



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**“ESTUDIOS DE FLUJOS
MULTIFÁSICOS EN MEDIOS
POROSOS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

CON ESPECIALIDAD EN

INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:

JANIS ZAPATA LÓPEZ

DIRECTOR: DR. ALEXANDER S. BALANKIN

DIRECTOR: DR. DANIEL MORALES MATAMOROS



MÉXICO, D.F.

DICIEMBRE DE 2011



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

SIP-14BIS

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 10:00 horas del día 02 del mes de Junio del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis de titulada:
“ESTUDIOS DE FLUJOS MULTIFASICOS EN MEDIOS POROSOS”.

Presentada por el alumno:

ZAPATA

Apellido paterno

LÓPEZ

Apellido materno

JANIS

Nombre(s)

Con registro:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 8 | 0 | 3 | 9 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|

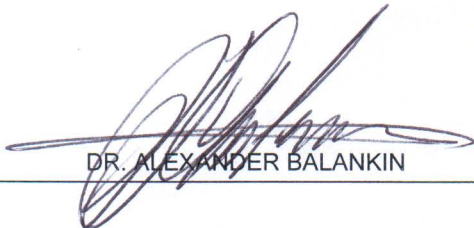
aspirante de:

DOCTORADO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis


DR. ALEXANDER BALANKIN

Presidente



DR. DANIEL MORALES MATAMOROS

Segundo Vocal



DR. GUILLERMO MANUEL URRIOLAGOITIA CALDERÓN

Tercer Vocal

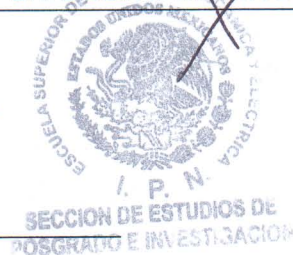

DR. JULIÁN PATIÑO ORTÍZ

Secretario

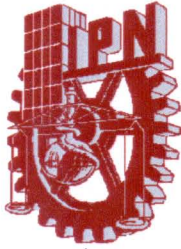

DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO


DR. JAIME ROBLES GARCIA







INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 17 del mes de Noviembre del año 2011, el (la) que suscribe Janis Zapata López alumno (a) del Programa de Doctorado en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Mecánica con número de registro A080394, adscrita a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Alexander Balankin S. y cede los derechos del trabajo intitulado “ESTUDIOS DE FLUJOS MULTIFÁSICOS EN MEDIOS POROSOS”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor (a) y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección janis_zapata@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Janis Zapata López

DEDICATORIAS

Quiero dirigir una oración de acción de gracias a DIOS por haberme permitido realizarme como mujer y alcanzar los estudios que hasta ahora poseo. Gracias Señor por darme a la Sabiduría como hermana y a la Inteligencia como amiga. Bendito seas hoy y siempre.

Gracias a todas las personas que me apoyaron y que creyeron en mí, por darme una palabra de aliento, una mano amiga y por brindarme un poco de cariño.

A mi familia:

Ernesto Pineda León

Marcos Huitzillín Pineda Zapata

Saray Citlalli Pineda Zapata

A mi esposo a quien agradezco profundamente su comprensión y apoyo incondicional, a mis hijos que son la fuerza que me empuja a ser cada día mejor.

A mis seres queridos:

Andrea López Gómez

Faustino Zapata León

A quienes les agradezco la vida, mi educación y formación para enfrentarme a la vida, porque siempre están conmigo. Con todo mi amor y respeto.

A mis hermanos:

*Juan José, Maribel, Janet, María de Lourdes, Pedro, Faustino (q. e. p. d.) †,
Rocío del Carmen, José Alfredo y María Isabel*

Gracias por darme su cariño y comprensión, por crecer conmigo compartiendo momentos inolvidables y seguir unidos. Los Amo.

A mis tíos:

Rosa María López Gómez

Gilberto Vázquez Bautista

Muchas gracias por sus consejos, por creer en mí y porque siempre están a mi lado. Los Amo.

A toda mi familia:

Quienes con su apoyo y cariño me han enseñado que lo mejor de todo es alcanzar nuestra metas con dignidad y dedicación. Gracias a todas las personas que me apoyaron y que creyeron en mí, por darme una palabra de aliento, una mano amiga y por brindarme un poco de cariño.

AGRADECIMIENTOS

Mi mayor agradecimiento al:

Instituto Politécnico Nacional

Por haberme permitido pertenecer a esta institución y desarrollarme dentro de sus aulas e instalaciones donde pude adquirir los verdaderos conocimientos.

A la:

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Por haberme aceptado y apoyado a terminar con mis estudios y que siempre respetaré con orgullo y dignidad.

Mis agradecimientos al:

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Por el apoyo económico otorgado para realizar mis estudios de Doctorado, logrando el objetivo propuesto.

A mis directores de tesis:

Dr. Alexander Balankin

Dr. Daniel Morales Matamoros

Gracias por todo su apoyo que me brindaron para la realización de este trabajo, por permitirme formar parte de su equipo de trabajo y darme la oportunidad de desarrollarme como profesionista.

A todas las personas que participaron en mi formación académica, como son los profesores:

Dr. Didier Samayoa Ochoa Dr. Julián Patiño Ortiz

Dr. Miguel Patiño Ortiz Profa. Carmen Raquel Olguín

Gracias por darnos a los estudiantes, su confianza, su amistad y por motivarnos a seguir adelante.

Muchas gracias a mis profesores que integran mi comisión revisora de tesis y posteriormente como sinodales en mi examen de grado, por su apoyo y consejos:

Dr. Guillermo Urriolagoitia Calderón.

Dr. Didier Samayoa Ochoa.

Dr. Alexander Balankin.

Dr. Daniel Morales Matamoros.

Dr. Julián Patiño Ortiz.

Dr. Andriy Kryuko.

“ESTUDIOS DE FLUJOS MULTIFÁSICOS EN MEDIOS POROSOS”

RESUMEN

En el presente trabajo, se estudia la dinámica fractal de formación de interfaces en no-equilibrio en medios porosos, empleando un solo tipo de papel como el modelo del medio fractal. Por primera vez, se analiza el proceso de formación de interfaces por medio de la imbibición, tomando en cuenta el porcentaje de humedad. Los experimentos de imbibición realizados fueron al menos 70 veces. Se utilizó solo un ancho de probeta durante todas las pruebas.

Así mismo, se presenta el crecimiento, formación y dinámica de las interfaces de un fluido en función del tiempo y de la humedad en medios porosos, utilizando papel filtro poro abierto. Los análisis se hicieron mediante datos recabados en pruebas experimentales. Dichas pruebas se llevaron a cabo usando probetas de papel rectangular de (40 x 20) cm, el fluido fue compuesto por agua y tinta china en una relación 3:1, considerando una humedad inicial que varía con respecto a las condiciones ambientales y hasta que la capilaridad, la gravedad y la evaporación del fluido se equilibraban. Rompiendo el equilibrio anterior; con el incremento nuevamente de la humedad, se consiguió que la interface creciera nuevamente y a través del tiempo estos parámetros nuevamente se equilibraban obteniéndose la imbibición. El comportamiento de las interfaces en medios porosos, se capturaron mediante fotografías, tomadas con una cámara digital de alta resolución. Como resultados preliminares se obtuvieron la caracterización del crecimiento de las áreas de interfaces, con la ayuda de los archivos de imágenes convertidas en archivos binarios y el procesamiento de estas en el software MatLab, para después aplicar la teoría fractal, analizando y evaluando los parámetros necesarios para la obtención de resultados finales en este trabajo de investigación.

“STUDIES OF MULTIPHASES FLOWS IN POROUS MEDIA”

ABSTRACT

In this work, the fractal dynamics of interfaces growth in non-equilibrium porous media is studied just for one kind of paper as a model of the fractal media. The contribution in this field of knowledge is the analysis of processes of interface growth, namely wetting (imbibition), taking into account the percentage of humidity. The experiments of imbibition were carried out at least 70 times. Just one size of sample was used to all the experiments.

Likewise, the growth, formation and dynamics of the fluid interfaces as a function of time and humidity in porous media by using filter paper of opened porous, are presented. The analysis was achieved with experimental test data. These tests were carried out with rectangular paper specimens of (40 x 20) cm, the fluid was made of water and China ink in relation 3:1 with an initial humidity that varies with respect to environmental conditions until the capillarity, gravity and the evaporation of the fluid are in balance. Breaking down the previous balance with the increasing of the moisture, we have managed to the interface grow again and over time these parameters were balanced obtaining the imbibition. The interface behaviors in porous media were captured through photos, taken with a high resolution digital camera. As Preliminary result were obtained the characterization of the interfaces areas growth, with help of image files converted into binary files. These files were processed in MatLab software in order to apply the fractal theory, analyzing and evaluating the necessary parameters to obtain final results in this research.

OBJETIVO

El objetivo principal de este trabajo de investigación es:

Estudiar la dinámica fractal en la formación de interfaces en medios porosos, asociada al fenómeno de imbibición y en función de la humedad; con la finalidad de determinar la dependencia de los exponentes críticos de la dimensión fractal y del mecanismo de formación.

JUSTIFICACIÓN

El crecimiento de interfaces rugosas bajo condiciones de no-equilibrio es un fenómeno muy frecuente en la naturaleza. Ejemplos de tales procesos incluyen la difusión, el quemado, el crecimiento de grietas, fraguado de materiales granulares y de flujo de fluidos en medios porosos. Varias observaciones experimentales y simulaciones en computadoras de estos procesos recomiendan que si bien la morfología de una interface en crecimiento depende del mecanismo de su formación, el comportamiento dinámico y la topografía estadística de diversas interfaces comparten algunos aspectos de escalamiento universal [1].

Determinados trabajos experimentales [2] ciertamente proponen que muchos sistemas físicos desarrollan espontáneamente correlaciones con la conducta de leyes de potencia en el espacio-tiempo. Estos sistemas, con muchos grados de libertad, normalmente son tan complejos que su comportamiento a escalas macroscópicas no se puede predecir a partir de su comportamiento a escalas microscópicas. Aparecen nuevos tipos de comportamientos colectivos y su entendimiento representa una de las áreas más desafiantes en la física estadística moderna. La rugosidad de interfaces que crecen en no-equilibrio es solo uno de los campos en los cuales la invarianza en escala se ha observado como una característica usual y fundamental. La invarianza en escala dinámica de las interfaces en crecimiento, los eventos y la información sobre un extenso intervalo de escalas de longitud y tiempo, se presenta de tal forma que no interesa cual es el tamaño de la escala considerado, continuamente se percibe sorprendentemente una riqueza en estructuras complejas.

OBJETIVO Y JUSTIFICACIÓN

En muchos casos, el comportamiento del escalamiento espacial se atribuye a la invarianza estadística de las interfaces saturadas bajo transformación de escala afín. El hecho de que el crecimiento de las interfaces en sistemas en no-equilibrio exhibe propiedades de escalamiento complejas, no nos dice nada en relación del porqué sucede de esa manera. Por lo que, un punto clave para entender este fenómeno es el origen de la invarianza en escala general, de la rugosidad de la interface. Esto correspondería a la comprensión del principio de las estructuras fractales y de las propiedades de Criticidad Auto-Organizada (SOC, siglas en inglés), a partir del conocimiento de los procesos físicos microscópicos en la base de estos fenómenos.

Aunque, recientemente no existe un formalismo sistemático que maneje los procesos de crecimiento de no-equilibrio. Esto conlleva que los métodos de análisis clásicos de la mecánica estadística no son los apropiados para describir el fenómeno de crecimiento de interfaces. Sin embargo, el descubrimiento que el crecimiento estocástico de superficies exhibe un comportamiento de escalamiento no trivial y que progresa naturalmente a un estado estacionario, que no tiene una escala de tiempo o espacio característica, ha acarreado al desarrollo de un *método general de escalamiento* [3], para describir el crecimiento de interfaces. Este formalismo, que se apoya en conceptos generales de invarianza en escala y los fractales [4,1], se ha convertido en una herramienta estándar en el estudio del crecimiento de interfaces. En particular, el método de escalamiento dinámico [3] se ha aplicado al estudio de una variedad de modelos teóricos de crecimiento de interfaces, incluyendo deposición balística [5], modelo Eden [6], etc.

REFERENCIAS.

- [1] Vicsek, T. (1991). *Fractal Growth Phenomena*. World Scientific, Singapore.
- [2] Bunde, A. & Havlin, S. (1996). *Fractals and Disordered Systems*. Springer, Heidelberg.
- [3] Family, F. & Viscek, T. (1985). *J. Phys. A* 18, L75.
- [4] Mandelbrot, B. B. (1992). *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco.
- [5] Amar, J. G., Lam, P-M. & Family, F. (1991). *Phys. Rev. A*, 43, pp. 4548.,
- [6] Kertész, J., Horváth, V. K. & Weber, F. (1993). *Fractals*. 1, 67.

**“ESTUDIOS DE FLUJOS MULTIFÁSICOS EN MEDIOS
POROSOS”**

INDICE

| | Página |
|---|---------------|
| PORTADA. | i |
| ACTA DE REVISIÓN DE TESIS. | ii |
| CARTA CESIÓN DE DERECHOS | iii |
| DEDICATORIAS. | iv |
| AGRADECIMIENTOS. | v |
| RESUMEN. | vi |
| ABSTRACT. | vii |
| OBJETIVO. | viii |
| JUSTIFICACIÓN. | viii |
| ÍNDICE. | x |
| ÍNDICE DE FIGURAS. | xiii |
| ÍNDICE DE TABLAS. | xv |
| SIMBOLOGÍA. | xvi |
| INTRODUCCIÓN. | 1 |
| ANTECEDENTES Y PLATEAMIENTO DEL PROBLEMA. | 4 |
| REFERENCIAS. | 8 |

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE LA PERCOLACIÓN

| | |
|------------------------|----|
| 1.1 CONCEPTOS BÁSICOS. | 10 |
|------------------------|----|

INDICE

| | Página |
|----------------------------|---------------|
| 1.2 MODELO DE PERCOLACIÓN. | 12 |
| 1.3 REFERENCIAS. | 19 |

CAPÍTULO 2 FRACTALES

| | |
|---|----|
| 2.1 CONCEPTOS BÁSICOS. | 22 |
| 2.1.1 LOS FRACTALES. | 22 |
| 2.2 AUTO-SIMILITUD Y AUTO-AFINIDAD. | 28 |
| 2.3 SUPERFICIES E INTERFACES FRACTALES. | 32 |
| 2.3.1 SUPERFICIES RUGOSAS EN SÓLIDOS. | 32 |
| 2.3.2 INTERFACES FRACTALES FLUIDO-FLUIDO. | 32 |
| 2.3.2a Digitación Viscosa. | 32 |
| 2.3.2b Flujo Multifásico en Medios Porosos. | 33 |
| 2.4 REFERENCIAS. | 34 |

CAPÍTULO 3 MEDIOS POROSOS

| | |
|---|----|
| 3.1 CONCEPTOS BÁSICOS. | 37 |
| 3.1.1 LOS MEDIOS POROSOS. | 37 |
| 3.2 ESTRUCTURA Y CLASIFICACIÓN. | 37 |
| 3.3 ESTRUCTURA Y PROPIEDADES. | 39 |
| 3.4 POROSIDAD. | 40 |
| 3.4.1 POROSIDAD, SUPERFICIE ESPECÍFICA Y TORTUOSIDAD. | 41 |

INDICE

| | Página |
|--|--------|
| 3.4.2 POROSIDAD EN EL PAPEL. | 42 |
| 3.4.3 DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑOS DE POROS. | 43 |
| 3.5 IMBIBICIÓN. | 44 |
| 3.6 SATURACIÓN DE FUIDO, PRESIÓN CAPILAR Y ÁNGULO DE CONTACTO. | 45 |
| 3.7 REFERENCIAS. | 47 |

CAPÍTULO 4 DESARROLLO EXPERIMENTAL

| | |
|--|----|
| 4.1 SELECCIÓN DEL MATERIAL Y EQUIPO UTILIZADO. | 50 |
| 4.2 METODOLOGÍA EXPERIMENTAL. | 51 |
| 4.3 RESULTADOS OBTENIDOS. | 54 |
| 4.4 REFERENCIAS. | 58 |

CAPÍTULO 5 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

| | |
|---|-----------|
| 5.1 RESULTADOS EXPERIMENTALES. | 60 |
| CONCLUSIONES. | 63 |
| RECOMENDACIONES PARA TRABAJO FUTURO. | 64 |
| GLOSARIO. | 65 |
| APÉNDICES. | 68 |
| ANEXOS. | |

ÍNDICE DE FIGURAS

| Figura: | Título: | Página: |
|----------------|--|----------------|
| 1.1 | Ejemplo de una red cuadrada de 10 x 10, con probabilidad $p = 0.3$. | 12 |
| 1.2 | Ejemplos de percolación en una red cuadrada de 20 x 20, con probabilidad $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.6$. | 14 |
| 1.3 | Ejemplo de percolación por enlaces en una red cuadrada de 20 x 20. | 15 |
| 1.4 | Percolación continua: Modelo del queso suizo. | 18 |
| 2.1 | Representación de un Fractal. | 23 |
| 2.2 | Diferentes tipos de Fractales de Mandelbrot. | 24 |
| 2.3 | Fotografía de un helecho <i>cuerno de ciervo</i> . | 25 |
| 2.4 | Los diferentes pedazos de la coliflor tienen una estructura muy similar a la de la cabeza completa. Con el brócoli sucede lo mismo. | 26 |
| 2.5 | La curva de Koch, después de cuatro iteraciones. | 28 |
| 2.6 | El triángulo de Sierpinski después de cuatro iteraciones. | 30 |
| 2.7 | Diversas Transformaciones: en a) Transformación de similitud con un factor de escala $r=0.5$, y en b) Transformación de afinidad lineal, con rotación y traslación. | 31 |
| 2.8 | Digitación viscosa característica generada por la inyección de agua en una celda Hele-Shaw radial llenada con una solución polimérica más viscosa [2.11]. | 33 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| Figura: | Título: | Página: |
|----------------|--|----------------|
| 3.1 | Ejemplos de materiales porosos naturales (X10); (a) Arena de playa, (b) Arena de piedra, (c) Piedra caliza, (d) Pan de centeno, (e) Madera, (f) Pulmón humano. | 38 |
| 3.2 | Estructura del papel filtro, empleado en el proceso de imbibición. | 43 |
| 3.3 | Crecimiento y dinámica de interfaces en medios porosos. | 45 |
| 3.4 | Angulo de contacto formado entre un par de líquidos y la roca. | 46 |
| 4.1 | Configuración geométrica de cada una de las probetas. | 50 |
| 4.2 | Montaje de mecanismos utilizados en las pruebas de imbibición. | 52 |
| 4.3 | Dimensiones del prototipo experimental. | 53 |
| 4.4 | Vista esquemática de la prueba de imbibición. | 53 |
| 4.5 | Configuración de imbibición durante la prueba. | 54 |
| 4.6 | Configuración de imbibición procesada. | 54 |
| 4.7 | (a)-(d) Desarrollo dinámico de una interface en un proceso de imbibición a una humedad específica. | 56 |
| 4.8 | Comportamiento dinámico de la dimensión fractal en una prueba de imbibición con respecto a la humedad. | 57 |
| 5.1 | Comportamiento de la velocidad de imbibición. | 61 |
| 5.2 | Comportamiento de la aceleración de imbibición. | 62 |

ÍNDICE DE TABLAS

| <i>Tabla:</i> | <i>Título:</i> | <i>Página:</i> |
|----------------------|--|-----------------------|
| 1.1 | Umbrales de percolación para varias redes bi-tridimensionales y el árbol de Cayley. ^a Exacto [1.19], [1.20], ^b Métodos Numéricos [1.21], ^c Monte Carlo [1.11], ^d Expansión de Series [1.22], ^e Monte Carlo [1.23], ^f Expansión de Series [1.24], ^g Métodos Numéricos [1.25], ^h Métodos Numéricos [1.20]. | 17 |
| 4.1 | Propiedades Físicas y Mecánicas del papel utilizado. | 51 |
| 4.2 | Áreas imbibición en función del tiempo y de la humedad. | 55 |
| 4.3 | Dimensiones fractales del desarrollo dinámico de las interfaces en las pruebas de imbibición. | 57 |
| 5.1 | Velocidad de imbibición. | 60 |

SIMBOLOGÍA

| <i>Símbolo:</i> | <i>Definición:</i> |
|------------------------|--|
| h | Altura. |
| w | Ancho. |
| θ | Angulo de contacto formado entre un par de líquidos. |
| $w(t)$ | Ancho de la interface rugosa. |
| A | Área. |
| (E) | Área superficial específica. |
| C_V | Coefficiente de correlación. |
| H | Coefficiente de Hurst. |
| p | Concentración de sitios ocupados. |
| C | Constante de orden unitario. |
| ρ | Densidad. |
| $\bar{\rho}$ | Densidad promedio. |
| ρ_B | Densidad bruta de la muestra. |
| ρ_g | Densidad de material granulado. |
| ρ_w | Densidad de agua, densidad de fluido mojable. |
| ρ_{nw} | Densidad de fluido no mojable. |
| σ | Desviación estándar. |
| ΔP | Diferencia de presión. |
| D, D_f | Dimensión fractal. |
| D_s | Dimensión fractal obtenida. |

SIMBOLOGÍA

| Símbolo: | Definición: |
|-----------------|---|
| D_p | Dimensión fractal de poro. |
| D_e | Dimensión euclidiana. |
| E | Dimensión euclidiana, dimensión espacial. |
| d_f | Dimensión fractal local. |
| d | Dimensión global. |
| d | Número de dimensiones, en un ejemplo de percolación. |
| n_s | Distribución del tamaño de cluster. |
| $(1-p)$ | Enlace de percolación. |
| σ_s | Enlace superficial por sitio. |
| E | Espesor. |
| β | Exponente de crecimiento, exponente para percolación en redes. |
| n | Exponente de distribución, enlace molecular, exponente de escalamiento. |
| δ | Exponente de escalamiento dinámico, radio de esferas, exponente de movimiento del frente. |
| γ | Exponente para percolación en redes. |
| α | Exponente de rugosidad global, exponente para percolación en redes. |
| ζ | Exponente de rugosidad local. |
| r | Factor de escala, en una transformación. |
| $(p < p_c)$ | Fase de conducción normal. |
| $(p > p_c)$ | Fase superconductora. |
| $X^A(p)$ | Fracción accesible de enlaces (o sitios) que pertenecen al cluster infinito. |

SIMBOLOGÍA

| Símbolo: | Definición: |
|------------------------|---|
| p | Fracción de sitios (o enlaces) abiertos en un sistema poroso. |
| c_0 | Función de auto correlación. |
| Δt | Intervalos de tiempo. |
| τ | Intervalos de tiempo, exponente para percolación en redes. |
| H | Humedad. |
| $w(t) \sim t^\beta$ | Ley de Potencias. |
| $L \rightarrow \infty$ | Límite cuando tiende a infinito. |
| L | Longitud. |
| ξ | Longitud de correlación. |
| M | Masa. |
| $N(\Delta)$ | Número de cajas de tamaño lineal, en una dimensión por caja. |
| z | Número de coordinación de la red de percolación. |
| N | Número de poros. |
| $1/\Delta$ | Número proporcional de cajas en una dimensión por caja. |
| λ, λ_i | Parámetro de escalamiento. |
| $2\pi r$ | Perímetro del círculo. |
| K | Permeabilidad. |
| ϕ | Porosidad. |
| ϕ_A | Porosidad accesible. |
| P | Presión. |
| P_w | Presión de agua. |

SIMBOLOGÍA

| Símbolo: | Definición: |
|---|--|
| P_c | Presión de capilaridad. |
| P_o | Presión de petróleo. |
| p, q | Probabilidad de sitios ocupados. |
| P_∞ | Probabilidad de un enlace a un cluster infinito. |
| $q \equiv (1 - p)$ | Probabilidad de una red regular por enlaces. |
| C | Punto crítico. |
| r | Radio del círculo o de un tubo. |
| r_1, r_2 | Radios principales de curvatura de la interface. |
| q | Rapidez de flujo. |
| σ_o | Sección Transversal de molécula. |
| $\sigma_{ow}, \sigma_{ws}, \sigma_{os}$ | Tensión superficial entre agua y superficie solida (roca). |
| t | Tiempo. |
| τ_s | Tiempo de saturación. |
| τ_F | Tiempo final. |
| $p=1$ | Todos los sitios pertenecen a un cluster infinito. |
| T_p | Tortuosidad. |
| p_c | Umbral de percolación. |
| v | Velocidad. |
| v_0 | Velocidad de frente húmedo. |
| ω | Velocidad angular. |
| μ | Viscosidad de fluido. |
| V_P | Volumen de poros de un material. |
| V_S | Volumen de sólido de un material poroso. |
| V_B | Volumen total de un material poroso. |

INTRODUCCIÓN

Aún existen sistemas *continuos* de gran importancia, en los cuales las descripciones deterministas se encuentran más allá de las expectativas. Algunos ejemplos típicos de ello, son la difusión y el movimiento browniano, donde, en ciertas escalas de longitud, se capta un proceso aleatorio aparente, o *dinámica desordenada*. Por lo que, la naturaleza es desordenada tanto en su estructura como en el proceso que desarrolla. Un ejemplo es el flujo de fluidos a través de un medio poroso, donde la interrelación entre la estructura desordenada del espacio y la dinámica del movimiento del fluido da como resultado una variedad de fenómenos [1].

La percolación se ha empleado para modelar una gran variedad de fenómenos en *sistemas desordenados*. La percolación nos dice cuando un sistema es *macroscópicamente* abierto para un cierto fenómeno. Por ejemplo, puede decirnos cuándo hay circulación de vehículos de un lugar de la ciudad a otro, cuándo la corriente eléctrica puede fluir de un extremo de una red de conductores eléctricos al otro extremo, y **cuánto petróleo se puede extraer de un yacimiento petrolero**. El punto en el cual se presenta una transición de percolación entre un sistema abierto y un sistema cerrado por primera vez, se llama *umbral de percolación* del sistema, y el comportamiento del sistema cercano a este punto es de gran importancia, ya que nos indica un valor crítico en el cual se presenta cambio en el comportamiento del sistema.

La aplicación de la percolación para el modelado de fenómenos en sistemas desordenados, se basa en los criterios siguientes:

- (i) La aplicación es cuantitativa, en el sentido de que hay una correspondencia cuantitativa entre las predicciones por percolación y los datos experimentales.
- (ii) El problema es de gran interés, o tiene una extensa importancia industrial, tecnológica y científica.
- (iii) Se debe tener un entendimiento muy claro de la problemática para así saber cómo aplicar la teoría de la percolación.

Además, puesto que los conceptos principales de la teoría de la percolación son simples, se pueden escribir programas para simular el proceso de percolación, de modo que también sirve como una introducción a la simulación por computadora.

INTRODUCCION

En años recientes entre los mayores logros, que han influido significativamente en el entendimiento de estructuras desordenadas y su formación mediante procesos aleatorios, están los conceptos fractales, introducidos por B. B. Mandelbrot [2]. La geometría fractal es un lenguaje matemático utilizado para describir geometrías complejas e irregulares, y es especialmente adecuada para las computadoras debido a su naturaleza iterativa. La geometría fractal no ha desplazado a la geometría Euclidiana, sino que la ha enriquecido.

En general, la geometría fractal es una herramienta que caracteriza cuantitativamente cómo el espacio es ocupado por una curva o geometría particular. La dimensión fractal es un parámetro que describe las cantidades relativas de detalle o "rugosidad" presentes en ciertos intervalos de escala. Entre más tortuosa, compleja y deforme en detalle es la curva, mayor es la dimensión fractal. Sin embargo, la dimensión fractal y la rugosidad no son sinónimas.

Generalmente, la rugosidad es una medida de la variación promedio sobre un valor promedio y no está relacionada a la escala o cambios en escala. La dimensión fractal es usada para cuantificar la variación de la longitud, o área, con cambios en la escala. Por lo que, la dimensión fractal es una propiedad intensiva y la rugosidad no.

Hoy en día, los conceptos de fractales se han aplicado a las ciencias naturales por varias razones:

1. La auto-similaridad y la auto-afinidad son los conceptos que unifican áreas como fractales, ley de potencias y caos. La auto-similaridad, o invarianza bajo cambios de escala o tamaño isotrópico, es un atributo de muchas leyes de la naturaleza y de una infinidad de fenómenos en el mundo que nos rodea. De hecho, la auto-similaridad es una de las simetrías fundamentales que rigen el universo. De igual forma, la auto-afinidad, o invarianza bajo cambios de escala o tamaño anisotrópico, y es un atributo de muchas superficies e interfaces que se presentan al algunos fenómenos naturales e industriales.
2. La longitud de una curva fractal (así como el área de una superficie fractal) depende de la resolución en la cual se realice la medición y diverge cuando la resolución tiende a infinito.

INTRODUCCION

3. Las curvas fractales son funciones continuas, pero no tienen derivada. Esta propiedad se ha observado en algunos fenómenos naturales, tales como el movimiento browniano de una partícula y las trayectorias de las partículas cuánticas, perfiles de fractura, etc. Esta propiedad y su longitud infinita prohíben una descripción completa basada en los números enteros ordinarios. Sin embargo, usando análisis no-estándar es posible resolver el problema de la no derivada de los fractales: Una clase de curvas no-estándar (cuya parte estándar es el fractal común) se define de tal manera que se pueden construir coordenadas curvilíneas a lo largo del fractal.
4. La dimensión fractal puede ser cualquier número real. De manera que este concepto puede ser aplicado a varios campos de la física, tal como la teoría de los fenómenos críticos, donde una dimensión no entera se convierte en una necesidad. Unos de los campos más fértiles para el análisis fractal son los fenómenos de la fluctuación y el crecimiento de interfaces rugosas en medios desordenados.
5. El concepto de fractales está estrechamente relacionado a los conceptos de “renormalización de grupos”, “solución auto-similar” y “asíntota intermedia”. Incluso, todos estos conceptos son las aplicaciones más fructíferas de la auto-similaridad.

En síntesis, los fractales están caracterizados por poseer detalle infinito, longitud infinita y la ausencia de tersura o derivada.

Por otro lado, las estructuras desordenadas y los procesos aleatorios que son auto-similares bajo ciertos intervalos de escala y tiempo son muy comunes en la naturaleza. Se les pueden encontrar en escalas muy grandes o en escalas demasiado pequeñas: En galaxias y paisajes, en agregados y coloides, en superficies rugosas e interfaces, en cerámicos y polímeros, en proteínas u otros macromoléculas. Debido a que la auto-similaridad se hace presente en muchos fenómenos naturales, la comunidad científica interesada en este fenómeno es muy extensa: Desde astrónomos y geocientíficos hasta científicos en ciencia de los materiales y científicos relacionados con las áreas de la bioquímica.

ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

La formación de superficies e interfaces rugosas son originadas por una gran variedad de procesos dinámicos naturales e industriales. En algunos procesos estas son creadas por medio de la *adición* de materiales. Algunos ejemplos son el crecimiento de cristales, deposición por vapor, electrodeposición, pintado y recubrimiento por rocío, y crecimiento biológico. Sin embargo, otros procesos generan superficies rugosas mediante la *eliminación* de material, como la disolución química y la corrosión, el desbaste, la erosión, desgaste y todo tipo de pulido. También existe una tercera clase de procesos, tales como la fractura, o la formación de interfaces entre dos diferentes estados de agregación de la materia, en los cuales las interfaces se forman repentinamente sin la adición o eliminación de material. Así que, uno de los problemas de mayor reto para científicos e ingenieros es entender la formación, el crecimiento y la dinámica de superficies e interfaces rugosas. El interés general en el estudio del crecimiento de superficies e interfaces también tiene su importancia en el hecho de que, además de su importancia práctica, la dinámica de las interfaces está estrechamente relacionada a una variedad de problemas equivalentes, incluyendo polímeros orientados en medios desordenados, flujo de fluidos en geometrías porosas o geometrías fracturadas, propagación de frentes de fuego, y la dinámica de fluidos agitados.

Cada campo de la ingeniería tiene sus propios métodos para atacar los problemas de su interés. El desarrollo de nuevos métodos con mayor poder de descripción y predicción es uno de los principales objetivos de la ciencia. En el campo del crecimiento de superficies e interfaces se han desarrollado varios métodos de análisis que tratan de caracterizar su crecimiento. Dichos métodos de análisis que se han desarrollado son basados en conceptos de escalamiento, modelos experimentales, modelos discretos y ecuaciones de continuo, los cuales se describen de forma concisa.

Uno de los conceptos modernos empleados en el estudio de varios procesos que dan lugar a interfaces rugosas es el *escalamiento*. Este tiene un poder de predicción increíble, simples manipulaciones nos permite conectar cantidades y exponentes aparentemente independientes. Muchas cantidades mensurables obedecen a simples *relaciones de escalamiento*. Por ejemplo, se ha encontrado que en algunos sistemas el ancho de la interface rugosa, $w(t)$, obedece a una ley de potencias, $w(t) \sim t^\beta$. El ancho eventualmente se satura en un valor que aumenta como una ley de potencias con respecto al tamaño del sistema, $w(L) \sim L^\alpha$.

INTRODUCCION

Las relaciones de escalamiento son estudiadas, entonces se estará en condiciones de definir el concepto de *universalidad* de clases. Este concepto es un producto de la mecánica estadística moderna, y codifica el hecho de que hay pocos factores esenciales que determinan los exponentes que caracterizan el comportamiento de escalamiento. Por lo que, sistemas diferentes que a primera vista parece que no tienen ninguna relación, se comportan de un manera muy semejante.

Los valores de los exponentes α y β no dependen de los “detalles” estructurales del sistema. Dentro de este contexto, los exponentes de escalamiento obtenidos en flujo de fluidos dirigen a la creación de interfaces rugosas.

En campos diversos de la física, los experimentos son la fuerza motriz que conducen a nuevos problemas para la investigación teórica. En el campo del crecimiento de interfaces rugosas a veces sucede lo contrario. Por ejemplo, el proceso de formación de superficies rugosas era una cuestión experimental indeseable que se intentaba minimizar al máximo. Actualmente, un grupo de experimentalistas se interesó en esta problemática, y ahora son los pioneros en este campo [3] – mostrando que el mundo real es mucho más rico en mecanismos que conducen a la formación de superficies o interfaces rugosas.

Con relación a los modelos discretos, el modelo teórico aporta una parte esencial de la fuerza motriz detrás de las investigaciones iniciales en la morfología de las superficies e interfaces. Muchos modelos pueden ser juzgados de ser elementales, a causa de que el fenómeno que se crea es demasiado sencillo. Aunque, los estudios de simulación representan un vínculo fundamental entre la teoría y los experimentos, y nos deja dividir los ingredientes básicos que definen la morfología de la interface, de detalles innecesarios.

Por último, con respecto a las ecuaciones de continuo, actualmente, se han introducido herramientas con mucho éxito que ayudan a entender el comportamiento de varios procesos de crecimiento: Las ecuaciones diferenciales estocásticas. Estas describen la interface a escalas de longitud inmensas, lo que significa que se ignoran los “detalles” de las escalas de longitud pequeñas, y se enfoca solamente en las propiedades del comportamiento asintótico a escalas mayores.

Una de las primeras preocupaciones en el campo de la investigación de un problema nuevo en interfaces, es tratar de derivar una ecuación de crecimiento continuo. Si ya se cuenta con un modelo discreto para el sistema, entonces deberíamos ser capaces de derivar la ecuación del continuo que caracteriza a este modelo.

INTRODUCCION

Sin embargo, hay un método alternativo para derivar una ecuación de crecimiento: Explotando los principios de simetría. Cada proceso de simetría obedece a algunas simetrías simples. Por ejemplo, las leyes de la física son independientes de donde se defina el punto de inicio del crecimiento de la interface, de tal forma que la ecuación de crecimiento del continuo también debe ser independiente. En la mayor parte de los casos las propiedades de escalamiento del sistema y las ecuaciones del continuo se determinan sin ambigüedad por las simetrías del sistema.

Una vez conseguida la ecuación de crecimiento, se pueden hacer predicciones, obteniendo, por ejemplo, los exponentes de escalamiento y las funciones de escalamiento. Si el proceso de crecimiento se describe mediante una ecuación suficientemente simple, se puede resolver exactamente. Sin embargo, para muchas ecuaciones no existen soluciones exactas, de manera que se deben aplicar varias aproximaciones a fin de obtener un comportamiento de escalamiento aproximado. Para este fin se emplea una herramienta poderosa llamada: *Método de renormalización de grupos*.

Únicamente no es de interés científico y tecnológico la morfología de las interfaces “pre-formadas”, sino que también la dinámica de cómo la morfología se desarrolla involucrando al tiempo. Algunas interfaces son formadas mediante el proceso de deposición, otras debido a la corrosión o ataque con una solución ácida. Otras interfaces se propagan a través de un medio desordenado. Por lo que, un gran número de cuestionamientos se hacen presentes con el fenómeno de *formación, crecimiento y dinámica* de superficies e interfaces.

Al sumergirse un pedazo de papel toalla en un fluido, como café, se puede notar cómo se genera y propaga una interface. El papel es un material no homogéneo. Básicamente, esta analogía se establece en que ambos sistemas: El papel toalla y la roca exhiben estructuras desordenadas y heterogéneas. Una diferenciación entre el flujo de fluido en el papel toalla y la roca que contiene petróleo es la escala de longitud a la cual se lleva a cabo el fenómeno. Esta diferenciación es una ventaja: Se puede utilizar un papel toalla de 20 cm de ancho para ayudar a desarrollar un entendimiento básico del problema que ocurre a una escala de 20 Km. Por ejemplo se puede caracterizar la interface húmeda-seca empleando leyes de escalamiento, cuya imagen se puede predecir por medio de modelos simples que capturan el mecanismo fundamental que dan lugar a la morfología de la interface. Este ejercicio de laboratorio es un ejemplo de los muchos que se pueden realizar en sistemas idealizados que dan nueva información en los problemas prácticos de interfaces.

INTRODUCCION

Por lo que, el papel se ha vuelto un prototipo importante para investigar ciertos fenómenos naturales vinculados con la formación, crecimiento y dinámica de las interfaces, como son los de fractura, incendios forestales y flujo de fluidos en medios desordenados, por citar solo unos ejemplos, debido a que la estructura aleatoria que posee el papel se iguala bastante a las estructuras reales de los sistemas heterogéneos naturales. Se ha comprobado que es casi imposible describir de una manera cuantitativa el comportamiento del petróleo en un yacimiento; la trayectoria que desarrolla una fractura una vez que esta ha empezado a crecer, ya sea en forma estable o inestable; saber con exactitud si un incendio forestal en una selva o bosque se extinguirá o seguirá propagándose hasta devastar toda la flora y fauna que encuentre a su paso. Estos fenómenos son de interés científico y tecnológico, porque son parte esencial en la resolución de muchos problemas en ingeniería.

Los estudios de flujos multifásicos en medios porosos, requirió de una metodología de investigación teórica que se apoya fundamentalmente en conceptos básicos de la geometría fractal; además de la teoría de percolación, teoría fractal y medios porosos. Por lo que en el **capítulo 1**, se presenta aspectos generales relacionados con la teoría de la percolación, aplicados para el desarrollo de este trabajo de investigación; conceptos básicos que nos describen este modelo, su importancia y aplicación.

En el **capítulo 2**, se presenta aspectos históricos relacionados a la Teoría Fractal, utilizados para el desarrollo de este trabajo de investigación; conceptos básicos que nos describen a los fractales, su importancia en la ciencia y tecnología, así como su evolución a través del tiempo.

En el **capítulo 3**, se expone de manera general algunos conceptos vinculados a los Medios Porosos, estructuras, clasificaciones y propiedades; aplicados en este trabajo de investigación para obtener información de gran importancia que se utilizará en la obtención de resultados.

En el **capítulo 4**, se desarrolla el trabajo experimental.

En el **capítulo 5**, se realiza el análisis y discusión de los resultados derivados de este trabajo, resaltando la importancia de algunos hallazgos conseguidos, que cambiaran la mentalidad de los modelos teóricos y experimentales.

INTRODUCCION

Cabe destacar, que en el Instituto Politécnico Nacional, ESIME-ZACATENCO, se han desarrollado varios temas de interés para la industria, los cuales están enmarcados en tesis de posgrado, de las cuales se puede mencionar algunas: ***Dinámica Fractal de Interfaces en Medios Porosos*** [1], en la que se estudió la dinámica fractal de formación de interfaces en no-equilibrio en medios porosos, empleando diferentes tipos de papel como modelos de medios fractales. Así mismo, se analizaron por primera vez, tres procesos diferentes de formación de interfaces, estos fueron imbibición, quemado y fractura. ***Mecánica Fractal de Yacimientos Naturalmente Fracturados*** [4], en donde se encontró que el exponente de rugosidad local del movimiento del frente húmedo varía continuamente con el tiempo. Tres regímenes de imbibición, caracterizados por diferentes comportamientos de espacio-temporal del movimiento del frente húmedo, fueron identificados. ***Análisis Fractal de Yacimientos Naturales Fracturados*** [5]. En este último trabajo de investigación, se encontró que el exponente de rugosidad local del frente húmedo varía continuamente con el tiempo y se encontraron tres exponentes de rugosidad que fueron caracterizados como inicial, transitorio y de saturación.

REFERENCIAS.

- [1] **Morales, D. (2001).** *Dinámica Fractal de Interfaces en Medios Porosos.* Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UZ.
- [2] **Mandelbrot, B. B. (1992).** *The fractal Geometry of Nature,* Freeman, San Francisco.
- [3] **Vicsek, T. (1991).** *Fractal Growth Phenomena,* World Scientific, Singapore.
- [4] **Marquez, J. (2003).** *Mecánica Fractal de Yacimientos Naturalmente Fracturados.* Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UZ.
- [5] **García, J. R. (2003).** *Análisis Fractal de Yacimientos Naturales Fracturados.* Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UZ.

CAPÍTULO

1

TEORÍA DE LA PERCOLACIÓN

En este capítulo se presenta aspectos generales relacionados con la Teoría de la Percolación, aplicados para el desarrollo de este trabajo de investigación; conceptos básicos que nos describen este modelo, su importancia y aplicación.

TEORÍA DE LA PERCOLACIÓN

1.1 CONCEPTOS BÁSICOS.

El proceso de percolación primero lo desarrollaron Flory [1.1] y Stockmayer [1.2] hace cerca de 50 años, cuando estudiaron el proceso de gelación. Originalmente abordaron el concepto de la propagación de las partículas de un fluido hipotético a través de un medio desordenado. Las expresiones fluido y medio se consideraron en su acepción más general; es decir, un fluido podría ser líquido, vapor, flujo de calor, corriente eléctrica, infección, etc. El medio – donde el fluido se transporta – podría ser el espacio poroso de una roca, un arreglo de árboles, o el universo. Hablando en términos generales, la propagación de un fluido a través de un medio desordenado implica algunos elementos aleatorios, pero los mecanismos fundamentales para este fenómeno solamente puede ser uno de dos tipos muy distintos. En un tipo, la aleatoriedad es debida al *fluido*: Las partículas del fluido determinan por donde ir a través del medio. Ejemplificando este tipo de mecanismo se puede mencionar el *proceso de difusión*. En el otro tipo, la aleatoriedad es por causa del *medio*: El medio dictamina las trayectorias de las partículas. Esta fue precisamente la nueva situación que consideraron Broadbent y Hammersley en 1957 cuando estudiaban la propagación de fluidos en medios desordenados [1.3]. A ellos se les debe la introducción del término *percolación*. Decidieron llamarlo proceso de percolación porque pensaban que la propagación de un fluido a través de un medio desordenado era muy parecido al flujo de café a través de una cafetera (*percolator* en el idioma inglés). A ellos también se les debe la presentación de importantes conceptos geométricos y probabilísticos. Los desarrollos de la teoría de transición de fases en años posteriores, en particular el método de expansión de series por Domb (ver [1.4]), y con la teoría de renormalización de grupos por Wilson, Fisher y Kadanoff (ver [1.5]), estimularon en gran parte las actividades de la investigación en la transición de percolación geométrica. Los conceptos de fractales introducidos por Mandelbrot [1.6] han proporcionado novedosas herramientas, que aunado con el desarrollo de computadoras a gran escala, han aportado significativamente a un mejor entendimiento de la teoría de la percolación.

Una partícula que se difunde puede alcanzar cualquier posición en el medio. Los procesos de percolación son diferentes, su rasgo más notable es la existencia de un *umbral de percolación*, debajo del cual el proceso de propagación es confinado a una región finita [1.7].

Broadbent y Hammersley [1.8] discutieron la situación general de un fluido propagándose al azar a través de un medio; en síntesis, los parámetros “*fluido*” y “*medio*” pueden ser definidos conforme al contexto. La aleatoriedad puede ser de dos tipos con diferencias notables. En los procesos comunes de difusión la aleatoriedad de las partículas de un fluido recorre caminos aleatorios, como ejemplo es el movimiento irregular térmico de moléculas en un líquido. Otro idea es cuando la aleatoriedad es forzada dentro del mismo medio, y al cual se le denomina un proceso de percolación por Hammersley, su comportamiento es como café en un percolador.

Un ejemplo discutido por Broadbent y Hammersley [1.8], es la propagación de una plaga desde un árbol hasta otro árbol en un huerto donde los árboles están plantados en las intersecciones de una red cuadrada. Si el espacio entre los árboles es aumentado de tal forma que la probabilidad para infectar un árbol vecino caiga debajo de un valor crítico (p_c), entonces la plaga no será propagada sobre el huerto. El umbral de percolación para este problema es de probabilidad $p_c=0.59275$ para cada sitio de percolación en una red cuadrada. Otra ejemplificación sería la filtración de agua en una grieta o fractura en la formación de una roca. La cuestión es si el agua está contenida o se propagará en otras formaciones. De nuevo se espera que haya un umbral crítico para la concentración de las grietas. El valor del umbral de percolación tiene que ser determinado por simulaciones. Un problema parecido de gran importancia práctica sería la propagación del agua desplazando petróleo en rocas porosas. Aquí el avance del frente de fluido puede atrapar regiones de petróleo dando lugar a una *invasión por percolación*, como fue discutido por Wilkinson y Willemsen [1.9].

La aleatoriedad obtenida por este fluido invasor ahora también depende de la dinámica a través de la formación de las regiones atrapadas. La teoría de la percolación y sus conceptos pueden ser aplicados también para la propagación e interconexión de grietas, fracturas en rocas y materiales de ingeniería. Esta no es una descripción clara entre los procesos de percolación y difusión en muchas aplicaciones. Un caso importante es la difusión de partículas desde una fuente u origen. El frente de difusión resultante tiene una estructura geométrica que está estrechamente relacionada con la geometría fractal de percolación. Este acontecimiento fue principalmente notado por Sapoal [1.10].

1.2 MODELO DE PERCOLACIÓN.

Una estructura de percolación representa el modelo más simple de un sistema desordenado [1.11], [1.12] y [1.13]. De forma general, para el modelo de percolación se tienen grandes n -dimensiones en una red cuadrada de alguna topología. Esto nos permite estar en una red cúbica tridimensional, o en una red bidimensional. Ahora diferenciaremos entre el enlace y el sitio de percolación.

Iniciaremos definiendo el enlace de percolación con una propiedad p , un enlace está “presente” (de acuerdo a alguna definición tal como una conductancia diferente de cero) o vacío con una probabilidad de $(1 - p)$, como se muestra en la figura (1.1). Los sitios ocupados, como los sitios vacíos, pueden representar propiedades físicas muy diferentes. Por ejemplo, los sitios ocupados pueden representar conductores de la electricidad, mientras que los sitios vacíos pueden representar aislantes. La corriente eléctrica solamente puede fluir entre los vecinos más cercanos de un sitio ocupado (en la figura 1.1, se puede ver que los sitios más cercanos a un sitio ocupado se representan por medio de una línea que los intercepta).

A valores bajos de p , los sitios que representan los conductores pueden estar aislados; o incluso, pueden formar pequeños grupos de sitios llamados *clusters*.

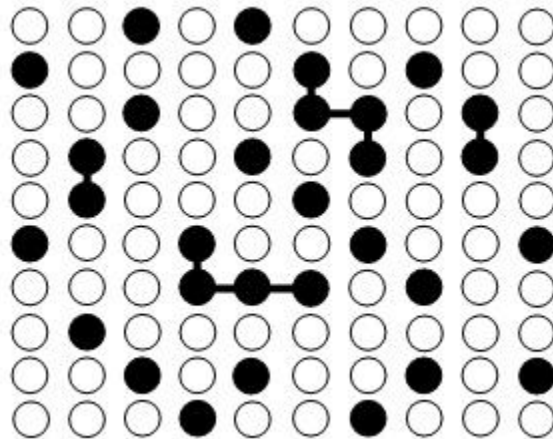


Figura 1.1 Ejemplo de una red cuadrada de 10 x 10, con probabilidad $p = 0.3$.

Se define un **cluster** de enlace presente como el conjunto de todos los enlaces conectados a los otros. Así indicamos cualquiera de los dos enlaces pertenecientes a algún cluster, es posible obtener una trayectoria entre aquellos enlaces pasando por fuera de los clusters; ahora sí existe un cluster que contenga un número infinito de enlaces de una red percolada. Esto no es distinto; la relación con lo mencionado anteriormente de la conductancia de una red cuadrada es como se presenta: para la red en un ejemplo de conductancia, éste puede ser un cluster para conducir los enlaces grandes a espacios entre las barras de un bus. Con referencia al umbral de percolación p_c , tal como el espaciamiento de un cluster que existiera, también en el límite de $L \rightarrow \infty$. Para p menos que p_c tal como el espaciamiento del cluster no existe en los límites de $L \rightarrow \infty$.

En la percolación por sitio, los nodos (o sitios) más que los enlaces son los bloques elementales de la red. Un sitio puede estar presente con una probabilidad p o bien ausente con una probabilidad ($q = 1 - p$) para definir los clusters en este caso se procede como en el caso de la percolación por enlace: si podemos encontrar una trayectoria entre dos sitios que no pasan a través de ningún sitio ausente decimos que estos dos sitios están conectados. Un cluster es el conjunto de todos los sitios dentro de este conjunto, también para los problemas de percolación por sitio existe un umbral bien definido. El cual separa una fase donde no existen clusters infinitos de una fase donde sí existe.

Como se mencionó con anterioridad, la única condición para que se formen estos clusters es que los sitios se encuentren conectados entre sí por un enlace que representa una trayectoria mínima, de tal forma que pueda fluir corriente eléctrica entre ellos. A valores bajos de p , la red representa un aislante, puesto que no existe un cluster de sitios ocupados que se expanda por toda la red y conecte los bordes de la red (por ejemplo borde superior con borde inferior). De otra manera, a valores altos de p , existen diversas trayectorias que pueden conectar los bordes opuestos de la red; por lo tanto, puede fluir corriente eléctrica a través de toda la red. En este caso la red representa un conductor de la electricidad. Así pues, existe un valor intermedio de p , llamado umbral de percolación (p_c), en el cual por primera vez la corriente eléctrica puede percolar de un extremo a otro de la red, como se muestra en la figura 1.2. Debajo de este umbral de percolación, (p_c), se tiene un aislante, por otro lado, arriba de (p_c), se tiene un conductor. De lo que, se puede decir que, este umbral de percolación separa dos fases diferentes: La primera, una fase aislante y la segunda, una fase conductora.

Del ejemplo anterior, una variante puede ser que se suponga que los sitios ocupados representen superconductores y los sitios vacíos representen conductores, donde (p_c) separa una fase de conducción normal ($p < p_c$) de una fase superconductor ($p > p_c$).

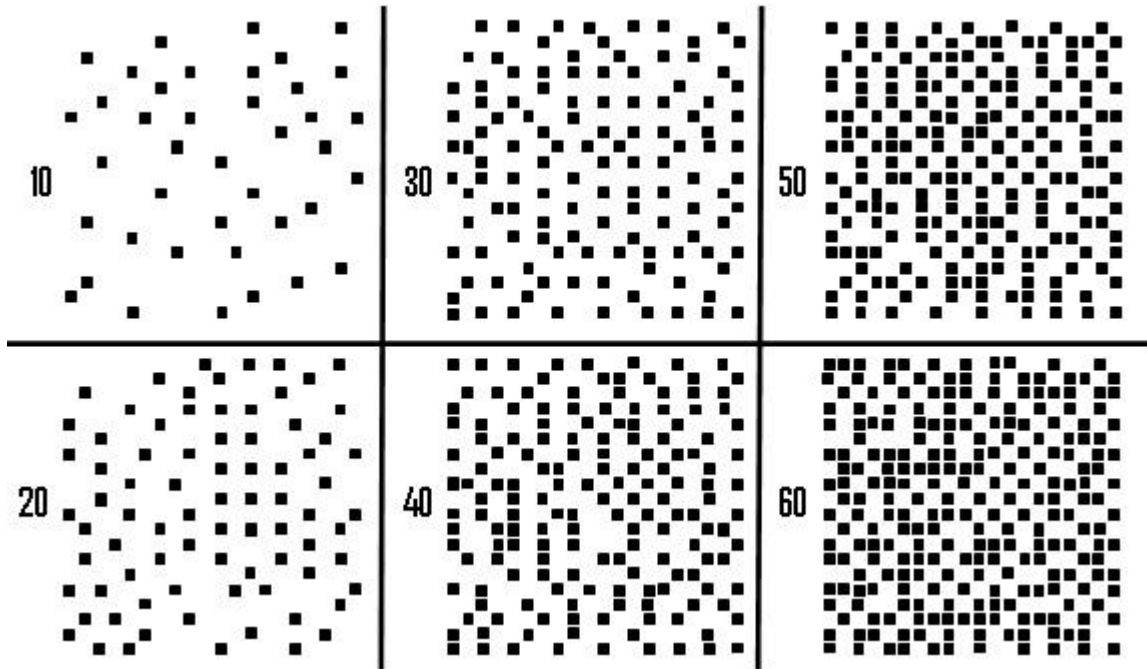


Figura 1.2 Ejemplos de percolación en una red cuadrada de 20 x 20, con probabilidad $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.6$.

En contraste a las transiciones de fases térmicas más usuales, donde la transición en medio de dos fases se exhibe a una temperatura crítica, conocida como la *transición de percolación* que se ha puntualizado es una *transición de fase geométrica*, la cual se caracteriza por los aspectos geométricos de los clusters grandes en la vecindad de (p_c) . Como ya se indicó, a valores pequeños de p únicamente existen pequeños clusters de sitios ocupados, conforme se incrementa la concentración de p , se incrementa el tamaño promedio de los clusters.

A una concentración crítica (p_c) , aparece un cluster grande, el cual une los lados opuestos de la red. A este cluster grande se le llama *cluster infinito*, puesto que su dimensión diverge cuando la dimensión de la red tiende a infinito. Cuando p crece aún más, la densidad del cluster infinito crece, debido a que cada vez más y más sitios, forman parte de este cluster.

CAPÍTULO 1

De acuerdo con esto, el tamaño promedio de los clusters *finitos* disminuye (aquellos que no pertenecen al cluster infinito). Trivialmente, a $p = 1$, todos los sitios pertenecen al cluster infinito. Hasta el momento, se ha estimado la *percolación por sitios*, donde los sitios de una red se ocupan en forma aleatoria.

Ahora bien, cuando los enlaces entre los sitios se eligen aleatoriamente, se dice que es una *percolación por enlaces*. Dos enlaces pertenecen al mismo cluster si están unidos por una trayectoria de enlaces vecinos más cercanos, como se muestra en la figura 1.3. La concentración crítica de enlaces divide una fase de clusters finitos de enlaces de una fase con un cluster infinito de enlaces. Tal vez, el ejemplo más frecuente de percolación por enlaces en física es una *red de resistores*, en la cual los cables metálicos de una red regular se cortan aleatoriamente con probabilidad $q \equiv (1 - p)$. En este caso, q_c separa una fase conductora, con un valor bajo de q , de una fase aislante con un valor alto de q .

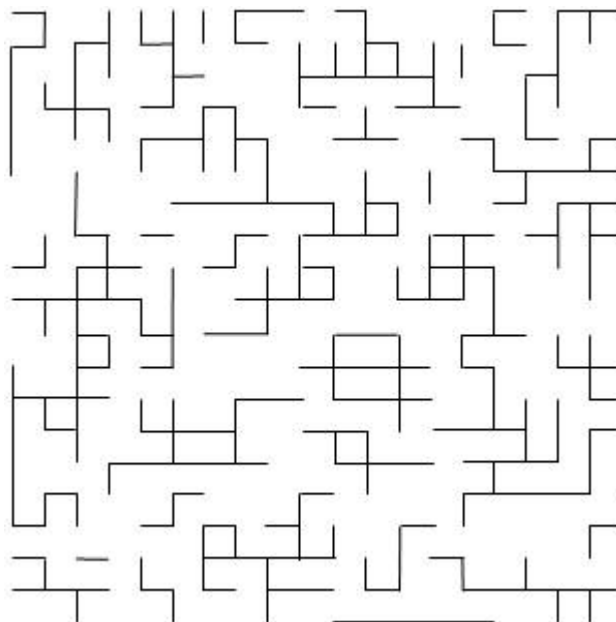


Figura 1.3 Ejemplo de percolación por enlaces en una red cuadrada de 20 x 20.

La percolación por enlaces puede tener un manejo práctico en química: el proceso de polimerización [1.14]. En este proceso, pequeñas moléculas pueden formar grandes clusters de moléculas mediante la activación de más y más enlaces entre ellas.

Si la probabilidad de activación p es mayor que la concentración crítica, entonces se formará una red de enlaces químicos que se propagará en todo el sistema; y a la inversa, si la probabilidad de activación p es menor que la concentración crítica, únicamente se producirán macromoléculas de tamaño finito. A este proceso se le conoce como de *transición sólido-gel*. Un ejemplo representativo del proceso de *gelación* es el cocimiento de un huevo en agua, el cual a temperatura ambiente es líquido y al cocerlo se vuelve más sólido, como un gel.

En el área de la biología, un ejemplo característico podría ser la propagación de una epidemia [1.15]. En su forma más sencilla, la epidemia empieza con un enfermo, el cual puede contagiar a sus vecinos más cercanos con una probabilidad p en un período de tiempo. Después de cierto tiempo, el enfermo muere y las personas contagiadas pueden contagiar a otras personas sanas, y así sigue el proceso. En este caso, la concentración crítica divide una fase donde la epidemia siempre desaparece lentamente después de un período de tiempo finito (a una concentración baja de p) de otra fase donde la epidemia puede permanecer indefinidamente. Se puede utilizar este mismo proceso, como un modelo para la propagación de incendios forestales [1.11], [1.16], con la probabilidad de contagio reemplazada por la probabilidad de que un árbol que arde queme a sus vecinos más cercanos.

También de estos ejemplos simples, se ha descubierto que la teoría de la percolación es útil para explicar un gran número de sistemas desordenados en física y química, tales como materiales porosos y amorfos (abarcando películas delgadas); conductores iónicos desordenados (abarcando vidrios con mezclas alcalinas, mezclas de dos fases y conductores iónicos dispersos); polímeros ramificados, fragmentación (abarcando fragmentación nuclear y terremotos); estructuras galácticas y agua súper enfriada [1.4], [1.17] y [1.18].

Las descripciones de percolación por sitios y percolación por enlaces en una red cuadrada se pueden generalizar fácilmente para cualquier red de d -dimensiones. En general, en una red cualquiera, un enlace tiene contacto con más vecinos más cercanos que un sitio. Por ejemplo, en una red cuadrada un enlace está unido a seis enlaces vecinos más cercanos, entretanto que un sitio tiene únicamente cuatro sitios vecinos más cercanos; en una red triangular un enlace tiene ocho vecinos más cercanos, entretanto que un sitio tiene únicamente seis vecinos más cercanos.

De esta manera, es más fácil crear grandes clusters de enlaces que crear grandes clusters de sitios, y de hecho, se requiere una concentración más baja de enlaces para crear un cluster que se disperse por toda la red; es decir, en una red cualquiera el umbral de percolación por enlaces es menor que el umbral de percolación por sitios (ver Tabla 1.1).

Tabla 1.1 Umbrales de percolación para varias redes bi-tridimensionales y el árbol de Cayley. ^aExacto [1.19], [1.20], ^bMétodos Numéricos [1.21], ^cMonte Carlo [1.11], ^dExpansión de Series [1.22], ^eMonte Carlo [1.23], ^fExpansión de Series [1.24], ^gMétodos Numéricos [1.25], ^hMétodos Numéricos [1.20].

| TIPO DE RED | PERCOLACION | | CAMPO MEDIO |
|------------------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------|
| | SITIOS | POR ENLACES | |
| Cuadrada | 0.592746 ^{b,h} | 1/2 ^a | 1/2 |
| Triangular | 1/2 ^a | 2sen(π/18) ^a | 1/3 |
| Panal | 0.6962 ^c | 1-2sen(π/18) ^a | 2/3 |
| Cúbica centrada en las caras | 0.198 ^c | 0.119 ^c | |
| Cúbica centrada en el cuerpo | 0.245 ^c | 0.1803 ^d | |
| Cúbica simple (1 ^{er} nn) | 0.31161 ^{e,g} | 0.248814 ^g | 1/3 |
| Cúbica simple (2 ^a nn) | 0.137 ^f | | |
| Cúbica simple (3 ^{er} nn) | 0.097 ^f | | |
| Diamante | 0.428 | 0.388 | |
| Arbol de Cayley | 1/(z-1) | 1/(z-1) | |

Hasta ahora, se han analizado los problemas de percolación por sitios y percolación por enlaces, en los cuales los sitios (o los enlaces) de alguna red se seleccionan aleatoriamente. Ahora consideremos el siguiente caso: los sitios se ocupan con una probabilidad p y los enlaces se ocupan con una probabilidad q . Dos sitios ocupados pertenecen al mismo cluster si están unidos por una trayectoria de sitios vecinos más cercanos con un acoplamiento ocupado entre ellos. En este caso el problema de percolación se convierte en un problema de percolación por sitios-enlaces. Para el caso de $q = 1$ la percolación por sitios-enlaces se reduce a percolación por sitios, mientras que para el caso de $p = 1$ el problema se reduce a percolación por enlaces. En general, ambos parámetros caracterizan el estado del sistema. De acuerdo con esto, una línea crítica en el espacio p - q separa ambas fases, para el caso que $p = 1$ y $q = 1$ se toman los valores de las concentraciones críticas de enlaces y sitios, respectivamente. La percolación por sitios-enlaces puede ser importante para procesos de gelación y epidemias en medios diluidos.

Tal vez, el ejemplo más sencillo de la percolación es la percolación continua, donde las posiciones de los dos componentes de una mezcla aleatoria no están restringidas a los sitios discretos de una red regular. Como un ejemplo simple, considere una hoja de material conductor perforada aleatoriamente con hoyos circulares, (ver figura 1.4).

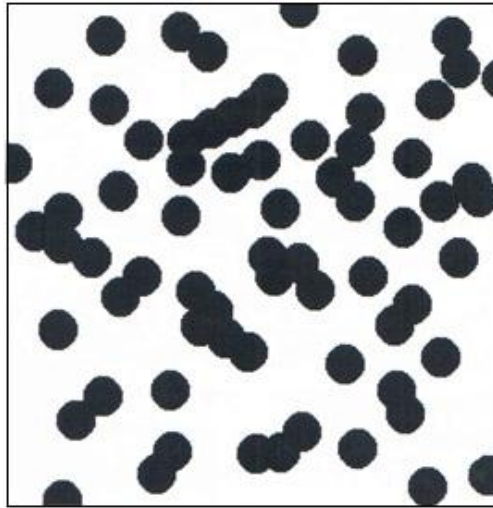


Figura 1.4 Percolación continua: Modelo del queso suizo.

Ahora bien, la cantidad importante es la fracción p de material conductor sobrante. Comparada con la percolación por sitios y la percolación por enlaces, la concentración crítica disminuye aún más: $p_c \cong 0.312 \pm 0.005$ para $d = 2$, cuando todas las perforaciones tienen el mismo radio. Este ejemplo se puede pluralizar fácilmente para el caso de 3 dimensiones, donde se originan huecos esféricos aleatoriamente en un cubo, y $p_c \approx 0.034 \pm 0.007$.

A causa de su semejanza con el queso suizo, a este modelo de percolación continua se le denomina el modelo del queso suizo. Se manejan modelos similares para describir arenas y otros materiales porosos, donde el radio de las esferas varía.

Específicamente, uno debería observar el valor ($p_c = 1/2$) para la red cuadrada bidimensional. Observe que este valor es el mismo que el encontrado en la teoría del campo medio. Esto es accidental. El resultado general para (p_c) a partir de la teoría del campo medio para la percolación de enlace sobre cualquier tipo de red es ($p_c = 2/z$) donde z es el número de coordinación de la red.

A partir de la tabla 1.1, se observa que los valores del campo medio y los valores correctos para el umbral se aproximan cada uno cuando el número de coordinación de la red se incrementa. Este es una indicación de que la teoría del campo medio llega a ser mejor y más cuando se incrementa el número de coordinación.

Aproximadamente al mismo tiempo Broadbent y Hammersley [1.1] introdujeron la teoría de la percolación, la comunidad de la física estadística estaba empezando en un tipo específico de transiciones de fase conocidos como transiciones de fase de segundo orden o puntos críticos.

1.3 REFERENCIAS.

[1.1] Flory, P. J. (1941). J. Am. Chem. Soc., 63, 3083, 3091, 3096.

[1.2] Stockmayer, W. H. (1943). J. Chem. Phys., 11, 45.

[1.3] Broadbent, S. R. & Hammersley, J. M. (1957). Proc. Chamb. Phill. Soc., 53, 629.

[1.4] Deutscher, G.; Zallen, R.; Adler, J. & Hilger, A. (1983). *Percolation Structures and Processes*, A Collection of Review Articles, Bristol.

[1.5] Ma. S. K. (1976). *Modern Theory of Critical Phenomena*, Ver por ejemplo, Benjamin, Reading.

[1.6] Mandelbrot, B. B. (1992). *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco.

[1.8] Broadbent, S. R. & Hammersley, J. M. (1957). *Percolation Processes I. Crystals and Mazes*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53, 269-641.

[1.9] Wilkinson, D. & Willemsen, J. F. (1983). *Invacion Percolation: A new Form of Percolation Theory*, J. Phys. A 16, 3365-3376.

[1.10] Sapoval, B.; Rosso, M. & Gouyet, J. F. (1985). *The fractal nature of a diffusing Front and The Relation to Percolation*, J. Phys. Lett. 46, L149-L156.

[1.11] Stauffer, D. (1985). *Introduction to percolation Theory*, Taylor and Francis, Londres.

- [1.12] **Sahimi, M. (1993).** *Application of Percolation Theory*, Taylor and Francis, London.
- [1.13] **Turcotte, D. L. (1992).** *Fractal and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [1.14] **De Gennes, P. G. (1979).** *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell University Press, Ithaca.
- [1.15] **Grassberger, P. (1985), (1986).** J Phys. A 18, L215; J. Phys. A 19, 1681.
- [1.16] **Mackay, G. & Jan, N. (1984).** J. Phys. A 17, L757.
- [1.17] **Bunde, A. & Havlin, S. (1994).** *Fractals in Science*. Springer, Heidelberg.
- [1.18] **Bunde, A. & Havlin, S. (1996).** *Fractal and Disordered Systems*, Springer, Heidelberg.
- [1.19] **Essam, J. W.; Gaunt, D. S. & Guttmann, A. J. (1978).** J. Phys. A 11, 1983. [Citada en ref.9].
- [1.20] **Ziff, R. M. (1992).** Phys. Rev. Lett. 69, 2670. [Citada en ref.9].
- [1.21] **Ziff, R. M. & Sapoval, B. (1987).** J. Phys. A 19, L1169. [Citada en ref.9].
- [1.22] **Sykes, M. F. & Wilkinson, M. K. (1986).** J. Phys. A 19, 3415. [Citada en ref.9].
- [1.23] **Strenski, P. N.; Bradley, R. M. & Debierre, J. M. (1991).** Phys, Rev. Lett.66, 133. [Citada en ref.9].
- [1.24] **Domb, C. (1966).** Proc. Phys. Soc. 89, 859. [Citada en ref.9].
- [1.25] **Grassberger, P. (1992).** J. Phys. A 25, 5867. [Citada en ref.9].

CAPÍTULO

2

FRACTALES

En este capítulo se presentan aspectos históricos relacionados a la Teoría Fractal, utilizados para el desarrollo de este trabajo de investigación; conceptos básicos que nos describen a los fractales, su importancia en la ciencia y tecnología, así como su evolución a través del tiempo.

FRACTALES

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS.

2.1.1 LOS FRACTALES.

La capacidad de relacionar las causas y los efectos, es el objetivo principal de la ciencia. Estudiar sistemas complejos dentro del marco de la teoría de fractales se ha reconocido en los últimos años, como una disciplina científica nueva, el último de campos interdisciplinarios. En la historia de la ciencia nunca ha habido un paradigma tan universal y una disciplina tan multidisciplinaria como la de los fractales [2.1].

Un fractal, es un objeto que presenta su misma estructura aunque se le cambie la escala de observación. El término “fractal” proviene del latín “*fractus*” que quiere decir “fragmentado”, “fracturado”, o también “roto o quebrado”; Por definición un fractal, es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovich es estrictamente mayor que su dimensión topológica [2.2]. Los fractales son figuras que no corresponden a una dimensión entera, debido al hecho de que la geometría euclidiana, con sus dimensiones enteras, no logra alcanzar la esencia de las formas irregulares, por ejemplo, el grado de irregularidad de una línea, como la bahía o la aspereza de una superficie.

Benoit Mandelbrot, matemático de origen polones, nacido en 1924, inventor de la geometría fractal. Después de sus estudios en la Escuela Politécnica de Paris y en el California Institute of Technology, se convierte en investigador en IBM en el cual desarrolla los primeros programas para el cálculo de los fractales. Los fractales han sido inventados por el matemático Benoit Mandelbrot para describir la geometría de la naturaleza, cuyas formas complejas e irregulares escapan a la geometría clásica.

En 1975 [2.3] Benoit Mandelbrot denominó **fractales** (del latín *fractus*, irregular) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional.

Fractal [2.4], es un objeto que posee una estructura a cualquier escala y contiene copias de sí mismo (figura 2.1).

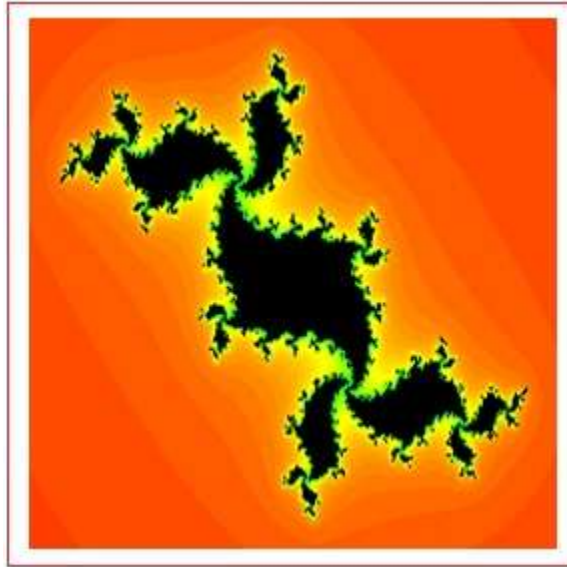


Figura 2.1 Representación de un Fractal.

Mandelbrot hacia 1977, definió en forma general a los fractales como el conjunto de formas con dimensión fraccional, el matemático era perfectamente consciente de que esta definición, si bien establecía una frontera bien delimitada con la geometría euclidiana de los conos y las esferas (en la que los cuerpos tienen una dimensión de Hausdorff entera), dejaba una puerta abierta hacia la región del caos geométrico. Sin embargo, a la espera de mejores definiciones, inició el trabajo que con hechos y con el lenguaje de las imágenes le mostraría al mundo el verdadero significado del término fractal. Sus resultados abrieron la puerta de un mundo impresionante donde habita el verdadero sentido de la palabra obsesión, donde las matemáticas se confunden con el arte, y la ciencia ha encontrado nuevas respuestas.

El "fractal de Mandelbrot" es un universo virtual a definición infinita. Cada zoom sobre una parte de la imagen revela nuevos detalles, nuevas formas, nuevos mundos, como se muestra en la figura 2.2.

Un fractal es un objeto que exhibe recursividad o autosimilitud, a cualquier escala. En otras palabras, si enfocamos una porción cualquiera de un objeto fractal (imaginemos que utilizamos un magnificador o hasta un microscopio, para ello), notaremos que tal sección resulta ser una réplica a menor escala de la figura principal.

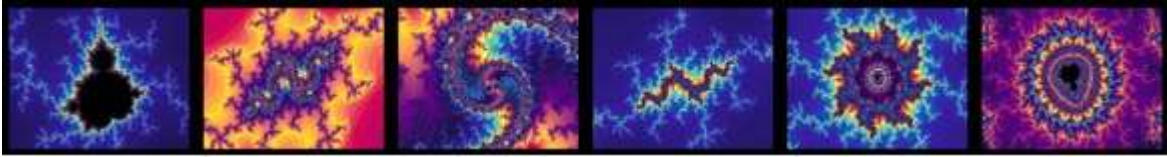


Figura 2.2 Diferentes tipos de Fractales de Mandelbrot.

Una particularidad de los fractales como de la naturaleza es la repetición de formas similares a distintas escalas de observación. Así, una parte de una nube para a una nube entera, y una roca recuerda las formas de la montaña. Una forma típicamente fractal es aquella de la coliflor, o del brócoli, cuyas partes son exactamente idénticas a la imagen del todo.

El fractal de Mandelbrot es la visualización de un objeto matemático. Se trata en realidad de una matriz de números, donde el valor de cada cifra es representada por un color. Cada punto de la imagen es un número calculado por computadora según la ecuación muy simple: $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$; o más sorprendente es que, al igual que la naturaleza, esta ecuación produce formas complejas de gran belleza.

Otro aspecto importante sobre los fractales es que su dimensión es fraccionaria. Es decir, en vez de ser unidimensional, bidimensional o tridimensional (como es el para los objetos que nos son más familiares), la dimensión en la mayoría de los fractales no se ajusta a dichos conceptos tradicionales. Más aún, su valor raramente puede ser expresado con un número entero. Esto es, precisamente, lo que les ha dado su nombre. Muchas veces, los fractales se subscriben a la definición anterior. Otras no: En vez de observarse la misma estructura en proporciones menores de la figura principal que estemos observando, serán evidentes rasgos y patrones nuevos. Ello dependerá del tipo de fractal que examinemos y, como debe ser evidente, de la función matemática que hayamos utilizado para producirlo.

Un helecho cuerno de ciervo (figura 2.3), un brócoli o una coliflor (figura 2.4) son muestras vivas de este juego de la naturaleza en el que el mismo patrón de crecimiento se manifiesta a diferentes escalas, y aunque es verdad que la realidad pone límites a la imaginación, nada nos impide especular sobre las propiedades de helechos "imaginarios" que aun a nivel microscópico exhiban características geométricas semejantes a las de la planta completa.

Objetos que en sus detalles se repiten a sí mismos, siguiendo una idea semejante a la plasmada en las famosas muñecas de los artesanos rusos.

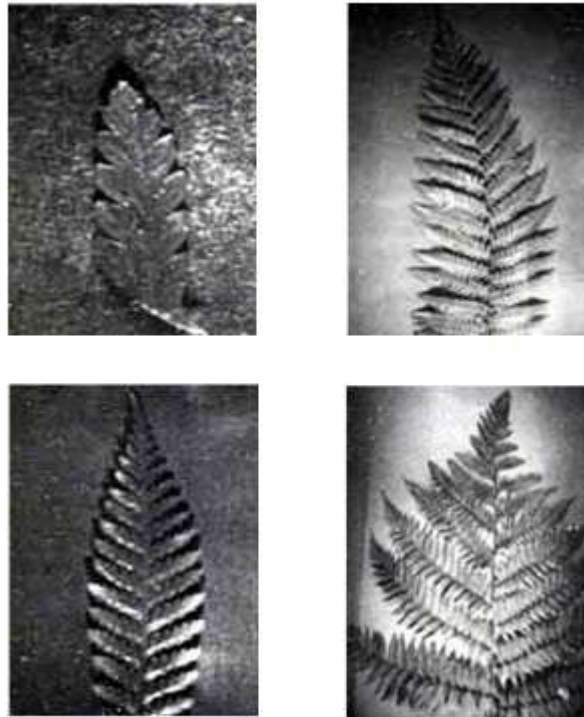


Figura 2.3 Fotografía de un helecho *cuerno de ciervo*.

Una roca es similar a la montaña de la que forma parte; una rama tiene la misma estructura que la del tronco del que nace; como si la decisión hubiera sido repetir la misma forma a diferentes escalas dentro de un mismo objeto, asegurando la preservación de una copia del original a cualquier nivel de amplificación; como si se pensara en generar el máximo nivel de detalle con el mínimo costo en el diseño.

Nuestro mundo está constituido por montañas, costas, mares, nubes, plantas, animales, etc.; sin duda alguna es el reino de la forma. Si quisiéramos describirlo, un vistazo rápido podría desalentar todo intento de realizar simplificaciones; más que el reflejo de la perfecta armonía de un mundo sencillo y ordenado, parece ser el dominio de la irregularidad y el caos.

Cuerpos amorfos desde rocas hasta planetas, flujos turbulentos desde ríos a tornados, patrones asimétricos que sobrepasan con mucho el número de cuerpos regulares con los que el hombre se ha obsesionado desde el inicio de los tiempos. Azar y desorden en un Universo aparentemente estructurado.

Sin embargo, en este mar de caos, una observación más cuidadosa de la naturaleza muestra que aún dentro de su enorme complejidad existen ciertos patrones que la caracterizan.

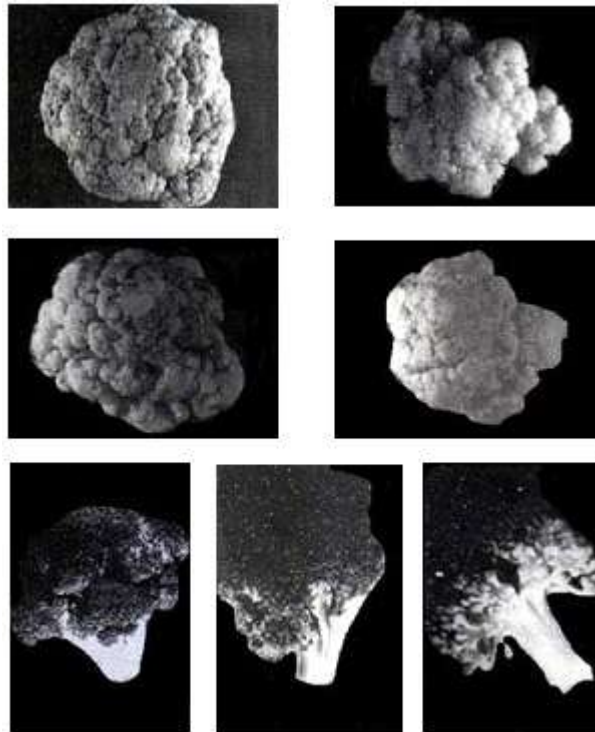


Figura 2.4 Los diferentes pedazos de la coliflor tienen una estructura muy similar a la de la cabeza completa. Con el brócoli sucede lo mismo.

Mandelbrot propuso una forma de calcular la dimensión de un objeto fractal y demostró que el número que así se obtiene no depende de la escala en que las observaciones se hacen. Por lo que, el grado de irregularidad de un fractal es el mismo a medida que se cambia la escala. Una de las características de un fractal es que conserva la misma forma si se le ve en distintas escalas. Esta característica de los fractales se llama **autosimilitud**. Debido a la característica anterior, es posible construir figuras fractales siguiendo un procedimiento bien definido, es decir, un algoritmo. Los procesos matemáticos para construir las estructuras fractales son iteraciones de reglas simples en los objetos de la inicial.

Las mutaciones pequeñas de reglas simples crean una enorme variedad de modelos macroscópicos. La esencia de los fractales es la "retroalimentación". El punto de partida es una información original, se procesa y se obtiene un resultado. Éste se procesa nuevamente (se itera) y se obtiene otro nuevo resultado parecido al que le precede y se repite indefinidamente con cada resultado.

Desde el punto de vista fractal, con la aportación de Mandelbrot, se constituye en un nuevo campo de las matemáticas e interviene en el cambio de los paradigmas de las ciencias. Según Campbell [2.5] la geometría fractal permite analizar cuatro puntos principales:

- 1).- Provee dimensiones adicionales y más cercanas a la realidad en comparación con la geometría euclidiana.
- 2).- La mayoría de los sistemas complejos son caóticos, y éstos exhiben conductas extrañas asociadas con límites o campos que no pueden ser representados en dimensiones enteras.
- 3).- Los sistemas dinámicos pueden ser representados en series de tiempo y sus dimensiones son importantes si se busca estudiarlos.
- 4).- Los fractales son escalables, es decir, se puede reducir o ampliar su análisis para observarlos detalladamente, mientras que las formas básicas se conservan en cada escala.

Todos los sistemas complejos reales generalmente muestran invarianza de escala, es decir, su comportamiento no varía por el reescalado de las variables que gobiernan su dinámica. Esto nos da la posibilidad de emplear el enfoque de escalamiento para obtener los fractales auto-similares y auto-afines. La transformación de escalamiento o similitud, consiste en generar una copia similar de un objeto cualquiera en una escala diferente. Esto se consigue afectando el objeto original por un factor de proporcionalidad, al cual se le llama *factor de escalamiento* [2.6]. De esta manera, dos objetos son similares si poseen la misma geometría, aunque tengan diferente tamaño. De forma general, esto es; si tenemos un objeto y se elige una pequeña parte del mismo y se agranda con un factor de escalamiento, se observa una geometría idéntica al objeto completo. Si se toma este último objeto y se agranda nuevamente por el mismo factor de escalamiento, ciertamente se obtendrá una geometría similar al objeto original. Esta operación se puede repetir indefinidamente. La propiedad de auto-similitud es un fractal matemático y se presenta en todo el intervalo de escalas [2.7].

2.2 AUTO-SIMILITUD Y AUTO-AFINIDAD.

Los *fractales* son conjuntos matemáticos que permanecen invariantes a los cambios de escala. Los fractales fueron descubiertos como un grupo de estructuras que presenta una paradoja para la teoría de la medición. Esta teoría se desarrolló a fines del siglo XIX y principios del XX por un grupo de matemáticos como Cantor, Peano, Von Koch, Hausdorff y Besicovitch. La mayoría de ellos dieron su apellido paterno a los fractales que ellos descubrieron [2.2]. La paradoja consistió en la imposibilidad de medir el tamaño de algunos conjuntos a través de un estándar empleado. Cuando uno desea medir la longitud de una circunferencia, la manera más simple es cubrirla con pequeños segmentos de tamaño “ l ”. La suma de todos los segmentos puede ser considerada como una aproximación del perímetro del círculo. Entre más pequeños sean los segmentos, mayor será la exactitud de la aproximación. En el límite $l \rightarrow 0$, la suma de todas las longitudes de los segmentos debe tender a $2\pi r$, donde r es el radio del círculo.

El procedimiento para medir el tamaño de un conjunto es conocido como el método de conteo de cajas (ver Apéndice A) [2.8]. La paradoja surge cuando uno intenta emplear el mismo procedimiento para medir la longitud de la curva de Koch (figura 2.5), la cual tiene una longitud infinita en el límite $l \rightarrow 0$. Este hecho no es muy impresionante, pero esta curva de Koch, de dimensión infinita, está encerrada dentro de un área finita.

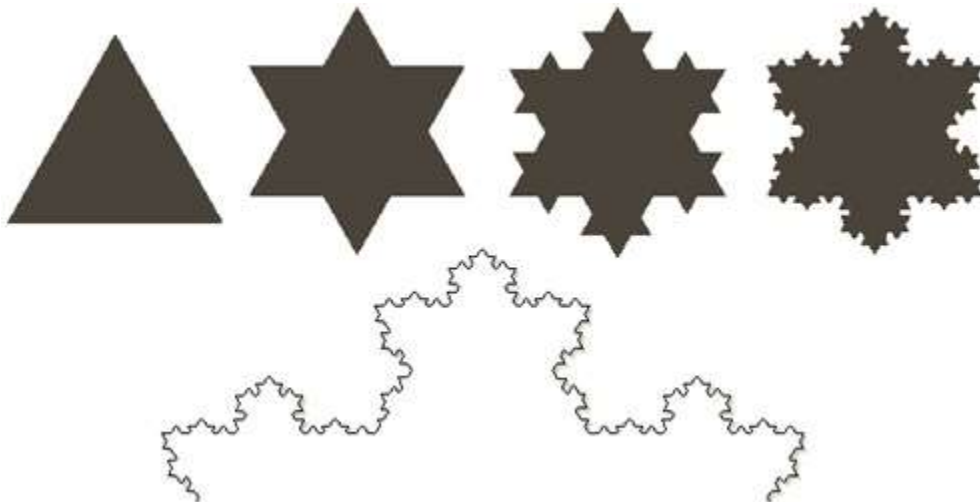


Figura 2.5 La curva de Koch, después de cuatro iteraciones.

La solución a tal paradoja llegó con la modificación del concepto de dimensión. Supóngase que μ es la magnitud a ser medida: longitud, área o volumen de un cierto conjunto.

$$D = \frac{\text{Log}(4)}{\text{Log}(3)} \quad (2.1)$$

El método usado para estimar μ es cubriendo la estructura original con pequeños conjuntos del propio μ , es decir μ_i , y de longitud l . Si $\mu(l) = \sum_i \mu_i$ es la aproximación de μ en la escala l , la dimensión de Hausdorff está definida como sigue:

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(l))}{\log(1/l)} \quad (2.2)$$

La dimensión de Hausdorff es un entero para los objetos geométricos clásicos, como puntos ($D = 0$), líneas ($D = 1$), cuadrados ($D = 2$), o cubos ($D = 3$), y toma valores no enteros (o fraccionarios) para los fractales. Para el caso de la curva de Koch, $D = \log(4) / \log(3) = 1.2618$, un valor que se encuentra entre la dimensión de una línea, $D = 1$, y el de una superficie, $D = 2$.

Se espera que D sea un número finito, por la forma particular de $\mu(l)$. Si se considera un segmento de longitud L , la *masa*, $\mu(l)$, es el número de pequeños segmentos de longitud l necesarios para cubrir L . Esta cantidad es $\mu(l) = L/l$. De tal manera que la función $\mu(l)$ se comporta como una ley de potencia con l . En este caso, el exponente de la ley de potencia es -1 , coincidiendo con $-D$ para un segmento. La característica relevante de las leyes de potencia, es que éstas son las únicas funciones cuya forma es de invarianza de escala. Como previamente se mencionó, esta es la simetría que define la geometría fractal. Por consiguiente, la mayoría de las propiedades de los fractales están expresadas mediante leyes de potencia.

Un fractal se puede construir por dos métodos diferentes. En el primer método el fractal *crece*, es decir, una figura es seleccionada y copias de ella misma son agregadas al conjunto, manteniendo algunas geometrías preestablecidas (el fractal que se presenta en la figura 2.5 es un ejemplo de este caso).

Existen muchos sistemas reales en el mundo que emplean una técnica similar de crecimiento, algunos ejemplos son el electro-deposición, las colonias de bacterias o el crecimiento de cristales.

Por otro lado, la construcción de un fractal puede iniciar también a partir de una figura con una dimensión d mayor que la del conjunto futuro; la figura original es perforada, por lo que en la misma se producen “hoyos” de todos tamaños (figura 2.6). Si la distribución de los hoyos es una ley de potencia, $P(s) \sim s^{-\gamma}$, el conjunto final es un fractal con una dimensión $D = d (\gamma - 1)$.

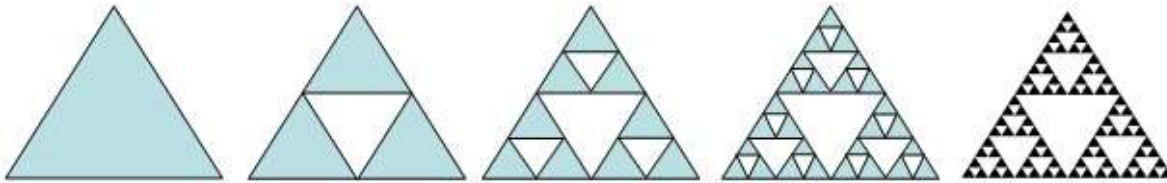


Figura 2.6 El triángulo de Sierpinski después de cuatro iteraciones.

Este proceso es muy parecido a la erosión en las rocas. Los dos métodos ofrecen diferentes clases de fractales. Aquellos fractales que son producidos mediante hoyos tienen un tamaño finito en el espacio que los contiene (estos pueden ser encerrados dentro de un hiper-volumen finito), por lo que más allá de cierta escala estos fractales pierden su fractalidad. Por el contrario, aquellos fractales que son generados por la adición de piezas pequeñas presentan un tamaño infinito, pero también poseen un rango más bajo en la resolución y en la invarianza de escala [2.9].

Los fractales señalados hasta el momento son **auto-similares**. En decir, estos permanecen invariantes cuando la escala se cambia *uniformemente* en todas las direcciones. La invarianza puede ser literal, al realizar un acercamiento de una parte se observa exactamente la misma estructura, o puede ser estadística: no se ve exactamente lo mismo, pero el resultado del dicho acercamiento es indistinguible del conjunto original. Cualquier estimador estadístico que se aplique a dicho conjunto, da lugar a los mismos resultados que si se aplica al conjunto incompleto.

No obstante, es fácil encontrar situaciones en donde dos o más direcciones no son equivalentes. Por ejemplo, en un fractal construido por adición, una sola dirección puede ser introducida si las partículas llegan al conjunto sólo desde una dirección. El conjunto, de crecimiento en este caso, no es un fractal auto-similar clásico, sino que pertenece a un tipo diferente de fractales, denominados fractales auto-afines.

La naturaleza de cualquier transformación de afinidad permite clasificar a ésta dentro de dos grandes grupos: lineales y no lineales. La diferencia fundamental entre ellas reside en que las primeras respetan las líneas rectas que constituyen la forma geométrica sobre la que se aplican, mientras que las segundas no, y por tanto actúan sobre ellas alterando algo más que su posición, orientación y tamaño, como se muestra en la figura 2.7 [2.3].

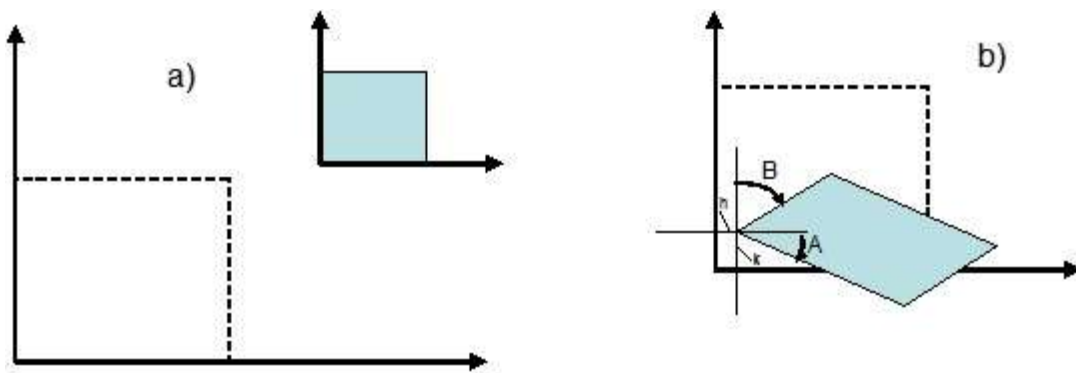


Figura 2.7 Diversas Transformaciones: en a) Transformación de similitud con un factor de escala $r=0.5$, y en b) Transformación de afinidad lineal, con rotación y traslación.

Existen varios métodos para determinar las propiedades de un fractal, estos, se pueden clasificar básicamente en dos; los que se utilizan para determinar características en los fractales autosimilares y los usados para determinar características en los fractales autoafines.

2.3 SUPERFICIES E INTERFACES FRACTALES.

2.3.1 SUPERFICIES RUGOSAS EN SOLIDOS.

Los sólidos con superficies rugosas son muy comunes en la naturaleza y se presentan en muchos procesos industriales. Se pueden crear mediante diferentes mecanismos químicos y/o físicos tales como deposición, corrosión y desgaste, disolución, maquinado y fractura. Sin embargo, en el presente trabajo se estudia la formación de superficies rugosas (interfaces fractales) en la absorción de fluidos. El estudio de estas superficies y sus propiedades físicas y estructurales es de gran importancia para muchos intereses prácticos. Las superficies rugosas presentan estructuras fractales. Algunos ejemplos notables son los relieves de las montañas [2.10], deposición de películas delgadas, superficies formadas por fractura y la superficie de metales fundidos.

2.3.2 INTERFACES FRACTALES FLUIDO-FLUIDO.

2.3.2a Digitación Viscosa.

La digitación viscosa aparece cuando un fluido de baja viscosidad, como el agua, desplaza a un fluido de alta viscosidad, como el petróleo: El fluido de baja viscosidad forma “huellas dactilares”, las cuales se esparcen dentro del fluido de alta viscosidad.

Especialmente, esto es debido a que la interface entre el fluido de baja viscosidad que empuja contra el fluido de alta viscosidad es inestable: Las protuberancias en la interface causan un aumento en el gradiente de presión delante de la protuberancia en el fluido de alta viscosidad, lo cual tiende a desarrollar aún más la protuberancia [2.11]. Aunque, bajo condiciones experimentales adecuadas se pueden generar figuras fractales, parecidas a los modelos de la DLA, como se muestra en la figura 2.8. Muy factible, la clave para lograr tales estructuras fractales es que la aleatoriedad debe dominar sobre la estabilidad del proceso (como la tensión interfacial) [2.12]. Las condiciones físicas responsables para que se presente esta situación aún no están completamente entendidas.



Figura 2.8 Digitación viscosa característica generada por la inyección de agua en una celda Hele-Shaw radial llenada con una solución polimérica más viscosa [2.12].

2.3.2b Flujo Multifásico en Medios Porosos.

Los materiales porosos reales son irregulares, pero en lo común la porosidad no está directamente relacionada a la geometría fractal. Desde un punto de vista tradicional, un medio poroso se considera homogéneo a escala macroscópica [2.13]. Aunque, muchos medios porosos manifiestan estructuras fractales en un rango finito de escalas de longitud.

Se pueden reconocer tres clases diferentes de estructuras fractales porosas [2.13]:

- (1) Esqueletos fractales (pertenecientes a masas fractales).
- (2) Estructuras fractales porosas (pertenecientes a los fractales porosos) y
- (3) Casos donde ni el medio sólido ni el espacio poroso es fractal pero los poros tienen una superficie fractal (superficies fractales).

Los conceptos de geometría fractal se han empleado para estudiar diversos objetos porosos a diferentes escalas, que van desde longitudes a escalas microscópicas (en el caso de aerogels o resinas orgánicas) a escalas de longitud macroscópica (en el caso de esponjas, corales, arenas o rocas volcánicas y aún cavernas). Las propiedades físicas de los medios porosos se han estudiado intensamente [2.14] pero las cuestiones del porqué y cómo se forman han sido de poco interés.

Entre los posibles mecanismos que dan lugar a la porosidad fractal están los siguientes: Crecimiento, descomposición espinodal y lixiviación consecutiva, corrosión y fractura [2.15]. La comprensión del transporte de fluidos en medios porosos es de gran importancia industrial. La recuperación de petróleo, o la prevención de contaminación de mantos acuíferos subterráneos para la agricultura son algunos de los campos de aplicación. Debido a este interés práctico, el flujo multi-fásico en medios porosos ha sido objeto de muchos estudios teóricos y experimentales.

2.4 REFERENCIAS.

[2.1] Balankin, A. (2003). *Fractal Behavior of Complex Systems*, México, Científica Vol. 7 No. 3, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, IPN.

[2.2] Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*, N. York: W. H. Freeman.

[2.3] Talanquer V. (2003). *Fractus, Fracta, Fractal, Fractales, de Laberintos y Espejos*, México: La ciencia para todos No.147, Fondo de cultura económica.

[2.4] Balankin A., "Teoría de Fractales en Análisis y Modelación de Sistemas Complejos".

[2.5] Campell, A. & Mackinlay, C. (1991). *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press.

[2.6] Stanley, H. (1995). *Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index*, Nature 376.

[2.7] Morales, O. (2004). *Dinámica de la Mecánica Fractal de Precios del Petróleo*, México: Instituto Politécnico Nacional, Tesis Doctoral.

[2.8] Patiño, J. (2009). *Aplicación de la Mecánica Fractal para Análisis de la Sismicidad en la República Mexicana*, México: Instituto Politécnico Nacional, Tesis Doctoral, ESIME-UZ.

[2.9] Vicsek, T. (1989). *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific.

[2.10] Mandelbrot, B. B. (1992). *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco.

[2.11] **Van Damme, H. (1989).** *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, Eds. D. Avnir, pp 189, Wiley, New York.

[2.12] **Nittman, J.; Daccord, G. & Stanley, H. E. (1985).** *Nature*, 314, 141.

[2.13] **Dullien, F. A. L. (1979).** *Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure*, Academic Press, London.

[2.14] **Adler, P. M. (1989).** *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, Eds. D. Avnir, pp. 341, Wiley, New York.

[2.15] **Sapoval, B.; Rosso, M. & Gouyet, J. F. (1989).** *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, Eds. D. Avnir, pp. 227, Wiley, New York.

CAPÍTULO

3

MEDIOS POROSOS

En este capítulo se expone de manera general algunos conceptos vinculados a los Medios Porosos, estructuras, clasificaciones y propiedades; aplicados en este trabajo de investigación para obtener información de gran importancia que se utilizará en la obtención de resultados.

MEDIOS POROSOS

3.1 CONCEPTOS BÁSICOS.

3.1.1 LOS MEDIOS POROSOS.

Un medio poroso, es un sólido impregnado por una red interconectada de poros (vacíos) llenado de un líquido (gas). Generalmente la matriz sólida y la red del poro (también sabida como el espacio de poro) se asumen para ser continuas, para formar dos series continuas de interpenetración tales como dentro de una esponja.

Muchas sustancias naturales como rocas, suelos, tejidos finos biológicos (huesos), y materiales artificiales tales como cementos, cerámica pueden ser considerados como medios porosos. Un medio poro elástico es caracterizado por su porosidad, permeabilidad, así como las características de sus componentes (matriz y líquido sólidos).

El concepto de medios porosos se utiliza en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería aplicada: Mecánicas (Acústica, Mecánica de suelos); Ingeniería (Ingeniería del petróleo, Ingeniería de la construcción); Geo-ciencia (Hidrología, Geología del petróleo, Geofísica); Biología y Biofísica; Ciencia material; etc.

3.2 ESTRUCTURA Y CLASIFICACIÓN.

Un significado general, de un medio poroso, es definirlo como un sólido que contiene hoyos. Aunque, un cilindro metálico hueco no es clasificado como un material poroso; por consiguiente, una mayor especificación del término *material poroso* es requerida. Para el interés de este análisis un sólido que contiene hoyos o vacíos conectados o no conectados, dispersos dentro de él de forma aleatoria, puede ser considerado como un material poroso, dado que estos agujeros ocurren frecuentemente dentro del sólido [3.1].

Una gran variedad de materiales naturales y artificiales son porosos; un cubo de arena, una pieza de piedra caliza, un manojo de algodón, un bollo o pan; son ejemplos de materiales porosos, en la figura (3.1) se muestran algunos ejemplos de materiales porosos. De estos, es indiscutible que gran variedad en el tamaño y estructura de poros existen en tales materiales. Algunas clasificaciones de poros es factible; aunque, los poros pueden estar interconectados o no. Un fluido puede filtrarse por medio de un material poroso sólo si por lo menos algunos de los poros están interconectados; el espacio del poro interconectado es llamado el espacio del poro efectivo, mientras que la totalidad del espacio del poro es llamado espacio del poro total.

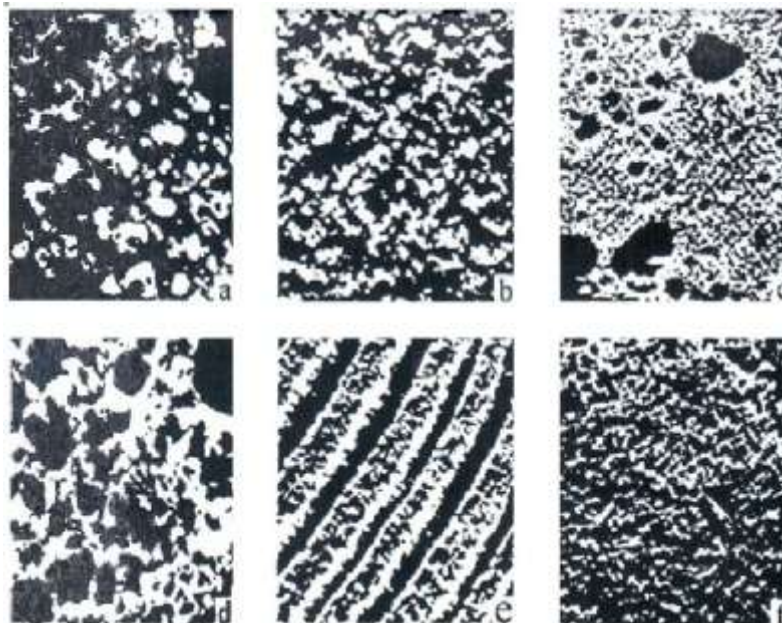


Figura 3.1 Ejemplos de materiales porosos naturales (X10); (a) Arena de playa, (b) Arena de piedra, (c) Piedra caliza, (d) Pan de centeno, (e) Madera, (f) Pulmón humano.

Los espacios dentro de un material poroso pueden estar clasificados de acuerdo a su tamaño. Son probables tres primeras clasificaciones tomando en cuenta el comportamiento de los fluidos dentro del espacio vacío. En los espacios vacíos más pequeños, las fuerzas moleculares entre las moléculas del sólido y las del fluido son significativas. Estos espacios diminutos vacíos son llamados *intersticio* molecular.

En el espacio vacío más grande, el movimiento de un fluido es parcialmente determinado por las paredes de la cavidad: Estos espacios más grandes son llamados *cavernas*. Los espacios que tienen un tamaño intermedio entre los intersticios y las cavernas son llamados *poros*. Algunas ocasiones es desarrollada una clasificación adicional de estos poros, especialmente en las piedras calizas o rocas de dolomita. Las cavidades de tamaño más pequeño (vugs) y el espacio formado por estas son llamado espacio del poro vugular.

Una clasificación complementaria de los materiales porosos divididos dentro de dos grupos, *ordenados* y *aleatorios*. El significado es claro, un empaquetamiento regular de esferas es ordenado; mientras un bollo o pan es aleatorio en su estructura porosa.

3.3 ESTRUCTURA Y PROPIEDADES.

La gran parte de los materiales porosos naturales y artificiales poseen una estructura hueca aleatoria; en realidad, la estructura de los materiales puede ser descrita solo en términos estadísticos. Aun así, es posible tratar el flujo de fluidos a través de dichos materiales sobre una base macroscópica en términos precisos, como la situación es mucho más parecida con la energía cinética de la teoría de los gases; en una escala microscópica las variables en cuestión deben ser tratadas como variables aleatorias, debido a su gran número y complejidad; pero a una escala macroscópica el sistema puede ser tratado en términos de unas pocas cantidades completamente determinables.

Como intentos para relacionar en una manera detallada las propiedades macroscópicas de los materiales porosos con las propiedades estadísticas de su estructura microscópica; muchas teorías se han encontrado. Dichas teorías intentan relacionar “la distribución del tamaño de poro” con las propiedades macroscópicas del material [3.2].

Algunos propósitos han relacionado “la distribución del tamaño del grano” [3.3] de materiales, con sus propiedades macroscópicas. Mientras que las teorías contribuyen enormemente para la comprensión de los procesos físicos básicos dentro de medios porosos, en absoluto no contribuyen a la solución de problemas a una escala macroscópica.

La teoría microscópica del flujo de fluido a través de un material poroso puede desplegarse de una o dos maneras. Se puede empezar con una teoría microscópica estadística y revelar cómo esto lleva a ciertas leyes macroscópicas, como la teoría cinética de gases predice la ley macroscópica de la ley de Boyle, o una que pueda empezar con la ley macroscópica como leyes empíricas implantadas mediante experimentos.

3.4 POROSIDAD.

La porosidad de un material poroso es la fracción del volumen total para el material ocupado por vacíos. El símbolo empleado es ϕ sin embargo algunas veces es utilizado f así:

$$\phi = \frac{V_P}{V_B} = \frac{\text{Volumen de Poros}}{\text{Volumen Total}} \quad (3.1)$$

Por lo tanto es una cantidad adimensional.

Puesto que la porción de volumen total no ocupado por poros es ocupada por los granos del sólido o matriz del material. Como sigue:

$$1 - \phi = \frac{V_S}{V_B} = \frac{\text{Volumen de Sólido}}{\text{Volumen Total}} \quad (3.2)$$

Se pueden definir dos tipos de porosidad, la porosidad *absoluta* o *total* y porosidad *efectiva*. La primera es el espacio vacío fraccional con respecto al volumen total sin tener en consideración las conexiones del poro. La segunda es la fracción del volumen total compuesto por la interconexión de poros. En rocas naturales, como la lava y otras rocas ígneas, tienen una alta porosidad pero fundamentalmente no tienen porosidad efectiva. La porosidad efectiva es una indicación de la permeabilidad pero no una medida de ella.

3.4.1 POROSIDAD, SUPERFICIE ESPECÍFICA Y TORTUOSIDAD.

Posiblemente, la propiedad más simple de un sistema poroso es la porosidad ϕ , que se define como la fracción volumen de sus poros y/o fracturas [3.4]. De las propiedades de percolación de un sistema, se identifica el parámetro p , que es la fracción de sitios (o enlaces) abiertos en un sistema, sin tomar en cuenta si éstos pueden expandirse hasta la superficie externa del sistema, de la fracción accesible $X^A(p)$ de los sitios (o enlaces) abiertos (la fracción accesible se define como la fracción de enlaces (o sitios) que pertenecen al cluster infinito, el cual si se expande por todo el sistema). Claramente, siempre se cumple que $X^A(p) \leq p$. Igualmente, se debe resaltar la porosidad total ϕ de un sistema, ignorando si todas las partes del espacio poroso que aportan a ϕ se puedan obtener, a partir de la porosidad accesible ϕ_A , que se define como la fracción volumen de la parte porosa del sistema que se puede obtener desde su superficie externa. Por lógica, p y X^A son similares a ϕ y ϕ_A .

La porosidad de un sistema se puede medir por diversos métodos. El más común es un método directo, en el cual se mide el volumen total del sistema. Posteriormente el sistema es triturado para descartar todo el espacio poroso, y se mide el volumen del sólido. Claramente, este método mide la porosidad total del sistema. Uno de los métodos mayormente manejado para medir la porosidad accesible de un sistema es el método de expansión de gases. En el cual, el sistema poroso se introduce en un contenedor sellado lleno con un gas tal como el aire, seguidamente el contenedor se conecta a un contenedor evacuado, lo que causa un cambio en la presión del sistema. La porosidad accesible del sistema se estima a partir de la siguiente ecuación:

$$\phi_A = 1 - \frac{V_1}{V_S} - \frac{V_2}{V_S} \left(\frac{P_f}{P_f - p_i} \right) \quad (3.3)$$

donde V_1 es el volumen del contenedor en el cual se introduce el sistema poroso, V_2 es el volumen del contenedor al vacío, V_S es el volumen de la muestra porosa, p_i es la presión inicial del sistema, y P_f es la presión final. Existen otros métodos para medir ϕ y ϕ_A por ejemplo, aquellos que son analizados por Collins [3.5] y Scheidegger [3.6].

Otra característica de interés es el área superficial específica (Ξ) que es definido como el cociente entre el área superficial de los poros y el volumen total del medio poroso; y por lo tanto, se expresa como el recíproco de una longitud. Hay diversos métodos para medir (Ξ), los cuales se discuten por Scheidegger [3.4]. Por ejemplo, se puede utilizar una microfotografía de secciones pulidas de una muestra de un medio poroso con suficiente contraste entre los poros y las partículas. A partir de la relación entre mediciones bi-dimensionales (superficiales) y las propiedades del sistema tri-dimensional se puede obtener una estimación de (Ξ). Incluso se pueden utilizar experimentos de absorción para medir (Ξ), aunque depende del tamaño de las moléculas empleadas en la sonda y, por ello, se puede sobre-estimar el valor de (Ξ).

Una tercera propiedad de un medio poroso es su tortuosidad T_p , que frecuentemente se define como el cociente de la longitud real de la trayectoria del flujo de una partícula de fluido entra la distancia lineal entre los puntos inicial y final de la partícula de movimiento. Claramente, T_p depende de la porosidad. Si ϕ es pequeña (cerca del umbral de percolación), por lo tanto T_p es muy grande. De hecho, se implica que T_p diverge en el umbral de percolación. En los modelos típicos de flujo y transporte en medios porosos, T_p comúnmente se trata como un parámetro ajustable.

3.4.2 POROSIDAD EN EL PAPEL.

El papel, a diferencia de la mayoría de los materiales manufacturados, tienen la característica particular que es definitivamente heterogéneo, pero en una manera teórica desconocida. Indudablemente, es un reto predecir el comportamiento de una estructura ingenieril que consta de elementos como vigas cuando no se conoce cómo están organizadas. En cualquier pedazo de papel, se puede observar mediante un microscopio óptico o una radiografía cómo se encuentra distribuido el material. Incluso, se puede crear estructuras matemáticas por medio de procesos estocásticos, las cuales sirven como patrones de referencia en la modelación de la estructura del papel. En la figura 3.2 se presenta la estructura del papel empleado en este trabajo de investigación durante el proceso de imbibición.

La presencia de fibras da lugar a una heterogeneidad estructural y como derivación, influye en los efectos físicos del comportamiento del material.

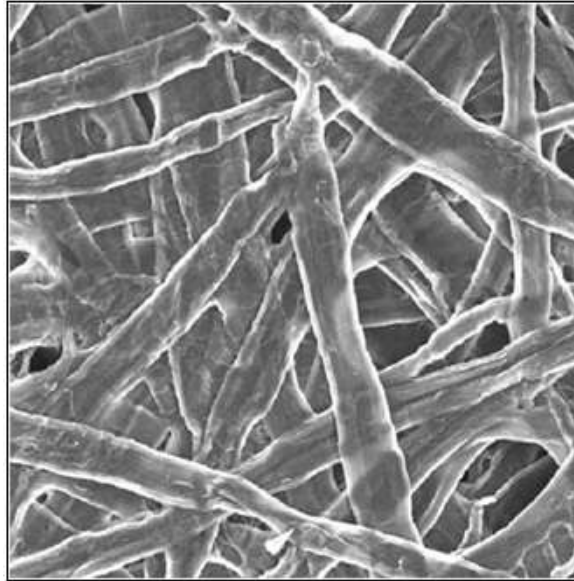


Figura 3.2 Estructura del papel filtro, empleado en el proceso de imbibición.

En síntesis, el papel es un material poroso con estructura anisotrópica asociada con una orientación asimétrica en la configuración de sus fibras [3.7]. A pesar de la naturaleza estocástica de la configuración de las fibras, la estructura porosa de los papeles no es aleatoria, pero posee correlaciones en amplios intervalos que se caracterizan por un comportamiento de leyes de potencia, de acuerdo a la función de autocorrelación espacio-densidad [3.8]. Distintas clases de papel tienen diferentes estructuras, lo que implica a tener diversas distribuciones de poros [3.7]. Lo que posibilita a analizar los efectos del desorden y la anisotropía en estructuras porosas en el comportamiento dinámico espacio-temporal de una interface húmeda.

3.4.3 DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑOS DE POROS.

En un estudio minucioso de los medios porosos naturales muestra que lo que frecuentemente se conoce como poros se puede dividir en dos categorías: En la primera se encuentran los cuerpos porosos donde reside la mayor parte de la porosidad; mientras que en la segunda se encuentran las gargantas porosas, que son canales que conectan los cuerpos porosos.

Usualmente se establece un radio efectivo a los cuerpos porosos y a las gargantas porosas, que a decir verdad, no es otra cosa que el radio de una esfera que tenga el mismo volumen. De este modo, los cuerpos porosos y las gargantas se definen en términos de aproximar el máximo y el mínimo de los radios más grandes inscritos en una esfera. Generalmente, la representación del espacio poroso en una red, los cuerpos porosos y las gargantas porosas se interpretan por medio de la red y los enlaces de la red, respectivamente.

Todo el volumen de un cuerpo poroso se puede asignar en el sitio correspondiente; sucesivamente puede estar compartido entre los enlaces de la red; así es como se modela el proceso del transporte en medios porosos. De hecho, si se conoce la distribución de los tamaños de los poros, por consiguiente se puede definir un tamaño de poro promedio.

La distribución de los tamaños de poros se define como: La función de densidad de probabilidad que da la distribución de volumen de poros mediante un tamaño de poro efectivo o característico. Aún esta definición es un poco ambigua, porque si se pudiesen separar los poros, entonces se podría asignar a cada poro, un tamaño efectivo, en este caso la distribución de tamaños de poros podría ser similar a la distribución de tamaño de partículas.

No obstante, debido a que los poros están interconectados, el volumen que se asigne al poro puede depender del método experimental y del modelo de espacio poroso que se emplee para la interpretación de datos.

3.5 IMBIBICIÓN.

Para entrar en discusión del flujo de fluidos en medios porosos, se inicia tomando en cuenta un hecho habitual: Por accidente alguien derrama el café sobre el mantel durante una reunión familiar. Ciertamente no es el momento oportuno para examinar como las fuerzas microscópicas se equilibran cuando el café ha dejado de extenderse. Así como, razonar a cerca de la morfología de la mancha de café que se ha formado y de la rugosidad de su contorno.

Sujetando un pedazo de papel toalla, el cual se utiliza en la cocina para limpiar líquidos, y empapando una parte en cualquier líquido, se puede duplicar el accidente ocurrido durante la reunión familiar a una escala de laboratorio.

El papel en su estructura interna, es un material heterogéneo, un modelo de una roca heterogénea que contiene petróleo. Una de las oposiciones entre el flujo de fluido de un papel toalla y el flujo de petróleo en una roca es la escala en la cual se lleva a cabo el fenómeno de fluidos. Esta oposición es una ventaja: Debido a que se puede emplear una muestra de papel toalla de 20 cm de ancho, ver figura 3.3, para lograr entender mejor el problema de un pozo petrolero de 20 km [3.9].

Por ejemplo, se puede determinar la interface que se genera cuando sumergimos el papel toalla en un fluido aplicando leyes de escalamiento, cuya imagen se puede predecir por simples modelos que capturan los mecanismos básicos que dan lugar a su morfología. El objetivo de estos experimentos, es encontrar nuevos parámetros que representen la formación, crecimiento y dinámica de interfaces en medios porosos empleando a la geometría fractal como herramienta de análisis.

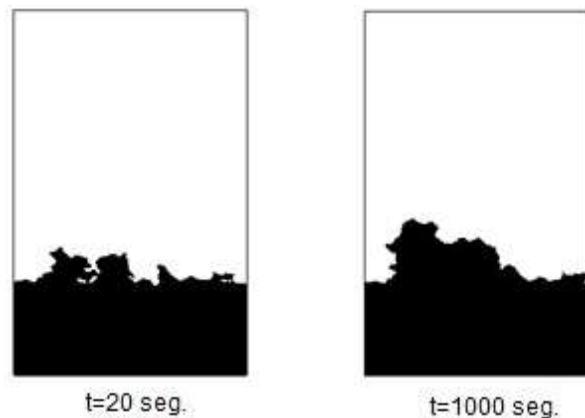


Figura: 3.3 Crecimiento y dinámica de interfaces en medios porosos.

3.6 SATURACIÓN DE FLUÍDO, PRESIÓN CAPILAR Y ÁNGULO DE CONTACTO.

Una cantidad notable es la saturación de un fluido que llena parcial o totalmente el volumen vacío de un sistema poroso. La saturación de un fluido es la fracción volumen del espacio vacío que ocupa el fluido. Parecido a la porosidad, la saturación de un fluido puede ser medido por diversos métodos.

Por ejemplo, uno pesa un modelo poroso antes y después de que se llene con un fluido, a partir de lo cual se puede apreciar fácilmente la saturación del fluido. Ahora bien, tome en cuenta la condición en la que una gota de agua se coloca sobre una superficie embebida en petróleo. Entonces, la interface entre los dos fluidos intersecta la superficie del solido a un ángulo θ , al que se le denomina *ángulo de contacto*, como ilustra en la figura 3.4.

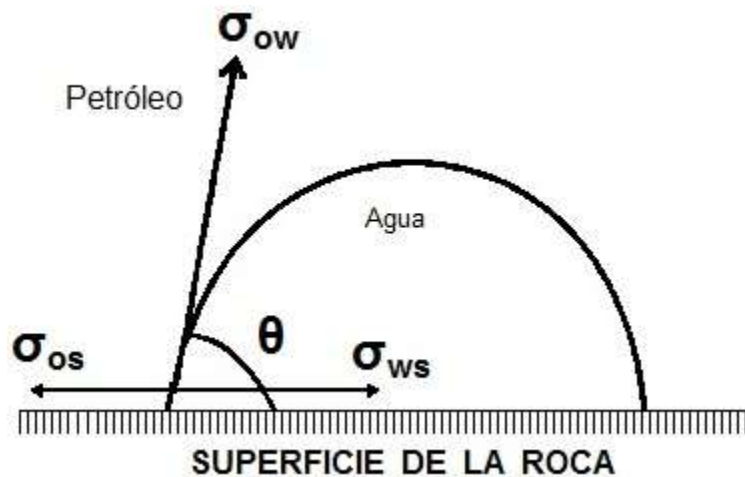


Figura 3.4 Ángulo de contacto formado entre un par de líquidos y la roca.

En este sistema se muestran tres tensiones superficiales, que corresponden a dos interfaces fluido-sólido, y a una interface agua-aceite. Estas tensiones superficiales se relacionan entre sí mediante la ecuación Young-Dupré:

$$\sigma_{ow} \cos \theta = \sigma_{os} - \sigma_{ws} \quad (3.4)$$

Donde, σ_{ow} y σ_{ws} son las tensiones superficiales entre el aceite y la superficie sólida, el agua y la superficie sólida, respectivamente. Si $\theta < 65^\circ$, entonces se dice que el sistema es preferencialmente agua-húmedo; mientras que para $105^\circ < \theta < 180^\circ$ la superficie es petróleo-húmeda. Para $65^\circ < \theta < 105^\circ$, se dice que la superficie es medianamente húmeda, y no tiene preferencia para ninguno de los dos fluidos.

Una medida considerable para la caracterización de un sistema poroso es la presión de capilaridad P_c . Imagine que dos fluidos inmiscibles; por ejemplo agua y petróleo, se ponen en contacto en un tubo cilíndrico transparente, y están separados por una interface. Hay una discontinuidad en el campo de presión conforme uno se mueve a través de la interface desde una fase a otra. Esto es, si consideramos dos puntos, uno en la fase del agua con una presión P_W y el segundo punto en la fase de petróleo con una presión P_O . Ambos puntos se localizan en la vecindad de la interface, así que $P_W \neq P_O$. A la diferencia de presión $P_C = P_W - P_O$ se le denomina *presión de capilaridad* (comúnmente, la presión es más alta en un fluido no-mojable, en este caso el petróleo), y se expresa por medio de la ecuación siguiente Laplaciana:

$$P_C = \sigma_{OW} \cos \theta \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.5)$$

Donde, r_1 y r_2 son los radios principales de curvatura de la interface. Para una interface en un tubo cilíndrico $r_1 = r_2 = r$, donde r es el radio del tubo. Si se considera la presión de capilaridad en un sistema sencillo, tal como un tubo cilíndrico o cónico, entonces es evidente que P_c únicamente dependería de la cantidad de fluido en el sistema, y por lo tanto de su saturación.

Aunque, la situación es distinta en un sistema poroso con muchos poros y/o fracturas de geometría irregular, porque diversas saturaciones pueden arrojar el mismo P_c y viceversa, puesto que hay varias interfaces en el sistema en distintos lugares. Esto es lo que ciertamente uno encuentra en un experimento al medir P_c en un sistema poroso.

3.7 REFERENCIAS.

[3.1] **García, P. J. (2003).** *Análisis Fractal de Yacimientos Naturales Fracturados*, Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UZ, México; D.F.

[3.2] **Burdine, N. T., Gournay, L. S. & Reicertz, P. P. (1950).** *Trans.*, AIME, 189, 195.

- [3.3] **Krumbien, W. C. & Monk, G. D. (1943).** *Trans.*, AIME, 151, 153.
- [3.4] **Morales, M. D. (2001).** *Dinámica Fractal de Interfaces en Medios Porosos*, Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UZ, México; D. F.
- [3.5] **Collins, R. E. (1961).** *Flow of Fluids Through Porous Media*, Penwell, Tulsa, pp. 196.
- [3.6] **Scheidegger, A. E. (1974).** *The Physics of Flow Through Porous Media*, 3rd. ed., University of Toronto Press, Toronto.
- [3.7] **Deng, M. & Dodson, C. T. J. (1994).** Paper: *An Engineering Stochastic Structure*, Atlanta Georgia, Tappi Press.
- [3.8] **Provatas, N., Alava, M. J. & Ala-Nissyla, T. (1996).** *Phys. Rev.*, E, 54, R36.
- [3.9] **Barabási, A. L. & Stanley, H. E. (1995).** *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge University Press.

CAPÍTULO

4

DESARROLLO EXPERIMENTAL

En este capítulo se presenta la metodología de la investigación, relacionada a los detalles experimentales desarrollados en este trabajo. El procedimiento de la ejecución de las pruebas de laboratorio, el material utilizado para su elaboración y los parámetros considerados en cada prueba.

DESARROLLO EXPERIMENTAL

4.1 SELECCIÓN DEL MATERIAL Y EQUIPO UTILIZADO.

Para la selección del material utilizado en las pruebas experimentales de imbibición [4.1], se tomó en cuenta la accesibilidad de éste para su manejo durante todo el desarrollo experimental, que por su estructura fuera adecuado para estudiar la formación, crecimiento y dinámica de interfaces fractales en medios porosos [4.2]. Por este motivo la imbibición realizó en probetas de papel.

El material fue un papel filtro de poros abiertos color blanco [4.3-4.8], con los que se elaboraron las probetas de experimentación de tamaño 40cm X 20cm, como se ilustra en la figura 4.1, las propiedades mecánicas y físicas del papel filtro son mostradas en la tabla 4.1.

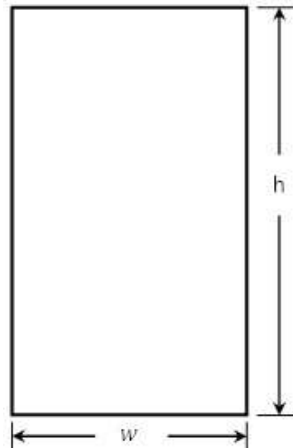


Figura 4.1 Configuración geométrica de cada una de las probetas.

Para llevar a cabo los experimentos de laboratorio fue necesario utilizar el siguiente equipo y herramientas:

1. Una cámara de aislamiento transparente;
2. Un marco de madera, para sujetar las probetas, que consta de una base, dos postes paralelos laterales y un travesaño deslizable (figura 4.2);

3. Fluido compuesto por agua y tinta china en una proporción de 3:1, para visualizar el proceso de imbibición (el área coloreada con la tinta) en el papel filtro que es de color blanco;
4. Un recipiente de vidrio transparente para almacenar el fluido (ver figura 4.3);
5. Una cámara fotográfica *CANON-EOS Digital Rebel XT/EOS 350D* de alta resolución (8 mega pixeles), con sensor *CMOS*, para capturar la imbibición a través de intervalos de tiempo;
6. Un Digital Thermo-Hydro (Thermometer and Humidity Gauge Cat. No. 63-1013), para medir la temperatura y el porcentaje de humedad durante la duración de cada proceso de imbibición;
7. Una tetera para generar vapor; en cada prueba, ya que la imbibición está en función del porcentaje de humedad.
8. Un cronómetro para medir los intervalos de tiempo estipulados para capturar las interfaces de imbibición;
9. El software Matlab 7.1 [4.9], para el tratamiento digital de las imágenes capturadas con la cámara digital.

Tabla 4.1 Propiedades Físicas y Mecánicas del papel utilizado.

| Papel Filtro Poro Abierto | |
|--|-------------|
| Espesor (mm) | 0.321 |
| Densidad por unidad de Área (Kg/m ³) | 0.1284 |
| Densidad (Kg/m ³) | 400.09 |
| Módulo de Young (GPa) | 1.12 ± 0.15 |
| Ancho de Fibra (mm) | 0.04 ± 0.03 |
| Densidad de Fibra (Kg/m ³) | 1494 |
| Densidad Relativa | 0.2861 |
| Porosidad (%) | 73.2 |

4.2 METODOLOGÍA EXPERIMENTAL.

Los experimentos de imbibición se llevaron a cabo siguiendo la metodología que a continuación se describe:

- A. Fijar cada una de las probetas de papel filtro al travesaño del marco de madera, que esta previamente ubicada en la cámara de aislamiento, de la forma ilustrada en la figura 4.4.

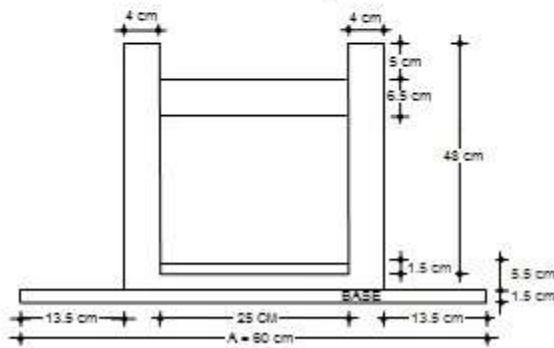
- B. Ubicar el recipiente de vidrio transparente en la base del marco de madera, con el fluido antes descrito.
- C. Sumergir la parte inferior de la probeta en el recipiente de vidrio y esperar a que el proceso de imbibición inicie y se detenga espontáneamente.
- D. Inyectar vapor a la cámara de aislamiento con la tetera a fin de romper el equilibrio de imbibición y reiniciar el proceso de imbibición con un porcentaje de humedad constante durante todo el proceso de la prueba (3000 segundos). De forma paralela; activar la cámara digital para capturar las interfaces en un intervalo de 20 segundos.
- E. Tratamiento digital de las imágenes capturadas con la cámara digital, para obtener las áreas de imbibición en cada uno de los instantes de tiempo de la prueba, utilizando como unidad de medida los pixeles de las imágenes.
- F. Generar una base de datos, alimentada con cada una de las pruebas, estos datos están en función del tiempo y porcentaje de humedad. Esto con el objeto de determinar los parámetros y dimensiones necesarias para caracterizar el comportamiento de imbibición mediante modelos matemáticos.
- G. Repetir los pasos anteriores para nueve porcentajes de humedad (50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85 y 90).



Figura 4.2 Montaje de mecanismos utilizados en las pruebas de imbibición.



(a) Colocación del marco de madera dentro de la cámara de aislamiento transparente utilizados en las pruebas de imbibición.



(b) Dimensiones del marco de madera de ancho $A=60$ cm, largo $L=24$ cm, espesor $E=1.5$ cm y una altura $H=53.5$ cm.



(c) Dimensiones del recipiente de vidrio transparente que contiene el fluido homogéneo, compuesto por tinta china y agua.

Figura 4.3 Dimensiones del prototipo experimental.



Figura 4.4 Vista esquemática de la prueba de imbibición.

4.3 RESULTADOS OBTENIDOS.

Con la base de datos obtenida en las pruebas experimentales, para cada uno de los porcentajes de humedad analizados, el proceso de imbibición durante todo el tiempo que duraron las pruebas, tuvo un comportamiento de las áreas de imbibición ya digitalizadas, como se muestra en la figura 4.5, estas al ser tabuladas en una hoja de cálculo [4.10, 4.11], se obtuvieron los incrementos en la altura h , de cada una de las unidades que integran la longitud, w , de la hoja de papel para cada intervalo de tiempo (50 seg). Al graficarse estos datos se obtiene una gráfica de interfaces como se muestra en la figura 4.6.

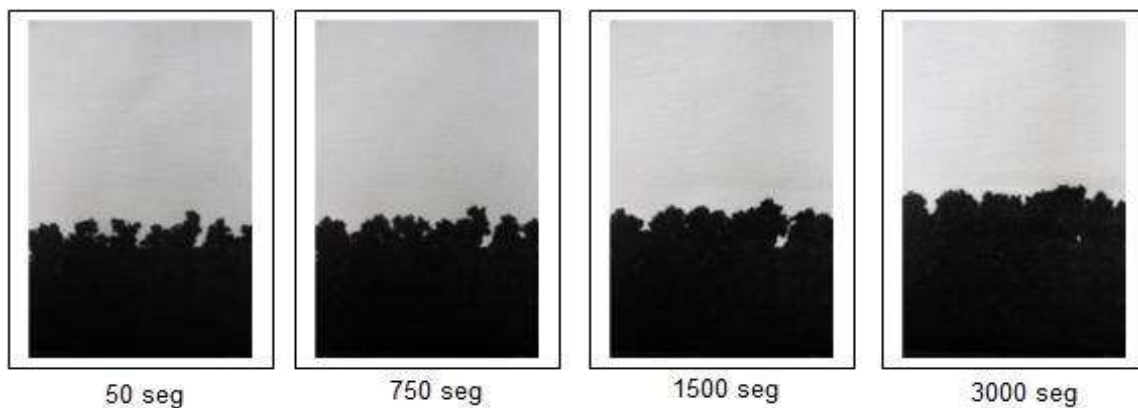


Figura 4.5. Configuración de imbibición durante la prueba.

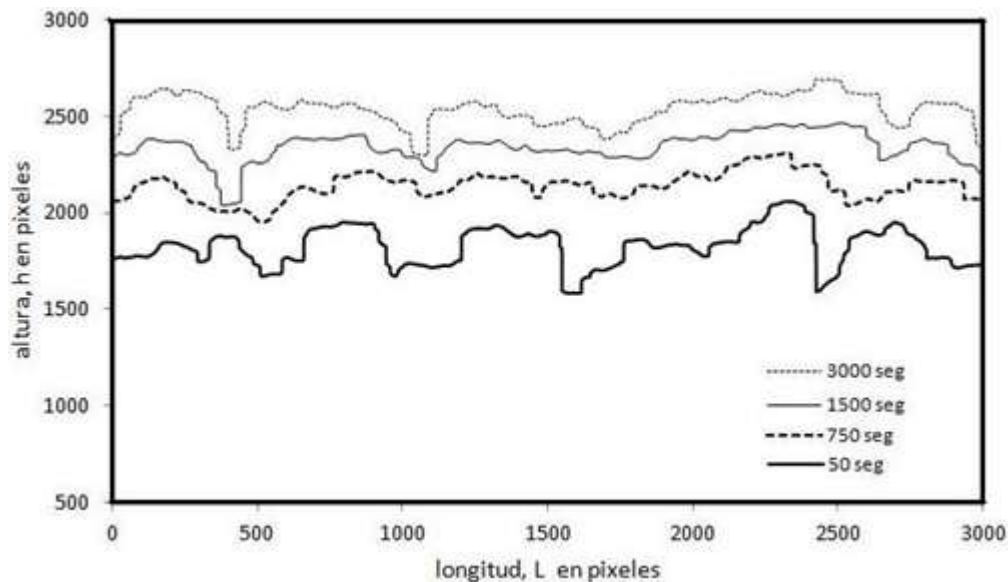


Figura 4.6. Configuración de imbibición procesada.

A su vez estas áreas de interfaces fueron calculadas usando la regla del trapecio, y los resultados se presentan en la tabla 4.2

Tabla 4.2 Áreas imbibición en función del tiempo y de la humedad.

| tiempo seg | Porcentaje de humedad | | | | | | | | |
|---------------|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
| 50 | 501807 | 502922 | 504037 | 505152 | 506267 | 507382 | 508497 | 509612 | 510727 |
| 100 | 503614 | 505844 | 508074 | 510304 | 512534 | 514764 | 516994 | 519224 | 521454 |
| 200 | 507228 | 511688 | 516148 | 520608 | 525068 | 529528 | 533988 | 538448 | 542908 |
| 400 | 514456 | 523376 | 532296 | 541216 | 550136 | 559056 | 567976 | 576896 | 585816 |
| 600 | 521684 | 535064 | 548444 | 561824 | 575204 | 588584 | 601964 | 615344 | 628724 |
| 800 | 528912 | 546752 | 564592 | 582432 | 600272 | 618112 | 635952 | 653792 | 671632 |
| 1000 | 536140 | 558440 | 580740 | 603040 | 625340 | 647640 | 669940 | 692240 | 714540 |
| 1250 | 545175 | 573050 | 600925 | 628800 | 656675 | 684550 | 712425 | 740300 | 768175 |
| 1500 | 554210 | 587660 | 621110 | 654560 | 688010 | 721460 | 754910 | 788360 | 821810 |
| 1750 | 563245 | 602270 | 641295 | 680320 | 719345 | 758370 | 797395 | 836420 | 875445 |
| 2000 | 572280 | 616880 | 661480 | 706080 | 750680 | 795280 | 839880 | 884480 | 929080 |
| 2250 | 581315 | 631490 | 681665 | 731840 | 782015 | 832190 | 882365 | 932540 | 982715 |
| 2500 | 590350 | 646100 | 701850 | 757600 | 813350 | 869100 | 924850 | 980600 | 1036350 |
| 2750 | 599385 | 660710 | 722035 | 783360 | 844685 | 906010 | 967335 | 1028660 | 1089985 |
| 3000 | 608420 | 675320 | 742220 | 809120 | 876020 | 942920 | 1009820 | 1076720 | 1143620 |

En la figura 4.7 se muestran las imágenes que describen el desarrollo dinámico de la interface en una prueba de imbibición realizada en el laboratorio. Así mismo, se calcularon las dimensiones fractales, por el método de conteo de cajas [4.12], (*Box-Counting Dimension*) utilizando el software BENOIT 1.2 (ver Apéndice A), de dichas imágenes para determinar el comportamiento dinámico de la dimensión fractal de la interface en una prueba de imbibición. En la tabla 4.3 se muestran los cálculos de las dimensiones fractales para cada una de las pruebas de imbibición.

La dimensión por caja, es definida como el exponente D_B en la relación:

$$N(\Delta) \propto \Delta^{-D_B} \quad (4.1)$$

Donde:

$N(\Delta)$, es el número de cajas de tamaño lineal Δ necesario para cubrir un grupo de datos de puntos distribuidos en un plano bidimensional de microfotografía.

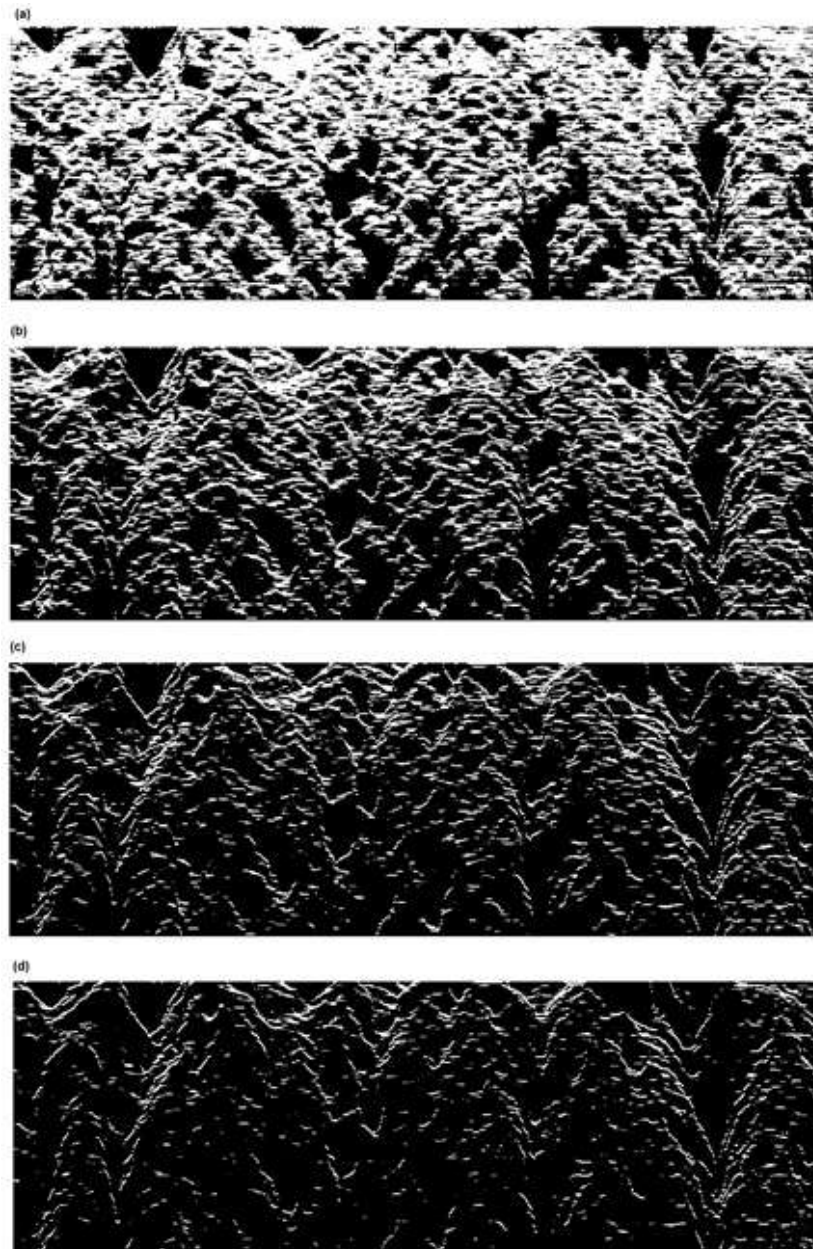


Figura 4.7 (a)-(d) Desarrollo dinámico de una interface en un proceso de imbibición a una humedad específica.

La base de este método es que, para objetos que son euclidianos, la ecuación (1) define su dimensión. Un número proporcional de cajas para $1/\Delta$ es necesario para cubrir un grupo colocados sobre una línea suave, proporcional a $1/\Delta^2$ para cubrir un grupo de puntos eventualmente distribuidos sobre un plano, y así sucesivamente.

CAPÍTULO 4

Los fractales son estructuras o sistemas desordenados que se pueden describir en términos de una dimensión no-entera, la cual se llama dimensión fractal y es una medida de habilidad de ocupación de espacio desordenado; es decir nos indica cómo la estructura del sistema desordenado se acomoda dentro de un espacio d-dimensional.

Tabla 4.3 Dimensiones fractales del desarrollo dinámico de las interfaces en las pruebas de imbibición.

| Intervalos (seg) | Porcentaje De humedad | | | | | | | | |
|---------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
| (0,0) | 1.826 | 1.83 | 1.887 | 1.91 | 1.845 | 1.879 | 1.698 | 1.726 | 1.915 |
| (0,1) | 1.778 | 1.804 | 1.875 | 1.903 | 1.841 | 1.844 | 1.572 | 1.563 | 1.89 |
| (0,2) | 1.683 | 1.776 | 1.849 | 1.894 | 1.833 | 1.817 | 1.422 | 1.373 | 1.822 |
| (0,3) | 1.603 | 1.734 | 1.804 | 1.889 | 1.831 | 1.777 | 1.356 | 1.237 | 1.832 |
| (0,4) | 1.501 | 1.751 | 1.789 | 1.87 | 1.83 | 1.769 | 1.152 | 1.168 | 1.756 |
| (0,5) | 1.413 | 1.704 | 1.747 | 1.847 | 1.824 | 1.692 | 1.03 | 1.152 | 1.723 |
| (0,6) | 1.46 | 1.672 | 1.71 | 1.836 | 1.809 | 1.67 | 0.927 | 1.117 | 1.71 |
| (0,7) | 1.207 | 1.594 | 1.691 | 1.825 | 1.804 | 1.622 | 0.896 | 0.955 | 1.695 |

En la figura 4.8 se muestra gráficamente el comportamiento dinámico de la dimensión fractal para una prueba de imbibición. Se observa que conforme transcurre el tiempo la dimensión fractal disminuye.

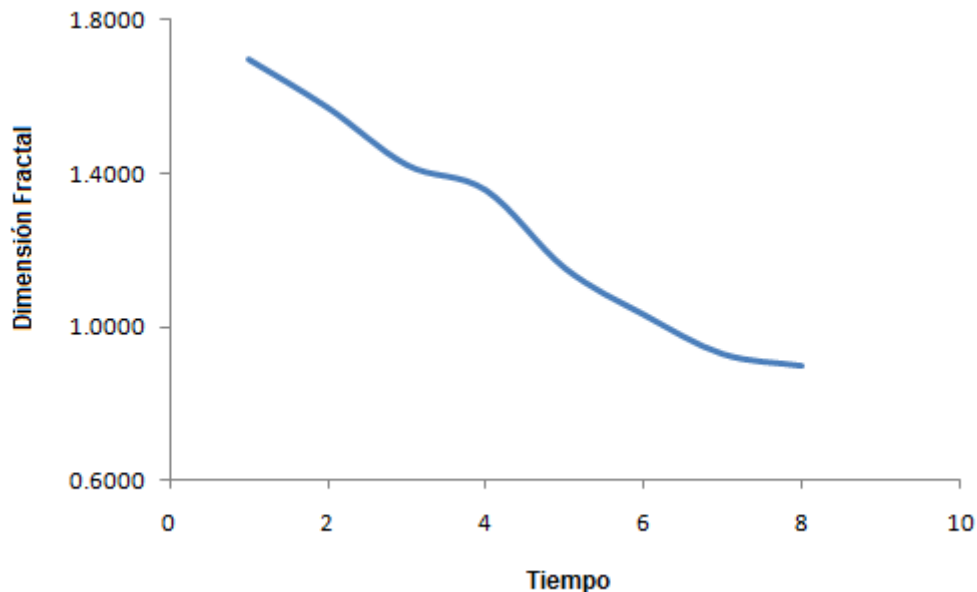


Figura 4.8 Comportamiento dinámico de la dimensión fractal en una prueba de imbibición con respecto a la humedad.

4.4 REFERENCIAS.

- [4.1] Deng, M. & Dodson, C. T. J. (1994). Paper: *An Engineering Stochastic Structure*, Atlanta, TAPPI Press.
- [4.2] Provatas, N., Alava, M. J. & Ala-Nissila, T. (1996). *Phys. Rev.*, E 54 pp. 73.
- [4.3] Bouchaud, E., Lapasset, G. & Planés, J. (1990). *Europhys. Lett.*,13, pp. 73.
- [4.4] Maloy, K. J., Hansen, A., Hinrichsen, E. L. & Roux, S. (1992). *Phys. Rev. Lett.*, 68, pp. 213.
- [4.5] Parisi, A., Caldearelli, G., & Pietronero, E. *Europhys. Lett.*,53, pp. 304 (200).
- [4.6] Amar, J. G., Lam, P. –M. & Family, F. (1991). *Phys. Rev.*, A, 43, pp. 4548.
- [4.7] Buldyrev, S. V. et al. (1991). *Phys. Rev. A*, 43, pp. 7113.
- [4.8] Sahimi, M. (1994). *J. Phys. I. France* 4, 1263.
- [4.9] Gonzalez, R. C. (2003). *“Digital Image Processing Using Matlab”*, Prentice Hall.
- [4.10] Joseph Billo, E. J., (2007). *“Excel for Scientists and Engineers: Numerical Methods”*, Wiley Interscience.
- [4.11] Walkenbeach, E. J., (2004). *“Power Programing with VBA”*, Wiley Publishing.
- [4.12] Marquez, J. (2003). *Mecánica Fractal de Yacimientos Naturalmente Fracturados*. Instituto Politécnico Nacional, ESIME-UZ.

CAPÍTULO

5

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se desarrolla el planteamiento del caso de estudio al proceso de imbibición en papel filtro de poro abierto, presentando los resultados obtenidos en las pruebas experimentales, validando la metodología propuesta en el capítulo anterior, así como la discusión de los mismos.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1 RESULTADOS EXPERIMENTALES.

Con los resultados obtenidos y presentados en el capítulo anterior, se determinaron las velocidades de imbibición, usando los datos de cada uno de los intervalos de tiempo obtenidos para los diferentes porcentajes de humedad, esto se llevó a cabo mediante un análisis de regresión lineal de los datos mostrados en la tabla 4.2, las velocidades de imbibición presentan un comportamiento lineal (ver figura 5.1), en las diferentes humedades analizadas:

$$A = (v * t) + 5e - 6 \quad (5.1)$$

Donde:

A , es el área de imbibición en pixeles².

v , es la velocidad de imbibición para cada porcentaje de humedad (mostrada en la tabla 5.1).

t , es el intervalo de tiempo en segundos.

$5e - 6$, es el área de imbibición con porcentaje de humedad del medio ambiente, a partir de ésta área se inicia el experimento de imbibición con porcentaje de humedad controlada.

Tabla 5.1 Velocidad de imbibición.

| H (%) | velocidad (pixel/seg) |
|-------|-----------------------|
| 50 | 36.14 |
| 55 | 58.44 |
| 60 | 80.74 |
| 65 | 103.04 |
| 70 | 125.34 |
| 75 | 147.64 |
| 80 | 169.94 |
| 85 | 192.24 |
| 90 | 214.54 |

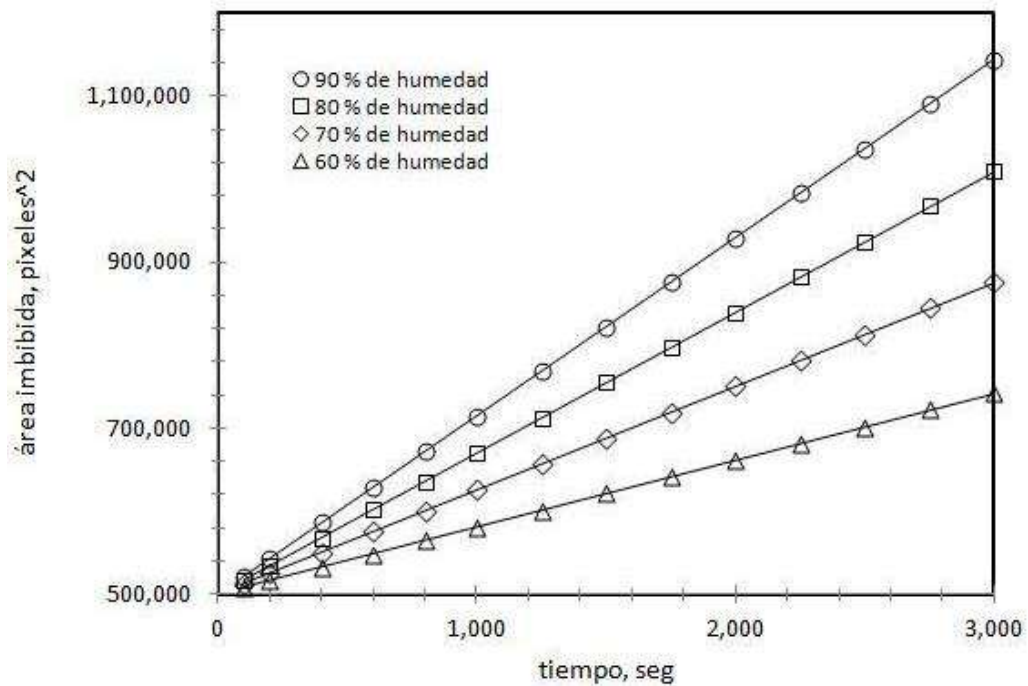


Figura 5.1 Comportamiento de la velocidad de imbibición.

Para determinar la aceleración de la imbibición en cada interface con respecto al porcentaje de humedad, se realiza una regresión lineal de la tabla 5.1 y sustituyendo la relación obtenida en la ecuación 5.1, se tiene la aceleración mostrada en la ecuación 5.2.

$$A = (4.46H - 186.86)t \quad (5.2)$$

Dónde:

A , es la aceleración de la imbibición.

H , es el porcentaje de humedad.

La grafica que representa esta relación del porcentaje de humedad con respecto a la velocidad de imbibición se muestra en la figura 5.2, donde su comportamiento es lineal.

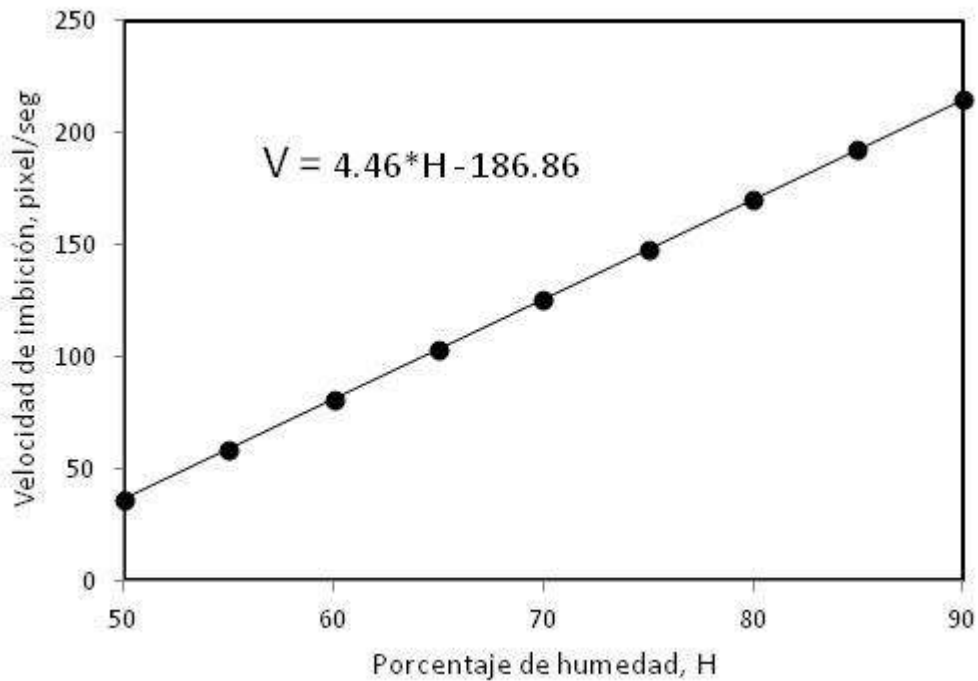


Figura 5.2 Comportamiento de la aceleración de imbibición.

Finalmente, los valores de la dimensión fractal obtenidos para cada uno de los porcentajes de humedad del papel filtro poro abierto, empleado en este trabajo de investigación; muestran el comportamiento dinámico de las interfaces en función de la humedad en un período de tiempo determinado.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estudió la dinámica fractal de formación de interfaces en medios porosos, utilizando papel filtro poro abierto como prototipo de un medio fractal. Por primera vez se realizó el estudio de flujos multifásicos en medios porosos analizando el proceso de formación de interfaces por medio de la imbibición, tomando en cuenta el porcentaje de humedad. Los experimentos de imbibición realizados fueron al menos de 70 veces. Se utilizó solo un ancho de probeta durante todas las pruebas.

Entre los resultados obtenidos tenemos la velocidad y la aceleración de imbibición para intervalos de tiempo diferentes en función de un porcentaje de humedad variado, presentando ambos términos un comportamiento lineal. Demostrando que conforme pasa el tiempo, el área de imbibición aumenta y a mayor humedad mayor velocidad.

Con respecto a los resultados encontrados de la dimensión fractal, para cada uno de los porcentajes de humedad del papel filtro poro abierto, muestran el comportamiento dinámico de las interfaces en función de la humedad en un período de tiempo determinado, donde se observa que conforme transcurre el tiempo la dimensión fractal disminuye.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo son de gran importancia para el entendimiento básico de física de procesos que conducen a formación de interfaces rugosas en no-equilibrio en sistemas heterogéneos. Estos resultados pueden ser un abanico de ideas para el desarrollo de modelos y nuevas técnicas en la industria petrolera o instituciones afines; para la producción de petróleo o estudios de nuevos campos de investigación.

RECOMENDACIONES PARA TRABAJO FUTURO

LIMITACIONES.

Algunas de las limitaciones que se presentan en este trabajo se deben fundamentalmente a una solo motivo: el material utilizado para la ejecución experimental. El papel es el modelo de un sistema desordenado, debido a que a nivel microscópico es una sustancia exageradamente desordenada y su espesor es muy delgado. Por lo que, los análisis desarrollados en este trabajo de investigación se consideran bi-dimensionales. Sin embargo, esto no disminuye la importancia al presente trabajo, al contrario, puede servir como un inicio para la realización de una variedad de análisis en sistemas de tres dimensiones, que son más complicados.

RECOMENDACIONES PARA TRABAJO FUTURO.

Entre las recomendaciones para trabajo a futuro que se pueden generar están las siguientes:

- Realizar pruebas de laboratorio utilizando la metodología aplicada en este trabajo, incluyendo la fase inicial del proceso de imbibición en donde la interface se detiene espontáneamente.
- Estudiar la dinámica fractal en la formación de interfaces en medios porosos, asociada al fenómeno de imbibición y en función de la temperatura.

Es importante difundir los resultados obtenidos en estos trabajos, debido primordialmente a que el tema del crecimiento de superficies e interfaces fractales es un tópico de interés presente en el ámbito mundial y además, se contribuye con estas nuevas metodologías a solucionar problemas de interés industrial en nuestro país y fuera de él; para omitir la importación de tecnologías costosas.

La divulgación de estos trabajos se puede realizar en artículos y congresos nacionales e internacionales, seminarios, conferencias, etc. El propósito es dar a conocer que hay una herramienta matemática llamada Geometría Fractal que está innovando la concepción del mundo actual.

GLOSARIO

Algoritmo: Un procedimiento por pasos, que en un determinado número de ellos produce el óptimo.

Análisis, método analítico: El método de investigación reduccionista por el cual se desintegra un sistema complejo en sus componentes y se estudia por separado.

Anisotropía: Característica de los materiales según la cual la intensidad de una o varias propiedades vectoriales varía según las diferentes direcciones.

Complejidad: La intrincación de interrelaciones entre componentes de sistemas.

Dimensión Fractal: Es la generalización de la idea de dimensión euclidiana de autosimilaridad. Del mismo modo que objetos de dimensión entera pueden escalarse auto similarmente para reducir o amplificar su tamaño, existen objetos geométricos que pueden escalarse autosimilarmente mediante un factor de escala, que puede expresarse mediante $N=Cr^{-D}$, donde N es el número de objetos con una dimensión lineal característica mayor que r , c es una constante y D un exponente fraccionario llamado dimensión fractal.

Exponente (Factor) de crecimiento (β): Caracteriza la dependencia dinámica en el tiempo del proceso de rugosidad.

Exponente (Factor) dinámico (z): Proporciona información acerca de qué tan rápido las correlaciones se expanden a través del sistema. Este exponente se relaciona con α y β mediante una simple relación de escalamiento: $z = \alpha/\beta$.

Exponente (Factor) de rugosidad ($\zeta_q = \alpha$): También llamado exponente de Hurst y nos indica cuál es el grado de anisotropía del conjunto fractal. Es también un indicador para determinar si un fenómeno o una serie de tiempo presentan un comportamiento fractal y mide la intensidad de dependencia a largo plazo de una serie de tiempo. Está relacionado con la dimensión (fractal) local del conteo de cajas de la interface como $D_B = 2-H$.

Fluido: Dícese de los cuerpos cuyas moléculas tienen una débil fuerza de unión de modo que puedan deslizarse unas sobre otras (líquidos), o desplazarse libremente (gases), adoptando la forma del recipiente que las contiene.

Fractal: Es un objeto que presenta la misma estructura al cambiársele indefinidamente la escala de observación recibe el nombre de fractal. Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovich es estrictamente mayor que su dimensión topológica. Los fractales son conjuntos matemáticos que permanecen invariantes a los cambios de escala.

Fractales Auto-Afines: Son fractales en donde dos o más direcciones no son equivalentes. Por ejemplo, en un fractal construido por adición, una sola dirección puede ser introducida si las partículas llegan al conjunto sólo desde una dirección. Un fractal auto-afín, es un conjunto que permanece invariante bajo una escala (estadísticamente o literalmente) de transformación anisotrópica.

Fractales Auto-Similares: Estos permanecen invariantes cuando la escala se cambia uniformemente en todas la direcciones. La invarianza puede ser literal, al realizar un zoom de una parte se observa exactamente la misma estructura, o puede estadística: no se ve exactamente lo mismo, pero el resultado del zoom es indistinguible del conjunto original.

Heterogéneo: Mezcla de dos o más fases distintas.

Homogéneo: Mezcla que consta de una sola fase.

Imbibición: Absorción espontánea de líquidos por parte de sustancias sólidas (animales, vegetales, rocas) con hinchamiento; generalmente se produce con emisión de calor.

Interfase: Superficie que separa dos fases de la materia. Cada una de las cuales puede ser sólida, líquida o gaseosa. Una interfase no es una superficie geométrica, sino más bien es una capa delgada que contiene propiedades diferentes a las fases de la materia que separa.

Isotropía: Característica de ciertos cuerpos que presentan una o más propiedades que no dependen de la dirección en que se miden (Isótropo).

Método: Conjunto de procedimientos que valiéndose de los instrumentos o las técnicas necesarias, examina y soluciona un problema o conjunto de problemas de investigación.

Método Científico: El enfoque permitido en las ciencias físicas y otras relacionadas, por el cual se postulan, validan y generalizan hipótesis en leyes. El método científico y el paradigma de ciencia deben modificarse, para acomodarlos a las necesidades especiales del dominio de las ciencias sociales.

GLOSARIO

Metodología: a) La metodología como parte de la lógica que se ocupa del estudio de los métodos, es el “estudio (descripción, explicación y justificación) de los métodos de investigación en sí”. b) La metodología entendida como el conjunto de aspectos operativos del proceso de investigación.

Monitoreo: Observación y medición de algún parámetro por medio de un sistema de instrumentos durante el desarrollo de una prueba u operación.

Papel: Hoja delgada obtenida a través de la laminación de pasta de fibras vegetales, según su origen se obtiene numerosas aplicaciones (escritura, dibujo, impresión, aislamiento, filtración, etc.).

Series de Tiempo: Se llama Series de Tiempo a un conjunto de observaciones y mediciones sobre valores que toma una variable (cuantitativa) de cierto fenómeno o experimento registrado secuencialmente en el tiempo.

Teoría del Caos: Es la denominación popular de la rama matemáticas y la física que trata ciertos tipos de comportamientos impredecibles de los sistemas dinámicos. Los sistemas dinámicos se pueden clasificar básicamente en: Estables, Inestables y Caóticos. Un sistema estable tiende a lo largo del tiempo a un punto, u órbita, según su dimensión (atractor o sumidero). Un sistema inestable se escapa de los atractores. Y un sistema caótico manifiesta los dos comportamientos.

Transformación de Afinidad: Reglas para escalar, rotar, desplazar y en ocasiones distorsionar un objeto geoméricamente. La naturaleza de cualquier transformación de afinidad permite clasificar a ésta dentro de dos grandes grupos: Lineales y no lineales. La diferencia fundamental entre ellas reside en que las primeras respetan las líneas rectas que constituyen la forma geométrica sobre la que se aplican, mientras que las segundas no, y por tanto actúan sobre ellas alterando algo más que su posición, orientación y tamaño.

APÉNDICES

APÉNDICE A



BENOIT 1.2

BENOIT™ es un programa informático que permite medir la dimensión fractal y / o exponente de Hurst, por medio de los siguientes métodos:

Conteo de cajas, el análisis de los patrones de auto-similar (de datos en 2D); R / S, el poder de análisis espectral, variograma, longitud de la rugosidad, y ondoletas para el análisis de la auto-afinidad (datos en 1D); la fragmentación de los datos de frecuencia (datos en 1D).

Es fácil de usar, la interface visual que hace BENOIT™, una herramienta de investigación y estudio para todos los interesados en las propiedades fractales de sus conjuntos de datos. Usted está a sólo unos clics de distancia de los resultados del análisis. BENOIT™ calcula automáticamente los valores por defecto para los parámetros de ajuste diferentes o se puede controlar el desempeño de cada método de sintonización manual de los parámetros. Gráficos de datos interactivos le permiten desactivar los puntos de datos fuera del rango fractal para aumentar la precisión. Para aquellos interesados en cómo funciona cada método, los métodos son preferibles para un determinado conjunto de datos, y obtener más información acerca de los métodos fractales y sus propiedades, un archivo de ayuda está integrado en el programa que explora estos y otros temas relacionados con el fractal.

Dimensión Fractal.

Podemos considerar 2 definiciones:

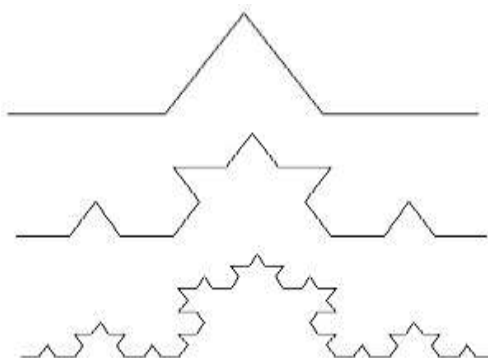
A) Una primera definición de dimensión se refiere al *número de valores reales que necesitamos para describir cualquier punto en un espacio*. Un espacio es un conjunto de puntos, pero no debemos restringir la noción de punto y espacio. Quizá nos sintamos más cómodos manejando conceptos como elemento y conjunto. Así, los libros son puntos en el espacio de la producción editorial, las personas son puntos en el espacio de la población mundial, y cualquier pentágono es un punto del espacio de los polígonos de cinco lados. Según la definición de dimensión que estamos manejando, una línea cualquiera es unidimensional, ya que nos basta un número real para identificar cualquier punto. La línea no tiene por qué ser recta: nos basta un único valor (normalmente el punto kilométrico) para situarnos en una carretera, por muy intrincada que sea.

B) Otra definición de dimensión se refiere al *grado de libertad de movimiento en el espacio*. Entenderemos esta libertad como el número de direcciones ortogonales diferentes que podamos tomar. En el espacio que conocemos contamos con tres direcciones: izquierda-derecha, atrás-delante y arriba-abajo. Por ello decimos que es tridimensional. Podemos definir otros espacios: un tren se mueve en un espacio unidimensional (a no ser que descarrile), un barco en un espacio bidimensional (salvo que naufrague) y un avión en un espacio tridimensional (siempre que haya despegado del aeropuerto). Siguiendo esta segunda definición, el espacio de diez puntos mencionado anteriormente es "cero dimensional". Desde un punto cualquiera es imposible moverse en ninguna dirección, ya que no hay nada entre ese y los demás puntos que componen el espacio. Todo parece indicar que hemos llegado a una definición más satisfactoria, pero la situación no persiste si analizamos espacios algo más caprichosos. El espacio formado por dos segmentos que se cruzan sería unidimensional de no ser por el punto de intersección, donde se pueden tomar dos direcciones. Otro espacio formado por un punto y una superficie, es bidimensional, excepto por el punto, de dimensión 0. Estos diferentes valores se denominan dimensiones locales, y, como vemos, varían dentro de un mismo espacio cuando éste no es homogéneo. Pero aun así, el espacio ha de tener una dimensión global. ¿Cuál escogemos?

Si optamos por la mayor, nuestro primer ejemplo, el de los segmentos cruzados, tendría dimensión dos, algo que no es muy sensato. Pero si elegimos la menor, el segundo ejemplo tendría dimensión 0, afirmación muy difícil de digerir.

APÉNDICES

Todos los cuerpos topológicos tienen dimensión fractal, incluidos los euclidianos, y esta es por lo general mayor o igual a la dimensión topológica. Su dimensión es fraccional pero se obtiene realizando promedios sobre sus valores en muchas regiones y para muchos cuerpos del mismo tipo. Cuando se amplifica una de las partes de un fractal natural, la propiedad de generar la misma figura, o alguna similar, tiene límites inferiores y superiores. Por ejemplo, al observar el perfil de una montaña, el tamaño de los objetos más grandes está determinado por la fuerza de gravedad, mientras que la menor escala de observación a la cual todavía se detectan los mismos detalles depende de la acción de la erosión y, por supuesto, del tamaño de los átomos. Los fractales son, en ese sentido, sólo una buena aproximación de la estructura de las formas naturales. La medición de formas fractales (fronteras, poligonales, etc...) ha obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Dado que un fractal está constituido por elementos cada vez más pequeños, el concepto de longitud no está claramente definido: Cuando se quiere medir una línea fractal con una unidad, o con un instrumento de medida determinado, siempre habrá objetos más finos que escapan a la sensibilidad de la regla o el instrumento utilizado, y también a medida que aumenta la sensibilidad del instrumento aumenta la longitud de la línea. Esto sucede con la curva de Koch. Cada paso en la génesis de la curva aumenta un tercio su longitud. Es decir, la longitud de la curva que ocupa el espacio inicial va aumentando en cada paso su longitud de forma indefinida. Cada curva es $4/3$ de la anterior:



Así por ejemplo en el caso de la curva poligonal de nivel 10, la longitud es $1 \cdot (4/3)^{(10-1)}$:



APÉNDICES

De esta forma la curva aumentaría indefinidamente su longitud para un fragmento acotado de curva. ¿Puede esto ser así? Como la longitud de la línea fractal depende de la longitud de instrumento, o de la unidad de medida que tomemos, la noción de longitud en estos casos, carece de sentido. Para ello se ha ideado otro concepto: el de **dimensión fractal**. (que en el caso de las líneas fractales nos va a indicar de qué forma o en qué medida una línea fractal llena una porción de plano).

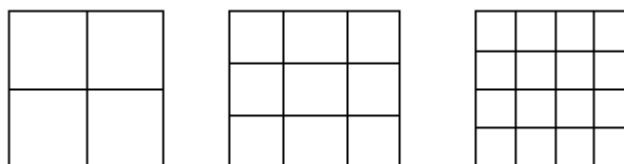
Recordemos que en geometría clásica un segmento tiene dimensión uno, un círculo tiene dimensión dos, y una esfera tiene dimensión tres. Para que sea coherente con lo dicho una línea fractal tiene que tener dimensión menor que dos (no llena toda la porción de plano). Y en los casos del conjunto de Cantor y de la curva de Koch menor y mayor que uno respectivamente: en el primer caso no llena todo el segmento de recta, y en el segundo es más largo. Sin embargo el caso del conjunto de Cantor es excepcional y no se puede considerar propiamente un fractal; en general lo que sucede es que la longitud de la curva fractal es superior al del segmento de recta que lo genera y, por tanto, en general la dimensión fractal será un número comprendido entre uno y dos.

Como precedente a la dimensión fractal nos encontramos con la dimensión definida por Felix Hausdorff en 1919, perfeccionada más tarde por Besicovitch. La dimensión Hausdorff $H(X)$ de un objeto fractal X mide el número de conjuntos de longitud L que hacen falta para cubrir X por L .

La dimensión fractal, D , es una generalización de la dimensión euclidiana, DE . Si partimos de un segmento de longitud 1, y lo partimos en segmentos de longitud L obtendremos $N(L)$ partes, de manera que $N(L) \cdot L^1 = 1$ cualquiera que sea L :

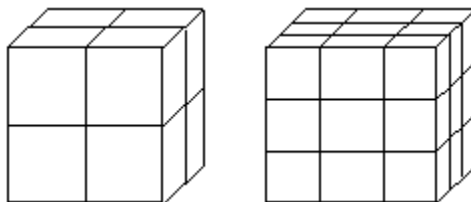


Si el objeto inicial es un cuadrado de superficie 1, y lo comparamos con unidades cuadradas, cuyo lado tenga de longitud L , el número de unidades que es necesario para recubrirlo $N(L)$, cumple que $N(L) \cdot L^2 = 1$ cualquiera que sea L :



APÉNDICES

Si, por último, el objeto que tomamos es tridimensional, como, por ejemplo, un cubo de volumen 1, y lo medimos en relación con unidades que sean cubos de arista L , entonces se cumple que $N(L) \cdot L^3 = 1$ cualquiera que sea L :



De todo esto podemos generalizar que la dimensión fractal de un objeto geométrico es D si $N(L) \cdot L^D = 1$ donde $N(L)$ es el número de objetos elementales, o de unidades, de tamaño L que recubren, o que completan, el objeto. De donde deducimos, despejando D , que:

$$D = \log(N(L)) / \log(1/L)$$

De aquí podemos deducir las dimensiones del conjunto de Cantor:

$$D = \log(2) / \log(3) = 0'6309\dots$$

La de la curva de Koch:

$$D = \log(4) / \log(3) = 1'2618\dots$$

Sin embargo se suele aceptar, e incluso definir, que un objeto es fractal sólo cuando su dimensión fractal es mayor que su dimensión euclidiana:

$$D > D_E$$

Así por ejemplo no se considera fractal el conjunto de Cantor. El resultado de la medición depende pues del tipo de regla que usemos y de su flexibilidad: cuanta menos flexibilidad tenga y menos divisiones, más inexacto será el valor obtenido ya que la regla no puede penetrar en todos los recovecos ni considerar todos los detalles, aunque intentásemos medirla con un hilo, este debería ser inmensamente largo para recorrer todos los recovecos ya que las curvas generan un proceso de repetición que cada vez añaden más detalles, alargando su longitud sin límite. En la dimensión fractal se usan los siguientes conceptos: límite, logaritmo, escalas, medidas, computadoras, fórmulas matemáticas. En la medición de fractales debemos tener presente que cuanto más rugoso o irregular sea el objeto a medir más rápido crece la estimación de su longitud y que la longitud depende de lo que desechemos al medir.

La variable topológica de dimensión define pautas fijas para establecer la dimensión global de un espacio a partir de diferentes valores locales estos varían dentro de un mismo espacio cuando no es homogéneo. La dimensión fraccionaria fractal permite medir el grado de escabrosidad o discontinuidad de un objeto, siempre que presente un grado de irregularidad constante a diferentes escalas por lo que al final resulta una irregularidad regular.

Localización de los fractales:

En la naturaleza suelen aparecer de dos formas o con relación a dos circunstancias:

a) En una situación de frontera (ejemplos: fronteras, riberas, litorales, etc.)

b) De árbol con ramificaciones como: vasos sanguíneos, tubos intestinales, bronquios, redes neuronales, ríos, epicentros de terremotos, etc...

Enumeración de algunos de los lugares donde pueden contemplarse en: múltiples estructuras vegetales (hojas, troncos, ramas, raíces), perfiles de montañas, rocas, piedras, costas, fronteras, bosques, ríos, etc..., en las formas de distintos astros (como las galaxias, nebulosas, estrellas, descargas eléctricas, nubes), depósitos y agregados electroquímicos, trayectorias de las partículas de polvo suspendidas en el aire, dinámicas de crecimiento poblacional de colonias de bacterias, etc.

En fin en una lista interminable de objetos reales que son testigos mudos de una enfermiza obsesión de la naturaleza. Están ahí donde la imaginación apenas llega.

Importancia de los fractales:

Los fractales son hoy en día una herramienta insustituible en el trabajo de muchos físicos, químicos, matemáticos. Tienen un gran potencial interdisciplinario pudiendo trabajar con ellos distintas disciplinas coordinadamente.

Nos permiten observar que aun dentro de la enorme complejidad existen ciertos patrones a seguir. Ejemplo: una roca es similar a la montaña de la que forma parte; una rama tiene la misma estructura que la del tronco del que nace; como si la decisión hubiera sido repetir la misma forma a diferentes escalas dentro de un mismo objeto, asegurando la preservación de una copia del original a cualquier nivel de amplificación; como si se pensara en generar el máximo nivel de detalle con el mínimo costo en el diseño.

APÉNDICES

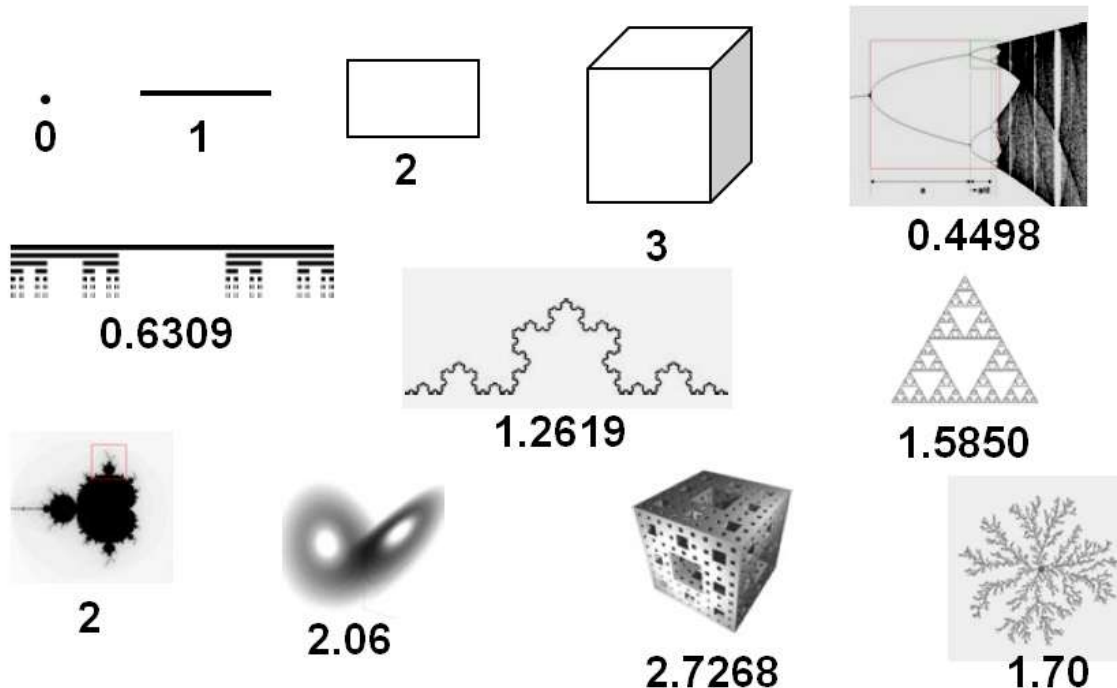
Muestras vivas de este juego de la naturaleza en el que el mismo patrón de crecimiento se manifiesta a diferentes escalas podemos verlas en un helecho, un cuerno de ciervo, un brócoli o una coliflor, nada nos impide especular sobre las propiedades de helechos "imaginarios" que aun a nivel microscópico exhiben características geométricas semejantes a las de la planta completa.

Su importancia crece, porque ellos son capaces de resolver y llegar allí donde no puede hacerlo la geometría euclídea. Gracias a ellos hemos podido identificar innumerables manifestaciones naturales ya que su geometría esta presente en todo.

La dimensión fraccionaria fractal permite medir el grado de escabrosidad o discontinuidad de un objeto, siempre que presente un grado de irregularidad constante a diferentes escalas por lo que al final resulta una irregularidad regular.

Han revolucionado la tecnología de la generación de imágenes, por ser mucho más que interesantes curiosidades matemáticas destinadas a alimentar nuestra fantasía. Gracias al descubrimiento de los fractales y a los ordenadores podemos observar la naturaleza sin movernos del sitio, quizás sea esta la causa de que en los últimos años haya crecido su popularidad y de ahí la gran cantidad de páginas y servidores Web dedicados a ellos, popularidad que se debe en parte a su gran belleza y sencillez.

Ejemplos de Dimensiones:



ANEXOS

Abstract. The imbibition growth of a fluid as a function of time and humidity in porous media by using filter paper is presented in this work. The data were obtained from experimental tests. These tests were carried out with rectangular paper specimens of 20cm x 50cm. The fluid was composed by water and China ink in relation 3:1 with a initial humidity of 33% until the capillarity, gravity and the evaporation of the fluid reached the equilibrium, once the humidity is increased again to 25 % the behind equilibrium is broken and these parameters reach the equilibrium through the time and the test is stopped. The behavior of the interface was monitored by taking pictures. The areas growth characterization was obtained.

Introduction.

The movement of water in ground, the circulation of fluids in the plants or the flow of oil in porous rocks, is a physical mechanism of penetration in a porous media which is known as imbibition, in more precise form it happens when the fluid that wets more to the porous media displaces toward the external the one that less it does. The infiltration of paper for water obeys this mechanism (imbibition), due to this displaces the air toward the external of the paper. The experiments presented in this work were carried out with paper [1] and, with the data obtained from the laboratory the relationship of growth of imbibition interfaces is determined in the paper, produced by a fluid (composed by Chinese ink and it dilutes), being obtained an equation that describes the growth of the areas moistened in the paper.

Experimental procedure.

The experiments presented in this work were carried out with filter paper of open pores because it is an economic and convenient material for their easiness of manipulation in the laboratory in order to get the scaling of the interfaces moistened for an only paper size (20x50cm) during the time that the imbibitions lasts. For it, a wooden device is used, the one that the paper test tube is held and this is introduced in a transparent camera of isolation to control the humidity and the temperature, like it is shown in the Figure 1.

Once placed the test tube on the frame, the inferior part of the test tube is put in the recipient that contains the compound fluid by Chinese ink and water (in a relationship 3:1, respectively). The temperature and the percentage of humidity are constants, until the imbibition stops. Later the percentage of humidity is increased and again the imbibitions process begins, its increment is captured with a photographic camera every two minutes until the imbibition again stops.

In all the carried out tests, the solution of Chinese ink with water is absorbed by the paper, so that it is formed a rough interface of black color in the whole area in that the fluid penetrates, while the remaining area white; as it is observed in the Figure 2. The remaining data with which the experiments were carried out are presented in Table I.



Figure 1. Assembly of the imbibition test, where the fluid, the paper, the wooden device, the meter of temperature and humidity, recipient that contains the fluid, as well as the transparent camera of isolation are shown.

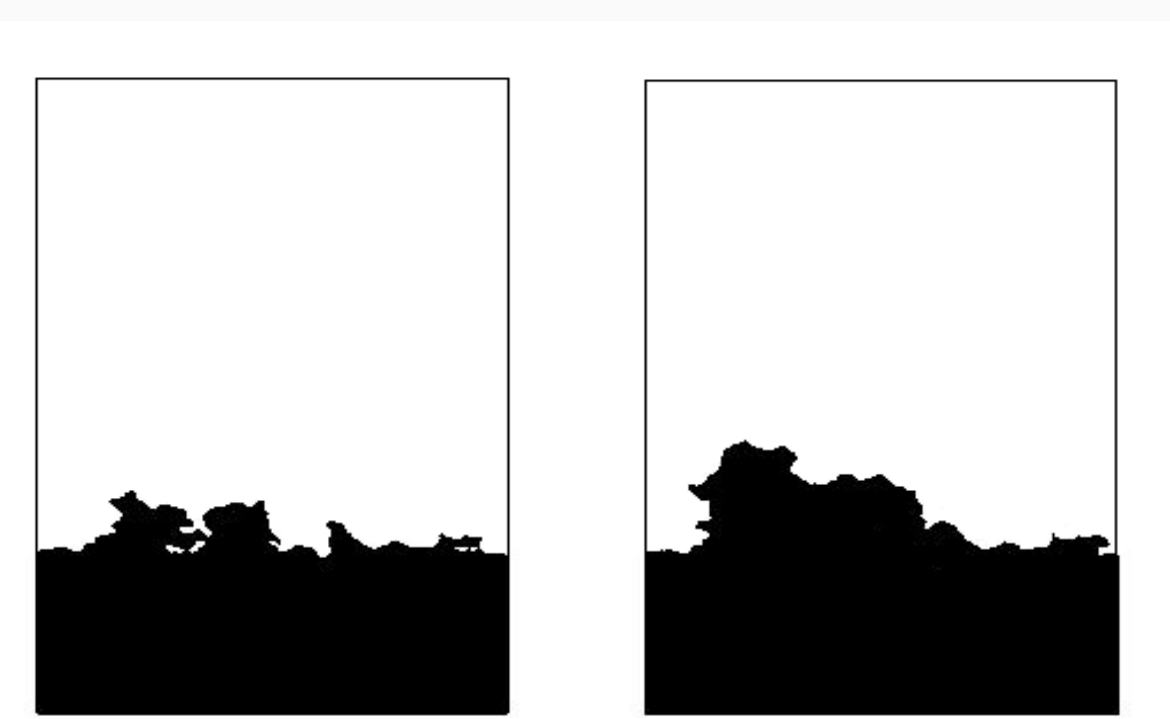


Figure 2. The imbibition of the fluid for two different times.

Table I
EXPERIMENTAL DATA.

| | |
|------------------------|---------|
| Initial humidity | 33 % |
| Final humidity | 58 % |
| Increment of humidity | 25 % |
| Time of imbibition | 120 min |
| Interval of interfaces | 02 min |

Results and discussions.

In this work, the area of each imbibition interface was studied in a paper monitored with pictures taken at one time T , that it was varying from $t_0=2$ until 120 with an increment of time of $\Delta t=2$.

The area of each one of the interfaces was determined with the trapezium rule $A=(y_1+y_2)/2*(x_2-x_1)$. In order to obtain the areas; first, it was carried out a digital treatment of the images using a program developed in Matlab [2], to obtain each one of the points that define the boundaries of the interfaces, like it is shown in the Figure 2, and; second, all the data obtained in Matlab were processed in the calculation leaf Excel [3, 4] to visualize each one of the areas of the interfaces graphically (like it is illustrated in the Figure 3 and Figure 4) and later their respective areas were determined.

Acknowledgments.

This work has been financed by the National Polytechnic Institute, through the project SIP-20080224 "it Influences of Small Defects in Metallic Structures"

The areas of the whole imbibition test are shown in Table II, they have a potential relationship of growth, like it is shown in the Figure 4, their correlation is of 99 percent, with the following scaling relationship the behavior of the interface areas is described in the filter paper,

$$A = 3738.3I^{0.7648} \quad (1)$$

Where A is the area in square pixels; I , is the interface number or number of pictures captured during the time T , that the imbibition lasts.

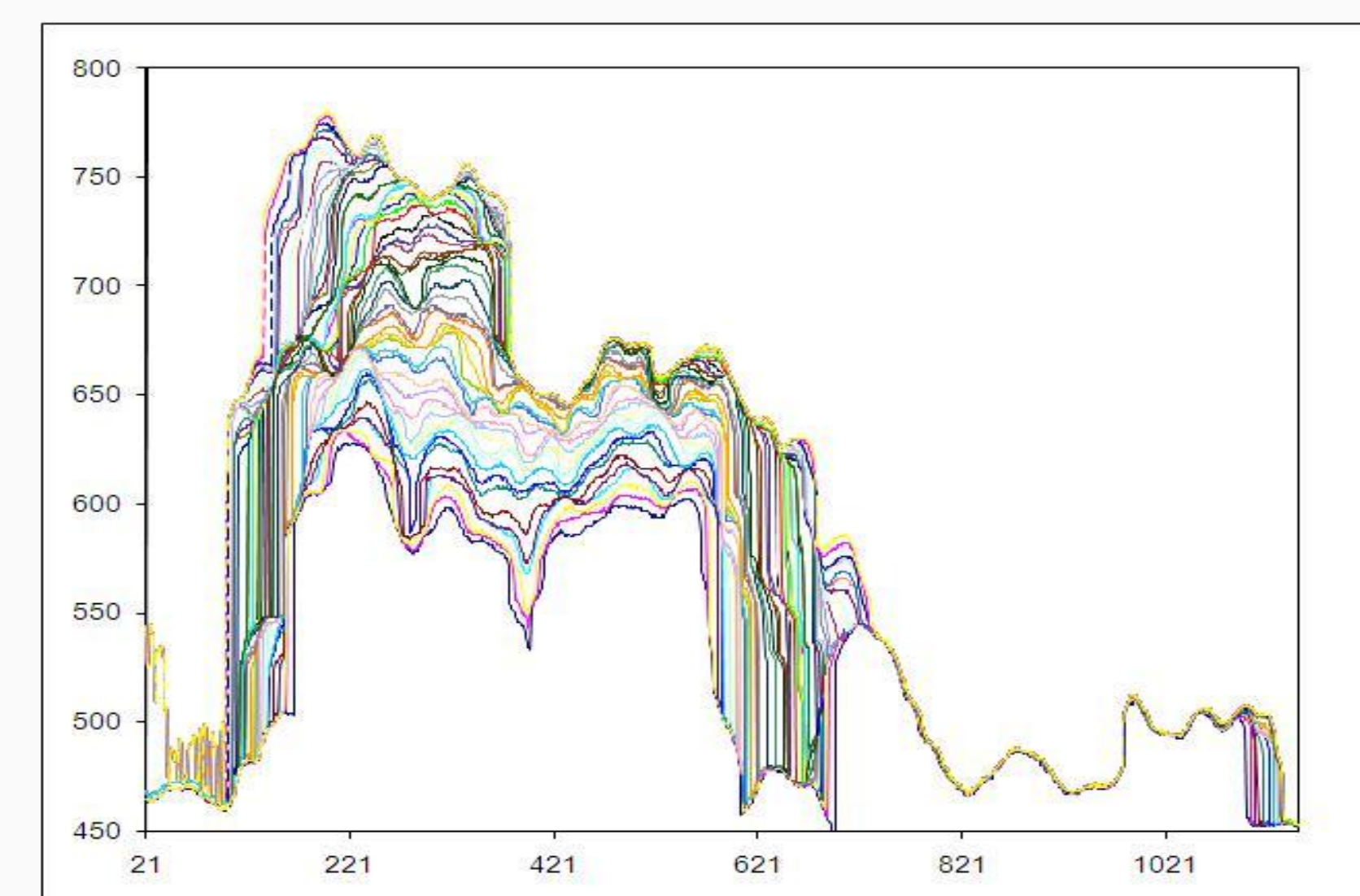


Figure 3. Areas obtained in the laboratory test.

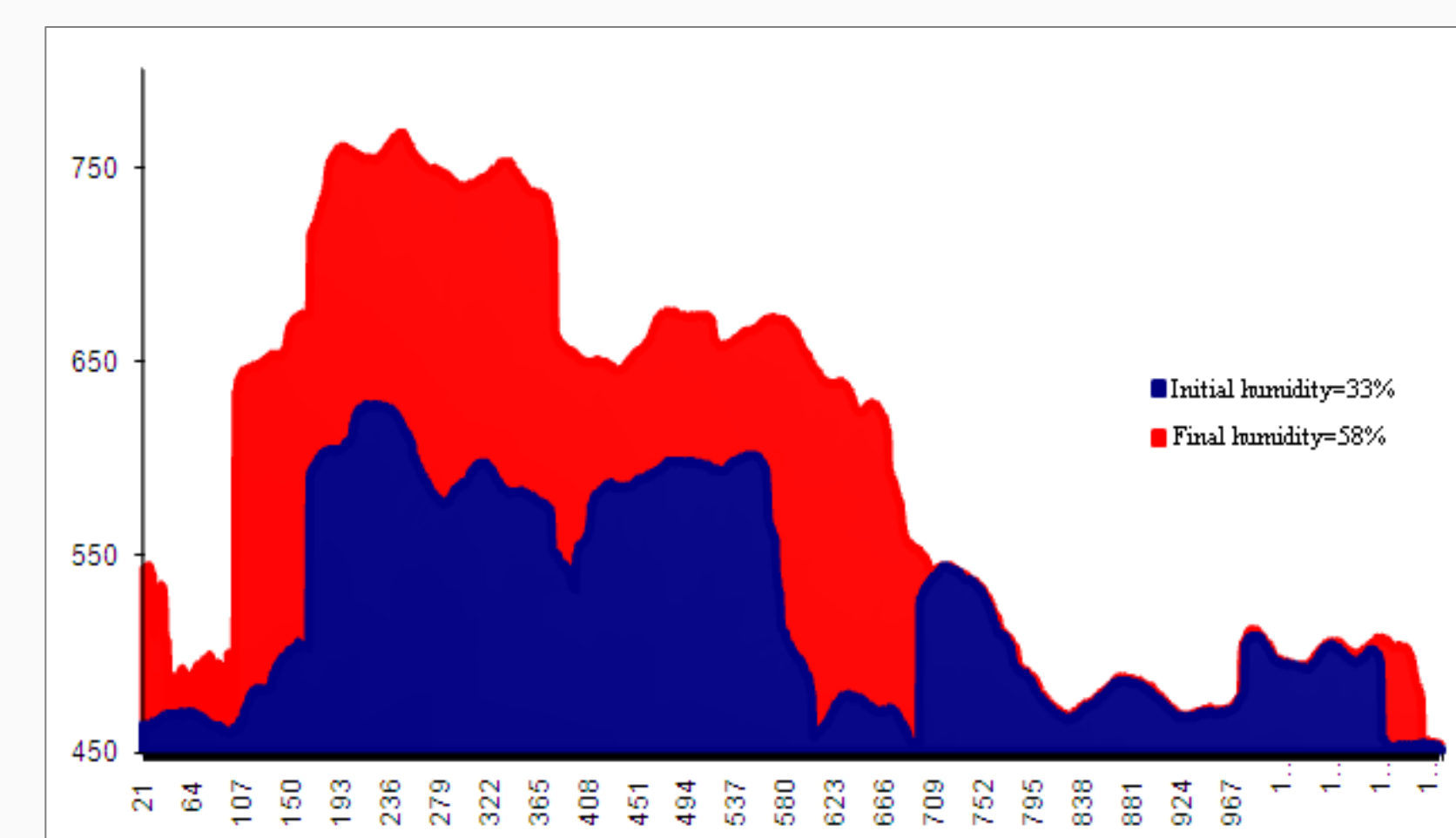


Figure 4. Areas of two different interfaces.

Table II
DATA OF 21 AREA INCREMENTS.

| Interface | Area | Interface | Area | Interface | Area |
|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|
| 1 | 3530 | 8 | 18570 | 15 | 28850 |
| 2 | 6080 | 9 | 19480 | 16 | 32720 |
| 3 | 7800 | 10 | 22960 | 17 | 31490 |
| 4 | 11760 | 11 | 25600 | 18 | 35490 |
| 5 | 11100 | 12 | 25290 | 19 | 35330 |
| 6 | 14240 | 13 | 26380 | 20 | 37660 |
| 7 | 20580 | 14 | 26870 | 21 | 36630 |

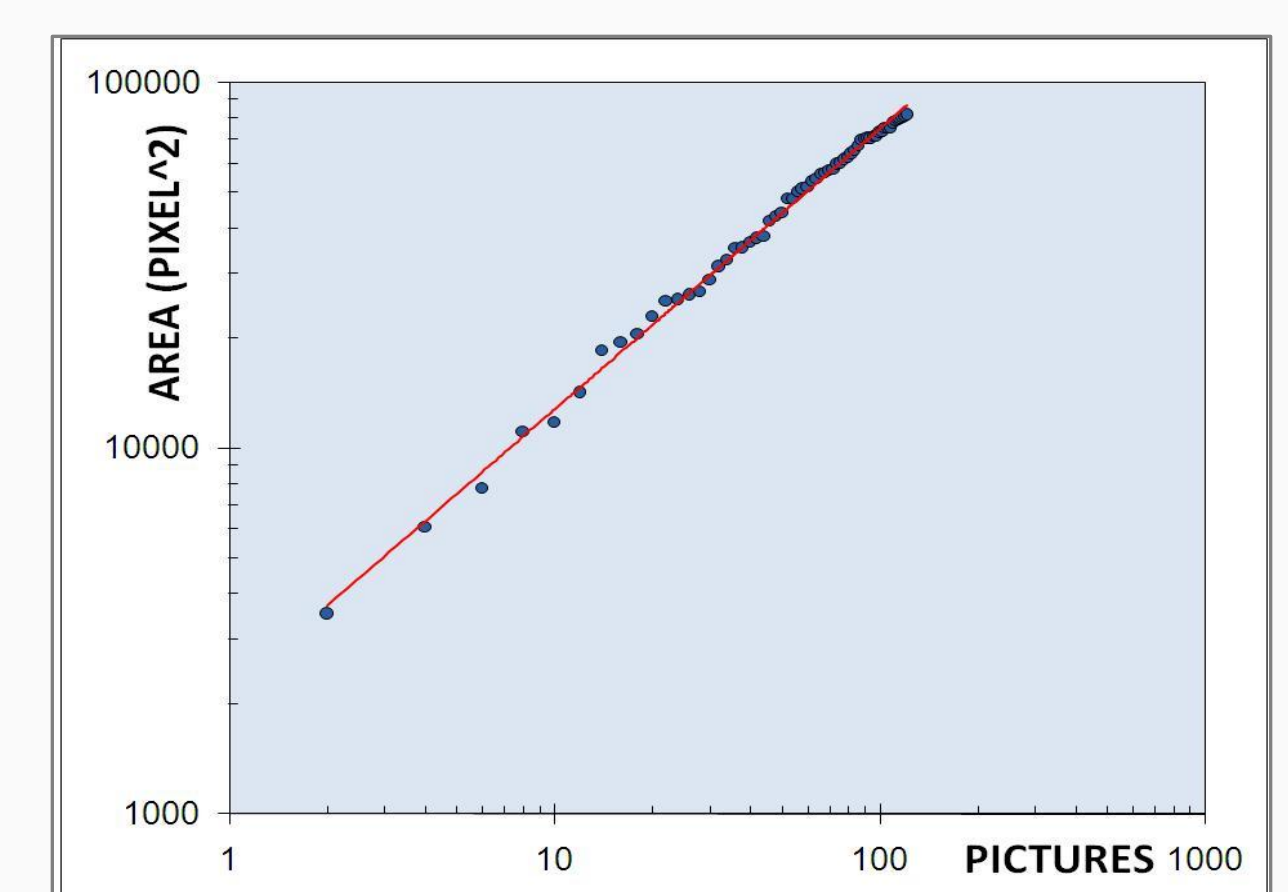


Figure 5. Relationship of the imbibition area increment for each interface.

Conclusions.

With the results obtained in each experiment, a relationship of the area growth of the area of potential type was obtained as it is shown in the Figure 5, described by the Equation (1) where it is clear that the area increases potentially as the interface number increases, that means that the imbibition area is bigger, when the time is bigger. The area depends directly on time.

For future works, in the experiments another variable could be introduced, to determine the areas of the interfaces so that they are in function of time and the humidity percentage increment $A=f(T,\Delta H)$ where A , it is the area, T , the imbibition time and ΔH , the different increment percentages of humidity in each experiment.

References.

- [1] A. Medina, J. A. Cordova y R. Martínez-Angeles, *Imbibición en papel*, Ciencia Ergo Sum, noviembre 1999, volumen 6, número 3. Universidad Autónoma del Estado de México.
- [2] R. C. Gonzalez, "Digital Image Processing Using Matlab", Prentice Hall, 2003.
- [3] E. J. Joseph Billo, "Excel for Scientists and Engineers: Numerical Methods", Wiley Interscience, 2007.
- [4] E. J. Walkenbeach, "Excel 2003 Power Programing with VBA", Wiley Publishing, 2004.

Velocity of Imbibition in Filter Paper

Janis Zapata Lopez¹, E. Pineda¹, D. Samayoa¹, M. Patiño¹, E. I. García O¹, and S. Matías¹

¹Instituto Politécnico Nacional. SEPI-ESIME U.P. Adolfo López Mateos, Zacatenco. México D.F. 07738. México, janis_zapata@hotmail.com, epinedal@ipn.mx, dsamayoa@ipn.mx, mpatinio2002@ipn.mx, eigarciao@ipn.mx, smatias@ipn.mx,

Abstract. *The imbibition growth of a fluid as a function of time and humidity in porous medium by using filter paper is presented in this work. The self-affine interface behavior formed in paper wetting experiments are monitored by taking pictures. The data were obtained from experimental tests. These tests were carried out with paper specimens of 20cm x 40cm. The fluid was made up of water and Chinese ink in relation 3:1 with different initial humidity until the capillarity, gravity and the evaporation reached the equilibrium. Once the humidity is increased the previous equilibrium brakes and these parameters reach the new equilibrium with time. The area growth characterization of every interface is reported in this paper.*

Keywords — **Imbibition, porous medium, interface and areas.**

Introduction.

The motion of water in ground, the circulation of fluids in the plants or the flow of oil in porous rocks, is a physical mechanism of penetration in a porous medium which is known as imbibition, this happens when the fluid that wets more to the porous medium displaces the other one. The dynamics and statistical topography of interfaces formed from the equilibrium processes, such as wetting and fracture, have been a recurrent subject of research as well as a relevant topic in fractal theory (Family and Vicsek [1], Barabási and Stanley [2], Balankin, A.S., and Susarrey [3]). Numerous experimental observations suggest that, although the morphology of a growing interface depends on the mechanism of its formation, the dynamic behavior and statistical properties of different interfaces share some universal scaling features (Family and Vicsek [1], López *et al.* [4]). In this way, interface dynamics are commonly analyzed in terms of the power law asymptotic behavior of average parameters (Family and Vicsek [1]). In this work we perform a detailed study of the spatial-temporal behavior of interfaces growing in paper-wetting experiments. The equation that describes the growth of the wet areas in the paper is obtained.

Experimental procedure.

The experiments presented in this work were carried out in filter paper of open pores due its economy and easy manipulation in order to get the behavior of the interfaces moistened for the paper size of (20x40cm) during the imbibition time. For this experiment, a wooden frame is used to hold the paper test tube which is introduced in a transparent camera of isolation to control the humidity and temperature, as it is shown in the Figure 1.

Once placed the filter paper on the frame, the lower part is put into the recipient that contains the compound fluid by Chinese ink and water (in a relationship 3:1, respectively). The temperature and percentage of humidity are constants, until the imbibition stops. The humidity is increased and the imbibition process continues. Its increment is captured with a photographic camera every two minutes until the interface completely stops.

In all the carried out tests, the Chinese ink and water solution is absorbed by the paper. Due this a rough interface of black color in the whole area is formed, while the remaining area is white; as it is observed in the Figure 2. The remaining data obtained from the experiments are presented in Table I.



Figure 1. Device of the imbibition test, where the recipient with the fluid, the filter paper, the wooden frame, the humidity meter and the isolation chamber are shown.

| | |
|-------------------------------|---------------|
| Initial Humidity | 54% |
| Final Humidity | 90% |
| Increment of Humidity | 26% |
| Time of Imbibition | 90 min |
| Interval of Interfaces | 02 min |

(a).- Laboratory Test 1

| | |
|-------------------------------|----------------|
| Initial Humidity | 43% |
| Final Humidity | 65% |
| Increment of Humidity | 22% |
| Time of Imbibition | 125 min |
| Interval of Interfaces | 02 min |

(b).- Laboratory Test 2

| | |
|-------------------------------|----------------|
| Initial Humidity | 36% |
| Final Humidity | 66% |
| Increment of Humidity | 30% |
| Time of Imbibition | 150 min |
| Interval of Interfaces | 02 min |

(c).- Laboratory Test 3

Table I. - Increment of humidity and time for three laboratory tests.

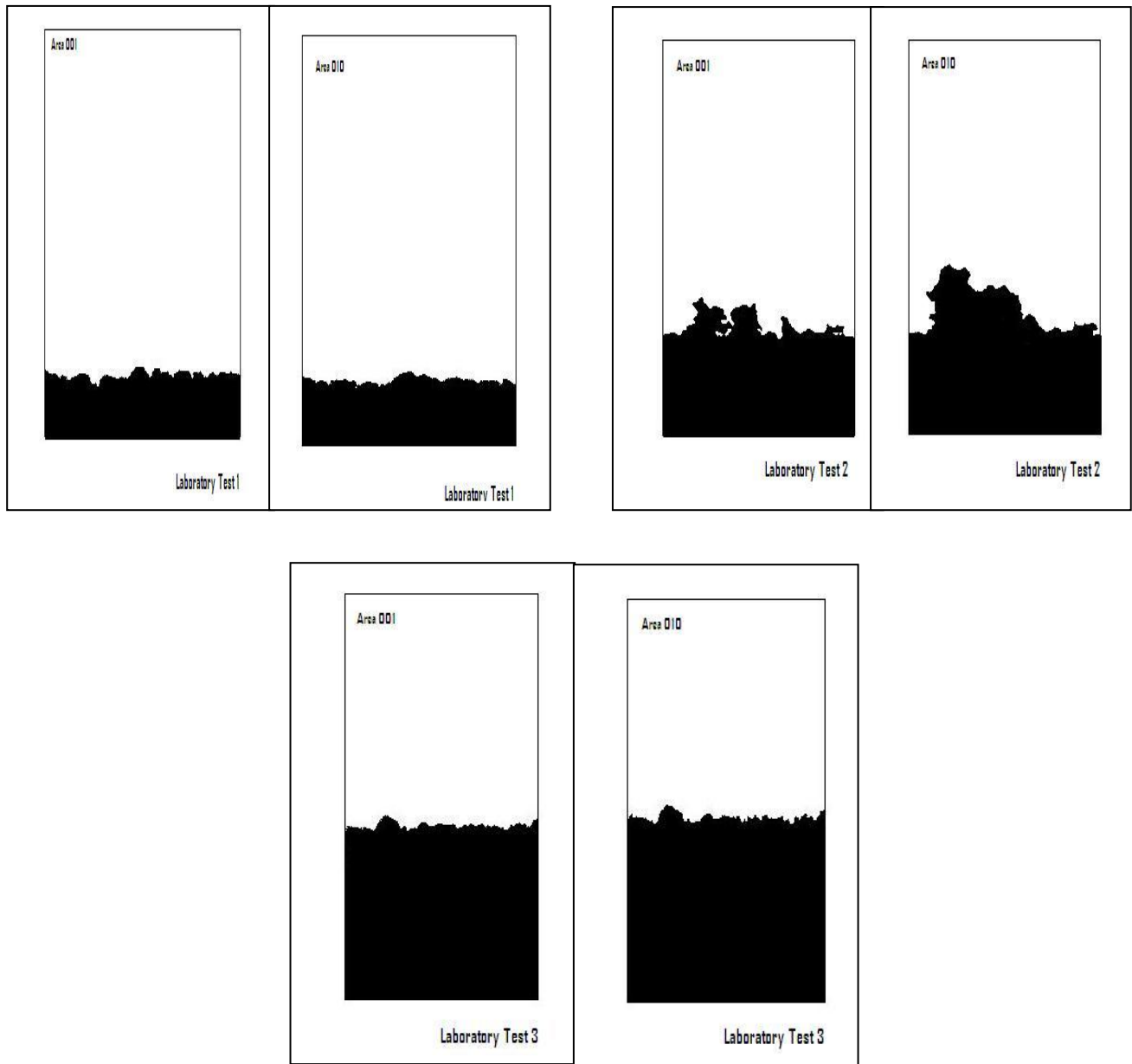


Figure 2. The growing interface for two increments of time of three tests.

Results and discussions.

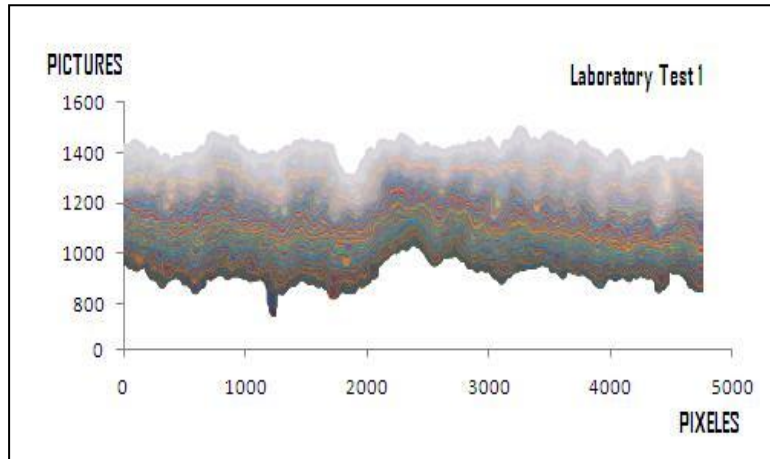
In this work, the area for every interface taken by pictures during a specific interval of time for three tests was obtained. This time was varying from $t_0 = 2$ seconds until 90 with a time increment $\Delta t = 2$ in the test1; for next test the time was from $t_0 = 2$ until 125 with the same increment of time of $\Delta t = 2$ and the last test it was from $t_0 = 2$ until 150 with the same increment.

The area of each interface was determined by the trapezium rule $A = (y_1 + y_2) / 2 * (x_2 - x_1)$, In order to obtain the areas; first, a digital treatment of the images using a program developed in Matlab [5] was carried out. After that the coordinates of the points that define the boundaries of the interfaces were calculated, like it is shown in the Figure 2. All the data obtained in the Matlab software were processed in the Excel program [6, 7], to visualize graphically each interface area (as it is shown in Figure 3 and Figure 4) and later their respective areas were computed.

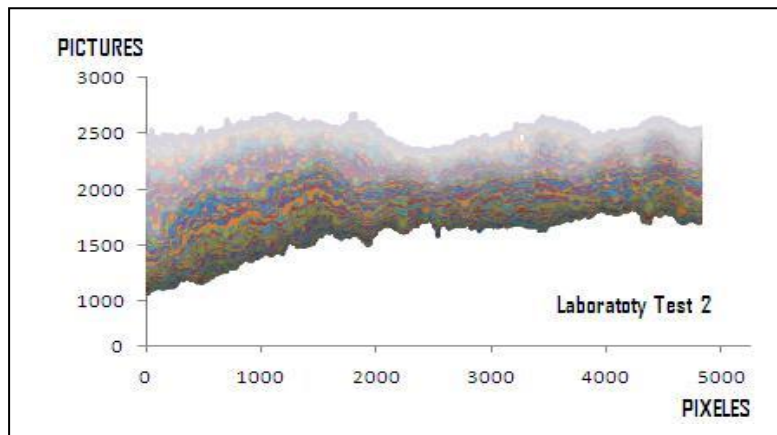
The areas of the whole imbibition tests are shown in Table II. They have a growing potential relationship and their correlation is of 99 percent. The behavior of the interface areas is shown in figure 4 and is described in the filter paper with the following scaling relationship,

$$A = 3738.3I^{0.7648} \tag{1}$$

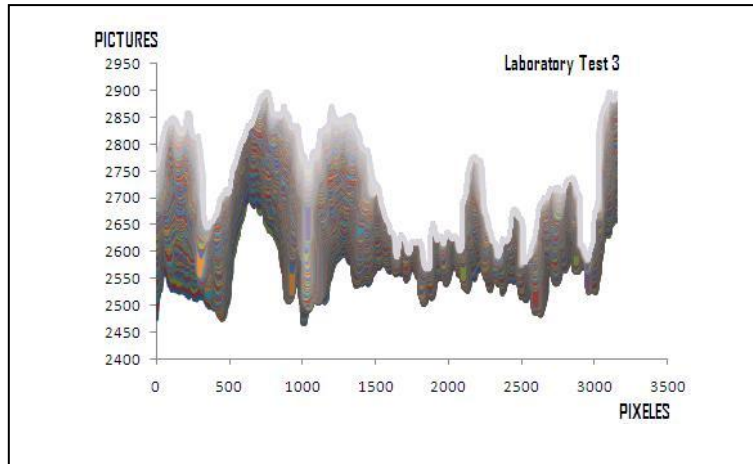
Where A is the area in square pixels, I is the interface number or number of pictures captured during the interval of time T .



a).-test 1



a).-test 2



a).-test 3

Figure 3. Growing interfaces for three laboratory tests with variable humidity.

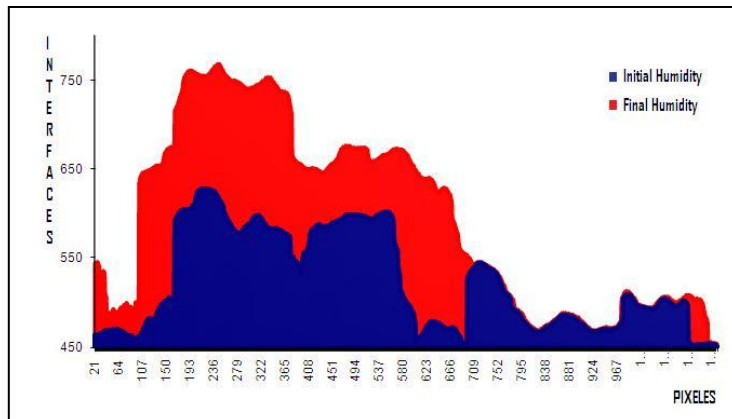


Figure 4. - Behavior of growing areas for the first and last interface of a test.

| Interface | Area (pixels) ² |
|-----------|----------------------------|
| 1 | 4260000 |
| 2 | 4365700 |
| 3 | 4374400 |
| 4 | 4384100 |
| 5 | 4394300 |
| 6 | 4401500 |
| 7 | 4414300 |
| 8 | 4414600 |
| 9 | 4433200 |
| 10 | 4433500 |

(a).- Areas for test 1.

| Interface | Area (pixels) ² |
|-----------|----------------------------|
| 1 | 7503600 |
| 2 | 7522000 |
| 3 | 7556500 |
| 4 | 7583200 |
| 5 | 7603000 |
| 6 | 7633400 |
| 7 | 7664200 |
| 8 | 7705700 |
| 9 | 7717600 |
| 10 | 7744300 |

(b).- Areas for test 2.

| Interface | Area (pixels) ² |
|-----------|----------------------------|
| 1 | 8068700 |
| 2 | 8093400 |
| 3 | 8103000 |
| 4 | 8111500 |
| 5 | 8125465 |
| 6 | 8135200 |
| 7 | 8147100 |
| 8 | 8153500 |
| 9 | 8154200 |
| 10 | 8164100 |

(c).- Areas for test 3.

Table II. - Results for 10 interfaces for three laboratory tests in square pixels.

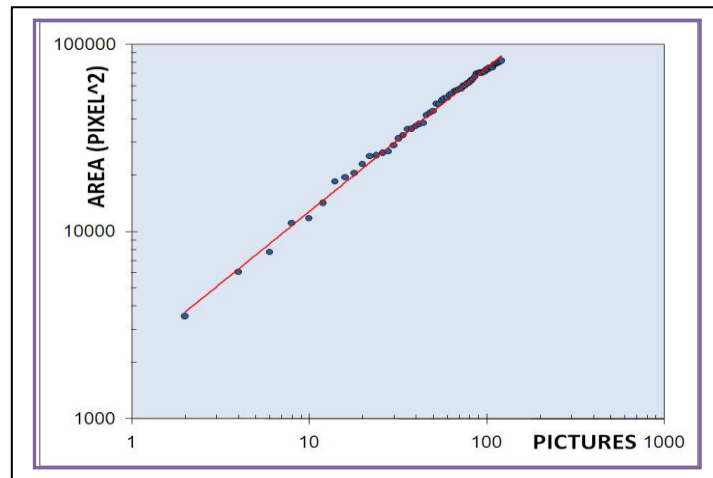


Figure 5. Increment of area for three tests.

Conclusions.

With the results obtained in each experiment, a relationship of the potential area growth, as it is shown in the Figure 5, was obtained. This behavior is represented in Equation (1) where it is clear that the area increases potentially as the interface number increases, which means that the imbibition area is bigger, when the time is increased. The growing area depends on time.

For future works, in the experiments another variable could be introduced, to determine the areas of the interfaces so that they are in function of time and the humidity percentage increment $A=f(T, \Delta H)$ where A , it is the area, T , the imbibition time and ΔH , the different increment percentages of humidity in each experiment.

References.

- [1] Family, F, and Viscek, T., (1991), *Dynamics of Fractal Surface* (Singapore: World Scientific).
- [2] Barabá, A. L., and Stanley, H. E., (1994), *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press).
- [3] Balankin, A. S., and Susarrey, O., (1999), *Phil. Mag. Lett.*, 79, 629.
- [4] López, J. M., Rodríguez, M. A., and Cuerno, R., (1997), *Phys. Rev. E*, 56, 3993.
- [5] R. C. Gonzalez, (2003), “*Digital Image Processing Using Matlab*”, Prentice Hall.
- [6] E. J. Joseph Billo, (2007) “*Excel for Scientistis and Enginneers: Numerical Methods*”, Wiley Intercience.
- [7] E. J. Walkenbeach, (2004), “*Excel 2003 Power Programing with VBA*”, Wiley Publishing.

The Boundary Element Method Applied To Visco-Plastic Analysis

E. Pineda¹, M.H. Aliabadi², and J. Zapata¹

¹Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Adolfo López Mateos s/n, México D.F.
epinedal@ipn.mx, janis_zapata@hotmail.com,

²Department of Aeronautical Engineering, Imperial College London, South Kensington
campus, London SW7 2AZ, m.h.alibadi@imperial.ac.uk

Key Words: *Boundary Element, Fracture Mechanics, Visco-plasticity.*

Abstract: This paper presents a new formulation of the Dual Boundary Element Method to visco-plastic problems in a two-dimensional analysis. Visco-plastic stresses and strains around the crack tip are obtained until the visco-plastic strain rate reaches the steady state condition. A perfect visco-plastic analysis is also carried out in linear strain hardening ($H' = 0$) materials. Part of the domain, the part that is susceptible to yield is discretized into quadratic, quadrilateral continuous cells. The loads are used to demonstrate time effects in the analysis carried out. Numerical results are compared with solution obtained from the Finite Element Method (FEM).

Introduction

In the case of inelastic fracture mechanic problems and in problems with high temperature gradients where inelastic strain rates are proportional to high power of stress, regions with strain rate concentration provide nearly all the inelastic contribution to the stress rates [1]. The main reason for the success of the BEM (boundary element method) in fracture mechanics applications is the ability to model high stress concentration fields accurately and efficiently. A comprehensive review of the historic development of the BEM for fracture mechanics can be found in the work of Aliabadi [2]. One of the early efforts in solving non-elastic fracture mechanics problems by using BEM was made by Morjaria and Mukherjee [3] and Banthia and Mukherjee [4] where they used a crack Green's function to model the crack and obtain solution for the time-dependent stress field which was developed near the crack tip in finite plates. An alternative methodology based on the use of the Kelvin fundamental solutions was presented in [5], [6] and [7]. Recently, the DBEM (dual boundary element method) has been developed as a very effective numerical tool to model general fracture problems with numerous applications to linear elastic and non-elastic fracture problems [8].

BEM has been applied to elastoplastic problems since the early seventies with the work of Swedlow and Cruse [9] and Richardella [10] who implemented the von Mises criterion for 2D problems using piecewise constant interpolation for the plastic strains. Later, Telles and Brebbia [11] and others had, by the beginning of the eighties, developed and implemented BEM formulations for 2D and 3D inelastic, visco-plastic and elastoplastic problems (see [12] for further details).

In recent years, Aliabadi and co-workers [13] have introduced a new generation of boundary element method for solution of fracture mechanics problems. The method which was originally proposed for linear elastic problems [14],[15] and [16] has since been extended to many other fields

including problems involving nonlinear material and geometric behaviour [17]. Applications of boundary element methods in the field of dynamic of elasticity in cracked media can be seen in [21-25].

In the present paper applications of the DBEM to visco-plasticity are presented. The specimens analyzed are a square plate and a plate with a hole, both of them with different crack length. The boundary was discretized with quadratic continuous and semi-discontinuous elements, but the domain with nine nodes internal cells. In visco-plasticity only the part susceptible to yielding was discretized. The Von Mises yield criterion was applied so the material used for this sort of analysis was metals.

Boundary Integral Formulation for Visco-plasticity

In the visco-plastic analysis like plasticity, the initial strain approach will be applied and the integral equation to calculate the displacement on the boundary is basically the same, the only difference is that the plastic strain is replaced with the visco-plastic strain rate. So the displacement equation can be rewritten as:

$$c_{ij}(x')\dot{u}_j(x') + \int_{\Gamma} t'_{ij}(x', x)\dot{u}_i(x')d\Gamma = \int_{\Gamma} u'_{ij}(x', x)t_j(x')d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma'_{ij}(x', z)\epsilon^{vp}_{ij}(z)d\Omega \quad (1)$$

Where \dot{u}_i , t_i and ϵ^{vp}_{ij} are the displacement, traction and visco-plastic strain rates respectively. t'_{ij} , u'_{ij} and σ'_{ij} are the displacement, traction and third order fundamental solutions, respectively, which are functions of the positions of the collocation point x' and the field point x which belong to the boundary, or the internal point z and the material properties.

The Dual Boundary Integral Equations

The Displacement Equation

If the displacement integral equation (1) is collocated on the upper crack surface and the free term for a smooth boundary $C_{ij} = 1/2$ is considered, the displacement integral equation can be rewritten as

$$\frac{1}{2}\dot{u}_j(x'_+) + \frac{1}{2}\dot{u}_j(x'_-) + -\int_{\Gamma} t'_{ij}(x'_+, x)\dot{u}_i(x')d\Gamma = \int_{\Gamma} u'_{ij}(x'_+, x)t_j(x)d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma'_{ijk}(x', z)\epsilon^{vp}_{jk}(z)d\Omega \quad (2)$$

where x'_+ and x'_- belong to the upper and the lower crack surfaces respectively.

The Traction Equation

From the definition of tractions followed by the application of Hooke's law and through the differentiation of the displacement boundary integral equation it is possible to define the time-dependent traction equation as

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{p}_j(x'_-) - \frac{1}{2} \dot{p}_j(x'_+) &= n_i(x^-) - \int_{\Gamma} D'_{ijk}(x'_-, x) \dot{t}_j(x) d\Gamma - n_i(x^-) = \int_{\Gamma} S'_{ijk}(x'_-, x) \dot{u}_j(x) d\Gamma \\ &+ \left[- \int_{\Omega} \Sigma'_{ijk}(x'_-, z) \varepsilon_{jk}^{vp}(x) d\Omega + \frac{1}{2} f_{ij}(\varepsilon_{jk}^{vp}(z)) \right] n_i(z) \end{aligned} \quad (3)$$

Where $\dot{\sigma}_{ij}$ denotes the components of the derivative of the stresses with respect to the time, \dot{t}_i the traction rate and n_j the components of the normal vector to the boundary.

Equation (3) represents the traction boundary equation for a lower crack surface see [26].

Basic Concepts of Visco-Plasticity

In order to explain the theory of visco-plasticity it is convenient to analyze the one-dimensional rheological model see [26] for more details. A uniaxial yield stress σ_y governs the onset of the visco-plastic deformation. Once visco-plasticity begins the stress level for continuing visco-plastic flow depends on the strain hardening characteristics of the material ($H' \neq 0$).

After applying Hook's law and boundary conditions, it is possible to obtain:

$$\varepsilon^{vp} = \gamma [\sigma - (\sigma_y + H' \varepsilon^{vp})] \quad (4)$$

Expression (4) is the visco-plastic strain rate in terms of the stresses for the uniaxial case in which $(.)$ denotes the derivative with respect to the time, t .

From the visco-plastic model see [26] the strain response with time can be represented by two cases. The first case is the perfectly visco-plastic material in which $H' = 0$. In this case the visco-plastic deformation continues at a constant strain rate.

The second case is the linear hardening case ($H' \neq 0$), where after the initial elastic response, the *visco-plastic strain rate* is exponential and reaches the *steady state condition* when this value becomes zero. On the other hand, for a perfectly visco-plastic material there is always an imbalance of stress $\sigma_a - \sigma_y$ in the system which does not reduce and consequently the steady state condition can not be achieved.

Benchmark Problems

Centre Cracked Plate

A centre cracked tension standard specimen is considered in this example. The boundary of the problem is discretized with 44 quadratic boundary elements and the domain with 84 interior quadratic cells. Visco-plastic behaviour and plane stress analysis was assumed and a constant load of 250.09 MPa. The geometry and boundary conditions are shown in figure 1, where $W = 25.4 \text{ mm}$, $H = 35.6 \text{ mm}$ and $a = 6.492 \text{ mm}$. Because of the symmetry it is not necessary to model the whole plate so half of the model is used in the analysis since we can obtain the same results.

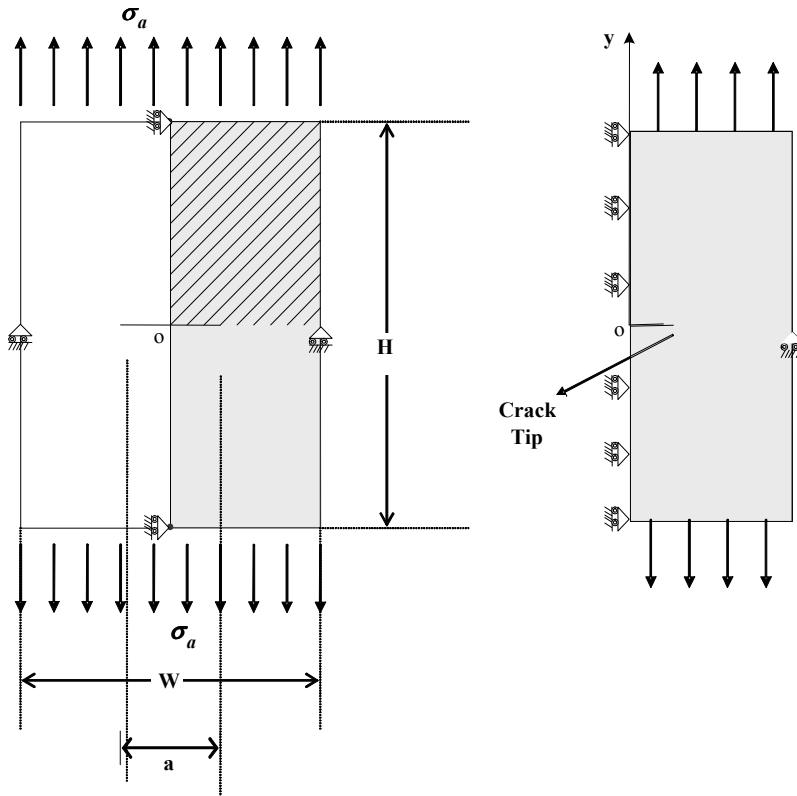


Figure 1. Geometry and boundary conditions for a centre cracked plate.

The material properties are

- Young's modulus, $E = 181200 \text{ MPa}$;
- Poisson's ratio, $\nu = 0.3$;
- Yield stress , $\sigma_y = 895.9 \text{ MPa}$. ;
- Applied stress $\sigma_a = 250.29 \text{ MPa}$.
- Visco-plastic coefficient $\gamma_p = 0.045$

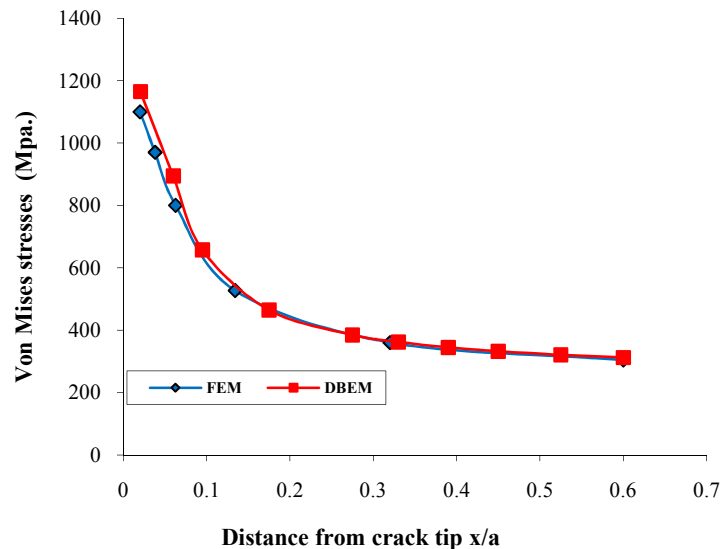


Figure 2. Von Misses Stresses for a centre cracked plate.

The stress profiles showed in figure 2, shows a plot of the equivalent stress or Von Mises stress against the distance from the crack tip x/a . It is clear to see from this figure that the maximum stresses are located close to the crack tip where a visco-plastic zone is developed here. The tolerance applied in this case was 0.001 and the initial time step was $\Delta t = 0.01$. The results were compared to the FEM calculated in ANSYS and it was found the biggest percentage relative of error is 4.5%. Near to the crack tip there is a critical zone where the stresses are very high, here the difference of the stresses are more susceptible of changing. Due this it is possible to have more variation for small x/a relations.

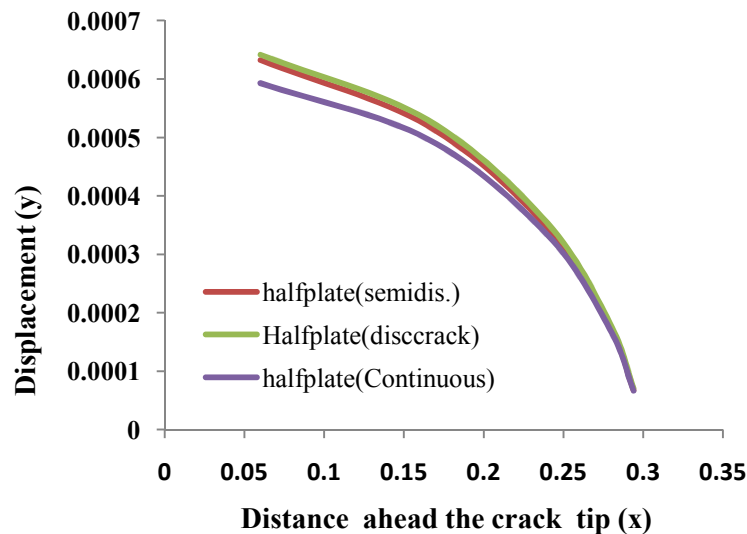


Figure 3. Displacements for a centre cracked plate ahead the crack tip. Here the crack tip is considered as the origin, so every distance in x direction in figure 3 is measured from the crack tip to the right hand side.

Figure 3 shows the comparison of the displacements for a centre cracked plate by using: discontinuous boundary elements on the crack, the rest continuous and semi discontinuous boundary elements. It is clear to see the converged solution for the different sort of elements.

Plate with a hole

A perforated tension specimen with geometry and boundary conditions as illustrated in figure 4, was analyzed in this example. Plane stress condition was assumed here.

The plate has these dimensions:

- Wide $w = 10$ mm
- High $H = 36$ mm
- Crack length $a = 0.3$ mm

The material selected is an aluminum alloy with the following properties:

- Young's modulus, $E=7000 \frac{N}{mm^2}$;
- Poisson's ratio, $\nu = 0.2$;
- Hardening coefficient $H' = 0$ (perfectly visco-plastic)
- Yield stress , $\sigma_y = 24.3 \frac{N}{mm^2}$;
- Applied stress $\sigma_a = 4.3 \frac{N}{mm^2}$;
- Visco-plastic coefficient $\gamma_p = 0.01$

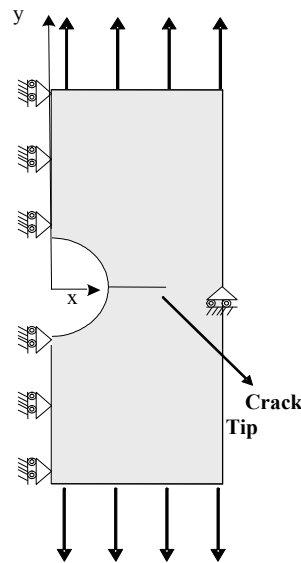


Figure 4.-Geometry and boundary conditions for a plate with hole and centred crack

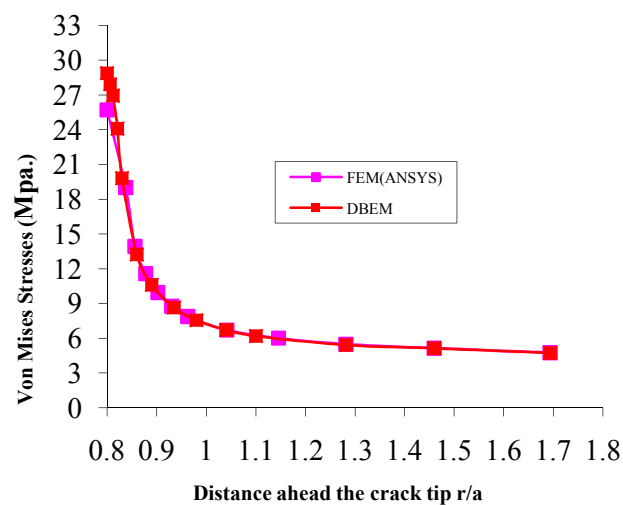


Figure 5. Von Misses stresses for a plate with a hole and centre cracked.

Figure 5 shows the results for a von Misses stress distribution ahead the crack tip against the distance from the crack tip r/a . Around the crack tip the stresses start to converge to the yield stress

which is logical for a perfectly visco-plastic case. It is clear that the highest stresses are around the crack tip and that the stresses start to decrease in proportion to the distance from the crack tip. This particular behavior is due to the critical zone that is located around the crack tip.

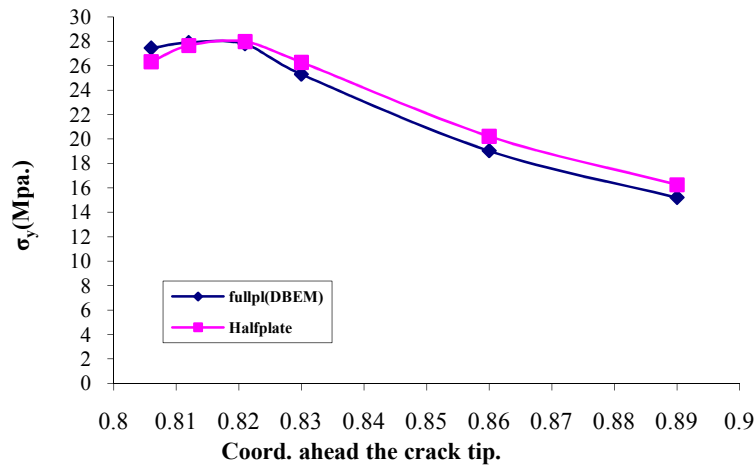


Figure 6.- Stresses in y direction for a half and full plate.

Results for stresses ahead the crack tip are shown in figure 6. The geometry, boundary conditions and material properties are the same as above but in this case the applied stress is $\sigma_a = 9.5$ Mpa. It is clear the stresses near to the crack tip are high and then decrease.

Conclusions

In this paper the DBEM was applied to the analysis of non-elastic crack problems in fracture mechanics. It has been demonstrated here that this method is an accurate and efficient method for modeling crack problems. The analysis is general and can be applied to mixed mode cracks in non-linear fracture mechanics problems. The displacement and traction boundary integral equation used are independent and allow for the analysis of general non-elastic mixed mode crack problems in a single region formulation. In the case of the traction equation continuity of strains is required at the collocation node to guarantee the existence of the finite part integrals. Since this discontinuous boundary elements have to be used on the crack faces. The visco-plastic behaviour is represented by a plastic strain field over a region, susceptible to yield, discretized with quadrilateral quadratic continuous and discontinuous internal cells.

REFERENCES

- [1] Providakis, C.P., Visco-plastic BEM Fracture Analysis of Creeping Metallic Cracked Structures in Plane Stress using Complex Variable Technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 707-720, (2003).
- [2] Aliabadi, M.H., Boundary Element Methods in Fracture Mechanics. *Appl Mech Rev*, 50, 83-96, (1997).
- [3] Morjaria, M., and Mukherjee, S., Numerical Analysis of Planar, Time-Dependent inelastic Deformation of Plates with Cracks by the Boundary Element Method, *Int. J. Solids Structures*, 17, 127-143, (1981).

- [4] Bantia V., and Mukherjee, S., On Stress and Line Integrals in the Presence of Cracks, *Research Mechanica*, 15, 151-158, (1982).
- [5] Tan, C.L., Lee, K.H. Elastic-Plastic Stress Analysis of a Cracked thick-walled Cylinder, *Journal of Strain Analysis*, 50-57, (1983).
- [6] Yong, L., and Guo, W.G., The calculation of J_I Integrals of Thick-Walled Tubes with One and Two Symmetric Cracks by Elastoplastic BEM, *Int. J. Pres. Ves. & Pipping*, 51, 143-154, (1992).
- [7] Hantschel T., Busch, M., Kuna, M., and Maschke, H.G., Solution of Elastic-Plastic Crack Problems by an Advanced Boundary Element Method, in *Proceedings of the 5th. International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, A.R.. Luxmoore and D.R.J. Owen, Eds., pp. 29-40, (1990).
- [8] Leitão, V., An Improved Boundary Element Formulation for Nonlinear Fracture Mechanics I, PhD *Thesis*, Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth, (1993).
- [9] Swedlow, J. L. and Cruse, T. A. Formulation of the boundary integral equation for three-dimensional elastoplastic flow, *International Journal of Solids and Structures*, 7, 1673-1681 (1971).
- [10] Riccardella, P. *An Implementation of the Boundary Integral Technique for plane problems of Elasticity and Elastoplasticity*, PhD Thesis, Carnegie Mellon University, Pitsburg, PA (1973).
- [11] Telles, J. C. F., and Brebbia, C.A. Elastic/visco-plastic Problems using Boundary Elements, *International Journal of Mechanical Sciences*, 24, 605-618, (1982).
- [12] Aliabadi, M.H., *The Boundary Element Method. Applications in Solids and Structures. Vol. 2.* John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex, England (2002).
- [13] Aliabadi, M.H. A new generation of boundary element methods in fracture mechanics, *International Journal of Fracture*, 86, 91-125, (1997).
- [14] Aliabadi, M.H. and Portela, A. Dual boundary element incremental analysis of crack growth in rotating disc. *Boundary Element Technology VII*, Computational Mechanics Publications, Southampton, 607-616, (1992).
- [15] Portela, A. Aliabadi, M.H., and Rooke, D.P., Dual Boundary Element Incremental Analysis of Crack propagation. *Computers & Structures*, 46, 237-247, (1993).
- [16] Mi, Y., Aliabadi, M.H., Dual Boundary Element Method for Three-Dimensional Fracture Mechanics Analysis, *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, 10, 161-171, (1992).
- [17] Chao Y.J., Zhu, X.K., and Zhang, L., Higher-Order Asymptotic Crack-Tip fields in a power-law Creeping material, *International Journal of Solids and Structures*, 38, (2001).
- [18] Cisilino, A.P. and Aliabadi, M.H., Three-dimensional BEM Analysis for Fatigue Crack Growth in Welded Components, *International Journal for Pressure Vessel and Piping*, 70, 135-144, (1997).

- [19] Cisilino, A.P., Aliabadi, M.H. and Otegui, J.L., A Three-dimensional Element Formulation for the Elasto-Plastic analysis of Cracked Bodies, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42, 237-256, (1998).
- [20] Hutchinson, J.W., Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 13-31, (1968).
- [21] A. Rodríguez-Castellanos, F. Luzón and F.J. Sánchez-Sesma: Diffraction of seismic waves in an elastic cracked half-plane using a Boundary Integral Formulation. *Soil Dynam. and Earthq. Enging.*, 25 (2005), p. 827-837.
- [22] A. Rodríguez-Castellanos, F.J. Sánchez-Sesma, F. Luzón and R. Martin: Multiple scattering of elastic waves by subsurface fractures and cavities, *Bull. Seis. Soc. of Am.*, 96 (2006), p. 1359-1374.
- [23] A. Rodríguez-Castellanos, R. Avila-Carrera and F.J. Sánchez-Sesma: Scattering of Rayleigh-waves by surface-breaking cracks: an integral formulation, *Geofísica Internacional*, 46 (2007), p. 241-248.
- [24] A. Rodríguez-Castellanos, R. Avila-Carrera and F.J. Sánchez-Sesma: Scattering of elastic waves by shallow elliptical cracks, *Revista Mexicana de Física*, 53 (2007), p. 254-259.
- [25] R. Avila-Carrera, A. Rodríguez-Castellanos, F.J. Sánchez-Sesma and C. Ortiz-Alemán: Rayleigh-wave scattering by shallow cracks using the indirect boundary element method, *J. Geophys. Eng.*, 6 (2009), p. 221–230. doi:10.1088/1742-2132/6/3/002.
- [26] Pineda, E., Dual Boundary Element Analysis for Creep Fracture, *Ph. D. Thesis*, Queen Mary College, University of London, (2005).