# Modelo Fotoacústico en Configuración de Difusión para una Fuente Periódica Rectangular de Calor

J. Bruno Rojas T.[1, 2], A. Calderón[2] y R. A. Muñoz Hernández[1]

[1] *Departamento de Ciencias Básicas, Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingenierías y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Av. IPN 2580 Col. Barrio La Laguna Ticomán, 07340 México D.F.*
[2] *Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Legaria 694, Col. Irrigación, 11500 México D. F.*

**Resumen**
En el presente trabajo se pretende construir un modelo matemático, basado en el proceso de difusión, que explique la generación y comportamiento de ondas de calor en el interior de una celda fotoacústica de geometría cilíndrica, en la cual se introduce una muestra sólida ópticamente opaca. La fuente de calor es proporcionada por un haz de luz monocromática modulada como una onda periódica rectangular, que incide en la ventana de la celda. Se resuelven de manera cerrada las ecuaciones de difusión en cada región de la celda (en función de sus parámetros térmicos y ópticos), bajo las condiciones de frontera usuales.

**Introducción**
Suponga que se tiene una celda de caracterización fotoacústica cilíndrica de longitud total $L$ y diámetro $D$, en la cual se coloca una muestra de longitud $L_s$ sobre una base de material no absorbente de longitud $L_b$. El medio de propagación consta de un gas, no absorbente, que inunda una región de longitud $L_g$.

Proponemos que la fuente de calor sea generada por un haz de luz monocromática con frecuencia angular $\omega$, de tal manera que la intensidad del campo de radiación, $I$ queda escrita como:

$$I(t) = \frac{I_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{rec}\left(\frac{t-nT}{\Delta}\right)$$

Considerando al interior de la celda dividido en tres regiones $R_b$, $R_s$, $R_g$ de acuerdo a los medios que la ocupan, las diferencias de temperaturas entre el medio ambiente y el medio $i$ ($i = g, s, b$) $\Theta_i$ en cada región de la celda, se encuentran determinadas por un proceso de difusión modelado por el siguiente conjunto de EDP:

$$\frac{\partial^2\Theta_i(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial\Theta_i(t,x)}{\partial t} = -g_i(t,x)$$

Donde:

$$g_i(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k_s}\beta\eta\delta(x) I(t) & \text{cuando } i = s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es el modelo de fuente de calor superficial. Imponemos las condiciones de frontera usuales:

$$\Theta_g(t,0) = \Theta_s(t,0)$$

$$\Theta_s(t,-L_s) = \Theta_b(t,-L_s)$$

$$k_g\frac{\partial\Theta_g(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = k_s\frac{\partial\Theta_s(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

$$k_s\frac{\partial\Theta_s(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=-L_s} = k_b\frac{\partial\Theta_b(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=-L_s}$$

**Solución del modelo**
Para resolver las ecuaciones de difusión planteadas, proponemos expresar a las diferencias de temperaturas $\Theta_i$ como una superposición infinita de ondas dada por:

$$\Theta_i(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^i(x)\exp(in\omega t)$$

Para el caso estacionario (aproximación de orden cero), determinamos que las amplitudes de las diferencias de temperaturas $\Theta_i$ están dadas por:

$$R_0^g(x) = 0$$

$$R_0^b(x) = \frac{I_0\omega\Delta}{8\pi k_b}\beta\eta[x + L_s + L_g]$$

$$R_0^s(x) = -\frac{I_0\omega\Delta}{8\pi k_s}\beta\eta\,\mathrm{sgn}(x)x$$

Mientras que, las soluciones no estacionarias tienen las siguientes amplitudes:

$$R_n^g(x) = R_n^s(0)\exp\left(-\sqrt{in}\sigma_g x\right)$$

$$R_n^b(x) = R_n^s(-L_s)\exp\left(\sqrt{in}\sigma_b(x+L_s)\right)$$

$$R_n^s(x) = \frac{I_0 Sen\left(\frac{n\omega\Delta}{2}\right)}{8n^{\frac{3}{2}}\pi\sigma_s k_s}\beta\eta\left\{\frac{F(x)}{(1+b)(1+g)\exp(\sigma_s L_s) - (1-b)(1-g)\exp(-\sigma_s L_s)}\right\}$$

Donde:

$$F(x) = (1+b)(1-g)\exp(\sigma_s(x+L_s)) + (1-b)(1+g)\exp(-\sigma_s(x+L_s)) + (1+b)(1+g)\left[\exp(\sigma_s(x+\right.$$

**Agradecimientos**
Agradecemos al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y a la Secretaria de Investigación y Posgrado (SIP) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) por su apoyo a este trabajo.

**Referencias**
[1] J. A. Calderón Arenas. Estudio de la Difusión del Calor en semiconductores… Tesis (D.C.) CINVESTAV-IPN. México (1997).
[2] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids. Clarendon Press, Oxford (2000).