Capítulo 4

Filtrado digital

En el presente capítulo se describen algunas de las áreas y operaciones del filtrado digital, así como también se formula el funcional del error para minimizar el error de estimación, finalmente, se muestran algunos conceptos del filtrado digital adaptivo.

4.1. Áreas del Filtrado Digital

Una de las clasificaciones fundamentales que se han realizado para el estudio del filtrado digital son: la estimación de parámetros o ganancias y la identificación de estados o variables. Es decir, estas dos amplias áreas resuelven los problemas de las ganancias y las variables de estado de un sistema tipo caja negra.

4.1.1. Estimación

Es el área que se encarga de analizar y describir el comportamiento de los parámetros del sistema.

La Teoría de Estimación es una parte de la Probabilidad y Estadística que trabaja con el problema de derivar información acerca de las propiedades de variables aleatorias y procesos estocásticos, dado un conjunto de muestras observadas. El problema sucede frecuentemente en el estudio de sistemas de comunicaciones y control. El método de máxima probabilidad (*Maximum likelihood*) es por mucho el más general y poderoso método de estimación. Fue utilizado primeramente por el famoso estadista R.A. Fisher en 1906. En principio, el método de máxima probabilidad podría ser aplicado a cualquier problema de estimación, con la condición de formular la función de densidad de probabilidad del conjunto disponible de información observada. El método entonces cede casi todas las estimaciones bien conocidas como casos especiales.

4.1.2. Identificación

Es el proceso que se encarga de analizar y describir el comportamiento de los estados del sistema.

La identificación de sistemas es una metodología desarrollada principalmente en el área de Control Automático, con la cual se puede seleccionar el mejor modelo de un conjunto de modelos dados basados en la información dada de un sistema. Desde aquí, el problema de identificación de sistemas es especificado por tres elementos:

- Un conjunto de información $\mathcal{D}$, obtenido por las mediciones de las entradas y salidas.
- Un conjunto de modelos $\mathcal{M}$, o una estructura de modelo, conteniendo modelos candidatos.
- Un criterio, o una función $\mathcal{L}$ para seleccionar el mejor modelo, o una regla para evaluar modelos candidatos, basados en la información.

El problema de identificación es obtener buenos modelos que describan fenómenos (reales o artificiales) de información. Así, identificación es modelar donde no sólo la teoría sino también la información medible es utilizada. La tarea de identificación es frecuentemente muy compleja que no puede ser hecha en una única dirección. En suma, muchos problemas de identificación comparten características comunes. Por estas razones, varios métodos y teorías han sido desarrollados.

Sin embargo, la identificación de sistemas tiene muchos aspectos y facetas diferentes dependiendo en particular de la clase o cantidad de información *a priori* de los sistemas utilizados como modelos. La identificación puede ser hecha para los propósitos siguientes:

- Codificación de información (por parámetros del sistema) o para dar una descripción no teórica entre la relación de la información.
- Estimación espectral.
- Predicción, filtrado, o interpolación.
- Análisis y simulación de sistemas.
- Control.
- Estimación de parámetros en modelos obtenidos de teorías físicas.
- Discriminación entre teorías conflictivas.

La identificación de sistemas tienen un amplio rango de aplicaciones en muchos bloques empíricos de la ciencia. Algunas áreas importantes de aplicación son:

- Procesamiento de señales, en particular, procesamiento de voz, sonar y aplicaciones de radar.
- Identificación de sistemas (plantas) para el propósito de control.
- Modelado de sistemas para la simulación, con el fin de evitar el diseño de experimentos reales: monitorización de sistemas técnicos.
- Aplicaciones económicas y de negocios, en particular econometría, por ejemplo, pruebas de teorías económicas, estimación de parámetros *deep*, pronóstico y políticas de simulación con macromodelos, análisis y pronósticos para información financiera.
- Aplicaciones ecológicas, por ejemplo, modelado del comportamiento dinámico de ecosistemas.
- Aplicaciones geofísicas, por ejemplo, análisis de señales sísmicas.
- Aplicaciones biológicas y médicas, por ejemplo, análisis de información de EEG.

4.2. Operaciones del Filtrado Digital

Otra de las formas en que se puede clasificar el filtrado digital de señales es a través de las operaciones que se pueden realizar. Los tres tipos básicos de operaciones de procesamiento de información son el filtrado, el suavizado y la predicción, cada una de las cuales puede ser implementada por un estimador. Las diferencias entre estas operaciones son ilustradas en la Figura 4.1.

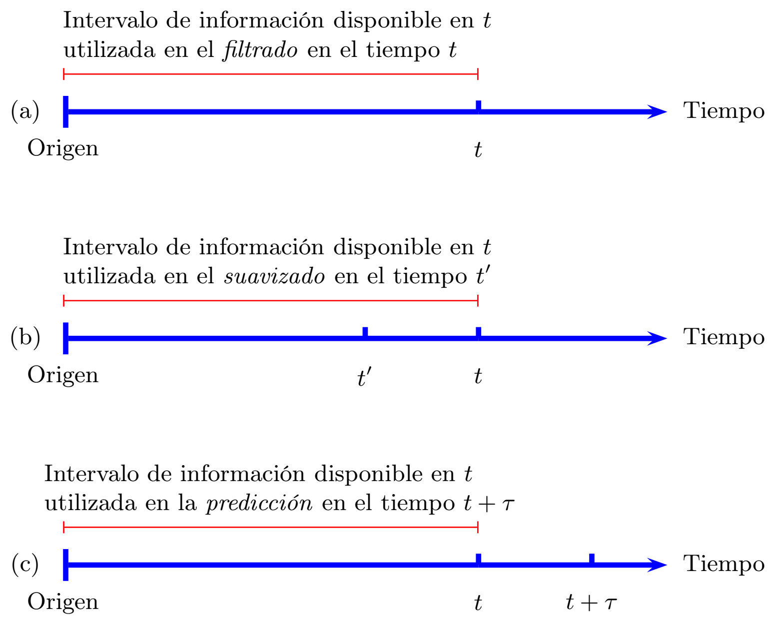

Figura 4.1: Formas básicas de estimación: (a) filtrado, (b) suavizado, y (c) predicción.

Descripción o filtrado es una operación que involucra la extracción de información alrededor de una cantidad de interés hasta un tiempo t utilizando la información medida hasta t.

Suavizado es una forma de estimación *a posteriori*, en la que la información medida después del tiempo de interés es utilizada en la estimación. Específicamente, la estimación suavizada en el tiempo t', es obtenida utilizando la información medida en el intervalo $[0, t]$, donde $t' < t$. Existe además un retraso de $t' - t$ involucrado en el cálculo de la estimación suavizada. El beneficio obtenido por esperar por la acumulación de mayor información es que el suavizado puede lograr una estimación más precisa que el filtrado.

Predicción es el pronóstico de la estimación. Su interés es obtener información acerca de una cantidad de interés en un tiempo $t+\tau$ en el futuro (para $\tau > 0$) utilizando información medida hasta un tiempo t, (incluyendo t).

De la Figura 4.1, es aparente que ambos: el filtrado y la predicción son operaciones en tiempo real, mientras que el suavizado no. Por *operación en tiempo real*, se entiende como una operación en la cual la estimación de interés es calculada en base en la información disponible *ahora*.

4.3. Funcional del error

El propósito de un filtro es producir una estimación de la respuesta deseada $d(k)$. Suponga que la entrada y la respuesta deseada del filtro son realizaciones simples de procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio, ambos con media cero. La estimación de $d(k)$ es naturalmente acompañada por un error, el cual está definido por la diferencia (4.1),

$$e(k) := d(k) - y(k) \tag{4.1}$$

En donde la salida del sistema en su forma más simple es (4.2),

$$y\left(k\right) := a^{*}\left(k\right)\tilde{w}\left(k-n\right) \tag{4.2}$$

Para datos de entrada complejos, los coeficientes son, en general, también complejos. Sea el $k-$ésimo coeficiente $a^{*}\left(k\right)$, el cual es denotado en términos de sus partes real e imaginaria de acuerdo a (4.3),

$$a^{*}(k) = s(k) + jq(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

La estimación del error $e\left(k\right)$, es el valor de una muestra de la variable aleatoria que es descrita al sustituir (4.3) en (4.2) y este último resultado en (4.1) y es descrito por (4.4),

$$e(k) = d(k) - (s(k) + jq(k))\tilde{w}(k-n) \tag{4.4}$$

y su conjugado es descrito por (4.5),

$$e^{*}(k) = d(k) - (s(k) - jq(k))\tilde{w}^{*}(k-n) \tag{4.5}$$

Correspondientemente, se puede definir un operador gradiente estocástico con respecto a la función de error $e\left(k\right),\ e^{*}\left(k\right) \in \mathbb{C}$, en el cual, el $k-$ésimo elemento es escrito en términos de derivadas parciales de primer orden con respecto a la parte real $s\left(k\right)$ y la parte imaginaria $q\left(k\right)$, quedando en (4.6),

$$\nabla e(k) = \frac{\partial e(k)}{\partial s(k)} - j\frac{\partial e(k)}{\partial q(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

y su conjugado (4.7),

$$\nabla e^{*}(k) = \frac{\partial e(k)}{\partial s(k)} + j\frac{\partial e(k)}{\partial q(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Para optimizar el diseño del filtro, se busca minimizar el valor de la varianza del error $e\left(k\right)$. Así, se define la *función de costo* $J\left(k\right)$ como la varianza del error, (4.8),

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{e\left(k\right)e^{*}\left(n\right)\right\} &= \begin{cases} \sigma_{\tilde{w}}^{2} < \infty, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \\ J\left(k\right) &= \mathrm{E}\left\{\left|e\left(k\right)\right|^{2}\right\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde E es el operador de esperanza matemática. El requerimiento es determinar las condiciones de operación para las cuales $J\left(k\right)$ alcanza el valor mínimo.

Así, para este caso, aplicando el operador ∇ a la función de costo $J\left(k\right)$, se obtiene un vector gradiente multidimensional complejo $\nabla J\left(k\right)$, donde el $k-$ésimo elemento es (4.9),

$$\nabla J(k) = \frac{\partial J(k)}{\partial s(k)} + j\frac{\partial J(k)}{\partial q(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.9}$$

La ecuación (4.9) representa una extensión natural de la definición habitual de un gradiente para una función de coeficientes reales a un caso más general de una función de coeficientes complejos. Note que para que la definición de gradiente complejo dado en (4.9) sea válida, es necesario que $J(k)$ sea real. El operador gradiente siempre es usado en el contexto de encontrar los *puntos estacionarios* de una función de interés. Esto significa que una restricción compleja debe ser convertida a un par de restricciones reales. En la ecuación (4.9), el par de restricciones reales es obtenido haciendo las partes real e imaginaria de $\nabla J(k)$ iguales a cero.

Para que la función de costo $J(k)$ alcance su valor mínimo, todos los elementos del vector gradiente $\nabla J(k)$ deben ser simultáneamente iguales a cero; como se ve en (4.10),

$$\nabla J(k) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.10}$$

Bajo este conjunto de condiciones, se dice que el filtro es óptimo en el sentido de la varianza del error.

De acuerdo a la ecuación (4.8), la función de costo $J(k)$ es un escalar que es independiente del tiempo k, sustituyendo la primera de esa ecuación en (4.9), se obtiene (4.11),

$$\nabla J(k) = \mathrm{E}\left\{\frac{\partial e(k)}{\partial s(k)}e^*(k) + \frac{\partial e^*(k)}{\partial s(k)}e(k) + \frac{\partial e(k)}{\partial q(k)}je^*(k) + \frac{\partial e^*(k)}{\partial q(k)}je(k)\right\}. \tag{4.11}$$

Usando las ecuaciones (4.1) y (4.3), se obtienen cuatro derivadas parciales,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(k)}{\partial s(k)} &= -\tilde{w}(k-n), \\
\frac{\partial e(k)}{\partial q(k)} &= -j\tilde{w}(k-n), \\
\frac{\partial e^*(k)}{\partial s(k)} &= -\tilde{w}^*(k-n), \\
\frac{\partial e^*(k)}{\partial q(k)} &= j\tilde{w}^*(k-n).
\end{aligned}$$

Así, sustituyendo estas derivadas parciales en (4.11) y cancelando términos comunes, finalmente se obtiene (4.12),

$$\nabla J(k) = -2\mathrm{E}\left\{\tilde{w}(k-n)\,e^*(k)\right\}. \tag{4.12}$$

Con lo anterior, ahora se pueden especificar las condiciones requeridas para minimizar la función de costo $J(k)$. Sea $e_o \in \mathbb{C}$, denota el valor especial del error de estimación que resulta cuando el filtro opera en su condición óptima. Entonces, se encuentra que las condiciones especificadas en (4.10) son equivalentes a (4.13),

$$\mathrm{E}\left\{\tilde{w}\left(k-n\right)e_o^*\left(k\right)\right\} = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.13}$$

La condición necesaria y suficiente para que la función de costo $J\left(k\right)$, alcance su valor mínimo es, que el valor correspondiente del error de estimación $e_o\left(k\right)$ sea ortogonal a cada muestra de entrada que entra dentro de la estimación de la respuesta deseada en el tiempo k.

Existe un corolario al Principio de Ortogonalidad que se puede derivar examinando la correlación entre la salida del filtro $y\left(k\right)$ y el error de estimación $e\left(k\right)$. Usando la relación de convolución (4.14),

$$y\left(k\right) = \sum_{n=0}^{r} a^*\left(k\right)\tilde{w}\left(k-n\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad r \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.14}$$

se puede expresar ésta como (4.15),

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{y\left(k\right)e^*\left(k\right)\right\} &= \mathrm{E}\left\{\sum_{n=0}^{r} a^*\left(k\right)\tilde{w}\left(k-n\right)e^*\left(k\right)\right\} \\
&= a^*\left(k\right)\sum_{n=0}^{r}\mathrm{E}\left\{\tilde{w}\left(k-n\right)e^*\left(k\right)\right\} \\
&= a^*\left(k\right)r\mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left\{\tilde{w}\left(k-n\right)e^*\left(k\right)\right\}_k\right\}_n
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Si $y_o\left(k\right)$ denota la salida producida por el filtro optimizado en el sentido de la varianza del error, con $e_o\left(k\right)$ denotando el correspondiente error de estimación y además utilizando el Principio de Ortogonalidad descrito por (4.13), se obtiene el resultado deseado (4.16),

$$\mathrm{E}\left\{y_o\left(k\right)e_o^*\left(k\right)\right\} = 0 \tag{4.16}$$

Cuando el filtro opera en sus condiciones óptimas, la estimación de la respuesta deseada definida por la salida del filtro $y_o\left(k\right)$ y el correspondiente error de estimación $e_o\left(k\right)$ son ortogonales entre sí.

4.4. Filtrado Digital Adaptivo (FDA)

El área de estudio de los filtros adaptivos, constituyen una parte importante del procesamiento de señales estadísticas. Cada vez que existe el requerimiento de procesar una señal en un ambiente desconocido o en un ambiente no estacionario, el uso de un filtro digital adaptivo ofrece una solución altamente atractiva al problema, porque provee un mejor funcionamiento que utilizando un filtro fijo diseñado por métodos convencionales. Además, el uso de filtros adaptivos, provee capacidades de procesamiento de nuevas señales que en otros casos no serían posible.

La adaptación es lograda por el ajuste de parámetros libres (coeficientes) de un filtro de acuerdo a la información de entrada, la cual, en realidad, hace el filtrado adaptivo, no lineal. Cuando se habla de un filtro adaptivo *lineal* significa: que el mapeo entrada-salida del filtro obedece al principio de superposición, además, en cualquier instante de tiempo, los parámetros del filtro son todos fijos.

4.4.1. FDA con modos deslizantes

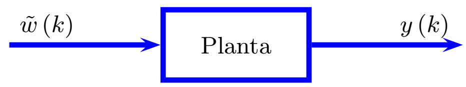

Figura 4.2: Sistema tipo caja negra.

Teorema 1 *Dado el sistema tipo caja negra mostrado en la Figura 4.2, con dinámica interna "a", respuesta $y(k)$ acotada por la función de distribución $N\left(\mu_y, \sigma_y^2 < \infty\right)$, y excitación $\tilde{w}(k) \in N\left(\mu_{\tilde{w}}, \sigma_{\tilde{w}}^2 < \infty\right)$, es descrito de forma recursiva por* (4.17).

$$y(k) = ay(k-1) + \tilde{w}(k) \in \mathbb{R} \tag{4.17}$$

Prueba: El modelo considerado para sistemas tipo caja negra con perturbaciones a la entrada como a la salida, con condiciones de causalidad y homogeneidad, y dinámica acotada por los primeros momentos de probabilidad, es:

$$x(k+1) = ax(k) + w(k) \in \mathbb{R} \tag{4.18}$$
$$y(k) = x(k) + v(k) \in \mathbb{R} \tag{4.19}$$

con $\{w(k)\} \subseteq N\left(\mu_w, \sigma_w^2 < \infty\right)$, $\{x(k)\} \subseteq N\left(\mu_x, \sigma_x^2 < \infty\right)$ y $\{v(k)\} \subseteq N\left(\mu_v, \sigma_v^2 < \infty\right)$. Retardando (4.18) de acuerdo con $x(k) := x(k+1)z^{-1}$, y sustituyendo en (4.19), se obtiene (4.20),

$$y(k) = ax(k-1) + w(k-1) + v(k). \tag{4.20}$$

Despejando $x(k)$ de (4.19), y retardando en el tiempo, se obtiene (4.21),

$$x(k-1) = y(k-1) - v(k-1). \tag{4.21}$$

Sustituyendo (4.21) en (4.20) se obtiene (4.22),

$$y(k) = ay(k-1) - av(k-1) + w(k-1) + v(k). \tag{4.22}$$

Por otra parte defínase $\tilde{w}(k) := -av(k-1) + w(k-1) + v(k)$. El sistema de manera explícita se describe en (4.23), y corresponde a (4.17).

$$y(k) = ay(k-1) + \tilde{w}(k). \tag{4.23}$$

■

De acuerdo al Teorema 1, el parámetro interno a del sistema (4.17) tipo caja negra es desconocido, aunque en la forma recursiva de la descripción de la evolución del sistema se presenta explícitamente de acuerdo al modelo de referencia (modelo estocástico de primer orden, con promedios móviles).

Siendo necesario realizar la estimación de esa ganancia quedando el modelo (4.17) expresado en (4.17′).

$$y\left(k\right)=\hat{a}y\left(k-1\right)+\tilde{w}\left(k\right). \tag{4.17′}$$

Teorema 2 *Dado el sistema recursivo* (4.17), *la estimación de parámetros de acuerdo al producto punto es,*

$$\hat{a}\left(k\right)\,=\,\frac{\langle y\left(k\right),y^{T}\left(k-1\right)\rangle}{\langle y\left(k-1\right),y^{T}\left(k-1\right)\rangle}, \tag{4.24}$$

y que tiene forma recursiva,

$$\hat{a}\left(k\right)\,=\,S\left(k\right)\hat{a}\left(k-1\right)+R\left(k\right), \tag{4.25}$$

donde,

$$\begin{aligned} S\left(k\right)\,&=\,\frac{N\left(k-1\right)}{y\left(k-1\right)y^{T}\left(k-1\right)+N\left(k-1\right)};\;R\left(k\right)=\frac{y\left(k-1\right)y^{T}\left(k-1\right)}{y\left(k-1\right)y^{T}\left(k-1\right)+N\left(k-1\right)};\\ N\left(k\right)\,&=\,y\left(k-1\right)y^{T}\left(k-1\right)+N\left(k-1\right). \end{aligned}$$

Prueba: Si se considera un vector ortogonal a la señal de salida retardada, tal que $\langle\tilde{w}\left(k\right),y^{T}\left(k-1\right)\rangle=0$.

Entonces se tiene (4.26),

$$\langle y\left(k\right),y^{T}\left(k-1\right)\rangle\,=\,a\langle y\left(k-1\right),y^{T}\left(k-1\right)\rangle. \tag{4.26}$$

De la expresión (4.26) se obtiene (4.27),

$$\hat{a}\left(k\right)\,:=\,\frac{\langle y\left(k\right),y^{T}\left(k-1\right)\rangle}{\langle y\left(k-1\right),y^{T}\left(k-1\right)\rangle}. \tag{4.27}$$

Ahora bien, para expresar (4.27) de forma recursiva, considérese (4.28),

$$\hat{a}\left(k\right)\,=\,\frac{\sum_{i=1}^{k}y\left(i\right)y^{T}\left(i-1\right)}{\sum_{i=1}^{k}y\left(i-1\right)y^{T}\left(i-1\right)}=\frac{M\left(k\right)}{N\left(k\right)}. \tag{4.28}$$

Por otra parte, el parámetro $\hat{a}\left(k-1\right)$ para condiciones estacionarias tiene la forma (4.29),

$$\hat{a}\left(k-1\right)\,=\,\frac{M\left(k-1\right)}{N\left(k-1\right)}. \tag{4.29}$$

Ahora bien, $M\left(k\right)$ se puede expresar como (4.30),

$$M\left(k\right)\,=\,y\left(k\right)y^{T}\left(k-1\right)+\sum_{i=1}^{k-1}y\left(i\right)y^{T}\left(i-1\right). \tag{4.30}$$

De la misma forma $N(k)$ queda como (4.31),

$$N(k) = y(k-1)\,y^T(k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} y(i-1)\,y^T(i-1). \tag{4.31}$$

Finalmente, $M(k)$ y $N(k)$, pueden reescribirse en (4.32) y (4.33),

$$M(k) = y(k)\,y^T(k-1) + M(k-1), \tag{4.32}$$
$$N(k) = y(k-1)\,y^T(k-1) + N(k-1). \tag{4.33}$$

Sustituyendo (4.32) y (4.33) en (4.28) y considerando (4.29) se obtiene (4.34),

$$\hat{a}(k) = \frac{y(k)\,y^T(k-1) + M(k-1)\left(\frac{N(k-1)}{N(k-1)}\right)}{y(k-1)\,y^T(k-1) + N(k-1)}. \tag{4.34}$$

O bien,

$$\hat{a}(k) = S(k)\,\hat{a}(k-1) + R(k). \tag{4.25$'$}$$

que corresponde a (4.25). ■

Teorema 3 *Dado el sistema recursivo* (4.17)*, la estimación de parámetros por mínimos cuadrados es* (4.35)*,*

$$\hat{a}(k) = \frac{\langle d(k), y^T(k-1)\rangle}{\langle y(k-1), y^T(k-1)\rangle}, \tag{4.35}$$

y que tiene forma recursiva,

$$\hat{a}(k) = W(k)\,\hat{a}(k-1) + V(k), \tag{4.36}$$

donde,

$$W(k) = \frac{N(k-1)}{y(k-1)\,y^T(k-1) + N(k-1)};\; V(k) = \frac{y(k-1)\,y^T(k-1)}{y(k-1)\,y^T(k-1) + N(k-1)};$$
$$N(k) = y(k-1)\,y^T(k-1) + N(k-1).$$

Prueba: Considérese la definición del error (4.1$'$),

$$e(k) := d(k) - y(k) \tag{4.1$'$}$$

Sustituyendo la expresión recursiva del modelo de la caja negra (4.17) en (4.1$'$), se obtiene (4.37),

$$e(k) = d(k) - ay(k-1) - \tilde{w}(k) \tag{4.37}$$

Desarrollando se obtiene (4.38),

$$\begin{aligned} e^2(k) &= d^2(k) + a^2y^2(k-1) + \tilde{w}^2(k) \\ &\quad -2ad(k)\,y(k-1) - 2d(k)\,\tilde{w}(k) + 2ay(k-1)\,\tilde{w}(k) \end{aligned} \tag{4.38}$$

Optimizando de acuerdo a (4.10) y con $y(k-1)\tilde{w}^T(k) = 0$, se llega a (4.39),

$$\begin{aligned} \nabla e^2(k) &= 2ay^2(k-1) - 2d(k)\,y(k-1) + 2y(k-1)\,\tilde{w}(k) && (4.39)\\ &= 0 && (4.40) \end{aligned}$$

O bien,

$$2ay^2(k-1) - 2d(k)\,y(k-1) + 2y(k-1)\,\tilde{w}(k) = 0 \tag{4.41}$$

De la expresión (4.41) se obtiene (4.42),

$$\hat{a}(k) = \frac{\langle d(k), y^T(k-1)\rangle}{\langle y(k-1), y^T(k-1)\rangle}, \tag{4.42}$$

que corresponde a (4.35).

■

Corolario 1 *Cuando $y(k)$ se aproxima a $d(k)$, (4.35) se convierte a (4.24).*

Teorema 4 *Dado el sistema recursivo (4.17), la estimación de parámetros de acuerdo a la esperanza matemática es,*

$$\hat{a}(k) = \frac{\mathrm{E}\{y(k), y^T(k-1)\}}{\mathrm{E}\{y(k-1), y^T(k-1)\}}, \tag{4.43}$$

y que tiene forma recursiva,

$$\hat{a}(k) = T(k)\,\hat{a}(k-1) + Z(k-1), \tag{4.44}$$

donde,

$$\begin{aligned} T(k) &= \frac{(k-1)\,Q(k-1)}{y(k-1)\,y^T(k-1) + (k-1)\,Q(k-1)};\; Z(k) = \frac{y(k-1)\,y^T(k-1)}{y(k-1)\,y^T(k-1) + (k-1)\,Q(k-1)};\\ Q(k) &= \frac{1}{k}\left[y(k-1)\,y^T(k-1) + (k-1)\,Q(k-1)\right]. \end{aligned}$$

Prueba: Si se considera un vector ortogonal a la señal de salida retardada, tal que $\mathrm{E}\{\tilde{w}(k), y^T(k-1)\} = 0$.

Entonces se tiene (4.45),

$$\mathrm{E}\{y(k), y^T(k-1)\} = a\mathrm{E}\{y(k-1), y^T(k-1)\} + \mathrm{E}\{\tilde{w}(k), y^T(k-1)\}. \tag{4.45}$$

De la expresión (4.45) se obtiene (4.46),

$$\hat{a}(k) := \frac{\mathrm{E}\{y(k), y^T(k-1)\}}{\mathrm{E}\{y(k-1), y^T(k-1)\}}. \tag{4.46}$$

Ahora bien, para expresar (4.43) de forma recursiva, considérese (4.47),

$$\hat{a}(k) = \frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y(i)\,y^T(i-1)}{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y(i-1)\,y^T(i-1)} = \frac{P(k)}{Q(k)}, \tag{4.47}$$

Por otra parte, el parámetro $\hat{a}(k-1)$ para condiciones estacionarias tiene la forma (4.48),

$$\hat{a}(k-1) = \frac{P(k-1)}{Q(k-1)}. \tag{4.48}$$

Para expresar de forma recursiva a $P(k)$ considérese (4.49) y (4.50),

$$P(k-1) = \frac{1}{k-1}\sum_{i-1}^{k-1} y(i)\, y^T(i-1), \tag{4.49}$$

$$P(k) = \frac{1}{k}\left[y(k)\, y^T(k-1) + \frac{1}{k-1}\sum_{i-1}^{k-1} y(i)\, y^T(i-1)(k-1)\right], \tag{4.50}$$

y para expresar a $Q(k)$ de forma recursiva considérese (4.51) y (4.52),

$$Q(k-1) = \frac{1}{k-1}\sum_{i-1}^{k-1} y(i-1)\, y^T(i-1), \tag{4.51}$$

$$Q(k) = \frac{1}{k}\left[y(k-1)\, y^T(k-1) + \frac{1}{k-1}\sum_{i-1}^{k-1} y(i-1)\, y^T(i-1)(k-1)\right]. \tag{4.52}$$

Finalmente, $P(k)$ y $Q(k)$ quedan expresados en forma recursiva en (4.53) y (4.54),

$$P(k) = \frac{1}{k}\left[y(k)\, y^T(k-1) + (k-1)\, P(k-1)\right], \tag{4.53}$$

$$Q(k) = \frac{1}{k}\left[y(k-1)\, y^T(k-1) + (k-1)\, Q(k-1)\right]. \tag{4.54}$$

Sustituyendo (4.53) y (4.54) en (4.47) y considerando (4.48) se obtiene (4.55),

$$\hat{a}(k) = \frac{\frac{1}{k}\left[y(k)\, y^T(k-1) + (k-1)\, P(k-1)\, \frac{Q(k-1)}{Q(k-1)}\right]}{\frac{1}{k}\left[y(k-1)\, y^T(k-1) + (k-1)\, Q(k-1)\right]}. \tag{4.55}$$

O bien,

$$\hat{a}(k) = T(k)\, \hat{a}(k-1) + Z(k). \tag{4.44$'$}$$

que corresponde a (4.44). ■

Adaptación para el identificador

Suponga que se conoce la respuesta del sistema (4.56),

$$\hat{y}(k) = \hat{a}(k)\, \hat{y}(k-1) + \tilde{w}(k) \tag{4.56}$$

y que el error de estimación $e(k)$, está definido como (4.57),

$$e(k) := y(k) - \hat{y}(k). \tag{4.57}$$

Entonces el funcional del error $J(k)$ se propone como (4.58),

$$J(k) = \mathrm{E}\{e(k)\, e^T(k)\}. \tag{4.58}$$

El cual en forma recursiva queda expresado como (4.59),

$$J(k) = \frac{1}{k}\left[e(k)\, e^T(k) + (k-1)\, J(k-1)\right]. \tag{4.59}$$

Además, considérese también que se conoce la respuesta del sistema $\hat{\hat{y}}(k)$, es decir (4.60),

$$\hat{\hat{y}}(k) = \hat{\hat{a}}(k)\, \hat{\hat{y}}(k-1) + \tilde{w}(k). \tag{4.60}$$

Ahora bien, de la expresión anterior, es necesario estimar el parámetro interno $\hat{\hat{a}}(k)$.

Teorema 5 *Sea el sistema recursivo* (4.60)*, su estimador adaptivo es de la forma* (4.61)*,*

$$\hat{\hat{a}}(k) = \frac{\langle y(k), y^T(k-1)\rangle - \mathrm{sign}(e(k))\, J(k)}{\langle y(k-1), y^T(k-1)\rangle}. \tag{4.61}$$

Prueba: Considérese que el sistema (4.60) tiene un estimador en producto punto extendido (4.62),

$$\hat{\hat{a}}(k) = \frac{\langle y(k), y^T(k-1)\rangle - \langle \tilde{w}(k), y^T(k-1)\rangle}{\langle y(k-1), y^T(k-1)\rangle}, \tag{4.62}$$

donde,

$$\text{lím}_{k\to\tau} \langle \tilde{w}(k), y^T(k-1)\rangle \approx \text{lím}_{k\to\tau}\, \mathrm{sign}(e(k))\, J(k). \tag{4.63}$$

Entonces (4.62) tiene la forma (4.64),

$$\hat{\hat{a}}(k) = \frac{\langle y(k), y^T(k-1)\rangle - \mathrm{sign}(e(k))\, J(k)}{\langle y(k-1), y^T(k-1)\rangle}, \tag{4.64}$$

que es descrita en (4.61). ■

El funcional del error $J(k)$ descrito en (4.59), al sustituir $e(k)$, así como $y(k)$ de acuerdo con (4.17) queda como (4.65),

$$\begin{aligned} J(k) = \frac{1}{k}&\left[d^2(k) + \hat{a}^2(k)\, \hat{y}^2(k-1) + w^2(k) + 2\hat{a}(k)\, \hat{y}(k-1)\, w(k)\right. \\ &\left. -2d(k)\, \hat{a}(k)\, \hat{y}(k-1) - 2d(k)\, w(k) + (k-1)\, J(k-1)\right]. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Del estimador (4.62) se obtiene (4.66),

$$\langle \tilde{w}(k), y^T(k-1)\rangle = -\hat{\hat{a}}(k)\, \langle y(k-1), y^T(k-1)\rangle + \langle y(k), y^T(k-1)\rangle. \tag{4.66}$$

Y de (4.65), se obtiene $\hat{\hat{a}}(k)\, \langle y(k-1), y^T(k-1)\rangle + \langle y(k), y^T(k-1)\rangle$.

Se considera que $kJ(k) - (k-1)\, J(k-1) \approx \mathrm{sign}(e(k))\, e^T(k)\, e(k)$.

Lema 1 *Para el sistema recursivo* (4.17) *con un comportamiento ideal, se tiene* (4.67),

$$\hat{\hat{a}}\,(k) = \frac{\langle y\,(k)\,, y^T\,(k-1)\rangle}{\langle y\,(k-1)\,, y^T\,(k-1)\rangle} - \text{sign}\,(e\,(k))\,J\,(k)\,. \tag{4.67}$$

Prueba: Considerando (4.68),

$$\langle y\,(k-1)\,, y^T\,(k-1)\rangle \approx 1, \tag{4.68}$$

se describe (4.67). ■

Corolario 2 *El sistema descrito en* (4.67) *tiene una condición adaptiva del tipo proporcional de acuerdo al funcional* $J\,(k)$ *y al signo del error* $e\,(k)$*. Y para sintonizarlo se describe en* (4.69).

$$\hat{\hat{a}}\,(k) = \frac{\langle y\,(k)\,, y^T\,(k-1)\rangle}{\langle y\,(k-1)\,, y^T\,(k-1)\rangle} + \text{PID}\,(k)\,. \tag{4.69}$$

En resumen, considerando los Teoremas 4 y 5, el Lema 1, y el Corolario 2, quedan las siguientes adaptaciones.

Caso (a) Modos deslizantes.

$$\hat{\hat{a}}\,(k) = \frac{\text{E}\{y\,(k)\,, y^T\,(k-1)\}}{\text{E}\{y\,(k-1)\,, y^T\,(k-1)\}} + \text{sign}(e\,(k))J\,(k)\,, \tag{4.70}$$

Caso (b) Modos deslizantes con velocidad de cambio.

$$\hat{\hat{a}}\,(k) = \frac{\text{E}\{y\,(k)\,, y^T\,(k-1)\} + \text{sign}(e\,(k))J\,(k)}{\text{E}\{y\,(k-1)\,, y^T\,(k-1)\}}, \tag{4.71}$$

Caso (c) Proporcional Integral Derivativo (PID).

$$\hat{\hat{a}}\,(k) = \frac{\text{E}\{y\,(k)\,, y^T\,(k-1)\}}{\text{E}\{y\,(k-1)\,, y^T\,(k-1)\}} + \text{PID}\,(k)\,. \tag{4.72}$$

Caso (d) Producto punto.

$$\hat{\hat{a}}\,(k) = \frac{\langle y\,(k)\,, y^T\,(k-1)\rangle}{\langle y\,(k-1)\,, y^T\,(k-1)\rangle} + \text{sign}\,(e\,(k))\,J\,(k)\,. \tag{4.73}$$

Para realizar la implementación de los casos anteriores de una forma digital, fue necesario expresar cada uno de los casos de manera recursiva, para realizar ésto, se consideraron los Teoremas 4 y 5, el Lema 1, y el Corolario 2. Las formas recursivas de (4.70), (4.71), (4.72) y (4.73) quedan expresadas como,

Caso (a') Modos deslizantes (Recursivo).

$$\hat{\hat{a}}\,(k) = \hat{\hat{a}}\,(k-1)\left[\frac{(k-1)\,Q\,(k-1)}{kQ\,(k)}\right] + \frac{y\,(k)\,y^T\,(k-1)}{kQ\,(k)} + \text{sign}\,(e\,(k))\,J\,(k)\,, \tag{4.74}$$

Caso (b') Modos deslizantes con velocidad de cambio (Recursivo).

$$\hat{\hat{a}}\,(k) = \hat{\hat{a}}\,(k-1)\left[\frac{(k-1)\,Q\,(k-1)}{kQ\,(k)}\right] + \frac{y\,(k)\,y^T\,(k-1)}{kQ\,(k)} + \frac{\text{sign}\,(e\,(k))\,J\,(k)}{kQ\,(k)}, \tag{4.75}$$

Caso (c') Proporcional Integral Derivativo (PID) (Recursivo).

$$\begin{aligned} \hat{\hat{a}}(k) &= \hat{\hat{a}}(k-1)\left[\frac{(k-1)\,Q(k-1)}{kQ(k)}\right] + \frac{y(k)\,y^T(k-1)}{kQ(k)} + \mathrm{PID}(k) \\ \mathrm{PID}(k) &= K_p e(k) + K_i\left[e(k) + e(k-n)\right] + K_d\left[e(k) - (k-1)\right]. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Caso (d') Producto punto (Recursivo).

$$\hat{\hat{a}}(k) = \hat{\hat{a}}(k-1)\left[\frac{N(k-1)}{N(k)}\right] + \frac{y(k)\,y^T(k-1)}{N(k)} + \mathrm{sign}(e(k))\,J(k). \tag{4.77}$$