

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA
MÉCANICA Y ELÉCTRICA

Movimiento tipo Creep de frentes mojados en medios granulares bajo vibraciones débiles

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta

Edgar Israel García Otamendi

Directores de Tesis

Dr. Alexander Balankin
Dr. Didier Samayoa Ochoa





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

SIP-14

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 18:00 horas del día 2 del mes de Marzo del 2011 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E. S. I. M. E. para examinar la tesis titulada:

**“MOVIMIENTO TIPO CREEP DE FRENTE MOJADOS EN MEDIOS GRANULARES
BAJO VIBRACIONES DÉBILES”.**

Presentada por el alumno:

GARCÍA

Apellido paterno

OTAMENDI

Apellido materno

EDGAR ISRAEL

Nombre(s)

Con registro:

A	0	7	0	4	4	4
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA

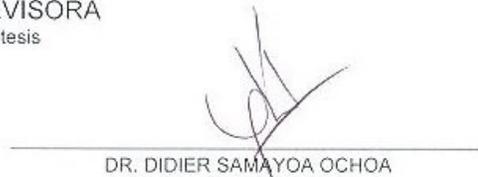
Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

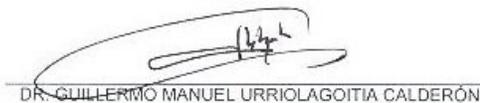
Directores de tesis


DR. ALEXANDER BALANKIN

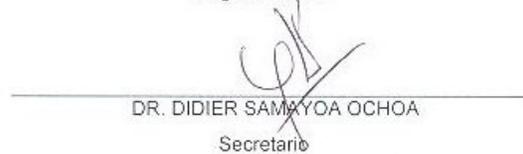
Presidente


DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA

Segundo Vocal


DR. GUILLERMO MANUEL URRIOLAGOITIA CALDERÓN

Tercer Vocal

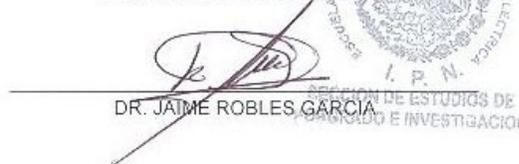

DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA

Secretario


DR. ERNESTO PINEDA LEÓN


DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO


DR. JAIME ROBLES GARCÍA



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
COORDINACIÓN GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de México, Distrito Federal, el día 14 del mes de marzo del año 2011, el que suscribe Edgar Israel García Otamendi, alumno del programa de Doctorado en Ciencias en Ingeniería Mecánica con número de registro A070444, adscrito a la sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección del Dr. Alexander Balankin y el Dr. Didier Samayoa Ochoa, cede los derechos del trabajo de tesis: "Movimiento tipo Creep de frentes mojados en medios granulares bajo vibraciones débiles", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben de reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o directores del trabajo.

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



M. en C. Edgar Israel García Otamendi

Índice general

Dedicatorias	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Índice de figuras	V
1. Introducción	1
1.1. Justificación	2
1.2. Objetivos	3
2. Flujo de fluidos en medios porosos	4
2.1. Ecuaciones clásicas sobre el estudio de fluidos	5
2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	5
2.1.2. Derivada sustancial ó material	6
2.1.3. Teorema del Transporte de Reynolds	7
2.1.4. Fluidos no viscosos	7
2.1.5. Fluido no-newtoniano	8
2.1.6. Número de Reynolds	8
2.1.7. El principio de Bernoulli	10
2.1.8. Ecuación de Darcy-Weisbach	11
2.1.9. Ecuación de Starling	11
2.1.10. El teorema de Torricelli	12
2.1.11. Caudal descargado	13
2.2. Imbibición	14
3. Conceptos de escalamiento	18
3.1. Rugosidad	18
3.2. Escalamiento dinámico	20
3.3. Autosimilaridad	21
3.4. Fractal	22
3.4.1. Dimensión	22
3.5. Procesos de Hurst	25
3.5.1. Coeficiente o Exponente Hurst	25
3.5.2. Determinación del Coeficiente Hurst, Metodología	27
3.5.3. Prueba de significancia del coeficiente de Hurst	28
3.5.4. Valores del Coeficiente Hurst	28

3.5.5. Procesos de Hurst	29
4. Transición de fijación	32
4.1. Interfases en un medio desordenado.	33
4.2. Fijación por percolación directa	34
5. Creep	38
5.1. Creep de los metales	38
5.2. El Creep como un proceso de fusión controlado	40
6. Estado del Arte	42
7. Procedimiento experimental	46
8. Análisis y discusión de resultados.	49
9. Conclusiones	55
Referencias	56
Anexos	60

Dedicatorias

A *Frida e Itzel*.

Por ser mi norte y mi sur, mi este y mi oeste,
mi semana de trabajo y mi descanso dominical,
mi día y mi noche, mi charla y mi música.

A *Marina* mi madre, por su amor y apoyo.

A *mi Padre y Hermano* Por siempre estar y por ser siempre.

Agradecimientos

Al *Instituto Politécnico Nacional* por ser mi casa de estudios. A *CONACYT* por la beca otorgada en mis estudios de Doctorado. A *COMECYT* por la beca otorgada para la conclusión de este trabajo de tesis.

Al *Dr. Alexander Balankin* y al *Dr. Didier Samayoa Ochoa* por su dirección y apoyo en la elaboración de esta tesis.

A los amigos que de una u otra forma aportaron a este trabajo de tesis.

Resumen

En este trabajo estudiamos el fenómeno del Creep asociado con fluctuaciones temporales no termales en sistemas que obedecen a la termodinámica de Edward en experimentos de imbibición en medios granulares; observamos que inicialmente los frentes mojados fijos, se mueven con una velocidad casi constante, y cuando pequeñas vibraciones son aplicadas, se presenta un movimiento tipo creep, el cual es atribuido a fluctuaciones de densidad de empaquetado de medios granulares con pequeñas vibraciones. Se establece la dependencia de la velocidad del Creep " v_{cr} " con aceleración de vibración de amplitud G , esta obedece a la relación de la ley de Arrhenius en el caso del Creep termal. El exponente de Hurst es determinado además de la dinámica de la formación de los frentes mojados en el medio granular.

Abstract

We study the creep phenomena associated with non-thermal, temporal fluctuations in systems obeying the Edward's thermodynamics. In imbibition experiments with granular media, we have observed that initially pinned wetting fronts move with an almost constant mean velocity v_{cr} when small vibrations are applied. This creep motion is attributed to the packing density fluctuations in weakly vibrated granular media. The dependence of v_{cr} on the vibration acceleration amplitude G obeys the relation reminiscent of the Arrhenius law in the case of thermal creep. The Hurst exponent is determined in addition to the dynamics of the formation of fronts in wet granular media

Índice de figuras

2.1.	Ejemplo de imbibición, frente de tinta negra absorbida dentro de toallas de papel .	14
2.2.	Ángulo de contacto entre un fluido y superficie solida de mojado	15
3.1.	Crecimiento del ancho de interfase	18
3.2.	Tiempo de evolución de el ancho de superficie	20
3.3.	Esquema de reescalamiento para la rugosidad dependiente del tiempo.	21
3.4.	Curva de Koch	24
4.1.	Transición de fijación de una partícula	32
4.2.	Representación esquematica de una interfase en un medio aleatorio	33
4.3.	La velocidad de movimiento de interfase como función de la fuerza motriz F	34
4.4.	Modelo DPD para el crecimiento de una interfase	35
4.5.	Se muestra con línea negrita, la trayectoria de fijación se ha formado las celdas bloqueadas con sus vecinos más cercanos y sus próximos vecinos más cercanos para fijar la interfase[108].	36
5.1.	Etapas del fenómeno del Creep	39
7.1.	Dispositivo de vibración por desblanceo	46
7.2.	Esquema del montaje experimental	47
7.3.	Imágenes del proceso de experimentación	48
8.1.	a)Fotografía del frente mojado, b) Grafica de 50 fotos digitalizadas de frentes mojados bajo vibraciones en medios granulares	50
8.2.	Configuraciones $h(x, t)$ usadas para el análisis de los frentes mojados $G=0.84$	51
8.3.	Ejemplo de avance intermitente de los frentes mojados bajo vibraciones debiles con $G = 0.84$ en medio granular	52
8.4.	Graficas de $\Delta = \langle z(x, t) - z(x, 0) \rangle$ vs tiempo para cinco valores de la aceleración gravitacional $G = 0.84$ (1), 0.87 (2), 0.88 (3), 0.9 (4) y 0.91 (5)	53
8.5.	Comportamiento tipo Washburn para configuraciones $h(x, t)$ sin efectos de vibración	54

Capítulo 1

Introducción

Los fluidos en medios porosos son de gran importancia en diversos problemas de interés social o industrial, como son la extracción de petróleo o gas, el control o distribución de las aguas subterráneas, la hidráulica de los diques, los problemas de contaminación o tratamiento de residuos y la construcción de filtros de diversos usos. La descripción del flujo en un medio poroso, es por tanto, un ejercicio apremiante. Desde 1856, cuando Henry Darcy estudio la red de abastecimiento de agua para la ciudad francesa de Dijon, donde también se tenía que diseñar filtros de arena para purificar el agua. Darcy, se interesó por los factores que influían en el flujo de agua a través de los materiales arenosos, y presentó el resultado de sus trabajos como un apéndice a su informe de la red de distribución. Ese apéndice fue la base de los estudios físico - matemáticos posteriores sobre el flujo de aguas subterráneas y otros fluidos que fluyen a través de medios porosos. La ley ha sido ampliada posteriormente para el estudio de diversas situaciones donde se involucra la teoría de filtración

Es común y nunca resulta un caso extraordinario la observación de fenómenos de flujo de fluidos en medios porosos, el derramar un vaso con agua o café sobre el mantel de la mesa, la lluvia al caer sobre la vestimenta, los derrames petroleros en grandes extensiones de rocas o arrecifes. Todos estos fenómenos se pueden reproducir en el laboratorio con experimentos que idealizan dichos fenómenos y a partir de estos, extender los resultados a otro tipo de materiales. Barabási [1] expone una serie de experimentos que han sido diseñados para ampliar el entendimiento de algunas ideas teóricas de la dinámica de interfaces.

La relevancia y urgencia de mejorar nuestra comprensión de fenómenos de flujo en medios porosos a fin de optimizar el diseño de procesos actuales y proponer nuevos procesos no está en duda. Flujo en medios porosos ocurre en prácticamente todas las aplicaciones industriales y también en el medio ambiente natural. Aplicaciones importantes incluyen la explotación de gas y petróleo; migración de contaminantes y fertilizantes en suelos; lixiviación de minerales; secado de madera, papel, alimentos; preparación de catalizadores y materiales cerámicos; procesos de separación con catalizadores, membranas, filtros, columnas empacadas; diseño de cementos y hormigones. [2]

Es entonces de particular interés la morfología de las interfaces ya formadas, pero resulta aún más interesante la dinámica del como la morfología se desarrolla en el tiempo. Algunas superficies son formadas como un proceso de deposición, otras se encogen o graban por la erosión. Algunas interfaces se propagan a través de medios no homogéneos y un interesante conjunto de preguntas conciernen a la formación, crecimiento y dinámica de tales procesos.

El presente trabajo se estructura en 9 capítulos. El segundo capítulo está dedicado a revisar las ecuaciones clásicas de flujo de fluidos. El tercer capítulo presenta detalles de los conceptos de

escalamiento así como su relación con la teoría fractal. El cuarto y quinto capítulo introducen la transición de fijado y el fenómeno del creep, que son el objeto de nuestro estudio. El capítulo seis, revisa la literatura sobre los artículos publicados respecto al fenómeno que es de nuestro interés. El capítulo 7 muestra a detalle el procedimiento experimental empleado en este trabajo. Por último los capítulos ocho y nueve; presentan el análisis de los resultados y las conclusiones que se obtuvieron de la investigación.

1.1. Justificación

La imbibición espontánea ha sido objeto de estudio y tiene relevancia en numerosas aplicaciones industriales, en particular la imbibición espontánea y sus propiedades es un fenómeno de gran interés en estudios sobre recuperación de petróleo. El uso de ondas ultrasónicas para generar vibración y mejorar la recuperación de petróleo se ha abordado en numerosos artículos (ver estado del arte, capítulo 6), sin embargo dichos estudios no se abordan desde el punto de vista de la interfases que aparecen en muchos fenómenos naturales. Por otra parte los medios granulares se encuentran compuestos por partículas macroscópicas que interactúan mutuamente por medio de fuerzas de contacto. El tamaño de los granos varía desde las décimas de milímetro de los polvos hasta los centímetros o metros en las aplicaciones industriales o estudios geológicos. Los mecanismos de disipación de energía incluyen la deformación o rotura de pequeñas irregularidades en el medio granular. Dichos medios presentan gran variedad de comportamientos en función de las fuerzas que se les apliquen. Así, en un reloj de arena podemos ver el material fluir del depósito superior al inferior de una forma que nos recuerda mucho a como fluye un líquido. La arena se deposita en la parte inferior del reloj formando una pila cónica que mantiene un ángulo aproximadamente constante, de manera que lo que nos parece un fluido se comporta ahora como un sólido. En ausencia de gravedad o en las capas superiores de un depósito agitado verticalmente, los granos se comportan de forma similar a las partículas de un gas de moléculas, con la salvedad de que las colisiones son disipativas. Tal comportamiento de los medios granulares y la adición de fluido, da paso a la formación de interfases rugosas desordenadas, el crecimiento de interfaces rugosas bajo condiciones de no-equilibrio es un fenómeno muy común en la naturaleza. Ejemplos de tales procesos incluyen la difusión, el quemado, el crecimiento de grietas, fraguado de materiales granulares y flujo de fluidos en medios porosos. Varias observaciones experimentales y simulaciones en computadoras de estos procesos sugieren que aunque la morfología de una interfase en crecimiento depende del mecanismo de su formación, el comportamiento dinámico y la topografía estadística de diferentes interfases comparten algunos aspectos de escalamiento universal. Experimentos y observaciones realmente sugieren que muchos sistemas físicos desarrollan espontáneamente correlaciones con el comportamiento de leyes de potencia en el espacio y el tiempo.

Estos sistemas, con muchos grados de libertad, generalmente son tan complejos que su comportamiento en escalas grandes no se puede predecir a partir de la dinámica a escala microscópica. Surgen, entonces, nuevos tipos de comportamientos colectivos y su comprensión representa una de las áreas más desafiantes en la física estadística moderna. La rugosidad de interfaces en crecimiento es solo uno de los campos en los cuales la invarianza en escala se ha observado como una característica común y básica.

La invarianza en escala dinámica de las interfaces en crecimiento, los eventos y la información sobre un amplio intervalo de escalas de longitud y tiempo, se presenta de tal manera que no importa cual es el tamaño de la escala considerado siempre se observa sorprendentemente en una riqueza en estructuras. La dinámica de interfases, frentes mojados en medios granulares, que es el objeto de estudio de este trabajo, como se ha sugerido en varios estudios [ver capítulo 6 y las referencias en el] se ha observado una mejora en la percolación (imbibición, difusión, etc.) de los fluidos al excitar el medio (granular); en este sentido el fenómeno del creep aparece precisamente bajo la influencia de agentes externos que influyen sobre el medio. El creep, se presenta en muchas aplicaciones donde los componentes se ven obligados a soportar cargas constantes durante lapsos prolongados, como por ejemplo alabes de rotor de turbina, filamento de tubos y válvulas, cables de acero, etc. En tales

circunstancias el material puede continuar deformándose hasta que su utilidad se ve seriamente perjudicada. Tales tipos de deformaciones dependientes del tiempo pueden ser casi imperceptibles, pero crecen durante toda la vida útil de la pieza y llevan a la fractura, aun sin que la carga haya aumentado. Con cargas aplicadas por corto tiempo, como en un ensayo de tracción estático, hay una deformación inicial que aumenta simultáneamente con la carga. Si, bajo cualquier circunstancia, la deformación continua mientras la carga se mantiene constante, a esta deformación adicional se le conoce como Creep. Debido a su estrecha conexión con altas temperaturas en aplicaciones importantes, se suele asociar al creep con problemas vinculados con temperaturas elevadas [ver capítulo 5 y las referencias en el] Sin embargo estudios recientes han descrito el fenómeno del creep como un proceso no necesariamente térmico [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Además de esto asociado a medios granulares, y procesos de imbibición que no han sido completamente entendidos, sumado a las herramientas que provee la teoría fractal y la termodinámica de Edward [9] que asocia los preceptos de la termodinámica clásica a conceptos mecánicos, además de los estudios sobre medios granulares. En este trabajo estudiaremos el fenómeno tipo creep de frentes mojados en medios granulares bajo la influencia de vibraciones débiles.

1.2. Objetivos

Los objetivos principales de este trabajo son:

- Mostrar la presencia del fenómeno tipo creep en frentes mojados en medios granulares, esto debido a vibraciones débiles.
- Estudiar el efecto de las vibraciones del medio granular en la formación y dinámica de las interfases.
- Determinar los valores de los exponentes de rugosidad, para el fenómeno de fijado así como el creep.
- Usar la termodinámica de Edward para establecer la velocidad del creep.

Capítulo 2

Flujo de fluidos en medios porosos

Toda sustancia presenta espacios huecos, o vacíos, y espacios ocupados por materia. Aún un material muy compacto, como un metal, posee huecos entre los átomos que lo conforman. Sin embargo, sólo cuando los espacios huecos de una sustancia tienen dimensiones suficientemente grandes, y están suficientemente interconectados, como para ser invadidos por las moléculas de otras sustancias, entonces ocurren una variedad de fenómenos, los cuales son debidos precisamente a la existencia de una extensa interfase hueco-materia. En tal caso, desde el punto de vista fisicoquímico, se dice que tenemos un medio poroso [10].

Los medios porosos constituyen la gran mayoría de los materiales naturales (suelos, rocas, minerales, madera, tejido pulmonar, etc.), pero también son sintetizados artificialmente para ser utilizados en una gran variedad de procesos industriales (catálisis, almacenamiento de gases, filtrado y separación de fluidos, etc.) [10].

Como dijimos, el aspecto relevante de un medio poroso es la existencia de una importante interfase hueco-materia. Las moléculas de un fluido que invade el espacio poroso (hueco) experimentan una variedad de fenómenos fisicoquímicos, entre los cuales están los "procesos capilares" debidos a fuerzas interatómicas no compensadas. Los procesos capilares son aquéllos procesos en los que dos o más fluidos o fases compiten por la posesión del espacio poroso, cuando las fuerzas de adhesión y capilares son dominantes. [10]

Los procesos capilares condicionan una gran variedad de fenómenos naturales y de operaciones industriales. Específicamente involucran a procesos fisicoquímicos tales como: el mojado y secado tanto en suelos de cultivo como en acuíferos, en la industria química, textil o alimenticia, etc.; el flujo multifásico para la recuperación secundaria y terciaria de petróleo (desplazamiento inmisible) y en yacimientos geotérmicos (flujo de un líquido y su vapor); técnicas de porosimetría de penetración de mercurio (penetración y retracción) y; procesos de adsorción y desorción de gases (condensación y evaporación capilar); etc. [10]

Caracterizando las propiedades de un material o medio poroso, muchos procesos naturales e industriales es taran bien descritos o se harían por lo menos más eficientes debido a que se podría predecir el comportamiento real de los fenómenos capilares que ocurriesen dentro de ellos [11, 12]. Aún no es posible conocer totalmente dichas propiedades debido a que muchos medios porosos poseen estructuras caóticas y complejas difíciles de describir cuantitativamente; por lo que la descripción de su geometría es un problema formidable, ya que , por mencionar sólo un ejemplo, en la práctica es la propia estructura la responsable de contrarrestar la tendencia natural de los fluidos a seguir trayectorias con un mínimo de resistencia hidráulica en los procesos de transporte [13].

Históricamente, se han realizado análisis a fenómenos de flujo de fluidos en medios porosos, Darcy establece su ley que relaciona en forma lineal las dos magnitudes fundamentales de flujo, la velocidad, $u = u(x, t)$, y la caída de presión, $p(x, t)$ según la formula

$$u = -\frac{k}{\mu}\nabla(p + \rho gz) \quad (2.1)$$

Aquí $x = (x, y, z)$ es la posición, z es la coordenada vertical, ∇ es el operador gradiente espacial, g es la aceleración de la gravedad, ρ es la densidad, aquí supuesta constante, μ es la viscosidad dinámica, una magnitud típica de cada fluido viscoso. Por el contrario, k es un nuevo parámetro físico, típico del medio poroso, llamado *coeficiente de permeabilidad* del medio, en general se piensa en el suelo pero también puede ser un filtro artificial. Esta ley se ha establecido para fenómenos como, flujos incompresibles y compresibles en medios porosos, filtraciones en diques, filtraciones en el suelo, filtraciones de dos fluidos inmiscibles [14].

2.1. Ecuaciones clásicas sobre el estudio de fluidos

2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

La simulación de fenómenos de flujo en materiales porosos es difícil debido a la compleja naturaleza de la geometría y topología de su espacio y la heterogeneidad en la composición química de sus paredes internas. Para un fluido incompresible, el flujo a escala de segmentos de poro obedece las ecuaciones de Navier-Stokes (Tritton 1988, Bear 1972).

La ecuación de Navier Stokes, es la ley fundamental que describe la dinámica de los fluidos viscosos i.e. los más usados, los fluidos newtonianos y junto con las leyes de conservación de masa y de conservación de la energía y de estado, sí el fluido es compresible permite describir su movimiento a partir de unas condiciones iniciales y de contorno determinadas. Esta ley se aplica a una enorme variedad de situaciones prácticas de fluidos reales. Sin embargo no es de aplicación inmediata para describir la dinámica de los fluidos que discurren a través de medios porosos, pues el fluido avanza por los huecos que deja la estructura o matriz sólida y es preciso tener en cuenta la muy compleja geometría y la resistencia ofrecida por la estructura. Las ecuaciones reciben su nombre de Claude Louis Navier y George Gabriel Stokes. Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones gobiernan la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en el que se involucren fluidos newtonianos.

Estas ecuaciones se obtienen aplicando los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido. Haciendo esto se obtiene la llamada formulación integral de las ecuaciones. Para llegar a su formulación diferencial se manipulan aplicando ciertas consideraciones, principalmente aquella en la que los esfuerzos tangenciales guardan una relación lineal con el gradiente de velocidad (ley de viscosidad de Newton), obteniendo de esta manera la formulación diferencial que generalmente es más útil para la resolución de los problemas que se plantean en la mecánica de fluidos.

No se dispone de una solución general para este conjunto de ecuaciones, y salvo ciertos tipos de flujo y situaciones muy concretas no es posible hallar una solución analítica; por lo que en muchas ocasiones se debe recurrir al análisis numérico para determinar una solución aproximada. A la rama de la mecánica de fluidos que se ocupa de la obtención de estas soluciones mediante el ordenador se le denomina dinámica de fluidos computacional [16]

Las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [2\mu(e_{ij} - \Delta\delta_{ij}/3)] \quad (2.2)$$

Esta expresión representa el principio de conservación del momento lineal aplicada a un fluido general. La ley de conservación de la masa se escribe como:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

En estas ecuaciones representa la densidad, $u_i = 1, 2, 3 \dots$ las componentes cartesianas de la velocidad, las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo, como la gravedad, P la presión del fluido, y μ la viscosidad dinámica.

$$e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Donde, $\Delta \delta_{ij}$ es la divergencia del fluido y δ_{ij} la delta de Kronecker. Es la derivada total o derivada material siguiendo el fluido:

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (v \nabla)(\cdot) \quad (2.5)$$

La no-linealidad de las ecuaciones se debe precisamente al término relacionado con la derivada total. Cuando μ es uniforme sobre todo el fluido las ecuaciones de fluido se simplifican de la manera siguiente:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

2.1.2. Derivada sustancial ó material

Debido a que generalmente adoptamos la descripción Euleriana ordinaria ya no representa toda la variación por unidad de tiempo de una determinada propiedad del fluido siguiendo a la partícula fluida. Esto se debe al movimiento del fluido. Para reflejar esta variación usaremos la derivada sustancial (o derivada siguiendo a la partícula fluida). La derivada sustancial o derivada material se define como el operador [16]:

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (v \nabla)(\cdot) \quad (2.7)$$

Donde es v la velocidad del fluido. El primer término representa la variación de la propiedad en un punto fijo del espacio y por ello se la denomina derivada local, mientras que el segundo representa la variación de la propiedad asociado al cambio de posición de la partícula fluida, y se la denomina derivada convectiva. Este es el procedimiento que sigue José de Echegarai para demostrar la derivada material. Véase una demostración de cómo llegar a una derivada material. Tomando las coordenadas de Euler como:

$$v = v_x(x, y, z, t)\hat{i} + v_y(x, y, z, t)\hat{j} + v_z(x, y, z, t)\hat{k}$$

Calcularemos la aceleración para estas coordenadas:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

Desarrollamos cada derivada total de cada componente, así podremos seguir un desarrollo fácil de recordar:

$$\begin{aligned} \frac{Dv_x}{Dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t}\hat{k} \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t}\hat{j} \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t}\hat{k} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\hat{k} + \frac{\partial v_z}{\partial t}\hat{k} \end{aligned}$$

Si sumamos término a términos y sacamos factor común nos damos cuenta de que podemos factorizar:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial(ui + vj + wk)}{\partial t} + \left[u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right] v = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V$$

Vemos que la parte de las derivadas parciales espaciales se pueden escribir como: Si ahora sustituimos velocidad por obtenemos formalmente la expresión de la derivada material:

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (v \cdot \nabla)(\cdot)$$

2.1.3. Teorema del Transporte de Reynolds

Si la derivada sustancial permite calcular la variación de una propiedad del fluido siguiendo a una partícula fluida, el teorema del transporte de Reynolds permitirá calcular la variación de una magnitud fluida extensiva ligada a un volumen fluido. En su forma general el teorema del transporte de Reynolds se expresa como [16]:

$$\frac{d}{dt} = \int_{v_f(t)} \phi d\Omega + \int_{S_c(t)} \phi(V - V_c) \cdot n d\Omega \quad (2.8)$$

Donde, Ω , es una propiedad extensiva definida por unidad de volumen, V_f es un volumen fluido, V_c , es un volumen de control que coincide con V_f en el instante, t , la superficie de control ligada a dicho volumen, v la velocidad del fluido y V_c la velocidad de la superficie de control.

Expresado en términos coloquiales puede decirse que el teorema del transporte de Reynolds viene a decir que la variación de una propiedad extensiva en un volumen fluido, es igual a la variación de dicha propiedad en el interior de ese volumen más la cantidad de dicha propiedad que atraviesa la superficie del volumen.

El teorema de transporte de Reynolds relaciona, la derivada lagrangiana de una integral de volumen de un sistema, con una integral en derivadas Eulerianas. En otras palabras, este teorema relaciona la tasa de cambio en el tiempo de una propiedad extensiva con la generación y el flujo de la propiedad intensiva correspondiente η , una y otra relacionadas por la ecuación:

$$H = \int_V \rho \eta dV \quad (2.9)$$

La expresión general de este teorema es:

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho \eta dV \right) + \int_S \bar{U} \rho \eta \hat{n} dV \quad (2.10)$$

2.1.4. Fluidos no viscosos

Para fluidos de viscosidad nula, es decir cuando $\mu = 0$, las ecuaciones resultantes se denominan ecuaciones de Euler que se utilizan en el estudio de fluidos compresibles y en ondas de choque. Si además puede ser considerada constante (como en un líquido) [16]:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (2.11)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \quad (2.12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g z \quad (2.13)$$

y la ecuación de continuidad adquiere la forma siguiente:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

Otras consideraciones

Una importante cuestión abierta concerniente a estas ecuaciones es la determinación de si, partiendo de unas condiciones iniciales del movimiento de fluido suave y laminar, la solución de las ecuaciones para todo instante de tiempo implica también un flujo suave y laminar. Esta pregunta constituye uno de los problemas del milenio que el Instituto de Matemáticas Clay premia con 1 millón de dólares estadounidenses a quién pueda resolverlo.

2.1.5. Fluido no-newtoniano

Un fluido no newtoniano es aquél cuya viscosidad varía con la temperatura y presión, pero no con la variación. Aunque el concepto de viscosidad se usa habitualmente para caracterizar un material, puede resultar inadecuado para describir el comportamiento mecánico de algunas sustancias, en concreto, los fluidos no newtonianos. Estos fluidos se pueden caracterizar mejor mediante otras propiedades reológicas, propiedades que tienen que ver con la relación entre el esfuerzo y los tensores de tensión bajo diferentes condiciones de flujo, tales como condiciones de esfuerzo cortante oscilatorio.

2.1.6. Número de Reynolds

El número de Reynolds, es un número adimensional utilizado en mecánica de fluidos, diseño de reactores y fenómenos de transporte para caracterizar el movimiento de un fluido. Como todo número adimensional es un cociente, una comparación. En este caso es la relación entre los términos convectivos y los términos viscosos de las ecuaciones de Navier Stokes que gobiernan el movimiento de los fluidos.

Por ejemplo un flujo con un número de Reynolds alrededor de 100.000 (típico en el movimiento de una aeronave pequeña, salvo en zonas próximas a la capa límite) expresa que las fuerzas viscosas son 100.000 veces menores que las fuerzas convectivas, y por lo tanto aquellas pueden ser ignoradas. Un ejemplo del caso contrario sería un cojinete axial lubricado con un fluido y sometido a una cierta carga. En este caso el número de Reynolds es mucho menor que 1 indicando que ahora las fuerzas dominantes son las viscosas y por lo tanto las convectivas pueden despreciarse. Otro ejemplo: En el análisis del movimiento de fluidos en el interior de conductos proporciona una indicación de la pérdida de carga causada por efectos viscosos.

Además el número de Reynolds permite predecir el carácter turbulento o laminar en ciertos casos. Así por ejemplo en conductos si el número de Reynolds es menor de 2000 el flujo será laminar y si es mayor de 4000 el flujo será turbulento. El mecanismo y muchas de las razones por las cuales un flujo es laminar o turbulento es todavía hoy objeto de especulación [17].

Según otros autores:

- Para valores de $Re \leq 2000$ el flujo se mantiene estacionario y se comporta como si estuviera formado por láminas delgadas, que interactúan sólo en base a esfuerzos tangenciales, por eso a este flujo se le llama flujo laminar. El colorante introducido en el flujo se mueve siguiendo una delgada línea paralela a las paredes del tubo.
- Para valores $2000 \leq Re \leq 4000$ de la línea del colorante pierde estabilidad formando pequeñas ondulaciones variables en el tiempo, manteniéndose sin embargo delgada. Este régimen se denomina de transición.

- Para valores de $Re \geq 4000$, después de un pequeño tramo inicial con oscilaciones variables, el colorante tiende a difundirse en todo el flujo. Este régimen es llamado turbulento, es decir caracterizado por un movimiento desordenado, no estacionario y tridimensional.

Este número recibe su nombre en honor de Osborne Reynolds (1842-1912), quien lo describió en 1883. Viene dado por siguiente fórmula:

$$Re = \frac{\rho v_s D}{\mu} \quad (2.15)$$

En dinámica de fluidos, las ecuaciones de Euler son las que describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso. Su expresión corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes cuando las componentes disipativas son despreciables frente a las convectivas, esto nos lleva a las siguientes condiciones que se pueden deducir a través del análisis de magnitudes de las Navier-Stokes:

$$Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu} \gg 1 \quad (2.16)$$

Aunque habitualmente se expresan en la forma mostrada, dado que de este modo se enfatiza el hecho de que representan directamente la conservación de masa, momento y energía. Estas ecuaciones se llaman así en honor de Leonhard Euler quien las dedujo directamente de las leyes de Newton.

Expresión matemática

Aunque formalmente las ecuaciones de Euler se reducen a flujo irrotacional, en el límite de desaparición del número de Mach (es decir para números de Mach muy pequeños), esto no es útil en la práctica, debido esencialmente a que la aproximación de incompresibilidad no resta exactitud a los cálculos. La expresión diferencial de estas ecuaciones es la siguiente [15]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u)u + \nabla p = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (u(E + p)) = 0 \quad (2.19)$$

donde $E = \rho e + \rho(u^2 + v^2 + w^2)/2$ es la energía total por unidad de volumen (e es la energía interna por unidad de masa para el fluido), p es la presión, u la velocidad del fluido y ρ la densidad del fluido. La segunda ecuación incluye la divergencia de un tensor diádico y puede quedar más clara de acuerdo a la siguiente notación:

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} = 0 \quad (2.20)$$

Nótese que las ecuaciones anteriores están expresadas en forma de conservación o equilibrio, dado que con esta forma se enfatiza su origen físico (y es además en gran medida la más conveniente para la simulación computacional de la dinámica de fluidos). El componente del momento de las ecuaciones de Euler se expresa del siguiente modo:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \nabla \right) u + \nabla p = 0 \quad (2.21)$$

Aunque, esta forma oculta la conexión directa existente entre las ecuaciones de Euler y la segunda ley de Newton. En formato vectorial las ecuaciones de Euler quedan expresadas del siguiente modo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (2.22)$$

Esta forma deja más claro que F, G, H son caudales. Las ecuaciones anteriores representan por tanto la conservación de la masa, los tres componentes del momento y la energía. Hay por tanto cinco ecuaciones y seis incógnitas (ρ, u, v, w, E, p). Para cerrar el sistema se necesita una ecuación de estado; la ecuación de estado más comúnmente utilizada es la ley de los gases ideales.

Una característica muy importante de las Ecuaciones de Euler, es que debido a que proceden de una reducción de las Ecuaciones de Navier-Stokes despreciando los términos provenientes de los términos disipativos como hemos dicho al principio, estamos eliminando en las ecuaciones los términos en derivadas parciales de mayor grado: en la ecuación de la cantidad de movimiento así como y de la ecuación de la energía, estas ecuaciones no podrán cumplir con todas las condiciones de contorno naturales. En particular no cumplen con la condición de no deslizamiento en las superficies de contacto con sólidos o la condición de continuidad de la temperatura, estas discontinuidades carecen de importancia para muchas aplicaciones pero no para otras lo que conlleva a tratar en esas discontinuidades con otras ecuaciones que finalmente conllevarían a temas muy profusos dentro de esta disciplina como es la Teoría de la Capa Límite. Por último hay que decir que en flujos supersónicos se producen otras discontinuidades en estas ecuaciones como son las Ondas de Choque o las Ondas de Mach. Nótese la desigual forma para la ecuación de la energía; ver la ecuación de Rankine-Hugoniot. Los términos adicionales que contienen la expresión p (presión) pueden ser interpretados como el trabajo mecánico realizado por el fluido en un elemento de fluido por los elementos fluidos próximos que se mueven alrededor. Estos términos suman cero en un fluido incompresible. La más conocida ecuación de Bernoulli puede ser obtenida integrando la ecuación de Euler a través de una línea de corriente (líneas a las que la velocidad del fluido es tangente en cada punto) asumiendo que la densidad es constante y con una ecuación de estado adecuada.

2.1.7. El principio de Bernoulli

También denominado ecuación de Bernoulli o Trinomio de Bernoulli, describe el comportamiento de un fluido moviéndose a lo largo de una línea de corriente. Fue expuesto por Daniel Bernoulli en su obra Hidrodinámica (1738) y expresa que en un fluido ideal (sin viscosidad ni rozamiento) en régimen de circulación por un conducto cerrado, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido. La energía de un fluido en cualquier momento consta de tres componentes:

1. Cinética: es la energía debida a la velocidad que posea el fluido.
2. Potencial gravitacional: es la energía debido a la altitud que un fluido posea.
3. Energía de flujo: es la energía que un fluido contiene debido a la presión que posee.

La siguiente ecuación conocida como "Ecuación de Bernoulli" (Trinomio de Bernoulli) consta de estos mismos términos.

$$\frac{V^2 \rho}{2} + P + \rho g z = cte \quad (2.23)$$

Donde:

- V = velocidad del fluido en la sección considerada.
- g = aceleración gravitatoria
- z = altura en la dirección de la gravedad desde una cota de referencia.
- P = presión a lo largo de la línea de corriente.
- ρ = densidad del fluido.

Para aplicar la ecuación se deben realizar los siguientes supuestos:

- Viscosidad (fricción interna) = 0 Es decir, se considera que la línea de corriente sobre la cual se aplica se encuentra en una zona no viscosa del fluido.
- Caudal constante
- Flujo incompresible, donde ρ es constante.
- La ecuación se aplica a lo largo de una línea de corriente o en un flujo irrotacional

Aunque el nombre de la ecuación se debe a Bernoulli, la forma arriba expuesta fue presentada en primer lugar por Leonhard Euler.

2.1.8. Ecuación de Darcy-Weisbach

La ecuación de Darcy-Weisbach es una ecuación ampliamente usada en hidráulica. Permite el cálculo de la pérdida de carga debida a la fricción dentro una tubería.

La ecuación fue inicialmente una variante de la ecuación de Prony, desarrollada por el francés Henry Darcy. En 1845 fue refinada por Julius Weisbach, de Sajonia, hasta la forma en que se conoce actualmente [18]:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (2.24)$$

Donde, h_f , es la pérdida de carga debida a la fricción, calculada a partir de f = factor de fricción de Darcy, L/D = relación entre la longitud y el diámetro de la tubería, v = la velocidad media de flujo, g = que corresponde a la aceleración debida a la gravedad, y se supone constante (9.81m/s²).

El factor de fricción ϕ es adimensional y varía de acuerdo a los parámetros de la tubería y del flujo. Este puede ser conocido con una gran exactitud dentro de ciertos regímenes de flujo; sin embargo, los datos acerca de su variación con la velocidad eran inicialmente desconocidos, por lo que esta ecuación fue inicialmente superado en muchos casos por la ecuación empírica de Prony.

Años más tarde se evitó su uso en diversos casos especiales en favor de otras ecuaciones empíricas, principalmente la ecuación de Hazen-Williams, ecuaciones que, en la mayoría de los casos, eran significativamente más fáciles de calcular. No obstante, desde la llegada de las calculadoras la facilidad de cálculo no es mayor problema, por lo que la ecuación de Darcy-Weisbach es la preferida.

2.1.9. Ecuación de Starling

Formulada en 1896, por el fisiólogo británico Ernest Starling, la ecuación de Starling ilustra el rol de las fuerzas hidrostáticas y oncóticas (llamadas también fuerzas de Starling) en el movimiento del flujo a través de las membranas capilares. Permite predecir la presión de filtración neta para un determinado líquido en los capilares.

De acuerdo a la ecuación de Starling, el movimiento del fluido depende de seis variables:

1. Presión hidrostática capilar (P_c)
2. Presión hidrostática intersticial (P_i)
3. Coeficiente de reflexión, (R), un valor que es índice de la eficacia de la pared capilar para impedir el paso de proteínas y que, en condiciones normales, se admite que es igual a 1, lo que significa que es totalmente impermeable a las mismas y en situaciones patológicas inferior a 1, hasta alcanzar el valor 0 cuando puede ser atravesado por ellas sin dificultad.
4. Presión oncótica Capilar (π_c)

5. Presión oncótica intersticial (π_i)
6. Coeficiente de filtración, (K_f) expresa la permeabilidad de la pared capilar para los líquidos

Todas las presiones son medidas en milímetros de mercurio (mm Hg), y el coeficiente de filtración se mide en mililitros por minuto por milímetros de mercurio (mlmin-1mm Hg-1). La ecuación de Starling se describe de la siguiente manera:

$$Q = K_f ([P_c - P_i] - R[\pi_c - \pi_j]) \quad (2.25)$$

Por ejemplo:

- Presión hidrostática arteriolar (P_c)=37 mmHg
- Presión hidrostática venular (P_c)= 17 mmHg

Según la ecuación, $P(Q)$ arteriolar = $(37-0)+(0-25) = 11$ y $P(Q)$ venular = $(17-0)+(0-25) = -9$. La filtración es por ello mayor que la reabsorción. La diferencia es recuperada para el torrente circulatorio por el Sistema Linfático.

La solución a la ecuación es el flujo de agua desde los capilares al intersticio (Q). Si es positiva, el flujo tenderá a dejar el capilar (filtración). Si es negativo, el flujo tenderá a entrar al capilar (absorción). Esta ecuación tiene un importante número de implicaciones fisiológicas, especialmente cuando los procesos patológicos alteran de forma considerable una o más de estas variables.

La presión oncótica o coloidosmótica es la presión osmótica debida a las proteínas plasmáticas que aparece entre el compartimento vascular e intersticial. Al ser los capilares sanguíneos poco permeables a los compuestos de elevado peso molecular, como es el caso de las proteínas, éstas tienden a acumularse en el plasma sanguíneo, resultando menos abundantes en el líquido intersticial. De este gradiente de concentración entre el interior de los capilares y el espacio intersticial se deriva una tendencia del agua a compensar dicha diferencia retornando al capilar sanguíneo con una cierta presión, la presión oncótica capilar. Dicha presión se opone al filtrado que finalmente se produce a través del endotelio capilar, gracias a que la presión hidrostática capilar supera a la presión oncótica capilar.

De igual modo, las proteínas que forman parte del líquido intersticial generarán una presión oncótica intersticial, en condiciones normales menores que la presión oncótica capilar. De hecho, el filtrado a través del endotelio capilar se produce a causa del desequilibrio entre las presiones hidrostática capilar y oncótica intersticial, que lo favorecen, y las presiones hidrostática intersticial y oncótica capilar, que se le oponen, y que se relacionan entre sí mediante la ecuación de Starling.

2.1.10. El teorema de Torricelli

Es una aplicación del principio de Bernoulli y estudia el flujo de un líquido contenido en un recipiente, a través de un pequeño orificio, bajo la acción de la gravedad. A partir del teorema de Torricelli se puede calcular el caudal de salida de un líquido por un orificio. "La velocidad de un líquido en una vasija abierta, por un orificio, es la que tendría un cuerpo cualquiera, cayendo libremente en el vacío desde el nivel del líquido hasta el centro de gravedad del orificio":

$$V_t = \sqrt{2g \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)} \quad (2.26)$$

Donde:

- V_t es la velocidad teórica del líquido a la salida del orificio
- v_0 es la velocidad de aproximación.
- h es la distancia desde la superficie del líquido al centro del orificio.

- g es la aceleración de la gravedad.

Para velocidades de aproximación bajas, la mayoría de los casos, la expresión anterior se transforma en:

$$V_{\tau} = C_v \sqrt{2gh} \quad (2.27)$$

Donde:

- V_{τ} es la velocidad real media del líquido a la salida del orificio.
- C_v es el coeficiente de velocidad. Para cálculos preliminares en aberturas de pared delgada puede admitirse 0.95 en el caso más desfavorable.

Tomando, $C_v = 1$

$$V_{\tau} = \sqrt{2gh} \quad (2.28)$$

Experimentalmente se ha comprobado que la velocidad media de un chorro de un orificio de pared delgada, es un poco menor que la ideal, debido a la viscosidad del fluido y otros factores tales como la tensión superficial, de ahí el significado de este coeficiente de velocidad.

2.1.11. Caudal descargado

El caudal o volumen del fluido que pasa por el orificio en un tiempo, Q , puede calcularse como el producto de , el área real de la sección contraída, por , la velocidad real media del fluido que pasa por esa sección, y por consiguiente se puede escribir la siguiente ecuación:

$$Q = S_c \cdot V_{\tau} = (S \cdot C_c) C_v \sqrt{2gh} \quad (2.29)$$

Tal que $Q = C_d \cdot S \sqrt{2gh}$

En donde:

- $S \sqrt{2gh}$ representa la descarga ideal que habría ocurrido si no estuvieran presentes la fricción y la contracción.
- C_c es el coeficiente de contracción de la vena fluida a la salida del orificio. Su significado radica en el cambio brusco de sentido que deben realizar las partículas de la pared interior próximas al orificio. Es la relación entre el área contraída y la del orificio S . Suele estar en torno a 0.65.
- C_d es el coeficiente por el cual el valor ideal de descarga es multiplicado para obtener el valor real, y se conoce como coeficiente de descarga. Numéricamente es igual al producto de los otros dos coeficientes.

En esta sección se mostrarán los antecedentes referentes al estudio del flujo de fluidos, revisando, ecuaciones clásicas usadas en el estudio de dicho flujo en medios porosos, desde Darcy ec. 2.1 hasta la ecuación que caracteriza el volumen de fluido que pasa por un orificio en un tiempo t , ec. 2.29, sin embargo como se menciona a lo largo de la sección uno de los fenómenos relevantes que condicionan una gran variedad de fenómenos naturales e industriales son los fenómenos capilares. La cohesión, adhesión y la tensión superficial dan como resultado el fenómeno de capilaridad, que consiste en el movimiento ascendente de agua en tubos de vidrio capilares. Aunque no necesariamente vidrios capilares, las moléculas de agua se adhieren debido a la atracción de los dipolos, como resultado de esto se pueden adherir a superficies cargadas positivamente o negativamente. La adhesión de las moléculas de agua es responsable de la imbibición. La imbibición es el movimiento de las moléculas de agua en sustancias como la madera, gelatina o medios que son de interés en este

trabajo, medios porosos, por ello en la siguiente sección definimos el fenómeno de imbibición y establecemos la necesidad del estudio de este fenómeno para el análisis del creep en frentes mojados bajo vibraciones débiles.

2.2. Imbibición

Es fácil hacer observaciones físicas cualitativas de la penetración de fluidos en medios no homogéneos: una mancha de café en una servilleta, o un cubo de azúcar en la misma taza de café son suficientes para demostrar dos hechos fundamentales. Una fase en movimiento se forma entre dos regiones una mojada y otra no mojada del medio. Se hace aparente que el desorden en la estructura porosa y la superficie irregular del papel o la estructura del cubo de azúcar, ambas influyen en este comportamiento: la interfase es claramente rugosa. Mas aún, la dinámica del fenómeno disminuye con el tiempo, esto significa que el área mojada de la servilleta o volumen de café absorbido por el cubo de azúcar aumenta mas y mas lentamente. De hecho, la posición promedio H del frente mojado usualmente incrementa en el tiempo como $H(t) \sim t^{1/2}$ [73]. El derrame de café es un ejemplo de imbibición espontánea, y este obedece a lo que se conoce como la ley de Washburn. La fuerza que impulsa el líquido desde el reservorio del líquido al frente entre la región mojada y el aire en el medio tiene un efecto mas y mas débil en el flujo total como la distancia cada vez mas larga entre estas dos. Este se puede observar en el experimento de imbibición en la figura 2.1.

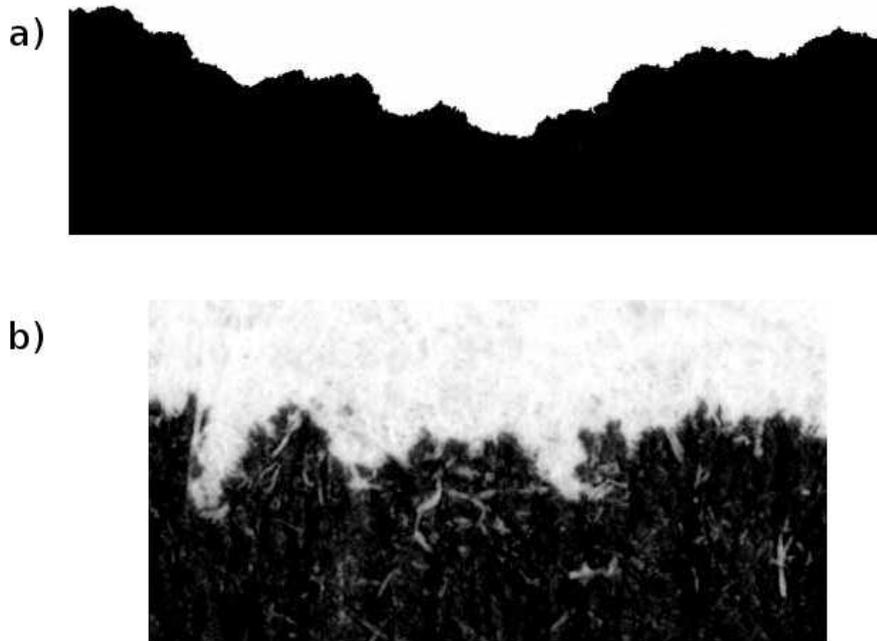


Figura 2.1: Frente de tinta negra absorbida dentro de toallas de papel. a) fotografía digital, resolución horizontal ca 1200 píxeles, los valores de gris oscuro y la luz se mejoraron al binarizar (blanco y negro) la imagen. b) escaneado de alta resolución (1000 puntos por centímetro) de una pequeña parte (ca. 0.8 cm de ancho) en escala de grises. La estructura del medio, como las fibras en la superficie superior del papel, y su efecto en la parte frontal del líquido se hace visible.

La física de fluidos. En la tabla 2.1 lista algunos escenarios en que la imbibición juega un importante rol; que van desde la recuperación de petróleo (usando agua para desplazar este fuera de la roca) a la biología (agua en los organismos vivos) y los procesos de manufactura. Por lo

tanto el flujo de fluidos a través de medios porosos constituye un campo muy vasto que combina la estructura porosa del medio con la superficie y física de los líquidos y/o gases involucrados y es caracterizado por muchos parámetros tales como el contraste de viscosidad de los fluidos, su mojabilidad y la tensión superficial así como también la tasa de desplazamiento. La forma más simple de imbibición involucra dos fluidos inmiscibles, uno siendo desplazado por el otro, ambos líquidos se caracterizan por su viscosidad η y la tensión superficial σ de su interfase

Cuadro 2.1: Realizaciones experimentales de la imbibición

Recuperación de petróleo	Desplazamiento de un líquido por otro, con la posibilidad de que una tercera fase esté presente.
Procesos de impresión	Penetración de tinta en papel, recubrimiento de papel, materiales absorbentes.
Industria de alimentos	Cocción, filtración del vino.
Ciencias biológicas	Transporte de fluidos en plantas, imbibición de agua en semillas, penetración de agua en suelo, aplicaciones médicas.
Química de superficies	Medición de ángulos de contacto, gotas en superficies, recubrimiento de superficies.
Materiales compuestos	Invasión de espacios vacíos de fibras por una resina o un metal, composites metal-metal, llenado de nanotubos.
Textiles	Comportamiento de prendas en presencia de líquidos, impermeabilización de tejidos.
Construcción	Penetración de agua en concreto o en pastas de cemento.

La matriz de sólido interactúa con los fluidos a través de sus propiedades de mojado, como describe la ecuación de Young-Dupré para una gota de líquido en contacto con una superficie sólida, se muestra esquemáticamente en la figura tal:

$$\sigma_{s2} - \sigma_{s1} = \sigma \cos \theta \quad (2.30)$$

donde σ_{s1} y σ_{s2} son las tensiones superficiales de el sólido con fluidos 1 y 2 respectivamente. El ángulo de contacto θ determina cuando el líquido 1 moja ($\theta < \pi/2$) o no moja ($\theta > \pi/2$).

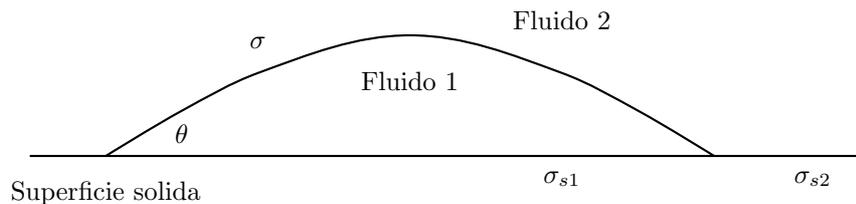


Figura 2.2: Líquido derramado en contacto con una superficie sólida. El contacto entre la superficie y los líquidos 1 y 2 es caracterizado por la tensión superficial σ_{s1} y σ_{s2} respectivamente mientras la interfase entre los dos fluidos tiene tensión superficial σ . Si el ángulo de contacto $\theta < \pi/2$, el fluido 1 moja a el sólido.

La imbibición significa que un fluido que moja desplaza a otro que no moja, mientras el caso opuesto es llamado drenaje. La imbibición espontánea toma lugar cuando el fluido invasor lo hace bajo la influencia exclusiva de las fuerzas capilares, sin presión externa. La imbibición forzada involucra una combinación del fenómeno de capilaridad y un flujo externo forzado o por diferencia

de presión. Aunque las relaciones empíricas para el flujo de líquidos a través de un medio poroso han existido durante mucho tiempo, un esfuerzo, en parte inspirado por la mecánica estadística para entender y predecir cuantitativamente el flujo, dirigido al estudio de la formación de patrones o la geometría de las regiones ocupadas por los líquidos invasores/retroceso. En este nivel, la física depende de la combinación de la viscosidad y las fuerzas capilares en la frontera invadida y la región seca. La parte viscosa se presenta debido al flujo de líquido en el espacio (en parte) de poro saturado. Y la importancia relativa de los efectos viscosos y las fuerzas capilares está descrita por el número de capilaridad:

$$C_a = \frac{\eta\nu}{\sigma} \quad (2.31)$$

donde η es la viscosidad del fluido, ν es promedio de la velocidad y σ es la tensión superficial interfacial

La imbibición se define como el desplazamiento de un fluido viscoso por otro fluido inmisible con este. Este proceso es controlado, y se ve afectado, por varios factores: El número de capilaridad C_a y el cociente de movilidad M tienen gran importancia. Payatakes y Dias clasificaron los procesos de imbibición de la siguiente manera:

1. Imbibición espontánea
2. Flujo Constante
3. Imbibición Casi-estática
4. Invasión dinámica a flujo constante del fluido invasor

La imbibición es un fenómeno que tiene lugar en un amplio espectro de procesos. Esta se da lugar en la extracción de petróleo, en procesos naturales de irrigación o en algo tan sencillo como la mancha de café en una servilleta, entre otros procesos tales como:

El caso de la imbibición espontánea tiene un interés especial desde el punto de vista del escalamiento dinámico. La imbibición espontánea es dominada por la capilaridad. En contraste con la imbibición de fluido forzada¹, que no tiene una ley de conservación de masa global, un hecho que tiene un efecto dramático en el escalamiento [20, 21]. la imbibición espontánea es un caso de dinámica desacelerada en que el tiempo de escala cambia continuamente. De hecho se sabe desde hace tiempo [22] que la media de escalamiento temporal de los frentes obedece a la ley de Washburns. $h \sim t^{1/2}$, pero poco se sabe sobre el escalamiento de las fluctuaciones en este régimen. Por otra parte, en la mayoría de los experimentos han sido desarrollados en medios desordenados en forma vertical [23]. una situación donde la gravedad limita el comportamiento de Washburn a tiempo de observación cortos.

Washburns estableció la relación entre las características de un líquido que asciende por capilaridad a través de un lecho de material, el ángulo de contacto formado en la interfase θ y la velocidad a la cual ocurre el ascenso, representada por la relación entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido t .

$$L^2 = \frac{\gamma_{LV} r^* t \cos \theta}{2\eta} \quad (2.32)$$

Las características del líquido son su viscosidad η y tensión superficial en la interfase líquido/vapor γ_{LV} . El parámetro r^* corresponde al tamaño medio de poro del lecho formado por el material a caracterizar.

¹La Imbibición es forzada cuando se aplica un gradiente de presión para impulsar el desplazamiento.

Experimentos con gravedad tienen que ver directamente con el estudio de los procesos de fijado y sus escalamientos. Solo un experimento en medios desordenados en forma horizontal ha sido desarrollado en papel [24]. En este experimento la rugosidad invariante de escala fue determinada solo para desordenes altamente anisotropicos, mientras que la mejor rugosidad logarítmica, se determino en papel isotropico. Sin embargo el papel es un medio con desorden no controlado, y fenómenos como la inflamación y prehumectación puede cambiar el efecto de las fuerzas capilares.

La imbibición entonces es un fenómeno complejo originado por el desbalance entre las fuerzas capilares, viscosas y gravitacionales. Hay varios grados de detalle con los que se observan los frentes de imbibición (interfaz entre la zona ocupada por el fluido que moja y la ocupada por el que no lo hace. Un primer método consiste en ver, a pequeña escala, la evolución espacio-temporal de los frentes. En este caso los frentes llegan a tener estructura fractal (patrones tipo dedos que se repiten a varias escalas de longitud) y cuya caracterización terica es complicada (Feder, 1988). Otra forma consiste en conocer la evolución temporal del frente promedio que puede medirse con una escala mayor o mediante el promedio espacial de los frentes pequeños (Bell y Cameron, 1906; Bean et al., 1990; Fanelli et al., 1990; Gillespie, 1958 y 1959; Hodgson y Berg, 1988; Middleman, 1995; Pezron et al., 1995; Kramer, 1988; Washburn, 1921).

El fenómeno de imbibición, se relaciona estrechamente con el concepto de interfase. La región que separa una sustancia o un material de otro nos parece una superficie (una región sin espesor alguno) del mismo modo que los materiales o las sustancias nos parecen continuos. Sin embargo dada la naturaleza microscópica de la materia, sabemos que, por ejemplo, un líquido no es continuo sino una multitud (del orden de cuatrillones) de partículas muy pequeñas. Algo parecido ocurre con las superficies, éstas son habitualmente una región con un espesor de unas cuantas partuculas. En el estudio de las superficies, sin embargo, éstas suelen ser consideradas como tal, como regiones sin espesor. Habitualmente relacionamos la superficie que separa dos sustancias con la más densa o menos común de las dos. Así hablamos de la superficie del lago o del agua, o de la superficie de la mesa o de la madera. Sin embargo las propiedades y características de la superficie dependen de ambas sustancias o materiales. Denominamos a estas superficies, interfaces cuando deseamos insistir en su naturaleza de frontera entre dos sustancias. Así la superficie del lago sería una interfaz agua-aire mientras que la superficie de la mesa sera una interfaz madera-aire.

La mayor parte de nuestras vidas, pasamos sobre superficies de algo. Sentarnos en una roca, significa estar en contacto con una superficie. Caminar en la superficie de la tierra sin notar que el centro de la tierra se funde, y cuando nos preocupamos por el interior, no podemos llegar a ella sin primero cruzar una superficie. Para una célula biológica, la membrana actúa no solo como una barrera altamente selectiva sino como una interfase.

Estamos acostumbrados a las formas de las interfases que encontramos, sin embargo debemos notar que la morfología pueden ser muy diferente dependiendo de la escala en la que observemos dichas interfases. Por ejemplo un astronauta en el espacio puede ver a la tierra como una esfera suave, pero mientras se acerca a ella, aparecen lentamente las cimas de la montañas y aparentemente comienza a aparecer cimas mas altas o mas pequeñas sin una jerarquía u orden entonces la superficie de la tierra se torna rugosa. En general la morfología de las superficies e interfases depende la escala de observación. ¿Cómo podemos describir la morfología de algo que es suave a la vista pero rugoso bajo el microscopio? esta es una pregunta que se ha abordado en diferentes trabajos, donde se han desarrollado métodos para caracterizar cuantitativamente la morfología de una interfase arbitraria ver las referencias dentro [1]. Dado que la dinámica de la morfología depende de la escala en el siguiente capitulo revisaremos conceptos de escalamiento.

Capítulo 3

Conceptos de escalamiento

3.1. Rugosidad

Definimos la superficie como el conjunto de partículas que se agregan tal que crece cada columna, ya sea por agregado (deposición) o flujo de fluidos en un medio (difusión); tenemos diferentes posiciones de la interfase para intervalos de tiempo distintos, entonces para describir el crecimiento cuantitativamente se usan dos funciones.

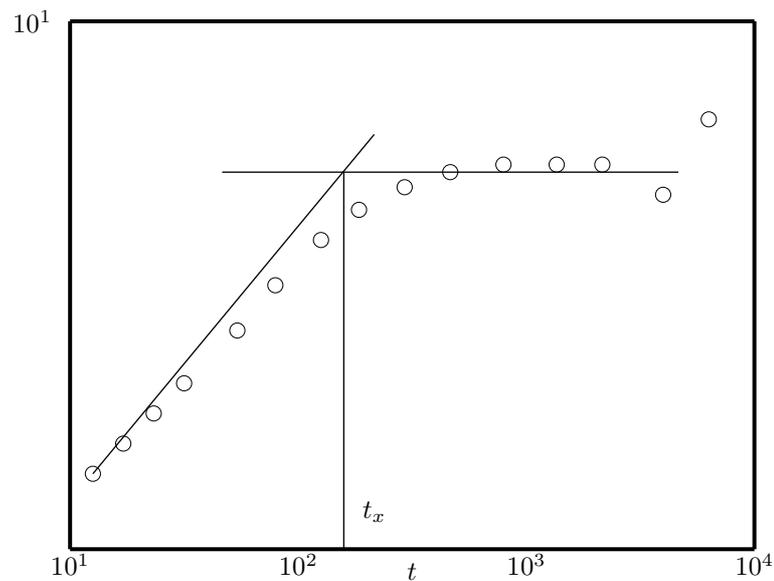


Figura 3.1: Crecimiento del ancho de interfase modelo para un sistema de tamaño horizontal $L = 200$. Se puede observar dos regímenes característicos: (i) crecimiento con ley de potencia, que aparece como una línea recta en la gráfica log-log, y (ii) saturación. La figura indica un método usado comúnmente para estimar el tiempo que cruza t_x : montando el comportamiento inicial y el comportamiento de saturación con líneas rectas.

i) La media de crecimiento de superficie, \hat{h} es definida por

$$\bar{h} \equiv \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(i, t) \quad (3.1)$$

donde $h(i, t)$ es el crecimiento de la columna i en el tiempo t si la tasa de deposición o agregado (número de partículas agregándose en un sitio) es constante, la media de crecimiento se incrementa linealmente con el tiempo

$$\bar{h}(t) \sim t \quad (3.2)$$

ii) El ancho de interfase, que caracteriza la rugosidad de la interfase, es definida por las fluctuaciones con respecto a la altura, al monitorear el proceso de rugosidad se mide el ancho de la interfase como función del tiempo. Por definición el crecimiento comienza de una línea horizontal, la interfase en el tiempo cero es simplemente una línea horizontal con ancho cero. Cuando la deposición ocurre la interfase gradualmente se arruga.

$$w(L, t) \equiv \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [h(i, t) - \bar{h}(t)]^2} \quad (3.3)$$

Una gráfica de la evolución de la interfase con respecto al tiempo, tiene 2 regiones separadas por una línea que cruza el tiempo t_x (ver figura 3.1).

i) Inicialmente, el ancho se incrementa como una potencia del tiempo.

$$w(L, t) \sim t^\beta \quad ; \quad [t \ll t_x] \quad (3.4)$$

El exponente β , que recibe el nombre de exponente de crecimiento, caracteriza la dinámica de la interfase dependiente del tiempo del proceso de rugosidad

ii) El incremento del ancho como ley de potencia no continua indefinidamente, este es seguido por un régimen de saturación (región horizontal de la figura 3.1). Mientras que el ancho se acerca al valor de saturación w_{sat} en la fig 3.2 las diferentes curvas corresponden a la evolución del ancho de la interfase, obtenidos por simulación, para sistemas distintos de tamaño L . Como L se incrementa, la saturación de ancho, w_{sat} también se incrementa, y la dependencia entonces sigue una ley de potencia

$$w_{sat}(L) \sim L^\alpha \quad ; \quad [t \gg t_x] \quad (3.5)$$

el exponente α es llamado exponente de rugosidad, es el segundo exponente crítico, el que caracteriza la rugosidad de la interfase saturada

iii) La línea que cruza el tiempo t_x (algunas veces llamado tiempo de saturación) en donde el ancho de la interfase sigue el comportamiento de (3.4) hacia el de (3.5) y depende solo del tamaño del sistema

$$t_x \sim L^z \quad (3.6)$$

donde z es llamado exponente dinámico.

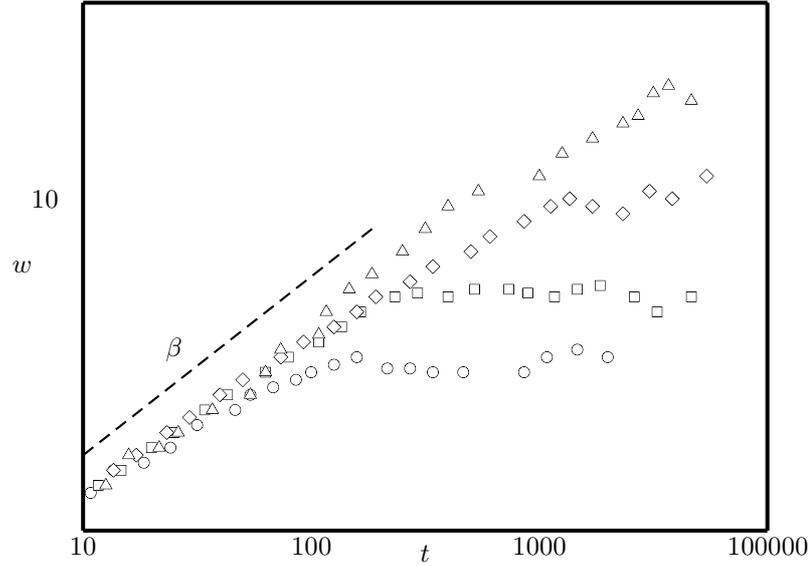


Figura 3.2: Tiempo de evolución de el ancho de superficie. Las escalas logarítmicas son utilizadas tal que la ley de potencia se pueda observar como una línea recta. Las diferentes curvas corresponden a simulaciones para sistemas de diferentes tamaño L : $L = 100(\circ)$, $L = 200(\square)$, $L = 400(\diamond)$, y $L = 800(\triangle)$.

3.2. Escalamiento dinámico

Los exponentes α , β , z , no son independientes y existe una manera sencilla de agrupar los datos de la figura 3.2 en una sola curva.

- Graficando $w(L, t)/W_{sat}(L)$ como una función del tiempo, la gráfica resulta en curvas que se aproximan al mismo valor, independiente del tamaño del sistema. Fig 3.3
- Graficando el ancho como función de t/t_x tendremos curvas que se agrupan alrededor del mismo tiempo característico. Estas dos observaciones sugieren que $w(L, t)/w_{sat}(L)$ es una función de t/t_x es decir.

$$\frac{w(L, t)}{W_{sat}(L)} \sim f\left(\frac{t}{t_x}\right) \quad (3.7)$$

Donde $f(u)$ recibe el nombre de función de escalamiento. Remplazando w_{sat} y t_x en 3.7 con sus formas de escalamiento (3.5) y (3.6), se obtiene la relación de escalamiento Family-Viscek

$$w(L, t) \sim L^\alpha f\left(\frac{t}{L^z}\right) \quad (3.8)$$

Existen dos regímenes de escalamiento dependiente del argumento $u \sim t/t_x$

- Para valores u pequeños la función de escalamiento se incrementa como una ley de potencia, es decir.

$$f(u) \sim u^\beta \quad (3.9)$$

- Cuando el tiempo de saturación tiende a $t \gg t_x$ se tiene que este es el límite $t \rightarrow \infty$ y entonces.

$$f(u) = \text{constante} \quad (3.10)$$

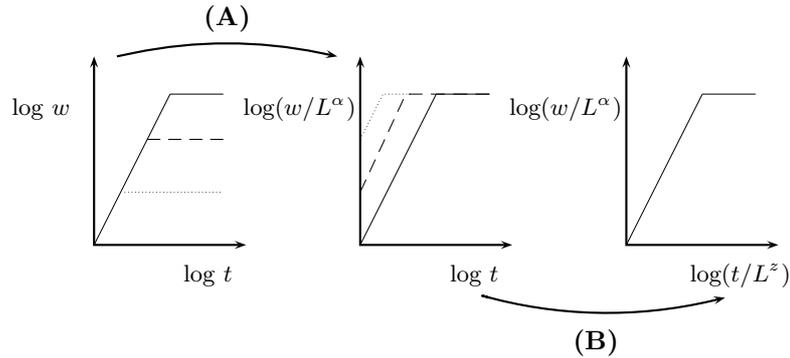


Figura 3.3: Esquema de los pasos a seguir para el reescalamiento de rugosidad dependiente del tiempo. La figura de la izquierda muestra la variación del ancho de interfase contra el tiempo para tres sistemas de diferente tamaño L (ver figura 3.2). En el paso (A) dividimos el ancho por L^z que corresponde al cambio vertical de las curvas en escala log-log. De acuerdo a (3.5) las curvas ahora se saturan en el mismo valor de la ordenada w/L^α , pero los tiempos de saturación son distintos. En el paso (B) reescalamos el tiempo al graficar t/L^z , correspondiente al cambio horizontal de las curvas. De acuerdo a (3.6), las curvas ahora saturan en el mismo valor de la abscisa, t/L^z , todas ellas colapsando dentro de una sola curva llamada función de escalamiento $f(u)$

Notemos que los exponentes α , β y z no son independientes, en la fig 3.1 si nos aproximamos al punto $(t_x, w(t_x))$ desde la izquierda, hallamos de acuerdo a la ecuación 3.4, que $w(t_x) \sim t_x^\beta$, también al aproximarnos desde la derecha, tenemos de la ecuación (3.5) $w(t_x) \sim L^\beta$. De estas dos relaciones se sigue que $t_x^\beta \sim L^\beta$ que de acuerdo a (3.6) obtenemos

$$z = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.11)$$

La ecuación, es una ley de escalamiento que relaciona a los tres exponentes y es válida para cualquier proceso que obedece a la relación de escalamiento 3.8.

De lo anterior hemos obtenido un modelo de crecimiento de la interfase que exhibe un comportamiento de escalamiento. En particular el ancho de la interfase w se incrementa como una potencia del tiempo ec 3.4, y la saturación de rugosidad muestra una ley de potencia dependiente del tamaño del sistema. Existe un lenguaje natural para describir e interpretar tal comportamiento de escalamiento, y este es el lenguaje de los fractales. En la siguiente sección revisaremos conceptos de la geometría fractal.

3.3. Autosimilaridad

Un objeto es auto-similar, si este es formado por partes que son similares al total del objeto. Uno de los más simples objetos auto-similares es la curva de Koch figura 3.1. Que se construye de manera iterativa. Dada la construcción de la curva de Koch, en la que sus partes son copias idénticas del todo (en respectiva escala); podemos llamarla fractal determinístico. Sin embargo, existen muchos objetos en la naturaleza que son aleatorios. A pesar de esta aleatoriedad, tales objetos naturales pueden ser auto-similares en un sentido estadístico, ejemplos de estos objetos se pueden ver en [19]. Los objetos con esta aleatoriedad, tal que son autosimilares en un sentido estadístico son llamados fractales aleatorios o fractales estadísticos. Para caracterizar cuantitativamente un objeto o sistemas auto-similares, debemos introducir el concepto de dimensión; para decidir la fractalidad de un objeto, debemos medir su dimensión, por ello revisaremos el concepto de dimensión de Hausdorff y entonces definiremos la dimensión fractal.

3.4. Fractal

Definición 1 *Un conjunto fractal es un conjunto para el cual la dimensión Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica.*

¿Pero que es la dimensión Hausdorff-Besicovitch? Para muchos objetos es perfectamente razonable es intuitiva la definición de dimensión: Un espacio es d -dimensional si localmente se puede hallar una cubierta \mathbb{R}^d . De lo anterior entonces resulta inmediato lo siguiente: la dimensión de un punto es cero; la dimensión de una línea es uno; la dimensión de un plano es dos; la dimensión de \mathbb{R}^d es d . Mas aún, la dimensión de un círculo es uno, la dimensión de una superficie es dos, etc. La dificultad comienza cuando hablamos de conjuntos mas complicados, conjuntos "fractales" por que la noción de dimensión puede ser cualquier numero real. Entonces elucidemos el concepto "dimensión"¹.

3.4.1. Dimensión

Definiciones ¿Cómo podemos construir la mejor definición de dimensión de un conjunto cerrado y acotado X en \mathbb{R}^n ? idealmente, deseamos una definición tal que cumpla.

- (i) Cuando X es una variedad entonces el valor de la dimensión es un entero que coincide con la noción usual de dimensión.
- (ii) Para conjuntos mas en general X podemos tener dimension "fraccional"; y
- (iii) Puntos, y uniones contables de puntos, tiene dimensión cero.

Quizá el primer intento de definir la dimension fue la siguiente: **Primer definición** Podemos definir la dimensión topologica $dim_T(X)$ por inducción. Decimos que X tiene dimensión cero si cada punto $x \in X$, cada bola suficientemente pequeña sobre x su límite no interseca a X . Decimos que X tiene dimensión d , si para cada punto $x \in X$ cada una bola suficientemente pequeña sobre x su límite interseca a X en un conjunto de dimensión $d - 1$.

Esta definición satisface nuestro primer requerimiento. en que coincide con la noción usual de de dimensiones para variedades. Desafortunadamente, la dimensión topologica es siempre un número entero. (por ejemplo, la dimensión topologica del conjunto de Cantor C es cero). En particular, esta definición falla en el segundo requerimiento. Así, vamos a intentar construir otra definición.

Segunda definición. Dado $\epsilon > 0$, sea $N(\epsilon)$ el menor numero de ϵ -bolas necesarias para cubrir X . Definimos la dimensión de caja como

$$Dim_B(X) = \limsup \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)} \quad (3.12)$$

De nuevo esto coincide con la noción usual de dimensiones para variedades. Mas aún, la dimension de caja puede ser fraccional (es decir, la dimensión del conjunto de Cantor X es $\log 2 / \log 3$). Hemos usado el límite del supremo para evitar problemas con la convergencia. Estrictamente hablando, esto es usualmente llamado dimensión de caja superior y es usual decir que existe la dimension de caja cuando los limites existen (y es igual al limsup). Sin embargo, tenemos lo siguiente

Lema 1 *Existen conjuntos contables tales que la condicion (iii) falla para la dimensión de caja*

Demostración Consideremos el lconjunto contable

$$X = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$$

¹Esta sección en su totalidad se basa en la referencia de las notas obtenidas en [25]

Dado $0 < \epsilon < 1$, escogemos $n = n(\epsilon) \geq 2$ de modo que $\frac{1}{n(n+1)} \leq \epsilon < \frac{1}{n(n-1)}$. Los puntos $\{1, 1/2, \dots, 1/n\}$ estan separados unos de otros una distancia minima $\frac{1}{n(n-1)}$ tales que n intervalos de tamaño ϵ son necesarios para cubrir est aporción del conjunto. EL resto del conjunto X puede ser cubierto por otros n intervalos de tamaño $[i\epsilon, (i+1)\epsilon]$, $\epsilon > 0$ (para $i = 0, \dots, n-1$). Dados los límites $n \leq N(\epsilon) \leq 2n$ y vemos de la definición que

$$\dim_B(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\frac{1}{\epsilon})} = \frac{1}{2}$$

desde $n-2 < \epsilon^{-1/2} \leq n$

Finalmente, intentaremos dar una tercer definición.

Tercer definición. Podemos definir la dimensión de *Hausdorff* (o Hausdorff-Besicovitch) como sigue. Dado X podemos considerar una cubierta $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ para X de conjuntos abiertos. Para $\delta > 0$ podemos definir $H_\epsilon^\delta = \inf_{\mathcal{U}} \{\sum_i \text{diam}(U_i)^\delta\}$ donde el infimo se extiende por todas las cubiertas abiertas $\mathcal{U} = U_i$ tales que el $\text{diam}(U_i) \leq \epsilon$. Definimos $H_\epsilon^\delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon^\delta(X)$ y finalmente.

$$\dim_H(X) = \inf\{\delta : H^\delta(X) = 0\}$$

Asi como para las dos definiciones previas esta ultima coincide con la notación usual de dimension para variedades. Mas aun, la dimensión de Hausdorff puede ser fraccional (es decir la dimension del conjunto de Cantor (X) es de nuevo $\log 2/\log 3$). Finalmente para calquier conjunto contable (X) la propiedad (iii) se cumple.

Proposición 1 Para cualquier conjunto contable X tenemos que la $\dim_H(X) = 0$

Dem Podemos enumerar el conjunto contable $X = \{x_n : n \geq 1\}$, dado cualquier $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$, para cada $n \geq 1$, podemos escoger $\epsilon > \epsilon_n > 0$ suficientemente pequeño tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n^\delta \leq \epsilon$. En particular, consideramos la cubierta \mathcal{U} para X por bolas de la forma $B(x_n, \epsilon_n/2)$ centradas en x_n y de diferentes diametros ϵ_n . de las definiciones de $H_\epsilon^\delta \leq \epsilon$, para cualquier $\epsilon > 0$, y entonces $H^\delta(X) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon^\delta(X) = 0$. Desde $\delta > 0$ fue arbitrario, nosotros vemos de la definición de dimensión de Hausdorff que $\dim_H = 0$

Como una primera mirada, la definición de Hausdorff se ve demasiado elaborada. Como sea, muchas propiedades utiles se manifiestan pronto. Convenientemente, en muchos de estos ejemplos nosotros consideraremos despues $\dim_H(X) = \dim_B(X)$. De hecho, una desigualdad es verdadera en todos los casos.

Proposición 2 Las definiciones estan relacionadas por $\dim_H(X) \leq \dim_B(X)$

Demostración. Sea $\eta > 0$ y el conjunto $\gamma = \dim_B(X) + \eta$ y $\delta = \dim_B(X) + 2\eta$. De la definición de $\dim_B(X)$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño podemos cubrir X por $N(\epsilon) \leq \epsilon^{-\gamma}$ ϵ -bolas. Tomando esto como una cubierta \mathcal{U} vemos que $H_\epsilon^\gamma \leq \epsilon^{-\gamma} \epsilon^\delta = \epsilon^\eta$ y entonces $H^\gamma(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon^\gamma(X) = 0$. De las definiciones, vemos que la dimensión, $\dim_H(X) \leq \eta = \dim_B(X) + \eta$ finalmente, como $\eta > 0$ puede tomarse arbitrariamente pequeño, el resultado se sigue. \square

Ejemplo, Snowflake/von Koch curve. The von Koch curve X es una fractal estandar (por construccion). Comenzamos por el intervalo $X_0 = \{0, 1\}$, asociamos cada pieza lineal curva X_n en el plano (que es la unión de 4^n segmentos de tamaño de 3^{-n}) un nuevo X_{n+1} . Esto es remplazando la tercera parte de cada línea por otros dos lados de un triángulo equilatero. Alternativamente, uno puede comenzar de un triangulo equilatero y aplicando este procedimiento iterativo a cada uno de los lados, esto es la "curva snowflake".

Proposición 3 Para la curva de von Koch la dimensión de caja y la dimensión de Hausdorff es $\frac{\log 4}{\log 3}$

Demostración. Cuando $\epsilon_n = \frac{1}{3^n}$, el conjunto X_n es la unión de 4^n intervalos de tamaño $\epsilon_n = 3^{-n}$. Podemos cubrir (X_n) por bolas de tamaño ϵ_n por asociación a cada borde una bola de radio $\frac{\epsilon_n}{2}$ centrado en los puntos medios del lado. Es facil ver que esto tambien es una cubierta para (X) . Para ello deducimos que $N(\epsilon_n) \leq 4^n$. Mas aun, es facil ver que cualquier bola de diametro ϵ_n intersectando a (X) puede intersectar a lo sumo dos intervalos de X_n , y asi $N(\epsilon_n) \geq 4^{n-1}$. Para cualquier $\epsilon > 0$ podemos tomar $\epsilon_{n+1} \leq \epsilon < \epsilon_n$ y sabemos que $N(\epsilon_n) \leq N(\epsilon) \leq N(\epsilon_{n+1})$. Entonces

$$\frac{n-1}{n+1} \frac{\log 4}{\log 3} \leq \frac{\log N(\epsilon_n)}{\log \left(\frac{1}{\epsilon_{n+1}}\right)} \leq \frac{\log N(\epsilon_{n+1})}{\log \left(\frac{1}{\epsilon_n}\right)} \leq \frac{(n+1) \log 4}{n \log 3}$$

haciendo $n \rightarrow +\infty$ mostramos que $\dim_B(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3}$. Posponemos la demostración del resultado $\dim_B(X) = \dim_H(X)$ para despues, cuando demostremos resultados mas generales. \square

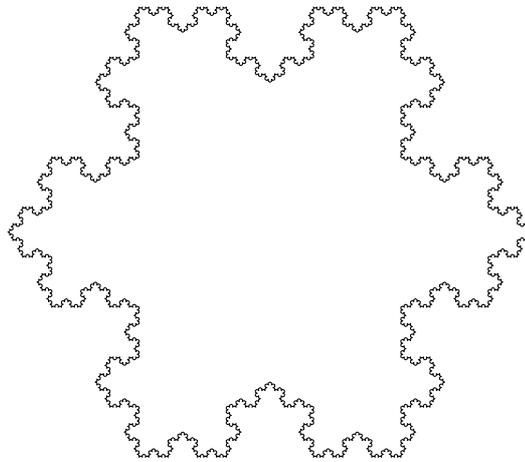


Figura 3.4: Snowflake/von Koch curve. The von Koch curve X es un fractal construido de forma estandar. Comenzando del intervalo $X_0 = [0, 1]$ asociamos cada pieza lineal de la curva X_n en el plano (que es una union de $4n$ segmentos de tamaño $3n$) en una nueva pieza X_{n+1} . Esto se hace remplazando la tercera parte de segmento de línea por otros dos lados que forman las base de un triangulo equilatero. Alternativamente, podemos comenzar de un triangulo equilatero y aplicar este procedimiento de forma iterativa a cada uno de los lados, entonces obtenemos la "curva snowflake".

Definición 2 Dimensión topologica

Las rectas y las curvas tienen dimensión 1, los planos y superficies dimensión 2, los solidos como los cubos tienen dimensión 3 y así la dimensión de un objeto es n si se necesitan n variables independientes para describir un entorno de cada punto. Esta es la dimensión topologica, introducida por H. Poincaré, que no detecta la irregularidad de un objeto .

La definición de dimensión topológica es inductiva. Se define en dos pasos.

Definición 3 Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que

- (i) (X, τ) tiene dimensión ≤ 1 , si y sólo si $X = \emptyset$;
- (ii) sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que está definido un espacio (X, τ) de dimensión $\leq k$ para todos los enteros $k \leq n-1$. Entonces, se dice que (X, τ) tiene dimensión $\leq n$, si tiene una base β , tal que para cada $B \in \beta$, la frontera $fr(B)$ tiene dimensión $\leq n-1$.

Observación 1 Si (X, τ) tiene dimensión $\leq k$ y n es un entero tal que $k \leq n$, entonces (X, τ) tiene dimensión $\leq n$.

Se define entonces la *dimensión topológica* de un espacio por

Definición 4 Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces

- (i) si $X = \emptyset$, su dimensión es -1 ;
- (ii) si (X, τ) tiene dimensión $\leq n$ y es falso que tiene dimensión $\leq n - 1$, entonces se dice que la dimensión de X es n , y se escribe $\dim_{top}(X) = n$;
- (iii) si para cada $n \in \mathbb{N}$ es falso que la dimensión de X es $\leq n$, entonces X tiene dimensión infinita, $\dim_{top}(X) = \infty$.

Dimensión fractal

¿Cuál es la relación entre el tamaño de un objeto (longitud, area, volumen) y su diámetro?

- (i) si cubrimos un cuadrado de lado 1 con cuadraditos de longitud ϵ , necesitamos $\frac{1}{\epsilon^2}$ de tales ϵ cuadraditos para hacerlo;
- (ii) para cubrir un segmento de longitud 1, nos hacen falta $\frac{1}{\epsilon}$ segmentos de longitud ϵ , y la misma cantidad de cuadrados de longitud ϵ ;
- (iii) para cubrir un cubo de lado 1, nos hacen falta $\frac{1}{\epsilon^3}$ cubitos de lado ϵ , etc.

El exponente de ϵ es la dimensión del objeto a medir, y esto no es una casualidad. Teniendo en cuenta esta propiedad, definimos la *dimensión fractal* de $S \subset \mathbb{R}^n$ del modo siguiente:

Definición 5 Para $\epsilon > 0$, sea $N_\epsilon(S)$ el mínimo número de cubos n -dimensionales de longitud ϵ para cubrir S . Si existe $d \in \mathbb{R}$, tal que $N_\epsilon(S) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$ cuando ϵ tiende a 0, decimos que la dimensión fractal de S es d , y se denota por $\dim_{frac}(S) = d$

Esto significa que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{N_\epsilon(S)}{\frac{1}{\epsilon^d}} \right)$ es una constante k . Tomando logaritmos en la expresión anterior tenemos $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\log(N_\epsilon(S)) + d \log(\epsilon) = \log k)$, luego

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\log(k) - \log(N_\epsilon(S))}{\log(\epsilon)} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\log(N_\epsilon(S))}{\log(\epsilon)} \right)$$

y como $0 < \epsilon < 1$, el $\log(\epsilon) < 0$ y d es positivo.

Esta dimensión coincide con la *dimensión de Hausdorff* (de difícil definición) para conjuntos compactos, fractales y autosemejantes.

El primero en estudiar las series fractales fue el científico británico Harold Edwin Hurst (1880-1978). Posteriormente, sus ideas fueron retomadas por Mandelbrot quien colocó su trabajo en un contexto más general bajo el nombre de Análisis de Rango Reescalado (R/S). El R/S, es un método estadístico utilizado para evaluar la ocurrencia de eventos poco comunes y es una herramienta ideal para procesos físicos y financieros, aunque no se limita solamente a este tipo de eventos. El parámetro que resulta de un análisis (R/S), el coeficiente o exponente Hurst, es una medida de independencia de las series de tiempo y una manera de distinguir series fractales. Por tanto en la siguiente sección se presentan conceptos referentes a el coeficiente de Hurst

3.5. Procesos de Hurst

3.5.1. Coeficiente o Exponente Hurst

Hurst era constructor de presas en los inicios del Siglo XX y por un tiempo trabajó en el proyecto de la presa del río Nilo. En el momento del diseño de la presa se le presentó un problema

interesante de hidrología concerniente en determinar la capacidad de almacenamiento dependiente del flujo que entra al río proveniente de diferentes elementos como lluvias y riachuelos y un flujo controlado de salida del río utilizado primordialmente en el riego. Con anterioridad, muchos hidrólogos habían supuesto este comportamiento del influjo como un proceso aleatorio, una suposición razonable cuando se trabaja en un ecosistema complejo. Sin embargo, a él no le pareció que se explicara de forma tan fácil este comportamiento. El estudio los registros históricos (de 622 D.C. a 1469 D.C.) que mantenían los egipcios y observo que en el proceso, flujos más grandes del promedio eran seguidos por sobre flujos todavía más grandes. Inesperadamente el proceso cambiaba a flujos menores que el promedio y eran seguidos por flujos todavía menores que los anteriores. Parecían ciclos pero cuya longitud no era periódica. Un análisis estándar revelaba la no existencia de correlación estadísticamente significativa entre las observaciones, por lo que Hurst desarrollo su propia metodología.

Por otra parte Hurst estaba enterado del trabajo de Einstein sobre el movimiento browniano. Este último había encontrado que la distancia que una partícula errática suspendida en un fluido cubre y se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo, si escribimos esto en forma de ecuación tenemos que:

$$R = T^{0.50} \quad (3.13)$$

Donde R =distancia y T =tiempo

La ecuación anterior es conocida como regla de un medio y es utilizada principalmente en estadística. En finanzas se utiliza para asumir que la dispersión de los rendimientos se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo. Para aplicar este concepto a series de tiempo que no sean movimientos brownianos, como el de la partícula errática de Einstein, se debería considerar una ecuación que tome en consideración que los componentes de las series de tiempo no son independientes. Hurst al resolver su problema relacionado con la capacidad de la presa encontró la siguiente ecuación que generaliza la idea anterior que solo era aplicable a movimientos brownianos (Mandelbrot y Wallis lo probaron en 1969):

$$(R/S)_n = c \cdot n^H \quad (3.14)$$

donde (R/S) se conoce como el estadístico Rango-Reescalado; c = constante, n = indicador del valor de la serie de tiempo, H = exponente o coeficiente Hurst, Rango-Reescalado (R/S) .

(R/S) , Tiene media cero y se expresa en términos de la desviación estándar. En general, los valores de , se incrementan con n , por el valor de la ley de potencias igual al exponente Hurst, esta es la primera conexión del fenómeno Hurst y la geometría Fractal.

Hay que mencionar además que el método R/S , es un análisis no paramétrico que no requiere de una distribución específica. Para que una serie pueda ser considerada como fractal, el requisito clave que debe de cumplir es una escala de ley de potencia. El exponente de Hurst se determina por medio de una regresión lineal de los puntos de $\ln(R/S)_n$ contra $\ln(n)$ como se muestra en la siguiente ecuación,

$$\ln(R/S)_n = \log(c) + H \log(n) \quad (3.15)$$

Si el sistema tuviera la característica de independencia entonces $H = 0.5$. Sin embargo, como resultado de su investigación de la presa del río Nilo encontró un coeficiente de $H = 0.9$. Si comparamos el ejemplo de la partícula errática de Einstein con un $H = 0.91$, entonces, esta última partícula cubriría una distancia mayor que otra con un proceso aleatorio en el mismo periodo. Mandelbrot demostró empíricamente que en series de tiempo cuyas observaciones son independientes el estadístico (R/S) son asintóticamente proporcionales a la raíz cuadrada, es decir si $H = 0.5$, resulta un evento aleatorio puro.

Hurst supone como hipótesis nula que el comportamiento de fenómeno sea de una caminata aleatoria o un movimiento browniano, si este fuera el caso la ecuación del rango reescalado estaría dado por:

$$\log(R/S)_n = 0,5 \left(\log n + \log \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.16)$$

3.5.2. Determinación del Coeficiente Hurst, Metodología

Como se menciona anteriormente, Hurst desarrollo una metodología para el cálculo del coeficiente. Inicialmente su estudio se aplico al caso del flujo del rio Nilo, pero en términos generales puede aplicarse a cualquier serie que se sospeche se comporte como fractal en cualquier otra área de estudio. A continuación se describe en detalle la metodología

1. Se inicia con una serie de tiempo de tamaño M , pero como nos interesa los rendimientos logarítmicos entonces la serie original se reduce a una nueva serie de tiempo de tamaño $N = M - 1$, donde cada rendimiento está definido por:

$$N_i = \log \left(\frac{M_{i+1}}{M_i} \right), i = 1, 2, 3 \dots, N \quad (3.17)$$

2. Se divide el periodo de tiempo N en A subperiodos contiguos de longitud n , tal que . Se nombra cada uno de los subperiodos o subgrupos I_α , con $\alpha = 1, 2, 3 \dots, A$ y cada elemento en I_α es etiquetado $N_{k,\alpha}$, talque $k = 1, 2, 3, \dots, n$ y para cada subperiodo de longitud n , el valor promedio está definido por la siguiente expresión:

$$e_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{k,\alpha} \quad (3.18)$$

3. Las diferencias de cada elemento $N_{k,\alpha}$, con respecto a la media e_α para cada subperiodo I_α se van sumando para obtener una serie de tiempo acumulada ($X_{k,\alpha}$), definida como:

$$X_{k,\alpha} = \sum_{i=1}^k (N_{i,\alpha} - e_\alpha) \quad (3.19)$$

En el rango R_{I_α} , se define como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo ($X_{k,\alpha}$) de para cada subperiodo I_α :

$$R_{I_\alpha} = \max(x_{k,\alpha}) - \min(X_{k,\alpha}) \quad (3.20)$$

Donde $1 \leq k \leq n$

4. Por otro lado, se calcula la desviación estándar muestral s_{I_α} de la forma tradicional para cada periodo I_α :

$$S_{I_\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (N_{i,\alpha} - e_\alpha)^2 \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

5. Para cada periodo I_α , su rango R_{I_α} se normaliza dividiendo por su desviación estándar muestral S_{I_α} correspondiente. Por lo tanto el rango reescalado para cada subperiodo es igual a $R_{I_\alpha}/S_{I_\alpha}$. Como tenemos A periodos continuos de longitud n , entonces tomamos el valor promedio para periodos de longitud n y que está definido como:

$$(R/S)_n = \frac{1}{A} \sum_{\alpha=1}^A (R_{I_\alpha}/S_{I_\alpha}) \quad (3.22)$$

6. La longitud n ó el tamaño del subperiodo, se incrementa al siguiente valor posible de tal forma que $(M - 1)/n$, sea un valor entero. Iniciamos con el valor más pequeño de acuerdo a la condición anterior y se repiten los pasos del 1 al 6, se repiten hasta $n = (M - 1)/2$ utilizando siempre la serie completa. Posteriormente se aplica una regresión de mínimos cuadrados de $\log(R/S)_n$ contra $\log(n)$ la ordenada al origen es $\log(c)$ y la pendiente de la ecuación es la estimación del exponente de Hurst H .

3.5.3. Prueba de significancia del coeficiente de Hurst

En la sección anterior se ha mencionado los pasos para la determinación del coeficiente Hurst y el comportamiento de los procesos de acuerdo al valor de dicho exponente. Sin embargo, en la práctica es necesario distinguir si un coeficiente de 0.50001 con un cierto número de datos es un considerado un proceso independiente o con tendencia. Para evaluar esto se debe plantear una prueba de significancia sobre los resultados de un análisis (R/S) , similar a las pruebas "t" de las regresiones lineales.

Inicialmente Hurst estableció su Hipótesis Nula sobre una distribución binomial, resultado del lanzamiento de volados más tarde Feller llegó a un resultado similar por otro camino. Se supone en la hipótesis nula que $H = 0.5$ tiene un comportamiento de caminata aleatoria ó de browniano tradicional y por tanto de independencia contra las hipótesis alternativas $H <> 0.5$ que corresponde a comportamiento persistente o antipersistente de los procesos. Los valores propuestos para el valor esperado y la varianza del coeficiente H , son:

$$E(R'(n)) = (n\pi/2)^{0,5} \quad (3.23)$$

$$Var(E(R'(n))) = (\pi^2/6 - \pi/2)n \quad (3.24)$$

La ecuación anterior fue corregida por Alanis and Lloyd (1976) para la determinación del valor esperado del rango rescalado y después de una corrección empírica (ver Peters) se llega a una ecuación para el valor esperado de H :

$$E(R/S_n) = \left(\frac{n - 0,5}{n}\right) (n\pi/2) \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}} \quad (3.25)$$

Debido a que los valores de R/S son normalmente distribuidos, entonces podemos tomar los valores de (R/s) como también normalmente distribuidos, en este caso la varianza esperada del exponente Hurst empíricamente se demuestra es:

$$Var(H) = 1/T \quad (3.26)$$

Donde T es el número de observaciones de la muestra. A partir de las ecuaciones (3) y (4) podemos determinar el nivel de significancia con un estadístico que nos dice cuantas desviaciones estándar se encuentra alejado del valor medio $E(H)$ y el valor obtenido de H en el proceso de Rango-Reescalado.

3.5.4. Valores del Coeficiente Hurst

Si $H = 0.5$ implica un proceso independiente. Es importante notar que un análisis (R/S) no requiere que el proceso subyacente se distribuya normalmente, solo independiente. Como el análisis R/S , es no paramétrico entonces pueden considerarse distribuciones de otro tipo como la t de student, gamma etc. Si $0.5 < H \leq 1$, implica series de tiempo persistentes, es decir caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo. Teóricamente lo que suceda hoy impactaría en el futuro por siempre como por ejemplo cambios semanales de ahora están correlacionados con los cambios semanales futuros. Se considera que se tiene un ruido negro. Este ruido aparece en procesos cíclicos de largo plazo, como nivel de ríos, numero de manchas solares y cambios de precios en las bolsas

de valores. Y tres efectos están relacionados a este ruido: Efectos Joseph (efectos causados por tendencias y ciclos), Noah (discontinuidades hacia arriba y hacia debajo de las observaciones) y Mirror (de relación entre diferentes tipos de ruido). Además se ha encontrado que las series persistentes son las más comunes encontradas en la naturaleza y en los mercados de capitales y economía. Si $0 \leq H < 0.5$ significa antipersistencia en la serie de tiempo. Un sistema anti persistente cubre menos distancia que uno aleatorio, en el caso de una partícula errática. Para que ocurra debe dar marcha atrás así mismo con mayor frecuencia que en un proceso aleatorio. En este proceso se considera que se tiene ruido rosa. El ruido rosa abunda en la naturaleza y está relacionado a procesos de relajación (equilibrio dinámico) y turbulencia.

Algunos teóricos igualan este comportamiento con un proceso de reversión a la media, que sin embargo asume que el sistema bajo estudio tiene media estable. Suposición no tan fácilmente aceptada en este caso.

La ciencia occidental siempre ha tratado de encontrar ciclos periódicos o regulares debido a la importancia que tenían en la naturaleza los ciclos agrícolas y los eventos celestes. Esta creencia, proveniente también desde los antiguos griegos, creó un modelo de universo basado en el movimiento de los cuerpos en círculos perfectos. Sin embargo, en la economía y los mercados no hay razones para pensar que los ciclos tienen que ser periódicos. En la teoría de Caos, los ciclos pueden no ser periódicos y aunque tienen una duración promedio, la duración exacta de ciclos promedio no se conoce. Hurst (1951) fue el primero en notar que un comportamiento periódico de un subyacente puede ser detectado con un análisis R/S .

3.5.5. Procesos de Hurst

De acuerdo con Peters para valores muy grandes de observaciones se esperaría que el exponente H tienda a 0.5 y que el efecto de memoria de largo plazo se disipe. Este comportamiento asintótico de largo plazo nos dice que existen ciclos para los cuales los efectos de tendencia están presentes y a partir de un cierto valor las observaciones son independientes. Estos ciclos no son regulares y se llaman ciclos no periódicos. En una gráfica de un análisis R/S , el fin de cada ciclo de frecuencias y el inicio del siguiente puede detectarse visualmente de los breaks y flattening en las gráficas. Pero hay una forma más fácil de ver cuando los breaks en las gráficas \log / \log ocurren con el objeto de hacer una mejor estimación del ciclo. El siguiente estadístico fue propuesto por Hurst (1951) para probar la estabilidad. Se ha probado empíricamente que este estadístico proporciona una medida más precisa de la longitud del ciclo y trabaja particularmente bien en presencia de ruido.

Tal estadístico se define como:

$$V_n = (R/S)_n n^{1/2} \quad (3.27)$$

Un gráfico del estadístico v_n contra el logaritmo del número de observaciones $\log(n)$ sería plano u horizontal si el proceso fuera independiente y aleatorio. Por otra parte, si el proceso fuera persistente y R/S fuera escalado a una tasa mayor que el cuadrado de la raíz del tiempo ($H > 0.5$) entonces la distribución de puntos en la gráfica tendría pendiente creciente y si estuviéramos hablando de un proceso antipersistente ($H < 0.5$) la gráfica tendría una pendiente negativa. Graficando V_n en el eje Y y $\log(n)$ en el eje X , los "breaks" ocurrirían cuando el estadístico V se aplane, en esos puntos los procesos de memoria larga se han disipado.

Un análisis R/S es capaz de determinar ciclos periódicos, incluso cuando ellos son superpuestos.

La potencia real del análisis R/S es encontrar los ciclos no periódicos. Un ciclo no periódico no tiene frecuencia absoluta, en lugar de ello tiene una frecuencia promedio. Aunque nos hemos llegado a acostumbrar sobre las implicaciones de la palabra periódico cada vez que se utiliza la palabra ciclo.

El análisis R/S no es el único algoritmo para determinar el valor del exponente de Hurst. Se han desarrollado diferentes algoritmos para la determinación de este valor tales como:

- Método de Rugosidad.
- Método del Espectro de Potencia.

- Método de las Ondoletas.
- Método del Variograma.

De los cuales daremos una breve descripción.

Método de rugosidad-longitud

El método de rugosidad-longitud (SD) se toma la desviación estándar, o rugosidad de la raíz cuadrada de los datos, en las escalas de tiempo τ , en lugar del rango vertical. Para un trazado auto-afín, la rugosidad SD , medida en una escala de tiempo τ , esta relacionada con H como:

$$SD \propto \tau^H \quad (3.28)$$

Método del Variograma

En este método la distribución del tiempo X_i puede ser caracterizada por una función de semivarianza, llamada variograma, y se define como:

$$V(n) = \frac{1}{2N} \sum_{i=0}^{N/2} (X_i - X_{i+n})^2 \quad (3.29)$$

Donde N es el número de parejas de puntos separados por un intervalo n (el defasamiento del intervalo). Cuando la semivarianza estimada es graficada contra n , esta se aproxima asintoticamente a un valor constante (umbral) o puede incrementarse sin límites conforme aumenta n . Los variogramas sin límites sugieren que la variación es dándose en un rango continuo de escalas de tiempo. Tanto el variograma transitivo, con un umbral finito, y los variogramas sin límites pueden ser analizados en una grafica log-log. Pues si el logaritmo de una semivarianza es graficado contra el logaritmo de n , entonces la pendiente es $2H$. Por tanto:

$$V \propto \tau^{2H} \quad (3.30)$$

Un problema con el método del variograma es el intervalo de la muestra n y la determinación de la pendiente puede afectar la estimación de H .

Método del espectro de potencia

Este método, se basa en la forma espectral de un proceso dependiente a largo plazo. El método del espectro de potencia, tiene su origen en el análisis espectral el cual puede ser aplicado al análisis de series de tiempo. La función de densidad espectral del valor cuadrado de su media para diferentes frecuencias. La función de densidad del espectro de potencia es la transformada de Fourier de la función de auto-correlación:

$$S(\omega) = C(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C(n) \cos(2\pi\omega n) \quad (3.31)$$

Si $C(n)$ obedece a un escalamiento de ley de potencia, entonces.

$$S(\omega) \propto \omega^{-\alpha} \quad (3.32)$$

Donde $\alpha = 1 - \beta$ para pequeños ω . Para las series auto-afines tenemos que

$$\alpha = 1 - \beta = 1 + 2H \quad (3.33)$$

Por lo tanto tenemos

$$P \propto \tau^{-2H-1} \quad (3.34)$$

Método de las ondoletas

Las ondoletas son una extensión del análisis de Fourier y la transformada de las ondoletas es computacionalmente similar, la transformada de Fourier utiliza cosenos, senos y exponentes para representar una señal y es la más usada para analizar funciones lineales. A partir de que se sabe que muchas series de tiempo despliegan un comportamiento caótico no lineal, el análisis de Fourier es menos apropiado para analizar dichas series.

El método del coeficiente promedio de la ondoleta (AWC²) utiliza la transformada de la ondoleta para medir la auto-afinidad temporal de las correlaciones, es decir, es el método para H . esto se hace mediante la transformación de la serie de tiempo, $X(t)$, al dominio de las ondoletas $W[X](a; b)$, donde a denota un parámetro de escala dada de a , en encontrar una "ondoleta" representativa o amplitud a una escala específica. Esto se hace tomando el promedio aritmético de $W[X](a; b)$ sobre todos los trazos del parámetro b , correspondiente este último a un valor a en la misma escala. Se puede, por ende, construir, a partir de la transformada de la ondoleta de $X(t)$, el espectro de AWC $W[X](a)$, que solo depende de la escala a , y que fue definido anteriormente. Por tanto tenemos que si $X(t)$ es un proceso auto-afín, caracterizado por H , este espectro se escalaría como sigue:

$$W[X](a) = \langle |W(a, b)| \rangle_b \propto a^{H+1/2} \quad (3.35)$$

Al graficar $W[X](a)$, en una escala log-log, la pendiente debería ser $H + 1/2$, si la señal es auto-afín de multi-escala, en el sentido de que el comportamiento a diferentes escalas no tiene influencia de ninguna manera significativa; es decir, el método desacopla escalas.

En esta sección se han revisado conceptos de la geometría fractal necesarios, debido a la asociación con los conceptos de escalamiento y su aplicación en el análisis de interfases rugosas, concepto que se estudiara en el siguiente capítulo. Mostraremos los conceptos inherentes al estudio de las interfases, comenzando por la transición de fijado, pues este fenómeno da lugar a la presencia de interfases para el estudio de los frentes mojados en medios granulares, de nuestro interés para el caso de estudio.

²the Average Wavelet Coefficient Method

Capítulo 4

Transición de fijación

La existencia de Transición de fijación se distingue por interfaces en movimiento en un medio desordenado. Para entender el origen de la Transición de fijación, comenzaremos con el siguiente ejemplo. Movimiento de una partícula con fricción en la figura 4.1 (a) mostramos una partícula de masa m en un plano, en movimiento por un fuerza externa F , existen además dos de fricción actuando sobre la partícula: fricción estática F_c , y fricción dinámica $\rho \frac{dr}{dt}$ proporcional a la velocidad. Para $F < F_c$, $v = 0$. Para $F > F_c$ la ecuación de movimiento es

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F - F_c - \rho \frac{dr}{dt} \quad (4.1)$$

después de un cierto periodo, la partícula alcanzara cierta velocidad v y el termino constante de aceleración puede pasarse por alto. Entonces existen dos regímenes como una función de la fuerza externa F como se muestra en la figura 4.1 (b)

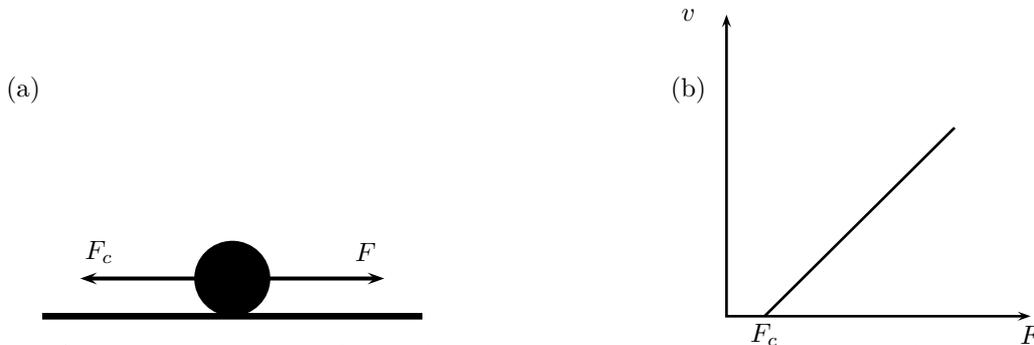


Figura 4.1: Transición de fijación de una partícula en un plano (a) La partícula de masa m en movimiento por la fuerza externa, F , a la derecha, y la fuerza de fricción F_c actua contra el movimiento. (b) La velocidad de la partícula como una función de la fuerza motriz externa.

Fase de fijado Si $F < F_c$, las fuerzas motrices no pueden superar la fricción estática, tal que a velocidad de la partícula es cero.

Fase en movimiento si $F > F_c$ la velocidad es $v = \frac{F - F_c}{\rho}$, proporcional a la fuerza reducida

$$f \equiv \frac{F - F_c}{F_c} \quad (4.2)$$

la transición de una partícula fija a la partícula en movimiento es llamada Transición de fijación, y toma lugar una fuerza F_c crítica, en las vecindades de la Transición de fijación, la velocidad media tiene la forma

$$v \sim f^\theta \quad (4.3)$$

donde θ es el exponente de velocidad. En el ejemplo, $v \propto f$ tal $\theta = 1$

4.1. Interfases en un medio desordenado.

Consideremos la situación general de una interfase en un medio poroso, como se muestra en la figura, con una fuerza motriz F actuando en la interfase en dirección vertical. Esta es una generalización de la partícula en movimiento de la figura anterior. En lugar de una sola partícula, extendemos esto como una cadena que tiene tensión superficial y así intenta mantenerse, el desorden actúa como una fuerza de fricción no homogénea, las partes fijas de la interfase. Sin embargo, otras partes son libres para avanzar, y estas tratan de mover a sus partes vecinas de la interfase.

La ecuación más general que describe el movimiento de una interfase es la ecuación **KPZ**. En un medio desordenado, sin embargo es más importante el ruido apagado generado por el desorden que el ruido térmico (siempre presente). Así el término $\eta(x, t)$ del ruido térmico es reemplazado por el ruido apagado $\eta(x, h)$. La ecuación **KPZ** se escribe.

$$\frac{\partial h}{\partial t} F + v \nabla^2 h + \frac{h}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, h) \quad (4.4)$$

asumimos que $\eta(x, h)$ tiene media cero ($\langle \eta(x, h) \rangle = 0$) y correlaciones de la forma

$$\langle \eta(x, h) \eta(x', h') \rangle = \delta^d(x - x') \Delta(h - h') \quad (4.5)$$

donde los brackets representan el promedio sobre las diferentes realizaciones aleatorias. La forma explícita de la función $\Delta(h - h')$ la discutiremos más abajo.

Notemos que si arreglamos la aleatoriedad apagada $\nabla(x, h)$ para un sistema dado la evolución de la interfase es determinista, es decir, siempre obtendremos la misma interfase final si comenzamos las simulaciones con las mismas condiciones iniciales. En contraste, la ecuación **KPZ** es estocástica; recomenzando la interfase de las mismas condiciones iniciales resulta en una configuración final diferente.

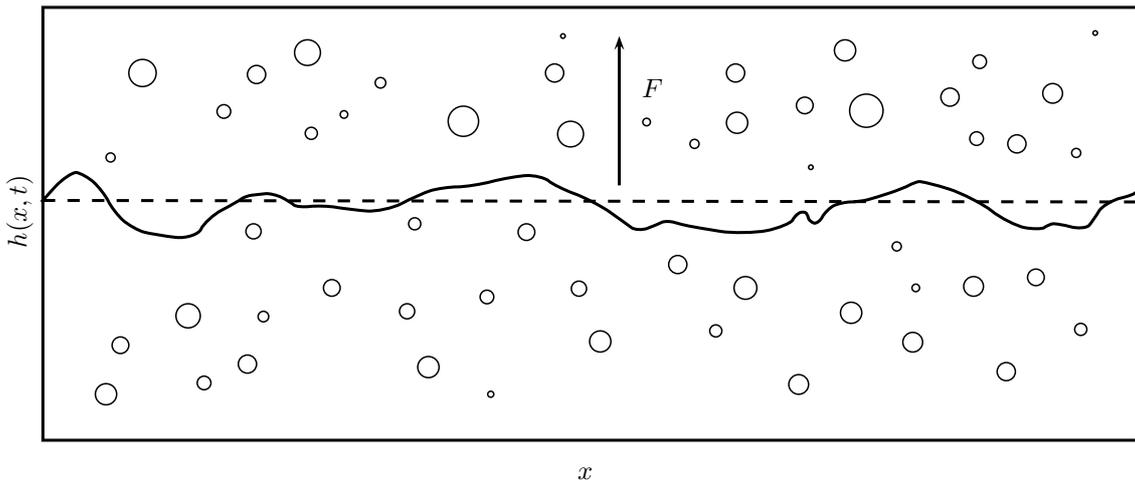


Figura 4.2: Los círculos representan los centros fijos distribuidos aleatoriamente, todos en posición y la fuerza de fijación es independiente del tiempo

Existen tres regímenes previstos por la ecuación de crecimiento (4.4) como indica la figura 4.3

- a) pinned phase. En la ausencia de un campo externo las interfases se mueven hasta estar cerca de una configuración donde la energía tiene un local mínimo, después de lo cual viene el fijado, si añadimos un fuerza motriz F pequeña, la interfase tendra a moverse en la dirección de F pero que eventualmente se transformara en fijación por impurezas.
- b) movimiento de fase crítico. Si incrementamos la fuerza motriz, la interfase supera la fuerza de fijado de impurezas en una fuerza crítica F_c , y comienza a moverse en una velocidad finita. En la proximidad inmediata de la fuerza F_c , la velocidad sigue (4.3). el movimiento de la interfase justo por encima del umbral no es uniforme. En un momento dado la interfase esta formada por regiones fijas y no fijas. Uno de los efectos combinados de las fuerzas elásticas y motrices supera las fuerzas de fijación en una región particular, la interfase salta por delante pero esta eventualmente es detenida nuevamente por otra región de sitios fijos mas fuertes. Así la interfase exhibe un lento movimiento suave, intercalado con saltos.

Denotamos por ξ al tamaño de correlación, correspondiente al tamaño característico de los dominios del fijado. Al aproximar la fuerza critica $F \rightarrow F_c$, el tamaño de la regiones diverge como

$$\xi \sim (F - F_c)^{-v} \quad (4.6)$$

donde v es llamado el exponente de correlación de tamaño.

- c) régimen de gran velocidad. Si $F \gg F_c$ la interfase siente una rápida fluctuación de ruido, entonces la velocidad se incrementa linealmente con F . En este régimen el movimiento puede ser descrito mediante la ecuación **KPZ**, las fluctuaciones termales limpian el efecto de la aleatoriedad apagada. La correlación de tamaño se hace igual a la red de espaciamiento del modelo.

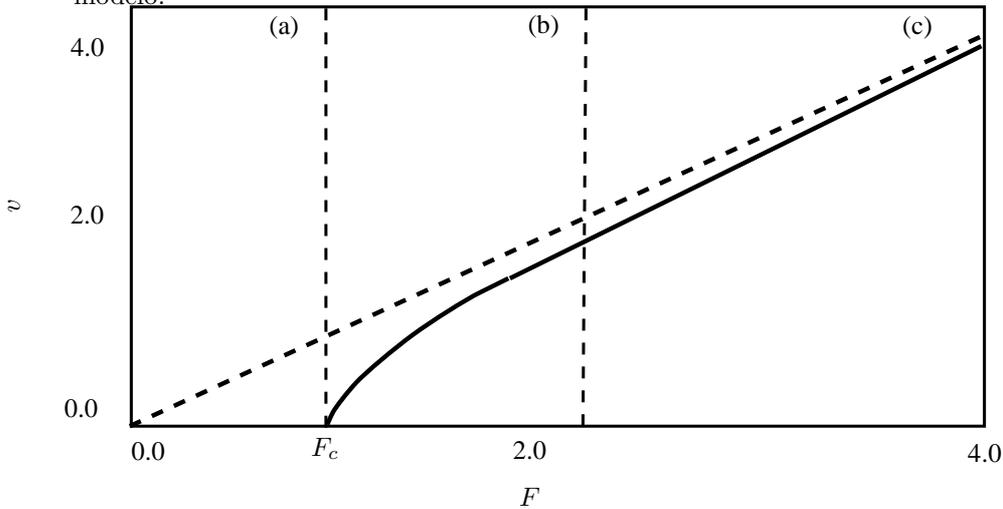


Figura 4.3: La figura muestra tres regímenes, (a) Para $F < F_c$ la velocidad de la interfase es cero, se cubrio por aleatoriedad apagada. (b) cerca de la Transición de fijación para $F > F_c$, la velocidad varia de acuerdo a (4.3). (c) Finalmente, para fuerzas motrices grandes, $F \gg F_c$, la velocidad de la interfase es proporcional a la fuerza motriz. Las unidades de velocidad y fuerza son arbitrarias.

4.2. Fijación por percolación directa

En esta sección se discute el modelo **DPD** (Directed Percolation Depinning o fijación por percolación directa.), el cual tiene un término no-lineal divergente. Los exponentes de escalamiento se

pueden obtener exactamente mapeando el problema de la fijación de la interfase sobre una variante de percolación llamada percolación orientada. La conexión entre la superficie en crecimiento con el desorden inherente y percolación orientada fue propuesta originalmente por dos estudios independientes [26, 27]. Aparentemente, varios modelos diferentes también pertenecen a la misma clase de universalidad [28].

El modelo se define como sigue: sobre una red cuadrada de borde L (con condiciones frontera periódicas), se bloquea una fracción p de las celdas que corresponden al desorden inherente. Las celdas bloqueadas tratarán de detener el crecimiento, mientras que la interfase es libre de avanzar sobre celdas no bloqueadas. En $t = 0$, la "interfase" es la línea horizontal negra, como se muestra en la figura 4.4(a). En $t = 1$ se elige aleatoriamente una celda (etiquetada con X, como se muestra en la figura 4.4(b) de entre las celdas no bloqueadas que son los vecinos más cercanos a la interfase. Se "moja" la celda X y cualquiera de las celdas que están debajo de ella en la misma columna. Luego, este proceso se itera. Por ejemplo, la figura 4.4(c) muestra que en $t = 2$ se elige una segunda celda no bloqueada, la celda Y, para mojarla, mientras que la figura 4.4(d) muestra que en $t = 3$ se moja la celda Z y también la celda Z' debajo de ella.

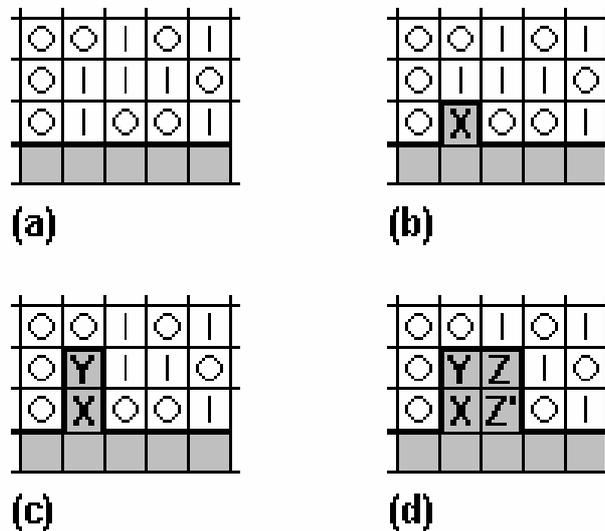


Figura 4.4: Modelo DPD para el crecimiento de una interfase. Las celdas "húmedas" están sombreadas, mientras que las celdas "secas" son bloqueadas aleatoriamente con probabilidad p (indicadas por O) ó aleatoriamente no bloqueadas con probabilidad $(1 - p)$ (indicadas por I). (a) $t = 0$, (b) $t = 1$, (c) $t = 2$, y (d) $t = 3$

Para p debajo de un umbral crítico $p_c = p_c(L)$ la interfase se propaga sin detenerse, mientras que para p arriba de p_c la interfase es fijada por las celdas bloqueadas. La figura 4.5 muestra una interfase típica después de que ha parado su crecimiento: esto sucede solo cuando la interfase se extiende mediante una trayectoria completa de celdas bloqueadas conectadas a través de los vecinos más cercanos y los próximos vecinos más cercanos. La definición del modelo excluye aquella trayectoria que tiene regiones sobresalientes, y por lo tanto es equivalente a una trayectoria que se extiende por toda la red cuadrada que va de izquierda a derecha. Tal trayectoria orientada es, de hecho, una trayectoria en un cluster de percolación orientada. Realmente, se puede mostrar que la interfase fijada en el modelo corresponde al perímetro externo de un cluster de percolación orientada.

Cuando la probabilidad de celdas bloqueadas p esta arriba de p_c , el crecimiento de la interfase se detiene por la formación de un cluster de percolación orientada que se extiende a lo largo de todo

el sistema, L . Tal cluster orientado es caracterizado por una longitud de correlación paralela a la interfase, ξ_{\parallel} ; y una longitud de correlación perpendicular a ella, ξ_{\perp} . Su significado es el siguiente: bloqueando una fracción p de sitios sobre la red, los sitios bloqueados forman trayectorias orientadas cuya longitud promedio es ξ_{\parallel} y cuyo ancho es ξ_{\perp} . Las dos longitudes de correlación divergen en la vecindad de p_c :

$$\xi_{\parallel} \sim |p - p_c|^{-v_{\parallel}} \quad (4.7)$$

$$\xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{-v_{\perp}} \quad (4.8)$$

A partir de cálculos de filtración orientada, se sabe que $v_{\parallel} \cong 0.733$ y $v_{\perp} \cong 1.097$ [108].

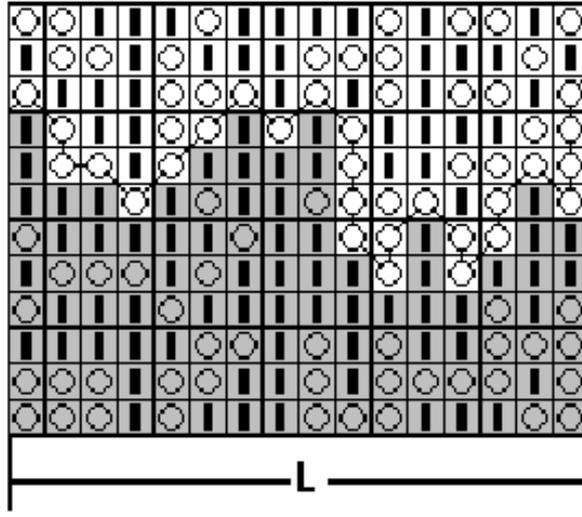


Figura 4.5: Se muestra con línea negra, la trayectoria de fijación se ha formado las celdas bloqueadas con sus vecinos más cercanos y sus próximos vecinos más cercanos para fijar la interfase[108].

Para $p \ll p_c$, $\xi_{\parallel} \ll L$. Las trayectorias orientadas fijan localmente la interfase, pero la interfase se mueve eventualmente con una velocidad promedio diferente de cero avanzando entre las trayectorias bloqueadas. Una trayectoria completa de fijación aparece cuando ξ_{\parallel} llega a ser igual al tamaño del sistema L . El ancho w de tal trayectoria es del orden de ξ_{\perp} . De aquí que, usando las ecuaciones 4.7, 4.8 se puede obtener el escalamiento del ancho:

$$w \sim \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{-v_{\perp}} \sim \xi_{\parallel}^{v_{\perp}/v_{\parallel}} \sim L^{v_{\perp}/v_{\parallel}} = L^{\alpha} \quad (4.9)$$

a partir de la cual se obtiene el exponente de rugosidad:

$$\alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = 0.633 \pm 0.001 \quad (4.10)$$

Este resultado ha sido confirmado por estudios numéricos sobre el escalamiento de la interfase fijada. La probabilidad crítica p_c debe coincidir con la probabilidad crítica del problema fundamental de percolación orientada, dando $p_c \cong 0.47$

Es sencillo conectar de forma cuantitativa la imagen de una interfase moviéndose en un medio con desorden apagado, con el comportamiento que aparece en el modelo. La fuerza motriz F corresponde a la probabilidad $1 - p$, y F_c a $1 - p_c$. Para $p < P_c$ la interfase se mueve con velocidad

finita, localmente se fija por el ruido sobre el dominio del tamaño característico ξ_{\parallel} . Por lo tanto ξ_{\parallel} puede identificarse con ξ en el lenguaje de la interfase (ver 4.6), y v_{\parallel} con v .

En esta etapa, se obtiene valores exactos para dos de los cuatro exponentes (α y ν). Enseguida estimamos la velocidad de la interfase. Para hacer esto debemos definir el tiempo en el modelo. Usualmente en los modelos de crecimiento, la unidad de tiempo corresponde a L intentos de crecimiento. En el modelo no todos los intentos por crecer terminan en crecimiento: si escogemos un sitio dado en la interfase, en intentar que crezca en una dirección donde el sitio esta bloqueado, no puede crecer. Por lo tanto el número de sitios adyacentes a la interfase que puedan crecer es proporcional al número de sitios libres vecinos a la interfase. El número de sitios vecinos bloqueados a la interfase es proporcional a ξ_{\parallel} , por lo tanto podemos asumir que el número de sitios libres es proporcional a $1/\xi_{\parallel}$. Si la interfase se las arregla para ir a través de un camino ya fijado, esta avanza sobre una longitud vertical del orden ξ_{\perp} , el ancho de la dirección bloqueada. Por lo tanto se obtiene la velocidad de la interfase cerca de p_c

$$v(p) \sim \xi_{\perp}/\xi_{\parallel} \sim |p - p_c|^{v_{\parallel} - v_{\perp}} \quad (4.11)$$

para el cual el exponente de velocidad (4.3) es

$$\theta = v_{\parallel} - v_{\perp} = 0.636 \quad (4.12)$$

Un simple argumento proporciona el valor del exponente dinámico z . El tiempo necesario para fija un dominio de tamaño ξ_{\parallel} es lineal en t , entonces $\xi_{\parallel} \sim t$.

Motivados por el crecimiento de la interfase y las herramientas que proporciona la teoría fractal, además de la posible relación del fenómeno del Creep a fenómenos de naturaleza no termal, en el siguiente capítulo estudiamos dicho fenómeno.

Capítulo 5

Creep

En muchas aplicaciones los componentes se ven obligados a soportar cargas constantes durante lapsos prolongados, como por ejemplo álabes de rotor de turbina, filamento de tubos y válvulas, cables de acero, etc. En tales circunstancias el material puede continuar deformándose hasta que su utilidad se ve seriamente perjudicada. Tales tipos de deformaciones dependientes del tiempo pueden ser casi imperceptibles, pero crecen durante toda la vida útil de la pieza y llevan a la fractura, aún sin que la carga haya aumentado. Con cargas aplicadas por corto tiempo, como en un ensayo de tracción estático, hay una deformación inicial que aumenta simultáneamente con la carga. Si, bajo cualquier circunstancia, la deformación continúa mientras la carga se mantiene constante, a esta deformación adicional se le conoce como CREEP. El fenómeno conocido como "creep", se define como: "la parte dependiente del tiempo de las deformaciones provenientes de tensiones". Debido a su estrecha conexión con altas temperaturas en aplicaciones importantes, se suele asociar al creep con problemas vinculados con temperaturas elevadas. Esto es cierto únicamente si las temperaturas elevadas se definen relativas al punto de fusión T_m .

El Creep es la deformación lenta y continua de un material bajo esfuerzo constante, en general el Creep es descrito en términos de 3 etapas ilustradas en la figura 5.1. La primer etapa o primaria, se observa una caída de la velocidad, en la segunda etapa o secundaria se observa velocidad constante y la última etapa ocurre cuando la velocidad se incrementa y termina en la fractura del material.

La tensión ε en cualquier instante del tiempo t en una prueba del Creep en un material lineal se representa como la suma de la tensión elástica ε^e y la tensión del Creep ε^c .

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c \quad (5.1)$$

La velocidad de cambio del Creep ε es hallada por diferenciación y jamas ε^e es una constante

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon^e}{dt} \quad (5.2)$$

Históricamente el fenómeno del creep es asociado a los aspectos metalúrgicos y estos han sido tratados en infinidad de libros [29], en gran parte de las publicaciones el concepto de fractura o dislocaciones se ha empleado para explicar el fenómeno del creep o se ha asociado el creep a estos conceptos, dicho fenómeno se liga a la estructura de los metales.

5.1. Creep de los metales

Un primer estudio resultado de la observación del fenómeno fue reportado en 1834 por Vicat [30] y Thurtson en 1895 [31] propuso las tres etapas del creep como se muestra en la figura 5.1 asociado

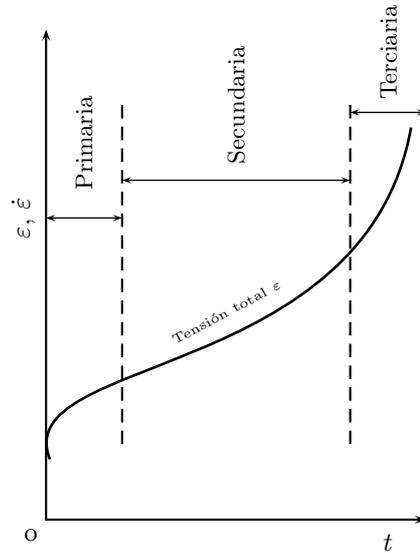


Figura 5.1: Etapas del fenómeno del Creep. La primer etapa o primaria, se observa una caída de la velocidad, en la segunda etapa o secundaria se observa velocidad constante y la ultima etapa ocurre cuando la velocidad se incrementa y termina en la fractura del material.

a la relajación bajo esfuerzo. Andrade al investigar el creep en cables conductores bajo una carga constante en 1910 propuso la primera ley del creep como sigue [32]

$$l = l_0(1 + \beta t^{1/3})e^{kt} \quad (5.3)$$

Donde l , L_0 son longitud inicial y actual del material, respectivamente, t es el tiempo bajo la carga, β y k son constantes del material que dependen de la tensión. Desde entonces varias ecuaciones empíricas han sido propuestas para modelar la dependencia del esfuerzo respecto al creep de los metales basados en observaciones experimentales. El estado estable del creep particularmente ha sido estudiado en gran detalle. Bailey [33] y Norton [34] propusieron de manera empírica la ecuación que mejor ajusta a los datos experimentales para el creep estable bajo esfuerzos pequeños

$$\dot{\epsilon} = k\sigma^p \quad (5.4)$$

donde $\dot{\epsilon}$ es la velocidad del estado estable, σ es el esfuerzo aplicado, k y p son constantes del material. Valores de p han sido hallados entre 3 y 7. La ecuación 5.4 es llamada la ley de potencia o ley del creep de Norton. La ley exponencial 5.5 dada abajo, fue propuesta por Ludwik [35] y esta es una excelente aproximación para la velocidad de cambio del creep durante su etapa estable

$$\dot{\epsilon} = ke^{\sigma/\sigma^+} \quad (5.5)$$

donde k y σ^+ son constantes del material. Ambas leyes, de potencia y exponencial son usadas para representar la dependencia del esfuerzo cuando los metales u otros materiales exhiben un comportamiento de flujo viscoso, bajo cargas constantes y esfuerzo uniaxial. Soderberg [36] propone la ecuación

$$\dot{\epsilon} = c(e^{\sigma/\sigma^+} - 1) \quad (5.6)$$

donde c y σ^+ con constantes del material. Algunos otros escritores han empleado la función seno hiperbolico para describir la dependencia del esfuerzo con respecto al estado estable del creep.

$$\dot{\epsilon} = D \sinh \frac{\sigma}{\sigma^+} \quad (5.7)$$

donde D y σ^+ son constantes del material. La ecuación 5.7 representa un comportamiento cercano a un comportamiento lineal para esfuerzos pequeños y un comportamiento no lineal para esfuerzos grandes. Las ecuaciones empíricas que se muestran modelan adecuadamente la segunda etapa del creep para ciertos metales en tensión bajo un esfuerzo constante para temperaturas donde la velocidad del creep se considera pequeñas.

Para algunos metales y aplicaciones donde se involucran tiempo de cargas relativamente pequeños se ha usado la ecuación para modelar la tensión en el creep,

$$\epsilon^c = k \sigma^p t^n \quad (5.8)$$

de lo cual la tasa del creep $\dot{\epsilon}$ es

$$\dot{\epsilon} = kn \sigma^p t^{n-1} \quad (5.9)$$

donde k y p y n son constantes del material. La ecuación 5.9 puede generalizarse por

$$\epsilon^c = f(\sigma)g(t) \quad (5.10)$$

donde $g(t)$ representa una función adecuada con respecto al tiempo. Esto se puede observar como una función potencial de la forma t^n donde esta resulta un excelente arreglo para muchos experimentos en diferentes materiales como plásticos, metales y concreto. El exponente n es generalmente menor a 5

5.2. El Creep como un proceso de fusión controlado

EL Creep es un proceso térmicamente activado, donde la velocidad de elongación para un esfuerzo dado se incrementa significativamente con la temperatura. Por ejemplo, el motor de un jet puede alcanzar temperaturas locales de 1200° , entonces el proceso del Creep es de vital importancia en la selección de materiales y procesos asociados a estos. Debemos hacer notar que el termino "alta temperatura" es relativa y depende del material considerado inicialmente. Para el material de un motor de jet alta temperatura es aproximadamente de 800° C, mientras que para polímeros alta temperatura es 25° el comportamiento del Creep es altamente sensible a la microestructura del material. Bajo estas circunstancias las etapas del Creep tambien se describen por las ecuaciones [37].

$$\epsilon = At^{1/3} \quad (5.11)$$

donde ϵ es la tensión del Creep, A es una constante del material, y t es el tiempo

En algún punto, la dinámica del equilibrio es establecida entre la carga aplicada y la microestructura del material tal que la velocidad mínima del Creep es establecida. En esta región existe una relación lineal entre el esfuerzo del Creep y el tiempo

$$\epsilon = \epsilon_o + \beta t \quad (5.12)$$

donde β es una constante del material, esta ecuación se establecio para el estado estable del Creep. Para temperaturas y cargas típicas de las aplicaciones en ingeniería, el estado estable es la etapa que mas se extiende que cualquier otra y es la propiedad mas importante de la curva tensión/esfuerzo/tiempo.

Finalmente, cuando la elongación es considerable, aparecen defectos graves dentro del material, y la velocidad de elongación se incrementa rápidamente, esta es la tercer etapa y el esfuerzo se incrementa exponencialmente con respecto al tiempo. La relación esfuerzo tiempo para esta etapa esta dada por

$$\varepsilon = B + C \exp(\gamma t) \quad (5.13)$$

donde B , C y γ son constantes del material.

La difusión en un nivel atómico está relacionado significativamente con el fenómeno del Creep, por tanto el incremento de la movilidad atómica a elevadas temperaturas es de vital importancia en el estudio del Creep, este, se manifiesta en temperaturas mayores a $0.3T_m$, donde T_m es la temperatura de fusión absoluta. En temperaturas alrededor de $0.5T_m$, se presentan los mecanismos de deformación como Nabarro-Herring Creep, Coble Creep y Dislocation Creep, donde estos han sido estudiados ampliamente en metales y materiales cerámicos. El Creep entonces puede ser un proceso de difusión controlado en el cual la etapa primaria, y el estado estable para una variedad amplia de temperaturas es modelado por la relación de Arrhenius. Dorn definió el parámetro θ con respecto al tiempo como sigue [37]:

$$\theta = t \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \quad (5.14)$$

donde t es el tiempo, Q es la activación de energía para la difusión, T es la temperatura absoluta, y R es la constante universal de los gases.

La deformación originada por el Creep es importante no sólo en los sistemas donde las altas temperaturas se soportan, tales como plantas de energía nuclear, reactores y cambiadores de calor, sino también en el diseño de muchos objetos cotidianos. Por ejemplo, los clips de metal de papel son más fuertes que los de plástico debido a la fluencia de plástico a temperatura ambiente. El envejecimiento de vidrios de ventanas son a menudo erróneamente usadas como ejemplo de este fenómeno: la fluencia medible sólo se producen a temperaturas por encima de la temperatura de transición vítrea alrededor de 500°C (900°F). Si el cristal exhibe condiciones adecuadas de deformación del creep, en ventanas viejas esto da lugar a pensar que puede ser una consecuencia de los procesos de producción obsoletos, para la fabricación de cristal, que se tradujo en espesor irregular y por tanto la fluencia de dicho material [38, 39].

La mayoría de los estudios de los fenómenos de fluencia se dedican a la propuesta de la fluencia térmicamente activado, que es ubicuo en sistemas desordenados y describe una gran cantidad de fenómenos de baja temperatura de transporte. Estos incluyen el movimiento de la pared de dominio magnético en películas delgadas [57], la dinámica de la dislocación en medios heterogéneos [59] y muchos otros (ver [54] - [59] y sus referencias). Sin embargo estudios recientes han descrito el fenómeno del creep como un proceso no necesariamente térmico. Además esto asociado a medios granulares, y procesos de imbibición que no han sido completamente entendidos, por ello en el siguiente capítulo, presentamos el estado del arte con respecto a los fenómenos en conjunto, descritos en los capítulos anteriores.

Capítulo 6

Estado del Arte

Las investigaciones y experiencias realizadas sobre los tópicos estudiados en este trabajo de tesis, se han dirigido y organizado en diferentes vertientes, destacándose la aplicación en recuperación de petróleo. Khosrow Naderi, Tayfun Babadagli, demostraron que mediante el uso de radiación ultrasónica se incrementa la recuperación de petróleo. Con tendencias similares de recuperación, observadas en casos de agua/mojada con y sin saturación inicial de agua. Donde comparando diferentes viscosidades en experimentos agua/mojada, verificaron que el efecto de la energía ultrasónica tiene una recuperación menor con viscosidades altas. También el efecto de la radiación ultrasónica en la recuperación es más significativa en casos de aceite/mojado, en estos experimentos de aceite/mojado la presencia inicial de saturación de agua facilita la recuperación de petróleo bajo ultrasonido. Esto fue observado mediante la realización, de experimentos de penetración y experimentos de imbibición [40].

Aunque la idea de utilizar ondas sonoras para mejorar la producción de petróleo no es nuevo. En un estudio inicial, Duhon y Campbell [41] realizaron pruebas de inyección de agua en muestras de piedra arenisca con y sin energía ultrasónica. Se observó un incremento en la recuperación final, cuando los experimentos se realizaron en condiciones de radiación ultrasónica. La recuperación final fue inversamente proporcional a la frecuencia de las ondas ultrasónicas. Los autores atribuyeron la recuperación adicional al posible aumento de la presión hallada y asociada con el colapso de cavidades y burbujas de gas en la generación de presiones de sonido líquido de gran tamaño.

Mucho más tarde, Aarts y Cols [42] estudiando los mecanismos de transporte peristáltica, teóricamente y experimentalmente, se centra en el proceso en que la radiación ultrasónica deforma las paredes de los poros en forma de ondas transversales. Señalaron que la velocidad en el capilar aumenta y esto debido por el aumento de la radiación ultrasónica con una potencia cada vez mayor. Esto también es controlado por la dureza de la pared del tubo capilar. Kuznetsov et al [43] estudió el efecto de la energía de vibración sobre el promedio de desplazamiento de inyección de agua y los coeficientes de permeabilidad relativa. Se observó un aumento en el aceite/agua en relación de la permeabilidad cuando la vibración se aplica. En un estudio sucesivo, Kuznetsov et al. informó de una recuperación significativa de los pozos de petróleo adicionales en Rusia, cuando fueron estimuladas por energía de vibración [44] Nikolaevskiy et al. [45] provee una interpretación del proceso de recuperación mediante vibraciones sísmicas, donde además describe los requisitos de la onda, la generación y propagación de ondas en medios porosos saturados de petróleo. La energía ultrasónica también fue probada para reducir el daño causado por la formación de barro fino y sólido [46, 47] Roberts y Cols [48] demostraron que la agitación mecánica proporcionada por las ondas acústicas restituye la parafina y restaura la permeabilidad efectiva del núcleo. Beresnev y Johnson [49] proporcionan una extensa revisión de la aplicación de la energía ultrasónica en la recuperación mejorada del petróleo y la industria química. Los efectos de las ondas de ultrasonido en la separación de mezclas y eliminación de contaminantes son relativamente bien conocida en comparación con su efecto sobre el transporte en medios porosos [50, 51, 52]

T. Hamida, y T. Babadagli muestran que la energía ultrasónica mejora la imbibición capilar

y aumenta la recuperación de petróleo, para diferentes pares de líquidos. Solo, experimentos con agua/aire mostraron menos cantidad de agua embebida cuando el ultrasonido se aplica. Las burbujas aleatorias atrapadas y la dispersión acústica se consideraron las posibles razones para esto. Además el ultrasonido no parece tener un efecto importante sobre la mojabilidad. Sin embargo observaron una relación implícita entre la tensión interfacial y el parámetro ω exponencial de la ecuación que se muestra a continuación

$$\frac{R}{R_\infty} = 1 - e^{-\omega t^n} \quad (6.1)$$

donde ω y n son los parámetros que controlan la tasa de imbibición capilar y funciones de la roca y propiedades del fluido; que regula la recuperación de imbibición capilar. La mayor contribución de la energía ultrasónica en el incremento de recuperación es debido al cambio en la tensión interfacial entre la fase acuosa y no mojada. Sin embargo recomiendan necesario investigar más a fondo si este cambio se debe a una alteración bajo el efecto de ultrasonidos o por causas relacionadas con la interacción roca-fluido debido a la vibración [53].

Los estudios de las última década enfocados a este tópico, asumen, que la mejora en recuperación de petróleo es debida a las vibraciones inducidas por las ondas ultrasónicas y abordan el análisis con experimentos de imbibición y atribuyen cambios a la tensión interfacial, deformación de poros, viscosidades, saturación de agua y la presencia de fases es el común denominador en todos los casos debido al comportamiento del medio, por otra parte el fenómeno del creep a sido estudiado en diferentes sistemas. En sistemas como movimiento de la pared de dominio magnético en películas delgadas, ondas de densidad de carga, la dinámica de dislocación en medios heterogéneos, en todos estos sistemas la competencia entre el desorden espacial y la elasticidad de la interfase conduce a configuraciones de fijado, caracterizado por el exponente de rugosidad ζ_p en temperaturas finitas, debido a las fluctuaciones termales la velocidad del creep obedecen al comportamiento de Arrhenius

$$v \propto \exp\left(\frac{-U(F)}{T}\right) \quad (6.2)$$

con una barrera de conducción de campo la energía depende $U(F < F_c) > 0$, estas barreras están relacionadas con el exponente de rugosidad de la interfase ζ y sus orígenes. Usando argumentos de escalamiento los autores de [56] muestran que U crece como $U \propto F^{-\mu}$ donde

$$\mu = \frac{d - n + 2\zeta}{n - \zeta} \quad (6.3)$$

Donde μ es el exponente que caracteriza al creep, d es la dimensión topológica de la interfase, n es el exponente K-espacial de caída del centro elástico (para grandes rangos de elasticidad $n = 1$, donde para el caso local $n = 2$ [55]) y ζ es el exponente de rugosidad de equilibrio que depende solo de la clase de universalidad del desorden, n y d [54].

El fenómeno del creep se ha asociado a estudios no termales, bajo la hipótesis de que si las fluctuaciones termales son muy pequeñas entonces la influencia termal externa se puede considerar cero [60, 61]. Por esta razón el fenómeno del creep no termal, se presenta en medios granulares bajo vibraciones débiles. Los autores de [62] muestran que bajo condiciones ambientales, la energía térmica no tiene consecuencias para los granos atascados en configuraciones aleatorias, a menos que cierta energía mecánica se suministrada, por ejemplo vibraciones. En [63] se demuestra que una pila de granos alcanza el estado estable con una densidad final que depende solo de la intensidad de las vibraciones. Dado lo anterior Edwards y sus colaboradores [64] han formulado una teoría microscópica para el estado estable para medios granulares bajo vibración, similar a la mecánica estadística convencional. Mas aun ellos asumen que el estado estable esta totalmente caracterizado por el volumen del sistema, que también juega un rol análogo a la energía en los sistemas térmicos usuales, lo anterior proporciona la descripción microcanonica. La distribución de probabilidad asociada es obtenida por maximizar la entropía estadística bajo la condicion, que el promedio del volumen es dado. La probabilidad de una configuración dada sólo depende de su volumen y se

puede encontrar como el máximo de la entropía bajo la restricción de que el volumen del sistema sea dado. La entropía S es definida análoga a la mecánica estadística clásica como $S(V, N) = k \ln \Omega$. Donde Ω es el número de configuraciones mecánicas estables de N partículas por volumen V y k es la constante de Boltzman [64]. El parámetro $X = \partial V / \partial S$ que involucra el volumen es la forma análoga de la temperatura en sistemas térmicos usuales, esto recibe el nombre de compactividad¹. La compactividad caracteriza la distribución de equilibrio entre los estados inherentes y dependen solo del promedio de la energía precisamente de los estados inherentes y no de la dinámica particular usada [64]. Por lo tanto esto puede ser interpretado como las formas posibles de organizar los granos dentro del volumen ΔV cuando la entropía ΔS cambia. El enfoque de Edwards a los medio granulares también vincula la compactividad al promedio de volumen del sistema y estas fluctuaciones a través de una versión granular de la relación de fluctuación de disipación

$$\langle \delta V^2 \rangle = X^2 \frac{\partial V}{\partial X} \quad (6.4)$$

donde $(\partial V / \partial X)$ juegan el rol de calor específico en el equilibrio termodinámico [65]. Debido al movimiento de disipación interna de los materiales granulares solo puede mantenerse por un suministro de energía. También en [62] se demuestra que para medios granulares vibrando verticalmente o de forma sinusoidal bajo gravedad, el parámetro de control mas importante es la tasa de aceleración máxima de la base en vibración y la aceleración gravitacional.

$$G = A \frac{\omega^2}{g} \quad (6.5)$$

donde A y ω son la amplitud y frecuencia de vibración respectivamente. Incluso bajo excitaciones debiles con $G < 1$ producen un comportamiento rico con respecto a su dinámica, que es dominado por el movimiento de grano o por las variaciones de las fuerzas en contacto [66].

Los autores en [67] han desarrollado estudios sistemáticos de la densidad en medios granulares bajo vibración como una función del tiempo, han encontrado que bajo las vibraciones, la densidad de la pila se aproxima lentamente a un valor de estado final estable que esta sobre la densidad de las fluctuaciones. Bajo las vibraciones, la raíz cuadrada de las fluctuaciones observadas en la medida de las densidades son típicamente del orden de la magnitud del promedio de si mismo y esto sigue el mismo tipo de la dinámica inversa logarítmica. Esta dinámica fue observada experimentalmente en la compactación de medios granulares reales bajo una sucesión de grifos [68]. También se ha demostrado que la fluctuación de las densidades son necesariamente acompañadas por las fluctuaciones de volumen de poro que deben afectar la fuerza de imbibición y las fuerzas de los frentes fijos mojados en un medio poroso granular [69].

Los efectos de las vibraciones acústicas en flujo de fluidos en medios porosos han sido estudiadas en el pasado [70, 71] y se espera que las vibraciones cambie las propiedades del medio y fluidos así como las interacciones líquido-líquido, líquido-sólido y gas-líquido [72]. Aunque, el efecto de la vibración en el proceso de imbibición y los fenómenos asociados aún no se entiende bien.

A pesar de la termodinámica de Edward, uno puede esperar observar el fenómeno del creep (fluencia) asociado a las fluctuaciones no térmicas (6.3), cuando el frente mojado (imbibición) en medios granulares bajo vibraciones débiles se mueve con una velocidad controlada por la intensidad de fluctuación. Por analogía con el creep termal y cuántico, podemos suponer que la velocidad del creep (fluencia) debe obedecer de forma análoga a la ley de Arrhenius en la forma

$$v_{cr} \propto \exp \left(- \frac{U(F_c/F)}{kX} \right) \quad (6.6)$$

Donde la barrera de energía U es determinada por la relación de la fuerza de fijado F_c y la presión capilar F , mientras que la compactividad X sea una función univaluada² tal que la intensidad de vibración $X = F(G)$

¹medida de como un medio granular es compactado

²function univalued: A function φ is a univalued function on a loop δ_t , if the image by δ_t of the function φ is closed. That is if $\int_{\delta(t)} d\varphi = 0$.

Dado lo descrito en este capítulo, y esperando un comportamiento como se describe en la ecuación 6.5 en el siguiente capítulo describimos el procedimiento experimental que se llevo a cabo, para el estudio del Movimiento tipo Creep de frentes mojados bajo vibraciones debiles, en el capítulo 8 analizamos y discutimos los resultados obtenidos del dicho procedimiento experimental.

Capítulo 7

Procedimiento experimental

Para el procedimiento experimental se diseñó un dispositivo, que vibra por desbalanceo mediante el uso de un motor eléctrico, ver figura 7.1, este consiste en probetas de vidrio rectangulares de altura 50 cm por 15 cm de ancho y el espacio entre cristales es de 1 mm, estas se llenaron con granos de arena con tamaño menor a 4 mm. La densidad del medio granular es de $3.3 \pm 0.3 \text{ g/cm}^3$, mientras la porosidad se encuentra alrededor del 50%, la salida de escape de los granos de arena en la base de las probetas fue bloqueada por un filtro textil. La probeta fue montada en el dispositivo de vibración. El fondo de la probeta se sumerge a una profundidad de unos 10 mm, bajo el nivel del agua del contenedor. Todos los experimentos se realizaron bajo condiciones de temperatura ambiental de $23 \pm 0.5 \text{ C}$, presión atmosférica y humedad relativa de $53 \pm 0.7 \%$

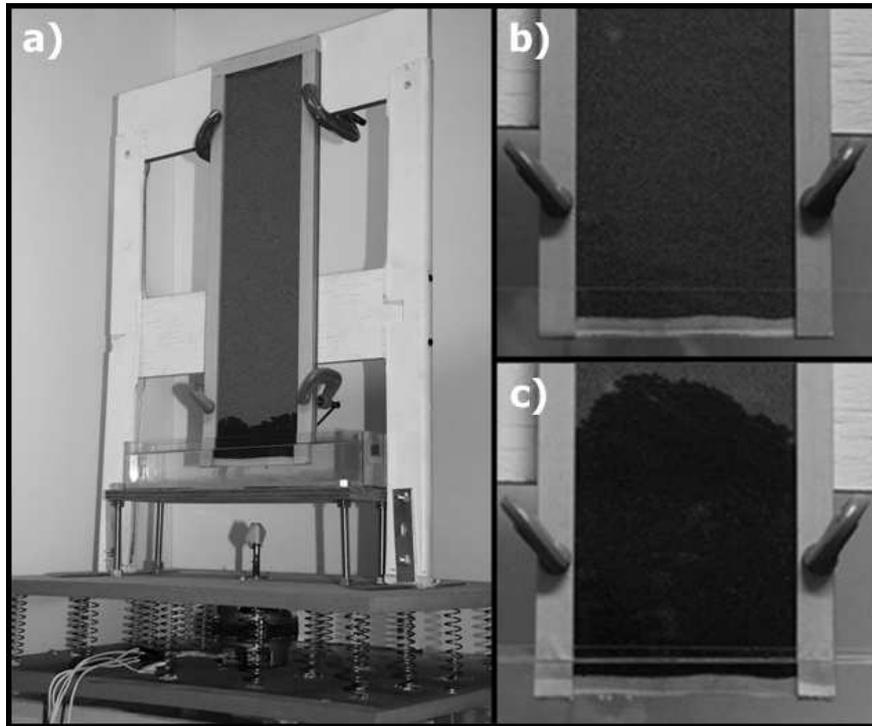


Figura 7.1: Dispositivo de vibración por desbalanceo, mediante el uso de un motor de corriente eléctrica, en la base del dispositivo, en el cual se monta un contenedor de agua y probetas llenadas de granos de arena común

Permitimos que el frente mojado se detenga y no cambie, ya sea en altura o en la forma de la interfase entre las regiones mojado y seco. La interrupción de avance de la interfase puede atribuirse al frente fijado por la heterogeneidad del medio. En nuestros experimentos, los frentes mojados quedan fijos, alrededor de media altura de la probeta, esto aproximadamente en una hora. Para caracterizar al rugosidad de los frentes mojados, las interfases fueron fotografiadas con una cámara digital cuya resolución es de 15.1 mega-píxeles ver figura, para evitar los efectos de las fronteras y las heterogeneidades a gran escala en el empaquetado de arena, las propiedades de los frentes mojados fueron medidos usando la mínima tendencia lineal, del perfil del frente mojado ver figura. La longitud de las partes del perfil, $h(x)$ usada para la el análisis es de $L = 512$ píxeles ver figuras. El exponente de rugosidad fue determinado por el comportamiento de la anchura local a escala.

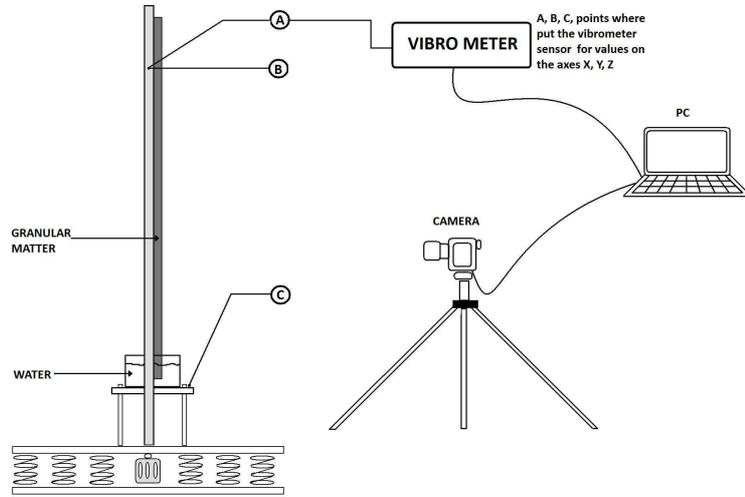


Figura 7.2: Esquema del montaje experimental, donde los puntos señalados A, B, C, fueron usados para colocar el sensor del vibrometro VB-8201HA, cuyos adquisicion de datos, así como las fotos tomadas por la camara, se almacenan en el pc.

Una ves que el frente mojado esta completamente fijado y no cambia ni forma y altura de la interfase entre la región mojada y la seca esta se observa durante mas de 10 minutos, entonces se aplica vibración con aceleración gravitacional G medida mediante el uso del vibrometro VB-8201HA. Tan pronto las vibraciones son aplicadas las interfases comienzan a moverse en la dirección vertical ver figura 8.1. La posición y configuración de movimiento del frente mojado $H(x, t)$ fue determinado de las fotografías digitales tomadas cada 30 segundos durante 50 minutos.

La adquisición de fotos se llevo a cabo con cámara Canon EOS 50D, con resolución de sensor 15.1 mega píxeles, obteniendo imágenes de píxeles efectivos $4752 \text{ píxeles} \times 3168 \text{ píxeles} \sim 212.06 \pm 0.38 \text{ mm} \times 141.37 \pm 0.38 \text{ mm}$, almacenadas en archivos tipo JPG; las imágenes fueron procesadas con una rutina escrita para los comandos del Image Processing Toolbox del software matlab 7.0 binarizando y redimensionando estas a $4752 \text{ píxeles} \times 1000 \text{ píxeles} \sim 212.06 \pm 0.38 \text{ mm} \times 44.62 \pm 0.38 \text{ mm}$. Las imágenes se asocian a matrices de tamaño $4752 \text{ filas} \times 1000$ ver figura 7.2 columnas donde el valor de cada a_{ij} está dado por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{ si es blanco} \\ 0 & ; \text{ si es negro} \end{cases}$$

Donde la región de color blanco corresponde a la arena mojada, para después contabilizar los píxeles con valor a 1 por cada columna, obteniéndose asi la altura de la región mojada por columna.

Este proceso se repitió para 170 imágenes obtenidas cada 30 segundos durante 60 minutos sin efectos de vibración y 25 minutos bajo vibración.

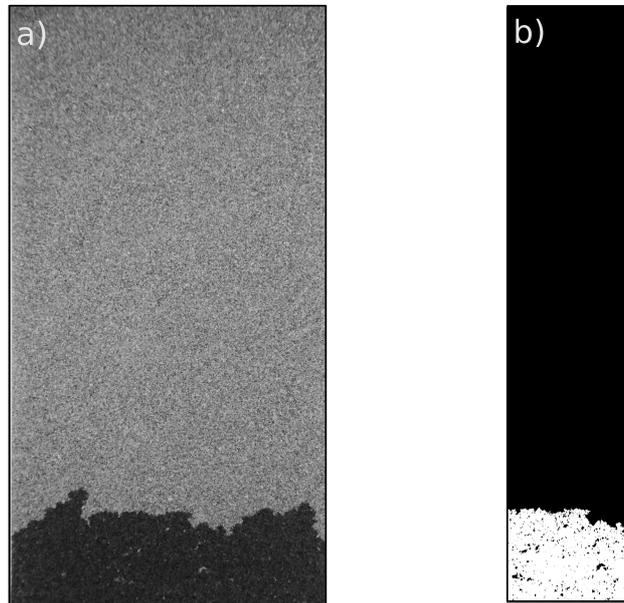


Figura 7.3: Imágenes del proceso experimental. a) Foto de la probeta total, 4752 píxeles \times 3168 píxeles. b) Imagen binarizada y redimensionada a 4752 píxeles \times 1000 píxeles, desde el punto central con respecto al ancho de la imagen (a)

Los datos obtenidos se almacenaron en hojas de calculo extensión .xls para su tratamiento y análisis mediante el software microsoft excel 2007 y Benoit 1.3, dichos resultado se analizan y discuten en el siguiente capítulo.

Capítulo 8

Análisis y discusión de resultados.

Se observa que, en el estado sin vibraciones, los frentes mojados avanzan debido a la imbibición espontánea, en un régimen muy parecido al régimen Washburn [73] figura 8.5. Después de esto, como se menciona en el procedimiento experimental esperamos que los frentes mojados no cambiaran de forma o de de altura entre las regiones observada. Esta falta de cambio en la forma se atribuye a la heterogeneidad¹ de los frentes mojados del medio granular. Al aplicar las vibraciones con aceleración gravitacional $G = A\omega^2/g$ se determino que esta se encuentra con valores en el rango $0.84 \leq G \leq 0.91$.

Tan pronto fue aplicada la vibración, la interfase que inicialmente se encontraba fija comienza a avanzar en dirección vertical. Para evitar los efectos de las fronteras y las grandes heterogeneidades en el empaquetado de arena, las propiedades de escalamiento de los frentes mojados, fueron medidas usando los fragmentos con la mínima tendencia lineal del perfil de los frentes mojados (ver figura 8.1).

La longitud de los perfiles de altura de la interfase

$$h(x, t) = z(x, t) - \min_{0 \leq x \leq 512} z(x, t = 0) \quad (8.1)$$

usada para el análisis de escalamiento es $L = 512$ pixeles (ver figuras 8.1b, 8.2, 8.3).

De lo se observado en la figura 8.3, los frentes mojados en un medio granular avanza gracias a las avalanchas de avance intermitente localmente, similarmente como ocurre en otros sistemas en los que ocurre el fenómeno del creep ver [54, 55]. Las avalanchas del creep inducen una velocidad de creep finita.

$$v_{cr} = \frac{\langle \overline{z(x, t + \tau)} - \overline{z(x, t)} \rangle}{\tau} \quad (8.2)$$

Donde la barra denota el promedio sobre x para el sistema de tamaño L y los brackets denotan el promedio sobre el conjunto de experimentos con la misma G .

Se observa de la figura 8.4 que los frentes mojados se mueven con una velocidad (ec. 8.2) casi constante controlada por la aceleración gravitacional G , mientras que el ancho.

$$W(L, t) = \max_{0 \leq x \leq L} h(t) - \min_{0 \leq x \leq L} h(t) \quad (8.3)$$

apenas varia en el tiempo (ver figuras 8.1-8.4). La dependencia de la velocidad del creep (ec. 8.2) se describe mejor por la relación $v_{cr} \propto \exp(-const/G)$ ver figura 8.4b, como era de esperarse por la ec. 6.5, si $X \propto G$. Entonces, los datos de la figura 8.4 sugieren que la compactividad X es una función lineal de la aceleración gravitacional G .

¹Composición de un todo de partes de distinta naturaleza

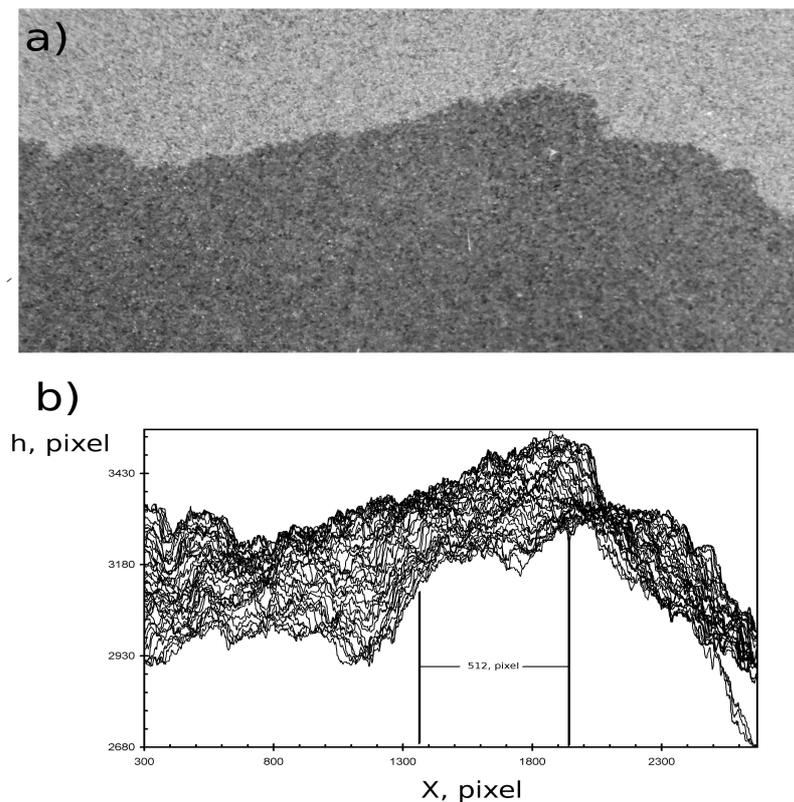


Figura 8.1: a) Fotografía del frente mojado bajo vibraciones debiles. b) Grafica de 50 fotos digitalizadas de frentes mojados bajo vibraciones en medios granulares

Los exponentes de rugosidad del fijado ζ_p y el creep ζ_{cr} fueron determinados por el método del variograma $\zeta_p = 0.50 \pm 0.06$, $\zeta_{cr} = 0.64 \pm 0.05$ y por el método de longitud de rugosidad $\zeta_p = 0.50 \pm 0.06$ y $\zeta_{cr} = 0.62 \pm 0.06$, con ayuda del software BENOIT 1.3 [74]. Notamos que el valor $\zeta_p = 0.50 \pm 0.06$ es consistente con los resultados de los primeros trabajos experimentales de imbibición 2+1 dimensionales [75, 76], así como con la predicción del modelo de fijación por percolación directa [75]. En el régimen del creep, el valor $\zeta_{cr} = 0.63 \pm 0.06$ es consistente con el exponente de rugosidad $\zeta = (4 - d)/3 = 2/3$ esperado para una interfase en equilibrio en un ambiente aleatorio [77]. Desafortunadamente nuestros experimentos no permitieron determinar el comportamiento de escalamiento $U \propto F^{-\mu}$. Sin embargo al evaluar el exponente $\zeta_{cr} = 0.63 \pm 0.06$ en la ecuación 6.3 con $d = 2$ y $n = 2$, se obtiene $\mu \sim 1$. Este valor, sin embargo debe ser verificado por mediciones directas del movimiento del creep en experimentos del movimiento del creep en imbibición forzada o drenaje.

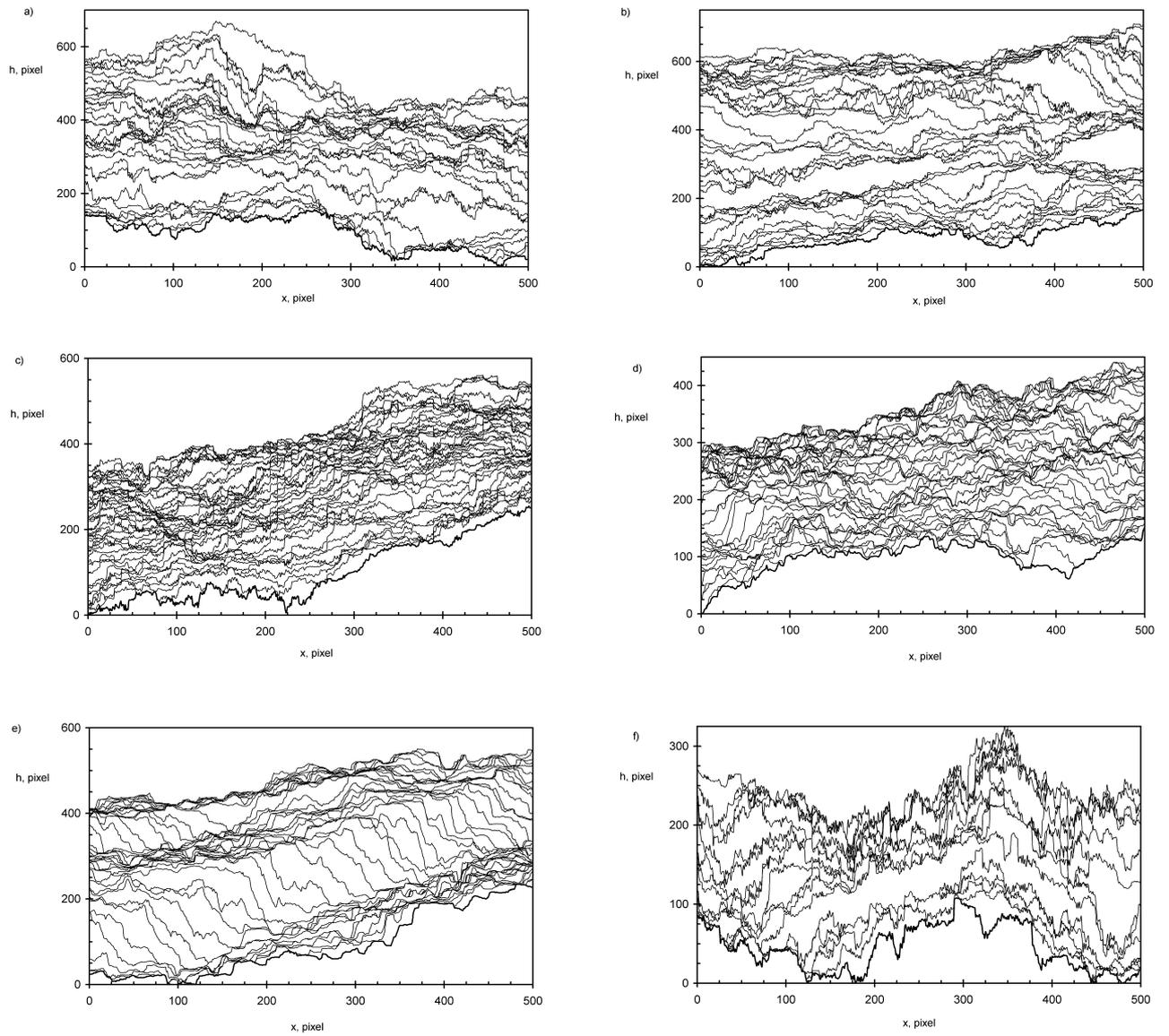


Figura 8.2: Configuraciones $h(x, t)$ usadas para el análisis de los frentes mojados en medios granulares bajo vibración con aceleración gravitacional adimensional $G=0.84$ (a), (b); $G=0.88$ (c), (d); $G=0.91$ (e), (f)

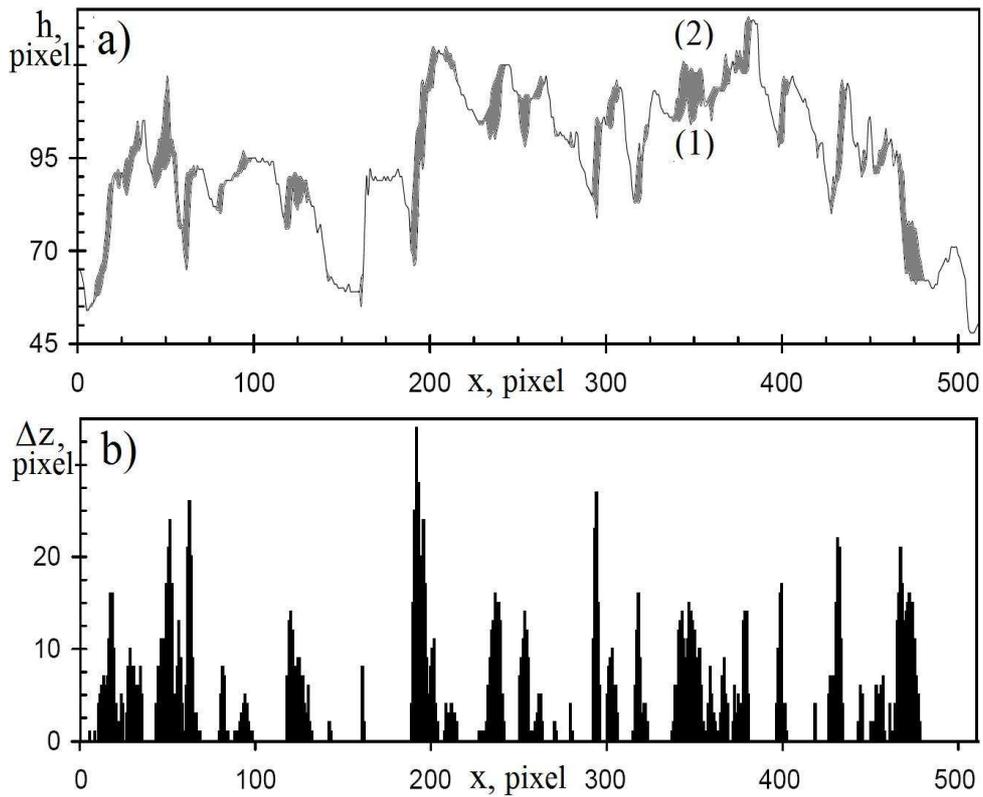


Figura 8.3: Ejemplo de avance intermitente de los frentes mojados bajo vibraciones debiles ($G = 0.84$) en medio granular: a) Configuraciones del frente mojado en $t = 18$ (1) y 19 minutos (2); las areas grises indican las zonas húmedas debido al avance de los frentes en $\tau = 1$ min, el avance promedio de la interfase es $\overline{\Delta z}(x, t = 18, \tau = 1) = 3.8$ pixels; b) avance intermitentes de los frentes mojados $\Delta z(x, t, \tau = 1) = z(x, t + \tau = 19) - z(x, t = 18)$

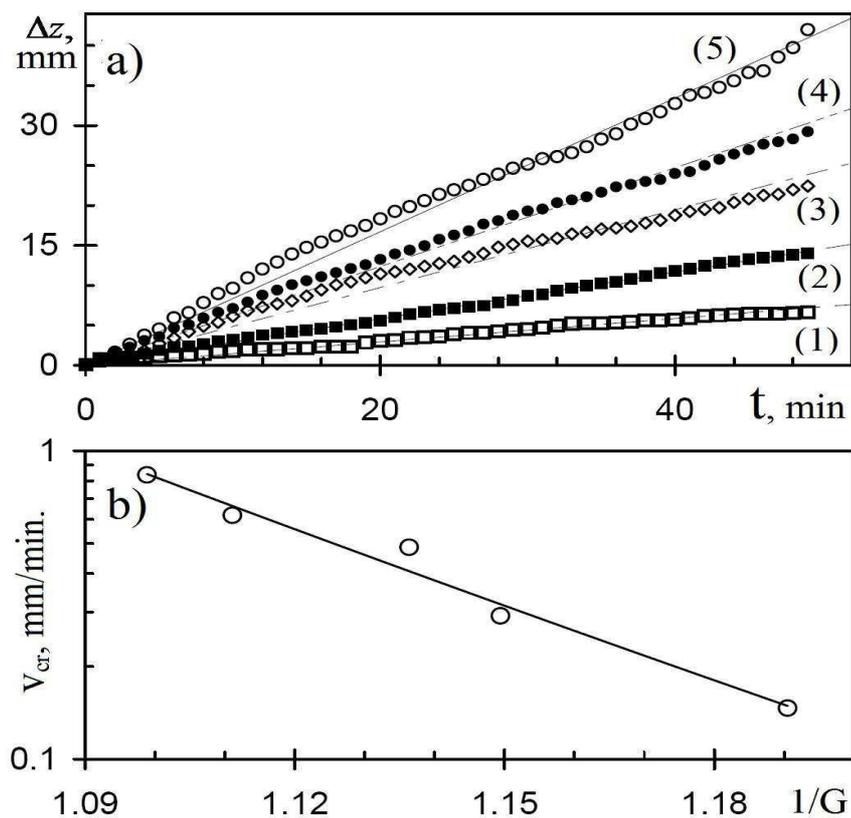


Figura 8.4: a) Gráficas de $\Delta = \langle \overline{z(x,t)} - \overline{z(x,0)} \rangle$ vs tiempo para cinco valores de la aceleración gravitacional $G = 0.84$ (1), 0.87 (2), 0.88 (3), 0.9 (4) y 0.91 (5); los datos experimentales se promediaron sobre tres experimentos con cada G ; las rectas representan los datos hallados como $\Delta = v_{cr}t = 0.167$ (1), 0.292 (2); 0.487 (3), 0.618 (4), y 0.836 (5) mm/min. b) Gráfica semi-logarítmica de la velocidad del Creep v_{cr} vs el inverso de la aceleración gravitacional adimensional $1/G$; las líneas rectas indican una decaimiento exponencial (3) con $X \propto G$.

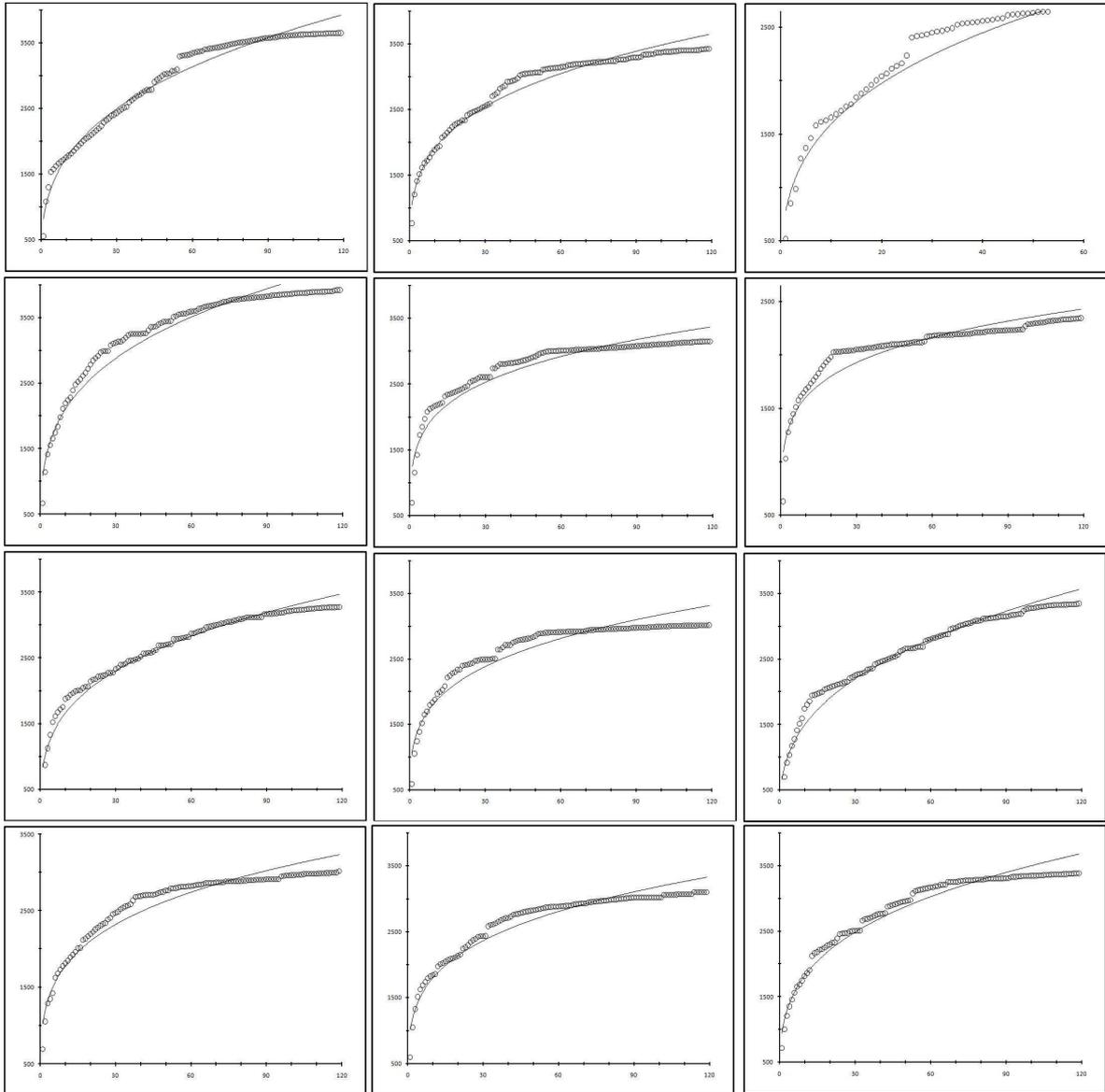


Figura 8.5: Configuraciones $h(x,t)$ de diferentes frentes de mojado en medios granulares, sin vibración, con ajustes a curvas de la forma $h \sim t^{1/2}$

Capítulo 9

Conclusiones

En este trabajo nos planteamos el objetivo de analizar y caracterizar el movimiento tipo Creep no termal de frentes mojados bajo vibraciones débiles en medios granulares, en suma concluimos lo siguiente.

- i) En el estado sin vibraciones los frentes mojados avanzan debido a la imbibición espontanea, muy parecida al regimen de Washburn.
- ii) La dependencia de la velocidad del Creep se describe por la relación $V_{cr} \propto \exp(-\text{conts}/G)$
- iii) Se determinaron los exponentes de rugosidad del fijado ζ_p y el Creep ζ_{cr} obteniendo 0.50 ± 0.06 y 0.63 ± 0.06 respectivamente lo que sugiere persistencia en el caso del Creep es decir efectos de memoria de largo plazo.
- iv) Se obtiene $\mu \sim 1$ para $d = 2$ y $n = 2$ en la ecuación 6.3, sin embargo esto se debe verificar en experimentos de imbibición forzada o drenaje.
- v) Dicho movimiento obedecen a la termodinámica de Edwards, la velocidad del creep obedece a un comportamiento analogo a la ley de Arrhenius ecuaciones 5.14, 6.2. En donde la compactividad de las vibraciones débiles en el medio granular juegan el rol de la temperatura ecuación 6.4.
- vi) Nuestros datos sugieren que la compactividad es una función lineal de la aceleración gravitacional. $X \propto G$, mientras que la barrera de energía se espera que dependa de la fuerza de capilaridad como $T \propto F^{-\mu}$ con el exponente del creep $\mu \approx 1$.

Además de las conclusiones enumeradas anteriormente, estos resultados proporcionan nuevos conocimientos a la termodinámica de Edward y los fenómenos de fluencia no térmicos y estimular aún más la investigación teórica y experimental en estas áreas.

Referencias

- [1] Albert-Lászlo Barabási, H. Eugene Stanley, *FRACTAL CONCEPTS IN SURFACE GROWTH*, Cambridge University Press, 1995.
- [2] Permeabilidad de Medios Porosos: Experimentos Numéricos y Teoría. Roberto Eduardo Rozas Cárdenas; Tesis presentada a la Escuela de Graduados de la Universidad de Concepción para optar al Grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con Mención en Ingeniería Química, Concepción, Chile, Septiembre de 2002.
- [3] J. Javier Brey, and A. Prados, "Closed model for granular compaction under weak tapping" *PHYSICAL REVIEW E* 68, 051302(2003).
- [4] Teruhisa S. Komatsu, Shio Inagaki, Naoko Nakagawa, "Creep motion in a granular pile exhibiting steady surface flow" arXiv:cond-mat/0008086v1.
- [5] Alejandro B. Kolton, Alberto Rosso, and Thierry Giamarchi, "Creep motion of an elastic string in a random potential" arXiv: cond-mat/0408284v1.
- [6] Thibaut Divoux, Hervé Gayvallet, and Jean-Christophe Gémard, "Creep Motion of a Granular Pile Induced by Thermal Cycling" *Phys. Rev. Lett.* 101, 148303 (2008).
- [7] S. A. Mojabi, Saeed Shaikhzadeh Najari, S. Hosseini Hashemi, A. Rashidi, S. J. Bassam, "Investigation of Compressional Creep Behaviour of Persian Hand-woven Carpet During Simulated Storage under Different Environmental Conditions" *FIBRES & TEXTILES in Eastern Europe* January / March 2008, Vol. 16, No. 1 (66).
- [8] R. Candelier¹ and O. Dauchot, "Creep motion of an intruder within a granular glass close to jamming" arXiv: cond-mat/0906.2679v1.
- [9] S.F. Edwards and D.V. Grinev, "Statistical Mechanics of Vibration-Induced Compaction of Powders" arXiv:cond-mat/9707276v3.
- [10] Estudio de Fenómenos Capilares en Medios Porosos: Sorción de Nitrógeno y Porosimetría de Mercurio. "Acuerdos y Discordancias" Tesis para obtener el grado de Doctorado en Ciencias (Química) Presenta el M. en C. Carlos Felipe Mendoza; México D.F, Julio de 2005.
- [11] S. J. Gregg, K. S. W. Sing; "Adsorption, Surface Area and Porosity"; Academic Press; (1982).
- [12] S. Lowell, J. E. Shields; "Powder Surface Area and Porosity"; Chapman & Hall; (1991).
- [13] P. M. Adler; "Porous Media: Geometry and Transports"; Butterworth-Heinemann; (1992).
- [14] LAS ECUACIONES DE LA FILTRACION DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS, Juan Luis Vazquez, dpto. de matemáticas, Universidad. Autónoma de Madrid, 28049, Madrid España
- [15] Carter, Brandon (1987). 1. Covariant theory of conductivity in ideal fluid or solid media. En A. Anile, Y. Choquet-Bruhat. *Relativistic Fluid Dynamics*. Springer-Verlag. pp. 20

- [16] David Wiggert (Tercera edición). Thomson. ISBN 970-686-205-6
- [17] Hidráulica de los canales abiertos. Ven Te Chow. 1982. ISBN 968-13-1327-5
- [18] Hidráulica General. Sotelo, G. 1999. ISBN 978-968-18-0503-6
- [19] Fractals for the classroom, Part one, Introduction to fractals and chaos; Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jurgens, Dietmar Saupe. Springer-Verlag New York, Inc. 1992.
- [20] M. Dubé et al., Phys. Rev. Lett. 83, 1628 (1999).
- [21] M. Dubé et al., Phys. Rev. E. 64, 051605 (2001).
- [22] E.W. Washburn, Phys. Rev. 17, 273 (1921).
- [23] D. Geromichalos, F. Mugele, and S. Herminghaus, Phys. Rev. Lett. 89, 104503 (2002).
- [24] O. Zik, et al., Euro. Phys. Lett. 38, 509 (1997).
- [25] www.warwick.ac.uk/masdbl/dimension-total.pdf
- [26] L. H. Tang, H. Leschhorn, Phys. Rev. A 45, R8309 (1992).
- [27] S. V. Buldyrev, A. L. Barabási, F. Caserta, S. Havlin, H. E. Stanley, T. Viscek, Phys. Rev. A 45, R8313 (1992).
- [28] S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. E. Stanley, Physica A 200, 200 (1993).
- [29] CREEP AND RELAXATION OF NONLINEAR VISCOELASTIC MATERIALS with an introduction to linear Viscoelasticity, William N. Findley, James S. Lai and Kasif Onaran, Dover Publications, inc., New York, (1989).
- [30] Vicat, L. T. "Note Sur l'Allongement Progressif du Fil de Fer Soumis a Diverses Tensions", Annales, Ponts et Chaussées, Mémoires et Docum., Vol. 7 (1834).
- [31] Thurston, R. H. "Materials of construction" John Wiley, New York (1895).
- [32] Andrade, E. N. "The Viscous Flow in Metals and Allied Phenomena" proceedings of royal society, Series A, Vol. 84 (1910), p.1.
- [33] Bailey, R. W. "Creep of steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plants" Transactions, Tokyo Sectional Meeting of the World Power conference, Tokyo (1929), p. 1089.
- [34] Norton. F. H. "The Creep of Steel at High Temperature" McGraw Hill, New York (1929).
- [35] Ludwik, P. "Elemente der Technologischen Mechanik" Springer, Berlin (1909).
- [36] Soderberg, C. R. "The interpretation of Creep Test for Machine Design" Transaction of ASME, Vol. 58 (1936), p. 733.
- [37] James P. Schaffer, Ashok Saxena, Stephen D. Antolovich, Thomas H. Sanders, Jr, Steven B. Warner. "THE SCIENCE AND DESIGN OF ENGINEERING MATERIALS" Second edition, McGraw-Hill, 1999.
- [38] Lakes, Roderic S. (1999). Viscoelastic Solids. p. 476. ISBN 0849396581.
- [39] "Is glass liquid or solid?". Retrieved 2008-10-15
- [40] Khosrow Naderi, Tayfun Babadagli, Influence of intensity and frequency of ultrasonic waves on capillary interaction and oil recovery from different rock types, Ultrasonics Sonochemistry, Volumen 17, issue 3, March 2010, ISSN 1350-4177.

- [41] Duhon, R. D. and Campbell, J.M.: "The Effect of Ultrasonic Energy on the Flow of Fluids in Porous Media", SPE 1316, 2nd Annual Eastern Regional Meeting of SPE/AIME, Charleston, WV, Nov. 4-5, 1965. 1
- [42] Aarts, A.C.T. et al.: Enhancement of Liquid Flow Through a Porous Medium by Ultrasonic Radiation, SPEJ, 5 (Dec. 1999), 321.
- [43] Kouznetsov, O.L. et al.: "Improved Oil Recovery by Application of Vibro-Energy to Water-flooded Sandstones," J. Pet. Sci. and Eng., 19 (1998) 191.
- [44] Kouznetsov, O.L. et al.: "Seismic Techniques of Enhanced Oil Recovery: Experimental and Field Results," Energy Sources, 24 (2002) 877.
- [45] Nikolaevskiy, V.N. et al.: "Residual Oil Reservoir Recovery With Seismic Vibrations," SPE Prod. & Fac. (May 1996) 89.
- [46] Venkitaraman, A., Roberts, P.M., and Sharma, M.M.: "Ultrasonic Removal of Near-Wellbore Damage Caused by Fines and Mud Solids," SPE 27388, SPE Drill. & Comp. (Sept. 1995) 193.
- [47] Wong, S.W. et al.: "Near Wellbore Stimulation by Acoustic Waves," SPE 82198, 2003 SPE European Formation Damage Conference, The Hague, Netherlands, 13-14 May.
- [48] Roberts, P.M., Venkitaraman, A. and Sharma, M.M.: "Ultrasonic Removal of Organic Deposits and Polymer-Induced Formation Damage," SPE Drill. & Comp., 15 (March 2000) 19.
- [49] Beresnev, I.A. and Johnson, P.A.: "Elastic-Wave Stimulation of Oil Production: A review of Methods and Results", Geophysics 59, no. 6 (June 1994) 1000.
- [50] Schoepfel, R.J. and Howard, A.W.: "Effect of Ultrasonic Irradiation on Coalescence and Separation of Crude Oil-Water Emulsions," SPE 1507, 1966 41st Annual Fall Meeting of SPE/AIME, Dallas, TX, Oct. 2 5.
- [51] Gollapudi, U.K., Bang, S.S. and Islam, M.R.: "Ultrasonic Treatment for Removal of Asphaltene Deposits During Petroleum Production," SPE 27377, 1994 SPE Intl. Sym. on Formation Damage Control, Lafayette, LA, Feb. 7 10.
- [52] Abismail, B. et al.: "Emulsification by Ultrasound: Dropsizes Distribution and Stability," Ultrasonics Sonochemistry, 6 (1999) 7583.
- [53] T. Hamida, T. Babadagli, "Effect of Ultrasonic Waves on the Capillary Imbibition Recovery of Oil" SPE 92124, University of Alberta , 2005
- [54] S. Dushman, Rev. Mod. Phys. 17, 48 (1945); G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. 66, 1125 (1994); L. Roters, S. Lbeck and K. D. Usadel, Phys. Rev. E 63, 026113 (2001); D. K. Dysthe, F. Renard, J. Feder, B. Jamtveit, P. Meakin, and T. Jssang, Phys. Rev. E 68, 011603 (2003); B. A. Socie, P. Umbanhowar, R. M. Lueptow, N. Jain, and J. M. Ottino, Phys. Rev. E 71, 031304 (2005); A. B. Kolton, A. Rosso, Th.Giamarchi, and W. Krauth, Phys.Rev. B 79, 184207 (2009).
- [55] A. B. Kolton, A. Rosso, and Th. Giamarchi, Phys. Rev. Lett. 94, 047002 (2005); Y. Chen and Ch. A. Schuh, Phys. Rev. Lett. 98, 035701 (2007); J. Koivisto, J. Rosti, and M. J. Alava, Phys. Rev. Lett. 99, 145504 (2007); R. Candelier and O. Dauchot, Phys. Rev.Lett. 103, 128001 (2009); T. T. Lau, A. Kushima, and S. Yip, Phys. Rev. Lett. 104, 175501 (2010).
- [56] P. Chauve, Th. Giamarchi, and P. Le Doussal, Phys. Rev. B 62, 6241 (2000).
- [57] T. Shibauchi, L. Krusin-Elbaum, V. M. Vinokur, B. Argyle, D. Weller, and B. D. Terris, Phys. Rev. Lett. 87, 267201 (2001); F. Caysol, D. Ravelosona, C. Chappert, J. Ferr, and J. P. Jamet, Phys. Rev. Lett. 92, 107202 (2004).

- [58] M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. 62, 1415 (1989); M.V. Feigelman, V. B. Feshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. 63, 2303 (1989); T. Nattermann, Phys. Rev. Lett. 64, 2454 (1990); J. Kierfeld, H. Nordborg, and V. M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. 85, 4948 (2000); A. Petkovi and Th. Nattermann, Phys. Rev. Lett. 101, 267005 (2008).
- [59] L. B. Ioffe and V. M. Vinokur, J. Phys. C 20, 6149 (1987); S. Lemerle, J. Ferr, C. Chappert, V. Mathet, T. Giamarchi, and P. Le Doussal, Phys. Rev. Lett. 80, 849 (1998).
- [60] D. A. Gorokhov, D. S. Fisher, and G. Blatter, Phys. Rev. B 66, 214203 (2002).
- [61] V. Colizza, A Barrat, and V. Loreto, Phys. Rev. B 65, 050301 (2002); A. Barrat, V. Colizza, and V. Loreto, Phys. Rev. B 66, 011310 (2002); M. Schrter, D. I. Goldman, and H. L. Swinney, Phys. Rev. E 71, 030301R (2005).
- [62] P. Umbanhowar and M. van Hecke, Phys. Rev. E 72, 030301R (2005).
- [63] O. Pouliquen, M. Belzons, and M. Nicolas, Phys. Rev. Lett. 91, 014301 (2003).
- [64] S. F. Edwards and D. V. Grinev, Phys. Rev. E 58, 4758 (1998); S. F. Edwards and D. V. Grinev, Adv. Phys. 51, 1669 (2002); R. Blumenfeld and S. F. Edwards, Phys. Rev. Lett. 90, 114303 (2003); S. F. Edwards, J. Stat. Phys., 116, 29 (2004).
- [65] A. Barrat, V. Colizza, and V. Loreto, Phys. Rev. E. 66, 011310 (2002); M. Depken and R. Stinchcombe, Phys. Rev. E 71, 065102 (2005).
- [66] R. Capozza, A. Vanossi, A. Vezzani, and S. Zapperi, Phys. Rev. Lett. 103, 085502 (2009).
- [67] E. R. Nowak, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel, Phys. Rev. E 57, 1971 (1998).
- [68] A. Fierro, M. Nicodemi, and A. Coniglio, Phys. Rev. E 66, 061301 (2002).
- [69] K. Naderi and T. Babadagli, Ultrasonics Sonochemistry 17, 500 (2010).
- [70] H.V. Fairbanks, Chem. Eng. Prog. Symp. Ser. 67, 108 (1971); V.N. Nikolaevskii, Fluid Dyn. 27, 689 (1992); O. L. Kouznetsov, J. Pet. Sci. Eng. 19, 191 (1998); T. Hamida, T. Babadagli, Transport Porous Med. 70, 231 (2007).
- [71] Using acoustic waves as an enhanced oil recovery technique has been of interest in the most studies. In this way, it was found that irradiation of ultrasonic energy results in faster motion of oil in porous media at laboratory as well as reservoir scales [21,22,24].
- [72] T. Hamida and T. Babadagli, in Proc. 2005 Asia Pacific Oil & Gas Conference, Jakarta, Indonesia, SPE 92124 (2005).
- [73] M. Alava, M. Dub, and M. Rost, Adv. Phys. 53, 83 (2004).
- [74] <http://www.trusoft-international.com> (BENOIT 1.2, 1999); W. Seffens, Science 285, 1228, (1999)
- [75] S. V. Buldyrev, A.-L. Barabási, S. Havlin, J. Kenésh, H. E. Stanley, and I-I.S. Xenias, Physica A 191, 220 (1992).
- [76] L. A. N. Amaral, A.-L. Barabási, S. V. Buldyrev, S. T. Harrington, S. Havlin, R. Sadr-Lahijany, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E 51, 4655 (1995).
- [77] D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. 56, 1964 (1986).

Anexos

Anexo A

Stress concentration and size effect in fracture of notched heterogeneous material
Phys. Rev. E 83, 015101(R) (2011)

Stress concentration and size effect in fracture of notched heterogeneous material

Alexander S. Balankin, Orlando Susarrey, Carlos A. Mora Santos, Julián Patiño, Amalia Yoguez, and Edgar I. García
Grupo "Mecánica Fractal," Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México 07738

(Received 12 October 2010; published 18 January 2011)

We study theoretically and experimentally the effect of long-range correlations in the material microstructure on the stress concentration in the vicinity of the notch tip. We find that while in a fractal continuum the notch-tip displacements obey the classic asymptotic for a linear elastic continuum, the power-law decay of notch-tip stresses is controlled by the long-range density correlations. The corresponding notch-size effect on fracture strength is in good agreement with the experimental tests performed on notched sheets of different kinds of paper. In particular, we find that there is no stress concentration if the fractal dimension of the fiber network is $D \leq d - 0.5$, where d is the topological dimension of the paper sheet.

DOI: [10.1103/PhysRevE.83.015101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.015101)

PACS number(s): 46.50.+a, 62.20.mm, 81.40.Np

Understanding how materials fail is one of the most fundamental open problems in science and engineering (see Refs. [1–3] and references therein). In notched structures the fracture is controlled by material behavior around the notch tip [4]. A common approach to problems of crack initiation from a notch is based on linear elastic fracture mechanics (LEFM) [4,5]. Within the LEFM framework, it was shown that the displacement and stress fields ahead of a smooth notch scale with the distance from the notch tip r as $u_i = K_\alpha r^{1-\alpha_u} g_i(\alpha, \theta)$ and $\sigma_{ij} = K_\alpha r^{-\alpha_\sigma} f_{ij}(\alpha, \theta)$, respectively, where the scaling exponent $\alpha_u = \alpha_\sigma = \alpha$ plays a role similar to that of an eigenvalue and K_α is the generalized stress-intensity factor [5]. The value of α and the angular eigenfunctions $g_i(\alpha, \theta)$ and $f_{ij}(\alpha, \theta)$ can be determined by applying the traction-free boundary conditions to the notch flanks [4–6]. For a cut with smooth edges in a homogeneous elastic medium, it was found that $\alpha = 0.5$ and $K_{1/2}$ can be expressed in terms of the stress intensity factors for three standard loading modes, K_I , K_{II} , and K_{III} [5]. Therefore, the crack initiation criterion can be presented in the form $K_{1/2}(\sigma_{ij}, a_0) = K_C$, where a_0 is the cut length and K_C is the apparent fracture toughness [4–6]. In a special case of the straight cut under loading mode I, the criterion of crack initiation is $K_I = \sigma_{22} \sqrt{2\pi a_0} = K_{IC}$, where K_{IC} is called the material toughness [4]. Accordingly, it is expected that the crack initiation stress σ_C scales with the notch size as $\sigma_C \propto K_{IC} / \sqrt{a_0}$, while K_{IC} is related to the critical value of the crack energy release rate G_C as $K_{IC} \propto \sqrt{G_C E}$, where E is the elastic modulus [6].

The heterogeneities in the microstructure of most real materials lead to inhomogeneous perturbations of the displacement and stress fields (see Refs. [7–11] and references therein). In particular, the heterogeneity introduces the disorder-dependent characteristic length l_C in the displacement and stress distributions [10,11]. As a result, the crack initiation stress is expected to scale with the cut size as

$$\sigma_C \propto \frac{K_C}{\sqrt{a_0 + l_C}} \quad (1)$$

for $a_0 > l_C$ [10]. So, in the large cut limit $a_0 \gg l_C$ the LEMF size effect law $\sigma_C \propto K_C / \sqrt{a_0}$ is recovered, where K_C is the disorder-dependent fracture toughness [10]. The size effect [Eq. (1)] was observed in experiments [10] and also reproduced in numerical simulations [10,11].

Once a crack is initiated, its motion is determined by balancing the energy that it dissipates with that which is externally supplied [12]. Rough crack paths in real materials do little resemble to smooth trajectories predicted in the classical LEFM [13]. Though, it was found that crack traces $z(x)$ often exhibit some kind of statistical scale invariance over a wide range of length scale, such that the height-height correlation function behaves as $C \propto (\Delta x)^{2\zeta}$, where ζ is the so-called roughness exponent [14–16]. It has been experimentally noted and then conjectured that cracks in materials with random microstructures are characterized by the universal roughness exponents $\zeta(d)$ (see Ref. [15] and references therein). This conjecture is consistent with the universality of critical exponents in percolation and other critical phenomena [17]. However, the situation can be changed drastically when there are long-range correlations in the heterogeneous microstructure. Specifically, in fibrous composites with power-law density correlations, the crack roughness exponent is a function of the fractal dimension of the microstructure [18]. Furthermore, some experiments with such materials suggest that the crack roughness exponent can be dependent on the fracture regime [19] and the crack orientation [20].

In this work, we study the effect of long-range density correlations on the stress concentration, crack roughness, and size effect in brittle fracture of notched paper sheets. Paper is a fiber composite material with many types of structural nonuniformities [21]. It was found that many types of commercial paper are characterized by a power-law behavior of the two-point density correlation function,

$$G(\vec{R}) = \langle [m(\vec{r}) - \bar{m}][m(\vec{r} + \vec{R}) - \bar{m}] \rangle \propto R^{-\eta}, \quad (2)$$

within a wide, but bounded, interval $l_0 < R < \xi$, where $m(\vec{r})$ is the local mass density, \bar{m} is its average, $\langle \dots \rangle$ is an average over the sheet, l_0 is the lower cutoff of the order of the average fiber size, and ξ is the structure-dependent correlation length [22]. For self-similar structures, such as fiber networks, the scaling exponent η is related to the fractal dimension D as $\eta = d - D$, where d is the embedding dimension [18,23]. Hence, at scale $l_0 < R < \xi$, the paper can be treated within a framework of the fractal continuum suggested in Ref. [24].

By using the concept of fractal continuum [24], the authors of Ref. [25] have shown that small strains in an elastic fractal

medium obeying the conventional constitutive law of linear elasticity, $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$, should be defined as

$$\varepsilon_{ij} = 0.5[c_j(\partial u_i/\partial x_j) + c_i(\partial u_j/\partial x_i)], \quad (3)$$

where c_k 's are the fractal functions ($k = 1, 2, 3$). For the fractal continuum considered in Ref. [24], the fractal functions have the form $c_k = v_k x_k^{v_k}$, where $v_k = D_{ij} + 1 - D$, while D_{ij} is the fractal dimension of surface in the (i, j) plane [26]. In the vicinity of a straight cut ($D_{ij} = d - 1$) in a linearly elastic heterogeneous medium, the displacements scale as $u_i \propto (r + l_C)^{1/2}$ [10]. If at scales $R > l_0 = l_C$ the medium obeys the fractal behavior characterized by Eq. (2), the fractal functions c_k can be represented in the form $c_k = v_k (x_k + l_0)^{d-D}$, and so the cut-tip strains defined by Eq. (3) and stresses $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ will behave as

$$\varepsilon_{ij} \propto \sigma_{ij} = K_\alpha (r + l_0)^{-\alpha_\sigma} f_{ij}(\alpha, \theta), \quad (4)$$

where the cut-tip stress exponent is

$$\alpha_\sigma = \frac{1 - 2(d - D)}{2}, \quad \text{if } D \geq d - 1/2, \quad (5)$$

while $\alpha_\sigma = 0$, if $D \leq d - 1/2$.

Accordingly, for a sheet with a straight cut of size $a_0 > l_0$ under loading mode I, the crack initiation stress is expected to obey the following size effect law,

$$\sigma_C \propto K_{MF} (a_0 + l_0)^{-\alpha_\sigma}, \quad (6)$$

where K_{MF} is the fractal material toughness. Notice that the fracture size effect law [Eq. (1)] is recovered from Eqs. (5) and (6) in the Euclidean limit $D = d$, e.g., for regular fiber networks and random networks with an exponential decay of $G(R)$, whereas, if $D \leq d - 1/2$, there is no the power-law stress concentration in the notch-tip vicinity, and so $\sigma_C = K_{MF} = \text{const}$ [27].

The paper toughness evaluation based on fracture mechanics has been extensively investigated by many scientists for the past two decades (see Ref. [28] and references therein). In many experimental works it was noted that the apparent toughness K_C obtained in tests of notched paper sheets is not a constant, but rather it is an increasing function of the notch size [29,30]. Furthermore, the analysis of the strain field in notched papers suggests that the notch-tip field cannot be described with stress intensity factor $K_{1/2}$ [31]. At the same time, the experimental data reported in Refs. [29,30], and [32] are consistent with the size effect [Eq. (6)] with $\alpha_\sigma < 0.5$. However, there are no dates on density correlations in papers tested in Refs. [29–32] and so, using $l_C = l_0$ and α as the fitting parameters, we can satisfactorily fit the same experimental data with either Eq. (1), or with Eqs. (5) and (6), over more than one decade of cut length scale [33].

To verify the size effect [Eqs. (5) and (6)], in this work we tested two types of paper with the known values of η . Specifically, we used the *Secante* paper of grade $200 \pm 1 \text{ g/m}^2$ and the *Filtro* paper of grade $103.4 \pm 0.9 \text{ g/m}^2$. Earlier, both papers were used in Ref. [18] for the study of damage fractures in sheets without notches. It was found that for both papers the two-point density correlation function obeys the scaling behavior (2) with $l_0 = 1.8 \text{ mm}$ and $\eta = 0.37 \pm 0.03$ for *Secante* paper, while it was $l_0 = 1.15 \text{ mm}$ and $\eta = 0.51 \pm 0.05$

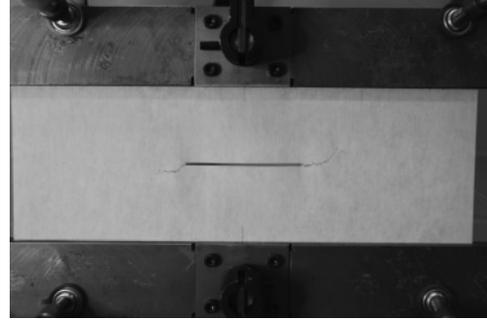


FIG. 1. Snapshot of stable crack propagation in the notched sheet of the *Filtro* paper of width $W = 300 \text{ mm}$ and $a_0/W = 0.25$.

for *Filtro* paper [18]. In this work, we tested the center notched sheets of length 200 mm (the working length is 110 mm), while the sheet width $W = \lambda W_0$ was varied within the interval $10 = W_0 \leq W \leq 400 \text{ mm}$ with scale factors of $\lambda = 1, 2.5, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. The initial cuts in the sheets were made by a scalpel [34]. Three series of tests were performed in specimens with different ratios of the cut length to the sheet width, $\mu = a_0/W$. First, the crack initiation tests were performed in specimens with the fixed ratio $\mu = 0.25$. Additionally, we tested the notched *Filtro* paper sheets of width 300 and 400 mm with different ratios μ in the range of $0.025 \leq \mu \leq 0.375$. In addition, the sheets without notches were tested to determine the tensile strength σ_t of each paper. Mechanical tests were carried out on a mechanical testing system (MTS) 858-5 testing machine. The sheets were held by pneumatic vise-action grips between two parallel textured jaw faces (see Fig. 1). At least ten identical specimens of each size were tested under the same loading conditions [35]. In all experiments, the crack initiation was determined from *in situ* observations with an optical microscope. In some experiments, crack propagation through the specimen was monitored through the use of a video recording system. Both papers obey elastoplastic behavior (see Fig. 2) and the failure of sheets without notches is governed by the damage mechanics (see Ref. [18]). However, we noted that the crack initiation stresses (σ_C) in the notched sheets of these papers are less than

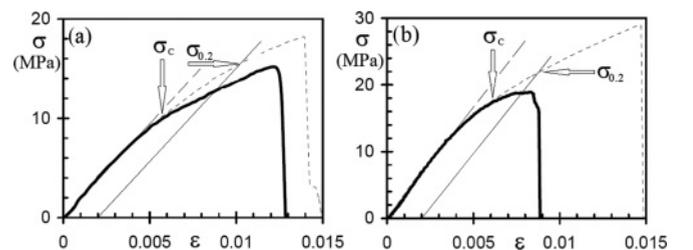


FIG. 2. Stress-strain curves for the sheets of (a) *Secante* and (b) *Filtro* papers without (dashed curve) and with (solid curve) a central cut. The arrows indicate the paper yield stresses $\sigma_{0.2}$ (defined as the stress at which a plastic deformation achieves 0.2%) and the crack initiation stresses σ_C determined from observation with an optical microscope in notched sheets of width $W = 400 \text{ mm}$ and $a_0/W = 0.25$. Notice that for sheets with notches the stress is defined as $\sigma = F/h(W - a_0)$, where F is the applied tensile force and h is the sheet thickness.

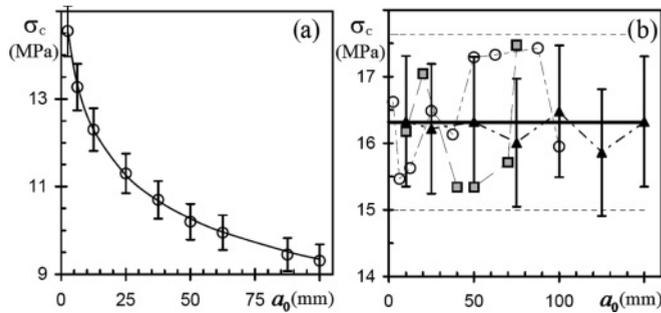


FIG. 3. Crack initiation stress σ_c vs cut length a_0 in sheets of (a) *Secante* and (b) *Filtró* papers. Symbols: experimental data for sheets with $a_0/W = 0.25$ (circles) and for sheets of width $W = 400$ mm (triangles) and $W = 300$ mm (squares); notice that each experimental point is the average over ten experiments, while error bars denote the statistical error calculated as $\pm 2s(\sigma_c)$, where $s(\sigma_c)$ is the standard deviation of ten measurements [for clarity in (b), error bars are shown for one series of tests only]. Solid curve in (a): data fitting by Eq. (6) with $l_0 = 1.8$ mm, $\alpha = 0.14$, and $K_{MF} = 6.78 \text{ MPa m}^{0.14}$. In (b) the solid line represents the mean value $\sigma_c = 16.3$ MPa, while dashed lines show the interval of confidence at 95%.

their yield stresses ($\sigma_{0.2}$) such that the crack propagation is brittle.

The log-log plots of the crack initiation stress σ_c versus the cut length a_0 in sheets with a ratio $a_0/W = 0.25$ are shown in Figs. 3(a) and 3(b). The data for the *Secante* paper obey the size scaling law shown in Eq. (6) with the scaling exponent $\alpha = 0.14 \pm 0.02$ [see Fig. 3(a)], which is consistent with Eq. (5). Therefore, the crack initiation criterion can be presented in the form $K_\alpha = \sigma (a_0 + l_0)^{0.14} = K_{MF}$, where the fractal material toughness of *Secante* paper is $K_{MF} = \sigma_c a_0^{0.14} = 6.78 \pm 0.07 \text{ MPa m}^{0.14}$. In contrast to this, the crack initiation stress in the *Filtró* paper is found to be independent on the crack length in the range of $5 \leq a_0 \leq 150$ mm, as well as on the ratio a_0/W in the range of $0.025 \leq a_0/W \leq 0.375$ [see Fig. 3(b)]. This is consistent with the prediction of the size effect law [Eq. (6)] with $\alpha_\sigma = 0$ expected from Eq. (5). The difference between the crack initiation stress, $\sigma_c = K_{MF} = 16.3 \pm 1.3$ MPa, and the maximal tensile strength of the *Filtró*

papersheets without notches, $\sigma_t = 28 \pm 3$ MPa [see Fig. 1(b)], can be attributed to the difference in the fracture mechanisms of sheets with and without the initial notch. In fact, sheets without notches fail owing to damage accumulation (see Ref. [18]), whereas the fracture of notched sheets is owing to single crack propagation. It should be pointed out that the independence of crack initiation stress within a wide range of the cut length $a_0 > l_0 \approx l_c$ cannot be explained with the size effect law defined by Eq. (1) [29].

Once stated, the crack follows an irregular path, reflecting certain constituents of paper microstructure and stress fluctuations. To study crack roughness, all fractured sheets were scanned with a 1200 ppp resolution and then the crack traces were digitized with the help of Scion Image software (see Ref. [36]). The crack roughness exponents of digitized crack traces were determined by the variogram, power spectrum, roughness length, and rescaled range (R/S) methods with the help of the BENOIT 1.3 software (see Refs. [18] and [37]). In this way we found that the roughness of cracks in the *Secante* and *Filtró* papers is characterized by the local roughness exponents $\zeta = 0.64 \pm 0.03$ and $\zeta = 0.49 \pm 0.01$, respectively. We noted that these values are statistically indistinguishable from the roughness exponents of damage fractures obtained in tensile tests of sheets without notches (see Ref. [18]). In Ref. [18], it was shown that the damage fracture roughness exponent is related to the fractal dimension of the fiber network as $\zeta = D - (d - 1)$. Our findings suggest that the roughness exponents of brittle cracks in the *Secante* and *Filtró* papers also obey this relation [38].

In summary, we showed that in a fractal continuum the distribution of notch-tip stresses is controlled by the long-range density correlations. This is reflected in the notch-size effect on the crack initiation stress [Eqs. (5) and (6)]. The scale invariant density fluctuations also determine the scaling properties of crack roughness. These findings provide a novel insight into the fracture phenomena in materials with a fractal microstructure.

This work was partially supported by the FONCICYT (México–European Union) under Project 96095 and the Government of Mexico City under Grant No. PICCT08-64.

- [1] L. Ponsón, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 055501 (2009); J. Scheibert, C. Guerra, F. Célerié, D. Dalmas, and D. Bonamy, *ibid.* **104**, 045501 (2010); S. S. Chakravarthy and W. A. Curtin, *ibid.* **105**, 115502 (2010).
- [2] E. Bouchbinder and T.-Sh. Lo, *Phys. Rev. E* **78**, 056105 (2008); J. A. Åström, *ibid.* **80**, 046113 (2009); Y. Cohen and I. Procaccia, *ibid.* **81**, 066103 (2010); E. Bouchbinder, *ibid.* **82**, 015101(R) (2010).
- [3] G. P. Cherepanov, A. S. Balankin, and V. S. Ivanova, *Eng. Fract. Mech.* **51**, 997 (1995); B. Cotterell, *ibid.* **69**, 533 (2002); Z. P. Bazant and A. Yavari, *ibid.* **72**, 1 (2005); F. M. Borodich, *J. Mech. Phys. Solids* **45**, 239 (1997); M. J. Alava, P. K. V. V. Nukala, and S. Zapperi, *Adv. Phys.* **55**, 349 (2006); S. Pradhan, A. Hansen, and B. K. Chakrabarti, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 499 (2010).
- [4] K. B. Broberg, *Cracks and Fracture* (Academic Press, New York, 1999).
- [5] A. Seweryn and K. Molski, *Eng. Fract. Mech.* **55**, 529 (1996); D. Leguillon and Z. Yosibash, *Int. J. Fract.* **122**, 1 (2003); P. Lazzarin and S. Filippi, *Int. J. Solids Struct.* **43**, 2461 (2006); M. P. Savruk and A. Kazberuk, *Int. J. Fract.* **161**, 79 (2010).
- [6] J. R. Willis, *Int. J. Fract.* **100**, 85 (1999); A. S. Balankin, *Eng. Fract. Mech.* **57**, 135 (1997); M. P. Wnuk and A. Yavari, *ibid.* **76**, 548 (2009); A. Carpinteri and M. Paggi, *ibid.* **76**, 1771 (2009).
- [7] I. L. Menezes-Sobrinho, A. T. Bernardes, and J. G. Moreira, *Phys. Rev. E* **63**, 025104(R) (2001); S. Santucci, L. Vanel, and S. Ciliberto, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 095505 (2004); I. Malakhovskiy and M. A. J. Michels, *Phys. Rev. B* **76**, 144201 (2007).
- [8] A. S. Balankin, O. Susarrey, and A. Bravo, *Phys. Rev. E* **64**, 066131 (2001).

- [9] F. Barra, A. Levermann, and I. Procaccia, *Phys. Rev. E* **66**, 066122 (2002).
- [10] M. J. Alava, P. K. V. V. Nukala, and S. Zapperi, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 055502 (2008); *J. Phys. D* **42**, 214012 (2009).
- [11] Ch. Urabe and Sh. Takesue, *Phys. Rev. E* **82**, 016106 (2010).
- [12] T. Goldman, A. Livne, and J. Fineberg, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 114301 (2010).
- [13] V. Y. Milman, N. A. Stelmashenko, and R. Blumenfeld, *Prog. Mater. Sci.* **38**, 425 (1994); A. S. Balankin and F. J. Sandoval, *Rev. Mex. Fis.* **43**, 545 (1997); P. Kotowski, *Int. J. Fract.* **141**, 269 (2006); S. Santucci, K. Jørgen Måløy, A. Delaplace, J. Mathiesen, A. Hansen, J. O. H. Bakke, J. Schmittbuhl, L. Vanel, and P. Ray, *Phys. Rev. E* **75**, 016104 (2007); D. Bonamy, *J. Phys. D* **42**, 214014 (2009).
- [14] P. Meakin, *Fractals, Scaling and Growth far from Equilibrium* (Cambridge University Press, New York, 1998).
- [15] E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planes, *Europhys. Lett.* **13**, 73 (1990); E. Bouchaud, *J. Phys. Condens. Matter* **9**, 4319 (1997); L. Ponsón, D. Bonamy, and E. Bouchaud, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 035506 (2006).
- [16] A. S. Balankin and O. Susarrey, *Int. J. Fract.* **81**, R27 (1996); **87**, R37 (1997); *Philos. Mag. Lett.* **79**, 629 (1999); A. S. Balankin, D. M. Matamoros, and I. Campos, *ibid.* **80**, 165 (2000); A. S. Balankin, O. Susarrey, R. García Paredes, L. Morales, D. Samayoa, and J. A. López, *Phys. Rev. E* **72**, 065101 (2005).
- [17] A. Hansen and J. Schmittbuhl, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 045504 (2003).
- [18] A. S. Balankin, O. Susarrey, and J. M. González, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 096101 (2003).
- [19] N. Mallick, P.-P. Cortet, S. Santucci, S. G. Roux, and L. Vanel, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 255502 (2007).
- [20] I. L. Menezes-Sobrinho, M. S. Couto, and I. R. B. Ribeiro, *Phys. Rev. E* **71**, 066121 (2005).
- [21] M. Alava and K. Niskanen, *Rep. Prog. Phys.* **69**, 669 (2006).
- [22] N. Provatas, M. J. Alava, and T. Ala-Nissila, *Phys. Rev. E* **54**, R36 (1996).
- [23] E. Sharon, M. G. Moore, W. D. McCormick, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 205504 (2003).
- [24] V. E. Tarasov, *Phys. Lett. A* **336**, 167 (2005).
- [25] J. Li and M. Ostojca-Starzewski, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **465**, 2521 (2009).
- [26] M. Ostojca-Starzewski, *Acta Mech.* **205**, 161 (2009).
- [27] Notice that at scales larger than ξ the fractal correlations [Eq. (2)] vanish and the material is characterized by $D = d$. Hence, in the large cut limit $a_0 \gg \xi$, the size effect law [Eqs. (5) and (6)] transforms in the size effect law [Eq. (1)] with $l_C = \xi \gg l_0$ and the crack initiation is controlled by the disorder-dependent fracture toughness K_C .
- [28] T. Yamauchi and H. Hirano, *J. Wood Sci.* **46**, 79 (2000); J. Tryding and P. J. Gustafsson, *J. Pulp Pap. Sci.* **27**, 103 (2001); W. J. Batchelor and D. M. S. Wanigaratne, *Int. J. Fract.* **123**, 15 (2003).
- [29] G. Sinclair, M. Kondo, and R. Pieri, *Int. J. Fract.* **72**, R3 (1995); A. S. Balankin *et al.*, *ibid.* **79**, R63 (1996); **90**, L57 (1998).
- [30] A. S. Balankin, *Int. J. Fract.* **76**, R63 (1996); A. S. Balankin *et al.*, *ibid.* **79**, R63 (1996); **90**, L57 (1998).
- [31] G. J. Dvorak and A. P. Suvorov, *Int. J. Fract.* **95**, 89 (1999); P. Isaksson and R. Häggglund, *Int. J. Solids Struct.* **44**, 659 (2007).
- [32] A. S. Balankin, L. H. Hernandez, G. Urriolagoitia, O. Susarrey, J. M. González, and J. M. Trinidad, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **455**, 2565 (1999).
- [33] Originally, in Refs. [30] and [32], the size effect of the form Eq.(6) with $l_C/a_0 = 0$ and $\alpha_\sigma < 0.5$ has been attributed to the crack roughness, nonetheless that crack initiation stress was measured in sheets with straight cuts. While the possible effect of the fractal structure of paper was also pointed in Ref. [32], the corresponding relation (1.4) from Ref. [32] differs from Eq. (5). To verify scaling relations [Eq. (6)] together with Eq. (5) experimentally, we need to test materials with known D and $a_0 \gg l_0$. In this way, the most clear difference between predictions with scaling laws [Eq. (1)] and [Eqs. (5) and (6)] is expected for materials with $D \leq d - 1/2$.
- [34] Both papers have a well-defined anisotropy of mechanical properties associated with preferable orientation of fibers in the machine direction (see Ref. [18]). Accordingly, in this work, all cuts were made perpendicular to the machine direction. The notch-curvature radius is of the order of the fiber width $w \ll l_0$.
- [35] All tests were made with the grip displacement speed of 1 mm/min at a relative humidity of $50 \pm 3\%$ and a temperature of $23 \pm 2^\circ\text{C}$.
- [36] [<http://www.sciocorp.com>] (Scion-Image, 2010).
- [37] [<http://www.trusoft-international.com>] (BENOIT 1.3, 2009); W. Seffens, *Science* **285**, 1228 (1999).
- [38] It is possible that a more fine scaling analysis, e.g., such as performed in Ref. [17], will permit to distinguish between the scaling properties of damage and brittle cracks, but this is not the subject of the present Rapid Communication.

Anexo B

Non-thermal creep motion of wetting front in weakly vibrated granular media

From: <prl@aps.org>
Sent: Thursday, November 11, 2010 2:18 PM
To: <abalankin@ipn.mx>
Subject: Editorial Acknowledgment LY12112 Balankin

> Re: LY12112
> Nonthermal creep motion of a wetting front in weakly vibrated granular
> media
> by A. S. Balankin, E. Garcia Otamendi, D. Samayoa, et al.
>
> Dear Dr. Balankin,
>
> The editors acknowledge receipt of this manuscript on 09 November 2010
> and are considering it. When sending correspondence regarding this
> manuscript please refer to the code number LY12112.
>
> We understand your submission of this manuscript to certify the
> following:
>
> - The paper represents original work of the listed authors.
>
> - The manuscript as presented accurately reflects the scientific
> results.
>
> - All of the authors made significant contributions to the concept,
> design, execution, or interpretation of the research study.
>
> - All those who made significant contributions were offered the
> opportunity to be listed as authors.
>
> - All of the listed authors are aware of and agree to the submission
> of this manuscript.
>
> - The manuscript has not been published, and is not now and will not
> be under consideration by another journal while it is considered here.
>
> - As part of the submission, the authors have provided any relevant
> information to the editors (e.g., information about recent relevant
> unpublished manuscripts by the authors).
>
> - The authors accept the established procedures for selecting
> manuscripts for publication.
>
> Please check the manuscript information and send us any corrections.
> The title, section, or PACS categories may have been changed from those
> provided by you on submission. To obtain current information regarding
> the status of your manuscript, you may consult the Author Status Inquiry
> System at <http://authors.aps.org/STATUS/>.
>
> Yours sincerely,
>
> Journal Services
> Physical Review Letters
> Email: prl@ridge.aps.org
> Fax: 631-591-4141
> <http://prl.aps.org/>

>
> Physics - spotlighting exceptional research: <http://physics.aps.org/>
>
> Please verify the following information and notify the Editorial
> office of any corrections:
>
> Code number: LY12112
> Journal: PRL Letter
> Received: 09 November 2010
> Section: General Physics: Statistical and Quantum Mechanics, Quantum
> Information, etc.
>
> PACS: 45.70.-n 05.70.Ln 62.20.Hg 68.08.Bc
>
> Complete PACS listings can be obtained via
> <http://publish.aps.org/PACS/pacsgen.html>
>
> Address:
>
> Dr. Alexander S. Balankin
> U.P. Adolfo Lopez Mateos
> Ed. 5, 3er Piso
> ESIME-Zacatenco
> Instituto Politecnico Nacional
> Mexico D.F. 07738, MEXICO
>
> Email: abalankin@ipn.mx
> Phone: 011+52-55-5729-6000 ext.54589
> Fax: 011+52-55-5729-6000 ext.54589
>
> Title: Nonthermal creep motion of a wetting front in weakly
> vibrated granular media
>
> Collaboration:
>
> 5 Author(s):
>
> A. S. Balankin, E. Garc{*i*}a Otamendi, D. Samayoa
> J. Pati{*o*}, M. A. Rodr{*i*}guez
>
> FORMS AND MEMOS:
> Please see the following:
>
> <http://forms.aps.org/author/proprprl.pdf>
> Physical Review or Physical Review Letters?

Non-thermal creep motion of wetting front in weakly vibrated granular media

Alexander S. Balankin, Edgar García Otamendi, Didier Samayoa Ochoa, Julián Patiño
Grupo “Mecánica Fractal”, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México 07738

We study the creep phenomena associated with non-thermal, temporal fluctuations in systems obeying the Edward’s thermodynamics. In imbibition experiments with granular media, we have observed that initially pinned wetting fronts move with an almost constant mean velocity v_{cr} when small vibrations are applied. This creep motion is attributed to the packing density fluctuations in weakly vibrated granular media. The dependence of v_{cr} on the vibration acceleration amplitude G obeys the relation reminiscent of the Arrhenius law in the case of thermal creep.

PACS: 05.70.Ln, 05.40-a, 45.70.-n, 62.20.Hg, 68.08.Bc

Creep phenomena, *i.e.* the steady-state response of complex systems with internal degrees of freedom to a small driving field, is one of the fascinating topics in statistical physics ([1,2] and references therein). Of particular interest are driven interfaces moving through a quenched disordered medium, which exhibit a so-called depinning phase transition [3]. The quenched disorder induces some effective energy barriers which suppress the interface motion. In the absence of temporal fluctuations in the system, the interface can move only if the driving force F exceeds the critical value F_C . However, these barriers can be overcome due to temporal fluctuations, resulting in a moving interface even below the critical driving field.

Most studies of creep phenomena are devoted to the thermally activated creep motion, which is ubiquitous in disordered systems and describes a wealth of low temperature transport phenomena. These include the magnetic domain wall motion in thin films [4], driven vortex lattices and charge density waves [5], dynamics of dislocation in inhomogeneous environment [6] and many others (see [1-6] and references therein). In all these systems the competition between the spatial disorder and the interface elasticity leads to pinned configurations, characterized by a roughness exponent ζ_p [3]. At finite temperatures, due to thermal fluctuations the creep velocity obeys the Arrhenius behavior $v \propto \exp(-U(F)/T)$ with a certain driving field dependent energy barrier $U(F < F_C) > 0$ [3-6]. These barriers are related to the interface roughness exponent ζ and to its origins. Using scaling arguments, the authors of [3] have shown that U scales as $U \propto F^{-\mu}$, where

$$\mu = \frac{d - n + 2\zeta}{n - \zeta} \quad (1)$$

is the characteristic creep exponent, d is the topological dimension of interface, n is the k-space decay exponent of the elastic kernel (for long-range elasticity $n = 1$, whereas for the local case $n = 2$ [2]) and ζ is the equilibrium roughness exponent which depends only on the universality class of the disorder, n and d [1].

At the same time, there are many complex systems where thermal fluctuations are small enough that the temperature of the external bath can be considered zero [7,8]. However, in such systems, one can also expect to observe the creep phenomena, but associated with temporal fluctuations of non thermal nature, *e.g.* quantum collective creep [7] and radiation-induced non-thermal creep in a high radiation environment [9]. Another prominent candidate to study a non-thermal creep is a weakly vibrated granular medium. Granular materials consist of macroscopic solid grains interacting via dissipative, repulsive contact forces [10]. Under ambient conditions, thermal energy is inconsequential, and granulates jam in random configurations unless sufficient mechanical energy is supplied, for example by shearing or shaking [11]. Vibrated powders are one of the most interesting examples of nonequilibrium systems where excluded-volume interactions are known to play a crucial role [12]. Under vibration, a granular-pile compacts towards a steady state with a final density that depends on the intensity of the vibrations [13]. In the limit of small-intensity vibrations, the relaxation rate becomes so slow that the system cannot reach the steady-state density within the

experiment timescale [14]. As a result weakly vibrated granular materials exhibit behavior not seen in ordinary fluids or solids [15].

Starting from an ergodic hypothesis for powders, based on the extensive, global, character of the dynamics induced by shaking, Edwards and co-workers [16] have formulated a microscopic theory for the steady state of vibrated granular media that is similar to conventional statistical mechanics. Further, they assume that the steady state is fully characterized by the volume of the system, which then plays a role analogous to that of the energy in the usual thermal systems. This provides the “microcanonical” description. The associated “canonical” probability distribution is obtained by maximizing the statistical entropy under the condition that the average volume is given. The probability of a given configuration depends only on its volume and can be found as the maximum of the entropy under the constraint that the system volume is given. The entropy S is defined in analogy to classical statistical mechanics as $S(V, N) = k \ln \Omega$, where Ω is the number of mechanically stable configurations of N particles in volume V , and k is an analog to the Boltzmann constant [16]. The parameter $X = \partial V / \partial S$ conjugated of the volume in an analogous way as the temperature is the conjugate of the energy in usual thermal systems, was named the compactivity [16]. The compactivity characterizes the equilibrium distribution among the inherent states and depends only on the average energy of the inherent states and not on the particular dynamics used [16]. So, it may be interpreted as being characteristic of the number of ways it is possible to arrange the grains in the system into volume ΔV such that the entropy change is ΔS . Edwards’ approach to granular media also links the compactivity to the system average

volume and its fluctuations δV^2 through a granular version of the fluctuation dissipation relation

$$\langle \delta V^2 \rangle = X^2 \frac{\partial V}{\partial X}, \quad (2)$$

where $(\partial V / \partial X)$ plays the role of the specific heat in the equilibrium thermodynamics [17]. Due to internal dissipation motion of granular materials can only be maintained by a constant supply of energy. For sinusoidally, vertically vibrated granular media under gravity the most important control parameter is the ratio of the maximum acceleration of the vibrating base and the gravitational acceleration, $G = A\omega^2 / g$, where A and ω are the amplitude and frequency of the vibration respectively [11]. Even weak excitations with $G < 1$ produce a rich dynamical behavior in granular media which are dominated by either grain motion or by contact force variations [18]. The authors [19] have performed systematic studies of the density of a vibrated granular material as a function of time. They found that under vibrations, the density of the pile slowly reaches a final steady-state value about which the density fluctuates. Under vibrations, the mean square fluctuations observed in the measure of density are typically of the same order of magnitude of the average itself and all follow the same kind of inverse logarithmic dynamics. This dynamics was experimentally observed in the compaction of real granular media undergoing a sequence of taps [20]. The density fluctuations are necessary accompanied by the pore volume fluctuations which should affect the imbibition force and the wetting front pinning strength in a porous granular medium (see [21] and references therein).

The effects of acoustic vibrations on the fluid flow through porous media has been studied in the past few decades (see [22,23] and references therein). The energy of vibrations is expected to change properties media and fluids as well as liquid-liquid, liquid-solid, and gas-liquid interactions [24]. Though, the effect of vibration on the process imbibition and associated phenomena are not yet well understood (see [21] and references therein).

In spite of the Edward's thermodynamics, one may expect to observe a creep phenomenon associated with non-thermal fluctuations (2), when the wetting (imbibition) front in a weakly vibrated granular medium moves with a velocity controlled by the fluctuation intensity. By analogy with the thermal and quantum creeps, one would guess that the creep velocity should obey an analog of the Arrhenius law in the form

$$v_{cr} \propto \exp\left(-\frac{U(F_c / F)}{kX}\right) \quad (3)$$

where the energy barrier U is determined by the ratio of pinning strength F_c to the capillarity pressure F , while the compactivity X is expected to be a univalued function of the vibration intensity, i.e. $X = f(G)$.

In this Letter we report the experimental observations of the creep motion of wetting fronts in weakly vibrated granular media. The experimental set-up is shown in Fig. 1. It consists in a rectangle glass cell (height 50 cm width 15 cm and the space between glass plates is 1 mm) filled with sands of size less than 0.4 mm. The density of granular media

is about $3.3 \pm 0.3 \text{ g/cm}^3$, while the porosity is about 50% [25]. To avoid the escape of sands the bottom of the cell is tapped by a textile filter. The cell is fixed with the frame rigidly mounted on the platform which can be subjected to vibration by an electric motor. The cell bottom is submitted to a depth of about 10 mm below the water level in the reservoir.

At the stage without vibrations, a wetting front advances due to spontaneous imbibition in an almost Washburn regime (see [26]). We allow the wetting front to rise until it stops and no change in either height or shape of the interface between wet and dry regions is observed. The stopping can be attributed to the front pinning on heterogeneities in granular media. In our experiments, the wetting fronts were completely pinned at approximately mid-height of the cell after approximately one hour. Once the wetting front is completely pinned and no change in either height or shape of the interface between wet and dry regions is observed during more than 10 minutes, we apply the vibrations with the gravitational acceleration G measured by the VB-8201HA vibration meter. In our experiments the gravitational acceleration $G = A\omega^2 / g$ was in the range of $0.84 \leq G \leq 0.91$. As soon as the vibration is applied, an initially pinned interface advances in the vertical direction. The position and configurations of pinned and moving wetting fronts $h(x,t)$ were determined from the digital photographs (see Fig 1b) taken each minute for 50 minutes with a digital camera. All interfaces were digitized with the resolution of 15 pixel/mm (see Fig. 1c). To avoid the effects of boundaries and large scale heterogeneities in the sand packing, the scaling properties of wetting fronts were measured using the fragments with the minimal linear trend of the front profile (see Fig.

1c). The length L of profiles of interface height $h(x,t) = z(x,t) - \min_{0 \leq x \leq 512} z(x,t=0)$ used for the scaling analysis is $L = 512$ pixels (see Figs. 1c and 2). As follow from graphs in Fig. 3, the wetting front in a weakly vibrated granular medium advances due to avalanches of localized intermittent advances, similarly to what happens in other systems displaying creeping phenomena (see [1,2]). The avalanches induce a finite creep velocity

$$v_{cr} = \langle \overline{z(x,t+\tau)} - \overline{z(x,t)} \rangle / \tau, \quad (4)$$

where the overbar denotes the average over x for the system of size L and brackets denote the average over a set of experiments with the same G .

We found that a wetting front moves with an almost constant velocity (4) controlled by the gravitational acceleration G (see Fig. 4), while the front width $W(L,t) = \max_{0 \leq x \leq L} h(t) - \min_{0 \leq x \leq L} h(t)$ only slightly fluctuates in time (see Figs. 1c and 2). The dependence of creep velocity (4) on the gravitational acceleration is best fitted by the relation $v_{cr} \propto \exp(-const/G)$ (see Fig. 4b), as it is expected for the creep motion (see Eq. (3)), if $X \propto G$. So, the data of Fig. 4b suggest that the compactivity X is a linear function of the gravitational acceleration G . The roughness exponents of the pinned (ζ_p) and creeping (ζ_{cr}) wetting fronts were determined by the variogram ($\zeta_p = 0.50 \pm 0.06$ and $\zeta_{cr} = 0.64 \pm 0.05$) and the roughness length ($\zeta_p = 0.50 \pm 0.06$ and $\zeta_{cr} = 0.62 \pm 0.06$) methods with the help of commercial software BENOIT 1.3 [27]. We noted that the value $\zeta_p = 0.50 \pm 0.06$ is consistent with the results of early imbibition experiments in 2+1

dimensions [28,29], as well as with the prediction of the directed percolation depinning model [28]. In the creeping regime, the value $\zeta_{cr} = 0.63 \pm 0.06$ is consistent with the roughness exponent $\zeta = (4-d)/3 = 2/3$ expected for the equilibrium interface in a random environment [30]. Unfortunately, our experiments do not permit to determine the scaling behavior $U \propto F^{-\mu}$. Though, putting the scaling exponent $\zeta_{cr} = 0.63 \pm 0.06$ in Eq. (1) with $d = 2$ and $n = 2$, we obtain $\mu \approx 1$. This value, however, should be verified by direct measurements of the creep motion in the forced imbibition or drainage experiments.

In summary, we observe a non-thermal creep motion of wetting fronts in weakly vibrated granular media obeying the Edward's thermodynamics. The creep velocity obeys an analog of the Arrhenius law in which the compactivity of weakly vibrated granular media play the role of temperature. Furthermore, our data suggest that the compactivity is a linear function of the gravitational acceleration, $X \propto G$, while the energy barrier is expected to depend on the capillarity force as $U \propto F^{-\mu}$ with the creep exponent $\mu \approx 1$. These findings provide novel insights to the Edward's thermodynamics and the non-thermal creep phenomena and will stimulate further theoretical and experimental research in these areas.

We acknowledge M. A. Rodríguez for the suggestion to study the wetting front motion under vibrations and illuminating discussions along this work. This work was partially supported by the FONCICYT (México - European Union) under Project 96095 and the Government of Mexico City under Grant PICCT08-64.

Figure captions

Figure 1. a) The experimental setup. b) The snapshot of pinned wetting front. c) The graphs of 50 digitized wetting fronts in weakly vibrated granular medium ($G = 0.84$) at times $t = 0, 1, \dots, 50$ min. (thick curve represents the pinned front at $t = 0$).

Figure 2. The configurations of $h(x, t) = z(x) - \min_{0 \leq x \leq 512} z(x, t = 0)$ for analyzed parts of the wetting fronts in granular media vibrated with adimensional gravitational acceleration: a) $G = 0.84$, b) $G = 0.88$, and c) $G = 0.91$.

Figure 3. An example of localized intermittent advances of wetting front in weakly vibrated ($G = 0.84$) granular medium: a) the wetting front configurations at $t = 18$ (1) and 19 min. (2); grey areas indicate the areas wetted due to the front advance in $\tau = 1$ min, the mean interface advance is $\overline{\Delta z(x, t = 18, \tau = 1)} = 3.8$ pixels; b) localized intermittent advances of wetting front $\Delta z(x, t, \tau = 1) = z(x, t + \tau = 19) - z(x, t = 18)$;

Figure 4. a) The graphs of $\Delta z = \langle \overline{z(x, t)} - \overline{z(x, 0)} \rangle$ vs time t for five values of the gravitational acceleration $G = 0.84$ (1), 0.87 (2), 0.88 (3), 0.9 (4), and 0.91 (5); experimental data are averaged over three experiments with each G ; straight lines represent the data fitting as $\Delta z = v_{cr} t$ with $v_{cr} = 0.167$ (1), 0.292 (2), 0.487 (3), 0.618 (4), and 0.836 (5) mm/min. b) Semi-log plot of the creep velocity v_{cr} vs the inverse of the adimensional gravitational acceleration $1/G$; the fitting line indicates an exponential decay (3) with $X \propto G$.

-
- ¹ S. Dushman, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 48 (1945); G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994); L. Roters, S. Lübeck and K. D. Usadel, *Phys. Rev. E* **63**, 026113 (2001); D. K. Dysthe, F. Renard, J. Feder, B. Jamtveit, P. Meakin, and T. Jøssang, *Phys. Rev. E* **68**, 011603 (2003); B. A. Socie, P. Umbanhowar, R. M. Lueptow, N. Jain, and J. M. Ottino, *Phys. Rev. E* **71**, 031304 (2005); A. B. Kolton, A. Rosso, Th. Giamarchi, and W. Krauth, *Phys. Rev. B* **79**, 184207 (2009).
- ² A. B. Kolton, A. Rosso, and Th. Giamarchi, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 047002 (2005); Y. Chen and Ch. A. Schuh, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 035701 (2007); J. Koivisto, J. Rosti, and M. J. Alava, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 145504 (2007); R. Candelier and O. Dauchot, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 128001 (2009); T. T. Lau, A. Kushima, and S. Yip, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 175501 (2010).
- ³ P. Chauve, Th. Giamarchi, and P. Le Doussal, *Phys. Rev. B* **62**, 6241 (2000).
- ⁴ T. Shibauchi, L. Krusin-Elbaum, V. M. Vinokur, B. Argyle, D. Weller, and B. D. Terris, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 267201 (2001); F. Caysol, D. Ravelosona, C. Chappert, J. Ferré, and J. P. Jamet, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 107202 (2004).
- ⁵ M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1415 (1989); M.V. Feigelman, V. B. Feshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2303 (1989); T. Nattermann, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2454 (1990); J. Kierfeld, H. Nordborg, and V. M. Vinokur, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4948 (2000); A. Petković and Th. Nattermann, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 267005 (2008).

-
- ⁶ L. B. Ioffe and V. M. Vinokur, *J. Phys. C* **20**, 6149 (1987); S. Lemerle, J. Ferré, C. Chappert, V. Mathet, T. Giamarchi, and P. Le Doussal, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 849 (1998).
- ⁷ D. A. Gorokhov, D. S. Fisher, and G. Blatter, *Phys. Rev. B* **66**, 214203 (2002).
- ⁸ V. Colizza, A Barrat, and V. Loreto, *Phys. Rev. B* **65**, 050301 (2002); A. Barrat, V. Colizza, and V. Loreto, *Phys. Rev. B* **66**, 011310 (2002); M. Schröter, D. I. Goldman, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **71**, 030301R (2005).
- ⁹ J. R. Thompson, J. G. Ossandon, L. Krusin-Elbaum K. J. Song, D. K. Christen, and J. L. Ullmann, *Appl. Phys. Lett.* **74**, 3699 (1999).
- ¹⁰ L. Mester, *The new physical-mechanical theory of granular materials* (Homonnai Kiadó, Nyíregyháza, Hungary 2009).
- ¹¹ P. Umbanhowar and M. van Hecke, *Phys. Rev. E* **72**, 030301R (2005).
- ¹² M. Sellitto and J. J. Arenzon, *Phys. Rev. E* **62**, 7793 (2000).
- ¹³ O. Pouliquen, M. Belzons, and M. Nicolas, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 014301 (2003).
- ¹⁴ Ch. Josserand, A. V. Tkachenko, D. M. Mueth, and H. M. Jaeger, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3632 (2000).
- ¹⁵ J. E. Fiscina and M. O. Caceres, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 108003 (2005); T. S. Komatsu, Sh. Inagaki, N. Nakagawa, and S. Nasuno, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1757 (2001); Th. Divoux, H. Gayvallet, and J.-Ch. Geminard, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 148303 (2008).
- ¹⁶ S. F. Edwards and D. V. Grinev, *Phys. Rev. E* **58**, 4758 (1998); S. F. Edwards and D. V. Grinev, *Adv. Phys.* **51**, 1669 (2002); R. Blumenfeld and S. F. Edwards, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 114303 (2003); S. F. Edwards, *J. Stat. Phys.*, **116**, 29 (2004).

-
- ¹⁷ A. Barrat, V. Colizza, and V. Loreto, Phys. Rev. E. **66**, 011310 (2002); M. Depken and R. Stinchcombe, Phys. Rev. E **71**, 065102 (2005).
- ¹⁸ R. Capozza, A. Vanossi, A. Vezzani, and S. Zapperi, Phys. Rev. Lett. **103**, 085502 (2009).
- ¹⁹ E. R. Nowak, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel, Phys. Rev. E **57**, 1971 (1998).
- ²⁰ A. Fierro, M. Nicodemi, and A. Coniglio, Phys. Rev. E **66**, 061301 (2002).
- ²¹ K. Naderi and T. Babadagli, Ultrasonics Sonochemistry **17**, 500 (2010).
- ²² H.V. Fairbanks, Chem. Eng. Prog. Symp. Ser. **67**, 108 (1971); V.N. Nikolaevskii, Fluid Dyn. **27**, 689 (1992); O. L. Kouznetsov, J. Pet. Sci. Eng. **19**, 191 (1998); T. Hamida, T. Babadagli, Transport Porous Med. **70**, 231 (2007).
- ²³ Using acoustic waves as an enhanced oil recovery technique has been of interest in the most studies. In this way, it was found that irradiation of ultrasonic energy results in faster motion of oil in porous media at laboratory as well as reservoir scales [21,22,24].
- ²⁴ T. Hamida and T. Babadagli, in Proc. 2005 Asia Pacific Oil & Gas Conference, Jakarta, Indonesia, SPE 92124 (2005).
- ²⁵ All experiments were carried out under ambient temperature of $23\pm 5^\circ\text{C}$), atmosphere pressure, and relative humidity ($53\pm 8\%$).
- ²⁶ M. Alava, M. Dubé, and M. Rost, Adv. Phys. **53**, 83 (2004).
- ²⁷ <http://www.trusoft-international.com> (BENOIT 1.2, 1999); W. Seffens, Science **285**, 1228 (1999).

²⁸ S. V. Buldyrev, A.-L. Barabási, S. Havlin, J. Kenész, H. E. Stanley, and I.-I.S. Xenias, *Physica A* **191**, 220 (1992).

²⁹ L. A. N. Amaral, A.-L. Barabási, S. V. Buldyrev, S. T. Harrington, S. Havlin, R. Sadr-Lahijany, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **51**, 4655 (1995).

³⁰ D. S. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1964 (1986).

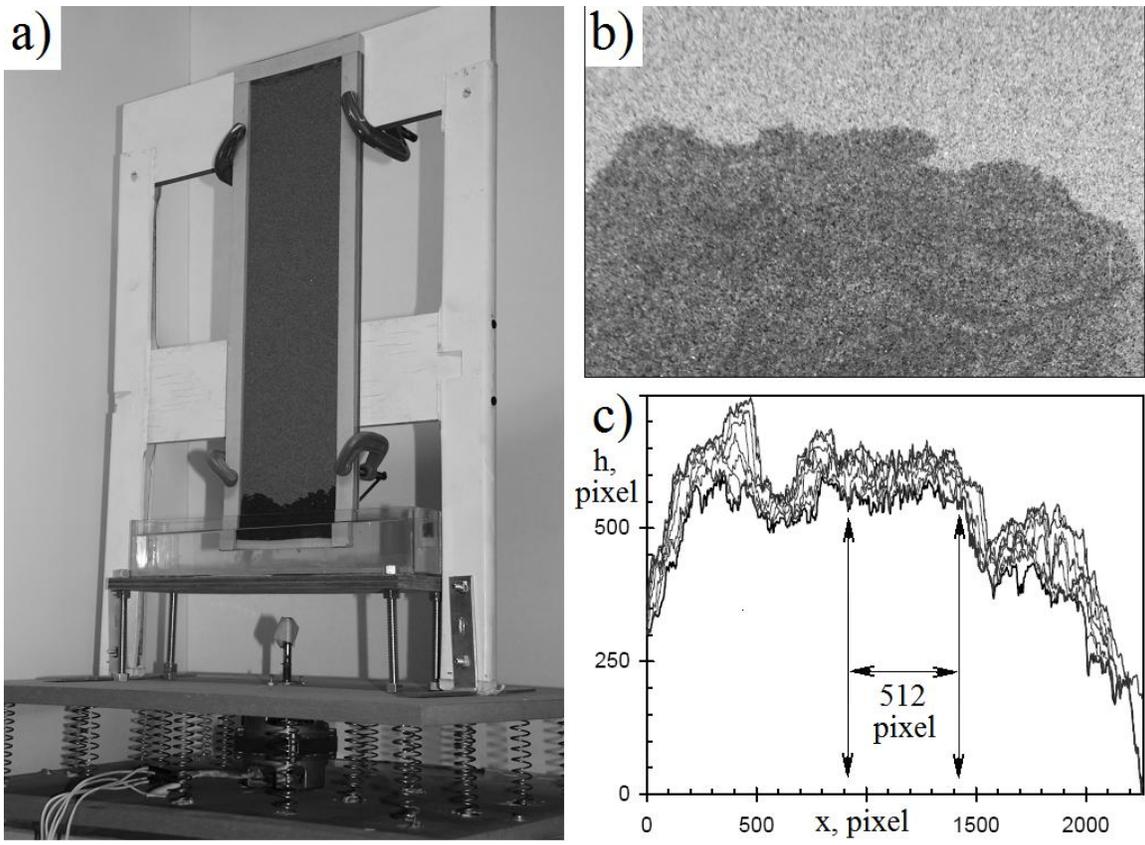


Figure 1.

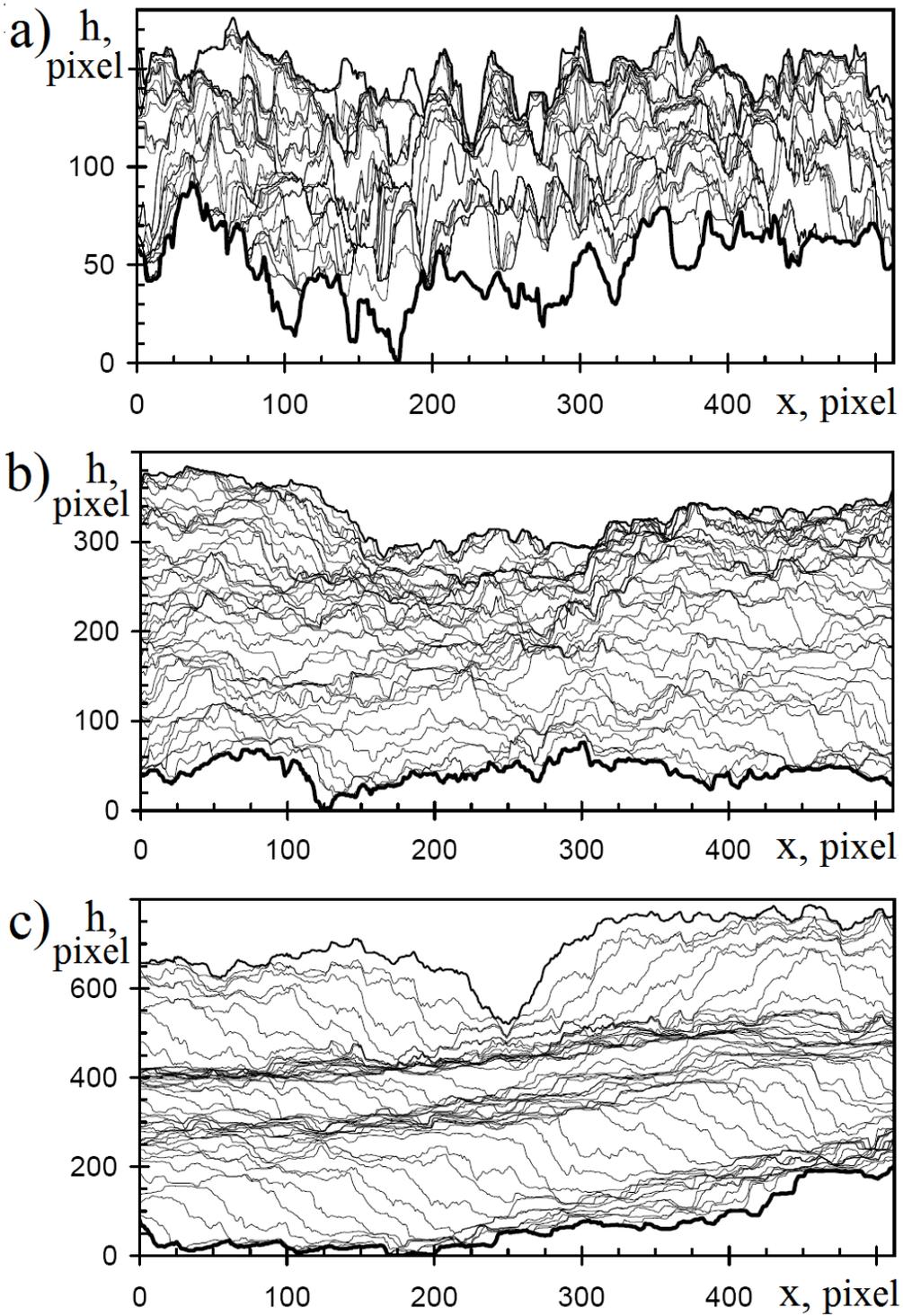


Figure 2.

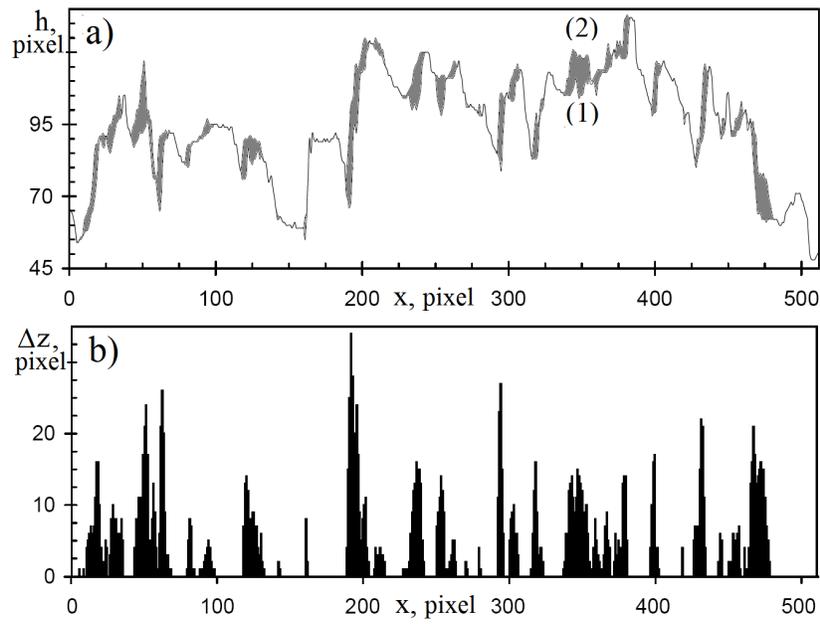


Figure 3.

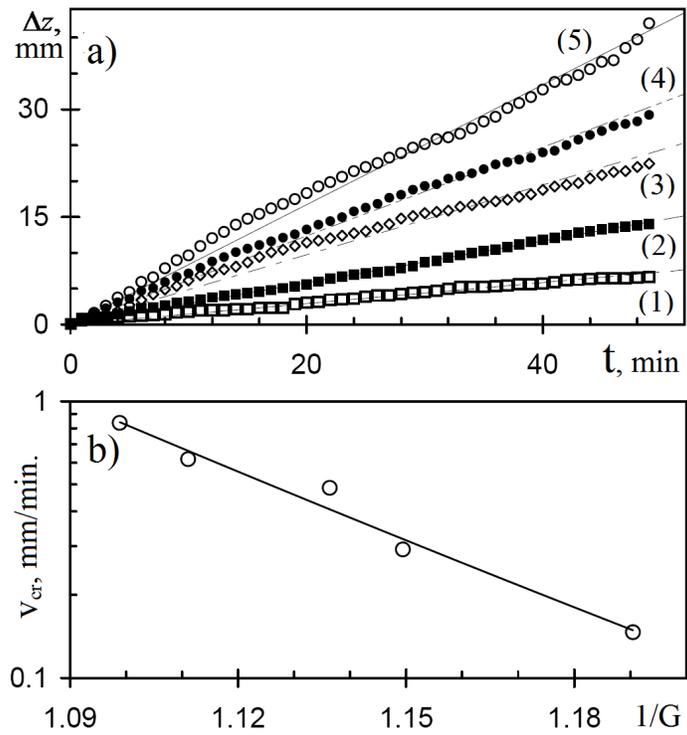


Figure 4.