



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y
MATEMÁTICAS



EQUICOMPOSICIÓN DE POLÍGONOS

Tesis que, para obtener el título de Licenciado en Física y
Matemáticas, presenta

Julio Alberto Maldonado Bernal

Asesor: Lic. Eduardo Virueña Silva

México D. F.
Noviembre de 2008.

*A mis padres, a mi esposa y a mi hijo
por su apoyo y cariño.*

Índice general

Simbología	VI
Introducción	VII
1. Planteamiento del problema.	1
1.1. Definiciones básicas.	1
1.2. Objetivo y planteamiento del problema.	3
1.2.1. Objetivo.	3
1.2.2. Planteamiento del problema.	3
1.3. Teoría de las áreas planas.	3
1.3.1. Teoremas básicos de equicomposición.	4
1.3.2. Las áreas de triángulos y polígonos.	14
2. Los algoritmos.	22
2.1. Introducción.	22
2.2. Algoritmos.	22
2.2.1. El algoritmo principal.	22
2.2.2. Algoritmo de equicomposición.	23
2.2.3. La descomposición del polígono en triángulos.	23
2.2.4. Equicomposición de un triángulo en un rectángulo.	25
2.2.5. Equicomposición de un triángulo en un paralelogramo.	26
2.2.6. Equicomposición de un paralelogramo en otro paralelogramo.	27

2.3. Registro de las transformaciones llevadas a cabo durante la equicomposición.	28
2.3.1. Algoritmo de división de un polígono.	29
2.3.2. Algoritmo de traslación de un polígono.	30
2.3.3. Algoritmo de reflexión puntual de un polígono.	31
2.3.4. Algoritmo de regresión.	31
3. La implementación.	33
3.1. Introducción	33
3.1.1. Definiciones básicas.	34
3.2. Algoritmos de vectores.	34
3.3. Algoritmos de cortes.	48
3.3.1. Los cortes.	48
3.3.2. El árbol de cortes.	50
3.4. Algoritmos de equicomposición.	57
3.5. Algoritmos finales.	64
4. Conclusiones	68
A. Postulados y teoremas básicos de Hilbert para la geometría euclidiana plana.	71
A.1. Los elementos de la geometría y los cinco grupos de axiomas.	71
A.2. Axiomas del grupo I: Axiomas de incidencia.	72
A.3. Axiomas del grupo II: Axiomas de orden.	73
A.4. Consecuencias de los axiomas de incidencia y orden.	74
A.5. Grupo III: Postulados de congruencia.	76
A.6. Consecuencias de los axiomas de congruencia.	80
A.7. Grupo IV: El axioma de las paralelas	85
A.8. Axiomas del grupo V: axiomas de continuidad	85
A.9. Definición de izquierda y derecha.	85

B. Teoremas de poligonales y polígonos.	87
B.1. Teoremas de poligonales.	87
B.2. Teoremas de polígonos convexos.	89
B.3. Teoremas de polígonos simples	98
C. Definiciones y teoremas varios.	101
C.1. Definiciones y teoremas de paralelogramos.	101
C.2. Teoremas varios.	102
C.3. Definiciones y teoremas de transformaciones.	103

Simbología

Símbolo	Se lee
\overline{AB}	Segmento AB .
\vec{AB}	Rayo AB .
\overleftrightarrow{AB}	Recta AB .
$\angle\alpha$	Ángulo α .
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	La recta \overleftrightarrow{AB} es paralela a la recta \overleftrightarrow{CD} .
$\angle\alpha \cong \angle\beta$	Ángulo α congruente al ángulo β .
$A \cup B$	Unión de los conjuntos A y B .
$A \cap B$	Intersección de los conjuntos A y B .
$x \in A$	x pertenece al conjunto A .
$P_1P_2 \cdots P_n$	Polígono o poligonal con vértices P_1, P_2 hasta P_n .
$T_{\overline{AB}}(P)$	Traslación del punto P con segmento dirigido \overline{AB} .
$\langle ABC \rangle$	Área del triángulo ABC .
(A_1, A_2, \dots, A_n)	El arreglo o vector de entradas A_1, A_2 hasta A_n .
$\{A, B\}$	Recta o segmento en algoritmos de esta obra.
$[A, B]$	Recta o segmento dirigidos en algoritmos de esta obra.
$P \vee Q$	Proposición P o Q .
$P \wedge Q$	Proposición P y Q .
\overline{AB}	El semiplano izquierdo respecto a la recta \overleftrightarrow{AB} .
$\overline{\overline{AB}}$	La cerradura del semiplano izquierdo respecto a la recta \overleftrightarrow{AB} .
$Int(P)$	El interior del polígono P .

Introducción

Antecedentes históricos

Desde las primeras civilizaciones - por sus actividades comerciales y de ingeniería - el hombre necesitó calcular volúmenes y áreas. Tuvo, entonces, que conocer el equivalente entre áreas y volúmenes de distintas figuras. De esta forma, se conocieron las fórmulas (en realidad procedimientos) para encontrar áreas y volúmenes; algunas veces exactas, otras aproximadas y algunas incorrectas [6].

Los griegos encontraron una buena cantidad de fórmulas para diversas figuras planas pero se encontraron con el famoso problema de la cuadratura del círculo al cual no supieron encontrar respuesta en su tiempo. Fue, entonces, que se buscó una solución aproximada para encontrar el área del círculo. Es famoso el método de Arquímedes (287 – 212 a. C.) de encontrar el área mediante una sucesión de áreas de polígonos que se aproximan cada vez más a la figura del círculo. Éste es, además, un ejemplo de cómo, desde la antigüedad, se aproximaban áreas mediante figuras poligonales y por tanto triangulares.

Euclides (cerca de 300 a. C.), en el libro I de “Los elementos” [5][4], desarrolla su teoría del área haciendo uso de un concepto equivalente al de equicomposición: la equicompletabilidad. En las proposiciones 34 hasta la

46 desarrolla su teoría del área e inmediatamente, en la proposición 47, demuestra el teorema de Pitágoras. Este teorema es la primera aplicación de relevancia de la equicompletabilidad.

David Hilbert (1862 - 1943), en su obra “Fundamentos de la geometría” [1], incluye la definición de equicomposición, pero usa la definición de equicompletabilidad para desarrollar su teoría del área al estilo de la nueva axiomática desarrollada por él.

Se presenta junto con esta obra un programa de computación que encuentra, a partir de un polígono dado, el cuadrado con la misma área. Así que el fin de esta obra es desarrollar y justificar teóricamente los algoritmos del programa que se presentan. Para alcanzar este propósito se desarrollo la teoría del área con base en la equicomposición pues es el método que usan los algoritmos del programa. Otra característica de la teoría del área presentada es que las demostraciones son dinámicas, esto es, se demuestran usando traslaciones y rotaciones, y no con el sólo uso de la congruencia. La importancia de esta característica se ve en el momento de desarrollar los algoritmos del programa en el capítulo 2 y 3.

Estructura de esta obra.

En el capítulo 1 se desarrolla la teoría del área con base en la equicomposición de polígonos, así que, esta teoría justifica funcionamiento de los algoritmos del capítulo 2 y 3. El capítulo 2 muestra los algoritmos en cuanto a su idea general y en el capítulo 3 se muestran los algoritmos tal y como se deben implementar en un lenguaje de computación al estilo de los pseudo-códigos, de tal manera que tengan aplicación general, y no para un lenguaje en particular. Como último capítulo esta el 4 donde se presentan las conclusiones del trabajo.

Finalmente se tienen los apéndices, donde, en el apéndice A se tiene la base del capítulo 1. En este apéndice aparecen los axiomas, definiciones y teoremas básicos de la geometría, tal y como los plantea David Hilbert. En el apéndice B se muestran algunos teoremas de polígonos convexos y teoremas relacionados, que permiten demostrar el teorema 3 del capítulo 1 y desarrollar los algoritmos de corte de polígonos del capítulo 3. En el apéndice C se agregaron algunos teoremas importantes de paralelogramos, transformaciones, entre otros.

Capítulo 1

Planteamiento del problema.

1.1. Definiciones básicas.

Definición 1. Un conjunto de segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ se dice que es una poligonal que conecta el punto P_1 con el punto P_n . Tal poligonal será denotada brevemente por $P_1P_2 \cdots P_n$. Tanto los puntos dentro de los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ como los puntos P_1, P_2, \dots, P_n se llaman, de forma colectiva, los puntos de la poligonal. Si todos los puntos de P_1, P_2, \dots, P_n se encuentran en un plano y el punto P_1 coincide con P_n , entonces, la poligonal se denomina polígono y es denotado como $P_1P_2 \cdots P_{n-1}$. Los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_1}$ se llaman lados del polígono. Los puntos P_1, P_2, \dots, P_{n-1} se llaman vértices del polígono. Polígonos de 3, 4, 5, \dots , n vértices se llaman triángulos, cuadriláteros, pentágonos, \dots , n -ángulos.

Definición 2. Si todos los vértices de una poligonal son distintos, ninguno de ellos está en el interior de algún lado y cualesquiera dos lados no adyacentes no tienen puntos en común, la poligonal se llama simple. De manera semejante se define polígono simple.

Definición 3. Si dos polígonos tienen igual área se dice que son equivalentes.

Definición 4. Si dos puntos de un polígono simple P se unen mediante alguna poligonal simple que yace enteramente en el interior del polígono,

entonces, se forman dos polígonos simples P_1 y P_2 cuyos puntos interiores yacen en el interior de P . P se dice estar descompuesto en P_1 y P_2 , o que P se compone de P_1 y P_2 , o que P_1 y P_2 componen P .

Definición 5. Dos polígonos simples se dice que son equicompuestos, si ambos pueden ser descompuestos en un número finito de triángulos congruentes en pares.

Notación. Si P se compone en los polígonos P_1, P_2, \dots, P_n ; se escribe:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

Definición 6. Dos polígonos simples P y Q son equicompletables, si es posible unirlos a un número finito de pares de polígonos equicompuestos $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_n, Q_n$, de tal forma que, los polígonos compuestos $P + P_1 + P_2 + \dots + P_n$ y $Q + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ sean equicompuestos entre sí (figura 1.1).

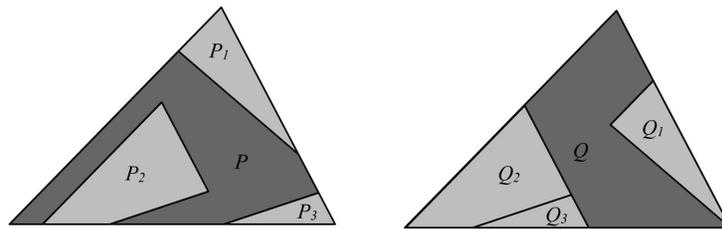


Figura 1.1: Los polígonos P y Q son equicompletables.

Las definiciones de esta sección implican que combinando polígonos equicompuestos, se obtienen polígonos equicompuestos y que si polígonos equicompuestos son removidos de polígonos equicompuestos, se obtienen polígonos equicompletables.

1.2. Objetivo y planteamiento del problema.

1.2.1. Objetivo.

El objetivo es escribir y compilar un programa de computación que transforme un polígono en un cuadrado por equicomposición, y justificar sus algoritmos con base en el rigor matemático.

1.2.2. Planteamiento del problema.

El anterior objetivo plantea el siguiente problema: desarrollar los algoritmos que permitan alcanzar el objetivo tomando en cuenta todos los casos posibles; que estos algoritmos sean, en lo posible, los óptimos; documentarse de la teoría necesaria para justificar los procedimientos de estos algoritmos y de esta forma reducir los errores que se pudieran producir al estar en marcha el programa.

1.3. Teoría de las áreas planas.

Para los fines de esta disertación es necesario definir una teoría del área. Para poder definirla se deben cumplir los axiomas comunes de la geometría euclidiana plana con base a los postulados enunciados por David Hilbert [1] a excepción del axioma de continuidad (axioma V-1, apéndice A¹). Esta excepción no impide definir una teoría del área, incluso, Hilbert define el área sin necesidad de usar ni éste, ni el axioma arquimedeo (axiomas V-1 y V-2, apéndice A). De esta manera la teoría del área que se manejará en este discurso se basará en la definición de equicomposición.

El objetivo de este discurso se planteó originalmente con base en la definición de equicomposición y se usará en el resto de esta disertación por tener

¹En el apéndice A se pueden consultar los axiomas y teoremas elementales de la geometría euclidiana.

un estilo más natural de resolver los problemas planteados. Se menciona la definición de equicompletabilidad con fines de información pues Hilbert define una teoría del área formalmente más fuerte con base en este concepto.

1.3.1. Teoremas básicos de equicomposición.

Uno de los primeros teoremas que se desarrollará es el de transitividad de polígonos equicompuestos en el cual se manejará la intersección de polígonos, la naturaleza de la intersección de polígonos convexos se puede consultar en el apéndice B a partir del teorema 5. El teorema 11 de ese apéndice dice que la intersección de dos polígonos convexos es otro polígono convexo, debido a este hecho, la definición de Hilbert de equicomposición mediante triángulos es perfecta para demostrar el teorema de transitividad de la equicomposición.

Teorema 1. *Sean los polígonos simples P , Q y R . Si P y Q son equicompuestos a un tercer polígono R , entonces, son equicompuestos entre sí.*

Por hipótesis, tanto P como Q tienen respectivamente una descomposición común con R en triángulos congruentes (figura 1.2), esto es:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = R$$

y

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = R$$

Si ambas descomposiciones son consideradas simultáneamente y usando el hecho de que cada miembro de éstas es un triángulo, esto es, un polígono convexo, cada triángulo de P se puede descomponer en sus intersecciones con los triángulos de Q , tales intersecciones son polígonos convexos (teorema 11 del apéndice B):

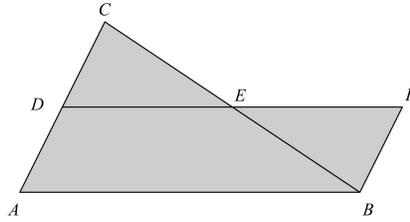


Figura 1.3: Todo triángulo es equicompuesto con un paralelogramo de base común y la mitad de la altura.

Constrúyase D sobre el segmento \overline{CA} equidistante a cada extremo, de la misma forma, constrúyase E en el punto medio de \overline{BC} . Sea F en la recta \overleftrightarrow{DE} con $\overline{DE} \cong \overline{EF}$ (figura 1.3), de tal forma que E esté entre D y F , entonces, se tiene el cuadrilátero $ABFD$. Como \overline{AD} y \overline{DC} están en la misma proporción (1:1) que \overline{BE} con \overline{EC} , entonces, \overline{DE} es paralela a \overline{AB} y, por la misma razón, \overline{DE} es la mitad de \overline{AB} , por tanto, \overline{DF} es congruente a \overline{AB} . Por el teorema 2 del apéndice C se deduce que $ABFD$ es un paralelogramo. Por otro lado, el polígono $ABED$ es común en los polígonos ABC y $ABFD$, por tanto, para demostrar que ABC y $ABFD$ son equicompuestos sólo basta demostrar que los triángulos DEC y BFE son congruentes.

Se tiene que, de las construcciones hechas, $\overline{DE} \cong \overline{EF}$ y que $\overline{CE} \cong \overline{EB}$. Por otro lado $\angle DEC \cong \angle BEF$ por ser ángulos verticales, por lo tanto, DEC y BFE son congruentes, luego, ABC y $ABFD$ son equicompuestos.

Teorema 3. Sean dos paralelogramos $ABCD$ y $ABC'D'$ de tal manera que C , D , C' y D' estén en una misma línea. Entonces, $ABCD$ y $ABC'D'$ son equicompuestos.

Para la demostración de este teorema se suponen los teoremas de traslación 6 al 9 del apéndice C. Por otro lado, en adelante se entenderá por cortar como descartar polígonos que se haya demostrado que forman parte de la composición de ambos.

Es evidente que al menos uno de los paralelogramos tiene un par de ángulos interiores agudos, de otra forma ambos paralelogramos serían dos rectángulos equivalentes con sus dos pares de lados congruentes, por tanto, de la definición de congruencia de figuras (definición 21, apéndice A) ambos paralelogramos serían congruentes y acabaría la demostración. Queda claro, entonces, que al menos uno de los paralelogramos tiene un par de ángulos menores a un recto. Se pueden, entonces, hacer los ajustes necesarios para que los polígonos estén orientados a la izquierda y además que $\angle ABC'$ sea menor o igual a un recto y que $\angle DAB$ sea agudo y, por tanto, será $\angle D'AB$ mayor o igual a un recto y $\angle ABC$ obtuso (figura 1.4).

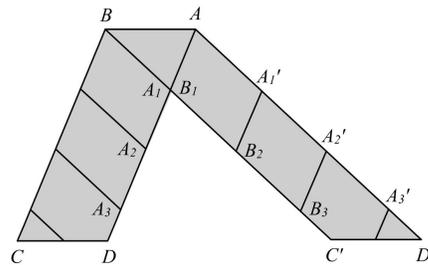


Figura 1.4: Equicomposición de dos paralelogramos con base común entre paralelas.

Por el teorema 5 del apéndice C, \overleftrightarrow{AD} y $\overleftrightarrow{BC'}$ se intersecan en un punto A_1 del mismo lado en que se encuentra el interior del ángulo $\angle DAB$ con respecto a la recta \overleftrightarrow{AB} , que es el mismo lado en que se encuentra el interior de los polígonos $ABCD$ y $A'B'C'D'$.

Aquí hay dos posibilidades:

- I) Que la recta $\overleftrightarrow{C'D'}$ interseque al triángulo ABA_1 .
- II) Que la recta $\overleftrightarrow{C'D'}$ no interseque al triángulo ABA_1 .

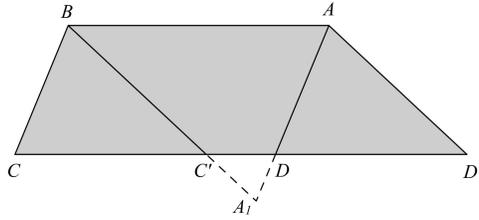


Figura 1.5: La recta $C'D'$ interseca al triángulo ABA_1 .

Para el inciso I) al intersecarse los lados de cada paralelogramo quedan los polígonos $C'BC$, $ABC'D$ y $D'AD$ (figura 1.5). Córtese ahora $ABC'D$ de ambos polígonos, entonces, quedan los triángulos BCC' y ADD' . Es claro que $\angle C'BC \cong \angle D'AD$ pues $\angle ABC'$ y el suplementario de $\angle D'AB$ son congruentes y, además, $\angle DAB$ es congruente con el suplementario de $\angle CBA$ por propiedades de las paralelas. Al ser $\overline{AD'} \cong \overline{BC'}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ se concluye que los triángulos BCC' y ADD' son congruentes, lo cual lleva a la conclusión de que $ABCD$ y $ABC'D'$ son equicompuestos.

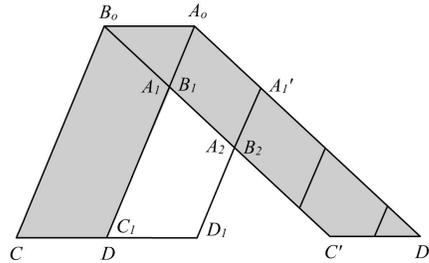


Figura 1.6: $C'D'$ no corta al triángulo ABA_1 .

Para el inciso II) (figura 1.6) córtese ahora el triángulo ABA_1 de ambos polígonos y quedarán los polígonos A_1B_oCD y $A_oB_1C'D'$ (teniéndose que $A_o = A$, $B_o = B$ y $B_1 = A_1$). Ahora se trabajará con la traslación de A_1B_oCD bajo el vector \overline{BA} , esto es $T_{\overline{BA}}(A_1B_oCD)$. Se tiene de inmediato que $T_{\overline{BA}}(B_o) = A_o$, como $\overleftrightarrow{B_oA_1}$ es paralela con $\overleftrightarrow{A_oD'}$, entonces, $T_{\overline{BA}}(\overleftrightarrow{B_oA_1})$

es la misma recta que $\overleftrightarrow{D'A_o}$, por tanto, $T_{\overline{BA}}(A_1)$ está en la recta $\overleftrightarrow{D'A_o}$, y se llamará A'_1 a $T_{\overline{BA}}(A_1)$. Es fácil ver que de la definición de translación (definición 8 del apéndice C) $\overline{A_1A'_1} = \overline{B_1A'_1}$ es paralela a \overleftrightarrow{AB} . Por otro lado, como $\overline{B_oC}$ y $\overline{A_oD}$ son paralelas, $T_{\overline{BA}}(\overline{B_oC})$ y $\overline{A_oD}$ son la misma recta, por tanto, la intersección de $T_{\overline{BA}}(\overline{B_oC})$ y $\overline{B_1C'}$ es B_1 . Llámese ahora C_1 a $T_{\overline{BA}}(C)$, D_1 a $T_{\overline{BA}}(D)$ y A_2 a la intersección de $\overleftrightarrow{A'_1D_1}$ y $\overleftrightarrow{B_1C'}$.

Llámese ahora al polígono $A'_1A_oB_1A_2$ el polígono común, el cual se supondrá que tampoco es cortado por $C'D'$. Luego el polígono común se cortará de $A'_1A_oC_1D_1$ y $A_oB_1C'D'$, entonces, quedarán los polígonos $A_2B_1C_1D_1$ y $A'_1B_2C'D'$. Es también importante mencionar que $\overleftrightarrow{A'_1D_1}$ y $\overleftrightarrow{B_1C'}$ son paralelas a \overleftrightarrow{BC} , y que $\overleftrightarrow{B_1A'_1}$ es paralela a \overleftrightarrow{BA} .

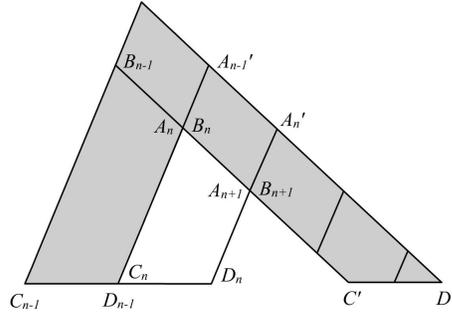


Figura 1.7:

Supóngase que el proceso anterior (de la translación de A_1B_oCD hasta aquí) puede aplicarse n veces sin que, una vez más, $C'D'$ corte a los polígonos comunes ³. Entonces, quedan los polígonos $A_nB_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$ y $A'_{n-1}B_nC'D'$ (figura 1.7) de tal forma que $\overleftrightarrow{B_{n-1}C'}$ es paralela con $\overleftrightarrow{A'_{n-1}D'}$, $\overleftrightarrow{B_{n-1}A'_{n-1}}$ es paralela con \overleftrightarrow{BA} y $\overleftrightarrow{B_{n-1}C_{n-1}}$ con $\overleftrightarrow{A'_nD_{n-1}}$ son paralelas a \overleftrightarrow{BC} .

³Esto con el propósito de demostrar, por inducción, que el proceso se puede repetir el número finito de veces que sea, siempre y cuando el polígono común no se interseque con $\overleftrightarrow{C'D'}$. Al final de la demostración se verá el caso en el que en la última de las iteraciones $\overleftrightarrow{C'D'}$ interseque al polígono común.

Se asigna $A'_n A'_{n-1} C_n D_n = T_{\overrightarrow{B_{n-1} A'_{n-1}}}(A_n B_{n-1} C_{n-1} D_{n-1})$. Como $\overleftarrow{B_{n-1} A_n}$ es paralela con $\overleftarrow{A'_{n-1} D'}$, entonces, $T_{\overrightarrow{B_{n-1} A'_{n-1}}}(\overleftarrow{B_{n-1} A_n})$ es la misma recta que $\overleftarrow{A'_{n-1} D'}$ y si se asigna $T_{\overrightarrow{B_{n-1} A'_{n-1}}}(A_n) = A'_n$, entonces, A'_n está en la recta $\overleftarrow{D' A'_{n-1}}$. Hay que agregar que, de la definición de traslación, $\overleftarrow{A_n A'_n}$ (o $\overleftarrow{B_n A'_n}$ que es la misma recta) es paralela con $\overleftarrow{B_{n-1} A'_{n-1}}$, por tanto, es paralela también con $\overleftarrow{B A}$. Por otro lado, como $\overleftarrow{B_{n-1} C_{n-1}}$ y $\overleftarrow{A'_{n-1} D_{n-1}}$ son paralelas, $T_{\overrightarrow{B_{n-1} A'_{n-1}}}(\overleftarrow{B_{n-1} C_{n-1}})$ y $\overleftarrow{A'_{n-1} D_{n-1}}$ son la misma recta y por tanto la intersección de $T_{\overrightarrow{B_{n-1} A'_{n-1}}}(\overleftarrow{B_{n-1} C_{n-1}})$ y $\overleftarrow{B_n C'}$ es B_n . Llámese ahora C_n a $T_{\overrightarrow{B_{n-1} A'_{n-1}}}(C_{n-1})$, D_n a $T_{\overrightarrow{B_{n-1} A'_{n-1}}}(D_{n-1})$ y A_{n+1} a la intersección de $\overleftarrow{D_n A'_n}$ y $\overleftarrow{B_n C'}$.

Córtese, ahora, el polígono común $A'_n A'_{n-1} B_n A_{n+1}$ de $A'_n A'_{n-1} C_n D_n$ y de $A'_{n-1} B_n C' D'$, entonces quedan los polígonos $A_{n+1} B_n C_n D_n$ y $A'_n B_{n+1} C' D'$. Además es importante mencionar que $\overleftarrow{B_n C_n}$ y $\overleftarrow{A'_{n-1} D_n}$ son paralelas a $\overleftarrow{B C}$ y que $\overleftarrow{B_n A'_n}$ es paralela con $\overleftarrow{B A}$.

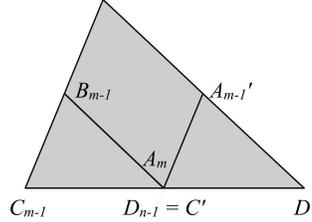


Figura 1.8:

Lo cual demuestra que el proceso del inciso II) se puede aplicar indefinidamente hasta que el polígono común se interseque con $\overleftarrow{C' D'}$. Supóngase que pasa esto después de aplicar este método $m - 1$ veces. Al aplicarse $m - 1$ veces el proceso quedan los polígonos $A_m B_{m-1} C_{m-1} D_{m-1}$ y $A'_{m-1} B_m C' D'$. Además $\overleftarrow{B_{m-1} C_{m-1}}$ y $\overleftarrow{A'_m D_{m-1}}$ son paralelas a $\overleftarrow{B C}$ y $\overleftarrow{B_{m-1} A'_{m-1}}$ es paralela con $\overleftarrow{B A}$. Por otro lado, A_m es la intersección de $\overleftarrow{A'_{m-1} D_{m-1}}$ y $\overleftarrow{B_{m-1} C'}$.

Es claro que $C'D'$ no puede intersectar a $\overleftrightarrow{B_{m-1}A_m}$ ni a $\overleftrightarrow{A'_{m-1}A_m}$ pues intersectaría al polígono común del proceso anterior (el m-1).

Si $\overleftrightarrow{C'D'}$ incide en A_m (figura 1.8), entonces, los polígonos que quedan son los triángulos $C'B_{m-1}C_{m-1}$ y $D'A'_{m-1}C'$ que se demostrará que son congruentes. Como $\overleftrightarrow{B_{m-1}A'_{m-1}}$ es paralelo con $\overleftrightarrow{B'A}$, entonces, es paralelo a $\overleftrightarrow{C_{m-1}C'}$, luego, $A'_{m-1}B_{m-1}C_{m-1}C'$ es un paralelogramo, esto implica que $\overline{C_{m-1}C'} \cong \overline{A'_{m-1}B_{m-1}}$. De la misma forma se puede observar que $A'_{m-1}B_{m-1}C'D'$ es paralelogramo luego $\overline{C'D'} \cong \overline{A_{m-1}B_{m-1}}$, por lo tanto $\overline{C_{m-1}C'} \cong \overline{C'D'}$. Por paralelismo $\angle B_{m-1}C_{m-1}C' \cong \angle A'_{m-1}C'D'$ y, por la misma razón, $\angle B_{m-1}C'D' \cong \angle A'_{m-1}D'C'$. Entonces los triángulos $C'B_{m-1}C_{m-1}$ y $D'A'_{m-1}C'$ son congruentes.

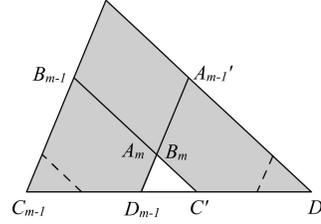


Figura 1.9:

Si no pasa ninguno de los casos anteriores trasládese $A_m B_{m-1} C_{m-1} D_{m-1}$, de tal manera que $A'_m A'_{m-1} C_m D_m = T_{\overleftrightarrow{B_{m-1}A'_{m-1}}} (A_m B_{m-1} C_{m-1} D_{m-1})$ (figura 1.9). De la inducción anterior, $\overleftrightarrow{B_m C'}$ y $\overleftrightarrow{A'_m D_m}$ se cruzan en un punto llamado A_{m+1} . De igual manera que en los incisos I) y II) sólo quedan dos posibilidades: que la recta $\overleftrightarrow{C'D'}$ interseque al triángulo $A'_m B_m A_{m+1}$ o que no lo interseque.

Si no lo intersecara, entonces, A_{m+1} estaría entre B_m y C' , y este mismo punto se encontraría entre A'_m y D_m , entonces, $\overleftrightarrow{C'D'}$ no cortaría al

polígono común lo cual contradice la hipótesis al inicio de esta iteración. Entonces, sólo es posible que $\overleftrightarrow{C'D'}$ interseque al triángulo $A'_m B_m A_{m+1}$. Se tiene entonces que al cruzar $\overleftrightarrow{C'D'}$ al polígono común (supuestamente $A'_m A'_{m-1} B_m A_{m+1}$), por el teorema 10 del apéndice B, queda el polígono común verdadero que será $A'_m A'_{m-1} B_m C' D_m$ el cual estará compuesto por $A'_m A'_{m-1} C_m D_m$ y de $A'_{m-1} B_m C' D'$ y quedarán los triángulos $B_m C_m C'$ y $A'_m D_m D'$ (figura 1.10).

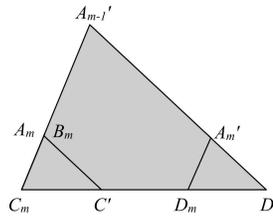


Figura 1.10:

Por paralelismo y con base en la inducción anterior, $\overleftrightarrow{B_m C_m} \parallel \overleftrightarrow{A'_m D_m}$ y $\overleftrightarrow{B_m C'} \parallel \overleftrightarrow{A'_m D'}$. Además se tiene que al ser $\overleftrightarrow{B_m A'_m}$ paralela a $\overleftrightarrow{B'A}$; también es paralela a $\overleftrightarrow{C'D'}$ y $\overleftrightarrow{C_m D_m}$. De aquí que $A'_m B_m C_m D_m$ y $A'_m B_m C' D'$ son paralelogramos, entonces, $\overline{B_m C_m} \cong \overline{A'_m D_m}$ y $\overline{B_m C'} \cong \overline{A'_m D'}$. De lo anterior se deduce también que $\angle B_m C_m C' \cong \angle A'_m D_m D'$, entonces, los triángulos $B_m C_m C'$ y $A'_m D_m D'$ son congruentes. Con lo cual se demuestra que los polígonos $A'_m A'_{m-1} C_m D_m$ y $A'_{m-1} B_m C' D'$ y, por lo tanto, los paralelogramos $ABCD$ y $ABC'D'$ son equicompuestos.

Teorema 4. *Todo polígono es equicompuesto con un rectángulo de base dada.*

Sea el polígono $P_1 P_2 \cdots P_n$ y el segmento \overline{AB} que será la base del rectángulo. Por otro lado se tiene que el polígono se descompone, por el teorema 14 apéndice B, en los triángulos T_1, T_2, \dots, T_m . Tómesese arbitrariamente cualquiera de los triángulos, supóngase el triángulo T_k . Se sabe que

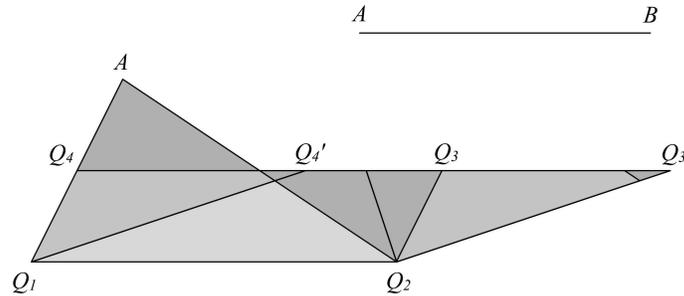


Figura 1.11: El triángulo $T_k = AQ_1Q_2$ es equicompuesto con el paralelogramo $Q_1Q_2Q_3Q_4$ y, a su vez, el paralelogramo $Q_1Q_2Q_3Q_4$ es equicompuesto al paralelogramo $Q_1Q_2Q'_3Q'_4$ donde $\overline{Q_1Q'_4}$ y $\overline{Q_2Q'_3}$ son congruentes a \overline{AB} .

este triángulo es equicompuesto a un paralelogramo llámese éste $Q_1Q_2Q_3Q_4$. Ahora constrúyase un paralelogramo $Q_1Q_2Q'_3Q'_4$ de tal forma que Q'_3 y Q'_4 estén en la línea $\overleftrightarrow{Q_3Q_4}$ y que $\overline{Q_2Q'_3}$ y $\overline{Q_1Q'_4}$ sean congruentes a \overline{AB} (figura 1.11). Por el teorema 4, $Q_1Q_2Q_3Q_4$ es equicompuesto a $Q_1Q_2Q'_3Q'_4$. Constrúyase ahora el rectángulo $Q''_1Q_2Q'_3Q''_4$ de manera que Q''_1 y Q''_4 estén en la línea $\overleftrightarrow{Q_1Q'_4}$. Del teorema 3, $Q_1Q_2Q'_3Q'_4$ es equicompuesto a $Q''_1Q_2Q'_3Q''_4$ (figura 1.12); llámese a este rectángulo R_k . Si este procedimiento se hace para cada triángulo de T_1, T_2, \dots, T_m , y luego todos los rectángulos R_1, R_2, \dots, R_m se unen por sus lados congruentes a \overline{AB} , se forma un rectángulo con un lado congruente a \overline{AB} .

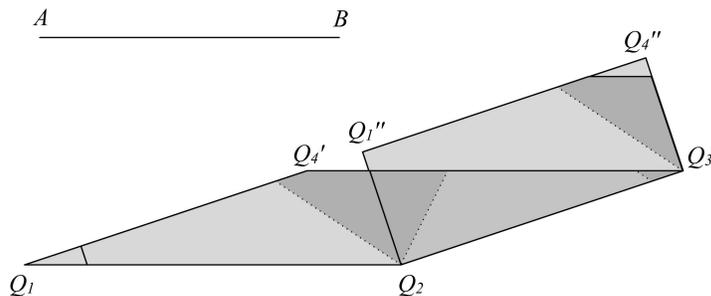


Figura 1.12: El paralelogramo $Q_1Q_2Q'_3Q'_4$ es equicompuesto al rectángulo $Q''_1Q_2Q'_3Q''_4$ cuya base $Q_2Q'_3$ es congruente a \overline{AB} .

Si se hace una revisión de los teoremas anteriores, aún queda la duda de que dados dos paralelogramos equicompuestos con la misma base implique que tengan la misma altura. Este es el recíproco del teorema anterior. Antes de resolver este problema se puede aprovechar para introducir la definición de área y junto con este concepto resolver el problema.

1.3.2. Las áreas de triángulos y polígonos.

Definición 7. Sea el triángulo ABC con lados a , b y c tal que h_a y h_b son las alturas de a y b respectivamente:

$$a : h_b = b : h_a$$

i. e.

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

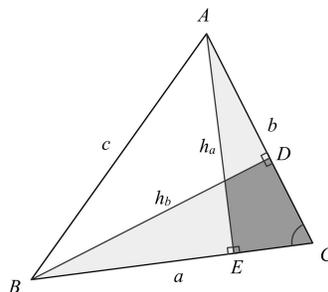


Figura 1.13: Al ser el $\angle BCA \cong \angle BCA$ y $\angle CDB \cong \angle AEC$, implica que, los triángulos BCD y ACE son semejantes, dicho de otra forma, $a : h_b = b : h_a$.

Definición 8. Sea el triángulo ABC orientado a la izquierda, entonces, su área se representa por $\langle ABC \rangle$, la cual es el valor positivo de la mitad del producto de cualquiera de sus lados por su altura correspondiente. Si el triángulo está orientado a la derecha, el área se representa igual pero es negativa.

Teorema 5. *Dos paralelogramos equivalentes con bases iguales tienen la misma altura.*

Sean los paralelogramos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ equivalentes y de tal forma que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$. Sean las alturas h y h' respectivamente de $ABCD$ y $A'B'C'D'$. Entonces:

$$\begin{aligned}\langle ABCD \rangle &= \langle ABC \rangle + \langle ACD \rangle \\ &= \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} + \frac{\overline{CD} \cdot h}{2} = \overline{AB} \cdot h\end{aligned}$$

de igual forma $\langle A'B'C'D' \rangle = \overline{A'B'} \cdot h'$. De las hipótesis se sabe que $\langle ABCD \rangle = \langle A'B'C'D' \rangle$ y que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ entonces $h = h'$.

Del anterior teorema es claro que se ha resuelto una parte del problema comentado al final del teorema 4. Lo que falta demostrar es que el área es única, esto es, el área es independiente de la partición que se use para encontrarla. Los teoremas que siguen conducirán a la solución de este problema.

Teorema 6. *Si un punto O yace fuera de un triángulo ABC entonces la relación:*

$$\langle ABC \rangle = \langle OAB \rangle + \langle OBC \rangle + \langle OCA \rangle$$

se cumple para el área del triángulo.

En el triángulo ABC al menos un vértice, supóngase que es A , está en el lado opuesto a O , respecto al lado que no contiene al vértice A , esto es \overline{BC} , pues de lo contrario se contradice el hecho de que O es un punto exterior al triángulo ABC (teorema 5 del apéndice B).

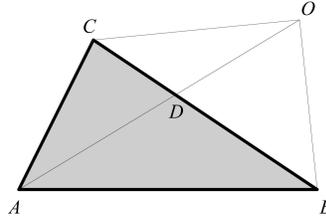


Figura 1.14: $\langle ABC \rangle = \langle OAB \rangle + \langle OBC \rangle + \langle OCA \rangle$

De acuerdo a lo anterior el segmento \overline{AO} cruza a la recta \overleftrightarrow{BC} en un punto, llámese D (figura 1.14). De la definición de área se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\langle OAB \rangle &= \langle ODB \rangle + \langle DAB \rangle \\ \langle OBC \rangle &= -\langle OCB \rangle = -\langle OCD \rangle - \langle ODB \rangle \\ \langle OCA \rangle &= \langle OCD \rangle + \langle CAD \rangle\end{aligned}$$

sumando las tres ecuaciones se obtiene:

$$\langle OAB \rangle + \langle OBC \rangle + \langle OCA \rangle = \langle DAB \rangle + \langle CAD \rangle$$

entonces

$$\langle OAB \rangle + \langle OBC \rangle + \langle OCA \rangle = \langle ABC \rangle$$

Teorema 7. Sean el segmento \overline{AB} y el punto O externo al segmento de tal manera que O no esté en la recta \overleftrightarrow{AB} . Sean los puntos A_1, A_2, \dots, A_n en el interior del segmento \overline{AB} y distintos entre sí. Se tiene además que $A, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, B$ están en orden (en el sentido que indica el teorema 6, apéndice A). Entonces se cumple que:

$$\langle OAB \rangle = \langle OAA_1 \rangle + \langle OA_1A_2 \rangle + \dots + \langle OA_nB \rangle$$

Se tiene que de la definición del área del triángulo que:

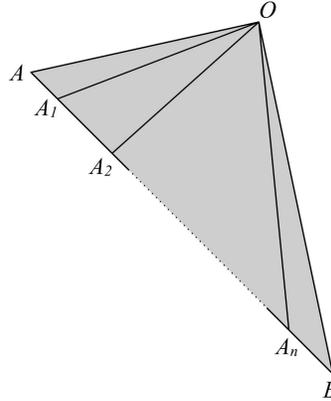


Figura 1.15: $\langle OAB \rangle = \langle OAA_1 \rangle + \langle OA_1A_2 \rangle + \dots + \langle OAnB \rangle$

$$\begin{aligned}
 \langle \overline{OAA_1} \rangle + \langle \overline{OA_1A_2} \rangle + \dots + \langle \overline{OAnB} \rangle &= \frac{\overline{AA_1} \cdot h}{2} + \frac{\overline{A_1A_2} \cdot h}{2} + \dots + \frac{\overline{AnB} \cdot h}{2} \\
 &= \frac{(\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \dots + \overline{AnB}) \cdot h}{2} \\
 &= \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \langle OAB \rangle
 \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar (figura 1.15).

Definición 9. El área $\langle P \rangle$ de un polígono simple orientado positivamente se define como la suma de las áreas de todos los triángulos orientados positivamente que componen una descomposición arbitraria del polígono.

Teorema 8. El área del polígono orientado positivamente $P = A_1A_2 \cdots A_n$ es única y es igual a $\langle OA_1A_2 \rangle + \langle OA_2A_3 \rangle + \dots + \langle OA_nA_1 \rangle$.

Sea $A_1A_2 \cdots A_n$ la orientación positiva del polígono $P = A_1A_2 \cdots A_n$. Sea T_k la representación de cada triángulo que compone al polígono P y sea \overline{DE} un segmento tomado arbitrariamente en el interior del polígono P y que es el lado en común de los triángulos DEF y DEG que forman parte de la descomposición mencionada. Sea DEF y GED las orientaciones positivas

de DEF y DEG respectivamente. Elijase ahora el punto O en el exterior de P , entonces se cumple, por el teorema 7, que:

$$\begin{aligned}\langle DEF \rangle &= \langle ODE \rangle + \langle OEF \rangle + \langle OFD \rangle \\ \langle GED \rangle &= \langle OGE \rangle + \langle OED \rangle + \langle ODG \rangle \\ &= \langle OGE \rangle - \langle ODE \rangle + \langle ODG \rangle\end{aligned}$$

si se suman ambas ecuaciones, se cancelan los términos $\langle ODE \rangle$; entonces, se tiene que:

$$\langle DEF \rangle + \langle GED \rangle = \langle OEF \rangle + \langle OFD \rangle + \langle OGE \rangle + \langle ODG \rangle$$

El lado derecho de la ecuación es la suma de las áreas de los triángulos formados desde O con cada lado del polígono $DFEG$. Así que al sumar todas las áreas de la anterior manera para cada segmento \overline{DE} de cada triángulo T_k que esté en el interior de P se cancelan los términos $\langle ODE \rangle$. Entonces la suma de las áreas de todos triángulos es la suma de todos los términos $\langle OXY \rangle$ donde XY representa cada segmento de los T_k que está en los lados del polígono P . Sean estos segmentos $\overline{A_1A_{11}}, \overline{A_{11}A_{12}}, \dots, \overline{A_{1p}A_2}$ en el lado $\overline{A_1A_2}$; $\overline{A_2A_{21}}, \overline{A_{21}A_{22}}, \dots, \overline{A_{2q}A_3}$ en el lado $\overline{A_2A_3}$; \dots ; $\overline{A_nA_{n1}}, \overline{A_{n1}A_{n2}}, \dots, \overline{A_{nr}A_1}$ en el lado $\overline{A_nA_1}$ (ordenados en el sentido que indica el teorema 6, apéndice A). Por otro lado sea ΣT_k la suma de las áreas de cada uno de los triángulos T_k entonces:

$$\begin{aligned}\Sigma T_k &= \langle OA_1A_{11} \rangle + \langle OA_{11}A_{12} \rangle + \dots + \langle OA_{1p}A_2 \rangle \\ &+ \langle OA_2A_{21} \rangle + \langle OA_{21}A_{22} \rangle + \dots + \langle OA_{2q}A_3 \rangle \\ &+ \langle OA_nA_{n1} \rangle + \langle OA_{n1}A_{n2} \rangle + \dots + \langle OA_{nr}A_1 \rangle\end{aligned}$$

aplicando el teorema 8:

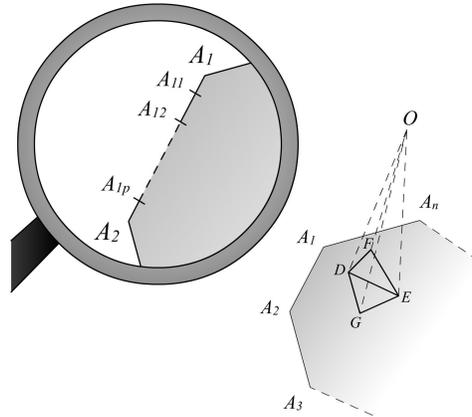


Figura 1.16: El área de un polígono es única.

$$\Sigma T_k = \langle OA_1A_2 \rangle + \langle OA_2A_3 \rangle + \dots + \langle OA_nA_1 \rangle$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema 9. (*Teorema fundamental de la disección*). *Dos polígonos son equicompuestos si y sólo si tienen áreas iguales.*

Primero se demostrará que si dos polígonos arbitrarios P y Q son equicompuestos entonces tienen áreas iguales. Supóngase que ambos se descomponen en los polígonos P_1, P_2, \dots, P_n luego:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle + \dots + \langle P_n \rangle \\ \langle Q \rangle &= \langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle + \dots + \langle P_n \rangle \end{aligned}$$

por el teorema 8 las áreas de P_1, P_2, \dots, P_n son únicas luego P y Q tienen la misma área.

Ahora se demostrará el recíproco. Tómesese una descomposición en triángulos de P y Q , por ejemplo T_1, T_2, \dots, T_m y S_1, S_2, \dots, S_l respectivamente.

Sea \overline{AB} congruente al mayor de los lados entre todos los triángulos anteriores. Sea T_k uno de estos triángulos, con vértices T_{k1} , T_{k2} y T_{k3} , de tal forma, que $\overline{T_{k1}T_{k2}}$ es el mayor de los lados de este triángulo. Del teorema 2 se sabe que T_k es equicompueto a un paralelogramo, llámese $Q_1Q_2Q_3Q_4$ donde $Q_1 = T_{k1}$ y $Q_2 = T_{k2}$, esto es, $\overline{Q_1Q_2}$ es el lado mayor de T_k . Se puede construir un paralelogramo $Q_1Q_2Q'_3Q'_4$ de tal forma que Q'_3 y Q'_4 están en la recta $\overleftrightarrow{Q_3Q_4}$ y de tal manera que $\overline{Q_1Q'_4}$ y $\overline{Q_2Q'_3}$ sean congruentes a \overline{AB} , está construcción es posible pues \overline{AB} es mayor a la altura de $Q_1Q_2Q'_3Q'_4$. La anterior argumentación se analizará con detalle a continuación:

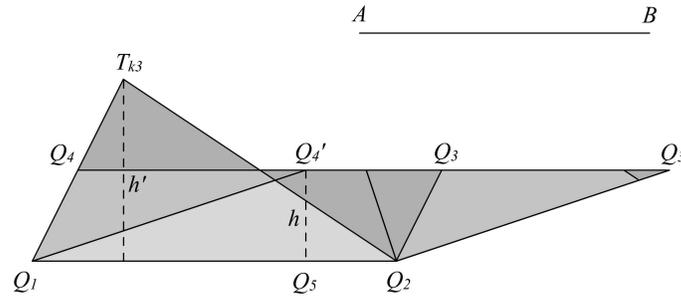


Figura 1.17:

Se tiene la altura h del paralelogramo $Q_1Q_2Q'_3Q'_4$ que pasa por Q'_4 y llámese Q_5 el punto de intersección de h con la recta $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ (figura 1.17). Por otro lado h es la mitad de la altura h' , del triángulo $T_k = Q_1Q_2T_{k3}$, que pasa por T_{k3} . Como h' es menor que $\overline{T_{k3}Q_1}$ y $\overline{T_{k3}Q_2}$, y ambos son menores o iguales que $\overline{Q_1Q_2}$, entonces $h' < \overline{Q_1Q_2}$ y por tanto $h < \overline{Q_1Q_2}$. De lo anterior $Q_1Q'_4Q_5$ es un triángulo rectángulo cuya construcción es posible pues $\overline{Q'_4Q_5}$ (o sea h) es fijo, $\overline{Q_1Q_5}$ se puede ajustar tanto como se quiera y $\overline{Q_1Q'_4}$ (que es la hipotenusa de $Q_1Q'_4Q_5$) al ser congruente al segmento \overline{AB} es mayor que $\overline{Q_1Q_2}$ y, entonces, mayor que $\overline{Q'_4Q_5}$ luego la construcción de $\overline{Q'_4Q_5}$ y, por lo tanto, de $Q_1Q_2Q'_3Q'_4$ es posible.

Constrúyase ahora el paralelogramo $Q''_1Q_2Q'_3Q'_4$ de tal forma que los

ángulos interiores de los vértices Q_2 y Q_3' sean rectos y el segmento $\overline{Q_1'Q_4''}$ esté en la recta $\overleftrightarrow{Q_1Q_4}$, entonces $Q_1''Q_2Q_3'Q_4''$ que se renombrará R_k será un rectángulo equicompuesto a $Q_1Q_2Q_3'Q_4'$ y más aún a T_k con un par de lados ($\overline{Q_2Q_3'}$ y $\overline{Q_1'Q_4''}$) congruentes al segmento \overline{AB} . Si se hace este proceso a cada triángulo entre T_1, T_2, \dots, T_m se obtienen los rectángulos R_1, R_2, \dots, R_m que si se unen por sus lados congruentes a \overline{AB} se obtendrá el rectángulo R con un lado congruente al segmento \overline{AB} . Si se aplica este método al polígono Q se obtendrá el rectángulo R' que al tener la misma área que Q entonces tiene la misma área que P y, por tanto, la misma área que R . Como, además, R y R' tienen la misma base, luego por el teorema 5, tienen la misma altura, esto implica que ambos rectángulos son congruentes y, más aún, equicompuestos, por lo tanto, P y Q son equicompuestos.

Capítulo 2

Los algoritmos.

2.1. Introducción.

En este capítulo se describe de manera muy general los pasos que se siguen para alcanzar el objetivo de esta discurso. Es en el capítulo 3 donde se desarrolla la estructura y variables que se usarán para escribir el programa en algún lenguaje de ordenadores.

2.2. Algoritmos.

2.2.1. El algoritmo principal.

Este algoritmo muestra la estructura base del programa, esto es, las rutinas básicas para alcanzar el objetivo y desarrollar un programa aceptable. Los pasos de este algoritmo son:

1. Se cargan los vértices y valores iniciales del polígono original.
2. Se verifica que el polígono sea simple, de lo contrario se cancela todo el proceso o se regresa al paso anterior, dependiendo del estilo que se desee darle al programa.

3. Se equicompone el polígono original con el cuadrado equivalente (llámese a este cuadrado objetivo).
4. Se grafican el polígono original y el cuadrado objetivo.

2.2.2. Algoritmo de equicomposición.

Este algoritmo permite la equicomposición de un polígono simple en un cuadrado equivalente, para este procedimiento se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Se da entrada a los valores iniciales del polígono original.
2. Se corta el polígono original en triángulos (figura 2.1).
3. Se equicompone cada triángulo en un rectángulo (figura 2.2). Al final de este paso es poco probable que los rectángulos formen un cuadrado, por lo tanto, será necesario el siguiente paso.
4. Se hacen las transformaciones necesarias para que con todos los rectángulos se forme el cuadrado objetivo (figura 2.3).
5. Formado el cuadrado, hay que encontrar las posiciones originales de las piezas que lo forman pero en el polígono original, pues al inicio del algoritmo el polígono original estaba en una sola pieza. Para hacer esto hay que, a partir de las posiciones finales de las partes obtenidas del cuadrado, obtener su posición original haciendo las transformaciones inversas. De esta forma se obtienen las piezas que forman ambas figuras (figura 2.7).

2.2.3. La descomposición del polígono en triángulos.

El propósito de este algoritmo es, de acuerdo al procedimiento desarrollado en la demostración del teorema 14 del apéndice B, cortar el polígono original en triángulos. Para este propósito se efectúan los siguientes pasos (figura 2.1):

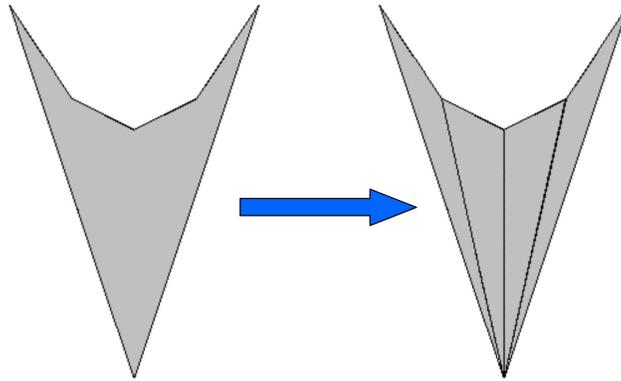


Figura 2.1: Un polígono convexo $P = P_1P_2 \cdots P_n$ se puede descomponer en a lo más $n - 2$ triángulos.

1. Se carga el polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$.
2. Para cada terna de vértices $P_iP_{s(i+1)}P_{s(i+2)}$ consecutivos se realiza lo siguiente:
 - a) Si no hay vértices de P en el interior de la terna $P_iP_{s(i+1)}P_{s(i+2)}$, entonces, este triángulo se corta de P .
 - b) En caso contrario se pasa a la siguiente terna. Por el teorema 14 del apéndice B está garantizado que para el polígono P se va a encontrar una terna de vértices consecutivos que no va a tener vértices de este mismo polígono en el interior del triángulo formado por dicha terna.
3. Sea $P_kP_{s(k+1)}P_{s(k+2)}$ el triángulo encontrado en el paso anterior, córtese este triángulo de P , de acuerdo al teorema 4 del apéndice B se formarán dos polígonos: el triángulo $P_kP_{s(k+1)}P_{s(k+2)}$ y lo que “resta” de P junto con P_k y $P_{s(k+2)}$ que será el polígono Q .
4. Se efectúa la recursividad de este mismo algoritmo pero sobre Q .

2.2.4. Equicomposición de un triángulo en un rectángulo.

Este algoritmo permite equicomponer cada triángulo que forma el polígono original en un rectángulo. Cada rectángulo que se obtenga formará parte del cuadrado objetivo (figura 2.2).

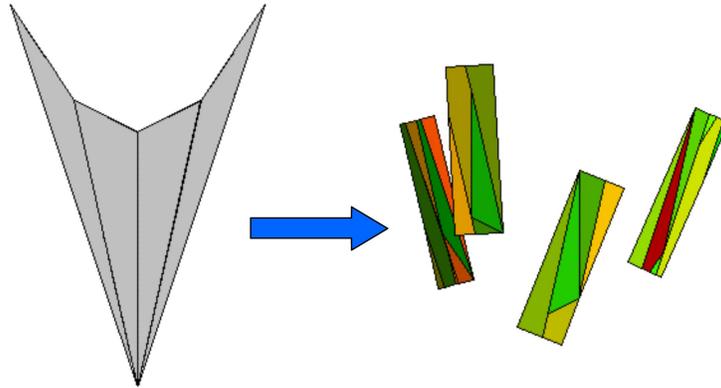


Figura 2.2: Equicomposición de cada triángulo que compone un polígono en un rectángulo respectivamente.

1. Se da entrada a un triángulo $T_1T_2T_3$.
2. Se equicompone el triángulo $T_1T_2T_3$ a un paralelogramo $P_1P_2P_3P_4$ de acuerdo al teorema 2 del capítulo 1.
3. Se equicompone el paralelogramo obtenido en el punto anterior a otro paralelogramo $Q_1Q_2Q_3Q_4$, donde $Q_3=P_3$, $Q_4 = P_4$, quedando éstas dos figuras del mismo lado respecto a $\overline{P_3P_4}$, y además tanto $\overline{Q_1Q_4}$ como $\overline{Q_2Q_3}$ son iguales a la base del rectángulo entendiéndose esta como el lado mayor del rectángulo. La equicomposición se realiza de acuerdo al teorema 3 del capítulo 1.
4. Finalmente el segundo paralelogramo equicomponerlo al rectángulo buscado $R_1R_2R_3R_4$, con el mismo proceso del paso anterior, pero teniendo $R_2=Q_2$, $R_3 = Q_3$ y quedando éstas dos figuras del mismo lado respecto a $\overline{Q_2Q_3}$.

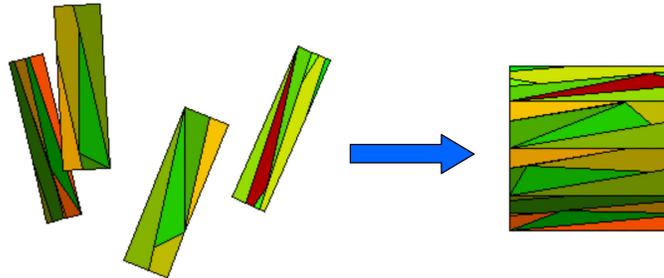


Figura 2.3: Después de equicomponer cada triángulo que forma el polígono original en un rectángulo se hacen las transformaciones necesarias para que con todos los rectángulos se forme el cuadrado objetivo.

2.2.5. Equicomposición de un triángulo en un paralelogramo.

Este algoritmo se basa en el teorema 2 del capítulo 1. Los pasos para llevar a cabo este algoritmo son (figura 2.4):

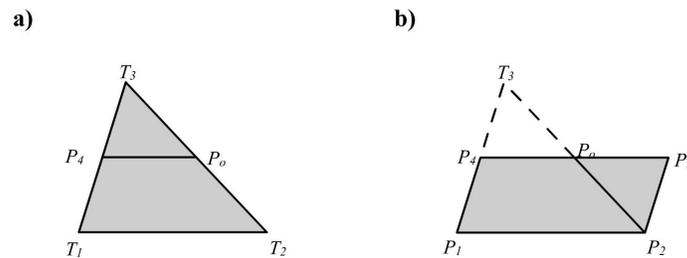


Figura 2.4: Equicomposición de un triángulo en un paralelogramo.

1. Se da entrada a un triángulo $T_1T_2T_3$.
2. Para encontrar un paralelogramo equivalente a este triángulo basta con cortarlo por los puntos medios de $\overline{T_3T_1}$ y $\overline{T_2T_3}$, denominados como P_4 y P_0 respectivamente.

3. Luego, se hace la reflexión puntual de $T_3P_4P_o$ con centro en P_o y se obtiene el triángulo $P_2P_3P_o$, al juntarse las dos partes del corte, esto es $P_1P_2P_oP_4$ se forma el paralelogramo $P = P_2P_3P_o$.

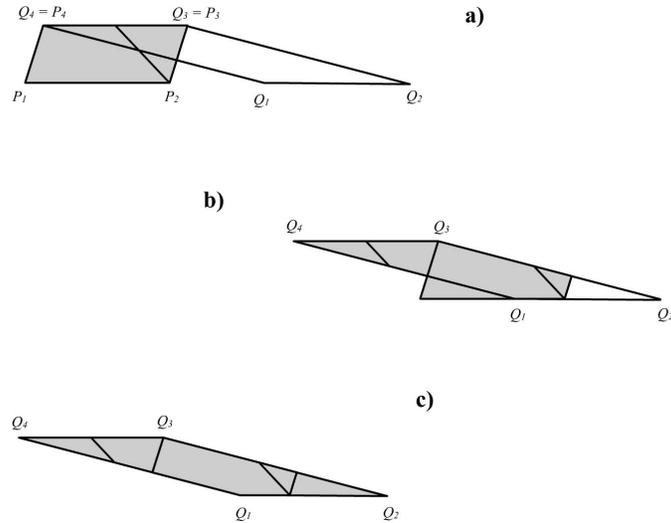


Figura 2.5: Equicomposición de un paralelogramo en otro paralelogramo.

2.2.6. Equicomposición de un paralelogramo en otro paralelogramo.

Este algoritmo se basa en el teorema 3 del capítulo 1 y lleva a cabo la siguiente rutina (figura 2.5):

1. Se da entrada a un paralelogramo $P = P_1P_2P_3P_4$ y un segmento de medida conocida BR . Este segmento es la base del rectángulo mencionado en el algoritmo de equicomposición de un triángulo en un rectángulo.
2. Construimos Q de tal forma que tenga en común el lado Q_3Q_4 con P_3P_4 , que Q y P estén del mismo lado de Q_3Q_4 y el otro par de lados opuestos de Q congruentes a BR .

3. Con la recta $\overleftrightarrow{Q_1Q_4}$ se corta el polígono $P_1P_2P_3P_4$.
4. La parte de P que está a la izquierda de $\overleftrightarrow{Q_1Q_4}$ se traslada, con vector de traslación $\overline{Q_4Q_3}$ (figura 2.5 b)).
5. Si aún queda alguna parte del paralelogramo P a la izquierda de $\overleftrightarrow{Q_1Q_4}$, se vuelve a aplicar la traslación $T_{\overline{Q_4Q_3}}$, y así sucesivamente hasta que ya no quede nada del paralelogramo P a la izquierda de $\overleftrightarrow{Q_1Q_4}$ (figura 2.5 c)).

2.3. Registro de las transformaciones llevadas a cabo durante la equicomposición.

Durante el proceso de equicomposición es necesario llevar un registro de las transformaciones que van teniendo cada uno de los polígonos obtenidos durante este proceso, con el propósito de conocer la posición inicial que deben tener los polígonos obtenidos al final. En otras palabras, como al inicio se tiene lo que, valga la redundancia, llamamos polígono original en una sola pieza y es hasta el final del proceso de equicomposición que se obtiene la composición común con el cuadrado objetivo, por tanto, va a ser necesario el uso de un registro de transformaciones que van a permitir encontrar la posición inicial de cada polígono de la composición en su posición inicial.

Será necesario, entonces, crear una estructura para poder llevar, paralela a la equicomposición, un registro de las transformaciones que se lleven cabo sobre cada polígono obtenido en el proceso.

Revisando los algoritmos anteriores es necesario resaltar algunas características que llevarán a encontrar la forma de registrar los elementos necesarios del proceso de equicomposición que, a su vez, ayuden a encontrar la posición de los polígonos en el polígono original:

Primero, observando los algoritmos de equicomposición y su base teórica, queda claro que las únicas transformaciones que se llevan a cabo son traslaciones y rotaciones, de hecho las rotaciones se resumen en rotaciones de 180° o reflexiones respecto a un punto que, desde el punto de vista de la computación, son muy sencillas de realizar.

Segundo, después de ser cortado el polígono original en triángulos, en estos algoritmos sólo se cortan polígonos convexos y los cortes son mediante una sola recta en cada paso que es necesario hacerlos. Esto quiere decir, de acuerdo al teorema 10 del apéndice B, que después de cada uno de estos cortes se obtienen exactamente dos polígonos y estos, a su vez, son convexos. Esta característica permite hacer un mapa mental de qué estructura se puede formar si enlazamos cada polígono “padre” con los que se obtienen (polígonos “hijos”), evidentemente la estructura que forman se conoce como árbol binario en el argot de la programación de computadoras (figura 2.6). El uso de esta estructura se detallara en el capítulo 3.

2.3.1. Algoritmo de división de un polígono.

Se puede observar claramente que durante cada proceso de equicomposición, a partir de polígono original, se van obteniendo nuevos polígonos producto de la división de los polígonos que se tenían antes de cada una de estas equicomposiciones. Es claro, entonces, que será necesario un algoritmo que divida y permita “heredar” a los polígonos producto de estas equicomposiciones los movimientos de sus “padres”. Los pasos para llevar a cabo este proceso serán:

1. Se da entrada al polígono “padre”, esto es, los valores de los vértices de este y las transformaciones que le han afectado durante el proceso de equicomposición hasta este punto. También, se da entrada a la recta que divide al polígono.

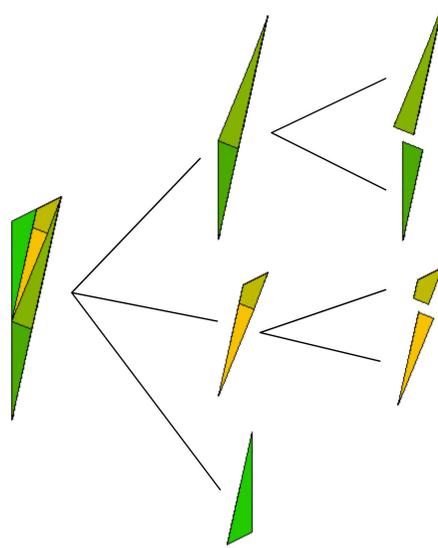


Figura 2.6: Árbol de cortes obtenidos durante el proceso de equicomposición de un triángulo en un rectángulo.

2. Se divide el polígono.
3. Se “hereda” a cada polígono “hijo” los movimientos del “padre”.

2.3.2. Algoritmo de traslación de un polígono.

Este algoritmo lleva a cabo la traslación de un polígono. Con este fin llevaremos a cabo los siguientes pasos:

1. Se da entrada al polígono que se va a trasladar y al vector de traslación.
2. Mediante el vector del paso anterior se efectúa la traslación del polígono.
3. Se registra la traslación de esta forma: Se guarda el vector de traslación y algo que indique que la operación llevada a cabo es una traslación que puede ser mediante una constante alfanumérica.

2.3.3. Algoritmo de reflexión puntual de un polígono.

El único tipo de rotación que se lleva a cabo durante el proceso de equicomposición, es en el algoritmo de equicomposición de un triángulo en un paralelogramo, y esta es una rotación de 180° o de una forma más sencilla una reflexión respecto a un punto. El algoritmo que se efectúa es el siguiente:

1. Se da entrada al polígono que se va a reflejar y el punto de reflexión.
2. Se realiza la reflexión del polígono respecto al punto dado en el paso anterior.
3. Se registra la reflexión guardando el punto de reflexión y algo que indique la operación que se realizó, esta puede ser una constante alfanumérica.

2.3.4. Algoritmo de regresión.

Este algoritmo lleva a cabo el objetivo para el cual se efectuó el registro de las transformaciones que se llevan a cabo en el proceso de equicomponer el polígono original en el cuadrado final (figura 2.7).

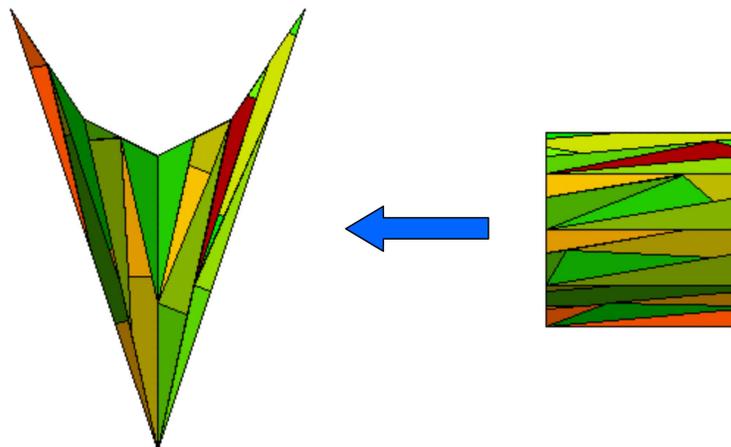


Figura 2.7: Proceso de regresión.

1. Para cada polígono P_i del cuadrado objetivo realizar lo siguiente:
 - a) Para cada transformación registrada del polígono P_i hacer la operación inversa a la indicada.

Estos son los algoritmos base de todo el programa que es el objetivo de esta disertación. La descripción de los objetos geométricos, sus relaciones y operaciones, junto con la descripción de los algoritmos y estructuras que llevarán el registro de las transformaciones que se efectuarán sobre los polígonos se detallará en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

La implementación.

3.1. Introducción

En este capítulo se presentan, con más detalle que en el capítulo anterior, los algoritmos que se usaron para alcanzar el objetivo de esta tesis. Aquí se muestran los procedimientos al estilo de los llamados pseudo-códigos, esto es, mediante un código descriptivo del algoritmo original. Los tipos de algoritmos que se manejan en el programa se desarrollan en cuatro secciones: algoritmos de vectores y polígonos, algoritmos de cortes, algoritmos de equicomposición y algoritmos principales. Estos algoritmos se dividen, a su vez, en dos tipos: funciones y procedimientos. Las funciones son aquellos algoritmos que tienen variables de entrada que serán procesadas para obtener una o un conjunto de variables de salida. Los procedimientos son similares a las funciones pero no tienen variables de salida.

Es importante comentar que las definiciones geométricas que se presentan en este capítulo son adaptaciones de la geometría euclidiana plana con el fin de que puedan ser aplicados a algún lenguaje de computadora. Por lo tanto, en ocasiones una definición que se presenta en este capítulo no es del todo equivalente a la que se maneja en las demás partes de esta obra.

3.1.1. Definiciones básicas.

Definición 1. Se entiende por **equicomponer** como la acción y efecto de dividir un polígono P en otros polígonos P_1, P_2, \dots, P_n , de tal forma que mediante traslaciones y rotaciones de estos polígonos se obtenga el polígono Q compuesto exactamente por P_1, P_2, \dots, P_n . En el anterior capítulo se definió equicomposición, que es un término estático y que se adapta más a la axiomática usual de la geometría. En este caso se maneja el verbo equicomponer porque en este capítulo se trata su aspecto dinámico al aplicarse a la programación de computadoras.

3.2. Algoritmos de vectores.

Definición 2. Los algoritmos expuestos en esta sección son aquellos que se necesitan para efectuar los procedimientos avanzados de vectores, por tanto, es necesario definir:

Arreglo. Es una n -ada ordenada de algún tipo. Todos los arreglos de este capítulo inician con el índice 1. Un arreglo A se representará:

$$(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

Vector y punto. Un vector es un arreglo de reales, este concepto será el mismo que el de punto. Por ejemplo, se tiene el siguiente vector:

$$V = (V_x, V_y)$$

Dirección de un vector. La dirección de un vector $V = (V_x, V_y)$ se tomará, de manera intuitiva, del origen $O = (0, 0)$ hacia el punto (V_x, V_y) .

Recta y segmento. La recta que pasa por dos puntos distintos U y V , está definida por el par no ordenado $\{U, V\}$. La definición y representación

de segmento y recta será el mismo en el programa, aunque es evidente que un segmento puede estar en una recta que esté definida por dos puntos distintos a los que definen el segmento. Como ejemplo se tiene la siguiente recta o segmento con sus diversas representaciones:

$$\ell = \overline{UV} = \overleftrightarrow{UV} = \{U, V\}.$$

Recta dirigida y segmento dirigido. Es un par ordenado de puntos con dirección. De igual manera que en la definición anterior, la definición y representación de segmento dirigido y recta dirigida será el mismo en los algoritmos de este capítulo. La dirección esta representada por el orden en que están escritos U y V en la recta o segmento dirigidos. Como ejemplo se tiene la siguiente recta o segmento dirigido en diversas representaciones:

$$\ell = \overline{UV} = \overrightarrow{UV} = [U, V]$$

La notación doble flecha superior denota una recta a menos que se indique que es una recta dirigida, de igual y de la misma manera sucede con la barra superior y el segmento.

Infinito. Punto cartesiano ideal donde se intersecan dos paralelas; en los algoritmos será el par ordenado (x, y) en cuyas dos entradas tiene el valor máximo permitido por un número real o de punto flotante.

Definición 3. En algunos casos donde hay iteraciones en las que intervienen dos o más vértices, de un polígono de n vértices, se usa la función $s(i) = [(i - 1) \bmod n] + 1$ que permite trabajar con los vértices $n + 1, n + 2$, etc. que en realidad son los vértices 1, 2, etc. Por ejemplo, en el algoritmo 18 para cada i con valores 1, 2, ..., n ; se forma el triángulo con los puntos $P_i, P_{s(i+1,n)}$ y $P_{s(i+2,n)}$; de tal manera que en las iteraciones $n - 1$ y n se tengan los triángulos $P_{n-1}P_nP_1$ y $P_nP_1P_2$ respectivamente.

Algoritmo 1. Función: Punto interior.

Esta función encuentra un punto P respecto a un segmento dirigido $[P_i, P_f]$ a una razón dada R .

1. Entradas: una recta ℓ , la razón R y un segmento dirigido $[P_i, P_f]$.
2. Usando la fórmula de razón de geometría analítica:

$$P = P_i + R (P_f - P_i)$$
3. Salida: P

Algoritmo 2. Función: Perpendicular izquierda.

Dado un vector V se devuelve un vector perpendicular a éste, pero apuntando a la izquierda respecto a la dirección de V .

1. Entrada: un vector V .
2. $V'_x = -V_y$
3. $V'_y = V_x$
4. Salida: V'

Algoritmo 3. Función: Paralela.

Calcula una recta paralela a ℓ que pase por P .

1. Entrada: una recta $\ell = \{P_i, P_f\}$ y un punto P .
2. $P_f - P_i$ es un vector en una de las direcciones de ℓ . Obténgase el punto P' con la fórmula:

$$P' = P + (P_f - P_i)$$
3. Luego, $\{P, P'\}$ es la recta buscada por este algoritmo:
 Salida: $\ell' = \{P, P'\}$

Algoritmo 4. Función: Vector dadas su norma y dirección.

Devuelve el vector de norma α con una dirección dada por el vector V .

1. Entradas: un real α y un vector V .
2. Se calcula α' que es la norma de V .

$$3. V' = \frac{\alpha}{\alpha'} V$$

4. Salida: V'

Algoritmo 5. Función: Terna.

Dada una recta ℓ representada por dos puntos encuéntrase la terna ordenada (a, b, c) que son los coeficientes con base a la forma $ax + by = c$.

1. Entrada: una recta $\ell = \{P_i, P_f\}$ donde: $P_i = (P_{ix}, P_{iy})$ y $P_f = (P_{fx}, P_{fy})$.

2. Se encuentran los valores:

$$\Delta_x = P_{fx} - P_{ix}$$

$$\Delta_y = P_{fy} - P_{iy}$$

3. Si $\Delta_x = 0$ entonces ℓ es paralela al eje y, o sea:

$$a = 0, b = 1 \text{ y } c = P_{ix}$$

4. Si no, ($\Delta_x \neq 0$)

a) Si además: $\Delta_y = 0$, o sea, ℓ es paralela al eje x entonces:

$$a = 0, b = 1, c = P_{iy}$$

b) Si no, esto es, si $\Delta_x \neq 0$ y $\Delta_y \neq 0$, se tiene que:

$$m = \Delta_y / \Delta_x$$

$$a = m, b = -1, c = m P_{ix} - P_{iy}$$

5. Salida: (a, b, c) .

Algoritmo 6. Función: Intersección.

Encuentra la intersección de dos rectas con base en el método de los determinantes. Si $\Delta \neq 0$, se encuentra la solución en la forma clásica. En caso contrario la solución es **Infinito** en cada una de las entradas x e y , que es el valor más alto que alcanza un real o número de punto flotante.

1. Entrada: dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 .

2. Se obtienen a partir de ℓ_1 y ℓ_2 , las ternas (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) respectivamente usando el algoritmo anterior.
3. Se encuentran los siguientes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

4. Si $\Delta \neq 0$ entonces:
 - a) Se puede encontrar a x e y , aplicando las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

- b) Salida: (x, y)

5. Si no, salida: **Infinito**

Algoritmo 7. Función: Rotar punto.

Rota P alrededor del punto O un ángulo ϕ (en radianes).

1. Entrada: un punto P , un punto O y un ángulo ϕ .
2. Se calcula el vector OP y su norma:

$$V' = P - O$$

$$r = \|V'\|$$
3. Si $r \neq 0$ entonces:

- a) Se calcula:

$$\text{Cos}(\theta) = \frac{V'_x}{r} \quad \text{Sen}(\theta) = \frac{V'_y}{r}$$

- b) De esta forma se calcula $\text{Cos}(\theta + \phi)$ y $\text{Sen}(\theta + \phi)$ con base en las fórmulas:

$$\text{Cos}(\theta + \phi) = \text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\phi) - \text{Sen}(\theta)\text{Sen}(\phi)$$

$$\text{Sen}(\theta + \phi) = \text{Sen}(\theta)\text{Cos}(\phi) + \text{Cos}(\theta)\text{Sen}(\phi)$$

donde ϕ es el ángulo de rotación y θ el ángulo de dirección de V' .

c) Luego:

$$V'_x = r \text{Cos}(\theta + \phi)$$

$$V'_y = r \text{Sen}(\theta + \phi)$$

d) Salida: $O + V'$

4. Si no, salida: O .

Algoritmo 8. Función: Rotar polígono.

Rota cada vértice de un polígono $P_1P_2 \cdots P_n$ alrededor del punto O un ángulo ϕ (en radianes).

1. Entradas: un polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$, un punto O y un ángulo ϕ .
2. Para cada vértice P_i de P obtener el punto P'_i del polígono P' que se obtiene rotando P_i alrededor de O un ángulo ϕ (algoritmo 7).

3. Salida: P'

Algoritmo 9. Función: Trasladar Polígono.

Traslada cada vértice de un polígono $P_1P_2 \cdots P_n$ un desplazamiento dado por el vector V .

1. Entradas: un polígono $P_1P_2 \cdots P_n$ y un vector V .
2. Para cada P_i del polígono $P_1P_2 \cdots P_n$:

- a) $P'_i = P_i + V$.

3. Salida: $P' = P'_1 P'_2 \cdots P'_n$

Algoritmo 10. Función: Área del polígono.

Devuelve el área de un polígono mediante la fórmula de determinantes de la geometría analítica.

1. Entradas: un polígono $P = P_1 P_2 \cdots P_n$.

2. Encontrar la suma:

$$S = \begin{vmatrix} P_{1x} & P_{1y} \\ P_{2x} & P_{2y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{2x} & P_{2y} \\ P_{3x} & P_{3y} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} P_{nx} & P_{ny} \\ P_{1x} & P_{1y} \end{vmatrix}$$

3. Salida: $\frac{S}{2}$.

Algoritmo 11. Función: Alineación de un polígono.

Esta función obtiene la alineación del polígono: **Izquierda**, **Derecha** o **Centro**; dependiendo de si el área es negativa, positiva o cero respectivamente. Para este caso será necesario definir previamente las constantes globales: **Izquierda**, **Derecha** y **Centro**.

1. Entrada: un polígono $P = P_1 P_2 \cdots P_n$.

2. Se encuentra el área A del polígono P (algoritmo 10).

3. Si $A \neq 0$, entonces, $a = \mathbf{Izquierda}$.

4. Si no, (esto es $A = 0$):

a) si el área es cero, $a = \mathbf{Centro}$.

b) en último caso $a = \mathbf{Derecha}$.

5. Salida: a .

Algoritmo 12. Función: Punto a la izquierda de recta.

Devuelve un valor de verdad que indica si un punto dado P está a la izquierda de una recta dirigida $\ell = [P_i, P_f]$.

1. Entradas: un punto P y una recta dirigida $\ell = [P_i, P_f]$.
2. Se encuentra la alineación x del triángulo $P_i P_f P$ (algoritmo 11).
 - a) Si $x = \mathbf{Izquierda}$, entonces, $B = \text{verdadero}$.
 - b) si no, $B = \text{falso}$.
3. Salida B .

Algoritmo 13. Función: Polígono no está a la derecha.

Dado un polígono P esta función devuelve el valor “verdadero” si no hay vértices de P a la derecha de una recta ℓ .

1. Entradas: un polígono $P = P_1 P_2 \cdots P_n$ y una recta dirigida $\ell = [P_i, P_f]$.
2. Sea $\ell' = [P_f, P_i]$.
3. El valor de verdad para obtener la salida de la función es el resultado de evaluar la siguiente disyunción:

$$B = (P_1 \text{ está a la izquierda de } \ell') \vee (P_2 \text{ está a la izquierda de } \ell') \vee \cdots \vee (P_n \text{ está a la izquierda de } \ell')$$
4. Salida: B .

Algoritmo 14. Función: Reflexión puntual de un polígono.

Esta función refleja puntualmente los vértices de polígono $P = P_1 P_2 \cdots P_n$ con respecto al punto A .

1. Entrada: Un polígono $P = P_1 P_2 \cdots P_n$.
2. Para cada vértice P_i del polígono P y P'_i del polígono P' :

$$\text{a) } P'_i = A + (A - P_i)$$

3. Salida = P' .

Algoritmo 15. Procedimiento: Poner índices a la izquierda.

Ordena los índices de un polígono para que esté orientado hacia la izquierda

1. Entrada: un polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$.
2. Si P no tiene sus índices a la izquierda (algoritmo 11):
 - a) Intercambiar valores: P_{i+1} y P_{n-i} para $i = 0, 1, \dots, [n/2] - 1$

Algoritmo 16. Procedimiento: ordenar índices de triángulo.

Ordena los índices de un triángulo a la izquierda de tal forma que el lado mayor esté entre los índices 1 y 2. La orientación a la izquierda es con el fin de dar orden a la manera en que se está llevando a cabo la equicomposición y el que se tome el lado mayor de la manera mencionada es con el fin de cumplir las condiciones del teorema 9 del capítulo 1.

1. Entrada: un triángulo $T = ABC$
2. Se calcula: $D_1 = \|A - B\|$, $D_2 = \|B - C\|$, $D_3 = \|C - A\|$
3. Se encuentra el máximo M de D_1 , D_2 y D_3 .
4. Si $M = D_2$ entonces intercambiar A y C .
5. si no se cumple 4 pero $M = D_3$ entonces intercambiar B y C .
6. En último de los casos no se hace cambio en el triángulo.
7. Puede ser que entre los puntos 1 al 6 se haya orientado el triángulo hacia la derecha. Así que, si no está alineado a la izquierda T , sólo basta intercambiar A y B .

Algoritmo 17. Función: s .

Esta función calcula los índices en algoritmos cíclicos.

1. Entradas: el índice a evaluar i , además el índice máximo n .
2. $j = [(i - 1) \bmod n] + 1$
3. Salida: j .

Algoritmo 18. Función: Calificar índices.

Evalúa la orientación de cada índice de un polígono (**Izquierda o Derecha**).

1. Entrada: un polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$.
2. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$:
 - a) Crear el triángulo T_i Formado los puntos $P_i, P_{s(i+1,n)}$ y $P_{s(i+2,n)}$.
 - b) En C_i se guardará la alineación del triángulo T_i .
3. Salida: el arreglo C , que tiene en sus entradas alguno de los valores: **Izquierda, Derecha** o **Centro** que son las alineaciones de los triángulos T_i .

Algoritmo 19. Función: Un punto está en el interior de un triángulo.

Este algoritmo usa el hecho de que en todo triángulo (y más aún en todo polígono convexo) alineado a la izquierda, un punto x es interior si y sólo si x está a la izquierda de cada uno de los lados del polígono.

1. Entradas: un punto P y un triángulo ABC .
2. Encontrar el valor de la siguiente conjunción:

$$B = (P \text{ a la izquierda de } \overline{AB}) \wedge (P \text{ a la izquierda de } \overline{BC}) \wedge (P \text{ a la izquierda de } \overline{CA})$$
3. Salida: B .

Algoritmo 20. Función: Hay otros vértices dentro.

Dado un polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$, este algoritmo evalúa con un valor de verdad si dados tres vértices P_r , P_s y P_t hay otros vértices de P en el interior del triángulo $P_rP_sP_t$.

1. Entradas: un polígono P y tres índices de vértices distintos.
2. Encontrar el valor de verdad de:

$$B = (P_1 \text{ está en el interior de } P_rP_sP_t) \vee (P_2 \text{ está en el interior de } P_rP_sP_t) \vee \cdots \vee (P_n \text{ está en el interior de } P_rP_sP_t)$$
quitando de esta disyunción las proposiciones P_i que sean P_r , P_s y P_t .
3. Salida: B .

Algoritmo 21. Procedimiento: Quitar vértice.

Este procedimiento quita el vértice P_k del polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$.

1. Entradas: un polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$ y el índice k del vértice que se va a quitar.
2. Para cada i desde k hasta $n - 1$:

$$P_i = P_{i+1}$$
3. Se quita el vértice P_n .

Algoritmo 22. Procedimiento: Quitar calificación.

Quita la componente C_k del arreglo $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ de calificaciones, estas calificaciones pueden tener los valores **Izquierda**, **Derecha** o **Centro**.

1. Entradas: un arreglo de calificaciones $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ y el índice k de la calificación que se va a quitar.
2. Para cada i desde k hasta $n - 1$:

$$C_i = C_{i+1}$$

3. Se quita la componente C_n .

Algoritmo 23. Función: En orden.

Esta función permite encontrar si 3 números reales están en orden:

1. Entradas: tres números reales: x_1 , x_2 y x_3
2. Si $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ó $x_3 \leq x_2 \leq x_1$, entonces, salida: Verdadero.
3. si no, salida: Falso

Algoritmo 24. Función: Distancia de una recta a un punto.

Este algoritmo permite encontrar la distancia entre una recta y un punto. Para este fin se maneja la clásica fórmula de geometría analítica.

1. Entradas: una recta $\ell = \{P_i, P_f\}$ y un punto P .
2. Se encuentra la terna (a, b, c) que corresponden a la recta ℓ (algoritmo 5).
3. Salida: $|\frac{aP_x + bP_y - c}{a^2 + b^2}|$

Algoritmo 25. Función: Coincide con lado.

Función para revisar si la recta ℓ coincide con algún lado del polígono P . Con este fin se revisa que distancia hay de la recta a cualesquiera par de vértices consecutivos de poli

1. Entradas: un polígono P y una recta ℓ .
2. Se pone un valor de verdad inicial: $B = \text{Falso}$.
3. Para cada lado $P_i P_{i+1}$:
 - a) Si la distancia de ℓ a P_i es cero y la distancia de ℓ a P_{i+1} también es cero entonces: $B = \text{verdadero}$.
4. Salida: B .

Algoritmo 26. Procedimiento: Quitar vértices alineados.

Si varios vértices consecutivos de un polígono *Poli* están alineados, entonces, el polígono deja de ser simple, además, provoca que al cortarse el polígono en triángulos se lleven a cabo cortes innecesarios, por lo cual, este procedimiento quita los vértices que no están en los extremos de una sucesión de vértices alineados.

1. Entradas: Un polígono *Poli* que es un arreglo de puntos y un arreglo *C* que contendrá las calificaciones de cada vértice del polígono.
2. Sea n el número de vértices del polígono *Poli*.
3. Iniciase la variable $i = 1$
4. Siempre y cuando $i \leq n$ se cumplirá el siguiente bucle:
 - a) Si la calificación del vértice de índice i es igual a **Centro** entonces se llevará a cabo lo siguiente:
 - I) Quitar el vértice de índice i del polígono *Poli* (algoritmo 21).
 - II) Quitar la i -ésima calificación del arreglo de calificaciones (algoritmo 22).
 - III) Además se hace: $i = i - 1$ y $n = n - 1$.
 - b) Independientemente de lo anterior se hace: $i = i + 1$ y se regresa al inicio del ciclo.

Algoritmo 27. Procedimiento: Cortar polígono principal en triángulos.

Procedimiento recursivo, en donde conforme se aplique sobre sí mismo, el polígono al que se aplique tendrá un vértice menos que el de la anterior recursión. Para cortar un triángulo del polígono original bastará con que no haya vértices en el interior de dicho triángulo de acuerdo al teorema 14 del apéndice B. Como un polígono de n vértices puede ser cortado en a lo más $n - 2$ triángulos se crea un arreglo con $n - 2$ triángulos donde se guardarán los triángulos cortados o, como otra alternativa, se crea un arreglo dinámico de triángulos donde se irá agregando cada triángulo nuevo.

1. Entradas: El polígono que se va obteniendo a partir del original al ir cortando triángulos sucesivamente se denominará P ; se tiene, también, una variable N_T que contará el número de triángulos producidos, la cual incrementará su valor en cada recursión; además, hay una variable llamada *Triangulo* que será un arreglo de polígonos que contendrá cada uno de los triángulos producidos en cada recursión.
2. Se califica cada vértice (**Derecha**, **Izquierda** y **Centro**) y se guardan las calificaciones en el arreglo de calificaciones: *Cal*.
3. Con base en las calificaciones de *Cal* se quitan los vértices con calificación **Centro** (algoritmo 26).
4. Se vuelven a calificar los vértices y se guarda nuevamente su valor en la variable *Cal*.
5. Si el polígono tiene más de tres vértices:
 - a) Además, para cada terna de vértices:
 - 1) Si la terna de vértices gira a la izquierda, esto es, si la calificación del vértice central es **Izquierda**, y si además no hay vértices dentro del triángulo formado por esta terna:
 - * Se borra de *Poli* el vértice central y se crea *PoliTemp* igual a *Poli* pero sin el vértice mencionado.
 - ** Con la terna de vértices se forma un triángulo que se agregará al arreglo *Triangulo*.
 - *** Se aplica esta misma rutina con entradas *PoliTemp*, $N_{Trian} + 1$ y al arreglo *Triangulo*, de esta forma se continúa con la recursividad.
 - **** Se para el ciclo iniciado en a).
 - b) Si no se cumple lo anterior, esto es, si se tiene un triángulo acaba la recursividad y *Poli* será el último triángulo que se agregará a *Triangulo*.

3.3. Algoritmos de cortes.

Al realizar la equicomposición de un polígono en un cuadrado equivalente fue necesario tener los cortes de ambos. En la sección anterior se cortó el polígono en triángulos, para lo cual, sólo se necesitó usar un arreglo de triángulos, en el cual cada entrada tiene un arreglo de 3 puntos que son los vértices de cada triángulo; suponiendo que el polígono tiene n vértices, el arreglo no debe tener más de $n - 2$ entradas. Para guardar la información de cada polígono, obtenido al equicomponer cada triángulo en un rectángulo, fue necesario crear una estructura o tipo llamado TCorte que son los nodos de una estructura de tipo árbol binario, donde cada nodo guarda los datos de cada polígono obtenido. La decisión de elegir una estructura árbol binario se debe a los siguientes hechos: 1) En la raíz de cada árbol se tiene un triángulo, 2) Cada triángulo es un polígono convexo que, por el teorema 10 del apéndice B, al cortarse por una recta forma dos polígonos convexos, 3) cada polígono convexo al cortarse por una recta forma dos polígonos convexos por el teorema mencionado en el inciso anterior, esto es, en cada corte se producen sólo dos nuevos hijos en cada nodo.

3.3.1. Los cortes.

Para cortar un polígono convexo $P = P_1P_2 \cdots P_n$ de n vértices con una recta se trabajarán 3 casos:

1. La recta pasa por dos vértices no consecutivos de P .
2. La recta pasa por un vértice y el interior de un lado no adyacente.
3. La recta pasa por el interior de dos lados distintos.

Para el caso 1, si la recta pasa por los vértices P_i y P_j con $0 \leq i < j \leq n$, entonces, los nuevos polígonos obtenidos son $P_iP_{i+1} \cdots P_{j-1}P_j$ y $P_jP_{s(j+1)} \cdots P_{s(i-1)}P_i$ (figura 3.1).

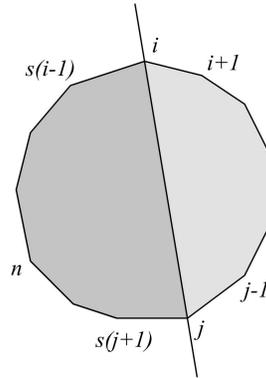


Figura 3.1: Dado un polígono convexo $P = P_1P_2 \cdots P_n$ una recta pasa por los vértices P_i y P_j (con $0 \leq i < j \leq n$) corta al polígono exactamente en dos nuevos polígonos: $P_iP_{i+1} \cdots P_{j-1}P_j$ y $P_jP_{s(j+1)} \cdots P_{s(i-1)}P_i$.

Para el caso 2, supóngase que la recta pasa por el vértice P_i y por el lado $\overline{P_jP_{s(j+1)}}$ en el punto x , y que además $0 \leq i < j \leq n$. Entonces, se agrega el vértice P_{n+1} a P y se obtiene el polígono $P' = P_1P_2 \cdots P_nP_{n+1}$, de tal manera que renombrese para cada vértice entre los vértices $P_{n+1}, P_n, \dots, P_{s(j+2)}$ (en orden descendente) con la siguiente fórmula: $P_k = P_{k-1}$, luego, se hace $P_{s(j+1)} = x$ ¹. En caso de que $0 \leq j < i \leq n$ además del proceso anterior se incrementa el valor de i en 1: $i = i + 1$. Para finalizar este caso se aplica el caso 1 al polígono P' .

Para el caso 3, si la recta pasa por el lado $\overline{P_iP_{i+1}}$ en el punto y , y por el lado $\overline{P_jP_{s(j+1)}}$ en el punto x , y además $0 \leq i < j \leq n$, entonces, se agrega el vértice P_{n+1} a P y se obtiene el polígono $P' = P_1P_2 \cdots P_nP_{n+1}$, de tal manera que se renombra para cada vértice entre los vértices $P_{n+1}, P_n, \dots, P_{s(i+2)}$ (en este orden) con la siguiente fórmula: $P_k = P_{k-1}$, luego, se hace $P_{i+1} = y$ y se incrementa j en 1: $j = j + 1$. De esta forma se tiene que este caso se convierte en el caso 2 pero aplicado al polígono P' , pues la recta cruza el polígono P' en P_i y en el lado $\overline{P_jP_{s(j+1)}}$ en el punto x .

¹Este abuso de la notación se entiende si se supone que se está trabajando en un ambiente de un lenguaje de programación

3.3.2. El árbol de cortes.

Para registrar cada polígono obtenido del proceso de corte se maneja una estructura de tipo árbol binario. Esta estructura va a estar formada por nodos llamados cortes, para los cuales, generalmente en cualquier lenguaje de programación, será necesario declarar de un tipo o estructura que se convendrá en llamar TCorte. Esta estructura de nodos será la que formará al árbol. La estructura o tipo TCorte se compone de cinco variables: *.Ini*, *.Fin*, *.Mouv*, *.Izq* y *.Der*. Las variables *.Ini* y *.Fin* son polígonos que contienen su posición inicial y final del corte, respectivamente. *.Mouv* es un arreglo de cadenas de caracteres que contiene la información de las traslaciones y rotaciones que se aplicaron a cada polígono del corte desde la posición inicial de sus padres hasta su propia posición final. *.Izq* y *.Der* son los hijos del corte actual, si no existe alguno de estos nodos, tendrá el valor **Nulo** que será un valor que puede estar definido en el lenguaje que se use o que puede ser definido por el programador.

También fue necesario crear la estructura TSegDiv que funciona así: dados un segmento \overline{AB} y un lado $\overline{P_i P_{s(i+1)}}$ de un polígono P , este tipo indica la posición del punto intersección con respecto al lado del polígono. Los miembros de este tipo son: *.I*, *.F*, *.P* y *.Pos*. Se tiene que *.I* y *.F* son índices, en orden ascendente, de los vértices inicial y final del lado en cuestión. *.P* es el punto de intersección y *.Pos* es la posición que ocupa *.P* con respecto al lado $P_i P_{s(i+1)}$. *.Pos* puede tener los valores: **Fuera**, **Intermedio**, **Inicial** (si la intersección está en el vértice inicial i) o **Final** (si la intersección está en el vértice final $s(i+1)$), estos valores deben definirse previamente.

Los tipos o estructuras se declararán con una variable que los identificará y sus miembros se distinguirán separándolos por un punto. De esta manera si se tiene una variable de tipo TCorte llamada *Corte* su miembro *.Mouv* se representará como *Corte.Mouv*.

Algoritmo 28. Procedimiento: Iniciar corte.

Inicia un corte nuevo haciendo los hijos izquierdo y derecho nulos; asignando a *.Ini* y *.fin* el mismo valor que es la posición de un polígono P ; asignando a *.Mouv* los movimientos del Padre (en este caso denominado como *Mouv*), de esta forma, este miembro del corte tendrá todos los movimientos que se hicieron a partir el triángulo inicial hasta el padre del corte actual.

1. Entradas: un polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$, una variable de tipo TCorte llamada *Corte* y un arreglo de cadenas llamado *Mouv* que contiene las cadenas de movimiento del padre.
2. Se crea un TCorte llamado *Corte* y se asignan los siguientes valores a sus miembros:

$$Corte.Ini = P$$

$$Corte.Fin = P$$

$$Corte.Mouv = Mouv$$

$$Corte.Izq = \mathbf{Nulo}$$

$$Corte.Der = \mathbf{Nulo}$$

Algoritmo 29. Procedimiento: Cortar

Este procedimiento hace que una recta ℓ biseque a la componente *.Fin* de un corte, siempre y cuando la intersección de ℓ con este polígono no sea uno de sus lados o uno de sus vértices.

1. Entradas: una variable de tipo TCorte denominada *Corte* y una recta ℓ .
2. Se declaran las variables *NI* que es un entero y *SD* que es un arreglo del tipo TSegDiv con dos entradas.
3. Se inicia la variable *NI* a cero y se asignan los valores *Corte.Fin* a P ($P = Corte.Fin$).

4. Si $Corte.Izq \neq \mathbf{Nulo}$ y $Corte.Der \neq \mathbf{Nulo}$ se aplica este mismo algoritmo a los miembros izquierdo y derecho
5. Si no, se verifica si ℓ no coincide con algún lado del polígono P (algoritmo 25), en caso de que esto suceda:
 - a) Para cada lado $P_iP_{s(i+1)}$ del polígono P :
 - 1) Si $P_iP_{s(i+1)}$ interseca a ℓ increméntese NI y asígnese valores a $SD(NI)$ que contiene los valores $.I$, $.F$, $.P$ y $.Pos$ correspondientes al tipo de intersección entre $P_iP_{s(i+1)}$ y ℓ .
 - b) Si el número de cortes $NI = 2$, entonces, háganse los cortes con base a $Corte$ y al arreglo SD que contiene las intersecciones con el polígono P (algoritmo 31).

Algoritmo 30. Procedimiento: Iniciar *SegDiv*.

Procedimiento para iniciar una variable tipo TSegDiv. En esta variable se guardan las características de una intersección de una recta y un lado de un polígono

1. Entradas: SD que es del tipo TSegDiv, I el índice del vértice inicial del lado (tomando los índices en orden ascendente), F el índice del vértice final del lado, P un polígono, Pos la posición de cruce respecto a los vértices inicial y final.
2. Asígnense los siguientes valores a los miembros de SD :

$$SD.I = I$$

$$SD.F = F$$

$$SD.P = P$$

$$SD.Pos = Pos$$

Algoritmo 31. Procedimiento: Crear Cortes.

Este procedimiento permite cortar un polígono que este en alguna hoja del árbol de corte, conocidos los dos puntos de corte.

1. Entradas: *Corte* que es de tipo TCorte, *SD* que es un arreglo de TSeg-Div.
2. Se debe garantizar que al cortar el polígono los cortes sean en el vértice inicial o en el interior del lado del polígono. Con este fin se tiene que para cada k de 1 al 2:
 - a) Si $SD(k).Pos = \mathbf{Final}$ entonces:

$$SD(k).I = s(SD(k).I + 1, n),$$

$$SD(k).F = s(SD(k).F + 1, n) \text{ y}$$

$$SD(k).Pos = \mathbf{Inicial}.$$
3. Luego, se construyen los polígonos de acuerdo a cada caso.
 - a) Si $SD(1).Pos = \mathbf{Inicial}$ entonces:
 - I) Si $SD(2).Pos = \mathbf{Inicial}$ y suponiendo que los puntos de corte están en A_i y A_j entonces:

$$P_1 = A_i A_{i+1} \cdots A_{j-1} A_j$$

$$P_2 = A_j A_{s(j+1)} \cdots A_{s(i-1)} A_i$$
 - II) Si no, esto es, si $SD(2).Pos = \mathbf{Intermedio}$, y suponiendo que $SD(1).P = A_i$ y que $SD(2).P$ está entre A_j y $A_{s(j+1)}$:

$$P_1 = A_i A_{i+1} \cdots A_j SD(2).P$$

$$P_2 = SD(2).P A_{s(j+1)} \cdots A_{s(i-1)} A_i$$
 - b) Si no, esto es, $SD(1).Pos = \mathbf{Intermedio}$ y suponiendo que $SD(1).P$ está entre A_i y A_{i+1} :
 - I) Si $SD(2).Pos = \mathbf{Inicial}$ y $SD(2).P = A_j$:

$$P_1 = SD(1).P A_{i+1} \cdots A_{j-1} A_j$$

$$P_2 = A_j A_{s(j+1)} \cdots A_i SD(1).P$$

- II) Si no, esto es, si $SD(2).Pos = \mathbf{Intermedio}$, y suponiendo que $SD(2).P$ está entre A_j y $A_{s(j+1)}$:

$$P_1 = SD(1).PA_{i+1}A_{s(i+2)} \cdots A_{j-1}A_jSD(2).P$$

$$P_2 = SD(2).PA_{s(j+1)}A_{s(j+2)} \cdots A_{s(i-1)}SD(1).P$$

Algoritmo 32. Procedimiento: Trasladar cortes.

Este procedimiento permite trasladar un árbol de cortes o un segmento de éste y va agregando a la cadena en el miembro *.Mouv* de cada corte las traslaciones hechas sobre este segmento del árbol.

1. Entradas: *Corte* que es del tipo TCorte, V que es el vector de traslación.
2. Si *Corte.Izq* = **Nulo** y *Corte.Der* = **Nulo** entonces:
 - a) *Corte.Fin* será el polígono obtenido al trasladar *Corte.Fin* con vector de traslación V (algoritmo 9).
 - b) Se agrega a *Corte.Mouv* la cadena $V_x + "@" + V_y + "T"$ esta cadena indica los valores en x e y del vector V separados por el símbolo "@" y finalmente se agrega "T" para indicar que se llevo a cabo una traslación.
3. Si no, se aplica este mismo algoritmo a los nodos izquierdo y derecho: *Corte.Izq* y *Corte.Der*.

Algoritmo 33. Procedimiento: Traslada cortes si no están a la derecha de una recta dada.

Este procedimiento traslada todo polígono en los miembros *.Fin* de las hojas del árbol de cortes (o de una sección del árbol), si tiene vértices en la recta ℓ o a la izquierda de esta recta, luego, se deja un registro en *.Mouv* de la traslación hecha.

1. Entradas: *Corte* que es del tipo TCorte, ℓ una recta, V el vector de traslación.

2. Si $Corte.Izq \neq \mathbf{Nulo}$ y $Corte.Der \neq \mathbf{Nulo}$ se aplica este mismo algoritmo a los miembros izquierdo y derecho, esto es a $Corte.Izq$ y $Corte.Der$.
3. Si no:
 - a) Si el polígono no está a la derecha de ℓ (algoritmo 13):
 - I) Trasladar el polígono $Corte.Fin$ con vector de traslación V (algoritmo 9).
 - II) Se agrega a $Corte.Movs$ la cadena $V_x + "@" + V_y + "T"$ esta cadena indica los valores en x e y del vector V separados por el símbolo "@" y finalmente se agrega "T" para indicar que se llevó a cabo una traslación.

Algoritmo 34. Procedimiento: Reflexión puntual de cortes.

Este procedimiento permite hacer una reflexión puntual de un árbol de cortes o un segmento de éste y va agregando a la cadena en el miembro $.Movs$ las reflexiones puntuales hechas sobre este segmento del árbol.

1. Entradas: $Corte$ que es del tipo TCorte, A que es el centro de la reflexión.
2. Si $Corte.Izq \neq \mathbf{Nulo}$ y $Corte.Der \neq \mathbf{Nulo}$ se aplica este mismo algoritmo a los miembros izquierdo y derecho esto es a $Corte.Izq$ y $Corte.Der$.
3. Si no:
 - a) Reflejar puntualmente el polígono $Corte.Fin$ con centro de reflexión puntual A .
 - b) Se agrega a $Corte.Movs$ la cadena $A_x + "@" + A_y + "R"$ esta cadena indica los valores en x e y de A separados por el símbolo "@" y finalmente se agrega "R" para indicar que se llevó a cabo una reflexión puntual.

Algoritmo 35. Procedimiento: Rotar cortes.

Este procedimiento permite rotar un árbol de cortes o un segmento de éste.

1. Entradas: *Corte* que es del tipo TCorte, el ángulo de rotación ϕ y el centro de rotación O .
2. Si *Corte.Izq* = **Nulo** y *Corte.Der* = **Nulo** entonces:
 - a) Se obtiene un nuevo valor de *Corte.Fin* después de rotarlo con ángulo ϕ y centro de rotación O (algoritmo 8).
3. Si no, se aplica este mismo algoritmo (rotar corte) a los nodos izquierdo y derecho: *Corte.Izq* y *Corte.Der*.

Algoritmo 36. Función: Cadena a Punto.

Este procedimiento convierte una cadena con formato “x @ y” a punto, donde x e y son las representaciones en cadena de dos números de punto flotante. No se detallará el funcionamiento de este algoritmo pues depende mucho de las funciones de cadena del lenguaje en que se aplique.

Algoritmo 37. Procedimiento: Regresión.

Usando las cadenas guardadas en *.Movs* en los extremos u hojas de un árbol de cortes obtiene la posición inicial de cada polígono de las hojas, en el polígono original y guarda esta posición en los polígonos *Corte.Ini*. Dicho de otra forma, el proceso de equicomposición permite a partir de un polígono inicial P para, luego, obtener un cuadrado compuesto de polígonos P_i que a su vez son cortes de P , así, el proceso de regresión permite encontrar a los P_i en su posición inicial componiendo a P .

1. Entradas: *Corte* una variable de tipo TCorte.
2. Si *Corte.Izq* \neq **Nulo** y *Corte.Der* \neq **Nulo** se aplica este mismo algoritmo a los miembros izquierdo y derecho esto es a *Corte.Izq* y *Corte.Der*.

3. Si no:
 - a) Primero, se copia el polígono $Corte.Fin$ en $Corte.Ini$, esto es:

$$Corte.Ini = Corte.Fin$$
 - b) Para cada elemento del arreglo de cadenas $.Movs$:
 - i) Con la función Cadena a punto (algoritmo anterior) obtener los valores separados por “@” en esta cadena y se almacenan en la variable V .
 - ii) En la cadena $CadMov$ se pone el último caracter de este elemento de $.Movs$ que puede ser “T” o “R” dependiendo de la transformación:
 - * Si $CadMov$ es “T” se traslada $Corte.Ini$ con vector de traslación $-V$.
 - ** Si $CadMov$ es “R” se refleja puntualmente $Corte.Ini$ con respecto al punto V .

3.4. Algoritmos de equicomposición.

En esta sección se implementan de forma más detallada los algoritmos de equicomposición desarrollados en el capítulo 2. De acuerdo al algoritmo de equicomposición de un triángulo en rectángulo, se observan 3 pasos fundamentales:

1. Equicomponer un triángulo en un paralelogramo equivalente.
2. Equicomponer el paralelogramo anterior en un segundo paralelogramo con uno de sus lados congruentes a la base del rectángulo que se desea obtener.
3. Equicomponer el segundo paralelogramo al rectángulo requerido.

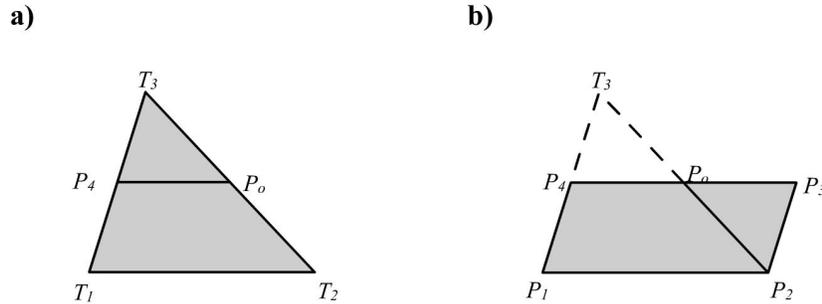


Figura 3.2: Equicomposición de un triángulo en un paralelogramo.

La equicomposición del triángulo en un paralelogramo se describió con suficiente detalle en el capítulo anterior (figura 3.2).

Con base en el algoritmo de equicomposición de un paralelogramo P en un paralelogramo equivalente Q , se construye Q de tal forma que tenga en común el lado Q_3Q_4 con P_3P_4 y el otro par de lados opuestos de Q congruentes a BR . De acuerdo al teorema 5 del capítulo 1, al tener una base en común tienen la misma altura HP , así que, sea V_{HP} un vector perpendicular a $\overline{P_4P_3}$ de norma HP y el vector V_{BRP} de dirección $P_3 - P_4$ y norma igual a $\sqrt{BR^2 - HP^2}$. Entonces el vector $V_{BR} = V_{HP} + V_{BRP}$ tiene norma igual a BR y por sus características va a permitir encontrar Q_1 y Q_2 como sigue:

1. $Q_1 = Q_4 + V_{BR}$
2. $Q_2 = Q_3 + V_{BR}$

Finalmente, obtenidos los vértices de este paralelogramo se procede a la equicomposición de P en Q .

De manera similar se equicompone el paralelogramo Q en el rectángulo buscado: primero se hacen coincidir en uno de sus lados, se obtienen los vértices del rectángulo y, finalmente, se hace la equicomposición del paralel-

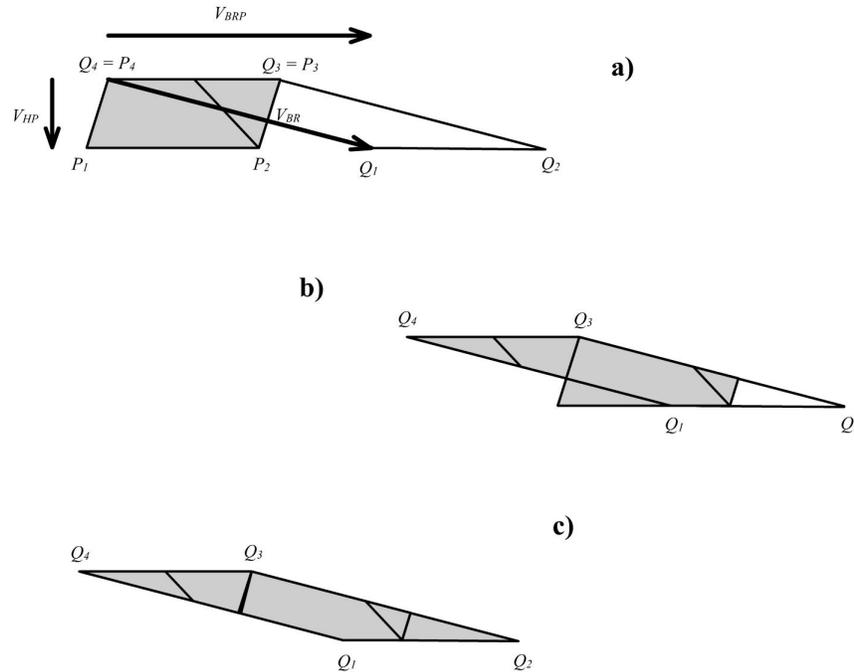


Figura 3.3: Equicomposición en tres pasos de un paralelogramo P en un paralelogramo Q .

ogrammo Q en el rectángulo $R = R_1R_2R_3R_4$ (figura 3.4).

Algoritmo 38. Función: Triángulo a Paralelogramo P .

Dado un triángulo este algoritmo obtiene los vértices de un paralelogramo.

1. Entradas: un triángulo denominado $T = T_1T_2T_3$ y una variable denominada $Corte$ que es una variable de tipo TCorte.
2. Sea $P = P_1P_2P_3P_4$ el paralelogramo que se obtendrá.
3. Se ordena el triángulo T a la izquierda y ordena, de tal forma que, el lado $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ es el mayor en dicho triángulo a fin de cumplir las condiciones del teorema 9 del capítulo 1 (algoritmo 16).

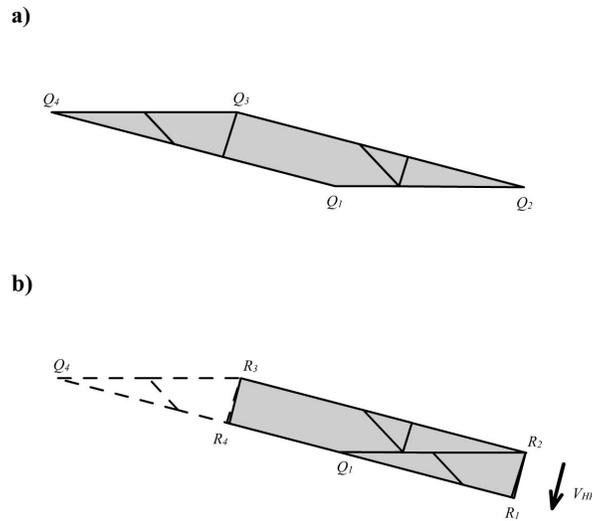


Figura 3.4: Equicomposición de un paralelogramo en un rectángulo.

4. Se definen $P_1 = T_1$ y $P_2 = T_2$
5. P_4 es el punto medio de T_1 y T_3 .
6. Sea P_o el punto medio entre T_2 y T_3 .
7. P_3 se construye de tal forma que P_o es el punto medio de P_4 y P_3 .
8. Como la recta $\overleftrightarrow{P_4P_o}$ hace el corte necesario para convertir el triángulo en el primer paralelogramo, se corta (figura 3.2) el triángulo en dos polígonos: el triángulo $P_3T_1P_4$ y el trapecio $P_1P_2AP_4$ (algoritmo 29), con base al árbol de cortes, el cual, sólo consta de un nodo (el que tiene el triángulo T).
9. Finalmente haciendo la reflexión puntual del triángulo $P_3T_1P_4$ con centro en P_o se obtiene el paralelogramo $P = P_1P_2P_3P_4$ por equicomposición (figura 3.2).
10. Salida: el paralelogramo P .

Algoritmo 39. Función: Paralelogramo P a Paralelogramo Q .

Dados un paralelogramo P y una base BR , este algoritmo permite encontrar un paralelogramo equivalente Q con un par de lados opuestos cuya medida es BR .

1. Entradas: El primer paralelogramo P , la altura de P que es HP y BR la base del rectángulo objeto de la equicomposición del triángulo.
2. Primero se encuentra V_{HP} (figura 3.3) que es el vector perpendicular izquierdo a $\overline{P_3P_4}$ de norma HP :
 - a) Se obtiene V_{t1} que es la perpendicular izquierda a $P_4 - P_3$ (algoritmo 2).
 - b) Se obtiene V_{HP} que tiene norma HP y dirección V_{t1} (algoritmo 4).
3. Luego, se encuentra el vector V_{BRP} :
 - a) $V_{t2} = P_3 - P_4$.
 - b) Se obtiene NBR_p que es la medida de la proyección de la base del rectángulo en la recta $\overleftrightarrow{P_3P_4}$, esto es, $NBR_p = \sqrt{BR^2 - HP^2}$
 - c) Luego, V_{BRP} se calcula tomando en cuenta que tiene la misma dirección que V_{t2} y norma NBR_p
4. Luego $V_{BR} = V_{HP} + V_{BRP}$ permitirá encontrar Q_1 y Q_2 , entonces, los vértices del paralelogramo Q serán:

$$Q_1 = P_4 + V_{BR}$$

$$Q_2 = P_3 + V_{BR}$$

$$Q_3 = P_3$$

$$Q_4 = P_4$$
5. Salida: el polígono Q .

Algoritmo 40. Procedimiento: Equicomponer paralelogramos.

Este algoritmo permite equicomponer dos paralelogramos dados.

1. Entradas: P y Q que son los paralelogramos a equicomponer, $ACorte$ que es un apuntador a Corte y ℓ una recta. Dados dos paralelogramos, como los del algoritmo anterior, parecería lógico que la recta que cortará al paralelogramo P para llevar a cabo la equicomposición con Q es Q_1Q_4 pero esto no es así en la equicomposición de Q en el rectángulo, por lo cual es necesario especificar que recta va a llevar a cabo los procesos de corte.
2. Siempre y cuando haya porciones del paralelogramo P a la izquierda de ℓ (figura 3.3) llevar a cabo lo siguiente:
 - a) Cortar la porción de P a la izquierda de ℓ .
 - b) Trasladar todas las porciones de P que estén a la izquierda de ℓ con vector de traslación $\overline{Q_4Q_3}$.

Algoritmo 41. Función: Paralelogramo a Rectángulo.

Dado un paralelogramo con base común con un rectángulo obtener los demás vértices del rectángulo.

1. Entradas: El paralelogramo Q y la altura HR del rectángulo que se va a obtener.
2. Se obtiene el rectángulo R (el objetivo de la equicomposición de triángulo a rectángulo) proyectando los vértices 3 y 2, esto es, obteniendo un vector V_{HR} de norma HR y con la dirección de la perpendicular izquierda a $Q_3 - Q_2$
3. Entonces, los vértices del rectángulo R serán:

$$R_1 = Q_2 + V_{HR}$$

$$R_2 = Q_2$$

$$R_3 = Q_3$$

$$R_4 = Q_3 + V_{HR}$$
4. Salida: el polígono $R = R_1R_2R_3R_4$.

Algoritmo 42. Función: Triángulo a Rectángulo.

Dado un triángulo obtener el rectángulo equivalente dada la medida de uno de los lados BR del rectángulo.

1. Entradas: T un triángulo, BR la medida conocida de un par de lados opuestos del rectángulo, $Corte$ una variable de tipo TCorte.
2. Iniciar $Corte$ con el parámetro P igual a T .
3. A partir de T y $Corte$ encontrar el paralelogramo P (algoritmo 38).
4. Calcular el área de T y guardarla en la variable $Area$.
5. Encontrar la base BP del paralelogramo P que es la distancia entre P_1 y P_2 .
6. Encontrar la altura del paralelogramo de la siguiente forma: $HP = Area/BP$.
7. Encontrar la altura del rectángulo de la siguiente forma: $HR = Area/BR$.
8. Encontrar los vértices del paralelogramo Q dados los vértices del paralelogramo P y los valores de HP y BR (algoritmo 39).
9. Equicomponer el paralelogramo P en el paralelogramo Q tomando en cuenta $Corte$ (algoritmo 40).
10. Encontrar los vértices del rectángulo R dados los vértices del polígono Q y los valores de BR y HR (algoritmo 41).
11. Equicomponer el paralelogramo Q en el rectángulo R tomando en cuenta $Corte$ (algoritmo 40).
12. Salida: El rectángulo R .

3.5. Algoritmos finales.

A fin de no perder de vista los algoritmos principales se muestran en esta última sección los algoritmos para cargar el polígono, para equicomponer en polígono en el cuadrado, para graficar los cortes del polígono y el cuadrado, y el algoritmo principal del programa.

El algoritmo para cargar el polígono permitirá obtener los valores iniciales de los vértices del polígono original.

Se describirá también el algoritmo equicomponer polígono que será la rutina más importante del programa. Este algoritmo usará los procedimientos necesarios para dividir el polígono en triángulos, equicomponer cada triángulo en un rectángulos y todos los rectángulo formará el cuadrado buscado.

En el algoritmo graficar se desarrollará un algoritmo para graficar cada hoja del árbol de cortes de cada triángulo, en el se usará una función para graficar polígono que no se desarrollará en este discurso pues depende mucho del lenguaje donde se apliquen estos algoritmos.

Finalmente se describirá el programa principal que son los pasos generales para llevar a cabo nuestro propósito.

Algoritmo 43. Procedimiento: Cargar polígono.

Este procedimiento cargará las coordenadas rectangulares de los vértices del polígono, ya sea mediante un archivo, el teclado o algún otro medio. Por lo elemental de esta rutina y por depender de las funciones propias de cada lenguaje no se describe a detalle este algoritmo.

Algoritmo 44. Procedimiento: Equicomponer polígono.

Corta el polígono principal en triángulos y cada triángulo se transforma en un rectángulo y con todos estos rectángulos se forma un cuadrado.

1. Entradas: *Poli*, el polígono principal que es un arreglo de puntos; *ConjCortes*, que es un arreglo de cortes.
2. Se ordenan todos los índices de los vértices a la izquierda en el polígono *Poli* (algoritmo 15).
3. Se corta *Poli* en triángulos y éstos se guardan en un arreglo llamado *Triangulo* (algoritmo 27).
4. Se guarda el valor del área del polígono en la variable *AreaTot*.
5. La medida de la base de todos los rectángulos que formarán el cuadrado se llamará *BR* y será la raíz cuadrada de *AreaTot*.
6. Para cada triángulo del arreglo *Triangulo*:
 - a) Ordenar índices del triángulo actual (algoritmo 16).
 - b) Equicomponer cada *Triangulo_i* en un rectángulo. Durante este proceso se forma el árbol de cortes de esta equicomposición, donde la posición final de cada corte esta almacenada en su miembro *.Fin*, y finalmente se obtiene el polígono *rectangulo_i*, que será un miembro del arreglo que tendrá los rectángulos resultado de cada equicomposición de cada triángulo (algoritmo 42).
7. Aplicar el procedimiento regresión a cada corte y dentro de cada corte a su miembro *.Fin* para obtener los valores de *.Ini*, usando para este propósito la cadena de transformaciones que ha tenido cada corte durante los procesos de equicomposición. Esta cadena de transformaciones está almacenada en el miembro *.Mouv* de cada corte (algoritmo 37).
8. Se hace $HR = 0$.

9. Se define donde va estar la esquina del cuadrado objeto de todo el proceso y se almacena su posición en la variable *Esquina*.
10. Para cada *triangulo_i* (y por tanto para cada hoja o corte de cada árbol de cortes):
 - a) $Esquina = Esquina + (0, HR)$
 - b) Se trasladan los cortes (esto es los miembros *.Fin* de cada corte) con vector de traslación definido por la diferencia $Esquina - Rectangulo_{i,j}$, donde *i* es el índice del arreglo de rectángulos y *j* es el índice del vértice del *Rectangulo_i* (algoritmo 32).
 - c) Tomándose como eje de rotación el vértice *Rectangulo_{i,j}* se encuentra el ángulo θ , con respecto al eje x positivo, de la base del rectángulo adyacente a este vértice.
 - d) Se endereza, con ángulo de rotación θ y eje de rotación *Rectangulo_{i,j}*, todo el árbol de cortes *ConjCortes_i* de tal manera que la base de *Rectangulo_i* quedara paralela al eje x (algoritmo 35).
 - e) Se calcula la altura *HR* del rectángulo *Rectangulo_i* dividiendo el área de *Triangulo_i* entre la base *BR* del rectángulo *Rectangulo_i*.

Algoritmo 45. Procedimiento: Graficar.

El objetivo de este algoritmo es graficar cada hoja del árbol de cortes de cada triángulo.

1. Entrada: *Corte* que es de tipo TCorte.
2. Si $Corte.Izq \neq \mathbf{Nulo}$ y $Corte.Der \neq \mathbf{Nulo}$ se aplica este mismo algoritmo a los miembros izquierdo y derecho esto es a *Corte.Izq* y *Corte.Der*.
3. Si no:
 - a) Graficar el polígono *Corte.Ini*

b) Graficar el polígono *Corte.Fin*

Algoritmo 46. Procedimiento: Rutina principal.

Mostrará los pasos principales para llevar a cabo el objetivo de esta disertación.

1. Se declara *Poli* que es un arreglo de puntos.
2. Se cargan los valores en coordenadas rectangulares de los vértices del polígono *Poli*, se supondrá en este algoritmo que son n puntos (algoritmo 43).
3. Se crea el arreglo de cortes *ConjCortes* de $n - 2$ dimensiones, pues en el se guardarán los cortes de los triángulos que a su vez forman el polígono.
4. Se equicompone el polígono principal en un cuadrado (algoritmo 44).
5. Se grafica el polígono original, el cuadrado y los cortes (algoritmo 45).

Capítulo 4

Conclusiones

Los teoremas, como los utilizados aquí, generalmente permiten decidir si es posible o no resolver alguna conjetura, incluso, algunas veces, nos dan soluciones a ciertos problemas pero, en casos específicos, no nos dicen el cómo resolverlos. Tal fue la situación de la equicomposición de polígonos: la teoría de Howard Eves [2] nos decía que un polígono simple de n lados puede dividirse en $n - 2$ triángulos, sin embargo, al aplicar el algoritmo mediante un computadora a un caso como la siguiente figura (figura 4.1):

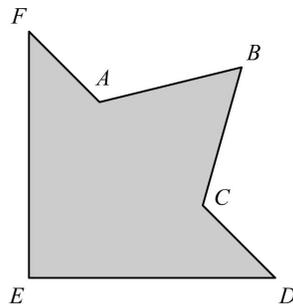


Figura 4.1: Un exágono que se compone de dos triángulos.

la computadora marcaba un error. Revisando cuidadosamente el algoritmo sucedía que al cortar el triángulo ABC quedaba el polígono ACDEF que en realidad es el triángulo DEF. Este error permitió mejorar el algoritmo al

quitar los vértices que quedan alineados en algún lado del polígono durante la ejecución de dicho algoritmo. De aquí que, del teorema 14 del apéndice B, se tendría el corolario “Al llevarse a cabo el proceso del teorema 14 del apéndice B sobre un polígono de n vértices se obtienen a lo más $n - 2$ triángulos”. De esta forma, queda claro que la práctica permite encontrar casos que la teoría no prevé.

Se logró el objetivo de escribir un programa de computación que transforme un polígono en un cuadrado por equicomposición, y justificar sus algoritmos con base en el rigor matemático. Además, se realizó un trabajo exhaustivo en la teoría formal y en la práctica de desarrollo de programas. En la teoría por que se seleccionaron los mejores teoremas en cuanto a su formalidad y sencillez. En la práctica por que se buscaron los algoritmos más sencillos, eficientes y óptimos.

En la teoría, se tenían los teoremas de “Los elementos” [4] con sus deficiencias (como es el axioma: “El todo es mayor que cualquiera de sus partes”), por otro lado se tenían los teoremas de otros autores como Howard Eves [2] y como V. G. Boltianski [3] cuyas ideas básicas eran buenas, pero tenían algunas restricciones en sus demostraciones. Por otro lado estaba David Hilbert con su “Fundamentos de la geometría” donde había el rigor que se necesitaba.

A pesar de las restricciones de Howard Eves [2] y V. G. Boltianski [3] sus ideas, en la práctica fueron muy útiles para desarrollar varios de los algoritmos. Otros tantos algoritmos se fueron perfeccionando sobre la marcha hasta encontrar los mejores.

Aún así, con seguridad, es posible mejorar el programa desarrollado en el presente trabajo de tesis, también se puede hacer un desarrollo teórico más general y más fuerte, pero el objetivo de este trabajo ya fue alcanzado.

Trabajos subsecuentes.

Este trabajo se puede ampliar a polígonos con una topología distinta a los polígonos simples, más aún, se puede extender a poliedros, aunque de entrada se sabe que cualquier poliedro no se puede equicomponer a un cubo mediante un número finito de cortes [3].

Apéndice A

Postulados y teoremas básicos de Hilbert para la geometría euclidiana plana.

A.1. Los elementos de la geometría y los cinco grupos de axiomas.

Definición 1. Considere tres distintos conjuntos de objetos, los objetos del primero son llamados puntos y son denotados por A, B, C, \dots ; los objetos del segundo conjunto son llamados líneas y son denotados por a, b, c, \dots ; los objetos del tercer conjunto son llamados planos y son denotados por $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Los puntos se llaman también elementos de la geometría lineal; y los puntos y las líneas se llaman elementos de la geometría plana; y los puntos, las líneas y los planos son los elementos de la geometría del espacio o los elementos del espacio.

Los puntos, líneas y planos se considera que tienen ciertas relaciones mutuas y estas relaciones se denotan por palabras como “yacer”, “entre”, “congruente”. La descripción precisa y completa (matemáticamente) de es-

tas relaciones sigue de los axiomas de la geometría.

Los axiomas de la geometría pueden ser divididos en cinco grupos. Cada uno de estos grupos representa ciertos hechos básicos de nuestra intuición. Estos grupos de axiomas son llamados como sigue:

- I, 1-8 Axiomas de incidencia,
- II, 1-4 Axiomas de orden,
- III, 1-5 Axiomas de congruencia,
- IV El axioma de las paralelas,
- V, 1-2 Axiomas de continuidad.

A.2. Axiomas del grupo I: Axiomas de incidencia.

Los axiomas de este grupo establecen relaciones de incidencia entre los objetos antes mencionados (puntos, líneas y planos) y son los siguientes:

I-1. Para cualesquiera dos puntos A, B existe una línea a que contiene cada uno de los puntos A, B dados.

I-2. Para cualesquiera dos puntos A, B no existe más de una línea que contenga cada uno de los puntos A, B .

Dos, tres, cuatro, ... puntos, o líneas, o planos se entiende siempre que son distintos puntos, o líneas o planos.

Se usarán también otras expresiones en lugar de “contiene” como: a pasa a través de A y a través de B , a une A con B , A yace sobre a , A es un punto de a , existe un punto A sobre a , etc. Si A yace tanto en la línea a como en la línea b , se usará la expresión: “Las líneas a y b se intersecan en A ”, “tienen en común el punto A ”, etc.

I-3. Existen al menos dos puntos en una línea. Existen al menos tres puntos que no yacen sobre una línea.

I-4. Para cualesquiera tres puntos A, B, C que no yacen sobre la misma línea existe un plano α que contiene cada uno de los puntos A, B, C . Cada plano contiene al menos un punto.

I-5. Para cualesquiera 3 puntos A , B y C que no estén sobre una misma recta no existe más de un plano que contenga a cada uno de los tres puntos A , B y C .

I-6. Si dos puntos A y B de una línea a están en un plano α entonces cada punto de a está en α .

I-7. Si dos planos a y b tienen un punto A en común entonces tienen al menos otro punto B en común.

I-8. Existen al menos cuatro puntos que no están en un plano.

Teorema 1. *Dos líneas en un plano o tienen un punto en común o no tienen ninguno.*

Teorema 2. *Para una línea y un punto (que no está en ella), como para dos líneas con un punto en común, existe un solo plano.*

A.3. Axiomas del grupo II: Axiomas de orden.

Los axiomas de este grupo definen el concepto de “entre” y, por tanto, el significado del orden de puntos en una línea, en un plano, y en un espacio.

Definición 2. Los puntos de una línea están en una cierta relación unos con otros y, para su descripción, se usará la palabra “entre”.

II-1. Si un punto B yace entre un punto A y un punto C , entonces, los puntos A , B , C , son tres puntos distintos de una línea y, además, B yace entre C y A .

II-2. Para dos puntos A y C siempre existe, al menos, un punto B en la línea \overleftrightarrow{AC} tal que C yace entre A y B .

II-3. De cualesquiera tres puntos sobre una línea sólo existe uno que yace entre los otros dos.

Definición 3. Por el segmento \overline{AB} se indican los puntos A y B y los que están entre A y B . Los puntos A y B se llaman puntos extremos del segmento. Un punto C se dice que está sobre el segmento \overline{AB} si es A o B o

algún punto entre A y B . Un punto está dentro, o en el interior, de \overline{AB} si está entre A y B . Un punto está fuera de \overline{AB} si no está dentro de \overline{AB} , ni es A ni es B .

Definición 4. Sean A , B y C tres puntos que no están sobre la misma recta. Entonces por el triángulo ABC se indican los tres segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} . Los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} se llaman lados del triángulo, y los puntos A , B , C , vértices del mismo.

II-4. (Postulado de Pasch). Una recta que corte a un lado del triángulo pero que no pase por ninguno de sus vértices deberá cortar también al otro lado del triángulo.

A.4. Consecuencias de los axiomas de incidencia y orden.

Teorema 3. *Para dos puntos A y C siempre existe al menos un punto D sobre la línea AC que está entre A y C .*

Teorema 4. *De cualesquiera 3 puntos A , B y C en una línea siempre existe uno que está entre los otros dos.*

Teorema 5. *Dados 4 puntos A , B , C , y D sobre una línea siempre es posible nombrarlos de tal forma que B esté entre A y C y también entre A y D , y además que C esté entre A y D y también entre B y D .*

Teorema 6. *Dados un número finito de puntos de una línea siempre es posible nombrarlos A_1 , A_2 , ..., A_{k-1} , A_k de tal forma que el punto A_2 , está entre A_1 , y A_3 , ..., A_{k-1} , A_k ; el punto A_3 está entre A_1 , A_2 y A_4 , ..., A_{k-1} , A_k ; etc.*

Teorema 7. *Entre cualesquiera dos puntos sobre una línea existe un número infinito de puntos.*

Teorema 8. *Cada línea ℓ que yace en un plano α separa los puntos del plano α en dos regiones con las siguientes propiedades: cada punto A de una región determina con cada punto B de la otra región un segmento \overline{AB} sobre el cual yace un punto de la recta ℓ . Dos puntos A y A' de la misma región determinan un segmento $\overline{AA'}$ que no contiene ningún punto de ℓ .*

Definición 5. Del teorema anterior se dice que los puntos A, A' están en el mismo lado de la línea ℓ y los puntos A y B se dicen que están en diferentes lados o en lados opuestos de la línea ℓ .

Definición 6. Sean A, A', O y B cuatro puntos de la línea a de tal forma que O está entre A y B pero no entre A y A' . Los puntos A y A' se dice que están en el mismo lado del punto O , y los puntos A y B se dice que están sobre diferentes lados o en lados opuestos de O . La totalidad de puntos que están de un mismo lado de O se llama un rayo emanando de O . Así cada punto de una línea la parte en dos rayos.

Definición 7. Un conjunto de segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \dots, \overline{KL}$ se llama segmento poligonal que conecta el punto A con L . Tal segmento poligonal será denotado brevemente por $ABCD \dots KL$. Tanto los puntos dentro de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \dots, \overline{KL}$ como los puntos A, B, C, \dots, K, L son, de forma colectiva, llamados los puntos del segmento poligonal. Si todos los puntos de A, B, C, \dots, L se encuentran en un plano y el punto A coincide con L , entonces, el segmento poligonal se llama polígono y es denotado como polígono $ABC \dots K$. Los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \dots, \overline{KA}$ se llaman lados del polígono. Los puntos A, B, C, \dots, K se llaman vértices del polígono. Polígonos de 3, 4, 5, \dots, n vértices se llaman triángulos, cuadriláteros, pentágonos, \dots n-ágonos.

Definición 8. Si los vértices de un polígono son todos distintos, ninguno de ellos está dentro de algún lado y cualesquiera dos lados no adyacentes no tienen puntos en común, el polígono se llama simple.

Teorema 9. *Cada polígono simple que yace en un plano α separa los puntos del plano α que no estén en el segmento poligonal del polígono en dos regiones, la interior y la exterior, con las siguientes propiedades: Si A es un punto del interior (o punto interior) y B es un punto del exterior (o punto exterior) entonces cada segmento poligonal que yace en α y une A con B , tiene al menos un punto en común con el polígono. Por otro lado si A y A' son dos puntos del interior, B y B' son dos puntos del exterior, entonces, existen segmentos poligonales en α que unen A con A' y otros que unen B con B' que no tienen ningún punto en común con el polígono. A manera de diferenciar las dos regiones, hay que enunciar que existen líneas que yacen enteramente en el exterior del polígono. Sin embargo no existen líneas que estén enteramente en el interior del polígono.*

Teorema 10. *Cada plano α separa los otros puntos del espacio en dos regiones con las siguientes propiedades: Cada punto A de una región determina con cada punto B de la otra región un segmento \overline{AB} en el cual yace un punto de α ; mientras que, dos puntos A y A' de la misma región determinan un segmento $\overline{AA'}$ que no contiene puntos de α .*

Definición 9. De acuerdo al teorema 10 se dice que los puntos A y A' yacen en el espacio en el mismo lado del plano α y los puntos A y B yacen en el espacio en diferentes lados del plano α .

A.5. Grupo III: Postulados de congruencia.

Los axiomas de este grupo definen el concepto de congruencia y, por lo tanto, el de desplazamiento.

Definición 10. Los segmentos se encuentran en una cierta relación unos con otros y para su descripción se usan las palabras “congruente” o “igual”.

III-1. Si A y B son dos puntos sobre una línea a , y A' es un punto en la misma o en otra línea a' , entonces, siempre es posible encontrar un punto

B' sobre uno de los rayos en a' que emanan de A' tal que el segmento \overline{AB} es congruente o igual al segmento $\overline{A'B'}$. En símbolos:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

Este axioma requiere la posibilidad de la construcción de segmentos. Su unicidad será probada más tarde.

III-2. Si un segmento $\overline{A'B'}$ y un segmento $\overline{A''B''}$ son congruentes al segmento \overline{AB} , entonces, el segmento $\overline{A'B'}$ es congruente al segmento $\overline{A''B''}$.

Desde el momento en que fueron introducidos en la geometría los conceptos de congruencia e igualdad a través de estos axiomas, no quiere decir que es obvio que cada segmento es congruente consigo mismo. Sin embargo este hecho es una consecuencia de los dos primeros axiomas de congruencia si se toma un segmento \overline{AB} que es construido sobre un rayo de tal manera que es congruente, supóngase, con $\overline{A'B'}$ y si se aplica el axioma III, 2 a las congruencias $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

Sobre la base de esto la simetría y la transitividad de segmentos congruentes puede ser establecida por una aplicación del axioma III, 2.

III-3. Sobre la línea a sean \overline{AB} y \overline{BC} dos segmentos los cuales, a excepción de B , no tienen puntos en común. Sobre la misma o sobre otra línea sean $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ dos segmentos que no tienen puntos en común, excepto en B' . Si

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \text{ y } \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

entonces,

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$

Este axioma expresa la necesidad de aditividad de segmentos.

Definición 11. Sea α un plano y \overrightarrow{h} , \overrightarrow{k} dos rayos que emanan de O tal que \overrightarrow{h} , \overrightarrow{k} yacen sobre líneas distintas. El par de rayos \overrightarrow{h} , \overrightarrow{k} se llama ángulo y es denotado por $\angle(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{k})$ o por $\angle(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{h})$.

Ángulos degenerados y mayores al llano están excluidos de esta definición.

Sea el rayo \overrightarrow{h} que yace en la recta \overleftrightarrow{h} y el rayo \overrightarrow{k} sobre la recta \overleftrightarrow{k} . Los rayos \overrightarrow{h} y \overrightarrow{k} junto con el vértice O parten los puntos del plano en dos regiones. Todos los puntos que yacen sobre el mismo lado de \overleftrightarrow{k} donde se encuentran los puntos de \overrightarrow{h} y que también están del mismo lado de \overleftrightarrow{h} donde se encuentran los puntos de \overrightarrow{k} , se dice que yacen en el interior del ángulo $\angle(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{k})$. Todos los demás puntos se dice que están en el exterior o fuera de este ángulo.

Es fácil ver por los axiomas I y II que ambas regiones contienen puntos y que un segmento que conecta dos puntos en el interior del ángulo yace enteramente en el interior. Los siguientes hechos son fáciles de probar: Si un punto H yace en \overrightarrow{h} y un punto K yace en \overrightarrow{k} entonces el segmento \overline{HK} yace completamente en el interior. Un rayo emanando de O yace o completamente dentro o completamente fuera. Un rayo que yace en el interior interseca el segmento \overline{HK} . Si A es un punto de una región y B es un punto de la otra región, entonces todo segmento poligonal que conecta A con B , o pasa por O , o tiene al menos un punto en común con \overleftrightarrow{h} o con \overleftrightarrow{k} . Sin embargo, si A y A' son puntos de la misma región entonces siempre existe un segmento poligonal que conecta A con A' , que no pasa por O ni a través de algún punto de los rayos \overrightarrow{h} o \overrightarrow{k} .

Definición 12. Si ABC es un triángulo, entonces, los tres ángulos $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ se llaman **ángulos del triángulo**. El ángulo $\angle BAC$ se dice que está comprendido por los lados \overline{AB} y \overline{AC} del triángulo.

Definición 13. Los ángulos establecen cierta relación unos con otros y para su descripción se usan las palabras “congruente” e “igual”.

III-4. Si $\angle BAC$ es un ángulo cuyos lados no están sobre la misma recta, y si A' y B' son dos puntos distintos, entonces, hay dos y sólo dos rayos distintos, $\overrightarrow{A'C'}$ y $\overrightarrow{A'C''}$, tales que el ángulo $\angle B'A'C'$ es congruente al

$\angle BAC$ y el ángulo $\angle B'A'C''$ es congruente al $\angle BAC$; además, si D' es un punto del rayo $\overrightarrow{A'C'}$ y D'' es un punto del rayo $\overrightarrow{A'C''}$, entonces el segmento $\overline{D'D''}$ corta a la recta determinada por A' y B' .

Simbólicamente

$$\angle BAC \cong \angle B'A'C' \quad \text{y} \quad \angle BAC \cong \angle B'A'C''$$

Cada ángulo es congruente consigo mismo, esto es:

$$\angle BAC \cong \angle BAC$$

Uno siempre dice brevemente que cada ángulo en un plano dado puede ser construido sobre un lado de un rayo dado de una manera única.

Definición 14. Un ángulo con un vértice B sobre uno de cuyos lados yace el punto A y sobre su otro lado yace un punto C , será denotado por $\angle ABC$ o brevemente $\angle B$. Usualmente los ángulos serán denotados por letras griegas minúsculas.

III-5. Si para dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se cumplen las congruencias:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \angle BAC \cong \angle B'A'C'$$

Entonces la congruencia:

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$$

se cumple.

Bajo las hipótesis del anterior axioma sigue, por un cambio de notación, que se cumple también la congruencia:

$$\angle ACB \cong \angle A'C'B'$$

La unicidad de la construcción de segmentos sigue de la unicidad de la construcción de ángulos con la ayuda del axioma III, 5.

Suponga que el segmento \overline{AB} es construido en dos formas sobre un rayo emanando de A' a B' y a B'' . Elijase un punto C' que no esté en la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$, entonces, se satisfacen las congruencias:

$$\overline{A'B'} \cong \overline{A'B''}, \quad \overline{A'C'} \cong \overline{A'C'} \quad \text{y} \quad \angle B'A'C' \cong \angle B''A'C'$$

y así por el axioma III, 5:

$$\angle A'C'B' \cong \angle A'C'B''$$

en contradicción a la unicidad de la construcción de ángulos de acuerdo al axioma III, 4.

A.6. Consecuencias de los axiomas de congruencia.

Definición 15. Dos ángulos que tienen un vértice y un lado en común y cuyos lados separados forman una recta se llaman ángulos suplementarios. Dos ángulos con un vértice en común cuyos lados forman dos líneas se llaman ángulos verticales. Un ángulo que es congruente a uno de sus ángulos suplementarios se llama ángulo recto.

Teorema 11. *En un triángulo los ángulos opuestos a dos lados congruentes son congruentes.*

Definición 16. Se dice que un triángulo ABC es congruente a un triángulo $A'B'C'$ si:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

$$\angle A \cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B', \quad \angle C \cong \angle C'$$

se cumplen.

Teorema 12. *Un triángulo ABC es congruente a un triángulo $A'B'C'$ si se cumple:*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \angle A \cong \angle A'$$

Teorema 13. *Un triángulo ABC es congruente a un triángulo $A'B'C'$ si se cumple:*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \angle A \cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B'$$

Teorema 14. Si un ángulo $\angle ABC$ es congruente a otro ángulo $\angle A'B'C'$ entonces su ángulo suplementario $\angle CBD$ es congruente al ángulo suplementario $\angle C'B'D'$ del otro ángulo.

Teorema 15. Sean $\vec{h}, \vec{k}, \vec{l}$ y además $\vec{h'}, \vec{k'}, \vec{l'}$ rayos emanando de O y O' en los planos α y α' respectivamente. \vec{h}, \vec{k} y $\vec{h'}, \vec{k'}$ se encuentran simultáneamente en el mismo lado o en diferentes lados de \vec{l} y $\vec{l'}$ respectivamente si se satisfacen:

$$\angle(\vec{h}, \vec{l}) \cong \angle(\vec{h'}, \vec{l'}), \quad \angle(\vec{k}, \vec{l}) \cong \angle(\vec{k'}, \vec{l'})$$

entonces se cumple:

$$\angle(\vec{h}, \vec{k}) \cong \angle(\vec{h'}, \vec{k'})$$

Teorema 16. Sea el ángulo $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ en el plano α congruente al ángulo $\angle(\vec{h'}, \vec{k'})$ en el plano α' y sea \vec{l} un rayo en el interior del ángulo $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ que emana del vértice de éste. Entonces siempre existe un rayo $\vec{l'}$ en el interior del ángulo $\angle(\vec{h'}, \vec{k'})$ que emana del vértice de éste y de tal forma que:

$$\angle(\vec{h}, \vec{l}) \cong \angle(\vec{h'}, \vec{l'}) \quad \text{y} \quad \angle(\vec{k}, \vec{l}) \cong \angle(\vec{k'}, \vec{l'})$$

A fin de obtener el tercer teorema de congruencia y la propiedad de simetría de la congruencia de ángulos, el siguiente se deduce ahora del teorema 15:

Teorema 17. Si dos puntos Z_1 y Z_2 están en diferentes lados de una línea \overleftrightarrow{XY} y si las congruencias $\overline{XZ_1} \cong \overline{XZ_2}$ y $\overline{YZ_1} \cong \overline{YZ_2}$ se cumplen, entonces:

$$\angle XYZ_1 \cong \angle XYZ_2$$

Teorema 18. Si en dos triángulos ABC y $A'B'C'$ cada par de lados correspondientes son congruentes, los triángulos son congruentes.

Teorema 19. La congruencia de ángulos es transitiva.

La propiedad de simetría de la congruencia de ángulos sigue del teorema anterior justo como se hace para los segmentos del Axioma III, 2; esto es,

si $\angle a \cong \angle b$ entonces $\angle a$ y $\angle b$ son congruentes uno con otro. En particular los teoremas 12 al 14 pueden ser expresados ahora en forma simétrica.

La comparación cuantitativa de ángulos puede establecerse ahora.

Teorema 20. *Se tienen dos ángulos $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ y $\angle(\vec{h}', \vec{l}')$ dados. Si la construcción de $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ sobre \vec{h}' en el lado de \vec{l}' yace un rayo interior \vec{k}' entonces la construcción de $\angle(\vec{h}', \vec{l}')$ sobre \vec{h} en el lado de \vec{k} yace un rayo exterior \vec{l} , y viceversa.*

Si en la construcción de $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ descrita en el teorema yace un rayo interior \vec{k}' en $\angle(\vec{h}', \vec{l}')$ se dice que $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ es menor que $\angle(\vec{h}', \vec{l}')$; simbólicamente $\angle(\vec{h}, \vec{k}) < \angle(\vec{h}', \vec{l}')$. Si yace un rayo exterior se dice que $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ es mayor que $\angle(\vec{h}', \vec{l}')$; simbólicamente $\angle(\vec{h}, \vec{k}) > \angle(\vec{h}', \vec{l}')$.

Se cumple para dos ángulos α y β uno y sólo uno de los tres casos:

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \alpha > \beta$$

De aquí que la comparación cuantitativa de ángulos es transitiva:

$$1. \alpha > \beta \quad y \quad \beta > \gamma$$

$$2. \alpha > \beta \quad y \quad \beta = \gamma$$

$$3. \alpha = \beta \quad y \quad \beta > \gamma$$

sigue que $\alpha > \gamma$

La comparación cuantitativa de segmentos con las correspondientes propiedades sigue inmediatamente de los axiomas II y III, 1 - 3 como también de la unicidad de la construcción de segmentos (ver p. 13).

Teorema 21. *Todos los ángulos rectos son congruentes.*

Definición 17. Un ángulo que es mayor que su ángulo suplementario se llama ángulo obtuso. Un ángulo que es más pequeño que su ángulo suplementario se llama ángulo agudo.

Definición 18. Los ángulos $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle CAB$ se llaman ángulos interiores del triángulo. Sus ángulos suplementarios se llaman ángulos exteriores del triángulo.

Teorema 22. *Teorema del ángulo exterior. El ángulo exterior de un triángulo es más grande que cualquier ángulo interior no adyacente a él.*

Corolarios importantes de este teorema son los siguientes:

Teorema 23. *En todo triángulo al ángulo mayor se opone el lado mayor.*

Teorema 24. *Un triángulo con dos ángulos iguales es isósceles.*

Éste recíproco del teorema 11 es una consecuencia inmediata del teorema 23.

Más aun, del teorema 22 sigue una extensión del segundo teorema de congruencia para triángulos.

Teorema 25. *Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si las congruencias:*

$$\angle C \cong \angle C', \quad \angle A \cong \angle A', \quad \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

se cumplen.

Teorema 26. *Todo segmento puede ser bisecado.*

Definición 19. Si A, B, C, \dots, L y A', B', C', \dots, L' son dos sucesiones de puntos sobre a y a' , respectivamente, tal que los segmentos \overline{AB} y $\overline{A'B'}$, \overline{AC} y $\overline{A'C'}$, \overline{BC} y $\overline{B'C'}$, \dots , \overline{KL} y $\overline{K'L'}$ son congruentes respectivamente, se dice que las dos sucesiones son congruentes. A y A' , B y B' , \dots , L y L' se dice que son los puntos correspondientes de sucesiones congruentes de puntos.

Teorema 27. *Si la primera de dos sucesiones congruentes de puntos A, B, \dots, K, L y A', B', \dots, K', L' están ordenados de tal manera que B yace entre A y C , D, \dots, K, L ; C yace entre A, B , y D, E, \dots, K, L ; etc.; entonces, los puntos A', B', \dots, K', L' están ordenados de la misma forma, esto es, B' yace entre A' y C' , D', \dots, K', L' ; C' yace entre A', B' , y D', E', \dots, K', L' ; etc.*

Definición 20. Un número finito de puntos se llama figura. Si todos los puntos de una figura están en un solo plano se le llama figura plana.

Definición 21. Se dice que dos figuras son congruentes si sus puntos pueden ser ordenados de tal forma que cada segmento y cada ángulo, en las dos figuras, son congruentes de manera correspondiente.

Es evidente de los teoremas 14 y 27 que las figuras congruentes tienen las siguientes propiedades: si tres puntos de una figura son colineales entonces los puntos correspondientes en una figura congruente son también colineales. El orden de puntos en planos correspondientes con respecto a líneas correspondientes es el mismo en figuras congruentes. Lo mismo se cumple para sucesiones de puntos correspondientes en líneas correspondientes.

El teorema de congruencia más general para plano y el espacio se expresa como sigue:

Teorema 28. *Si (A, B, \dots, L) y (A', B', \dots, L') son figuras congruentes y P es un punto en el plano de la primer figura, entonces es posible encontrar un punto P' en el plano de la segunda figura de tal forma que (A, B, \dots, L, P) y (A', B', \dots, L', P') son congruentes. Si la figura (A, B, \dots, L) contiene por lo menos tres puntos no colineales entonces P' es único.*

Teorema 29. *Si (A, B, C, \dots, L) y (A', B', C', \dots, L') son figuras congruentes y P es cualquier punto, entonces, siempre es posible encontrar un punto P' de tal manera que las figuras (A, B, C, \dots, L, P) y $(A', B', C', \dots, L', P')$ son congruentes. Si la figura (A, B, C, \dots, L) contiene al menos cuatro puntos no coplanares, entonces, la construcción de P' es posible sólo de una forma.*

El teorema 29 expresa que todas las propiedades de congruencia así como todas las propiedades de desplazamiento en el espacio son consecuencia de los cinco axiomas de congruencia de la línea y el plano formulados anteriormente.

A.7. Grupo IV: El axioma de las paralelas

IV. (Postulado de Playfair). Por un punto dado A que no está en una recta \overleftrightarrow{m} pasa a lo más una recta que no corta a \overleftrightarrow{m} .

Teorema 30. *Si dos paralelas son intersecadas por una tercera línea, entonces, los ángulos alternos y correspondientes son congruentes y recíprocamente, la congruencia de ángulos alternos y correspondientes implica que las líneas son paralelas.*

Teorema 31. *La suma de los ángulos de un triángulo suma dos rectos.*

Definición 22. Si M es un punto de un plano α , entonces la colección de todos los puntos A en α para los cuales los segmentos \overline{MA} son congruentes uno con otro se llama círculo. M se dice que es el centro del círculo.

A.8. Axiomas del grupo V: axiomas de continuidad

V-1. (Axioma de la medida o axioma arquimediano). Si \overline{AB} y \overline{CD} son cualesquiera segmentos, entonces, existe un número n de tal forma que n segmentos \overline{CD} contruidos contiguamente desde A , a lo largo del rayo \overrightarrow{AB} , pasaran más allá del punto B .

V-2. (Axioma del Completo) Los puntos de una línea recta constituyen un sistema de puntos tales que no puede asignarse ningún nuevo punto a la recta sin que se viole al menos uno de los postulados de los grupos I al III o el axioma V-1.

A.9. Definición de izquierda y derecha.

Definición 23. Una línea \overleftrightarrow{AB} parte los puntos del plano en dos que no yacen en ella en dos regiones de puntos. Una de estas regiones se dice yacer a la derecha del rayo \overrightarrow{AB} , emanando de A o del “segmento dirigido \overline{AB} ” y yacer a la izquierda del rayo \overrightarrow{BA} , emanando de B o del “segmento dirigido

\overrightarrow{BA} ". El otro se dice yacer a la izquierda del rayo \overrightarrow{AB} y a la derecha del rayo \overrightarrow{BA} . La misma región se dice yacer a la derecha de los segmentos dirigidos \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} si B y C yacen en el mismo rayo emanando de A (e inversamente). Una vez que la región derecha es definida para el rayo \overrightarrow{g} emanando de O , si un rayo \overrightarrow{h} emanando de O yace en esta región, entonces, con respecto a \overrightarrow{h} la región que contiene \overrightarrow{g} se dice yacer a la izquierda de \overrightarrow{h} . Es de esta forma que con un segmento dirigido \overrightarrow{AB} , los lados izquierdo y derecho en una geometría plana son determinados de manera única con respecto a cada rayo o en cada segmento dirigido.

Definición 24. Los puntos del interior de un triángulo yacen o a la izquierda o a la derecha de los lados \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{CA} . En el primer caso se dice que ABC tiene orientación positiva o que está orientado a la izquierda, en el segundo caso se dice que ABC tiene orientación negativa o que está orientado a la derecha.

Apéndice B

Teoremas de poligonales y polígonos.

B.1. Teoremas de poligonales.

Teorema 1. *Sea la poligonal $P = P_1P_2 \cdots P_n$ y la recta \overleftrightarrow{AB} , tal que, P_1 está de un lado de \overleftrightarrow{AB} y que P_n está del otro lado, entonces, P interseca a \overleftrightarrow{AB} en al menos un punto.*

La demostración se hace por inducción. El caso para una poligonal con dos vértices, o sea un segmento, se cumple por el teorema 8 del apéndice A. Supóngase que se cumple el teorema a demostrar para n vértices. Por otro lado sea la poligonal $P = P_1P_2 \cdots P_{n+1}$ con P_1 a la izquierda de la recta \overleftrightarrow{AB} y P_{n+1} a la derecha de esta. Tómese la poligonal $P_1P_2 \cdots P_n$; si P_n está a la derecha de \overleftrightarrow{AB} el teorema se cumple por ser el caso de n vértices; si P_n está a la izquierda de \overleftrightarrow{AB} el teorema se cumple pues el segmento $\overline{P_nP_{n+1}}$ cruza la recta \overleftrightarrow{AB} por el teorema 8 del apéndice A.

Teorema 2. *Sea la poligonal simple $P = P_1P_2 \cdots P_n$, tal que, P_2, P_3, \dots, P_{n-1} están a la izquierda de $\overleftrightarrow{P_1P_n}$, entonces, al menos un vértice de P_2, P_3, \dots, P_{n-1} está orientado a la derecha en la poligonal P .*

Para tres vértices, esto es, para la poligonal $P_1P_2P_3$ se cumple pues si P_2 esta a la izquierda de $\overleftarrow{P_1P_3}$, entonces, P_2 esta orientado a la derecha. Supóngase que la conjetura se verifica para n vértices y sea la poligonal $P' = P_1P_2 \cdots P_{n+1}$ para la cual hay que demostrar la conjetura. Tómesese las perpendiculares a la recta $\overleftarrow{P_1P_{n+1}}$ que pasan por cada uno de los puntos P_2, P_3, \dots, P_n y con intersecciones con esta recta en A_2, A_3, \dots, A_n , entonces, se tienen los segmentos $\overline{A_2P_2}, \overline{A_3P_3}, \dots, \overline{A_nP_n}$, entre estos, sea $\overline{A_jP_j}$ el menor de ellos y sea $\overleftarrow{XP_j}$ paralela a $\overleftarrow{P_1P_{n+1}}$ tomando X de tal forma que el lado izquierdo de $\overleftarrow{XP_j}$ está a la izquierda de $\overleftarrow{P_1P_{n+1}}$, entonces, demostraremos por contradicción que todos los puntos de la poligonal $A_2A_3 \cdots A_n$ están en $\overleftarrow{XP_j}$ o a la izquierda de esta recta. Supóngase que no sucede esto último, entonces, existe P_k , tal que, se encuentra entre las rectas $\overleftarrow{P_1P_{n+1}}$ y $\overleftarrow{XP_j}$, tómesese la perpendicular a $\overleftarrow{P_1P_{n+1}}$ que pasa por P_k y que deberá incidir en $\overleftarrow{XP_j}$ en algún punto Y , entonces, P_k deberá estar entre Y y Z el pie de la perpendicular en $\overleftarrow{P_1P_{n+1}}$ del segmento \overline{YZ} , luego, P_kZ es menor a \overline{YZ} . Por otro lado \overline{YZ} es congruente a $\overline{A_jP_j}$ por que A_jP_jYZ es un paralelogramo, entonces, $\overleftarrow{P_kZ}$ es menor a $\overline{A_jP_j}$ lo que es una contradicción.

Finalmente, sólo falta demostrar que si cortamos la poligonal P' con la recta $\overleftarrow{XP_j}$, el problema se reduce a poligonales de n o menos vértices. Hay dos posibilidades: que todos los vértices estén en $\overleftarrow{XP_j}$ o que al menos un vértice esté a la izquierda de $\overleftarrow{XP_j}$. Si sucede lo primero, quitando los vértices entre P_2 y P_n , todo se reduce al cuadrilátero $P_1P_2P_nP_{n+1}$. Para este caso tómesese el segmento $\overline{P_1P_2}$ y supóngase que P_2 esta orientado a la izquierda, entonces, P_n está a la izquierda de $\overline{P_1P_2}$ como P_2 está a la izquierda de $\overline{P_1P_{n+1}}$ en el triángulo $P_1P_{n+1}P_2$, entonces, P_{n+1} está a la izquierda de $\overline{P_2P_1}$, esto es, a la derecha de $\overline{P_1P_2}$, luego, P_n y P_{n+1} están en lados opuestos a $\overline{P_1P_2}$, entonces, $\overline{P_nP_{n+1}}$ interseca a la recta $\overleftarrow{P_1P_2}$ y más aun al segmento $\overline{P_1P_2}$ pues si intersecara a la recta anterior en otro punto, entonces, la intersecaría en un punto que no está en los puntos que se

encuentran entre las rectas $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ y $\overleftrightarrow{XP_j}$, que es donde están los interiores de los segmentos $\overline{P_nP_{n+1}}$ y $\overline{P_1P_2}$ lo cual sería una contradicción. Si sucede que al menos un vértice de la poligonal $P_2P_3 \cdots P_n$ esté a la izquierda de $\overleftrightarrow{XP_j}$ todo se reduce al caso cuando hay n vértices en la poligonal, pues al ser P_j cualquiera de los vértices P_2, P_3, \dots, P_n se tienen a lo más $n - 2$ vértices a la izquierda de $\overleftrightarrow{XP_j}$, así que, el teorema queda demostrado.

B.2. Teoremas de polígonos convexos.

Definición 1. Un polígono simple se llama convexo si para todo lado del polígono se cumple que la recta ℓ que contiene al lado determina un semiplano que contiene a los demás vértices del polígono.

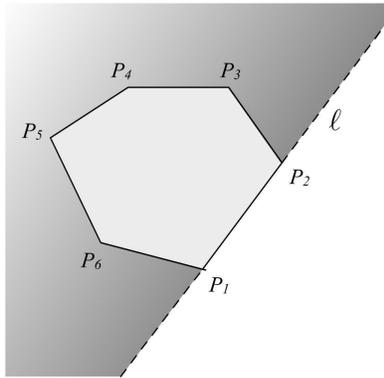


Figura B.1: Un polígono convexo.

Teorema 3. *Todo triángulo es convexo. Este teorema se deduce inmediatamente de la definición de polígono convexo.*

Teorema 4. *Sea el polígono convexo $P = P_oP_1 \cdots P_n$, entonces, de un lado de la recta $\overleftrightarrow{P_1P_n}$ se tiene al vértice P_o y del otro lado (incluyendo $\overline{P_1P_n}$), el polígono convexo $P_1P_2 \cdots P_n$.*

Esta demostración se hará por contradicción. Supóngase que es posible tener algún vértice $P_k \in \{P_2, P_3, \dots, P_{n-1}\}$ del mismo lado que P_o con respec-

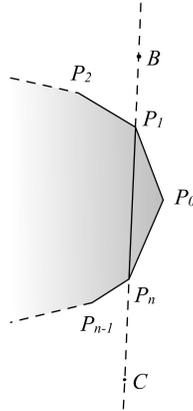


Figura B.2:

to a $\overleftrightarrow{P_1P_n}$. Sea el punto B en la recta $\overleftrightarrow{P_1P_n}$ de tal forma que P_1 esté entre B y P_n . Entonces, P_k sólo puede estar en el interior de $\angle BP_1P_o$ o en el interior de $\angle P_oP_1P_n$ (no puede estar en el rayo $\overrightarrow{P_1P_o}$ ni en el rayo $\overrightarrow{P_nP_o}$ ni en la recta $\overleftrightarrow{P_1P_n}$ pues contradice el hecho de que P es un polígono convexo y, más aun, de que es un polígono simple). Si P_k está en el interior de $\angle BP_1P_o$, se tiene P_k de un lado de $\overleftrightarrow{P_oP_1}$ y del otro a P_n lo que contradice la hipótesis de que P es convexo. Sea C en el rayo opuesto a $\overrightarrow{P_nP_1}$, entonces, se puede demostrar, como se hizo líneas arriba, que P_k no puede estar en el interior de $\angle CP_nP_o$, luego, P_k solo puede estar en el interior del triángulo $P_oP_1P_n$ (figura B.2). Se puede observar que P_k no puede ser P_2 pues se tendría de un lado de $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ a P_o y del otro a P_n . De la misma forma, esta claro que P_k tampoco puede ser P_{n-1} , así que, al menos, hay dos vértices de P en el lado opuesto a P_o respecto a $\overleftrightarrow{P_1P_n}$. Por otra parte, si hubiera varios de estos P_k en el triángulo $P_oP_1P_n$ tómesese uno, tal que, P_{k-1} esté en el lado opuesto a P_o respecto a $\overleftrightarrow{P_nP_1}$, luego, $\overline{P_{k-1}P_k}$ interseca a $\overleftrightarrow{P_nP_1}$ esto implica que debe intersecar al segmento $\overline{P_nP_o}$ o al segmento $\overline{P_oP_1}$ ¹. Si $\overline{P_{k-1}P_k}$ interseca a $\overline{P_nP_o}$ esto implica que P_n y P_o están en lados opuestos respecto al lado $\overline{P_{k-1}P_k}$ lo cual es una contradicción a la cual también se llega si suponemos

¹Por el Teorema 9 y el postulado II-4 (Postulado de Pasch) ambos en el apéndice A

que $\overline{P_{k-1}P_k}$ interseca a $\overline{P_oP_1}$. Por lo tanto P_k no puede estar del mismo lado que P_o respecto a $\overleftarrow{P_nP_1}$.

Por lo anterior no es posible tener vértices del mismo lado que P_o con respecto $\overleftarrow{P_1P_n}$ ni en $\overleftarrow{P_1P_n}$. Además, por la convexidad de P , para cualquier lado $\overline{P_jP_{j+1}}$ de la poligonal $P_1P_2 \cdots P_n$ se cumple que los vértices (excepto P_j y P_{j+1}) están de un mismo lado con respecto a $\overleftarrow{P_jP_{j+1}}$. Entonces, $P_1P_2 \cdots P_n$ es un polígono convexo.

Teorema 5. *Un polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$ es convexo si y sólo si para cada lado $\overline{P_iP_j}$ del polígono el interior del polígono está en un solo lado respecto a $\overleftarrow{P_iP_j}$, que es el mismo en que se encuentran los vértices (excepto P_i y P_j).*

Sea $\overline{P_iP_j}$ un lado del polígono convexo P tomado arbitrariamente. Se tiene entonces, que todos los vértices, excepto P_i y P_j , están de un mismo lado con respecto a $\overleftarrow{P_iP_j}$, por ejemplo, a la izquierda. Luego todos los lados del polígono están o bien a la izquierda o son P_iP_j .

Supóngase que del lado derecho de $\overrightarrow{P_iP_j}$ se tienen sólo puntos interiores, luego tómesese un punto x de este lado y la paralela a $\overrightarrow{P_iP_j}$ por dicho punto (figura B.3). Esta recta estará totalmente en el interior lo cual contradice la característica del interior de un polígono encontrada en el teorema 9 del apéndice A. Ahora supóngase que del lado derecho hay tanto puntos interiores como exteriores, entonces, si se traza una recta entre un punto exterior y uno interior, ambos del lado derecho, debe cruzar al menos un lado del polígono, lo cual contradice el hecho de que los lados estén a la izquierda o son $\overline{P_iP_j}$. Por lo tanto a la derecha de $\overrightarrow{P_iP_j}$ sólo hay puntos exteriores y a la izquierda está el interior de P .

El recíproco es fácil pues si se toma un lado arbitrariamente, por ejemplo $\overline{P_iP_j}$, los vértices que no son ni P_i ni P_j , están del lado donde se encuentra el interior y esto cumple la definición de polígono convexo. De esta forma el teorema queda demostrado.

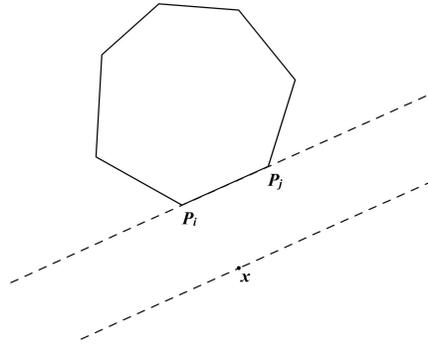


Figura B.3: .

De este teorema se tiene inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 1. *Sea el polígono convexo $P = P_1P_2 \cdots P_n$, el interior de P es la intersección de cada uno de los semiplanos formados por el lado de la recta $\overleftrightarrow{P_jP_{s(j+1)}}$ donde están los demás vértices, para cada j entre los valores $1, 2, \dots, n$.*

Notación. Sean el polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$ convexo, orientado a la izquierda y, sea la recta $\overleftrightarrow{P_jP_{s(j+1)}}$. El semiplano izquierdo respecto a la recta $\overleftrightarrow{P_jP_{s(j+1)}}$ se denota:

$$\underline{P_jP_{s(j+1)}}$$

El interior de P es:

$$Int(P)$$

La cerradura de $\underline{P_jP_{s(j+1)}}$ es la unión de dicho semiplano con la recta $\overleftrightarrow{P_jP_{s(j+1)}}$. En este caso se denota así:

$$\overline{P_jP_{s(j+1)}}$$

Con esta notación el corolario anterior se puede reescribir así: Sea $P = P_1P_2 \cdots P_n$ un polígono convexo orientado a la izquierda, entonces,

$$Int(P) = \overline{P_1P_2} \cap \overline{P_1P_2} \cap \cdots \cap \overline{P_{n-1}P_n} \cap \overline{P_nP_1}$$

Esto se debe a que el semiplano que queda a la izquierda de cada lado del polígono P da al interior de dicha figura. Más aun no se pierde generalidad enunciando que:

$$P \cup Int(P) = \overline{P_1P_2} \cap \overline{P_1P_2} \cap \cdots \cap \overline{P_{n-1}P_n} \cap \overline{P_nP_1}$$

Teorema 6. *Sea $P = P_oP_1 \cdots P_n$ un polígono convexo y sea $P_k, P_{s(k+1)}, P_{s(k+2)}$ una terna de vértices consecutivos de P tomada arbitrariamente. Si la terna está orientada a la izquierda, entonces, cada terna de vértices esta orientada a la izquierda; si está orientada a la derecha, entonces, cada terna de vértices esta orientada a la derecha.*

Para todo triángulo (esto es para $n = 3$) se cumple este teorema de la definición 24 del apéndice A y del teorema 3 de esta sección.

Supóngase que el teorema se cumple para un polígono de n lados, se tiene que demostrar, entonces, para el caso $n + 1$. Sea el polígono $P = P_oP_1 \cdots P_n$ para este último caso, supóngase los tres vértices de la hipótesis $P_k, P_{s(k+1)}$ y $P_{s(k+2)}$ bajo las mismas condiciones. Si se toma el segmento dirigido $\overline{P_{s(k+2)}P_k}$, en esa dirección $P_{s(k+1)}$ esta a la izquierda, luego, $P_{s(k+1)}$ esta a la derecha de $\overline{P_kP_{s(k+2)}}$, entonces, por el teorema 2 de esta sección, $P_{s(k+3)}$ esta a la izquierda de $\overline{P_{s(k)}P_{k+2}}$, por lo tanto, $P' = P_kP_{s(k+2)} \cdots P_{s(k+n)}$ tiene todos sus vértices orientados a la izquierda pues es el caso n . Sólo falta demostrar que P_k y $P_{s(k+2)}$ están orientados a la izquierda en el polígono P . Tenemos que para segmento dirigido $\overline{P_{s(k+2)}P_{s(k+3)}}$ el vértice $P_{s(k+4)}$ está a la izquierda, al ser P un polígono convexo $P_{s(k+1)}$ también esta a la izquierda y, por lo tanto, a la derecha de $\overline{P_{s(k+3)}P_{s(k+2)}}$, luego, $P_{s(k+2)}$ está orientado a la izquierda de acuerdo al orden de índices tomado originalmente. Razonando de manera similar se puede demostrar que P_k está orientado a la izquierda, luego, todos los vértices del polígono están orientados a la izquierda. La demostración para el caso en que la terna está orientada a la derecha es semejante.

Teorema 7. *Teorema. Sea el polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$ para el cual todos los vértices están orientados en un mismo sentido, entonces, para toda recta $\overleftrightarrow{P_iP_j}$, con $i \neq j$, se cumple que los vértices de i al j , en el orden creciente de índices, están de un solo lado y los vértices de j a i , en el orden creciente de índices, están del otro lado.*

Sea el polígono $P = P_1P_2 \cdots P_n$ para el cual se cumplen las hipótesis del teorema, entonces, sea la recta $\overleftrightarrow{P_iP_j}$ para i y j tomados arbitrariamente con $i < j$. En parte de esta demostración se usará el método de contradicción. Supóngase que los vértices $P_{i+1}, P_{i+2}, \dots, P_{j-1}$ han están a ambos lados de $\overleftrightarrow{P_iP_j}$, esto implica que, por el teorema 2 de este apéndice, hay tanto vértices orientados a la izquierda como a la derecha, lo cual contradice la hipótesis de que todos los vértices están orientados en el mismo sentido, podemos aplicar la misma demostración para los vértices $P_{s(j+1)}, P_{s(j+2)}, \dots, P_{s(i-1)}$. Por otro lado, supóngase que P tiene todos sus vértices orientados a la izquierda, entonces, la poligonal $P_{i+1}P_{i+2} \cdots P_{j-1}$ debe estar a la derecha de $\overleftrightarrow{P_iP_j}$ pues de lo contrario si está a la izquierda, tiene vértices orientados a la derecha lo cual sería una contradicción, de la misma manera se puede demostrar que la poligonal $P_{s(j+1)}P_{s(j+2)} \cdots P_{s(i-1)}$ está la derecha de $\overleftrightarrow{P_iP_j}$ con lo cual el teorema queda demostrado.

Este teorema implica de manera inmediata que el polígono en cuestión debe ser convexo lo cual se expresa en el siguiente corolario.

Corolario 2. *Si todos los vértices de un polígono están orientados en un mismo sentido, entonces, el polígono es convexo.*

Definición 2. Si todos los vértices de un polígono P están orientados a la izquierda, se dice que el polígono P está orientado a la izquierda.

Teorema 8. *Sea $P = P_oP_1 \cdots P_n$ un polígono convexo, sea la recta $\overleftrightarrow{P_nB}$, donde B está en $\overline{P_oP_1}$, entonces, se tiene de un lado de $\overleftrightarrow{P_nB}$ el polígono convexo $BP_1P_2 \cdots P_n$ y del otro lado el vértice P_o .*

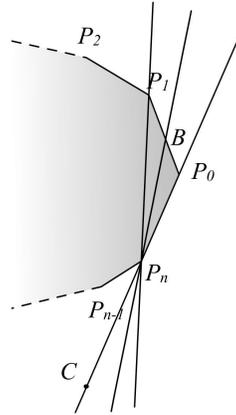


Figura B.4:

Supóngase que el polígono P está orientado a la izquierda. Se tiene por el teorema 4 de este apéndice que P_2, \dots, P_{n-1} están de un mismo lado con respecto a P_1P_n , luego, al estar B entre P_o y P_1 implica que B está del mismo lado que P_o respecto a $\overleftarrow{P_1P_n}$ (figura B.4). Como P está orientado a la izquierda; $P_nP_oP_1$ está orientado a la izquierda en este orden de índices. Luego, $\overrightarrow{P_1P_n}$ tendrá P_o a la izquierda y por tanto P_2, \dots, P_{n-1} a la derecha. Sea C en $\overrightarrow{P_oP_n}$ de tal forma que P_n esté entre C y P_o , además P_1, \dots, P_{n-1} están a la derecha con respecto a $\overrightarrow{P_oP_n}$, entonces, de la definición de interior de ángulo, los vértices P_2, \dots, P_{n-1} están en $\angle P_1P_nC$. Por otro lado los ángulos $\angle CP_nP_1$ y $\angle P_1P_nP_o$ están en lados opuestos con respecto $\overleftarrow{P_1P_n}$. Al estar B entre P_1 y P_o ; B está en el interior de $\angle P_oP_nP_1$, esto implica por el teorema 4 apéndice C, que P_1 está en el interior del ángulo $\angle BP_nC$, esto es $\angle BP_nC$ contiene al ángulo $\angle P_1P_nC$ y, entonces, a los vértices $P_1P_2 \cdots P_{n-1}$.

Por lo anterior al estar P_o en lado opuesto a P_1 respecto a $\overleftarrow{P_nB}$ y estar $P_2P_3 \cdots P_{n-1}$ en el mismo lado que P_1 ; al tener que P_o está en la recta $\overleftarrow{CP_n}$, de tal forma que P_n esté entre C y P_o , implica, que no es posible tener vértices de $BP_1P_2 \cdots P_n$ del mismo lado que P_o con respecto $\overleftarrow{P_nB}$. Además, por la convexidad de P para cualquier lado $\overline{P_jP_{j+1}}$ de la poligonal

$BP_1P_2 \cdots P_n$ se cumple que los vértices (excepto P_j y P_{j+1}) están de un mismo lado con respecto a $\overleftrightarrow{P_jP_{j+1}}$. Entonces, $BP_1P_2 \cdots P_n$ es un polígono convexo.

Teorema 9. *Una recta ℓ que cruza a un polígono convexo $P = P_1P_2 \cdots P_n$ en dos puntos, lo divide en dos polígonos convexos en lados opuestos a la recta.*

Para este teorema se usará la función s (definición 3 del capítulo 3). Este problema se resuelve en tres casos: a) Que la recta pase por 2 vértices, b) que pase por un vértice y el interior de un lado, c) que pase por el interior de dos lados.

1. Supóngase que ℓ pasa por los vértices P_j y P_k , entonces, fuera de estos vértices, se tienen dos secuencias de vértices: $P_{s(j+1)}, P_{s(j+2)}, \dots, P_{s(k-1)}$ y, por otro lado $P_{s(k+1)}, P_{s(k+2)}, \dots, P_{s(j-1)}$, así, si se aplica el teorema 2 quitando sucesivamente los vértices $P_{s(j+1)}, P_{s(j+2)}, \dots, P_{s(k-1)}$ a $P_1P_2 \cdots P_n$, quedará el polígono convexo $P_kP_{s(k+1)} \cdots P_j$. Si hacemos el mismo proceso sobre P , pero con los vértices $P_{s(k+1)}, P_{s(k+2)}, \dots, P_{s(j-1)}$ quedará el polígono convexo $P_jP_{s(j+1)} \cdots P_k$, con lo cual queda demostrado el teorema para este inciso.
2. Si ℓ pasa por el vértice P_j y el punto $X \in \overline{P_kP_{s(k+1)}}$, entonces, fuera de P_j y X , se tienen dos secuencias de vértices: $P_{s(j+1)}, P_{s(j+2)}, \dots, P_{k-1}$ y, por otro lado $P_{s(k+1)}, P_{s(k+2)}, \dots, P_{s(j-1)}$. Si se aplica el teorema 2 para quitar los vértices $P_{s(j+1)}, P_{s(j+2)}, \dots, P_{s(k-1)}$ a $P_1P_2 \cdots P_n$, quedará el polígono convexo $P_kP_{s(k+1)} \cdots P_j$. Si se aplica el teorema 6 a la recta $\overleftrightarrow{P_jX}$ para quitar el vértice P_k , quedará el polígono $XP_{s(k+1)}P_{s(k+2)} \cdots P_j$. De forma similar se pueden quitar los vértices $P_{s(k+1)}, P_{s(k+2)}, \dots, P_{s(j-1)}$ aplicando estos dos teoremas y dejando el polígono convexo $P_jP_{s(j+1)} \cdots P_kX$, con lo cual queda demostrado el teorema para este inciso.

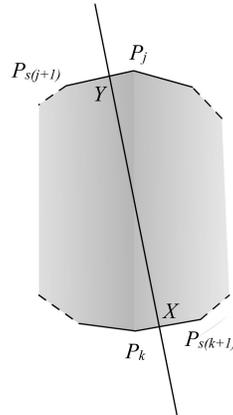


Figura B.5:

3. Por último, si ℓ pasa por X e Y de tal forma que $X \in \overline{P_k P_{s(k+1)}}$ e $Y \in \overline{P_j P_{s(j+1)}}$, entonces, fuera de estos puntos, se tienen dos secuencias de vértices: $P_{s(j+1)}, P_{s(j+2)}, \dots, P_{s(k-1)}, P_k$ y, además $P_{s(k+1)}, P_{s(k+2)}, \dots, P_{s(j-1)}, P_j$ (figura B.5). Luego, Si se aplica el teorema 2 para quitar los vértices $P_{s(j+2)}, P_{s(j+3)}, \dots, P_{s(k-1)}$ a $P_1 P_2 \dots P_n$, quedará el polígono convexo $P_k P_{s(k+1)} \dots P_j P_{s(j+1)}$, si se aplica el teorema 6 a la recta $\overleftrightarrow{P_k Y}$ se puede quitar el vértice $P_{s(j+1)}$ y quedará el polígono convexo $P_k P_{s(k+1)} \dots P_j Y$, ahora si se aplica este mismo teorema a la recta $\overleftrightarrow{X Y}$, se quita el vértice P_k y quedará $X P_{s(k+1)} \dots P_j Y$. De forma similar se pueden quitar los vértices $P_{s(k+1)}, P_{s(k+2)}, \dots, P_j$ y quedará el polígono $Y P_{s(j+1)} \dots P_k X$ que es convexo. Con esto queda demostrado el teorema.

Teorema 10. *Sea el polígono $P = P_1 P_2 \dots P_n$ convexo y orientado a la izquierda; sea la recta \overleftrightarrow{XY} que hace intersección en dos puntos, X e Y , con el polígono P , tal que, $X \in P_i P_{s(i+1)}$ y $Y \in P_j P_{s(j+1)}$ y los vértices $P_{s(j+1)}, P_{s(j+2)}, \dots, P_i$ están en el semiplano, entonces, la intersección de \overleftrightarrow{XY} y P es $X P_{s(j+1)} P_{j+2} \dots P_i Y$*

Se tiene que

$$P \cup \text{Int}(P) = \overline{P_1P_2} \cap \overline{P_2P_3} \cap \cdots \cap \overline{P_{n-1}P_n} \cap \overline{P_nP_1}$$

luego, como la recta \overleftrightarrow{XY} corta a P en X e Y , entonces, por el teorema 9 del apéndice B, de un lado queda el polígono $XP_{s(i+1)}P_{s(i+2)} \cdots P_jY$ y del otro el polígono $YP_{s(j+1)}P_{s(j+2)} \cdots P_iX$, como el semiplano \overline{XY} está del lado de $YP_{s(j+1)}P_{s(j+2)} \cdots P_iX$ este polígono es la intersección.

Teorema 11. *La intersección de un polígono convexo P con otro polígono convexo Q es también un polígono convexo R .*

Es fácil demostrar esto, aplicando el teorema 10 de este apéndice al hacer la intersección de la cerradura de cada semiplano que forma P con el polígono Q , por lo tanto, al final del proceso obtendremos el polígono convexo R que buscábamos:

$$R = [P \cup \text{Int}(P)] \cap [Q \cup \text{Int}(Q)] = \overline{P_1P_2} \cap \overline{P_2P_3} \cap \cdots \cap \overline{P_{n-1}P_n} \cap \overline{P_nP_1} \cap \overline{Q_1Q_2} \cap \overline{Q_2Q_3} \cap \cdots \cap \overline{Q_{n-1}Q_n} \cap \overline{Q_nQ_1}$$

B.3. Teoremas de polígonos simples

Teorema 12. *Sean las poligonales simples P_1, P_2, \dots, P_n , en un plano, sea ℓ una recta que no tiene intersecciones con ninguna de las poligonales de tal forma que todas las poligonales están de un mismo lado respecto a ℓ . Sea A un punto en ℓ . Entonces, existe un vértice B , de una poligonal P_i , tal que \overline{AB} no tiene intersecciones con ninguna poligonal excepto en B .*

Sea C un punto en ℓ tal que $C \neq A$. Tómesese la colección de ángulos $\angle CAD$ tal que D es un vértice de la poligonal P_k , tomándose D y P_k arbitrariamente (figura B.6). Sea CAE el mayor de los ángulos de esta colección y sean Q_1, Q_2, \dots, Q_n los vértices de las poligonales que están en la recta \overleftrightarrow{AE} . De los segmentos $\overline{AQ_1}, \overline{AQ_2}, \dots, \overline{AQ_n}$ tómesese el menor, supóngase que es $\overline{AQ_j}$, entonces, Q_j es el vértice buscado.

Teorema 13. *Sea el polígono simple $P = P_1P_2 \cdots P_n$, entonces, al menos existe una par de lados adyacentes $\overline{P_jP_{s(j+1)}}$ y $\overline{P_{s(j+1)}P_{s(j+2)}}$ que para cualquiera*

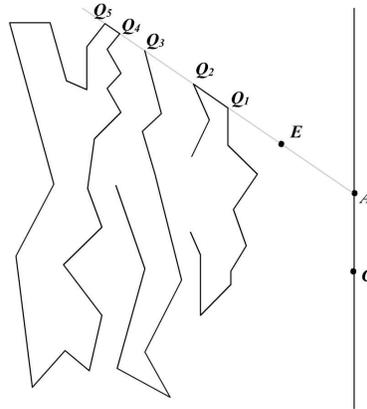


Figura B.6:

de ellos el lado que da al interior del polígono está del lado en que se encuentra el interior del triángulo formado por $P_j P_{s(j+1)} P_{s(j+2)}$.

Tómese una terna de vértices P_j , $P_{s(j+1)}$ y $P_{s(j+2)}$, si el polígono es convexo la demostración es inmediata tomando los vértices de P en su orientación izquierda. Supóngase, ahora, que para la terna dada, el lado que da al interior del polígono no es el mismo donde está el interior del triángulo $P_j P_{s(j+1)} P_{s(j+2)}$, dicho de otra forma el lado que da al exterior del polígono es el mismo en donde está el interior del triángulo $P_j P_{s(j+1)} P_{s(j+2)}$. Supóngase, entonces, que el triángulo $P_j P_{s(j+1)} P_{s(j+2)}$ está orientado a la izquierda (si no simplemente se toman los índices a la inversa). Como es imposible que todos los vértices estén orientados a la izquierda, pues esto implicaría que el polígono fuera convexo, supóngase que a partir del anterior vértice hay $m < n$ vértices orientados a la izquierda (incluyendo el vértice de la terna $P_j P_{s(j+1)} P_{s(j+2)}$) entonces la terna que sigue a esta sucesión de ternas mencionada debe estar orientada al contrario y, por tanto, con su interior dando a la derecha esto es hacia el interior del polígono.

Teorema 14. *De un polígono simple $P = P_1 P_2 \cdots P_n$ siempre se puede cortar un triángulo cuyos vértices sean tres vértices consecutivos del polígono P , esto es, que el interior del triángulo esté en el interior del polígono.*

El teorema se cumple de manera trivial para 3 lados. Suponiéndose que se cumple para m lados, hay que demostrar que se cumple para polígonos de $m + 1$ lados. Suponiéndose este caso, por el teorema 9 siempre se puede encontrar al menos una terna de vértices $P_j, P_{s(j+1)}$ y $P_{s(j+2)}$ de tal manera que tanto $\overline{P_j P_{s(j+1)}}$ como $\overline{P_{s(j+1)} P_{s(j+2)}}$ tienen de un mismo lado el interior de P y el interior del triángulo $P_j P_{s(j+1)} P_{s(j+2)}$.

Si no hay vértices de P en $P_j P_{s(j+1)} P_{s(j+2)}$ (excepto $P_j, P_{s(j+1)}$, y $P_{s(j+2)}$), entonces, termina la demostración. Si no se cumple la anterior condición, entonces, los vértices que están en $P_j P_{s(j+1)} P_{s(j+2)}$ forman una colección de poligonales que siguiendo el orden de vértices de P , sean estas P_1, P_2, \dots, P_n . Por el teorema 12 de este apéndice: para el vértice $P_{s(j+1)}$ en la recta $\overleftrightarrow{P_j P_{s(j+1)}}$, existe un vértice B en alguna de las poligonales tal que $\overleftrightarrow{P_{s(j+1)} B}$ no tiene intersecciones con ninguna poligonal esto es con P . Esto permite descomponer a P , mediante un segmento que pasa por el interior de este polígono, en dos polígonos P_1 y P_2 que tienen m o menos lados, con lo cual el teorema queda demostrado.

Apéndice C

Definiciones y teoremas varios.

C.1. Definiciones y teoremas de paralelogramos.

Definición 1. Sean $\overleftrightarrow{l}_1, \overleftrightarrow{l}_2$ dos paralelas y $\overleftrightarrow{l}_3, \overleftrightarrow{l}_4$ otro par de paralelas de tal forma que \overleftrightarrow{l}_1 no es paralela con \overleftrightarrow{l}_3 ni con \overleftrightarrow{l}_4 y \overleftrightarrow{l}_2 no es paralela con \overleftrightarrow{l}_3 ni con \overleftrightarrow{l}_4 ; entonces, el conjunto de intersecciones son 4 puntos que forman un polígono de nombre paralelogramo.

Teorema 1. *Sea el polígono $ABCD$, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{DA} \cong \overline{BC}$, entonces, $ABCD$ es un paralelogramo.*

Trácese la diagonal \overline{AC} , entonces, los triángulos ABC y ACD son congruentes pues $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{DA} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AC} \cong \overline{AC}$. De lo anterior $\angle BAC \cong \angle ACD$ y $\angle ACB \cong \angle CAD$ lo cual implica que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ respectivamente, por lo tanto, $ABCD$ es un paralelogramo.

Teorema 2. *Sean los segmentos \overline{AB} y \overline{CD} de tal forma que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, entonces, $ABCD$ es un paralelogramo.*

Trácese la diagonal \overline{AC} , entonces, $\angle BAC \cong \angle ACD$ por ser ángulos alternos internos entre las paralelas \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} . Luego, los triángulos ABC

y ACD son congruentes pues $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ por hipótesis y por que $\overline{AC} \cong \overline{AC}$. De aquí que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y por lo tanto, $ABCD$ es paralelogramo.

Definición 2. Aquel paralelogramo que tenga todos sus ángulos rectos es un rectángulo.

Teorema 3. Si un paralelogramo $ABCD$ tiene al menos un ángulo recto es un rectángulo.

Sean los ángulos interiores α y β de los vértices A y B respectivamente, y sea γ el ángulo exterior en B adyacente a b . De las hipótesis, α es recto, luego, α y γ son congruentes por ser ángulos correspondientes. De la definición de ángulo recto (definición 15 del apéndice A) β y γ son congruentes, entonces, α y β son congruentes. De forma semejante se puede demostrar que C y D son rectos, por lo tanto, $ABCD$ es un rectángulo

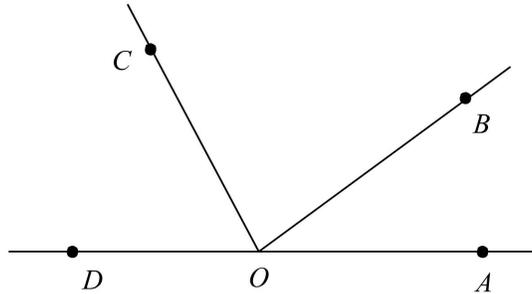
C.2. Teoremas varios.

Teorema 4. Sea la recta \overleftrightarrow{AD} con los puntos B y C en un mismo lado de ella y sea el punto O en \overline{AD} . Si B está en el interior del ángulo $\angle AOC$, entonces, C está en el interior del ángulo $\angle BOD$.

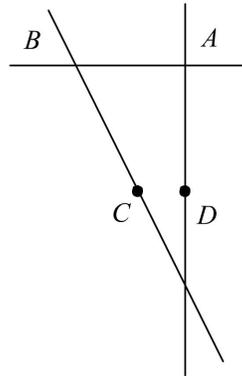
Supóngase que C y B están a la izquierda de OA , y por tanto, a la derecha de OD (figura C.2). Como B está en el interior de $\angle AOC$ y a la izquierda de OA , entonces, B está a la derecha de OC , lo que implica que, C está a la izquierda de OB . Finalmente, como C está a la derecha de OD , entonces, C está en el interior de $\angle BOD$.

Teorema 5. Sean 4 puntos A, B, C y D ; de tal forma que la recta \overleftrightarrow{AB} es perpendicular a \overleftrightarrow{AD} , con $\angle ABC$ menor que un recto, entonces, \overleftrightarrow{AD} y \overleftrightarrow{BC} se intersecan del mismo lado que C respecto a \overline{AB} .

Supóngase que \overleftrightarrow{AD} y \overleftrightarrow{BC} no se intersecan, entonces, AD y BC son paralelas luego una de dos o $\angle ABC$ es recto o $\angle BAD$ no es recto, luego, cualquiera de estas dos proposiciones contradice las hipótesis.



Finalmente si \overleftrightarrow{AB} y \overleftrightarrow{CD} se cruzan en el punto E en el lado contrario a C respecto a AB , se tiene que el ángulo $\angle ABC$ es exterior al triángulo ABE en B . Como $\angle BAE$ es recto, entonces, es mayor al ángulo exterior ABC lo cual contradice el teorema 22 del apéndice A (teorema del ángulo exterior). Por lo tanto \overleftrightarrow{AD} y \overleftrightarrow{BC} se intersecan de mismo lado que C (figura C.2).



C.3. Definiciones y teoremas de transformaciones.

Definición 3. Si A y B son dos conjuntos (no necesariamente distintos), entonces, un mapeo del conjunto A al B es una correspondencia que relaciona con cada elemento a en A un elemento único b en B . Se escribe $a \rightarrow b$ y se llama a b la imagen o mapa de a en el mapeo, y se dice que el elemento a se ha transportado (o mapeado en) el elemento b por el mapeo. Si cada

elemento de B es la imagen de un elemento de A , entonces, se dice que el conjunto A se ha mapeado sobre el conjunto B .

Definición 4. Un mapeo de un conjunto A sobre otro B en el que los elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B se llama una transformación (o mapeo biunívoco) de A sobre B .

Definición 5. Si, en la definición anterior, A y B son el mismo conjunto, entonces el mapeo es una transformación de un conjunto A sobre sí mismo. En este caso, puede haber un elemento de A que corresponda a sí mismo, dicho elemento se llama elemento invariante de la transformación.

Definición 6. Una transformación de un conjunto A sobre sí mismo en la que cada elemento sea invariable se llama transformación de identidad en A , y se representará por I cuando no haya ambigüedad.

Definición 7. Sean los puntos A , B , C y D en la recta ℓ . Se dice que A está de un lado respecto a B como C está del mismo lado respecto a D si $\overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{DC}$ o $\overrightarrow{DC} \subset \overrightarrow{BA}$.

En adelante S denotará el conjunto de puntos del plano.

Definición 8. Sea \overrightarrow{AB} un segmento rectilíneo dirigido del plano. El punto $P' = T_{\overrightarrow{AB}}(P)$ se llama traslación del punto P en el vector \overrightarrow{AB} y es aquel punto que cumple lo siguiente:

- a) Si P no está en la recta \overleftrightarrow{AB} , $ABP'P$ es un paralelogramo.
- b) Si P está en la recta \overleftrightarrow{AB} , PP' es congruente a \overrightarrow{AB} y P' está a un lado respecto a P , como B está del mismo lado respecto al punto A .

Teorema 6. *El punto P' de la definición anterior es único.*

De la definición para el caso a) se tiene que P' es único por el teorema 29 del apéndice A; para el caso b) se tiene que del axioma III-1 del apéndice A, que P' es único.

Definición 9. Sea \overline{AB} un segmento rectilíneo dirigido del plano. Por traslación $T_{\overline{AB}}$ se quiere decir la transformación de S sobre sí mismo que transporta cada punto P del plano al punto $P' = T_{\overline{AB}}(P)$. El segmento dirigido \overline{AB} se llama vector de la traslación.

Definición 10. Se define la traslación de un segmento \overline{CD} en el vector \overline{AB} (simbolizada por $T_{\overline{AB}}(\overline{CD})$) como el segmento $\overline{C'D'}$ donde $C' = T_{\overline{AB}}(C)$ y $D' = T_{\overline{AB}}(D)$.

Teorema 7. Sea \overline{CD} un segmento, y $T_{\overline{AB}}$ la traslación definida por el segmento dirigido \overline{AB} ; entonces, $T_{\overline{AB}}(\overline{CD}) \cong \overline{CD}$.

Sean $C' = T_{\overline{AB}}(C)$ y $D' = T_{\overline{AB}}(D)$, luego $\overline{CC'} \cong \overline{AB}$ y $\overline{DD'} \cong \overline{AB}$ de la definición de traslación para puntos. De esta misma definición $\overrightarrow{CC'} \parallel \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DD'} \parallel \overrightarrow{AB}$. Por transitividad $\overrightarrow{CC'} \cong \overrightarrow{DD'}$ y $\overrightarrow{CC'} \parallel \overrightarrow{DD'}$, lo que implica que, $CDD'C'$ es un paralelogramo, por lo tanto $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$.

Definición 11. Se define la traslación de un polígono $P_1P_2 \cdots P_n$ con vector de traslación \overline{AB} (simbolizada por $T_{\overline{AB}}(P_1P_2 \cdots P_n)$) como el polígono $P'_1P'_2 \cdots P'_n$ donde $P'_1 = T_{\overline{AB}}(P_1)$, $P'_2 = T_{\overline{AB}}(P_2)$, ..., $P'_n = T_{\overline{AB}}(P_n)$.

Teorema 8. Sea CDE un triángulo, y $T_{\overline{AB}}$ la traslación definida por el segmento dirigido \overline{AB} , entonces, $T_{\overline{AB}}(CDE) \cong CDE$.

Sea $C' = T_{\overline{AB}}(C)$, $D' = T_{\overline{AB}}(D)$ y $E' = T_{\overline{AB}}(E)$. Por el teorema 7 de esta sección se tiene que $\overline{C'D'} \cong \overline{CD}$, $\overline{D'E'} \cong \overline{DE}$ y $\overline{E'C'} \cong \overline{EC}$, luego, $C'D'E' \cong CDE$ que es lo que se quería demostrar.

Teorema 9. Sea el polígono $P_1P_2 \cdots P_n$ y $T_{\overline{AB}}$ la traslación definida por el segmento dirigido \overline{AB} , entonces, $T_{\overline{AB}}(P_1P_2 \cdots P_n) \cong P_1P_2 \cdots P_n$.

Sea CD un lado arbitrario del polígono, entonces, por teorema 7 se cumple que $T_{\overline{AB}}(\overline{CD}) \cong \overline{CD}$, por lo cual, en cualquier polígono todo lado es congruente con su traslación. Tómese ahora un ángulo interior $\angle EFG$ del polígono y sea $E' = T_{\overline{AB}}(E)$, $F' = T_{\overline{AB}}(F)$ y $G' = T_{\overline{AB}}(G)$, entonces,

del teorema 8 de esta sección, $EFG \cong E'F'G'$. De aquí es fácil ver que $\angle EFG \cong \angle E'F'G'$, dicho de otra forma, en cualquier polígono todo ángulo interior es congruente con su traslación, por lo tanto, de la definición de figura congruente (definición 21 del apéndice A):

$$T_{\overline{AB}}(P_1P_2 \cdots P_n) \cong P_1P_2 \cdots P_n.$$

Bibliografía

- [1] Hilbert, David, *Foundations of geometry*. The Open Court Publishing Co., 1971, pp. 3-28 y 60-71
- [2] Eves, Howard, *Estudio de las geometrías*. Editorial Limusa, 1997, pp. 222-271.
- [3] Boltianski, V. G. *Figuras equivalentes y equicompuestas*. Editorial Mir, 1981.
- [4] Sitio donde se puede encontrar, en inglés, la obra “Los elementos”: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>
- [5] En este sitio también se encuentran “Los elementos” de Euclides en español: http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm
- [6] En este sitio se pueden encontrar traducciones e interpretaciones del papiro de Rhind y del papiro de Moscú: <http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/>