INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

No. 172 Serie: AZUL Fecha: Marzo de 2003

Análisis Experimental de las Condiciones Suficientes para Recuperación Perfecta en la *Lernmatrix*

Flavio Arturo Sánchez Garfias[1]
Juan Luis Díaz de León Santiago[2]
Cornelio Yáñez Márquez[3]

RESUMEN

En este informe técnico se presenta un estudio teórico y experimental, respecto de las condiciones suficientes para que se cumpla la recuperación perfecta de patrones binarios n-dimensionales en la *Lernmatrix* de Steinbuch, dado un conjunto fundamental para la fase de aprendizaje y un conjunto de patrones de prueba para la fase de recuperación de patrones.

Con esta publicación, el Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes (GRAI) del Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional, continúa sus actividades científicas encaminadas a evidenciar las bondades del nuevo enfoque asociativo para reconocimiento y clasificación de patrones, creado en 2002 por miembros del GRAI.

Palabras clave: Clasificación de patrones, Reconocimiento de patrones, Memorias asociativas, *Lernamtrix*, Recuperación perfecta de patrones.

Agradecimientos: Los autores agradecen el apoyo que recibieron de las siguientes instituciones, para la realización de este trabajo: Instituto Politécnico Nacional, COFAA y Secretaría Académica del IPN, CONACyT y Sistema Nacional de Investigadores.

Nota: Esta publicación forma parte de las actividades del Proyecto de Investigación CGPI-20020210.

[1]Estudiante de la Maestría en Ciencias de la Computación del CIC-IPN fgarfias@sagitario.cic.ipn.mx
[2]Director del CIC-IPN jdiaz@cic.ipn.mx
[3]Profesor-Investigador del CIC-IPN cyanez@cic.ipn.mx
Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes grai@cic.ipn.mx. Tel. 7296000 ext. 56584 y 56597

PRESENTACIÓN DEL GRAI

Es mejor equivocarse por actuar y experimentar, que salvarse del error al precio de no hacer nada.

GRAI es el acrónimo de la expresión: Grupo de Robótica y Análisis de Imágenes.

La génesis de este grupo se remonta a las postrimerías del año 1997, cuando en el Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional, se inició el aglutinamiento de una *masa crítica* de elementos humanos proclives a incursionar de manera seria y profesional en esa fascinante disciplina llamada Robótica, y en los apasionantes recovecos del Procesamiento, el Análisis y el Álgebra de Imágenes.

En la actualidad, el GRAI cuenta entre sus filas con investigadores, profesores, alumnos de maestría y de doctorado del CIC-IPN, y algunas personas de otras instituciones con intereses congruentes con los propósitos y acciones del grupo.

Las bases teóricas de las actividades que se realizan en el GRAI provienen de áreas tan interesantes y útiles como la Morfología Matemática, el Álgebra de Imágenes, la Teoría del Control, las Matemáticas Discretas, las Redes Neuronales, las Memorias Asociativas, la Teoría de la Información y la Teoría de las Transformadas Matemáticas, entre otras.

La actividad ha sido productiva y creciente. El GRAI tiene en su haber un premio nacional "Luis Enrique Erro", una presea "Lázaro Cárdenas", un proyecto REDII-Conacyt, media decena de proyectos CGPI-IPN, la autoría de un libro y la edición de otro, varios capítulos de libro, algunos artículos en revista internacional o nacional, media decena de graduados en maestría y tres de doctorado y más de media docena de tesis en proceso.

Existe un basto bagaje de temas, tanto teóricos como de aplicación práctica, que paulatinamente irán saliendo a la luz en los Informes Técnicos del CIC-IPN, con miras a compartir con estudiantes, investigadores y público en general los productos de la actividad coordinada que se realiza en el GRAI, para beneficio del grupo, del Centro, del Instituto y del País.

México, D.F., marzo de 2003

ÍNDICE

1. Introducción.

En este informe técnico se presenta un estudio teórico y experimental, respecto de las condiciones suficientes para que se cumpla la recuperación perfecta de patrones binarios n-dimensionales en la *Lernmatrix* de Steinbuch, dado un conjunto fundamental para la fase de aprendizaje y un conjunto de patrones de prueba para la fase de recuperación de patrones

Las memorias asociativas han merecido la atención de numerosos investigadores internacionales desde hace más de cuatro décadas. Uno de los pioneros fue el científico alemán Karl Steinbuch quien, a principios de la década de los sesenta, ideó, desarrolló y aplicó la *Lernmatrix* (Steinbuch, 1961; Steinbuch & Frank, 1961).

La *Lernmatrix* constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas, y constituye uno de los primeros intentos exitosos de codificar información en arreglos cuadriculados conocidos como *crossbar* (Simpson, 1990).

Once años después de que Steinbuch dio a conocer *Lernmatrix*, dos investigadores concluyeron y presentaron ante al comunidad científica internacional sus trabajos de investigación. Apoyado por la *UCLA*, a principios de 1972 James A. Anderson desarrolló y presentó su *Interactive Memory* (Anderson, 1972), y meses más tarde, Teuvo Kohonen, a la sazón profesor de la *Helsinki University of Technology*, dio a conocer ante el mundo sus *Correlation Matrix Memories* (Kohonen, 1972).Los trabajos de Anderson y Kohonen dieron lugar al modelo que actualmente se conoce con el nombre genérico de *Linear Associator*.

Es pertinente mencionar un hecho curioso, que se ha presentado en personajes dedicados a otras ramas de la ciencia: James A. Anderson y Teuvo Kohonen obtuvieron resultados *asombrosamente similares* a pesar de que trabajaron independientemente, alejados, y sin tener noticia uno del otro, hasta tiempo después de que aparecieron los artículos; además, estos autores tienen formaciones profesionales totalmente diferentes: Anderson es neurofisiólogo (estadunidense) y Kohonen es físico e ingeniero eléctrico (finlandés) (Anderson & Rosenfeld, 1990; Kohonen, 1989).

Cada uno de los modelos mencionados tiene ventajas y desventajas, pero el presente trabajo es relevante en la medida en que trata acerca de un modelo que había sido abandonado por más de cuarenta años. En efecto, no obstante que Steinbuch presentó la *Lernmatrix* hace más de cuatro décadas, ningún investigador, incluyendo al propio Steinbuch, se ha dado a la tarea de estudiar con rigor científico las condiciones necesarias y suficientes para recuperación perfecta del conjunto fundamental y de patrones que no pertenezcan a éste. En este trabajo se presenta, un estudio sistemático y experimental.

2. Memorias asociativas.

El propósito de esta sección es plantear de manera diáfana y concisa el problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas. Por su naturaleza, este problema se escinde en dos fases claramente distinguibles:

1. Fase de $aprendizaje$ (generación de la memoria asociativa)
2. Fase de $recuperación$ (operación de la memoria asociativa)

Para estar en condiciones de realizar el planteamiento del problema, es preciso previamente proporcionar los conceptos básicos, las notaciones y la nomenclatura relacionados con el diseño y funcionamiento de las memorias asociativas.

Los conceptos básicos son conocidos tres décadas ha, y se presentan como originalmente fueron establecidos en las referencias (Kohonen, 1972, 1977, 1987, 1989; Anderson, 1972; Anderson & Bower, 1977; Anderson & Rosenfeld, 1990; Hassoun, 1993, 1995, 1997).

El propósito fundamental de una memoria asociativa es recuperar patrones completos a partir de patrones de entrada que pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado. De acuerdo con esta afirmación, una $memoria\ asociativa$ $\mathbf{M}$ puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{\mathbf{M}} \longrightarrow \mathbf{y}$$

El $patrón\ de\ entrada$ está representado por un vector columna denotado por $\mathbf{x}$ y el $patrón\ de\ salida$, por el vector columna denotado por $\mathbf{y}$.

Cada uno de los patrones de entrada forma una $asociación$ con el correspondiente patrón de salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ del esquema forman la asociación $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Para facilitar la manipulación algebraica de los patrones de entrada y de salida, los denotaremos con las mismas letras negrillas, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, agregándoles números naturales como superíndices para efectos de discriminación simbólica. Por ejemplo, a un patrón de entrada $\mathbf{x}^1$ le corresponderá un patrón de salida $\mathbf{y}^1$, y ambos formarán la asociación $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$; del mismo modo, para un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

La memoria asociativa $\mathbf{M}$ se representa mediante una matriz cuya componente ij-ésima es m_{ij} (Palm, Schwenker, Sommer & Strey, 1997); la matriz $\mathbf{M}$ se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: éste es el $conjunto\ fundamental\ de\ asociaciones$, o simplemente $conjunto\ fundamental$. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p es un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$$

A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama $patrones\ fundamentales$.

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas. Si se cumple que $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \; \forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$, se dice que la memoria es $autoasociativa$; de otro modo, la memoria es $heteroasociativa$ (Kohonen,1972). Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente: $\exists \mu \in \{1, 2, ..., p\}$ para el que se cumple que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$.

Es posible que los patrones fundamentales sean alterados con diferentes tipos de ruido. Para diferenciar un patrón alterado del correspondiente patrón fundamental, usaremos la tilde en la parte superior; así, el patrón $\widetilde{\mathbf{x}}^k$ es una versión alterada del patrón fundamental $\mathbf{x}^k$, y el tipo de alteración que representa $\widetilde{\mathbf{x}}^k$ se evidenciará en el contexto específico donde se use.

Si al presentarle a la memoria $\mathbf{M}$ un patrón alterado $\widetilde{\mathbf{x}}^\omega$ como entrada ($\omega \in \{1, 2, ..., p\}$), $\mathbf{M}$ responde con el correspondiente patrón fundamental de salida $\mathbf{y}^\omega$, se dice que la recuperación es $perfecta$. Una $memoria\ perfecta$ es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.

Naturalmente, también los patrones de salida pueden ser alterados; por ejemplo, si $\mathbf{y}^3$ es un patrón fundamental, entonces $\widetilde{\mathbf{y}}^3$ representa una versión alterada de $\mathbf{y}^3$.

Abundemos en la caracterización de los patrones de entrada, de salida y de la matriz $\mathbf{M}$.

Primeramente se requiere la especificación de dos conjuntos a los que llamaremos arbitrariamente A y B. La importancia de estos dos conjuntos radica en que las componenetes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, serán elementos del conjunto A, y las entradas de la matriz $\mathbf{M}$ serán elementos del conjunto B.

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Esto significa que el número de posibilidades para escoger A y B es infinito; a continuación se ejemplifican algunas de ellas:

- $A = B = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es el símbolo que representa al conjunto de los números reales.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{0, 1\}$.
- $A = B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{R}$ y $B = \{-1, 1\}$.
- $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{-1, 1\}$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros.
- $A \subset \mathbb{Z}$ y $B \subset \mathbb{Z}$

Cada uno de los modelos de memorias asociativas que se incluyen en esta colección, posee sus propias especificaciones para los conjuntos A y B , de acuerdo con las necesidades del creador del modelo en cuestión.

Ya que se tienen especificados los conjuntos A y B, es necesario establecer las dimensiones de los patrones, tanto de entrada como de salida.

Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada, y por m la dimensión de los patrones de salida; claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que $m \neq n$, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A, y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A. Es decir:

$$\mathbf{x}^\mu \in A^n \text{ y } \mathbf{y}^\mu \in A^m \ \forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$$

La j-ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1, 2, ..., n\}$ o $j \in \{1, 2, ..., m\}$ según corresponda). La j-ésima componente de un vector columna $\mathbf{x}^\mu$ se representa por

$$x_j^\mu$$

Ejemplos:

- La i-ésima componente del vector columna $\mathbf{x}^\mu$ se representa por x_i^μ
- La tercera componente del vector columna $\mathbf{x}^5$ se representa por x_3^5
- La j-ésima componente del vector columna $\mathbf{y}^\mu$ se representa por y_j^μ
- La l-ésima componente del vector columna $\mathbf{y}^\omega$ se representa por y_l^ω

Al usar el superíndice t para indicar el transpuesto de un vector, se obtienen las siguientes expresiones para los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida, respectivamente:

$$\mathbf{x}^\mu = (x_1^\mu, x_2^\mu, ..., x_n^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n$$

$$\mathbf{y}^\mu = (y_1^\mu, y_2^\mu, ..., y_m^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

Con lo anterior, es ya posible presentar el planteamiento del $problema\ general\ de\ las\ memorias\ asociativas$:

1. Fase de aprendizaje. Encontrar los operadores adecuados y una manera de generar una matriz $\mathbf{M}$ que almacene las p asociaciones del conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2), ..., (\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^p)\}$, donde $\mathbf{x}^\mu \in A^n$ y $\mathbf{y}^\mu \in A^m \ \ \forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$. Si $\exists \mu \in \{1, 2, ..., p\}$ tal que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$, la memoria será $heteroasociativa$; si $m = n$ y $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \ \forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$, la memoria será $autoasociativa$.
2. Fase de recuperación. Hallar los operadores adecuados y las condiciones suficientes para obtener el patrón fundamental de salida $\mathbf{y}^\mu$, cuando se opera la memoria $\mathbf{M}$ con el patrón fundamental de entrada $\mathbf{x}^\mu$; lo anterior para todos los elementos del conjunto fundamental y para ambos modos: autoasociativo y heteroasociativo. Exhibir y caracterizar, además, el ruido que puede soportar la memoria en el patrón de entrada $\widetilde{\mathbf{x}}^\omega$, para entregar una salida perfecta $\mathbf{y}^\omega$.

3. La *Lernmatrix*.

La $Lernmatrix$ es una memoria heteroasociativa que puede funcionar como un clasificador de patrones binarios si se escogen adecuadamente los patrones de salida; es un sistema de entrada y salida que al operar acepta como entrada un patrón binario $\mathbf{x}^\mu \in A^n$, $A = \{0, 1\}$ y produce como salida la clase $\mathbf{y}^\mu \in A^m$ que le corresponde (de entre m clases diferentes), codificada ésta con un método simple, a saber: para representar la clase $k \in \{1, 2, ..., m\}$, se asignan a las componentes del vector de salida $\mathbf{y}^\mu$ los siguientes valores: $y_k^\mu = 1$, y $y_j^\mu = 0$ para $j = 1, 2..., k-1, k+1, ...m$.

3.1 Fases de aprendizaje y recuperación

En la siguiente figura se esquematiza la fase de aprendizaje para la $Lernmatrix$ de Steinbuch, al incorporar la pareja de patrones de entrenamiento $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \in A^n \times A^m$.

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & x_1^\mu & x_2^\mu & \cdots & x_j^\mu & \cdots & x_n^\mu \\
\hline
y_1^\mu & m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1n} \\
\hline
y_2^\mu & m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2n} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
y_i^\mu & m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{in} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
y_m^\mu & m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mj} & \cdots & m_{mn} \\
\hline
\end{array} \tag{1}
$$

Cada uno de los componentes m_{ij} de $\mathbf{M}$, la $Lernmatrix$ de Steinbuch, tiene valor cero al inicio, y se actualiza de acuerdo con la regla $m_{ij} + \Delta m_{ij}$, donde:

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon \text{ si } y_i^\mu = 1 = x_j^\mu \\ -\varepsilon \text{ si } y_i^\mu = 0 \text{ y } x_j^\mu = 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{2}$$

siendo ε una constante positiva escogida previamente.

La fase de recuperación consiste en encontrar la clase a la que pertenece un vector de entrada $\mathbf{x}^\omega \in A^n$ dado. Encontrar la clase significa obtener las coordenadas del vector $\mathbf{y}^\omega \in A^m$ que le corresponde al patrón $\mathbf{x}^\omega$; en virtud del método de construcción de los vectores $\mathbf{y}^\mu$ la clase debería obtenerse sin ambigüedad.

La i-ésima coordenada y_i^ω del vector de clase $\mathbf{y}^\omega \in A^m$ se obtiene como lo indica la siguiente expresión, donde $\bigvee$ es el operador *máximo*:

$$y_i^\omega = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j=1}^n m_{ij}.x_j^\omega = \bigvee_{h=1}^m \left[\sum_{j=1}^n m_{hj}.x_j^\omega\right] \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{3}$$

3.2 Nuevos resultados

En esta sección definiremos una función que nos permita desarrollar una forma alterna de caracterizar las fases de aprendizaje y recuperación.

Definition 1 *Sean $A = \{0, 1\}$ y $C = \{-1, 1\}$. Llamaremos $funcin\ de\ Steinbuch$ a una función $f : A \to C$ que cumpla con la siguiente propiedad:*

$$\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{array} \tag{4}$$

Claramente, existe un número infinito de funciones de Steinbuch, algunas de las cuales se ejemplifican a continuación:

Example 1 $f(x) = \begin{cases} -1, \textit{ si } x = 0 \\ 1, \textit{ si } x = 1 \end{cases}$

Example 2 $f(x) = 2x - 1$

Example 3 $f(x) = -(-1)^x$

Una vez definida una función de Steinbuch f, podemos reescribir la expresión 2 de la siguiente forma:

$$\Delta m_{ij} = \varepsilon y_i^\mu f(x_j^\mu) \tag{5}$$

La tabla muestra que la expresión 5 es equivalente a la 2

y_i^μ	x_j^μ	$f(x_j^\mu)$	Δm_{ij}
1	1	1	$+\varepsilon$
1	0	-1	$-\varepsilon$
0	1	1	0
0	0	-1	0

Para lograr caracterizar la regla de aprendizaje de la Lernmatrix 5 en forma matricial, se requiere la siguiente definición.

Definition 2 *Sean $A = \{0,1\}$ y $C = \{-1,1\}$ y sea $f : A \to C$ una función de Steinbuch. Llamaremos $funcin\ vectorial\ de\ Steinbuch\ con\ respecto\ a\ f$ a una función $\mathbf{F} : A^n \to C^n$, tal que:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ ... \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Ahora, sea $\Delta\mathbf{M}$ es una matriz cuya componente ij-ésima es Δm_{ij}, y $\mathbf{F}$ una función vectorial de Steinbuch con respecto a f.

$$\Delta\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \Delta m_{11} & \Delta m_{12} & ... & \Delta m_{1j} & ... & \Delta m_{1n} \\ \Delta m_{21} & \Delta m_{22} & ... & \Delta m_{2j} & ... & \Delta m_{2n} \\ ... & ... & & ... & & ... \\ \Delta m_{i1} & \Delta m_{i2} & ... & \Delta m_{ij} & ... & \Delta m_{in} \\ ... & ... & & ... & & ... \\ \Delta m_{m1} & \Delta m_{m2} & ... & \Delta m_{mj} & ... & \Delta m_{mn} \end{pmatrix}$$

Al usar la expresión 5 en la matriz anterior, se tiene:

$$\Delta\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon y_1^\mu f(x_1^\mu) & \varepsilon y_1^\mu f(x_2^\mu) & ... & \varepsilon y_1^\mu f(x_j^\mu) & ... & \varepsilon y_1^\mu f(x_n^\mu) \\ \varepsilon y_2^\mu f(x_1^\mu) & \varepsilon y_1^\mu f(x_2^\mu) & ... & \varepsilon y_2^\mu f(x_j^\mu) & ... & \varepsilon y_2^\mu f(x_n^\mu) \\ ... & ... & & ... & & ... \\ \varepsilon y_i^\mu f(x_1^\mu) & \varepsilon y_i^\mu f(x_2^\mu) & ... & \varepsilon y_i^\mu f(x_j^\mu) & ... & \varepsilon y_i^\mu f(x_n^\mu) \\ ... & ... & & ... & & ... \\ \varepsilon y_m^\mu f(x_1^\mu) & \varepsilon y_m^\mu f(x_2^\mu) & ... & \varepsilon y_m^\mu f(x_j^\mu) & ... & \varepsilon y_m^\mu f(x_n^\mu) \end{pmatrix}$$

Factorizando ε:

$$
\Delta\mathbf{M} = \varepsilon \begin{pmatrix} y_1^\mu f(x_1^\mu) & y_1^\mu f(x_2^\mu) & ... & y_1^\mu f(x_j^\mu) & ... & y_1^\mu f(x_n^\mu) \\ y_2^\mu f(x_1^\mu) & y_1^\mu f(x_2^\mu) & ... & y_2^\mu f(x_j^\mu) & ... & y_2^\mu f(x_n^\mu) \\ ... & .. & & ... & & ... \\ y_i^\mu f(x_1^\mu) & y_i^\mu f(x_2^\mu) & ... & y_i^\mu f(x_j^\mu) & ... & y_i^\mu f(x_n^\mu) \\ ... & ... & & ... & & ... \\ y_m^\mu f(x_1^\mu) & y_m^\mu f(x_2^\mu) & ... & y_m^\mu f(x_j^\mu) & ... & y_m^\mu f(x_n^\mu) \end{pmatrix}
$$

Es decir:

$$
\Delta\mathbf{M} = \varepsilon \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ ... \\ y_i^\mu \\ ... \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(x_1^\mu) & f(x_2^\mu) & ... & f(x_j^\mu) & ... & f(x_n^\mu) \end{pmatrix}
$$

de donde se concluye que:

$$
\Delta\mathbf{M} = \varepsilon\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^\mu))^T \tag{6}
$$

Finalmente, y tomando en cuenta que para formar la Lernmatrix se suman todas las $\Delta\mathbf{M}$ para cada valor de μ, podemos, formular las fases de aprendizaje y de recuperación con base en la nueva caracterización que proponemos.

Fase de Aprendizaje de la Lernmatrix

Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu \in \{1, 2, .., m\}\}$ un conjunto fundamental y $\mathbf{F}$ una función vectorial de Steinbuch con respecto a f. La Lernmatrix $\mathbf{M}$ para el conjunto fundamental se construye de acuerdo con la siguiente regla:

$$
\mathbf{M} = \varepsilon \sum_{\mu=1}^{m} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^\mu))^T \tag{7}
$$

Fase de recuperación de la Lernmatrix

Sea $\mathbf{M}$ una Lernmatrix y $\mathbf{x}^\omega$ un patrón de dimensión n. El patrón $\widetilde{\mathbf{y}}^\omega$ recuperado a partir de $\mathbf{x}^\omega$ y $\mathbf{M}$ se determina de la siguiente forma:

$$
\mathbf{z}^\omega = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^\omega
$$

$$
\widetilde{y}_i^\omega = \begin{cases} 1 \text{ si } z_i^\omega = \bigvee_{h=1}^{m} z_h^\omega \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{8}
$$

Donde $\widetilde{\mathbf{y}}^\omega$ no es necesariamente igual a $\mathbf{y}^\omega$. En particular, si $\widetilde{\mathbf{y}}^\omega = \mathbf{y}^\omega$, entonces la recuperación es perfecta, de acuerdo con la definición **??**.

3.3 Condiciones para recuperación perfecta

Con las expresiones 7 y 8, hemos caracterizado, en forma matricial, las reglas de aprendizaje y de recuperación de la Lernmatrix. Echando mano de esta caracterización y algunas definiciones adicionales, iniciaremos la investigación de las condiciones necesarias y suficientes para que la Lernmatrix recupere todo su conjunto fundamental de manera perfecta.

Definition 3 *Sea $A = \{0, 1\}$ y sean $\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}^\beta \in A^n$ dos patrones. Se dice que $\mathbf{x}^\alpha$ es igual que $\mathbf{x}^\beta$ (simbolizado $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^\beta$) si y sólo si $\forall i \in \{1, 2, .., n\}$ se cumple que $x_i^\beta = x_i^\alpha$.*

Definition 4 *Sea $A = \{0, 1\}$ y sean $\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}^\beta \in A^n$ dos patrones. Se dice que $\mathbf{x}^\alpha$ es menor o igual que $\mathbf{x}^\beta$ (simbolizado $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta$) si y sólo si $\forall i \in \{1, 2, .., n\}$ se cumple que $x_i^\beta = 1$ siempre que $x_i^\alpha = 1$.*

Example 4 *Sean $\mathbf{x}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}^\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta$, ya que $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se cumple que $x_i^\beta = 1$ cada vez que $x_i^\alpha = 1$*

Example 5 *Sean $\mathbf{x}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}^\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces es falso que $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta$, porque $x_1^\alpha = 1$ y $x_1^\beta = 0$.*

Después de haber descrito las herramientas necesarias, se presentan un lema, un teorema y un corolario, los cuales forman la parte central del presente trabajo.

Lemma 1 *Sea $\mathbf{M}$ una Lernmatrix, entonces no es posible recuperar de manera perfecta el patrón $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es el vector con ceros en todas sus entradas, es decir, que $x_i = 0\ \forall i \in \{1, 2, .., n\}$.*

Proof. Sea $\mathbf{M}$ una Lernmatrix y sea $\mathbf{x}$ un patrón de dimension n tal que $x_i = 0\ \forall i \in \{1, 2, .., n\}$. Para la fase de recuperación, se necesita primero calcular el vector $\mathbf{z} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$. Puesto que $x_i = 0$ $\forall i \in \{1, 2, .., n\}$, entonces $z_i = 0\ \forall i \in \{1, 2, .., m\}$. Luego, entonces, $\bigvee_{h=1}^{m} [z_h] = 0$, de aqui que $y_i = 1\ \forall i \in \{1, 2, .., m\}$ .Dado que todos los $\mathbf{y}^\mu$ del conjunto fundamental se crearon de forma que $y_\mu^\mu = 1$ y $y_\alpha^\mu = 0\ \forall \alpha \neq \mu$, el vector recuperado $\mathbf{y}$ no coincide con ningún $\mathbf{y}^\mu$, por tanto, $\mathbf{x}$ no puede ser recuperado de manera perfecta y el lema queda demostrado▶. ■

La importancia del lema anterior radica en que, sin importar las características del conjunto fundamental, el patrón **0** nunca podrá ser parte de una Lernmatrix, tanto como parte de su conjunto fundamental, como en el caso de que sea un patrón alterado de otro fundamental.
El siguiente teorema, y el corolario que se desprende a partir de él, nos muestran las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los vectores del conjunto fundamental para que la recuperación sea perfecta, de acuerdo con la definición **??**.

Theorem 2 *Sea* M *una Lernmatrix y sea* $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu \in \{1, 2, .., m\}\}$ *el conjunto fundamental de* M*. Es posible recuperar de manera perfecta el conjunto fundamental de* M *si y sólo si* $\forall$ $\alpha, \beta \in \{1, 2, .., m\}$ *y* $\alpha \neq \beta$*, la proposición* $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta$ *es falsa.*

Proof. Caso 1: $\exists\ \alpha \in \{1, 2, .., m\}$ tal que $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{0}$.
Claramente, se cumple que $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta\ \forall \beta \in \{1, 2, .., m\}$ y por ello la proposición $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta$ es verdadera al menos para un caso. Por otro lado, por lema 1 se afirma que el patrón $\mathbf{x}^\alpha$ no se recupera de manera perfecta; es decir, no es posible recuperar el conjunto fundamental de manera perfecta. Con ello en teorema queda demostrado.
Caso2: $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{0}\ \forall \mu \in \{1, 2, .., m\}$.
Supongamos que $\forall\ \alpha, \beta \in \{1, 2, .., m\}$ y $\alpha \neq \beta$ la proposición $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta$ es falsa. De acuerdo con la expresión 7 para la fase de aprendizaje y considerando un valor $\alpha \in \{1, 2, .., m\}$ cualquiera, la matriz $\mathbf{M}$ se construye como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \varepsilon \sum_{\mu=1}^{m} \mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^\mu))^T \\
\mathbf{M} &= \varepsilon \left[\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^1))^T + ... + \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^\alpha))^T + \\ ... + \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{x}^m))^T \end{array} \right] \\
\mathbf{M} &= \varepsilon \begin{pmatrix} f(x_1^1) & f(x_2^1) & ... & f(x_j^1) & ... & f(x_n^1) \\ ... & ... & & ... & & ... \\ f(x_1^\alpha) & f(x_2^\alpha) & ... & f(x_j^\alpha) & ... & f(x_n^\alpha) \\ ... & ... & & ... & & ... \\ f(x_1^m) & f(x_2^m) & ... & f(x_j^m) & ... & f(x_n^m) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

Ahora, si queremos recuperar el patrón $\mathbf{y}^\alpha$ que corresponde a la salida del patrón $\mathbf{x}^\alpha$, tenemos que calcular el vector $\mathbf{z}^\alpha$ aplicando la expresión 8 que corresponde a la primera parte de la fase de recuperación:

$$\mathbf{z}^\alpha = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^\alpha$$

Aplicando la expresión 9 en la expresión anterior, se tiene:

$$\mathbf{z}^\alpha = \varepsilon \begin{pmatrix} f(x_1^1) & f(x_2^1) & ... & f(x_j^1) & ... & f(x_n^1) \\ ... & ... & & ... & & ... \\ f(x_1^\alpha) & f(x_2^\alpha) & ... & f(x_j^\alpha) & ... & f(x_n^\alpha) \\ ... & ... & & ... & & ... \\ f(x_1^m) & f(x_2^m) & ... & f(x_j^m) & ... & f(x_n^m) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}^\alpha$$

Es decir:

$$\mathbf{z}^\alpha = \varepsilon \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} f(x_j^1) x_j^\alpha \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\alpha) x_j^\alpha \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} f(x_j^m) x_j^\alpha \end{pmatrix} \tag{10}$$

Esto significa que para algún valor $k \in \{1, 2, .., m\}$, la componente k-ésima de $\mathbf{z}^\alpha$ se expresa así:

$$z_k^\alpha = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} f(x_j^k) x_j^\alpha \tag{11}$$

Específicamente las componentes α-ésima y β-ésima, con $\beta \in \{1, 2, .., m\}$ un valor cualquiera tal que $\alpha \neq \beta$, se expresan de la siguiente manera:

$$z_\alpha^\alpha = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\alpha) x_j^\alpha \quad \text{y} \quad z_\beta^\alpha = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\beta) x_j^\alpha \tag{12}$$

Siguiendo con la expresión 8, de acuerdo con la segunda parte donde se obtienen las coordenadas $\tilde{y}_i^\omega$ y considando la manera en que se forma cada uno de los $\mathbf{y}^\mu$ del conjunto fundamental, podemos inferir que la condición en la expresión 10 para que se recupere el patrón $\mathbf{y}^\alpha$ de manera perfecta es que

$$z_\alpha^\alpha > z_\beta^\alpha \tag{13}$$

La desigualdad es estricta porque debe haber sólo un máximo para recuperación perfecta del patrón $\mathbf{y}^\alpha$, según la expresión 8.

Aplicando la expresión 12 en 13 se obtienen las siguientes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} f(x_j^\alpha)x_j^\alpha > \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\beta)x_j^\alpha \\
&\sum_{j=1}^{n} f(x_j^\alpha)x_j^\alpha - \sum_{j=1}^{n} f(x_j^\beta)x_j^\alpha > 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Definamos ahora el conjunto $T = \{j \mid x_j^\alpha = 1\}$, donde llamaremos t a la cardinalidad de T, y tomando en cuenta que no influyen en la suma los términos donde $x_j^\alpha = 0$, la expresión anterior se reduce a:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in T} f(x_j^\alpha) - \sum_{j\in T} f(x_j^\beta) > 0 \\
&t - \sum_{j\in T} f(x_j^\beta) > 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Luego, es claro que $-t \leq \sum_{j\in T} f(x_j^\beta) \leq t$, ya que, de acuerdo con la definición 4, sucede que $f(x_j^\beta) = 1$ ó $f(x_j^\beta) = -1$ y además existen t términos en la sumatoria.

Por otro lado, $\sum_{j\in T} f(x_j^\beta) \neq t$, como se muestra a continuacion. Supongamos que: $\sum_{j\in T} f(x_j^\beta) = t$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&f(x_j^\beta) = 1 \ \forall j \in T \\
&x_j^\beta = 1 \ \forall j \in T \\
&x_j^\beta = 1 \ \forall j \text{ tal que } x_j^\alpha = 1 \\
&\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta \text{ contradicción.}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $-t \leq \sum_{j\in T} f(x_j^\beta) < t$ y la desigualdad 15 siempre se cumple si y sólo si la recuperación de $\mathbf{y}^\alpha$ es perfecta.

Finalmente, en virtud de que α y β se escogieron de manera arbitraria, podemos concluir que es posible recuperar de manera perfecta el el conjunto fundamental de $\mathbf{M}$ si y sólo si $\forall\ \alpha, \beta \in \{1, 2, .., m\}$ y $\alpha \neq \beta$, la proposición $\mathbf{x}^\alpha \leq \mathbf{x}^\beta$ es falsa►. ■

Corollary 3 *Sea* $\mathbf{M}$ *una Lernmatrix y sea* $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu \in \{1, 2, .., m\}\}$ *el conjunto fundamental de* $\mathbf{M}$*, con* $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{0}\ \forall \mu \in \{1, 2, .., p\}$. *Si* $\exists\ \alpha \in \{1, 2, .., p\}$ *de modo que* $\mathbf{x}^\alpha \in \{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu \in \{1, 2, .., m\}\}$ *con* $x_i^\alpha = 1\ \forall i \in \{1, 2, .., n\}$, *entonces no es posible recuperar de manera perfecta el conjunto fundamental de* $\mathbf{M}$.

Proof. Dado que $\mathbf{x}^\alpha$ es un patrón del conjunto fundamental de $\mathbf{M}$ cuyas entradas son sólo unos, es decir $x_i^\alpha = 1\ \forall i \in \{1, 2, .., n\}$, entonces $\mathbf{x}^\mu \leq \mathbf{x}^\alpha$, $\forall \mu \in \{1, 2, .., p\}$ y $\mu \neq \alpha$, de acuerdo con la definición . Dado que existen $\alpha, \mu \in \{1, 2, .., p\}$ tales que $\mu \neq \alpha$ y $\mathbf{x}^\mu \leq \mathbf{x}^\alpha$, al aplicar el teorema 2 se demuestra de manera inmediata que no es posible recuperar de manera perfecta todo el conjunto fundamental de la Lernmatrix $\mathbf{M}$ ►. ■

3.4 Disquisiciones experimentales

En esta sección se describe el tipo de ejemplos que inspiraron los experimentos realizados para verificar cuantitativamente los nuevos resultados y las condiciones para recuperación perfecta de patrones.

Para ello, se consideraron las fases de aprendizaje y reuperación de patrones en la Lernmatrix, de acuerdo con la representación alternativa presentada en la sección anterior.

Ejemplo 1.-

Sean $m = 3$, $n = 5$ y $\varepsilon > 0$. Es decir, se tienen 3 clases de patrones de dimensión 5; las primeras tres asociaciones se presentan a continuación:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para iniciar la creación (fase de aprendizaje) de la *Lernmatrix*, se asigna el valor cero a todos los elementos m_{ij} y se realizan las operaciones de la crossbar 1 y la expresión 2 con la primera pareja de asociaciones:

	$x_1^1 = 1$	$x_2^1 = 0$	$x_3^1 = 1$	$x_4^1 = 0$	$x_5^1 = 1$
$y_1^1 = 1$	ε	$-\varepsilon$	ε	$-\varepsilon$	ε
$y_2^1 = 0$	0	0	0	0	0
$y_3^1 = 0$	0	0	0	0	0

La segunda pareja de asociaciones provoca los siguientes cambios en la matriz:

	$x_1^2 = 1$	$x_2^2 = 1$	$x_3^2 = 0$	$x_4^2 = 0$	$x_5^2 = 1$
$y_1^2 = 0$	ε	$-\varepsilon$	ε	$-\varepsilon$	ε
$y_2^2 = 1$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^2 = 0$	0	0	0	0	0

Y finalmente con la tercera pareja la matriz toma el siguiente aspecto:

	$x_1^3 = 1$	$x_2^3 = 0$	$x_3^3 = 1$	$x_4^3 = 1$	$x_5^3 = 0$
$y_1^3 = 0$	ε	$-\varepsilon$	ε	$-\varepsilon$	ε
$y_2^3 = 0$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^3 = 1$	ε	$-\varepsilon$	ε	ε	$-\varepsilon$

(16)

Es decir,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \tag{17}$$

La fase de recuperación consiste en presentarle a la matriz $\mathbf{M}$ uno de los patrones de entrada y realizar las operaciones indicadas en la expresión 3; a la salida se espera obtener la clase a la que pertenece el vector de entrada.
Iniciemos con el patrón $\mathbf{x}^1$.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^1 = 3\varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^1 = \varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^1 = \varepsilon$. Por ello, $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^1 = \bigvee_{h=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^1\right]$ y de acuerdo con la expresión 3, se tiene que $y_1^1 = 1$ y $y_2^1 = 0 = y_3^1$. Por lo tanto, el vector que representa a la clase es:

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recuperemos la clase a la que pertenece el patrón de entrada $\mathbf{x}^2$.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

En este caso se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^2 = \varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^2 = 3\varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^2 = -\varepsilon$. Por ello, $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^2 = \bigvee_{h=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^2\right]$ y de acuerdo con la expresión 3, se tiene que $y_2^2 = 1$ y $y_1^2 = 0 = y_3^2$. Por lo tanto, el vector que representa a la clase es:

$$\mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

finalmente recuperemos la clase a la que pertenece el patrón de entrada $\mathbf{x}^3$.

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ 3\varepsilon \end{pmatrix}$$

En este caso se observa que: $\sum_{j=1}^{5} m_{1j}x_j^3 = \varepsilon$; $\sum_{j=1}^{5} m_{2j}x_j^3 = -\varepsilon$ y $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^3 = 3\varepsilon$. Por ello, $\sum_{j=1}^{5} m_{3j}x_j^3 = \bigvee_{h=1}^{p}\left[\sum_{j=1}^{5} m_{hj}x_j^3\right]$ y de acuerdo con la expresión 3, se tiene que $y_3^3 = 1$ y $y_1^3 = 0 = y_2^3$. Por lo tanto, el vector que representa a la clase es:

$$\mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.-

Surge una cuestión interesante: ¿qué pasa si hay más vectores de entrada que clases?.
Dado que sólo existen tres clases diferentes, un cuarto patrón debe pertenecer necesariamente auna de esa tres clases.
Asignemos la clase $\mathbf{y}^1$ al vector de entrada $\mathbf{x}^4$ dado por:

$$\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eso significa que debemos modificar la matriz 17 llevando a cabo las operaciones de la expresión 2 en la crossbar 16:

	$x_1^4 = 0$	$x_2^4 = 1$	$x_3^4 = 0$	$x_4^4 = 1$	$x_5^4 = 1$
$y_1^1 = 1$	0	0	0	0	2ε
$y_2^1 = 0$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^1 = 0$	ε	$-\varepsilon$	ε	ε	$-\varepsilon$

Ahora la nueva *Lernmtrix*, que se representará con el símbolo $\mathbf{M}_{4patrones}$, es:

$$\mathbf{M}_{4patrones} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Recuperemos la clase para cada uno de los 4 vectores de entrada, de acuerdo con la expresión 3:

$$\mathbf{M}_{4patrones} \cdot \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^1$$

$$\mathbf{M}_{4patrones} \cdot \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^2$$

$$\mathbf{M}_{4patrones} \cdot \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^3$$

$$\mathbf{M}_{4patrones} \cdot \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^1$$

Se observa que la recuperación se realizó de manera exacta para los cuatro patrones, a pesar de que hay más patrones que clases. Hasta aquí la *Lernmatrix* luce como un clasificador preciso. Cuando se aumenta el número de patrones, ocurre el fenómeno llamado saturación.

Ejemplo 3.-

Ejemplifiquemos el fenómeno de *saturación* en la *Lernmatrix* de Steinbuch, y para ello modifiquemos la matriz $\mathbf{M}_{4patrones}$ con la pareja:

$$\mathbf{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz:

$$\mathbf{M}_{4patrones} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

y de la pareja $(\mathbf{x}^5, \mathbf{y}^3)$ obtenemos:

	$x_1^5 = 0$	$x_2^5 = 0$	$x_3^5 = 1$	$x_4^5 = 0$	$x_5^5 = 1$
$y_1^3 = 0$	0	0	0	0	2ε
$y_2^3 = 0$	ε	ε	$-\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
$y_3^3 = 1$	0	-2ε	2ε	0	0

La nueva *Lernmatrix*, que se representará con $\mathbf{M}_{5patrones}$ es:

$$\mathbf{M}_{5patrones} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al intentar recuperar la clase para cada uno de los cinco patrones de entrada, se obtiene:

$$\mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{¿clase } \mathbf{y}^1 \text{ o } \mathbf{y}^3\text{?}$$

$$\mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 3\varepsilon \\ -2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^2$$

$$\mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^3$$

$$\mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ \varepsilon \\ -2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{clase } \mathbf{y}^1$$

$$\mathbf{M}_{5patrones} \cdot \mathbf{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & -2\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 0 \\ 2\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{¿clase } \mathbf{y}^1 \text{ o } \mathbf{y}^3\text{?}$$

4. Epílogo

En el presente trabajo se ha planteado una forma alternativa de representar la *Lernmatrix* de Steinbuch, así como las demostraciones de un lema, un teorema y un corolario que describen las condiciones necesarias y suficientes para que la Lernmatrix de Steinbuch recupere de manera perfecta todo su conjunto fundamental.

La relevancia de los resultados presentados en este artículo nos permite afirmar que este trabajo abre caminos claros para quienes se interesen en realizar investigaciones futuras sobre el tema, a saber:

* investigar algunas otras propiedades que pueda exhibir esta memoria asociativa
* las condiciones de respuesta ante ruido aditivo y sustractivo
* las condiciones bajo las cuales se da la saturación al tener varios patrones que formen parte de una misma clase
* la posible creación de una nueva versión de la Lernmatrix, que no sólo trabaje sobre patrones binarios, sino en el dominio de los números enteros, o más aún, en los reales.

Los resultados de estas investigaciones podrían dar paso a la creación de nuevas memorias asociativas que podrían facilitar la resolución de algunos tipos de problemas, principalmente en el área de la clasificación de patrones.

5. Bibliografía.

[1] Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics, 26*, 175-185.

[2] Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing: Fundations of Research*, Cambridge: MIT Press.

[3] Anderson, J. R. & Bower, G. (1977). *Memoria Asociativa*, México: Limusa.

[4] Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, *Neural Networks (11), 5,* 869-876.

[5] Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias asociativas con respuesta perfecta y capacidad infinita, *Memoria del TAINA'99, México, D.F.*, 23-38.

[6] Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.

[7] Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions on Computers, C-21, 4*, 353-359.

[8] Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.

[9] Simpson, P. K. (1990). *Artificial Neural Systems*, New York: Pergamon Press.

[10] Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, *Kybernetik, 1, 1*, 36-45.

[11] Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, *Kybernetik, 1, 3*, 117-124.

[12] Yáñez-Márquez , C. (2002). *Memorias Asociativas basadas en Relaciones de Orden y Operadores Binarios*. Tesis doctoral, CIC-IPN, México.

[13] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). *Lernmatrix de Steinbuch*, IT-48, Serie Verde, ISBN 970-18-6688-6, CIC-IPN, México.