos, lograron un acercamiento, y su estrategia fue utilizar el método de tanteos, es decir prueba y error, para esto tuvieron la necesidad de utilizar decimales. Aquí es importante hacer notar que el método de factorización está atado a la habilidad de encontrar la suma y la multiplicación de dos números. Sí a las personas se les dificulta, o bien, no pueden encontrar los números, sencillamente optan por otro método. Por eso, son explicables las leyendas que manejan programas y textos, donde mencionan que el método de factorización sólo es aplicable cuando se puede factorizar el trinomio cuadrado que esta presente en una ecuación cuadrática.

Con lo que respecta a los alumnos los resultados son similares, ninguno de ellos logró resolver la ecuación utilizando el método de factorización, lo que hicieron fue utilizar los métodos alternos, ya sea completando el trinomio, o utilizando fórmula general, es decir lo que hicieron los profesores, lo que existe en el sistema educativo. Algo importante que mencionar es que todos los estudiantes intentaron resolver la ecuación incluso haciendo a un lado la restricción.

Después de analizar las repuestas, podemos darnos cuenta, que **existe un obstáculo cuando se desea utilizar el método de factorización para solucionar una ecuación cuadrática que contenga raíces racionales e irracionales. Este obstáculo es que a las personas se les dificulta encontrar dos números que cumplan con las condiciones de suma y multiplicación.** En nuestra propuesta trataremos de encontrar un método que subsane esta deficiencia, pensamos que salvando este obstáculo, el método de factorización se puede generalizar.

Ahora pasemos a la última pregunta, la cual tiene la intención, de ver cuál es el dominio del saber solucionar una ecuación cuadrática. Además de identificar si profesores y alumnos ven a la factorización como el proceso inverso al producto de dos binomios.

Pregunta 4

Escribe una ecuación cuadrática que tenga por soluciones 5 y -4

Esta pregunta es clave, nos sirvió para darnos cuenta cómo relacionan profesores y alumnos, las ecuaciones cuadráticas con la multiplicación de binomios con término común. De hecho la mayoría utilizó esta estrategia. Ya hemos visto en el análisis de textos que en la multiplicación de binomios, está la esencia del método de factorización. Cuando resolvemos una ecuación utilizando este método, existe la necesidad de factorizar. Esto demuestra que el método es muy importante, porque significa a las ecuaciones cuadráticas.

Pero, ¿qué pasó?, con el profesor que para solucionar las ecuaciones utilizó la calculadora programable, donde solamente introducía datos y recibía la respuesta, se equivocó, no pudo encontrar alguna ecuación con raíces 5 y -4, también no hizo nada por comprobar su respuesta. En el siguiente cuadro se presenta un resumen de respuestas, en donde se incluyen observaciones.

Respuestas de los profesores

Profesor	Respuesta	Observación
A	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 10 = 0$	Propone varias ecuaciones equivalentes
B	$x^2 - x - 20 = 0$	No indica el proceso
C	$a^2 - a - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común.
D	$x^2 + x - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común, pero no intercambia los signos.
E	$x^2 - x - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común.
F		Sin respuesta
G	$x^2 - 9x + 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común, pero la multiplicación la realiza mal.
H	$x^2 - x - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común.
I	$x^2 - 9x + 20 = 0$	No indica el proceso y esta mal.
J	$x^2 - x - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común.
K	$x^2 - x - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Respuestas de los alumnos.

Alumno	Respuesta	Observación
A	$x^2 - x - 20 = 0$ $2x^2 - 2x - 40 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común, y nos presenta dos soluciones
B	$x^2 + x - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común, pero no intercambia los signos.
C	$x^2 - x - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común.
D	$x^2 - 1 - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común, pero la multiplicación la realiza mal.
E	$x^2 + x - 20 = 0$	Utiliza la estrategia de multiplicar binomios con un término común, pero no intercambia los signos.

La parte que nos importa del análisis de esta pregunta es, ¿qué tan presente se tiene la multiplicación de binomios con un término común, como productor de ecuaciones cuadráticas? Todos los entrevistados que llegaron a propuestas correctas utilizaron esta percepción, esto nos indica que la mayoría tuvo presente este conocimiento.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Conclusiones capítulo 4

1) *Los métodos más conocidos en el ambiente escolar son:*
   - *Factorización*
   - *fórmula general*
   - *Completando el trinomio cuadrado perfecto*

2) *Casi todos los entrevistados conocen el método de factorización.*

3) *Cuando se presentan raíces enteras pequeñas, la mayoría opta por utilizar el método de factorización.*

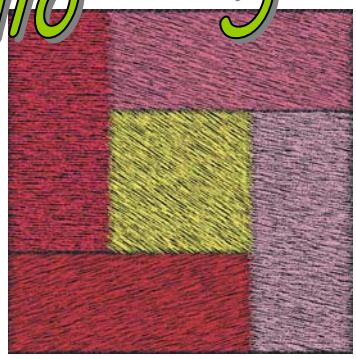
4) *Cuando se involucran raíces racionales, entonces la preferencia cambia a utilizar la fórmula general.*

5) *Cuando se tiene una ecuación cuadrática con números irracionales, nadie utiliza el método de factorización.*

6) *La mayoría de los entrevistados puede percibir a una ecuación cuadrática como el producto de binomios con un término común.*

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Capítulo 5



La suma, multiplicación y diferencia de dos números

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Suma y multiplicación de los mismos números

En capítulos anteriores hemos visto la importancia que tiene encontrar dos números para los cuales se conoce su suma y su multiplicación para poder resolver una ecuación cuadrática utilizando el método de factorización. Esta situación se complica cuando los números no son enteros. En este capítulo abordaremos un método que nos permite salvar este obstáculo.

La suma de dos números

Ya se ha mencionado que la suma de dos números cobra gran importancia en la solución de ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización, esta operación de adición puede representar diferentes situaciones, por ejemplo, en un ambiente geométrico puede representar la mitad del perímetro de un rectángulo, es decir, su semiperímetro.

La multiplicación de dos números

Un segundo parámetro importante en el proceso de factorización de trinomios cuadrados es el producto de dos números. Cuando multiplicamos dos números es posible que estemos encontrando el área de un rectángulo.

En la figura si sumamos la longitud a y la longitud b, obtendremos la mitad del perímetro de la fotografía. (contorno de la fotografía)

Si multiplicamos los valores de a y b, entonces tendremos el área utilizada de papel fotográfico.

a+b = semiperímetro

a.b = área

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Basándonos en la importancia que tiene la suma y la multiplicación de los mismos números para encontrar la factorización de un trinomio cuadrado, busquemos entonces si existe alguna relación que nos permita encontrar estos números.

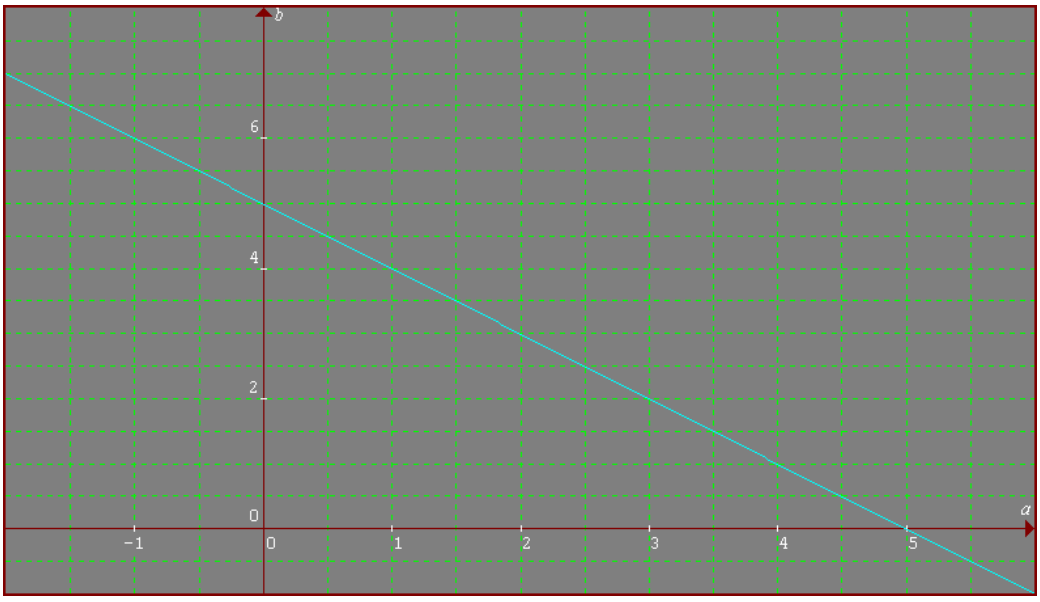
En la búsqueda de alguna relación entre la suma y la multiplicación de dos números

Suma de dos números

Supongamos que la suma de dos números es igual a 5 (partiendo de que en un trinomio cuadrado el coeficiente del término lineal es conocido). Existen infinitos pares de sumandos que sumen cinco, tenemos múltiples opciones, las cuales pueden quedar determinadas por la ecuación $a+b=5$

Si despejamos b, podemos obtener la expresión: $b=5-a$

Si representamos en un sistema cartesiano esta relación, con los valores de "a" en el eje horizontal y los valores de "b" en el eje vertical, podemos obtener la siguiente gráfica.



Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

La gráfica resultante es una línea, donde cada uno de sus puntos cumple con la condición de que la suma de sus coordenadas siempre es igual a cinco. Bajo esta perspectiva se puede visualizar la gran variedad de sumandos que pueden dar lugar a una suma igual a cinco.

Por ejemplo, el punto (0,5) ⟶ 0+5=5

En este punto el valor de la abscisa es igual a cero, mientras que la ordenada es igual a cinco, si obtenemos la suma de estas dos coordenadas obtendremos el valor de cinco.

Cualquier punto que tomemos de la recta, la suma de sus coordenadas siempre será cinco. Otros ejemplos serían:

Punto	Suma de coordenadas
(1,4)	1+4=5
(2,3)	2+3=5
(-1,6)	-1+6=5
$\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5$, etc.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

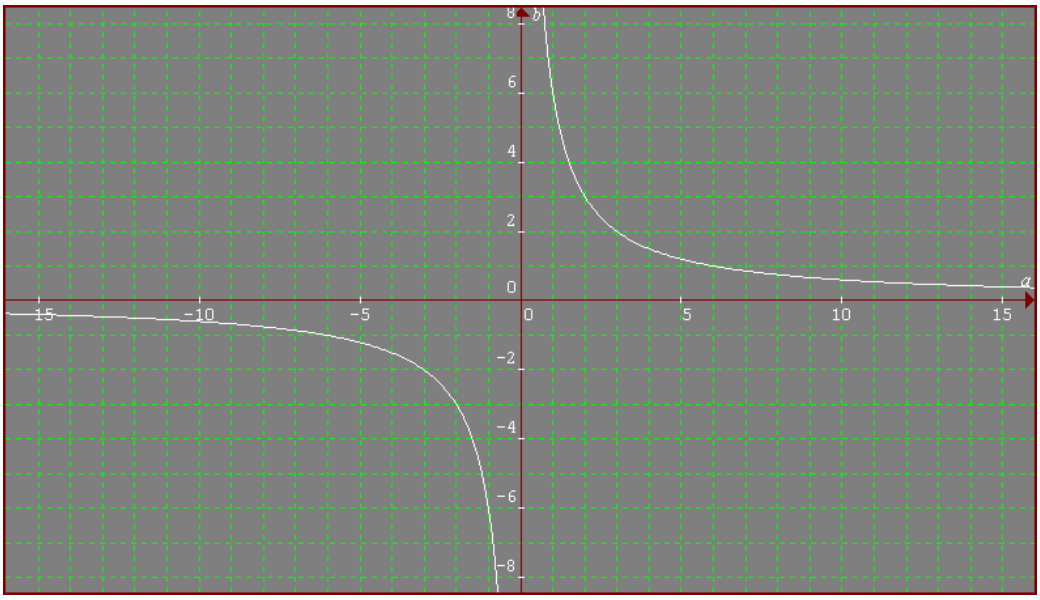
Producto de dos números

Ahora consideremos que el producto de estos mismos números es conocido: $a \bullet b = 6$, (el término independiente de un trinomio cuadrado)

Si despejamos "b", podemos obtener la expresión:

$$b = \frac{6}{a}$$

Representemos esta relación en el sistema cartesiano (ver gráfica)



Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

La gráfica resultante es una hipérbola, y cada uno de sus puntos cumple con la condición de que la multiplicación de sus coordenadas siempre es igual a seis. En la gráfica podemos visualizar la gran variedad de factores que pueden dar lugar a un producto igual a seis. Por ejemplo el punto (1,6), si multiplicamos las coordenadas de este punto, es decir abscisa por ordenada, (1)(6)=6

Otros ejemplos:

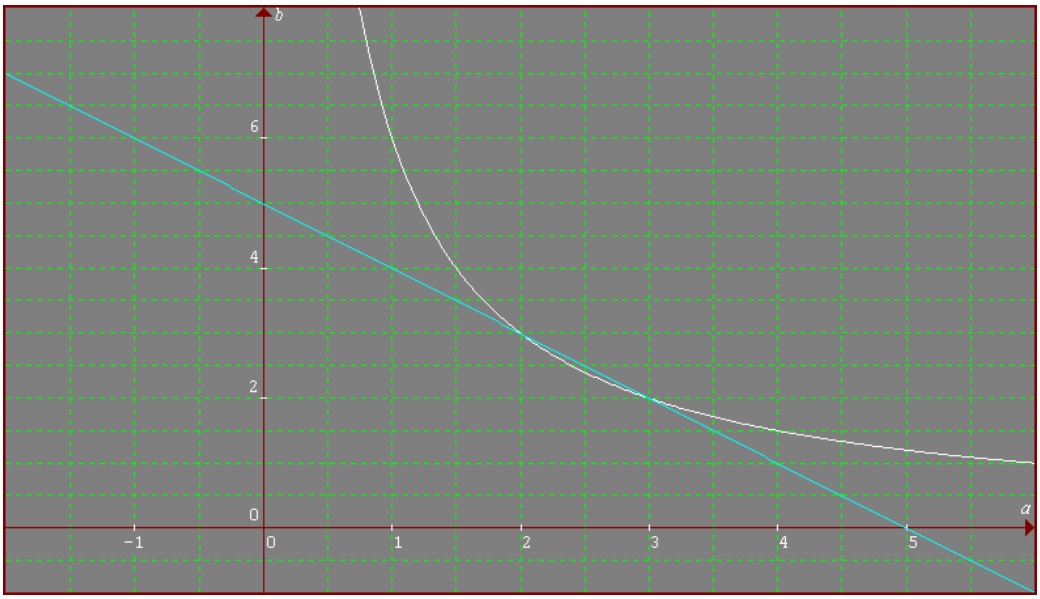
Punto	Multiplicación de coordenadas
(2,3)	(2)(3)=6
(-6,-1)	(-6)(-1)=6
(-1,-6)	(-1)(-6)=6
$\left(\frac{1}{2},12\right)$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{12}{\ }\right)=6$, etc.

Por un lado tenemos una infinidad de números que pueden sumar cinco y por otro lado tenemos una infinidad de números cuyo producto es seis.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Suma y Producto de dos números

Utilicemos los registros gráficos para observar las relaciones existentes entre las operaciones de suma y multiplicación, con esta intención sobrepongamos las dos gráficas en un mismo plano cartesiano, es decir la línea resultante de la suma de dos números con la hipérbola de la multiplicación de esos mismos números:



Los números que suman 5 y multiplicados producen seis son las intersecciones de ambas gráficas, los puntos (2,3) o (3,2).

Aunque dos puntos son los que satisfacen las condiciones de suma y multiplicación, en realidad ambos puntos representan a los mismos números, solo que en distinto orden, cumpliendo así con la propiedad de conmutatividad de la suma y la multiplicación, así, los números que suman cinco y multiplicados producen seis son el dos y el tres. Sí bien esto se puede hacer mediante una operación mental, (operación muy utilizada al factorizar trinomios cuadrados) cabe mencionar que estamos buscando alguna relación que nos pueda ayudar a obtener estos números

Si logramos encontrar un método para encontrar estos números, estaremos salvando el principal obstáculo, para generalizar el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática, además de tener elementos que nos permitan darle significados a este saber.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

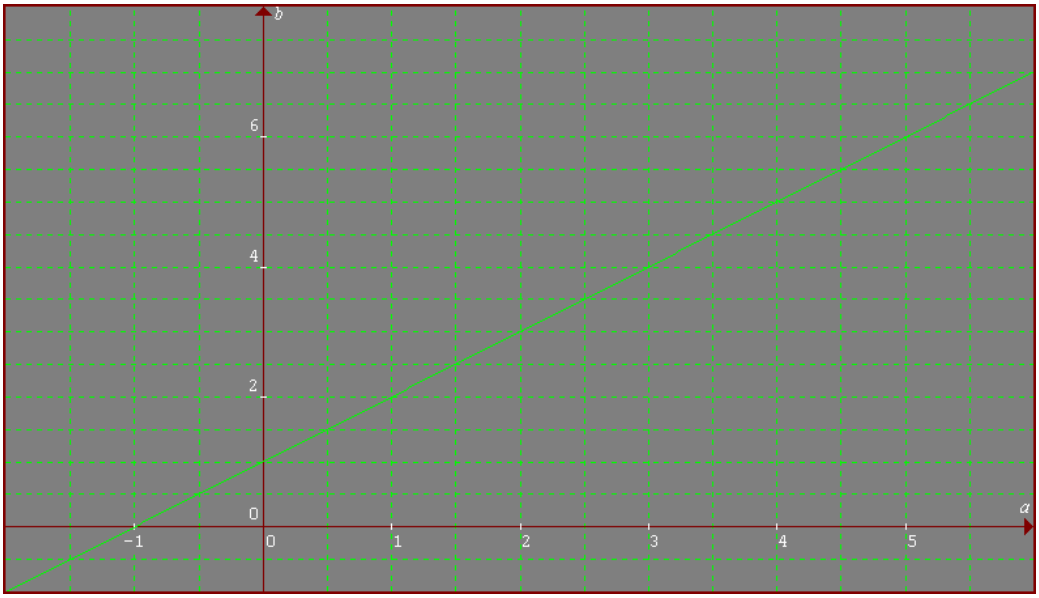
Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Diferencia entre dos números

Retomando el ejemplo anterior, los números que suman cinco y multiplicados arrojan seis, son el 3 y el 2. La diferencia entre estos números es uno.

Sí generalizamos, la diferencia entre dos números igual a uno, podemos obtener la expresión $b-a=1$, ahora bien si despejamos a "b" podemos tener que: $b=1+a$

Graficando la expresión anterior se tiene:



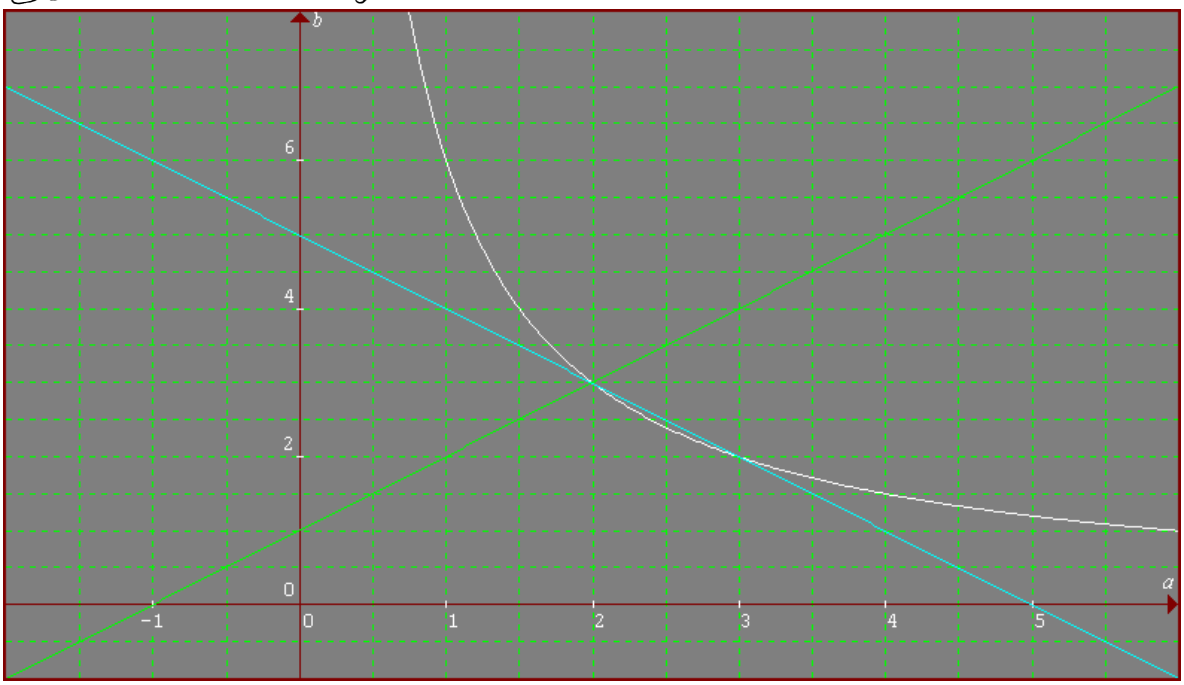
El resultado es una relación lineal, una vez más existen múltiples opciones de números cuya diferencia es igual a uno, es decir existen muchos puntos cuya diferencia entre sus coordenadas es uno, por ejemplo (0,1), (1,2), (5,6), etc. Una infinidad de pares.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Suma, multiplicación y Diferencia entre dos números

En este momento tenemos de alguna forma las múltiples opciones de suma, multiplicación y diferencia de dos números. Para poder confrontar las tres operaciones entre dos números, podemos sobreponer sus gráficas.

Relacionando las tres operaciones



Observando la gráfica podemos deducir lo siguiente.

a) *La gráfica que representa la suma de dos números es una recta*
b) *La gráfica que representa la multiplicación de dos números es una curva*
c) *La gráfica que representa la diferencia de dos números es una recta*
d) *Las tres gráficas comparten un punto*
e) *El punto (2,3) cumple con la condición de suma igual a cinco y producto igual a seis*
f) *Este mismo punto es la intersección de las dos rectas,*

Basándose en las observaciones anteriores podemos intuir que las tres operaciones entre dos números guardan cierta relación, relación que involucra el punto de intersección de dos rectas.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Iniciemos con la siguiente pregunta

¿Es posible conocer la diferencia de dos números, si se conocen la suma y el producto de los mismos números?

Sea.

$a+b=s$ (s = suma de dos números)

$ab=m$ (m = producto de esos mismos números)

y

$a-b=d$ (d =diferencia de los mismos números)

Si relacionamos la suma y la resta, podremos formar un sistema de ecuaciones

$$a+b=s$$
$$a-b=d$$

Solucionando para "a" y "b" tenemos

$$a=\frac{s+d}{2}$$

$$b=\frac{s-d}{2}$$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Hasta aquí tenemos los números a y b, los cuales están en función de su suma y su diferencia.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

De alguna manera tenemos los valores de a y de b. Ahora involucremos a la multiplicación.

$$ab = m$$

$$\left(\frac{s+d}{2}\right)\left(\frac{s-d}{2}\right) = m$$ Sustituyendo los valores de a y b

$$(s+d)(s-d) = 4(m)$$ Multiplicando por cuatro

$$s^2 - d^2 = 4m$$ Desarrollando los binomios conjugados

$$d^2 = s^2 - 4m$$ Despejando el cuadrado de "d"

Esta última expresión es la relación existente que trabajaremos entre las tres operaciones entre dos números.

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual, al cuadrado de la suma menos cuatro veces su multiplicación

Podemos afirmar que: si es posible encontrar la diferencia si se conocen la suma y la multiplicación de dos números.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Verificación

Sean los números 3 y 2

s = 5 suma

m = 6 multiplicación

d = 1 diferencia

Verificando la expresión encontrada

$$d^2 = s^2 - 4m$$

$$1^2 = 5^2 - 4(6)$$
$$1 = 25 - 24$$
$$1 = 1$$

Sí, coincide, pues bien, verifiquemos para diferentes tipos de números ayudándonos de una tabla, en este caso se utilizó el paquete Excel.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Relaciones entre la suma, multiplicación y diferencia de dos números						
Números propuestos		suma	diferencia	producto	d^2	s^2-4m
a	b	s	d	m		
2	1	3	1	2	1	1
-5	7	2	-12	-35	144	144
0,25	-0,75	-0,5	1	-0,1875	1	1
20	40	60	-20	800	400	400
-8	8	0	-16	-64	256	256
0,5	0,5	1	0	0,25	0	0
2,23606798	3	5,236068	-0,763932	6,7082039	0,58359214	0,58359214
2	3,1622777	5,1622777	-1,162278	6,3245553	1,35088936	1,35088936
-2	-3	-5	1	6	1	1
100	200	300	-100	20000	10000	10000
9	11	20	-2	99	4	4
20	21	41	-1	420	1	1

Tabla donde se proponen pares de números, incluyendo enteros, racionales e irracionales. Por ejemplo en el renglón siete, donde aparece el número 2.23606798, es el valor propuesto para "a" pero redondeado por el paquete Excel, en realidad se capturo como raíz de cinco. De forma similar el valor propuesto para "b" en el renglón 8 se trata de raíz de diez.

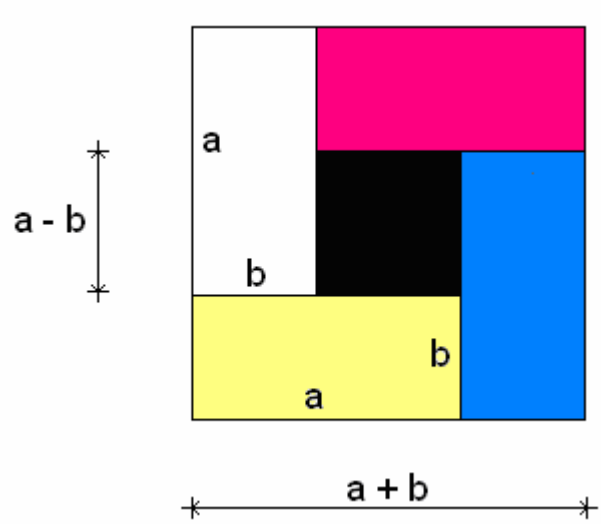
Nota: las herramientas informáticas no permiten el tratamiento de irracionales, sólo su aproximaciones en decimales.

En la tabla se proponen diferentes números reales, incluso en las filas siete y ocho se han utilizado números irracionales, no obstante siempre se cumple la igualdad de las dos últimas columnas.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Análisis geométrico

Una representación gráfica que podemos utilizar es la formada por cuatro rectángulos iguales, ordenados como se muestra en la figura.



Los cuatro rectángulos son iguales, cada uno de ellos tiene un área igual a "**a.b**" (multiplicación de dos números). Al estar ordenados de esta manera se forman dos cuadrados que nos van a ser de utilidad, en primer lugar analicemos el cuadrado más grande, aquel que tiene por lados la suma "**(a+b)**" (suma de dos números). En segundo lugar observemos el cuadrado pequeño que queda limitado por los cuatro rectángulos. Este último tiene por lados la diferencia "**(a-b)**" (diferencia de dos números).

La figura que estamos proponiendo contiene las tres operaciones que deseamos relacionar, es decir, **la suma, la multiplicación y la diferencia de dos números.**

Intentemos entonces obtener la expresión encontrada en el análisis algebraico, aquella que involucra estas tres operaciones.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Para lograr esto realicemos primeramente un cálculo áreas:

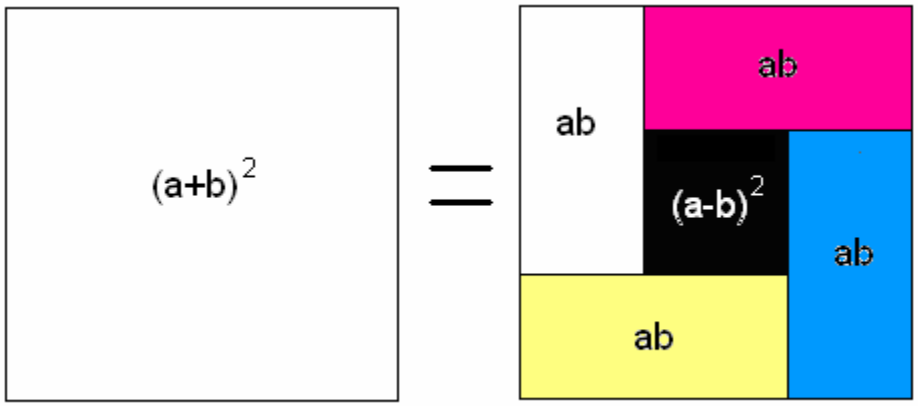
Área del cuadrado grande = **$(a+b)^2$** (ya que cada uno de sus lados es **a+b**)

Área del cuadrado pequeño = **$(a-b)^2$** (ya que cada uno de sus lados es **a-b**)

Área de un rectángulo = **ab**

Área de los cuatro rectángulos = **4ab**

Ahora bien podemos hacer una igualación de áreas, ya que el área del cuadrado grande la podemos obtener sumando el área del cuadrado pequeño y el área de los cuatro rectángulos idénticos.



$$(a+b)^2 \quad = \quad (a-b)^2 + 4ab$$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Ahora si lo que deseamos es el cuadrado de la diferencia, es decir **$(a-b)^2$**, entonces podemos quitar el área de los cuatro rectángulos iguales **4ab**, a el área del cuadrado grande **$(a+b)^2$**.

Por lo que podemos escribir.

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

Utilizando la notación de:

a-b = d (diferencia de dos números)

a+b = s (suma de dos números)

ab = m (multiplicación de dos números)

Realizando el cambio de variables, tenemos la expresión obtenida en el análisis algebraico.

$$d^2 = s^2 - 4m$$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Encontrando dos números, de los cuáles se conoce su suma y su multiplicación

Bien, ahora nuestro reto es obtener un método para encontrar dos números de los cuáles se conoce su suma y su multiplicación.

Iniciemos diciendo que la suma de dos números es igual a 5 y su producto es 6, entonces podemos expresar lo siguiente.

$$a+b=s=5$$

$$ab=m=6$$

Entonces encontremos la diferencia de los dos números, para esto podemos utilizar la expresión que relaciona a estas tres operaciones.

$$d^2=s^2-4m$$

Sustituyendo s = 5, y m = 6

$$d^2=5^2-4(6)$$
$$d^2=1$$
$$d=\sqrt{1}$$
$$d=1$$

Listo, hemos encontrado que la diferencia de los dos números es igual a uno.

Nota: En la obtención de la raíz cuadrada se puede omitir el valor negativo, no obstante se podría ocupar.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Conociendo la suma y diferencia de dos números, podemos formar un sistema de ecuaciones, el cual al solucionarlo nos permitirá conocer los dos números involucrados, veamos.

$$a+b=5$$
$$\underline{a-b=1}$$

Sumando las ecuaciones

$$a+b=5$$
$$\underline{a-b=1}$$
$$2a \quad =6$$
$$a=3$$

Para obtener el valor de "b", podemos restar las ecuaciones.

$$a+b=5$$
$$\underline{a-b=1}$$
$$2\mathrm{b}=4$$
$$b=2$$

Bien, hemos podido obtener los dos números, utilizando un método, ¡no por ensayo y error!

Verificación

$$a=3$$
$$b=2$$
$$a+b=5$$
$$ab=6$$
$$a-b=1$$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Conclusiones del capítulo

1) *Las operaciones de: suma, multiplicación y diferencia; entre dos números guardan una relación numérica.* $d^2 = s^2 - 4m$

2) *Conociendo la suma y el producto de dos números se puede conocer la diferencia de esos números.*

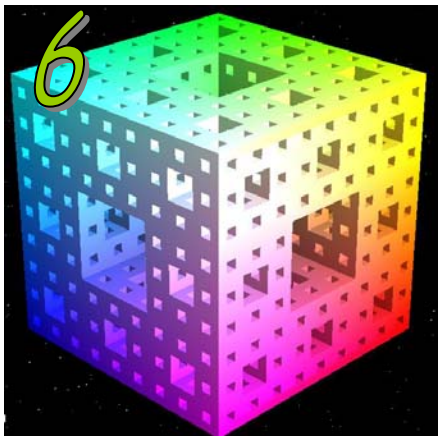
3) *Conociendo la suma y la diferencia de dos números se pueden conocer los números.*

4) *La suma y la diferencia de dos números forman un sistema de ecuaciones lineales.*

5) *Por lo que siempre es posible encontrar los números que den una cierta suma y un cierto producto.*

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Capítulo 6



Diseño de la secuencia didáctica

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

En este último capítulo se tomaron elementos de los capítulos anteriores para el diseño de una secuencia didáctica, dosificada en cuatro actividades, donde se espera que los alumnos puedan darle sentido al saber a enseñar.

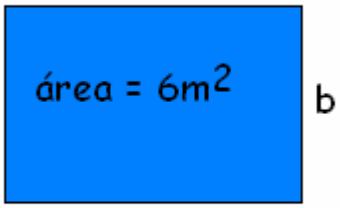
Presentemos el prediseño de la secuencia

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 1 (individual)

En estas actividades tendrás la oportunidad de formarte diferentes interpretaciones de la suma de dos números y el producto de los mismos números, aunado a la relación existente con la diferencia de estos números. El conjunto de conocimientos obtenidos los podrás utilizar para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

- *El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados.*



Perímetro = 10m

Instrucciones:

a) Observa la figura anterior y de acuerdo a los datos proporcionados da el valor numérico de las siguientes expresiones

$ab =$ _____ $a+b =$ _____

b) Si la expresión " ab " representa el área del rectángulo, ¿Qué representa " $a+b$ "?

_____

c) Empleemos la siguiente notación:

$s =$ La suma de los números a y b, es decir " $a+b$ "

$m =$ La multiplicación de los números a y b, es decir " ab "

1) ¿Cuánto vale " s "? _____
2) ¿Cuánto vale " m "? _____

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Continuación.

d) Utilizando la expresión $d^2 = s^2 - 4m$, calcula el valor numérico de "d"

d = ____

e) Si a la diferencia de dos números la representamos con la letra "d"

$d =$ La diferencia entre los números a y b, es decir "$a - b$"
¿Cuánto vale "$a - b$"?_____

f) Completa el siguiente sistema de ecuaciones lineales con los datos obtenidos
$a + b =$
$a - b =$

g) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales del inciso f) y encuentra los valores de "a" y "b"
$a =$ _____

$b =$ _____

h) Regresando a la figura del rectángulo planteado al inicio de la actividad, ¿Qué representan $"a"$ y $"b"$? _____

i) Evalúa las siguientes expresiones con los valores obtenidos.

$a + b =$
$ab =$
$a - b =$

j) Observa los valores del incisos **i), a)** y **e)**. date cuenta que son los mismos.

k) El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados. **¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?**

_____

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 2 (en equipo). Se sugieren equipos de tres a cuatro personas

Material:

- 5 piezas geométricas
- Regla para medir (En centímetros)
- Papel y lápiz

Parte 1

a) Compara tus resultados obtenidos en la Actividad 1, con tus compañeros de equipo

Parte 2

b) Calcula el área de cada una de las cinco piezas proporcionadas (En centímetros Cuadrados)

c) Utilizando las cinco piezas proporcionadas construye un cuadrado.

d) Encuentra el valor numérico de un lado del cuadrado construido (En centímetros)

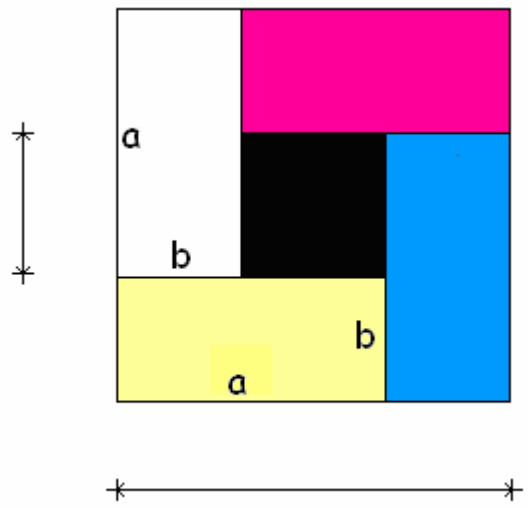
e) Calcula el área del cuadrado construido por los siguientes métodos.

Método 1. Tomándolo como un todo (utilizando el valor encontrado en el inciso **d)**)
Método 2. Sumando las partes (utilizando el inciso **b)**)

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Parte 3 (generalización)

f) La siguiente figura tiene cuatro rectángulos idénticos de lados "a" y "b". Tanto "a" como "b" pueden tomar cualquier valor. Observa detalladamente la figura, y contesta las preguntas.



1) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande?_____
2) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado pequeño?_____

Pon atención, utilicemos la siguiente notación: **s** = la suma de dos números **(a+b)** **d** = la diferencia (resta) de dos números **(a-b)** **m** = la multiplicación dos números **(ab)**

Con respecto a la figura anterior.

3) ¿Qué representaría "s^{2}"?_____
4) ¿Qué puede representar "d^{2}"?_____
5) ¿Qué puede representar "m"?_____
6) ¿Qué representaría "4m"?_____

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

g) ¿Cómo encontrarías el área del cuadrado pequeño, si conocieras el área del cuadrado grande y el área de uno de los rectángulos? Escríbelo con palabras._____
_____

h) De acuerdo a tu descripción anterior completa la siguiente expresión algebraica:

i) $d^2 =$ _____ $-$ _____

j) Observa la expresión encontrada anteriormente y compárala con la utilizada en el inciso d) de la Actividad 1. ¿Cómo son?_____

k) Si conocemos la suma y la multiplicación de dos números. ¿Qué podemos calcular con la expresión encontrada en el inciso j)?_____

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 3 (en equipo)

a) Lee y observa detalladamente la tabla, revisa los valores del renglón, donde se propone el valor de 2 para "a" y el valor de 1 para "b". Entonces completa los renglones restantes observando y deduciendo comportamientos (para esta actividad es recomendable utilizar calculadora y haber realizado las actividades 1 y 2)

Relaciones entre la suma, multiplicación y diferencia de dos números						
Números propuestos		**suma**	**Diferencia (resta)**	**producto**	**d^2**	**s^2-4m**
a	**b**	**s=a+b**	**d=a-b**	**m=ab**		
2	1	3	1	2	1	1
5	3				4	
20	40					
		0	-16	-64		
		-5		6		
		300		20000		
		1.5		-10		
		41		420		

b) Pon atención en las dos últimas columnas, **¡son iguales!**

c) Utilizando la estrategia utilizada para completar los cuatro últimos renglones. Encuentra:

1) los números que sumados dan 7 y su producto es 12
2) los números que sumados dan 7 y su producto es 9

e) Revisa los resultados obtenidos en el inciso anterior, es decir verifica la suma y la multiplicación de los números encontrados.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 4 (individual)

a) Explica el proceso seguido para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización. _____
_____
_____

b) Encuentra los números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación.

1) Suman siete y multiplicados dan doce_____
2) Suman 1.5 y su producto es -10_____
3) Su producto es 9 y su suma es 7_____

c) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización y solo el método de factorización

1) $x^2 + 7x + 12 = 0$	Proceso.	X_1= X_2=
2) $t^2 + 1.5t - 10 = 0$	Proceso.	X_1= X_2=
3) $x^2 + 7x + 9 = 0$	Proceso.	X_1= X_2=

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Estas actividades fueron resueltas por profesores expertos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, quienes nos hicieron el favor de hacer observaciones y sugerencias. Estamos agradecidos con las aportaciones de estas personas, su participación fue de gran ayuda para el rediseño de la secuencia.

Secuencia aplicada a profesores

Se han asignado las letras, O, P, Q, Y R, a los profesores, esperando su comprensión por haber omitido su nombre.

Enseguida presentamos sus respuestas:

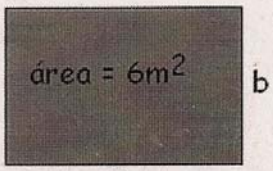
Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

PROFESOR O

En estas actividades tendrás la oportunidad de formarte diferentes interpretaciones de la suma de dos números y el producto de los mismos números, aunado a la relación existente con la diferencia de estos números. El conjunto de conocimientos obtenidos los podrás utilizar para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

Actividad 1 (individual)

- El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados.



Perímetro = 10m

Instrucciones:

a) Observa la figura anterior y de acuerdo a los datos proporcionados da el valor numérico de las siguientes expresiones

$ab =$ 6 $\qquad a+b =$ 5

b) Si la expresión "ab" representa el área del rectángulo, ¿Qué representa "$a+b$"?

La suma de las longitudes a y b

c) Empleemos la siguiente notación:

$s =$ La suma de los números a y b, es decir "$a+b$"

$m =$ La multiplicación de los números a y b, es decir "ab"

1) ¿Cuánto vale "s"? 5
2) ¿Cuánto vale "m"? 6

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Continuación.

d) Utilizando la expresión $d^2 = s^2 - 4m$, calcula el valor numérico de "d"

$d^2 = 25 - 4(6)$

$d^2 = 25 - 24$

$d =$ 1

e) Si a la diferencia de dos números la representamos con la letra "d"

$d =$ La diferencia entre los números a y b, es decir "$a - b$"

¿Cuánto vale "$a - b$"? 1

f) Completa el siguiente sistema de ecuaciones lineales con los datos obtenidos

$a + b = 5$

$a - b = 1$

g) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales del inciso f) y encuentra los valores de "a" y "b"

$a =$ 3

$b =$ 2

h) Regresando a la figura del rectángulo planteado al inicio de la actividad, ¿Qué representan "a" y "b"? el largo y ancho del rectángulo

i) Evalúa las siguientes expresiones con los valores obtenidos

$a + b = 5$

$ab = 6$

$a - b = 1$

j) Observa los valores del incisos **i), a)** y **e)**. date cuenta que son los mismos.

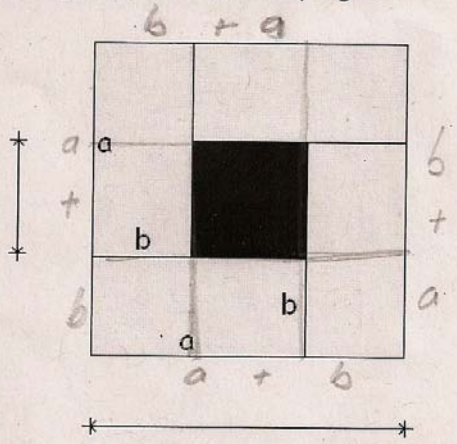
k) El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados. **¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?**

3 y 2 unidades lineales respectivamente

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Parte 3 (generalización)

f) La siguiente figura tiene cuatro rectángulos idénticos de lados "a" y "b". Tanto "a" como "b" pueden tomar cualquier valor. Observa detalladamente la figura, y contesta las preguntas



1) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande? a+b
2) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado pequeño? b^2

Pon atención, utilicemos la siguiente notación:
s = la suma de dos números **(a+b)**
d = la diferencia (resta) de dos números **(a-b)**
m = la multiplicación dos números **(ab)**

Con respecto a la figura anterior.

3) ¿Qué representaría "s^2"? $(a+b)^2$ el área del cuadrado mayor
4) ¿Qué puede representar "d^2"? $(a-b)^2$ el área del cuadrado sombreado.
5) ¿Qué puede representar "m"? el área de uno de los rectángulos
6) ¿Qué representaría "4m"? el área de los 4 rectángulos

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

g) ¿Cómo encontrarías el área del cuadrado pequeño, si conocieras el área del cuadrado grande y el área de uno de los rectángulos? Escríbelo con palabras. al área de cuadrado grande le restamos el área de los 4 rectángulos

h) De acuerdo a tu descripción anterior completa la siguiente expresión algebraica:

i) $d^2 = \underline{\quad s^2 \quad} - \underline{\quad 4m \quad}$

j) Observa la expresión encontrada anteriormente y compárala con la utilizada en el inciso d) de la *Actividad 1*. ¿Cómo son? iguales.

k) Si conocemos la suma y la multiplicación de dos números. ¿Qué podemos calcular con la expresión encontrada en el inciso j)? el cuadrado de la diferencia de ambos números y su raíz será la dif. de ambos números

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 3 (en equipo)

a) Lee y observa detalladamente la tabla, revisa los valores del renglón, donde se propone el valor de 2 para "a" y el valor de 1 para "b". Entonces completa los renglones restantes observando y deduciendo comportamientos (para esta actividad es recomendable utilizar calculadora y haber realizado las actividades 1 y 2)

Relaciones entre la suma, multiplicación y diferencia de dos números						
Números propuestos		suma	Diferencia (resta)	producto	d^2	s^2-4m
a	b	s=a+b	d=a-b	m=ab		
2	1	3	1	2	1	1
5	3	8	2	15	4	4
20	40	60	-20	800	400	400
* -8	-8	0	-16	-64	256	256
* -3	-2	-5	-1	6	1	1
200	100	300	100	20000	10,000	10,000
* 4	-2.5	1.5	6.5	-10	42.25	42.25
21	20	41	1	420	1	1

b) Pon atención en las dos últimas columnas, **¡son iguales!**

c) Utilizando la estrategia utilizada para completar los cuatro últimos renglones. Encuentra:

1) los números que sumados dan 7 y su producto es 12 3 y 4

* 2) los números que sumados dan 7 y su producto es 9

$7^2-4(9)=13$ $d=\sqrt{13}$

e) Revisa los resultados obtenidos en el inciso anterior, es decir verifica la suma y la multiplicación de los números encontrados.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 4 (individual)

a) Explica el proceso seguido para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

_____

_____

_____

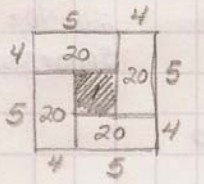
b) Encuentra los números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación.

1) Suman siete y multiplicados dan doce 3 y 4
2) Suman 1.5 y su producto es -10 4 y -2.5
3) Su producto es 9 y su suma es 7 _____

c) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización y solo el método de factorización

1) $x^2 + 7x + 12 = 0$	Proceso. $(x+3)(x+4)$ $x+3=0$ $x=-3$ $x+4=0$ $x=-4$	$X_1 = -3$ $X_2 = -4$
2) $t^2 + 1.5t - 10 = 0$	Proceso. $(t+4)(t-2.5)$	$X_1 = -4$ $X_2 = 2.5$
3) $x^2 + 7x + 9 = 0$	Proceso. $(x+\ )(x-\ )$	$X_1 =$ $X_2 =$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

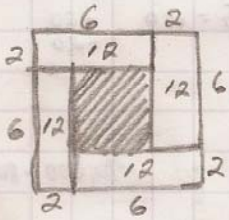


$9^2 = 81$

$5 - 4 = 1$ –

* $81 - 80 = 1$ –

* $= 1$

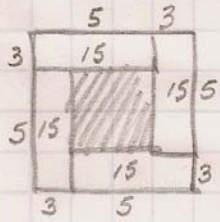


$8^2 = 64$

$6 - 2 = 4$

* $64 - 48 = 16$

* $= 16$

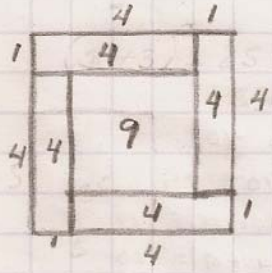


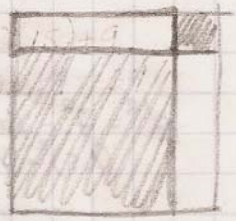
$8^2 = 64$

$5 - 3 = 2$

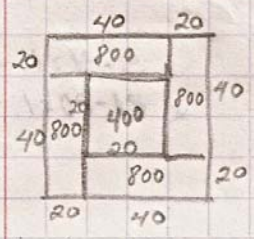
$64 - 60 = 4$

2 $= 4$





Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx



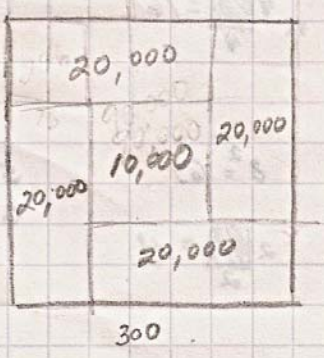
$60^2 = 3600$

$20 - 40 = -20$

$3600 - 3200 = 400$

$= 400$

$\pm\sqrt{400} = 20$ $\quad +20 \quad -20$



$90,000 - 80,000 = 10,000$

$d^2 = s^2 - 4ac = -10$

$(1.5)^2 - (4(-10)$

$a \cdot a(-10 + a) = +10$

$-10a + a^2 = +10$

$a^2 - 10a + 10$

$a = 1a +$

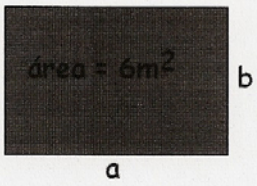
Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

PROFESOR P

En estas actividades tendrás la oportunidad de formarte diferentes interpretaciones de la suma de dos números y el producto de los mismos números, aunado a la relación existente con la diferencia de estos números. El conjunto de conocimientos obtenidos los podrás utilizar para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

Actividad 1 (individual)

- *El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados.*



Perímetro = 10m

Instrucciones:

a) Observa la figura anterior y de acuerdo a los datos proporcionados da el valor numérico de las siguientes expresiones

$ab =$ 6 $\qquad\qquad a+b =$ 5

b) Si la expresión "ab" representa el área del rectángulo, ¿Qué representa "$a+b$"?

Semiperímetro

c) Empleemos la siguiente notación:

$s =$ La suma de los números a y b, es decir "$a+b$"

$m =$ La multiplicación de los números a y b, es decir "ab"

1) ¿Cuánto vale "s"? 5

2) ¿Cuánto vale "m"? 6

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Continuación.

d) Utilizando la expresión $d^2 = s^2 - 4m$, calcula el valor numérico de "d"

$d =$ 25 - 24 = 1

e) Si a la diferencia de dos números la representamos con la letra "d"

$d =$ La diferencia entre los números a y b, es decir "$a - b$"

¿Cuánto vale "$a - b$"? 1

f) Completa el siguiente sistema de ecuaciones lineales con los datos obtenidos

$a + b =$ 5

$a - b =$ 1

g) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales del inciso f) y encuentra los valores de "a" y "b"

$a =$ 3

$b =$ 2

h) Regresando a la figura del rectángulo planteado al inicio de la actividad, ¿Qué representan "a" y "b"? sus lados

i) Evalúa las siguientes expresiones con los valores obtenidos

$a + b =$ 5

$ab =$ 6

$a - b =$ 1

j) Observa los valores del incisos **i), a)** y **e)**. date cuenta que son los mismos.

k) El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados. **¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?**

3 y 2

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 2 (en equipo). Se sugieren equipos de tres a cuatro personas

Material:

- 5 piezas geométricas
- Regla para medir (En centímetros)
- Papel y lápiz

Parte 1

a) Compara tus resultados obtenidos en la Actividad 1, con tus compañeros de equipo

Parte 2

b) Calcula el área de cada una de las cinco piezas proporcionadas (En centímetros Cuadrados)

c) Utilizando las cinco piezas proporcionadas construye un cuadrado.

d) Encuentra el valor numérico de un lado del cuadrado construido (En centímetros)

e) Calcula el área del cuadrado construido por los siguientes métodos.

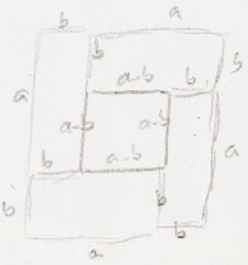
Método 1. Tomándolo como un todo (utilizando el valor encontrado en el inciso **d)**)
Método 2. Sumando las partes (utilizando el inciso **b)**)

b)

$A_{verde} = 3.5^2 = 12.25\ cm^2$

$A_{gris} = 6.5 \times 3 = 19.5\ cm^2$

c)



d) $a+b = 6.5+3 = 9.5$

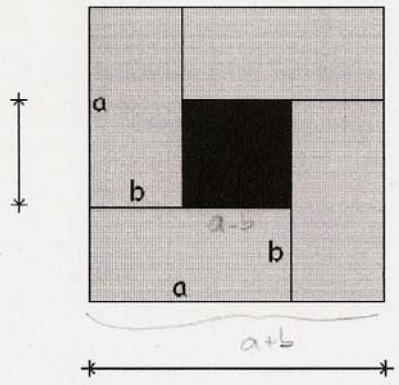
e) $A_1 = 9.5^2 = 90.25$

$A_2 = 4 \times 19.5 + 12.25 = 78 + 12.25 = 90.25$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Parte 3 (generalización)

f) La siguiente figura tiene cuatro rectángulos idénticos de lados "a" y "b". Tanto "a" como "b" pueden tomar cualquier valor. Observa detalladamente la figura, y contesta las preguntas



1) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande? 9.5
2) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado pequeño? 3.5

Pon atención, utilicemos la siguiente notación:
s = la suma de dos números **(a+b)**
d = la diferencia (resta) de dos números **(a-b)**
m = la multiplicación dos números **(ab)**

Con respecto a la figura anterior.

3) ¿Qué representaría "s^2"? Área cuadrado grande
4) ¿Qué puede representar "d^2"? lado cuadrado chico
5) ¿Qué puede representar "m"? Área de 1 rectángulo
6) ¿Qué representaría "4m"? Área cuad. grande - área cuadrado chico

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

g) ¿Cómo encontrarías el área del cuadrado pequeño, si conocieras el área del cuadrado grande y el área de uno de los rectángulos? Escríbelo con palabras. $A_Q = (a+b)^2$ $A_R = ab$ $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ $A_q = A_Q - 4ab$

h) De acuerdo a tu descripción anterior completa la siguiente expresión algebraica:

i) $d^2 = S^2 - 4m$

j) Observa la expresión encontrada anteriormente y compárala con la utilizada en el inciso d) de la *Actividad 1*. ¿Cómo son? iguales

k) Si conocemos la suma y la multiplicación de dos números. ¿Qué podemos calcular con la expresión encontrada en el inciso j)? la diferencia entre ellos

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 3 (en equipo)

a) Lee y observa detalladamente la tabla, revisa los valores del renglón, donde se propone el valor de 2 para "a" y el valor de 1 para "b". Entonces completa los renglones restantes observando y deduciendo comportamientos (para esta actividad es recomendable utilizar calculadora y haber realizado las actividades 1 y 2)

Relaciones entre la suma, multiplicación y diferencia de dos números						
Números propuestos		suma	Diferencia (resta)	producto	d^2	s^2-4m
a	b	s=a+b	d=a-b	m=ab		
2	1	3	1	2	1	1
5	3	8	2	15	4	64-60=4
20	40	60	-20	800	400	3600-3200=400
-8	18	0	-16	-64	256	256
-2	-3	-5	1	6	1	25-24=1
200	100	300	100	20000	10,000	90000-80000=10,000
4	-2.5	1.5	6.5	-10	42.25	2.25+40=42.25
21	20	41	1	420	1	$41^2-1680=1$

b) Pon atención en las dos últimas columnas, **¡son iguales!**

c) Utilizando la estrategia utilizada para completar los cuatro últimos renglones. Encuentra:

1) los números que sumados dan 7 y su producto es 12
2) los números que sumados dan 7 y su producto es 9

e) Revisa los resultados obtenidos en el inciso anterior, es decir verifica la suma y la multiplicación de los números encontrados.

Q=-b+1.5

-b+1.5-b=6.5

-2b=5

b=-2.5

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 4 (individual)

a) Explica el proceso seguido para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

$a+b=S$
$a \cdot b = m$
$d = \sqrt{S^2 - 4m}$

b) Encuentra los números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación.

1) Suman siete y multiplicados dan doce $S=7 \quad d=\sqrt{49-48}=1 \quad m=12 \quad 4 \text{ y } 3$
2) Suman 1.5 y su producto es -10 $S=1.5 \quad m=-10 \quad d=\sqrt{2.25+40}=\sqrt{42.25}=6.5 \quad 4 \text{ y } -2.5$
3) Su producto es 9 y su suma es 7 $S=7 \quad d=\sqrt{49-36}=\sqrt{13}\cong 3.6 \quad m=9$

c) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización y solo el método de factorización

1) $x^2+7x+12=0$	Proceso. $(x+3)(x+4)=0$	$X_1=-3$ $X_2=-4$
2) $t^2+1.5t-10=0$	Proceso. $(t+4)(t-2.5)=0$	$X_1=-4$ $X_2=2.5$
3) $x^2+7x+9=0$	Proceso. $a+b=7$ $a-b=\sqrt{13}$ $2a=7+\sqrt{13} \quad a=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ $2b=7-\sqrt{13} \quad b=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$	$X_1=-\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ $X_2=-\frac{7-\sqrt{13}}{2}$

$\left(x+\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)=0$

$x^2+7x+12=0 \qquad x^2-17x+12$

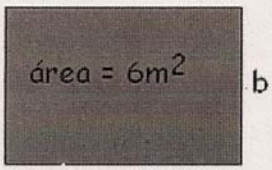
Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

PROFESOR Q

En estas actividades tendrás la oportunidad de formarte diferentes interpretaciones de la suma de dos números y el producto de los mismos números, aunado a la relación existente con la diferencia de estos números. El conjunto de conocimientos obtenidos los podrás utilizar para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

Actividad 1 (individual) Una visión Geométrica.

- El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados.



Perímetro = 10m

Instrucciones:

a) Observa la figura anterior y de acuerdo a los datos proporcionados da el valor numérico de las siguientes expresiones

$ab =$ 6 $\qquad a+b =$ 5

$ab=6$
$a+b=5$

b) Si la expresión "ab" representa el área del rectángulo, ¿Qué representa "$a+b$"?

La mitad del perímetro

$a=\frac{6}{b}$

$\frac{6}{b}+b=5$

$\frac{6+b^2}{b}=5$

$6+b^2=5b$,

$b^2-5b+6=0$

$(b-3)(b-2)=0$

$b_1=3$

$b_2=2$

c) Empleemos la siguiente notación:

$s =$ La suma de los números a y b, es decir "$a+b$"

$m =$ La multiplicación de los números a y b, es decir "ab"

1) ¿Cuánto vale "s"? 5
2) ¿Cuánto vale "m"? 6

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Continuación.

d) Utilizando la expresión $d^2 = s^2 - 4m$, calcula el valor numérico de "d"

$d^2 = (5)^2 - 4(6)$

$d^2 = 25 - 24$

$d^2 = 1 \quad d = \sqrt{1}$

$d =$ 1

e) Si a la diferencia de dos números la representamos con la letra "d"

$d =$ La diferencia entre los números a y b, es decir "$a - b$"

¿Cuánto vale "$a - b$"? 1 ó -1

f) Completa el siguiente sistema de ecuaciones lineales con los datos obtenidos

$a + b =$ 5

$a - b =$ 1

g) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales del inciso f) y encuentra los valores de "a" y "b"

$a = 5 - b$

$5 - b - b = 1$

$5 - 2b = 1$

$-2b + 5 = 1$

$a = 5 - 2$

$a = 3$

$-2b = -4$

$b = 2$

$a =$ 3

$b =$ 2

h) Regresando a la figura del rectángulo planteado al inicio de la actividad, ¿Qué representan "a" y "b"? base y altura

i) Evalúa las siguientes expresiones con los valores obtenidos

$a + b =$ 5

$ab =$ 6

$a - b =$ 1

j) Observa los valores del incisos **i)**, **a)** y **e)**. date cuenta que son los mismos.

k) El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados. **¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?**

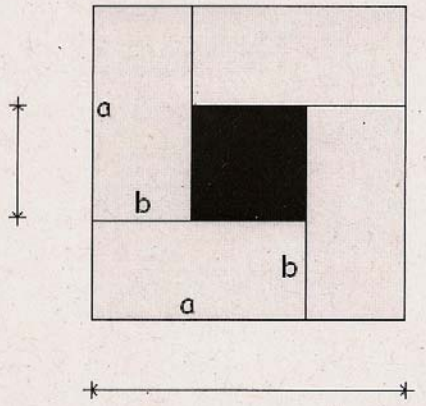
3 de base y 2 de altura

3 de altura y 2 de base

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Parte 3 (generalización)

f) La siguiente figura tiene cuatro rectángulos idénticos de lados "a" y "b". Tanto "a" como "b" pueden tomar cualquier valor. Observa detalladamente la figura, y contesta las preguntas



1) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande? a+b
2) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado pequeño? a-b

Pon atención, utilicemos la siguiente notación:

s = la suma de dos números **(a+b)**

d = la diferencia (resta) de dos números **(a-b)**

m = la multiplicación dos números **(ab)**

Con respecto a la figura anterior.

3) ¿Qué representaría "s^2"? $(a+b)^2$ área del cuadrado grande
4) ¿Qué puede representar "d^2"? $(a-b)^2$, área del cuadrado pequeño
5) ¿Qué puede representar "m"? ab área del rectángulo pequeño
6) ¿Qué representaría "4m"? ~~abtab~~+ab+ab+ab
la suma de las áreas de los 4 rectángulos pequeños

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

g) ¿Cómo encontrarías el área del cuadrado pequeño, si conocieras el área del cuadrado grande y el área de uno de los rectángulos? Escríbelo con palabras. Área del cuadrado grande menos cuatro veces el área de los rectángulos pequeños

Área del cuadrado pequeño $= (a+b)^2 - 4ab$

h) De acuerdo a tu descripción anterior completa la siguiente expresión algebraica:

i) $d^2 = s^2 - 4m$

j) Observa la expresión encontrada anteriormente y compárala con la utilizada en el inciso d) de la *Actividad 1*. ¿Cómo son? $d^2 = s^2 - 4m$ $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

k) Si conocemos la suma y la multiplicación de dos números. ¿Qué podemos calcular con la expresión encontrada en el inciso j)? el cuadrado de su diferencia

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 3 (en equipo)

a) Lee y observa detalladamente la tabla, revisa los valores del renglón, donde se propone el valor de 2 para "a" y el valor de 1 para "b". Entonces completa los renglones restantes observando y deduciendo comportamientos (para esta actividad es recomendable utilizar calculadora y haber realizado las actividades 1 y 2)

Relaciones entre la suma, multiplicación y diferencia de dos números						
Números propuestos		suma	Diferencia (resta)	producto	d^2	s^2-4m
a	b	s=a+b	d=a-b	m=ab		
2	1	3	1	2	1	1
5	3	8	2	15	4	4
20	40	60	-20	800	400	400
-8	+8	0	-16	-64	256	256
-3 -2	-2 -3	-5	-1 1	6	1	1
200	100	300	100	20000	10 000	10 000
4	-2.5	1.5	6.5	-10	42.25	42.25
21	20	41	1	420	1	1

b) Pon atención en las dos últimas columnas, **¡son iguales!**

c) Utilizando la estrategia utilizada para completar los cuatro últimos renglones. Encuentra:

1) los números que sumados dan 7 y su producto es 12
2) los números que sumados dan 7 y su producto es 9

e) Revisa los resultados obtenidos en el inciso anterior, es decir verifica la suma y la multiplicación de los números encontrados.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Comprobación:

$a+b=7$

$$\frac{\sqrt{13}+7}{2}+\frac{7-\sqrt{13}}{2}=\frac{\sqrt{13}+7+7-\sqrt{13}}{2}=\frac{14}{2}=7$$

$ab=9$

$$\left(\frac{\sqrt{13}+7}{2}\right)\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)=\frac{49-13}{4}=\frac{36}{4}=9$$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 4 (individual)

a) Explica el proceso seguido para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

_____

_____

_____

b) Encuentra los números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación.

1) Suman siete y multiplicados dan doce 4 y 3
2) Suman 1.5 y su producto es -10 4 y -2.5
3) Su producto es 9 y su suma es 7 $\frac{7-\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{\sqrt{13}+7}{2}$

c) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización y solo el método de factorización

1) $x^2+7x+12=0$	Proceso. $(x+3)(x+4)=0$ $x=-3$ $x=-4$	$X_1=-3$ $X_2=-4$
2) $t^2+1.5t-10=0$	Proceso. $(t+4)(t-2.5)=0$ $t=-4$ $t=2.5$	$X_1=-4$ $X_2=2.5$
3) $x^2+7x+9=0$	Proceso. $\left(x+\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{13}+7}{2}\right)=0$	$X_1=-\frac{7-\sqrt{13}}{2}$ $X_2=-\frac{\sqrt{13}+7}{2}$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

PROFESOR R

En estas actividades tendrás la oportunidad de formarte diferentes interpretaciones de la suma de dos números y el producto de los mismos números, aunado a la relación existente con la diferencia de estos números. El conjunto de conocimientos obtenidos los podrás utilizar para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

Actividad 1 (individual)

- *El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados.*

Perímetro = 10m

Instrucciones:

a) Observa la figura anterior y de acuerdo a los datos proporcionados da el valor numérico de las siguientes expresiones

$ab =$ 6 $\qquad a+b =$ 5

b) Si la expresión "ab" representa el área del rectángulo, ¿Qué representa "$a+b$"?

La mitad del perímetro.

c) Empleemos la siguiente notación: Introduzcamos la siguiente notación

$s =$ La suma de los números a y b, es decir "$a+b$"

$m =$ La multiplicación de los números a y b, es decir "ab"

1) ¿Cuánto vale "s"? $a+b = 5$ $\qquad s = a+b$

2) ¿Cuánto vale "m"? $a \cdot b = 6$

MICM.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Que valor tomaria la expresión s^2-4m ?

Continuación.

d) Utilizando la expresión $d^2 = s^2 - 4m$, calcula el valor numérico de "d"

$25 - 24 = 1$

$d = \sqrt{1} = 1$

e) Si a la diferencia de dos números la representamos con la letra "d"

d = La diferencia entre los números a y b, es decir "$a-b$"

¿Cuánto vale "$a-b$"? 1

f) Completa el siguiente sistema de ecuaciones lineales con los datos obtenidos

$a+b=5$

$a-b=1$

$2a=6$

$a=3$

g) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales del inciso f) y encuentra los valores de "a" y "b"

$a=$ 3

$b=$ 2

h) Regresando a la figura del rectángulo planteado al inicio de la actividad, ¿Qué representan "a" y "b"? Lados del rectángulo

i) Evalúa las siguientes expresiones con los valores obtenidos

$a+b=5$

$ab=6$

$a-b=1$

j) Observa los valores del incisos i), a) y e). date cuenta que son los mismos.

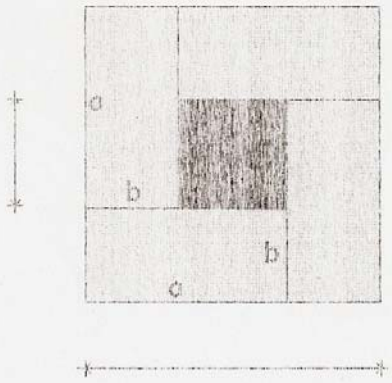
k) El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

3 y 2

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Parte 3 (generalización)

f) La siguiente figura tiene cuatro rectángulos idénticos de lados "a" y "b". Tanto "a" como "b" pueden tomar cualquier valor. Observa detalladamente la figura, y contesta las preguntas



1) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande? a+b
2) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado pequeño? a-b

Pon atención, utilicemos la siguiente notación:
s = la suma de dos números (a+b)
d = la diferencia (resta) de dos números (a-b)
m = la multiplicación dos números (ab)

Con respecto a la figura anterior.

3) ¿Qué representaría "s^2"? área del cuadrado grande
4) ¿Qué puede representar "d^2"? área del cuadrado chico.
5) ¿Qué puede representar "m"? área del rectángulo.
6) ¿Qué representaría "4m"? área de los cuatro rectángulos

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Actividad 4 (individual)

a) Explica el proceso seguido para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

b) Encuentra los números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación.

1) Suman siete y multiplicados dan doce
2) Suman 1.5 y su producto es -10
3) Su producto es 9 y su suma es 7

c) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización y solo el método de factorización

1) $x^2+7x+12=0$	Proceso. $a+b=7$, $a-b=1$, $2a=8$, $a=4$, $b=3$	$X_1=$ $X_2=$
2) $t^2+1.5t-10=0$	Proceso. 6.5, $a+b=15$, $a-b=6.5$, $2a$, $a=4$	$X_1=$ $X_2=$
3) $x^2+7x+9=0$	Proceso. $b=10.5-4$, $b=-2.5$, 16	$X_1=$ $X_2=$

$a+b=1.5$, $a-b=6.5$, $2a=8$ 0, $a=4$

$-b=6.5-4$, $-b=2.5$, $b=2.5$

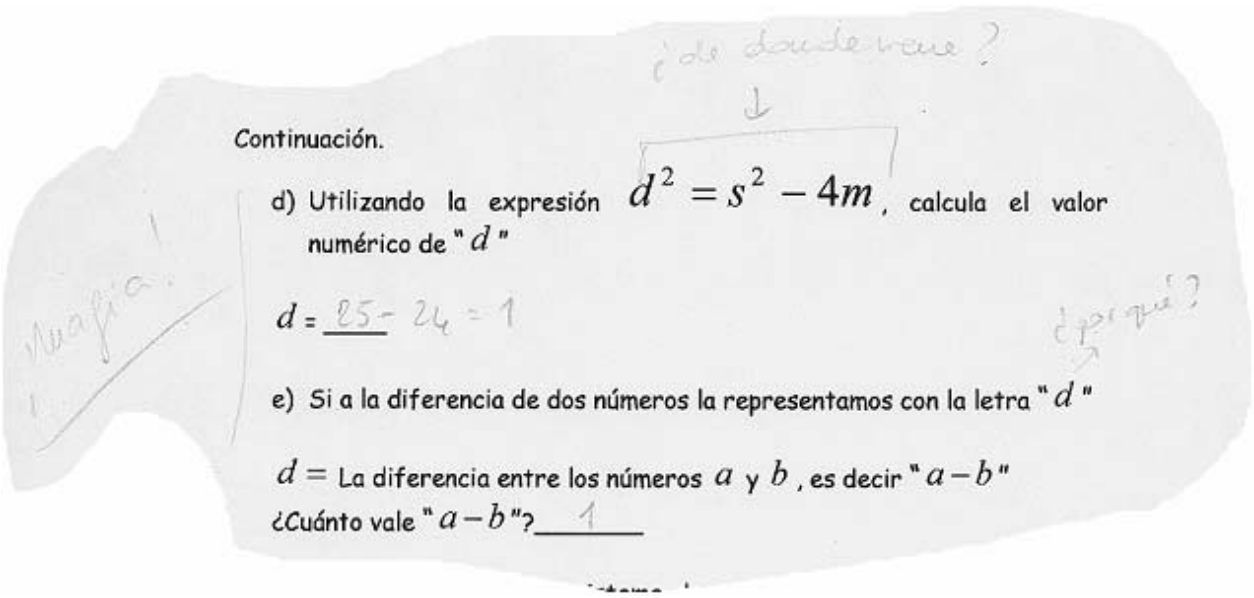
$d^2=42.25$, $d=6.5$

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Cada adecuación de la secuencia fue guiada por las observaciones de los profesores participantes, todos ellos expertos.

Primera adecuación, de acuerdo a la observación del profesor "P"

Se propone intercambiar de orden las dos primeras actividades. Esto después de observar que al utilizar inmediatamente la expresión $d^2 = s^2 - 4m$, es decir, sin ninguna justificación, puede causar una sensación de magia, de caja negra, algo similar a lo que sucede con la fórmula general para solucionar ecuaciones cuadráticas. Y precisamente este tipo de situaciones pueden convertirse en obstáculos para el aprendizaje de las matemáticas. Obsérvese como el profesor "P" cuestiona de donde viene la expresión citada anteriormente.



¿de donde viene?

Continuación.

d) Utilizando la expresión $d^2 = s^2 - 4m$, calcula el valor numérico de "d"

magia!

$d = 25 - 24 = 1$

¿porqué?

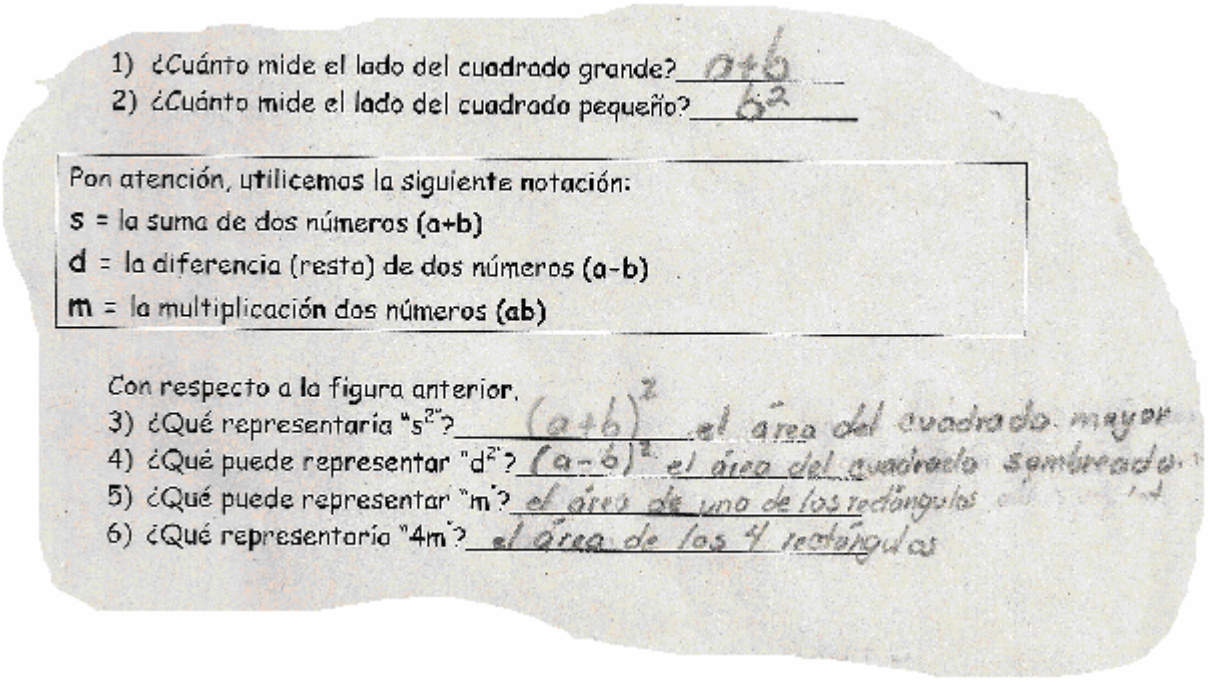
e) Si a la diferencia de dos números la representamos con la letra "d"

$d =$ La diferencia entre los números a y b, es decir "$a - b$"

¿Cuánto vale "$a - b$"? 1

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Segunda adecuación, de acuerdo a la observación del profesor "O"



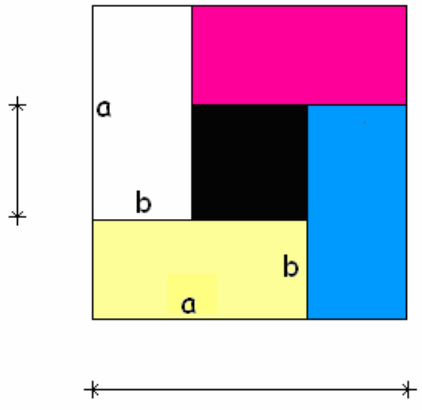
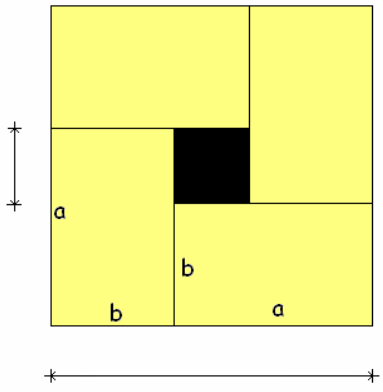
1) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande? $a+b$
2) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado pequeño? b^2

Pon atención, utilicemos la siguiente notación:
s = la suma de dos números **(a+b)**
d = la diferencia (resta) de dos números **(a-b)**
m = la multiplicación dos números **(ab)**

Con respecto a la figura anterior,
3) ¿Qué representaría "s^2"? $(a+b)^2$ el área del cuadrado mayor
4) ¿Qué puede representar "d^2"? $(a-b)^2$ el área del cuadrado sombreado
5) ¿Qué puede representar "m"? el área de uno de los rectángulos
6) ¿Qué representaría "4m"? el área de los 4 rectángulos

Si observamos las respuestas de los incisos 2 y 4 son contradictorias, por un lado dice que el lado del cuadrado pequeño es igual al cuadrado de "b", y por el otro nos dice que $(a-b)^2$ es el área del cuadrado sombreado, pero, el cuadrado sombreado es en realidad el cuadrado pequeño.

En este caso la figura propuesta le causo al profesor una confusión, creemos que es debido a las dimensiones de los rectángulos propuestos, ya que en la figura A) el lado del cuadrado sombreado es más cercano al ancho del rectángulo "b". Para salvar este obstáculo se modifico a la figura como se puede observar en el inciso B).

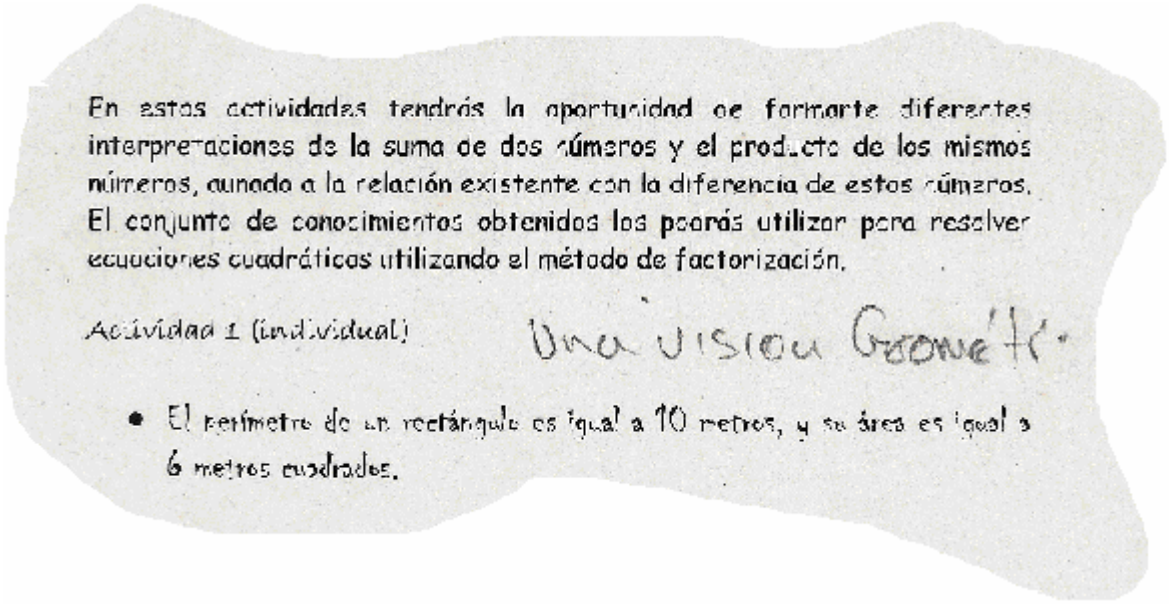
A) Figura anterior	B) Figura modificada
	

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Tercera adecuación, de acuerdo a la observación del profesor "Q"

El profesor nos brinda una forma de nombrar a las partes de la secuencia, que mejora la percepción de las actividades, en este sentido se tomaron los titulos de:

- Una visión aritmética
- Una visión geométrica
- Una visión algebraica



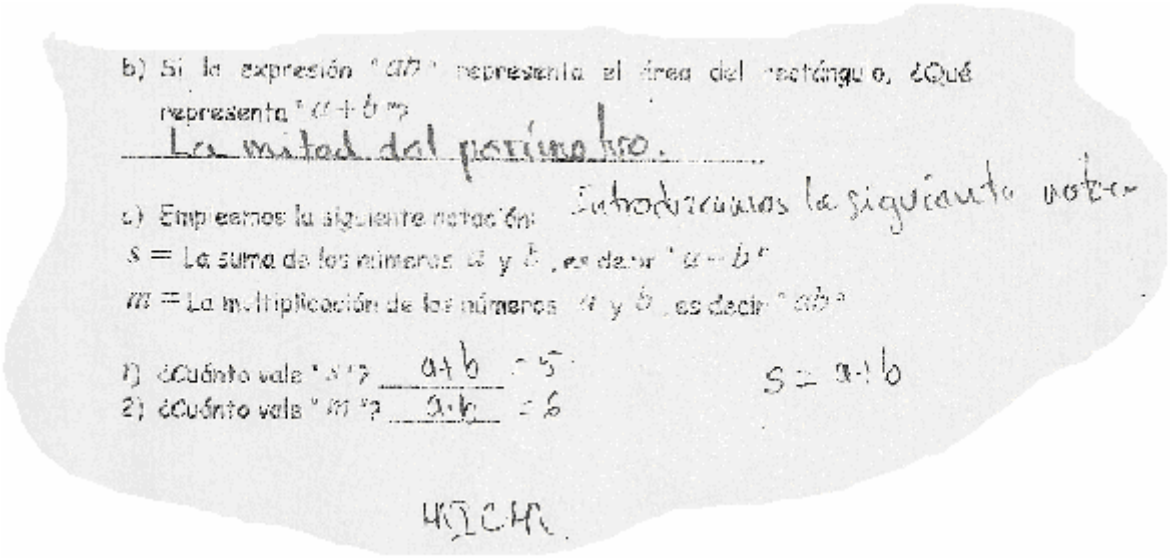
En estas actividades tendrás la oportunidad de formarte diferentes interpretaciones de la suma de dos números y el producto de los mismos números, aunado a la relación existente con la diferencia de estos números. El conjunto de conocimientos obtenidos los podrás utilizar para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

Actividad 1 (individual) Una vision Geometrica

- El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Cuarta adecuación, de acuerdo a la observación del profesor "R"


b) Si la expresión "ab" representa el área del rectángulo, ¿Qué representa "$a+b$"?

La mitad del perímetro.

c) Empleemos la siguiente notación: Introduzcamos la siguiente notación

s = La suma de los números a y b, es decir "$a+b$"

m = La multiplicación de los números a y b, es decir "ab"

1) ¿Cuánto vale "s"? $a+b = 5$

2) ¿Cuánto vale "m"? $a \cdot b = 6$

$S = a+b$

En este caso el profesor nos sugiere una palabra más propia para la redacción, en lugar de utilizar la frase **"Empleemos la siguiente notación"**, esta se cambia a **"Introduzcamos la siguiente notación"**.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Diseño final de la secuencia didáctica

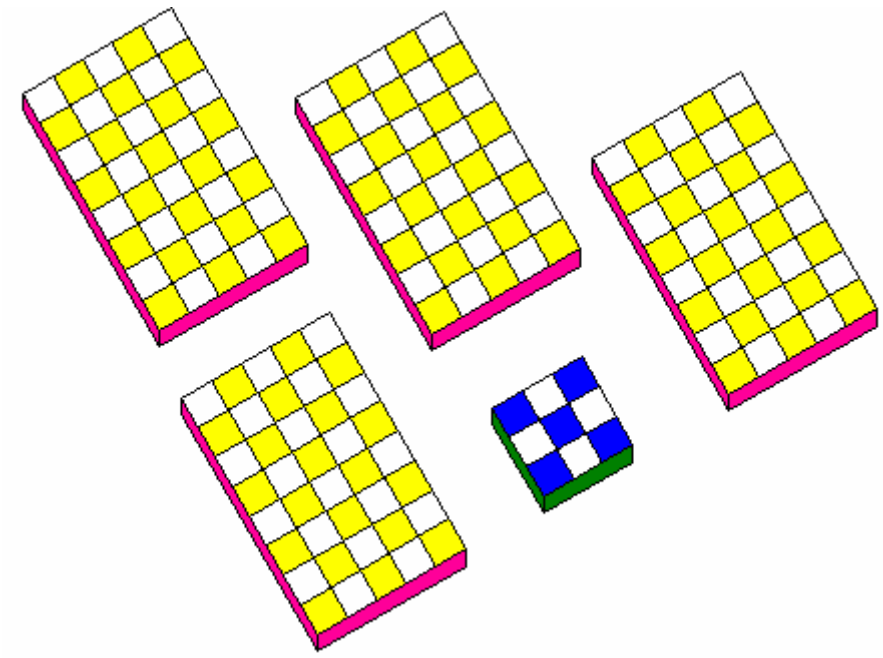
En estas actividades tendrás la oportunidad de formarte diferentes interpretaciones de la suma de dos números y el producto de los mismos números, aunado a la relación existente con la diferencia de estos números. El conjunto de conocimientos obtenidos los podrás utilizar para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

Actividad 1. Una visión geométrica (en equipo).

Parte 1

Material:

- 5 piezas geométricas:
  4 rectángulos iguales de 5x8 (en centímetros)
  1 cuadrado de 3x3 (en centímetros)
  Ver figura.



Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

a) Calcula el área de cada una de las cinco piezas proporcionadas
(En centímetros cuadrados)

b) Utilizando las cinco piezas proporcionadas construye un cuadrado.

c) Encuentra el valor numérico de un lado del cuadrado construido
(En centímetros)

d) Calcula el área del cuadrado construido por dos métodos.

Método 1. Tomándolo como un todo (utilizando el valor encontrado en el inciso **c)**)

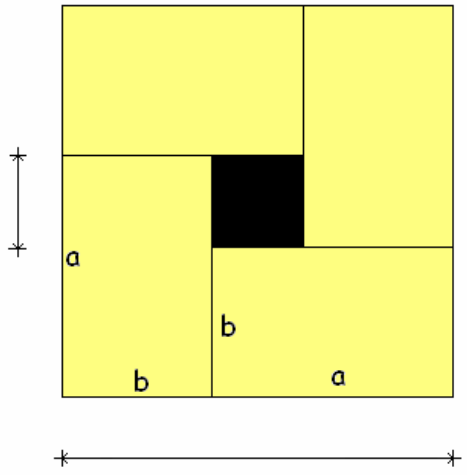
Método 2. Sumando las partes (utilizando las áreas obtenidas en el inciso **a)**)

Nota: las cinco piezas que manejaran los alumnos deben ser proporcionadas en desorden.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Parte 2. Una visión geométrica-algebraica (en equipo).

La siguiente figura tiene cuatro rectángulos idénticos de lados "a" y "b". Tanto "a" como "b" pueden tomar cualquier valor. Observa detalladamente la figura, y contesta las preguntas



e) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado grande?_____

f) ¿Cuánto mide el lado del cuadrado pequeño?_____

Pon atención, introduzcamos la siguiente notación: **s** = la suma de dos números **(a+b)** **d** = la diferencia (resta) de dos números **(a-b)** **m** = la multiplicación dos números **(ab)**

Con respecto a la figura anterior.

g) ¿Qué representaría "s^{2}"?_____

h) ¿Qué puede representar "d^{2}"?_____

i) ¿Qué puede representar "m"?_____

j) ¿Qué representaría "4m"?_____

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

k) ¿Cómo encontrarías el área del cuadrado pequeño, si conocieras el área del cuadrado grande y el área de uno de los rectángulos? Escríbelo con palabras._____
_____

l) De acuerdo a tu descripción anterior completa la siguiente expresión algebraica:

$$d^2 = _____ - _____$$

m) Si conocemos la suma y la multiplicación de dos números. ¿Qué podemos calcular con la expresión encontrada en el inciso anterior?_____

Nota: la parte dos se proporciona a los alumnos una vez que hayan terminado la primera.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Análisis a priori de la actividad 1

La actividad se divide en dos partes, en la primera se propone trabajar en el contexto geométrico-numérico, mientras que en la segunda se pretende generalizar el conocimiento obtenido, utilizando el lenguaje algebraico.

Para los incisos a), b), c), y d). En esta parte de la actividad se espera que la mayoría de los equipos la realicen satisfactoriamente. Creemos que esto se deberá a que ellos tendrán la oportunidad de manipular material didáctico, aunado a los contextos trabajados en ella, nos referimos a los contextos geométrico y numérico.

Con esta actividad además lograremos que desarrollen habilidades del pensamiento, tales como observación y razonamiento lógico. Intentamos favorecer la transición de lo numérico a lo algebraico requerido para los siguientes incisos.

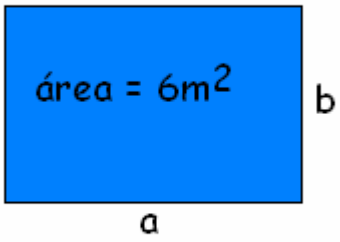
Para los incisos e), f), g), h), i), j) k), l) y m). Creemos que puede ser la parte más difícil, esto debido a la problemática de entender el algebra como una generalización de la aritmética, aquí es donde toma sentido el haber propuesto una actividad numérica antes.

En esta parte se involucra el contexto algebraico. Necesitamos que los alumnos descubran la relación existente entre la suma, multiplicación y diferencia de dos números, recordemos que esta relación de operaciones nos puede ofrecer una metodología para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando la factorización como método general. Para lograr que el aprendizaje sea más representativo, los alumnos trabajaran y relacionaran este conocimiento en los contextos: numérico, geométrico y algebraico.

También se espera favorecer el razonamiento lógico-deductivo, ya que creemos que la mayoría podrá deducir y escribir la expresión algebraica solicitada en el inciso j), una vez que se hayan resuelto satisfactoriamente los requerimientos anteriores. Nuevamente se espera que el profesor sea un mediador de ideas, interactuando a base de preguntas siempre y cuando sea necesario.

Actividad 2. Una aplicación (en equipo).

- *El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados.*



Perímetro = 10m

Instrucciones:

a) Observa la figura anterior y de acuerdo a los datos proporcionados da el valor numérico de las siguientes expresiones

$ab =$ _____ $a+b =$ _____

b) Si la expresión "ab" representa el área del rectángulo, ¿Qué representa "$a+b$"?

_____

Introduzcamos la siguiente notación:

$s =$ La suma de los números a y b, es decir "$a+b$"

$m =$ La multiplicación de los números a y b, es decir "ab"

c) ¿Cuánto vale "s"? _____

d) ¿Cuánto vale "m"? _____

e) Utilizando la expresión $d^2 = s^2 - 4m$, calcula el valor numérico de "d"

d = ____

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Continuación.

f) Si a la diferencia de dos números la representamos con la letra " d "

$d =$ La diferencia entre los números a y b , es decir " $a-b$ "
¿Cuánto vale " $a-b$ "?_____

g) Completa el siguiente sistema de ecuaciones lineales con los datos obtenidos
$a+b=$
$a-b=$

h) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales del inciso anterior y encuentra los valores de " a " y " b "
$a =$ _____

$b =$ _____

i) Regresando a la figura del rectángulo planteado al inicio de la actividad, ¿Qué representan $"a"$ y $"b"$? _____

j) Evalúa las siguientes expresiones con los valores obtenidos.
$a+b=$
$ab=$
$a-b=$

Observa los valores del incisos **j), a)** y **f)**. Date cuenta que son los mismos.

k) El perímetro de un rectángulo es igual a 10 metros, y su área es igual a 6 metros cuadrados. **¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?**

_____

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Análisis a priori de la actividad 2

La intención de la actividad es que los alumnos trabajen bajo sus propios medios, se espera que la mayoría tenga éxito, debido a que para solucionar el problema planteado, se pueden utilizar números enteros, y cuando es necesario obtener una raíz al utilizar la expresión: $d^2 = s^2 - 4m$, esta es exacta.

Aunque el objetivo primordial es que los alumnos resuelvan ecuaciones cuadráticas con raíces de cualquier tipo utilizando el método de factorización, esta actividad les servirá para introducirlos en una nueva metodología que permita salvar el obstáculo encontrado y mencionado en los capítulos anteriores.

La actividad también contempla diferentes contextos, tales como: numérico, geométrico, algebraico y aplicación, consideramos que este tipo de situaciones favorecen el proceso de aprendizaje.

Para el inciso a). En esta parte de la actividad se espera que los alumnos puedan diferenciar y entender los conceptos de área y perímetro, y así favorecer una interpretación geométrica a la suma de dos números, así como al producto de los mismos números. Puede suceder que algunos alumnos puedan equivocarse en la interpretación de **a+b**, ya que no se trata del perímetro del rectángulo, sino más bien la mitad de éste.

Para el inciso b). Se espera que la mayoría conteste "la mitad del perímetro", no obstante puede haber diferentes respuestas.

Para el inciso c) y d). Se espera que los alumnos puedan manejar la notación propuesta e identificar a la suma y el producto de los mismos números, lo cual les servirá para utilizar la expresión $d^2 = s^2 - 4m$

Para el inciso e). Consideramos que la mayoría de los alumnos tendrá éxito al utilizar la expresión $d^2 = s^2 - 4m$ para obtener "d", no obstante se espera que algunos alumnos puedan tener problemas, los cuales pueden ser en el manejo de igualdades y en los conceptos de potencia y raíz.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Para el inciso f). Se espera que los alumnos puedan darle un significado numérico a **"d"**, esperamos que la mayoría pueda asignarle el valor correcto a **"a-b"**, lo cual les ayudara a resolver el siguiente inciso.

Para los incisos g) y h). Para esta parte de la actividad, es necesario que los alumnos sepan resolver un sistema de ecuaciones lineales, creemos que la mayoría podrá obtener los valores de "a" y "b", ya que siempre resultan ecuaciones relativamente sencillas.

Para los incisos i), j) y k).
Esta parte última de la actividad tiene la intención de que los alumnos puedan reflexionar la actividad y logren darse cuenta de que han resuelto el problema inicialmente planteado. Se espera que el aprendizaje generado en los diferentes contextos utilizados ayude a entender la relación existente entre la suma de dos números y la multiplicación de los mismos.

Actividad 3. Una visión numérica (individual)

a) Lee y observa detalladamente la tabla, revisa los valores del renglón, donde se propone el valor de 2 para "a" y el valor de 1 para "b". Entonces completa los renglones restantes observando y deduciendo comportamientos (para esta actividad es recomendable utilizar calculadora y haber realizado las actividades 1 y 2)

Relaciones entre la suma, multiplicación y diferencia de dos números						
Números propuestos		**suma**	**Diferencia (resta)**	**producto**	**d^2**	**s^2-4m**
a	**b**	**s=a+b**	**d=a-b**	**m=ab**		
2	1	3	1	2	1	1
5	3				4	
20	40					
		0	-16	-64		
		-5		6		
		300		20000		
		1.5		-10		
		41		420		

Pon atención en las dos últimas columnas, **¡son iguales!**

b) Utilizando la estrategia para completar los cuatro últimos renglones. Encuentra:

- los números que sumados dan 7 y su producto es 12
- los números que sumados dan 7 y su producto es 9

c) Revisa los resultados obtenidos en el inciso anterior, es decir verifica la suma y la multiplicación de los números encontrados (puedes utilizar aproximaciones en decimales.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Análisis a priori de la actividad 3

La actividad tres tiene el propósito de que los alumnos logren reforzar el conocimiento descubierto, es necesario que se den cuenta de las ventajas que ofrece una generalización. Por eso en esta actividad, se proponen diferentes tipos de números (Recordemos que en los capítulos anteriores este es el principal obstáculo para poder factorizar los trinomios cuadrados, en las encuestas realizadas y presentadas en el capítulo cuatro, se puede uno dar cuenta que tanto los profesores como los alumnos utilizaron el método de factorización, sólo cuando se presentaban raíces enteras pequeñas).

También cabe señalar que en los últimos renglones de la tabla propuesta, se dan como datos conocidos la suma y multiplicación de dos números, situación que caracteriza la factorización de trinomios cuadrados, es la esencia para poder obtener el producto de dos binomios con término común. Por ende esta situación también se presenta al solucionar una ecuación cuadrática, utilizando el método de factorización.

Se espera que los alumnos a su vez se den cuenta que existe un método que permite encontrar dos números, de los cuales se conoce su suma y su multiplicación, aunado a la importancia que toma la diferencia de los números durante este proceso.

Para el inciso a). En esta parte los alumnos **trabajaran** con la relación encontrada entre la suma-multiplicación-diferencia de dos números, trataremos de que la actividad les ayude a descubrir como pueden encontrar dos números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación, pero además se espera que este encuentro de números sea utilizando **un método**, y no como se hace actualmente, ensayo-error.

Para los incisos b). Se espera que al responder las preguntas se logre reforzar la notación para la diferencia, suma y multiplicación de los mismos números, además de la relación entre estas operaciones. Los alumnos tendrán que trabajar con números irracionales, no obstante en una primera situación pueden utilizar sus aproximaciones en números decimales, ayudándose de una calculadora. Es importante que los alumnos se den cuenta que el método funciona para todos los números reales.

Para el inciso c). En este último inciso los alumnos podrán validar sus resultados, por ellos mismos, creemos que es una situación que se debe fomentar en un salón de clases.

Actividad 4 Solucion de ecuaciones cuadráticas (en grupo)

a) Explica el proceso seguido para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización. _____
_____
_____

b) Encuentra los números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación.

1) Suman siete y multiplicados dan doce_____
2) Suman 1.5 y su producto es -10_____
3) Su producto es 9 y su suma es 7_____

c) Encuentra la factorización de los siguientes trinomios.

1) $x^2 + 7x + 12 = (\quad)(\quad)$
2) $t^2 + 1.5t - 10 = (\quad)(\quad)$
3) $x^2 + 7x + 9 = (\quad)(\quad)$

d) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización y solo el método de factorización

1) $x^2 + 7x + 12 = 0$	Proceso.	X_1= X_2=
2) $t^2 + 1.5t - 10 = 0$	Proceso.	X_1= X_2=
3) $x^2 + 7x + 9 = 0$	Proceso.	X_1= X_2=

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Análisis a priori de la actividad 4

Esta es la última actividad propuesta, es necesario haber realizado las tres primeras actividades, se espera que con ella los alumnos puedan apropiarse del conocimiento: **del cómo poder utilizar el método de factorización como método general para solucionar ecuaciones cuadráticas**, se espera lograr con esto lo planteado en el objetivo general de este trabajo y salvar el obstáculo encontrado.

Para el inciso a). Se espera que la persona que lleve a cabo la actividad conozca el proceso para resolver una ecuación cuadrática, utilizando el método de factorización.

Para el inciso b) y c). En esta parte se espera que los alumnos retomen ideas de las tres primeras actividades, con la intención de que puedan superar el obstáculo encontrado, es decir se espera que los alumnos puedan obtener dos números, de los cuales se conoce su suma y su multiplicación, utilizando la estrategia de encontrar su diferencia, o ¡incluso otra!

Se espera que con la obtención de tales habilidades los alumnos puedan resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización, incluso para aquellas ecuaciones formadas por trinomios cuadrados que necesitan de raíces racionales o irracionales para su factorización.

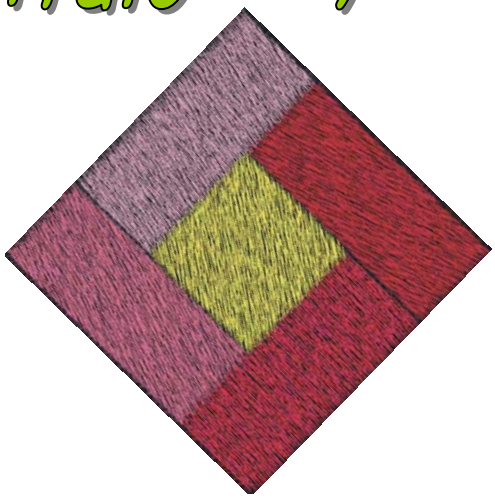
Para el inciso d). Esta es la parte de la secuencia que nos permitirá validar este trabajo, nos podremos dar cuenta sí los alumnos pueden tomar como método general la factorización en la solución de ecuaciones cuadráticas, independientemente del tipo de raíces, creemos que la mayoría podrá salvar el obstáculo. También se espera que esta situación permita a los alumnos darse cuenta de cuales son los procesos mentales que se llevan acabo en la solución de una ecuación cuadrática utilizando el método de factorización.

Las ecuaciones que se presentan, están de alguna forma en orden de acuerdo a su complejidad, es decir, suponemos que la primera ecuación tiene un grado menor de dificultad que la ecuación dos, a su vez la ecuación dos es más sencilla que la ecuación tres, no obstante puede ser diferente para algunas personas.

Al terminar la actividad se espera que los alumnos hayan adquirido conocimiento acerca de la solución de una ecuación cuadrática y sus múltiples visualizaciones, que además se den cuenta que los conocimientos matemáticos nunca están acabados, y que el saberlos radica en la voluntad de uno mismo para desarrollar habilidades matemáticas.

Se sugiere que el profesor sea un Mediador y organizador de ideas, puede llevar un registro de los tiempos y comunicar resultados al grupo (los resultados pueden ser correctos o incorrectos, la intención es que el grupo los valide). También se espera que las observaciones de las relaciones profesor- alumnos-saber puedan servir para la validación y el perfeccionamiento de la secuencia didáctica propuesta.

Capítulo 7



Comentarios finales

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Consideramos que existen muchas ventajas, si partimos del supuesto de que quién que desea aprender matemáticas, sea efectivamente el que construya el lenguaje matemático existente en nuestro mundo. Este sentir es el que ha regido nuestro trabajo, por eso estamos proponiendo actividades lo más autónomas posibles.

Para el diseño de las actividades se consideraron varios aspectos, pero podemos rescatar principalmente cinco:

• **La metodología.** En nuestro trabajo siempre se tuvieron presentes las ideas que sustentan a la Ingeniería didáctica, desde su forma de ver el aprendizaje de las matemáticas, hasta su sistematización para la investigación.

• **El discurso escolar.** Fue de gran ayuda el conocer las concepciones escolares que se tienen de la solución de una ecuación cuadrática, en este sentido los cuestionarios aplicados a profesores y alumnos, fueron de ayuda para corroborar que existe un obstáculo, para poder tomar la factorización como método general para solucionar ecuaciones cuadráticas.

• **El obstáculo encontrado.** Creemos que el principal obstáculo para tomar la factorización como método general para solucionar ecuaciones cuadráticas, es que en el discurso escolar actual, no proporciona un método para encontrar los números que hacen posible la factorización de un trinomio cuadrado, sino que se lleva a cabo por ensayo-error.

• **La diferencia de dos números**. Al involucrar la diferencia de dos números se **logró** hallar un método que pudiera salvar nuestro principal obstáculo para factorizar trinomios cuadrados con cualquier tipo de raíz, pero además nos brindó la oportunidad de significar y resignificar la solución de ecuaciones cuadráticas.

• **Los contextos.** Las actividades propuestas brindan la oportunidad de trabajar el concepto de solución de una ecuación cuadrática en diferentes contextos: el numérico, el geométrico, el algebraico y su aplicación.

Qué falta y qué sigue.

Consideramos que la investigación realizada responde a nuestros cuestionamientos, además de cumplir con nuestros objetivos planteados, sin embargo es necesario verificar si las actividades de la secuencia propuesta en verdad ayudan a mejorar y significar la solución de una ecuación cuadrática. Tenemos la confianza en que así será, está afirmación queda sustentada por las respuestas obtenidas por profesores expertos, los cuales resolvieron parte de las actividades en forma satisfactoria, pero además, ayudaron al rediseño de la secuencia, tal vez se necesiten más ajustes, pero consideramos sus observaciones como un factor de validación.

Para verificar si la secuencia nos puede aportar una mejora en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es necesario ponerla a prueba en el aula, es necesario vivir la experiencia y precisamente es la tarea pendiente que nos proponemos realizar. La metodología utilizada en esta investigación ha sido la Ingeniería Didáctica, y más específicamente la Teoría de Situaciones Didácticas, pues bien, cabe aclarar que sólo se han realizado dos puntos. Nos falta aún la parte de **experimentación y validación**, y la invitación está abierta para las personas que gusten de involucrarse en esta experiencia.

Una parte importante que surge con esta investigación, es con respecto a la matemática misma. La estrategia de utilizar la diferencia de dos números como un medio para encontrar dos números de los cuales se conoce su suma y su producto, puede tener futuro, sólo se necesita involucrar tiempo en su investigación. Si bien en nuestro trabajo nos ayudo para solucionar ecuaciones cuadráticas, creemos que también es posible utilizarla para la solución de ecuaciones de grado mayor, por lo menos en la solución de ecuaciones cúbicas si es posible obtener buenos resultados. Esto puede traer consigo la construcción de escenarios de trabajo matemático escolar, novedosos y elementales que les permitan a los estudiantes acceder al saber matemático de manera distinta.

Esperamos que este trabajo sea de gran utilidad, porque eso es lo que justifica precisamente un conocimiento, en el ambiente o contexto que se quiera tratar. En la actualidad las propuestas de enseñanza-aprendizaje giran en torno a que las actividades propuestas, logren que los alumnos construyan el conocimiento y sean capaces de utilizarlo. Estamos seguros que cada vez se desarrollaran mejores formas para la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas.

Reconocemos también los trabajos que se están desarrollando en Educación Matemática, en México y en el mundo, creemos que estas investigaciones, no deben quedar en eso, sino que se deben ir perfeccionando, y una de las mejores formas de lograrlo es empezar a trabajar con ellas en el aula. Muchas de ellas fueron de ayuda e inspiración para este trabajo.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx

Referencias bibliográficas

Academia Institucional de Matemáticas del IPN (2002). *Álgebra*, (para nivel medio superior), primera reimpresión, México.

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Baldor A. (2002). *Álgebra*, Vigésima impresión, México: Publicaciones Cultural.

Bazaldua, S. (2007). *Un acercamiento gráfico de los ceros de la función polinomio y a las raíces de la ecuación polinomio. Una experiencia con estudiantes universitarios.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Bello, I. (2004). *Álgebra*, México: Thomson.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 4(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 9 (3), 309-336

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático,* México: Editorial Trillas.

Carreño, X. y Cruz X, (2003). *Álgebra*, primera edición, México: Publicaciones Cultural.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: AIQUE Grupo Editor S.A.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Relime 3*(1), 47-70.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Freudenthal, H. (1981). *Major Problems of Mathematics Education.* Conferencia dada en la Sesión Plenaria del ICME 4 en Berkeley el 10 de agosto de 1980. *Educational Studies in Mathematics* (12).

Galdos, L. (1997). *Consultor matemático II*, (Álgebra), Cultural, S.A., Madrid España.

Gobran, A. (1990). *Álgebra Elemental*, Grupo Editorial Iberoamerica, México.

Goodson C. E. y Miertschin S. L. (1994). *Álgebra con aplicaciones técnicas*, primera reimpresión, México.

Hall H. S. y Knight S. R. (1991). *Álgebra Superior*, Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana, IPN, México 1991.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux. Dans la classe de mathemátiques.* París, Francia: La Pensée sauvage, Editions.

Montiel, G. (2002). *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual.* Tesis de Maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Purcell, E. y Varberg, D. (2003). *Cálculo diferencial e integral*, Pearson Educación, México.

Rees Paul K., Sparks Fred W. y Rees Charles S. (2001). *Álgebra*, traducción: Sánchez Carlos M., décima edición, México.

Rojano Teresa y Filloy Eugenio (2001). *Álgebra*, Cinvestav, IPN, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Stewart J. (2000). *College Algebra,* Mc Master university, Redlin L., The Pennsylvania State University, Saleem Watson, California State University, Long Beach, , third edition, Thomson learning, Mexico.

Swokowski Earl W. y Cole Jeffery A. (1993). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, Anoka-Ramsey Community College, Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V., octava edición.

Umaña J. (2001). *Nociones básicas de álgebra*, UNAM, primera edición, México.

Realizó: Ing. Elías Cruz Mendoza ecruzme@ipn.mx