**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS**

# APLICACIONES DEL MÉTODO DE MONTE CARLO A LA SOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS FINANCIEROS

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE INGENIERO MATEMÁTICO
PRESENTA.

**KARLA GONZÁLEZ JUÁREZ**

Director de Tesis: Roberto S. Acosta Abreu

México D.F., diciembre de 2008

**ÍNDICE**

# AGRADECIMIENTOS

## A MI FAMILIA

Por el gran apoyo brindado y el esfuerzo hecho durante mi carrera, para lograr la conclusión de mis estudios. Pero, sobre todo, por siempre estar a mi lado en los momentos más importantes de mi vida y tener siempre una palabra de aliento en los momentos difíciles que en la vida se presentan. Muchas gracias por dejarme tomar mis propias decisiones.

## A DIOS

Por estar siempre en mi vida, por ayudarme a aprender de los errores y a no darme por vencida cuando se presenta algún obstáculo.

Muchas Gracias.

## AL PROFESOR ROBERTO S. ACOSTA

Por su paciencia y apoyo en el proyecto, así como, por su gran compromiso y el tiempo que brindo para la elaboración de este trabajo.

# INTRODUCCIÓN

En los mercados financieros modernos, es importante el de instrumentos financieros derivados conocidos como las opciones. Una *opción* es un contrato que da derecho a quien lo posee (pero no la obligación) a comprar o vender un activo a un precio preestablecido durante un periodo o una fecha determinada. El primer mercado de opciones moderno surge en Chicago el 26 de abril de 1973, llamado *Chicago Board Options Exchange (CBOE)* , el cual en su inicio sólo admitía opciones de compra. En Europa, el mercado de opciones londinense abre sus puertas en 1978, al igual que Ámsterdam. También, en España existe un mercado de opciones financieras desde 1989, nombrado MEFF (Mercado Español de Futuros Financieros) situado en Madrid y Barcelona.

Las opciones que se encuentran fuera del Mercado Oficial se les denomina over the counter (OTC), creadas a través de intermediarios financieros, por lo general son entidades bancarias.
El fenómeno de las opciones exóticas tiene su origen en la década de los noventa, aunque se sabe que algunas de sus modalidades ya aparecían en mercados *Over The Counter (OTC)* a finales de la década de los sesenta. Sin embargo, no es hasta la década de los noventa cuando su negociación comienza a tener auge.

Las opciones exóticas surgen con la intención, de abaratar el costo de las primas de las opciones tradicionalmente negociadas, o bien, para ajustarse más adecuadamente a determinadas situaciones. A las opciones exóticas también se les conoce como opciones de segunda generación, ya que lo que tratan es de superar los límites de las operaciones estándar, las cuáles, presentan en la mayoría de los casos tintes de rigidez.

La aparición de estas opciones, y su creciente utilización, está significando un gran impacto en los diversos mercados de capitales a nivel internacional, implantándose como un instrumento muy útil tanto para la gestión de riesgos, como para la especulación. No obstante, su volumen de negociación no es todavía lo suficientemente grande, pero se prevé, que con su estudio y uso, experimenten un auge mayor. Actualmente, su utilización comienza a extenderse y podría darse el salto de los mercados OTC´s, a los mercados organizados, debido a la gran liberalización que los subyacentes están experimentando.

El principal objetivo del presente trabajo es realizar la valoración de las opciones exóticas (opciones de segunda generación). En el problema de valuación de opciones exóticas, a menudo nos encontramos con el problema de que no existen fórmulas cerradas o analíticas para su cálculo. En particular, en la valuación de opciones asiáticas, el valor de la opción depende de la trayectoria seguida por el proceso de precios. Para resolver el problema de valuación utilizaremos el método de Monte Carlo.

La importancia actual del método Monte-Carlo se basa en la existencia de problemas de difícil solución por métodos analíticos o numéricos, pero que dependen de factores aleatorios o se asocian a un modelo determinístico. En el caso de la valuación de opciones veremos que el problema se reduce al cálculo numérico de una esperanza matemática. Este cálculo lo realizaremos mediante simulación probabilística, es decir, generando valores de variables aleatorias que están relacionadas con el problema bajo consideración. Gracias a la velocidad de cómputo en la actualidad, el cálculo de Monte-Carlo es sumamente utilizado.

Las técnicas de reducción de varianza aplicadas por el método de Monte Carlo son muy importantes porque nos permiten usar muestras aleatorias de tamaño más pequeño, y aumentar al mismo tiempo la precisión del cálculo.

En este caso, el uso de las técnicas de Monte Carlo es sumamente útil.

# CAPITULO 1

# MERCADOS FINANCIEROS Y CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

## 1. MERCADOS FINANCIEROS

Un **mercado financiero** se define como el lugar o mecanismo en el cual se compran y venden *activos financieros*. En los mercados financieros los participantes realizan operaciones de inversión, financiamiento y cobertura, a través de intermediarios, mediante diversos instrumentos financieros.

1. Tipo europeo: es aquella parte formada por determinadas instituciones o lugares donde asisten los oferentes y demandantes a horas determinadas para realizar sus transacciones; o
2. Tipo americano: a diferencia del anterior funciona las 24 horas del día en todo el mundo. Esta formado por la red de instituciones financieras de todo el mundo y realiza sus transacciones en cualquier momento a través de cualquier medio de comunicación.

### 1.1 Opciones

Una **opción** es un contrato que da derecho a quien lo posee a comprar o vender un activo a un precio preestablecido durante un periodo o una fecha determinada.

El poseedor de una  opción no tienen relación alguna con la empresa sobre cuyos títulos posee un derecho de compra o de venta, sólo tiene un acuerdo con otra parte, el *vendedor* de la opción *(writer o emisor*). Ni el emisor de la opción, ni el posible comprador de la misma, tienen efecto alguno sobre la compañía o sobre sus posibilidades de emitir acciones.

Las opciones le dan al inversor la posibilidad de variar el riesgo de las acciones, el inversor puede aumentar o disminuir el rendimiento y riesgo esperados.

El *emisor(vendedor)* y el *comprador* de la opción no se conocen, actuando como intermediarios la *Casa de compensación (Clearing house)*, los *brokers* y los *creadores de mercado*.


**Fig. 1.1 El papel de la Cámara de Compensación**

Existen dos modalidades de opciones: Las **opciones europeas** pueden ser ejercidas sólo al tiempo de expiración, mientras que, las **opciones americanas** se ejercen en cualquier instante hasta la expiración.

Hay dos tipos de opciones:

1. **Opciones de compra (Call)**: son opciones que solo dan derecho de comprar acciones de un determinado activo en el futuro. En este contrato se establece el precio de ejercicio X y el tiempo de expiración T.

En este tipo de opciones el emisor recibe una prima y se ve obligado a entregar el activo subyacente, si así lo exige el comprador. Mientras que, el comprador paga una prima y tiene el derecho a solicitar el activo subyacente al emisor.

2. **Opciones de venta (Put)**: son opciones que dan derecho de vender acciones de un activo a un precio fijo X en una fecha futura predeterminada o antes de esta.

### 1.2 Descripción de las opciones

Un contrato de opciones contiene la siguiente información:

1. **Precio del subyacente (S):** es decir, el precio del activo sobre el cual se ejerce la opción.

2. **Tiempo de expiración (T):** este se refiere a la fecha de vencimiento de la opción. El poseedor de una opción de compra o venta puede ejercer su derecho, no ejercerla dejando pasar la fecha de vencimiento o venderla antes del tiempo de expiración de la opción.

3. **Precio de ejercicio (X):** este precio se establece en el contrato de compra o venta del activo subyacente.

Cuando el precio de ejercicio de la opción es inferior al precio de mercado de la acción al momento de emitirla se denomina *in the money,* en caso contrario *out of the money.* Si el precio de ejercicio de la opción es igual o muy cercano a el precio de mercado de la acción lo denominamos *at the money.*

### 1.3 Factores que determinan el valor de una opción

El precio de una opción (es decir la prima o Premium) se determina por los siguientes factores principalmente:

1. **El valor intrínseco y el extrínseco de la acción subyacente**.

El valor de una opción se puede descomponer en la suma de dos partes una llamada intrínseca y otra extrínseca. La primera puede definirse como el valor que tendría una opción en un momento determinado al ejercerla inmediatamente. Para una opción Call se tiene que

$$V_C = máx[0, S - X] \tag{1}$$

y para una opción Put

$$V_p = máx[0, X - S] \quad (2)$$

donde $S$ es el precio del subyacente y $X$ el precio de ejercicio. La parte extrínseca es lo que agrega el vendedor para cubrirse de las alteraciones de los precios que puedan ocasionarle una pérdida mayor cuando la ejerce el comprador. Cuando $S$ (el precio del subyacente) aumenta, el valor intrínseco de las opciones de compra aumenta, mientras que el valor de la opción de venta disminuye.

2. **La volatilidad del mercado** $(\sigma)$

La **volatilidad** es otra variable importante. Las oscilaciones diarias del precio del título subyacente, influye de manera directa en el precio de la opción call o put. La volatilidad es proporcional a la desviación estándar de los precios del subyacente cuanto mayor sea se tiene la oportunidad de ejercer la opción, aumentando el valor de la Call y de la Put, puesto que para los vendedores implica un mayor riesgo.

3. **Los dividendos.**

El pago de **dividendos** también afecta el valor de la opción, pues cuanto mayores sean lo dividendos hace que disminuya el precio de mercado del subyacente, afectando positivamente a las opciones Put y negativamente a las Call.

4. **Tipo de interés sin riesgo** $(r)$**.**

Cuanto más alto sea el **tipo de interés sin riesgo** mayor es la prima de la opción Call, efecto contrario a una Put.

5. **Plazo de Expiración** $(T)$

Cuanto menos tiempo de vida le quede a la opción, su prima también será menor, puesto que al acercarse su fecha de expiración aumenta la incertidumbre en cuanto al valor final de S (recio de mercado) de superar a $X$ (el precio de ejercicio), por lo que los riesgos para el vendedor son mayores, por lo tanto aumenta el valor intrínseco de la opción.

6. **Precio de Ejercicio** $(X)$

Por último, otro factor importante que interviene en el valor de la opción es el precio de ejercicio. Cuando el **precio de ejercicio** es menor, el valor de la opción Call aumentará, lo contrario ocurre con las opciones Put.

Como vemos, el valor o prima de una opción de compra (Call) depende de seis factores principales:

$$V_C = f(S, X, t, \sigma, r, D)$$

con las siguientes relaciones,

$$\frac{\delta V_C}{\delta S} > 0; \frac{\delta V_C}{\delta X} < 0; \frac{\delta V_C}{\delta t} > 0; \frac{\delta V_C}{\delta \sigma} > 0; \frac{\delta V_C}{\delta r} > 0; \frac{\delta V_C}{\delta D} < 0$$

Las relaciones para una opción de venta son:

$$\frac{\delta V_C}{\delta S} < 0; \frac{\delta V_C}{\delta X} > 0; \frac{\delta V_C}{\delta t} > 0; \frac{\delta V_C}{\delta \sigma} > 0; \frac{\delta V_C}{\delta r} < 0; \frac{\delta V_C}{\delta D} > 0$$

### 1.4 Opciones de compra (call options)

**Punto de Vista del Comprador**

Supongamos que un inversor adquiere una opción de compra (call) sobre una acción de una empresa. Al adquirirla este se beneficia de un aumento en el precio del activo subyacente sin haberlo comprado.

Por ejemplo, un inversor al adquirir una opción de compra sobre una acción de Repsol con un precio de ejercicio de 1000 pesetas. EL precio de mercado de dicha opción en ese momento es de 50 pesetas.

El poseedor de la opción de compra sobre Repsol que tiene una posición larga en opciones y una corta en acciones, podrá decidir si ejerce o no la opción. La cual ejercerá cuando la cotización supere el precio de ejercicio. Si llegada la fecha de vencimiento de la opción y el precio de ejercicio sigue siendo superior a la cotización la opción no será ejercida. Si la opción no se ejerce la pérdida máxima será de 50 pesetas.

La máxima pérdida de la estrategia consistente en adquirir una opción de compra, queda limitada al pago de la prima $(V_c)$. Mientras que el beneficio puede ser ilimitado, en teoría. Este se calculará restándole al precio de mercado el precio de ejercicio en la fecha de vencimiento y la prima $(máx[S - X;0] - V_c)$. Véase la figura 1.

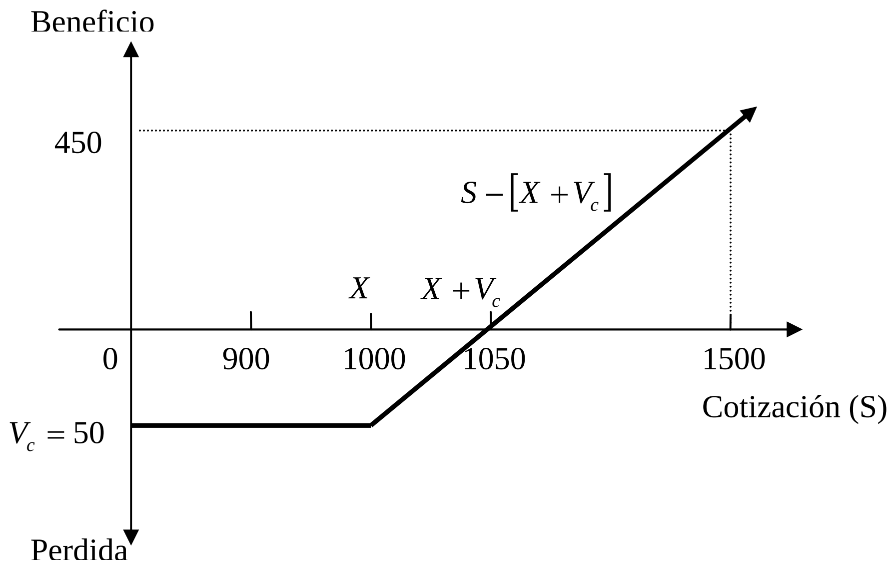


**Figura 1** Gráfica del Perfil del beneficio sobre una call.

Las diferencias básicas entre ejercer o no la opción de compra de la acción son:

i) El desembolso inicial requerido de la inversión, a través de la compra de opciones, es inferior al de la compra de acciones.

ii) El riesgo en términos monetarios absolutos es más pequeño en el caso de la opción.

iii) El porcentaje de ganancia o pérdida, dado por el rendimiento del periodo es mayor en el caso de la opción de compra que en el de la adquisición de la acción. Por lo que la inversión en opciones es más arriesgada que si fuese directamente en el activo subyacente.

**Punto de vista del emisor**

El inversor que emite una opción de compra espera que la cotización de la acción subyacente se va a mantener estable, o tenderá a la baja, durante los próximos meses. Su único beneficio es el valor de la prima.

El emisor de una opción de compra se encuentra en una posición corta en opciones, y puede estar en una *posición larga* o corta en acciones, según, disponga o no de ellas. Si posee la acción subyacente y es reclamada por el propietario de la opción, tendrá que entregarla. Pero si no la posee*(Posición corta)* deberá adquirirla en el mercado y venderla a un precio inferior al comprador de la opción; cuando se emite una opción de compra sin estar respaldada por el activo subyacente se denomina *opción de compra al descubierto (naked call option).*

El emisor de una call (writer) no puede determinar si será ejercida o no. El recibe una prima que mejora su rendimiento.

Como se puede apreciar en la figura 2, la máxima ganancia del emisor vendrá dada por la prima de la opción $(V_c)$. Mientras que la pérdida dependerá de la diferencia entre el precio de mercado el día de su vencimiento y el precio de ejercicio $(V_c - máx[S - X;0])$ siempre que dicha diferencia no sea negativa, pues si así fuese, se tomaría un valor nulo, dado que el beneficio máximo para el emisor de la opción es el valor de la prima.

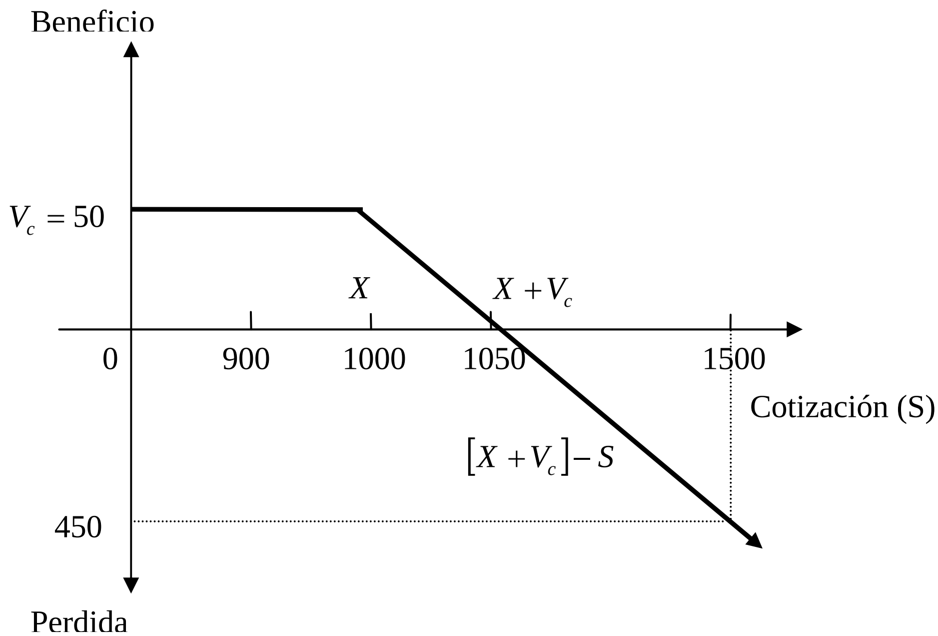


**Figura 2** Gráfica del Perfil del beneficio sobre una Call (Punto de vista del emisor).

### 1.5 opciones de venta (put options)

#### Punto de vista del comprador

Cuando se espera una baja en los precios de las acciones, la adquisición de una opción de venta (put) puede aportar ingresos con un riesgo limitado. La compra de dicha opción asegura contra una caída inesperada de los precios de las acciones, aunque puede ser utilizada con fines especulativos, como puede ser la obtención de ingresos con un mercado a la baja.

La máxima pérdida para el comprador de la opción de venta vendrá determinada por el costo de la misma $(V_p)$. Los resultados de su posición irán mejorando cuando más descienda el precio de mercado de la acción subyacente $\left(máx[X - S;0] - V_p\right)$, hasta llegar a la máxima ganancia que se obtiene cuando la cotización sea nula $(E - V_p)$. Vea la figura 3.

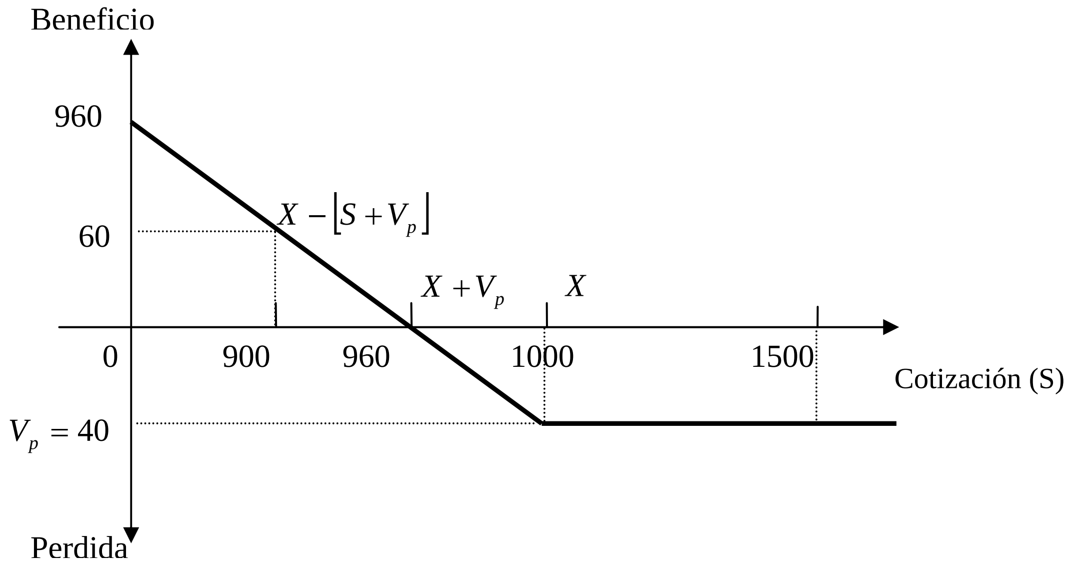


**Figura 3** Gráfica del resultado sobre una opción put(según el comprador).

**Punto de vista del emisor**

El emisor de una opción de venta cree que la tendencia del precio de la acción subyacente será neutra o ligeramente alcista y la emisor de este tipo de opción ofrece la oportunidad de obtener un ingreso en forma de prima.

La máxima ganancia para el vendedor de la opción de venta vendrá determinada por el costo de la misma $(V_p)$. Y los resultados de su posición empeoraran conforme descienda el precio de mercado de la acción subyacente $\left(máx[X-S;0]-V_p\right)$, hasta llegar a la máxima pérdida que se obtendrá en el caso de que la cotización sea nula. Vea la figura 4.

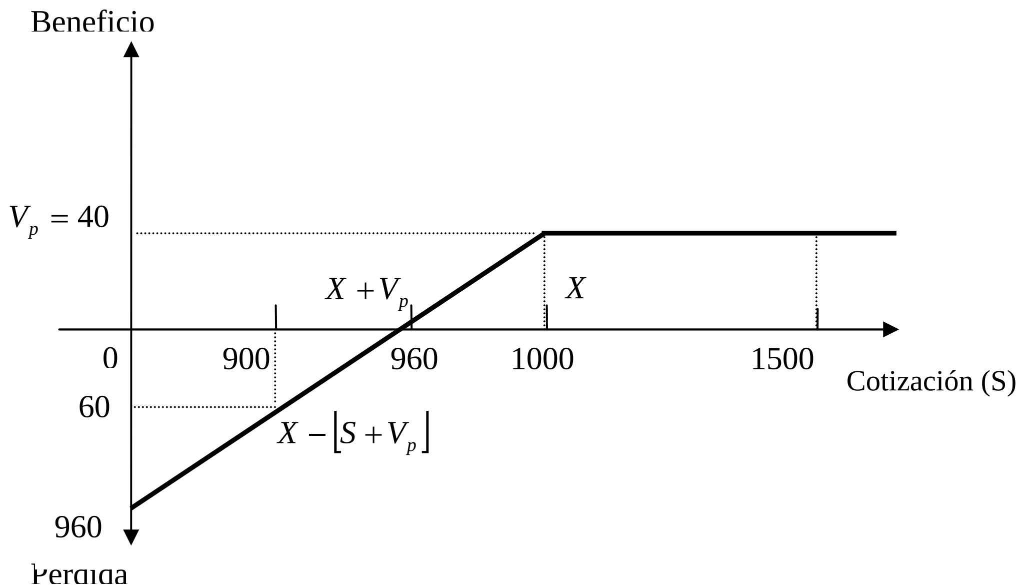


**Figura 4** Gráfica del resultado sobre una opción Put (según el emisor).

En la figura 5, observamos que cuando se espera un fuerte ascenso del valor del activo subyacente se beben adquirir opciones de compra y si lo que se espera es un fuerte descenso del activo se deberían adquirir opciones de venta. Si El valor del activo subyacente permanece estable o ligeramente a la baja, se venderán opciones de compra; y si hay una ligera alza se venden opciones de venta.

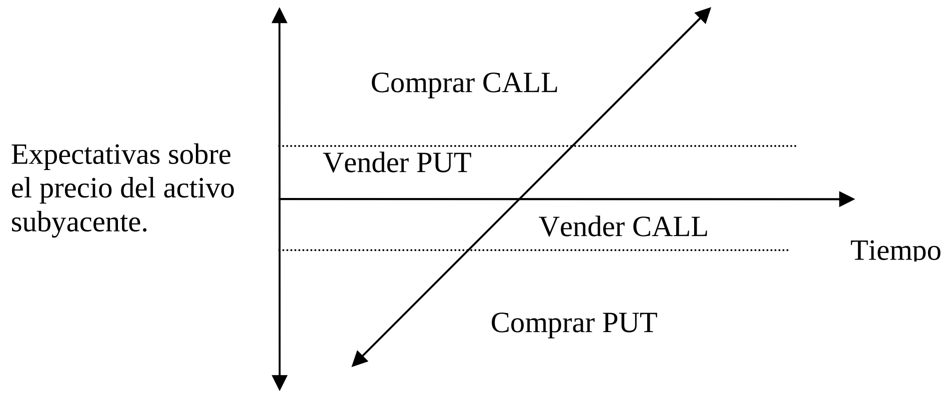


**Figura 5**

## 1.6 Sensibilidad del precio de una opción

Ciertas variables exógenas afectan el precio de las opciones, por lo que debemos analizarlas con coeficientes representativos de dichas relaciones, los cuales nos permitirán establecer una cobertura de riesgo en carteras con opciones.

### Coeficiente Delta

Este coeficiente se define como la variación producida en el precio de la opción por unidad de cambio en el precio de la acción subyacente. El coeficiente delta en su forma discreta se expresa como

$$Delta = \frac{\Delta \text{ precio de la opción}}{\Delta \text{ precio de la acción}} = \frac{\Delta v}{\Delta s}$$

y en forma continua,

$$\Delta_c = \frac{\partial V_c}{\partial S} = N(d_1) \qquad\qquad \Delta_p = \frac{\partial V_p}{\partial V_c} = N(d_1) - 1$$

Las deltas (conocidas también cono ratios de cobertura) indican el número de acciones necesario para cubrir una posición en opciones.

Si medimos el porcentaje de variación del precio de la opción, cuando el precio del activo subyacente varía un 1%, obtenemos la elasticidad de la misma,

$$Elasticidad = \frac{\partial V_C}{\partial S}\frac{S}{V_C}$$

La elasticidad es una medida del apalancamiento obtenido con una opción. Con relación a la elasticidad surge el concepto de *beta de la opción*, que es una medida del riesgo. Matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$\beta \text{ de la opción} = \beta \text{ de la acción} \times \text{Elasticidad de la opción}$$

**Coeficiente GAMMA**

La gamma de una opción mide la tasa de cambio de la delta cuando el precio de la acción varía una unidad. En forma matemática se define como:

$$Gamma = \frac{\Delta Delta}{\Delta S} \longrightarrow \gamma = \frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5 d_1^2}}{S\sigma\sqrt{t}}$$

Este coeficiente se ve afectado tanto por la volatilidad como por el plazo hasta el vencimiento de la opción.

**Coeficiente THETA**

Sabemos que el precio de la opción depende directamente del tiempo que resta para el vencimiento de la misma. Cuanto más tiempo le quede más vale, así que la prima de la opción descenderá con el paso del tiempo debido a la proximidad de su fecha de vencimiento.

El Coeficiente Theta es una medida del deterioro temporal, pues nos muestra la variación en el precio de una opción como consecuencia de una variación en el tiempo que resta para su vencimiento. Se define matemáticamente como,

$$Theta = \frac{\Delta V_c}{\Delta T} \rightarrow \theta = \frac{\partial V_c}{\partial T} = \frac{S\sigma}{2\sqrt{t}} N'(d_1) + Xe^{-rT} rN(d_2)$$

**Coeficiente RHO**

Este coeficiente indica la sensibilidad del precio de la opción debida a los cambios del tipo de interés libre de riesgo. Rho es positivo para opciones sobre acciones, mientras que es negativo para otro tipo de activos como es el caso de las opciones sobre futuros. Calculamos rho obteniendo la derivada parcial del precio de la opción con relación al tipo de interés:

$$Rho = \frac{\Delta V_c}{\Delta r} \rightarrow \rho = \frac{\partial V_c}{\partial r} = TXe^{-rT} N(d_2)$$

**Coeficiente VEGA**

El coeficiente vega (también denominado como kappa u omega),indica el cambio en el precio de una opción con respecto a una variación producida en la volatilidad de la acción. La vega la expresamos matemáticamente de la forma que sigue

$$Vega = \frac{\Delta V_c}{\Delta \sigma} \rightarrow \upsilon = \frac{\partial V_c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T} N'(d_1)$$

Se dice que un inversor tiene una posición larga en volatilidad cuando tiene una posición vega positiva, pues si la volatilidad de la acción aumenta, lo hará el valor de su posición. Y tendrá una posición corta cuando el valor del coeficiente es negativo.

## 2. Conceptos básicos de probabilidad

**Esperanza Condicional y varianza condicional, Teorema Central de Límite, Ley de los grandes números**

**Esperanza Condicional y varianza condicional.**

Si $X$ y $Y$ son variables aleatorias conjuntamente discretas, definimos

$$E[X \mid Y = y] = \sum_x xp\{X = x \mid Y = y\}$$
$$= \frac{\sum_x xP\{X = x,\ Y = y\}}{P\{Y = y\}}$$

La esperanza condicional de $X$ dado que $Y = y$, se define como antes, como un promedio ponderado de todos los valores posibles de $X$, pero el peso dado al valor $x$ es igual a la probabilidad condicional de que $X$ sea igual a $x$ dado que $Y$ es igual a $y$.

De manera similar, si $X$ y $Y$ son conjuntamente continuas con una función de densidad conjunta $f(x, y)$, definimos la esperanza condicional de $X$, dado que $Y = y$, como

$$E[X \mid Y = y] = \frac{\int xf(x, y)dx}{\int f(x, y)dx}.$$

Sea $F[X \mid Y]$ la función de la variable aleatoria $Y$ cuyo valor en $Y = y$ es $E[X \mid Y = y]$; observe que $E[X \mid Y]$ es en sí una variable aleatoria. La siguiente proposición es bastante útil.

**Proposición.**

$$E[E[X \mid Y]] = E[X] \qquad (3)$$

Si $Y$ es una variable aleatoria discreta, entonces la ecuación (3), establece que

$$E[X] = \sum_y E[X \mid Y = y]P\{Y = y\}$$

mientras que si $Y$ es continua con densidad $g$, entonces (3) establece que

$$E[X] = \int E[X \mid Y = y] g(y) dy$$

A continuación se mostrará la demostración de la proposición anterior cuando $X$ y $Y$ son discretas:

$$\begin{aligned}
\sum_y E[X \mid Y = y] P\{Y = y\} &= \sum_y \sum_x x P\{X = x \mid Y = y\} P\{Y = y\} \\
&= \sum_y \sum_x x P\{X = x \mid Y = y\} \\
&= \sum_y x \sum_x P\{X = x \mid Y = y\} \\
&= \sum_x x P\{X = x\} \\
&= E[X]
\end{aligned}$$

También podemos definir la varianza condicional de $X$, dado el valor de $Y$, como sigue:

$$Var(X \mid Y) = E\left[(X - E[X \mid Y])^2 \mid Y\right]$$

Es decir, $Var(X \mid Y)$ es una función de $Y$, que en $Y = y$ es igual a la varianza de X dado que $Y = y$. Mediante el mismo razonamiento que nos condujo a la identidad $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ tenemos que

$$Var(X \mid Y) = E[X^2 \mid Y] - (E[X \mid Y])^2$$

Al calcular las esperanzas de ambos lados de la ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
E[Var(X \mid Y)] &= E[E[X^2 \mid Y]] - E\left[(E[X \mid Y])^2\right] \\
&= E[X^2] - E\left[(E[X \mid Y])^2\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

Además, como $E[E[X \mid Y]] = E[X]$, tenemos que

$$Var(E[X \mid Y]) = E\left[(E[X \mid Y])^2\right] - (E[X])^2 \tag{5}$$

Al sumar las ecuaciones (4) y (5), obtenemos la siguiente identidad, conocida como la fórmula de la varianza condicional.

**La fórmula de la varianza condicional**

$$Var(X) = E[Var(X \mid Y)] + Var(E[X \mid Y])$$

**Teorema central del límite.**

Si las variables aleatorias $X_1, ..., X_n$ constituyen una muestra aleatoria de tamaño $n$ de una distribución con media $\mu$ y varianza $\sigma^2 \left(0 < \sigma^2 < \infty\right)$, y $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, entonces para cualquier número fijo $x$,

$$\underset{n\to\infty}{lím}\, P\left[\frac{(S_n / n - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right] = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

**Ley de los grandes números.**

Si $X_1, X_2, ...$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (IID) con esperanza finita $\mu$, y $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, entonces $S_n / n \to \mu$;

$$P\left(\left\{\underset{n\to\infty}{lím} \frac{S_n}{n} = \mu\right\}\right) = 1.$$

# CAPITULO 2

# MOVIMIENTO BROWNIANO Y LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

## 2.1 Movimiento browniano

**Definición de un proceso del movimiento browniano.**

Un proceso estocástico $\{W_t\}$ se llama un proceso de movimiento browniano si tiene las siguientes propiedades:

a) $W_0 = 0$ con probabilidad 1

b) La distribución de $W_t$ es normal con media cero y varianza $t$, para toda $t \geq 0$.

c) Todos los incrementos $\Delta W_t := W_{t+\Delta t} - W_t$ sobre intervalos que no se traslapan son independientes: es decir, los desplazamientos $W_{t_2} - W_{t_1}$ y $W_{t_4} - W_{t_3}$ son independientes para todo $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$.

d) $W_t$ depende continuamente de $t$.

**Definición de un movimiento browniano geométrico**.

Un proceso estocástico $\{S_t\}$ se llama un proceso de movimiento browniano geométrico con parámetro de tendencia $\mu$ y parámetro de volatilidad $\sigma$ si para todos los valores no negativos de $y$ y $t$, la variable aleatoria $\frac{S_{t+y}}{S_y}$ es independiente de $S_u$ para todo $0 \le u \le y$ y además la variable aleatoria $\log\left(\frac{S_{t+y}}{S_y}\right)$ es una variable aleatoria normal con media $\mu t$ y varianza $t\sigma^2$.

Un movimiento browniano geométrico se puede obtener como l{imite de modelos más simples que son los de caminata aleatoria que definimos a continuación.

## 2.2 El movimiento browniano geométrico como límite de modelos más simples

Sea $\Delta$ un incremento pequeño en el tiempo $t$ y supongamos que cada $\Delta$ unidades de tiempo la variable aleatoria $S_t$ crece por un factor $u$ con probabilidad $p$ o bien decrece por un factor $d$ con probabilidad $1-p,$ donde

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right).$$

Es decir, estamos suponiendo que $S_t$ cambia sólo en los valores de $t$ que son múltiplos enteros de $\Delta$; en estos valores, $S_t$ crece por el factor $u$ o decrece por el factor $d$.

Si tomamos $\Delta$ más y más pequeño, de modo que los cambios ocurren más y más frecuentemente (aunque los factores se acercan más y más a uno) la colección $S_t$ se aproxima a un movimiento browniano geométrico. Como consecuencia el movimiento browniano geométrico se puede aproximar por un proceso relativamente simple que aumenta o disminuye por factores fijos en puntos de $t$ espaciados regularmente.

Verifiquemos que el modelo anterior tiende al movimiento browniano geométrico cuando $\Delta$ tiende a cero. Sea $Y_i$ igual a uno si $S_t$ sube para el valor de $t$ igual a $i\Delta$, y sea cero si baja. El número de veces que $S_t$ sube en los primeros $n$

incrementos es $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ y el número de veces que baja es $n - \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Por lo tanto $S_{n\Delta}$ se puede escribir como

$$S_{n\Delta} = S_0 u^{\sum_{i=1}^{n} Y_i} d^{n - \sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

o,

$$S_{n\Delta} = d^n S_0 \left( \frac{u}{d} \right)^{\sum_{i=1}^{n} Y_i}.$$

Si escribimos $n = t / \Delta$ la ecuación anterior se puede expresar en la forma

$$\frac{S_t}{S_0} = d^{t/\Delta} \left( \frac{u}{d} \right)^{\sum_{i=1}^{n} Y_i}.$$

Tomando logaritmos obtenemos

$$\begin{aligned} \log\left( \frac{S_t}{S_0} \right) &= \frac{t}{\Delta} \log(d) + \log\left( \frac{u}{d} \right) \sum_{i=1}^{t/\Delta} Y_i \\ &= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^{t/\Delta} Y_i \end{aligned} \tag{1}$$

donde en (1) se han usado las definiciones de $u$ y $d$. Ahora cuando $\Delta$ tiende a cero hay más y más términos en la suma $\sum_{i=1}^{t/\Delta} Y_i$. Por el teorema central del límite, esta suma se aproxima a la normal, lo cual por (1) implica que $\log\left( \frac{S_t}{S_0} \right)$ tiende a una variable normal. Además de (1) obtenemos

$$\begin{aligned} E\left[ \log\left( \frac{S_t}{S_0} \right) \right] &= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^{t/\Delta} E(Y_i) \\ &= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + 2\sigma\sqrt{\Delta} \frac{t}{\Delta} p \\ &= \frac{-t\sigma}{\sqrt{\Delta}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta}} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\Delta} \right) \\ &= \mu t \end{aligned}$$

Además, la ecuación (1) da que:

$$
\begin{aligned}
Var\left(\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right) &= 4\sigma^2\Delta\sum_{i=1}^{t/\Delta}Var(Y_i) \\
&= 4\sigma^2 tp(1-p) \\
&\approx \sigma^2 t,
\end{aligned}
$$

porque para $\Delta$ pequeño $p \approx 1/2$.

Así vemos que cuando $\Delta t$ se hace pequeño, $\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ (y por el mismo razonamiento $\log\left(\frac{S_{t+y}}{S_y}\right)$) tiende a la variable aleatoria con media $\mu t$ y varianza $t\sigma^2$. Además, debido a que los cambios sucesivos en $S_t$ son independientes y cada uno tiene la misma probabilidad de aumentar, se sigue que $S_{t+y}/S_y$ es independiente de los cambios en $S_t$ para todo $t \le y$. Por lo tanto cuando $\Delta$ tiende a cero, se cumplen las condiciones para un movimiento browniano geométrico, lo cual demuestra que el modelo en efecto tiende a un movimiento browniano geométrico.

### 2.3 La integral estocástica

La teoría del cálculo estocástico comienza con Itô. El primer paso en el cálculo estocástico es la integración. Se necesita darle sentido a

$$I(t) = \int_o^t \rho(s)dB(s), \tag{2}$$

donde $B$ es un movimiento browniano y $\rho$ es un proceso estocástico cuyo valor al instante $s$ depende sólo de los valores del movimiento browniano hasta el instante $s$. El problema es que las trayectorias de $B$ no son de variación acotada. Sin embargo tienen variación cuadrática finita, y esto permite la siguiente construcción. Se toma una partición del intervalo $[0,t]$ por puntos $0 = t_0 \le t_1 \le ... \le t_k = t$ y aproximamos (1) por la suma

$$\sum_{j=1}^{k} \rho(t_{j-1})(B(t_j) - B(t_{j-1})). \qquad (3)$$

En la suma de (3) es importante que el integrando $\rho(t_{j-1})$ se evalúe en el extremo izquierdo del intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ sobre el que se toman los incrementos. Si $\rho$ fuera un portafolio y $B$ el precio de una acción, esto corresponde a escoger el portafolio antes de ver el incremento en el precio de la acción. Con esta restricción sobre la forma de las sumas aproximantes se puede demostrar que conforme la partición se hace más fina, las sumas aproximantes convergen en media cuadrática a una variable aleatoria que denotamos por $\int_o^t \rho(s)dB(s)$.

Las integrales estocásticas de la forma (1) se pueden considerar como procesos estocásticos como funciones del límite superior de integración t. Estas integrales estocásticas tienen la propiedad de martingala porque el integrando $\rho(t_{j-1})$ en la suma (3) se escoge de manera que no dependa del incremento $B(t_j) - B(t_{j-1})$ que lo multiplica. Condicionando a la información disponible al instante $t_{j-1}$, este incremento tiene media condicional cero. Una consecuencia importante de la propiedad de martingala para la integral estocástica $I(t)$ es que

$$E\int_o^t \rho(s)dB(s) = 0 \qquad \forall t \geq 0. \qquad (4)$$

## 2.4 Fórmula de Itô

La Fórmula de Itô es la regla de la cadena para Procesos estocásticos. Ahora veamos la fórmula de Itô para una función del tiempo de tres variables reales $f(t,x,y)$, con sus derivadas parciales $f_t$, $f_x$ y $f_y$ y sus segundas derivadas parciales denotadas por $f_{xy}$, $f_{yy}$ y $f_{xx}$. Y de dos procesos estocásticos $X(t)$ y $Y(t)$, la fórmula general es aparente a partir de este caso. Considerando lo anterior, la fórmula de Itô es

$$
\begin{aligned}
df\big(t,X(t),Y(t)\big) = {} & f_t\big(t,X(t),Y(t)\big)dt \\
& + f_x\big(t,X(t),Y(t)\big)dX(t) \\
& + f_y\big(t,X(t),Y(t)\big)dY(t) \\
& + \frac{1}{2} f_{xx}\big(t,X(t),Y(t)\big)dX(t)dX(t) \\
& + f_{xy}\big(t,X(t),Y(t)\big)dX(t)dY(t) \\
& + \frac{1}{2} f_{yy}\big(t,X(t),Y(t)\big)dY(t)dY(t)
\end{aligned} \tag{5}
$$

Este resultado se obtiene fijando primeramente $t > 0$, tomando la partición $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = t$ del intervalo $[0,t]$, y de

$$f\big(t,X(t),Y(t)\big) - f\big(0,X(0),Y(0)\big) = \sum_{j=1}^{k}\Big[f\big(t_j,X(t_j),Y(t_j)\big) - f\big(t_{j-1},X(t_{j-1}),Y(t_{j-1})\big)\Big]$$

Usando la Serie de Taylor de la diferencia

$$f\big(t_j,X(t_j),Y(t_j)\big) - f\big(t_{j-1},X(t_{j-1}),Y(t_{j-1})\big),$$

pasamos al límite conforme la partición se hace más fina, llegando así a la fórmula de Itô. El término $\frac{1}{2}dX(t)Y(t)$ de (1) resulta al pasar al límite en el término $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\big(X(t_j) - X(t_{j-1})\big)^2$, el término $dX(t)Y(t)$ resulta al pasar el límite en el término $\sum_{j=1}^{k}\big(X(t_j) - X(t_{j-1})\big)\big(Y(t_j) - Y(t_{j-1})\big)$, por último $\frac{1}{2}dY(t)Y(t)$ resulta del límite del término $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\big(Y(t_j) - Y(t_{j-1})\big)^2$.

Cuando los procesos X y Y se pueden escribir como integrales, los términos como $dX(t)Y(t)$ tienen fórmulas más sencillas. Supongamos

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu_1(s)ds + \int_0^t \rho_1(s)dB(s) \tag{6}$$

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu_2(s)ds + \int_0^t \rho_2(s)dB(s) \tag{7}$$

de este modo

$$dX(t) = \mu_1(t)dt + \rho_1(t)dB(t), \tag{8}$$

$$dY(t) = \mu_2(t)dt + \rho_2(t)dB(t), \tag{9}$$

$$dX(t)dX(t) = \rho_1^2(t)dt, \tag{10}$$

$$dX(t)dY(t) = \rho_1(t)dt\rho_2(t)dt, \tag{11}$$

$$dY(t)dY(t) = \rho_2^2(t)dt, \tag{12}$$

Aquí no se están definiendo términos como $dX(t)Y(t)$, ni el término $df(t,X(t),Y(t))$. Estos términos sólo tienen significado cuando integramos (5) y el lado izquierdo queda en la su forma $f(t,X(t),Y(t)) - f(0,X(0),Y(0))$ y el lado derecho queda como una suma de integrales de Lebesgue y de Itô, obtenidas al sustituir (8) y (11).

# CAPITULO 3

# EL MODELO BINOMIAL PARA LA VALUACIÓN DE OPCIONES Y LA FÓRMULA DE BLACK SCHOLES

## 3.1 Modelo de un período

Consideremos una opción europea de tipo call sobre un activo financiero cuyo precio sigue un movimiento browniano geométrico. Sea $S_0$ el valor inicial conocido del activo. Sea $f$ el valor de la opción al tiempo inicial, el cual queremos determinar. Suponemos que la opción tiene un tiempo de vencimiento $T$ que su precio de ejercicio es $X$ y que durante la vida de la opción el precio del activo puede subir a partir de $S_0$ hasta el nivel $S_0u$ o puede bajar de $S_0$ hasta $S_0d$ donde $u > 1$ y $d < 1$. Si el precio del activo sube a $S_0u$ el valor de la opción en $T$ $f_T$ es $f_T = f_u = máx(S_0u - X, 0);$ si el precio del activo baja a $S_0d$ el valor de la opción es $f_T = f_d = máx(S_0d - X, 0).$

Consideremos un portafolio formado por $\Delta$ unidades del activo y la venta en corto (o sea la venta de una opción que tendremos que redimir a su vencimiento) de una opción. El valor de $\Delta$ que hace que el portafolio no tenga riesgo está dado por:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}. \qquad (1)$$

Un portafolio sin riesgo debe tener una ganancia dada por la tasa de interés libre de riesgo $r$. El valor presente del portafolio es $(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$. El costo de formar el portafolio es $S_0\Delta - f$. Se sigue que $S_0\Delta - f = (S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$, de donde

$$f = S_0\Delta - (S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}.$$

Sustituyendo $\Delta$ de la ecuación (1) resulta que el valor de la opción está dado por

$$f = e^{-rT}[p_u f_u + p_d f_d], \qquad (2)$$

donde

$$p_u = \frac{e^{rT} - d}{u - d}, \qquad (3)$$
$$p_u + p_d = 1.$$

## 3.2 Modelo de dos períodos

Consideremos ahora un modelo binomial de dos pasos cada uno con una longitud de $T/2$ años.

El precio inicial del activo es $S_0$. Durante cada paso este se mueve hacia arriba $u$ veces su valor inicial o se mueve hacia abajo $d$ veces su valor inicial. Por ejemplo después de dos movimientos hacia arriba el valor de la opción es $f_T = f_{uu} = máx(S_0 u^2 - X, 0);$ Supongamos que la tasa de interés libre de riesgo es $r$. Aplicando la fórmula (3.2) en cada período obtenemos que el precio de la opción es

$$f = e^{-2r\frac{T}{2}}[p_u{}^2 f_{uu} + 2 p_u p_d f_{ud} + p_d{}^2 f_{dd}]. \qquad (4)$$

Vemos que el precio de la opción es la ganancia esperada descontada usando las probabilidades de riesgo neutro y la tasa de interés libre de riesgo.

Los parámetros $u$, $d$ y $p_u$ en un modelo binomial para cualquier valor de $N$ períodos iguales, cada uno de longitud $\delta t = \frac{T}{N}$ se escogen de modo que se tome en cuenta la media y la varianza del activo durante cualquier intervalo. Igualando las varianzas del activo en el modelo discreto y en el modelo continuo y tomando en cuenta la siguiente condición

$$u = \frac{1}{d},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}, \\ u &= e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}, \end{aligned} \tag{5}$$

cuando se ignoran términos de orden superior a $\delta t$.

### 3.3 Modelo de $N$ períodos

Consideremos un modelo binomial (árbol) con $N$ pasos. Al instante inicial el precio del activo es $S_0$ conocido; tenemos una opción europea de tipo call con precio de ejercicio $K$ y con valor $f_{00}$ que queremos determinar, y $N\delta t = T$ es el tiempo de vencimiento de la opción.

Para evaluar la opción suponemos lo siguiente:

1. La ganancia esperada de los activos considerados es la tasa de interés libre de riesgo.

2. Un flujo financiero en el futuro se puede valuar descontando (o actualizando) su valor esperado a la tasa de interés libre de riesgo.

El modelo binomial que obtenemos de esta forma representa los movimientos de precio del activo de una forma llamada de riesgo neutro, o que no tiene oportunidades de arbitraje.

En el periodo $i\delta t,\quad 0 \le i \le N$ hay $i+1$ valores posibles del activo que son $S_0 u^j d^{i-j}$, $j = 0,\ldots,i$. Sea $f_{ij}$ el valor de la opción en el nodo $(i, j)$ donde $i$ se refiere al periodo $i\delta t,$ $(i=0,\ldots,N)$ y $j$ es el nodo $j$ en el periodo $i\delta t$ para $j=0,\ldots,i$ (el número del nodo crece al subir en el árbol binomial). El precio del activo en el nodo $(i,j)$ es $S_0 u^j d^{i-j}$. En el periodo de vencimiento tenemos

$$f_{N\,j} = máx(S_0 u^j d^{i-j} - X,0), \quad j=0,\ldots,N. \tag{6}$$

Podemos como en el caso de dos periodos ir ahora hacia atrás en el tiempo (con $i$ decreciendo) y obtenemos

$$f_{ij} = e^{-r\delta t}[p_u f_{i+1,j+1} + p_d f_{i+1,j}], \quad i=N-1,N-2,\ldots,0, \quad j=0,\ldots,i. \tag{7}$$

De esta forma obtenemos el valor de la opción $f_{00}$ al instante inicial $0$. Esta forma de evaluar la opción es muy conveniente desde el punto de vista computacional. Usando la fórmula anterior podemos expresar $f_{00}$ en términos de los valores de la opción al tiempo de vencimiento en la forma siguiente:

$$f_{00} = e^{-Nr\delta t}[p_u{}^N f_{N,N} + Np_u{}^{N-1} p_d f_{N.N-1} + \cdots + p_d{}^N f_{N.0}] = e^{-Nr\delta t}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j} f_{N,N-j}\, p_u{}^{N-j} p_d{}^j. \tag{8}$$

Veamos ahora otra forma de expresar el valor de la opción al instante cero. El valor del activo al periodo $N\delta t$ es $S_{Nj} = S_0 u^j d^{N-j}, \quad j=0,1,\ldots,N.$ Este valor se puede escribir en la forma $S_{Nj} = S_0 u^Y d^{N-Y}$, donde $Y$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $N$ y $p$. El valor de la opción en el periodo $N\delta t$ es $f_T = máx(S_{Nj} - X,0) = máx(S_0 u^Y d^{N-Y} - X,0).$ El valor actual de poseer la opción es $e^{-N\delta t} f_T$ y el valor esperado presente de la opción es

$$e^{-N\delta t} E_p\left[f_T\right] = e^{-N\delta t} E_p\left[máx(S_0 u^Y d^{N-Y} - X,0).\right]$$

Por tanto, como en los casos $N=1,$ y $N=2$ obtenemos que el valor de la opción se puede escribir en la forma

$$c = f_{00} = e^{-N\delta t} E_p\left[f_T\right] = e^{-N\delta t} E_p\left[máx(S_0 u^Y d^{N-Y} - X,0).\right] \tag{9}$$

### 3.4 La Fórmula de Black-Scholes

Consideremos una opción call con precio de ejercicio $X$ y tiempo de ejercicio t.. Es decir, la opción nos permite comprar una unidad del bien subyacente en el tiempo t por el precio $X$. Supongamos además que la tasa nominal de interés es $r$, compuesto en forma continua y que el precio del bien sigue un movimiento browniano geométrico con parámetro de varianza $\sigma^2$. Bajo estas hipótesis encontraremos el costo único de la opción que no da oportunidad de arbitraje.

Usamos que las primeras t unidades de tiempo de un movimiento browniano geométrico con ‘parámetro de varianza $\sigma^2$ se puede aproximar por un proceso, que en los puntos de tiempo $t/n, 2t/n, \ldots, nt/n,$ o bien sube por un factor

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1 + \sigma\sqrt{t/n} + \frac{\sigma^2 t}{2n} \tag{10}$$

o bien baja por un factor

$$d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}} \approx 1 - \sigma\sqrt{t/n} + \frac{\sigma^2 t}{2n}, \tag{11}$$

donde n es un entero positivo grande, como consecuencia, vemos que las t primeras unidades de tiempo de cada movimiento browniano geométrico con ‘parámetro de varianza $\sigma^2$, sin importar cual es el valor del otro parámetro $\mu$, se puede aproximar por un modelo binomial de $n$ periodos cuyos factores hacia arriba y hacia abajo están dados por las ecuaciones (10) y (11). De la sección anterior sabemos que hay un único costo que no permite arbitraje $c$ para este modelo de aproximación. El modelo de $n$ periodos converge al movimiento browniano geométrico cuando la $n$ crece. Usando en cada periodo la tasa de interés $rt/n$, $c$ será convergente al costo de no arbitraje cuando la $n$ tiende a infinito.

Sean $u$ y $d$ dadas por (10) y (11) y sea $Y$ una variable aleatoria binomial con parámetros $n$ y $p$ donde

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1+rt/n-d}{u-d} \\
&\approx \frac{rt/n+\sigma\sqrt{t/n}-\sigma^2 t/2n}{2\sigma\sqrt{t/n}} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{r\sqrt{t/n}}{2\sigma}-\frac{\sigma\sqrt{t/n}}{4}.
\end{aligned}
$$

Se sigue de los resultados de la sección anterior que el precio único de no arbitraje de la opción para el modelo de $n$ periodos es

$$
\begin{aligned}
C &= \left(1+rt/n\right)^{-n} E\left[\left(S(0)u^Y d^{n-Y}-X\right)^+\right] \\
&= \left(1+rt/n\right)^{-n} E\left[\left(S(0)\left(\frac{u}{d}\right)^Y d^n - X\right)^+\right] \\
&= \left(1+rt/n\right)^{-n} E\left[\left(S(0)e^{2\sigma\sqrt{t/n}Y}e^{-\sigma\sqrt{nt}}-X\right)^+\right] \\
&= \left(1+rt/n\right)^{-n} E\left[\left(S(0)e^{W}-X\right)^+\right],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

donde

$$W = 2\sigma\sqrt{t/n}Y-\sigma\sqrt{nt}$$

Como $Y$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $n$ y $p$ se sigue que, cuando $n$ crece $Y$ se aproxima a una variable aleatoria normal. De aquí obtenemos que $W$ es una variable aleatoria normal. Además, como $E\left[Y\right]=np$,

$$
\begin{aligned}
E\left[W\right] &= 2\sigma\sqrt{t/n}E\left[Y\right]-\sigma\sqrt{n/t} \\
&= 2\sigma\sqrt{t/n}np-\sigma\sqrt{n/t} \\
&= 2\sigma\sqrt{nt}\left(p-1/2\right) \\
&= 2\sigma\sqrt{nt}\left(\frac{r\sqrt{t/n}}{2\sigma}-\frac{\sigma\sqrt{t/n}}{4}\right) \\
&= \left(r-\sigma^2/2\right)t.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Además, $Var(Y)=np\left(1-p\right)$ y $p\approx 1/2$ para $n$ grande, así tenemos que

$$\begin{aligned} Var(W) &= \left(2\sigma\sqrt{t/n}\right)^2 Var(Y) \\ &= 4\sigma^2 tp\left(1-p\right) \qquad (14) \\ &= \sigma^2 t. \end{aligned}$$

Como todas las aproximaciones son exactas cuando $n$ tiende a infinito, de las ecuaciones (12) – (14) vemos que $c$, el costo único de la opción que no resulta en oportunidad de arbitraje cuando el precio del bien subyacente sigue un movimiento browniano geométrico con parámetro de volatilidad $\sigma$, es

$$C = e^{-rt}E\left[\left(S(0)e^{W} - X\right)^{+}\right], \qquad (15)$$

Donde $W$ es una variable aleatoria normal con media $\left(r-\sigma^2/2\right)t$ y varianza $\sigma^2 t$,

Usando las fórmulas para probabilidades normales se puede evaluar la expresión anterior para $C$ para obtener la siguiente fórmula, que se conoce como la fórmula de Black-Scholes para el precio de una opción

$$C = S(0)\Phi\left(\omega\right) - Xe^{-rt}\Phi\left(\omega - \sigma\sqrt{t}\right), \qquad (16)$$

donde

$$\omega = \frac{rt + \sigma^2 t/2 - \log\left(X/S(0)\right)}{\sigma\sqrt{t}}$$

y donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de la normal estándar.

### 3.5 Valuación de una opción americana

Como hemos mencionado anteriormente una opción americana se puede ejercer en cualquier momento antes de su fecha de vencimiento. En esta sección veremos como se establece el precio de una opción de venta americana. Supongamos que

$$\begin{array}{ll} S_0 = 100 & u = 1.1 \\ X = 100 & d = 0.9 \\ r = 0.05 & p = 0.85 \end{array}$$

La opción vence en $t = 3$

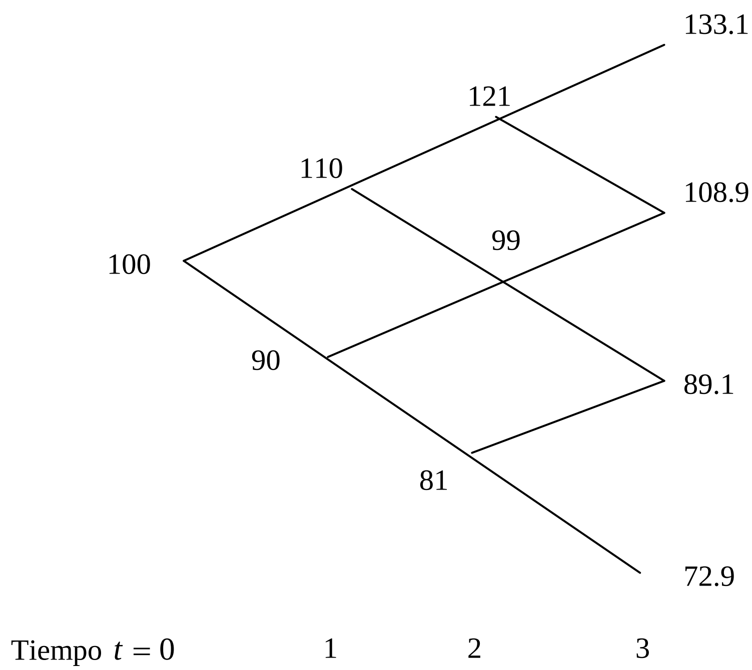


**Figura 1** Árbol de precios de acciones.

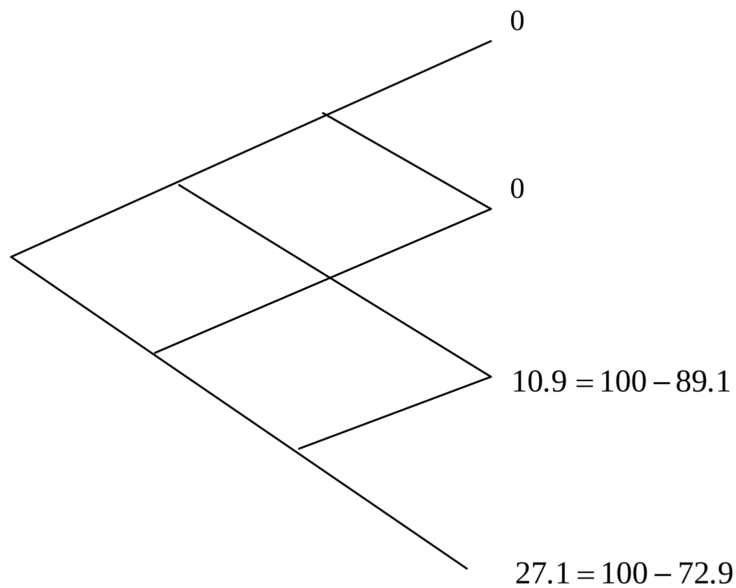


**Figura 2** Árbol de valor de una opción de venta americana

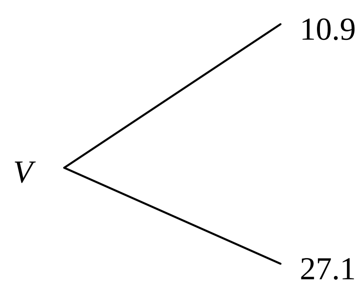


**Figura 3** Subárbol del árbol de opciones

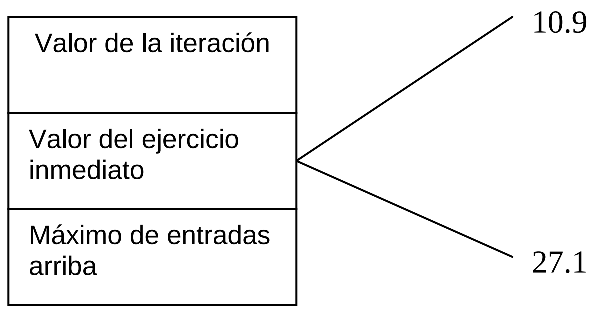


**Figura 4** Notación de valores alternativos en cada nodo

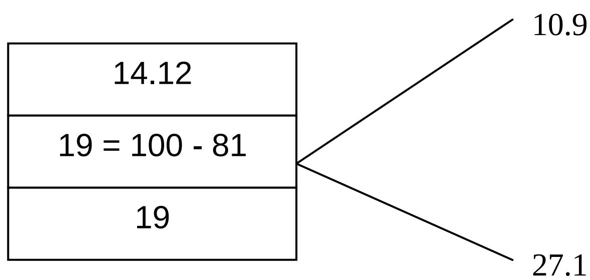


**Figura 5** Nodo completado del árbol de la opción de venta

Las probabilidades de precios de arbitraje son:

$$q = \frac{e^{0.05} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.7564 \qquad \text{y} \qquad 1 - q = 0.2436$$

Por comodidad, reproducimos el árbol de precios de las acciones (figura 1). Como vemos (en la figura 2), sólo llenamos en la última columna, el valor del precio de la opción de venta.

En la figura 3 vemos el subárbol de opciones. Para valuar opciones tenemos dos alternativas. Podemos ejercer la opción ( $t = 2$ ) o conservarle un periodo más ($t = 3$). La estrategia será asignar valores a cada alternativa y, luego, escoger el máximo para $V$. Para registrar los valores posibles y su máximo, utilizamos la anotación que se muestra en la figura 2.9.4, este valor de iteración es

$$\text{Valor de la Iteración} = e^{-0.05}\left[10.9(0.7564) + 27.1(0.2436)\right] = 14.12$$

como podemos ver en figura 5. Note que no descontamos el valor, 19, porque recibimos los fondos de inmediato. No hay tiempo de espera. Los cálculos de iteración subsecuentes usando este nodo se realizan por medio de la entrada del cuadro “Máximo”. En la figura 6 se muestra el árbol completo que se obtiene de la misma manera. En consecuencia, nuestra opción de venta vale hoy 2.74 dólares. Si no fuera por el privilegio de “ejercicio prematuro” valdría considerablemente menos.

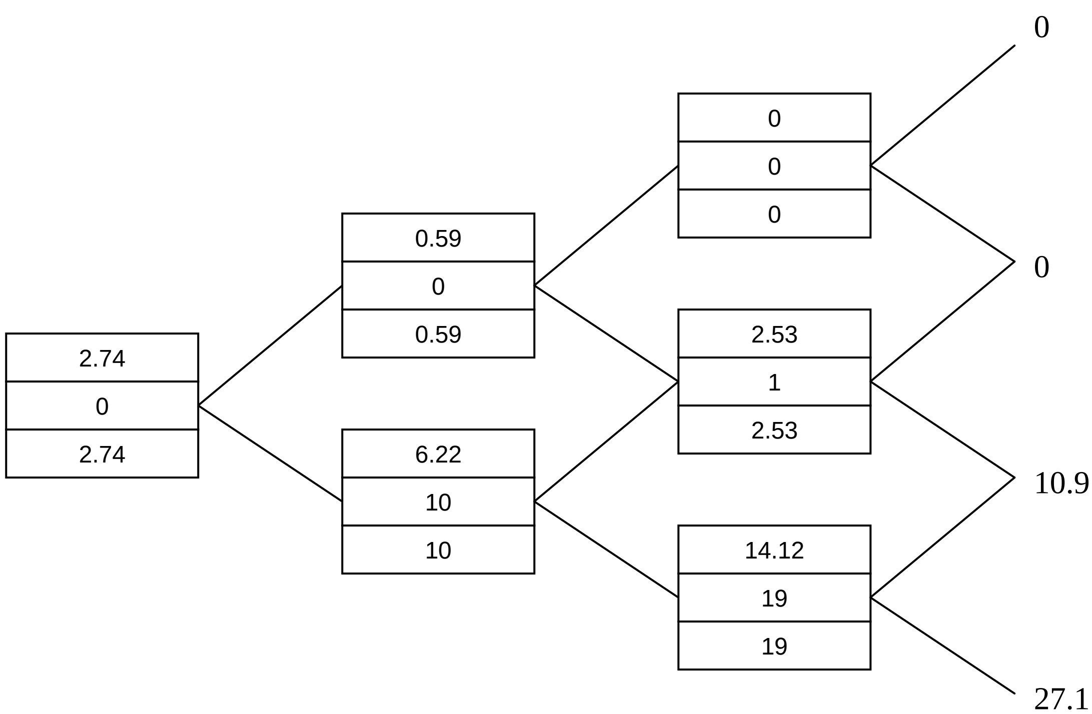


**Figura 6** Árbol completo para una opción de venta americana.

# CAPÌTULO 4

# EL MÉTODO DE MONTE CARLO

## 4.1 Introducción

La simulación por Monte Carlo es una herramienta computacional importante para las finanzas, pues, podemos evaluar un portafolio, el precio de opciones y estimar el valor del riesgo. El método Monte-Carlo fue bautizado así por su analogía con los juegos de ruleta de los casinos, el más célebre de los cuales es el de Monte-Carlo, casino cuya construcción fue propuesta en 1856 por el príncipe Carlos III de Mónaco, inaugurado en 1861.

El método Monte-Carlo es un método numérico que permite resolver problemas físicos y matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias.

La importancia actual del método Monte-Carlo se basa en la existencia de problemas de difícil solución por métodos analíticos o numéricos, pero que dependen de factores aleatorios o se asocian a un modelo determinístico; como el cálculo de integrales de muchas variables, minimización de funciones, etc. Gracias a la velocidad de cómputo en la actualidad, el cálculo de Monte-Carlo es sumamente utilizado para la solución de ciertos problemas.

En las Finanzas, podemos utilizar las simulaciones de Monte-Carlo para: encontrar el rango de resultados esperados representado por una lista de operaciones históricas; saber lo que nos espera en un futuro, sabiendo las operaciones históricas; para conocer hasta donde puede caer nuestra inversión inicial; así como, saber la racha de operaciones positivas y negativas consecutivas que se pueden esperar; entre otras tantas.

La simulación de Monte-Carlo nos permite tener información más precisa de los riesgos a los que estamos expuestos en una inversión, de las necesidades de capital, etc. Con el MMC se logra tener una visión más real de lo que podemos esperar.

### 4.2 Método de Monte Carlo

Supongamos que $Y$ es una variable aleatoria, y queremos estimar el valor esperado, entonces

$$\theta = E[Y]$$

como en el caso de una opción call europea $C(s,T,K) = e^{-rT} E\left[(S(T) - K)^+\right]$.
Supongamos que podemos generar valores de variables aleatorias independientes con la misma distribución de $Y$. Al generar un nuevo valor se completa una corrida. Entonces hacemos $k$ corridas independientes de simulación, es decir, generamos los valores $Y_1, Y_2, ..., Y_k$. Si denotamos por

$$\overline{Y} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i$$

al promedio aritmético de los valores generados, entonces por la Ley fuerte de los grandes números, tenemos que,

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i \to E[Y]$$

casi seguramente cuando $k \to \infty$, y se puede usar a $\overline{Y}$ como estimador de $\theta$. Su valor esperado y varianza están dados como sigue:

$$E\left[\overline{Y}\right] = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} E\left[Y_i\right] = \theta$$

y

$$Var\left[\overline{Y}\right] = \frac{Var\left[Y\right]}{k}$$

Por el teorema central del límite obtenemos intervalos de confianza asintóticos. Al estimar $E\left[Y\right]$ por $\overline{Y}$ y definimos

$$S_{\overline{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 / (k-1)},$$

entonces para $k$ grande

$$\left(\overline{Y} - z_{1-\alpha/2}\left(S_{\overline{Y}} / \sqrt{k}\right), \overline{Y} + z_{1-\alpha/2}\left(S_{\overline{Y}} / \sqrt{k}\right)\right)$$

es un intervalo de $100(1-\alpha)\%$ de confianza para $E\left[Y\right]$ donde $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil de $1-\alpha/2$ de la distribución normal estándar. Por lo que cuando $k$ es grande, $\overline{Y}$ tiende a ser un buen estimador de $\theta$.

Este enfoque para estimar un valor estimado se conoce como simulación de Monte Carlo. La tasa de convergencia de $O\left(k^{-1/2}\right)$ se basa en que $Y_i$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución, lo cual es aproximadamente correcto si se generan variables aleatorias usando un generador de números pseudo aleatorios.

### 4.3 Integración por el método de Monte Carlo

Si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (IID) con esperanza finita $\mu$, y $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, entonces por la ley de los grandes números, $S_n / n \to \mu$;

$$P\left(\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \right\}\right) = 1 .$$

Supongamos que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ tienen la misma función de densidad de probabilidad $f(x)$. Definimos a $G$,

$$G = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g_n(X_n) \tag{1}$$

donde cada una de las $g_n$ puede ser una función diferente de las $X_n$. La esperanza de $G$ es

$$E[G] = \mu_G = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} E(g_n(X)) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_{g_n(X)} \tag{2}$$

Si las $X_n$ son independientes, la varianza de $G$ es

$$Var(G) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} Var(g_n(X)) \tag{3}$$

Sean todas las $g_n \equiv g$, entonces la esperanza de $G$ queda como

$$E(G)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}E\big(g(X)\big)=E\big(g(X)\big), \tag{4}$$

en este caso, $G$ es un estimador insesgado de

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx \tag{5}$$

Aquí, la varianza de $G$ es,

$$Var(G)=Var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g(X_n)\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N^2}Var\big(g(X)\big)=\frac{Var(g(X))}{N} \tag{6}$$

conforme crece $N$ (el tamaño de muestra), la varianza de $G$ decrece como $1/N$. Todo esto nos lleva al método de Monte Carlo para evaluar integrales;

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g(X_n)\right) \tag{7}$$

Es decir, se obtiene una sucesión de variables aleatorias $X_n$ con función de probabilidad $f(x)$, luego evaluamos $g(X_n)$ para cada $X_n$. El promedio aritmético de los valores de $g$ es un estimador de la integral. Por la Ley fuerte de los grandes números este promedio converge al valor de la integral, y la varianza del estimador decrece conforme el número de términos va creciendo.

Para el estimador $G$ existe su media $\mu_G$ y su varianza $Var(G)$. La desigualdad de Chebyshev nos dice que

$$P\left\{|G-\mu_G|\geq\left[\frac{Var(G)}{\delta}\right]^{1/2}\right\}\leq\delta \tag{8}$$

para cualquier $\delta>0$. Supongamos que $\delta=1/100$ y usemos (6):$Var(G)=\frac{Var(g(x))}{N}$

$$P\left\{(G-\mu_G)^2\geq\frac{100}{N}Var(g)\right\}\leq\frac{1}{100}$$

Tomando $N$ suficientemente grande podemos hacer que la varianza de $G$ sea tan pequeña como queramos. La probabilidad de obtener una desviación grande relativa a $\delta$ entre el estimador de la integral y el valor verdadero, es muy pequeña.

## 4.4 Técnicas de reducción de varianza

### 4.4.1 Variables antitéticas

La idea es inducir alguna correlación. Consideremos la idea de generar sucesiones de réplicas pares $\left(X_i^1, X_i^2\right)$, $i = 1,...,n$:

$$X_1^1,\ X_2^1,\ ...,\ X_n^1$$
$$X_1^{21},\ X_2^2,\ ...,\ X_n^2$$

Estas variables son independientes horizontalmente en el sentido que $X_{i_1}^j$ y $X_{i_2}^k$ son independientes si $i_1 \neq i_2$, para cualquier $j$ y $k$. Los promedios por parejas $X_i = \left(X_i^1 + X_i^2\right)/2$ son independientes, y se puede construir un intervalo de confianza basados en ellos. Pero no se pide independencia vertical, porque para $i$ fija $X_i^1$ y $X_i^2$ pueden ser independientes. Si construimos la media muestral $\overline{Y}$ con base a las $X_i$, tenemos

$$Var\left(\overline{Y}\right) = \frac{Var\left(X_i\right)}{n} = \frac{1}{4n}\left[Var\left(X_i^1\right) + Var\left(X_i^2\right) + 2Cov\left(X_i^1, X_i^2\right)\right]$$

De aquí vemos que para reducir la varianza muestral, debemos de tomar réplicas que estén negativamente correlacionadas dentro de cada pareja, de modo que $Cov(X_i^1, X_i^2) < 0$. Se puede inducir correlación negativa si se usa la sucesión aleatoria $\{U_k\}$ para la primera réplica en cada pareja, y luego $\{1 - U_k\}$ en la segunda. Como las sucesiones de entrada están negativamente correlacionadas esperamos que las sucesiones de salida también lo estén.

Ahora el intervalo de confianza es más pequeño y la estimación más confiable. Pero el método de variables antitéticas no siempre funciona. Cuando una simulación se usan variables aleatorias normales $Z_i$ se pueden usar $-Z_i$ para la pareja antitética.

### 4.4.2 Reducción de varianza mediante variables de control

Consideremos una situación general en la que se quiere calcular

$$\theta = E[Y]$$

Supongamos que se tiene una variable aleatoria $V$ cuya media es $\mu_v = E(V)$ se conoce. En lugar de usar el valor de $Y$ como el estimador, podemos usar uno de la forma

$$Y + c(V - \mu_V),$$

donde c es una constante por especificarse Entonces $E(Y + c(V - \mu_V)) = \theta$. El mejor estimador de este tipo se obtiene escogiendo $c$ de modo que se minimice $Var(Y + c(V - \mu_V))$ . Se tiene

$$Var(Y + c(V - \mu_V)) = Var(Y) + c^2 Var(V) + 2cCov(Y,V) \tag{9}$$

Derivando (9) con respecto a $c$, obtenemos que el valor de $c$ que minimiza $Var(Y + c(V - \mu_V))$ es

$$c^* = -\frac{Cov(Y,V)}{Var(V)}$$

Sustituyendo este valor en (9) y dividiendo entre $Var(Y)$ se obtiene

$$\frac{Var(Y + c^*(V - \mu_V))}{Var(Y)} = 1 - Corr^2(Y,V)$$

donde

$$Corr(Y,V) = \frac{Cov(Y,V)}{\sqrt{Var(Y)Var(V)}}$$

es el coeficiente de correlación entre $Y$ y $V$. Por tanto, la reducción de varianza obtenida usando la *variable de control* $V$ es $100 \times Corr^2(Y,V)$ %. El valor de $c^*$ se puede estimar mediante

$$\varsigma^* = -\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(V_i - V\right)^2}$$

y este valor da el siguiente estimador de $\theta$ mediante simulación

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(Y+\varsigma^{*}\left(V_i-\overline{V}\right)\right).$$

Veamos como usar variables de control al simular opciones asiáticas. Supongamos que la ganancia de la opción es

$$máx\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}S(t_i)-X,0\right)$$

donde la opción madura en $T$ años, $t_i = i\delta t$ y $\delta t = T/N$. Se tiene que la ganancia está positivamente correlacionada con

$$V=\sum_{i=0}^{N}S(t_i)$$

Usamos $V$ como variable de control. Así, tenemos que

$$E(V)=\sum_{i=0}^{N}E\left(S(i\delta t)\right)=\sum_{i=0}^{N}S(0)e^{ri\delta t} = S(0)\frac{1-e^{r(N+1)\delta t}}{1-e^{r\delta t}}$$

### 4.4.3 Muestreo estratificado

Supongamos que nosotros estamos interesados en estimar $E[X]$ y que $X$ depende de una variable aleatoria $Y$ tomando valores finitos de $y_i$ con probabilidades conocidas. Entonces, $Y$ tiene una distribución de probabilidad discreta con una función de probabilidad masa conocida:

$$P\{Y=y_i\}=p_j \qquad\qquad j=1,\ldots,m$$

Usando condicionales, tenemos que

$$E[X]=\sum_{j=1}^{m}E[X \mid Y=y_i]p_j \text{ .}$$

Aquí, nosotros seleccionamos el valor de $Y$ y entonces $X$, dado que $Y = y_j$; este evento es un *estrato*. En la reducción de varianza condicionada, se tiene $Y$, no $X$.

En resumen, Si queremos estimar $E[X]$ en una situación en la que $X$ depende de una variable aleatoria $S$ que toma alguno de los valores $1,...,k$ con probabilidades conocidas, entonces la técnica de estratificación de las ejecuciones de simulación en $k$ grupos, donde el $i-ésimo$ grupo satisface $S = i$, donde $\overline{X_i}$ es el valor promedio de $X$ en las ejecuciones tales que $S = i$, para luego estimar $E[X]\sum_{i=1}^{k} E[X \mid S = i]P\{S = i\}$ mediante $\sum_{i=1}^{k} \overline{X}, P\{S = i\}$, se llama ***muestreo estratificado.***

Es interesante notar que la demostración de que el muestreo estratificado conduce a una reducción de varianza se vale de la fórmula de varianza condicional para afirmar que

$$Var(X) \geq E[Var(X \mid Y)]$$

mientras que la demostración de que el condicionamiento siempre reduce la varianza de un estimador utiliza la fórmula de varianza condicional,

$$Var(X) \geq Var(E[X \mid Y])$$

Como otra ilustración del muestreo estratificado, suponga que queremos realizar $n$ ejecuciones de simulación para estimar

$$\theta = E[h(U)] = \int_0^1 h(x)dx$$

Si hacemos

$$S = j \qquad \text{si} \qquad \frac{j-1}{n} \leq U < \frac{j}{n}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

entonces

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E\left[h(U) \mid S = j\right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E\left[h(U_j)\right] \end{aligned}$$

donde $U_j$ es uniforme en $\left((j-1)/n,\ j/n\right)$. Así, más que generar $U_i, \ldots, U_n$ y luego emplear $\sum_{j=1}^{n} h(U_j)/n$ para estimar $\theta$, obtenemos un mejor estimador utilizando

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} h\left(\frac{U_j + j - 1}{n}\right)$$

### 4.4.4 Muestreo por importancia

Otro método de reducción de varianza, es el muestreo por importancia, el cual está basado en la idea de "distorsión" de la probabilidad fundamental de la medida.

Sea $X = \left(X_1, \ldots, X_n\right)$ un vector de variable aleatorias con una función de densidad conjunta (o función de masa conjunta en el caso discreto) $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, y suponga que estamos interesados en estimar

$$\theta = E\left[h(X)\right] = \int h(x) f(x) dx$$

donde lo anterior es una integral $n$- dimensional (si las $X_i$ son discretas, la integral se interpreta como una suma con $n$ índices).

Suponga que una simulación directa del vector aleatorio $X$, así como el calculo de valores de $h(X)$, es ineficaz, pues es difícil simular un vector aleatorio con función de densidad $f(x)$, o la varianza de $h(X)$ es grande, o una combinación de ambas.

Otra forma en la cual se puede utilizar la simulación para estimar $\theta$ es observar que si $\frac{h(x)f(x)}{g(x)}$ es otra densidad de probabilidad tal que $f(x)=0$ siempre que $g(x)=0$, entonces podemos expresar $\theta$ como

$$\begin{aligned}\theta &= \int \frac{h(x)f(x)}{g(x)}g(x)dx \\ &= E_g\left[\frac{h(X)f(X)}{g(X)}\right]\end{aligned} \tag{10}$$

donde hemos escrito $E_g$ para destacar que el vector aleatorio $X$ tiene densidad conjunta $g(x)$.

La ecuación (10) implica que $\theta$ se puede estimar mediante la generación sucesiva de valores de un vector aleatorio $X$ con función de densidad $g(x)$ y luego utilizar como estimador el promedio de los valores de $h(X)f(X)/g(X)$. Si se puede elegir una función de densidad $g(x)$ de modo que la variable aleatoria $h(X)f(X)/g(X)$ tenga una varianza pequeña, entonces este método, conocido como ***muestreo de importancia***, puede producir un estimador eficiente de $\theta$.

# CAPÌTULO 5

# OPCIONES EXÓTICAS

## 5.1 Introducción

Las opciones exóticas surgen con la intención, de abaratar el costo de las primas de las opciones tradicionalmente negociadas, o bien, para ajustarse más adecuadamente a determinadas situaciones. A las opciones exóticas también se les conoce como opciones de segunda generación, ya que lo que tratan es de superar los límites de las operaciones estándar, las cuáles, presentan en la mayoría de los casos tintes de rigidez.

La aparición de estas opciones, y su creciente utilización, está significando un gran impacto en los diversos mercados de capitales a nivel internacional, implantándose como un instrumento muy útil tanto para la gestión de riesgos, como para la especulación. No obstante, su volumen de negociación no es todavía lo suficientemente grande, pero se prevé, que con su estudio y uso, experimenten un auge mayor. Actualmente, su utilización comienza a extenderse y podría darse el salto de los mercados OTC´s, a los mercados organizados, debido a la gran liberalización que los subyacentes están experimentando.

### TIPOS DE OPCIONES

En finanzas, una opción es un tipo de derivado. Las opciones se pueden dividir en dos grupos:

1. OPCONES VAINILLA: que consisten en los contratos de opciones compra (call) y opciones de venta (put).

2. OPCIONES EXÓTICAS: incorporan variantes que hacen más complejo su tratamiento y su valoración.

**OPCIONES VAINILLA (vainilla options)**

Las opciones vainilla son *opciones de compra* (call) y *opciones de venta* (put). En función de su forma de ser ejercidas podemos diferenciar:

- **Opción Europea:** se ejercen en una fecha determinada (fecha de ejercicio).
- **Opción Americana:** pueden ser ejercidas a lo largo de su vida hasta la fecha de ejercicio.

El método mayormente empleado para valorar opciones europeas es el de *Black-Scholes*. Para las opciones americanas, que rara vez son ejercidas antes de su fecha de ejercicio, se puede emplear el mismo método, suponiendo que su comportamiento es similar. El trabajo de Myron Scholes y Fisher Black, fue mejorado posteriormente por Robert C. Merton, incorporando $r$.

**OPCIONES EXÓTICAS**

Son opciones que son más complejas que las opciones comúnmente negociadas (*plain vanilla*). Estos productos son negociados normalmente *over-the-counter* (OTC). Incorporan distintas variantes ("exoticidades") que pueden llegar a complicar el cálculo de la valoración de la opción en gran medida. En muchas casos, para valorarlas se emplea la *generación de números aleatorios en* base al *Método de Monte Carlo.*

Exoticidad en el cálculo del pago (*pay off*):

- **Opción Asiática (*Asian option*):** depende de la media del valor del subyacente en un periodo determinado.

- ***Lookback option*****:** se calcula en función del máximo (o mínimo) alcanzado por el subyacente en un periodo. Variantes: opción rusa (***Russian option***) es una opción lookback que está operativa en perpetuidad.
- **Opción binaria o digital (*digital / binary option*):** el pago puede ser una cantidad determinada (o un activo) o, por el contrario, no haber pago en absoluto.
- **Opción "oscilante" (*swing option*):** el comprador puede "oscilar" el precio del subyacente. Principalmente empleada en energía.
- **Opción "parisina" (*Parisian option*):** depende del tiempo que el activo esté por encima (o por debajo) del *strike*.

Exoticidad en la fecha/forma de ejercicio:

- **Opción bermuda (*Bermudan option*):** permite ser ejercida en varios momentos del tiempo (espaciados de forma discreta); por ejemplo, trimestralmente. Variantes: opción "canaria" (***Canary option***) es una opción a caballo entre una opción europea clásica y una bermuda; permite ser ejercida en varios momentos pero nunca antes de un periodo fijo, por ejemplo, de un año.
- **Opción con barrera (*barrier option*):** la opción deja de existir –*knock out*- (o comienza a existir –*knock in*-) cuando el subyacente alcanza (o se cruza) un determinado valor (*barrier level*). Se pueden dar distintas combinaciones de condiciones:
    - ***Up-and-out*****:** el subyacente comienza a fluctuar bajo el *barrier level* y si lo alcanza, la opción deja de existir (*knock out*).
    - ***Down-and-out*****:** el subyacente comienza a fluctuar sobre el *barrier level* y si lo cruza, la opción deja de existir (*knock out*).
    - ***Up-and-in*****:** el subyacente comienza a fluctuar bajo el *barrier level* y si lo alcanza, la opción se activa (*knock in*).
    - ***Down-and-in***: el subyacente comienza a fluctuar sobre el *barrier level* y si lo cruza, la opción se activa (*knock in*).

## 5.2 Opciones que dependen de su trayectoria

### Opciones Barrera

En las opciones barrera el precio de la acción $S_b$ es seleccionado del valor de la barrera. Durante la vida de la opción, esta barrera puede cruzar o no. En una opción Knock-out, el contrato es cancelado si el valor de la barrera es cruzado durante el tiempo de vida de la opción; contrariamente las opciones knock-in son activadas sólo si se cruza la barrera. Sea $S_b$ la barrera y $S_0$ el precio de la acción: si $S_b > S_0$, se tiene una opción up; si $S_b < S_0$ se tiene una opción down.

Una opción put down-and-out es una opción de venta que se invalida si el precio de la acción cae debajo de la barrera $S_b$; en este caso $S_b < S_0$, y $S_b < X$ . El riesgo de este tipo de opciones es reducido y es razonable esperar que es más barata que una opción vainilla. En el caso de una opción call up-and-out se invalida si cruza la barrera.

Ahora consideremos una opción put down-and-in. Esta opción es activada sólo si la barrera $S_b < S_0$ se cruza. Si tenemos una opción put down-and-out y una opción put down-and-in es equivalente a tener una opción put vainilla. También tenemos la siguiente relación de paridad:

$$P = P_{di} + P_{do}$$

donde $P$ es el precio de una put vainilla, y $P_{di}$, $P_{do}$ son los precios de las opciones down-and-in y down-and-out, respectivamente. Algunas veces, se rebaja el precio de una opción si la barrera se cruza y la opción es cancelada; en este caso seguramente la función de paridad no es correcta.

En un principio la barrera es monitoreada continuamente; se realzan monitoreos periódicos ( por ejemplo el precio se puede checar cada día de cierre). Este afecta el precio, un monitoreo más largo hace que la barrera se cruce lentamente.

Como un ejemplo consideremos una opción put down-and-out con un precio de ejercicio $X$, que expira en un tiempo $T$, con una barrera $S_b$. Así, tenemos las siguientes fórmulas, donde $S_0$, $r$, $\sigma$ son conocidas.

### 5.2.1 Valor de una opción barrera de venta de tipo put-down-and-out

El valor de una opción barrera de venta de tipo put-down-and-out está dado por la siguiente fórmula analítica:

$$P = Xe^{-rT}\{N(d_4) - N(d_2) - a[N(d_7) - N(d_5)]\}$$
$$- S_0\{N(d_3) - N(d_1) - b[N(d_8) - N(d_6)]\},$$

donde

$$a = \left(\frac{S_b}{S_0}\right)^{-1+2r/\sigma^2}$$

$$b = \left(\frac{S_b}{S_0}\right)^{1+2r/\sigma^2}$$

y

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_3 = \frac{\ln(S_0 / S_b) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_4 = \frac{\ln(S_0 / S_b) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_5 = \frac{\ln(S_0 / S_b) - (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_6 = \frac{\ln(S_0 / S_b) - (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_7 = \frac{\ln(SX / S_b^2) - (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_8 = \frac{\ln(SX / S_b^2) - (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Ver la referencia [7] Zhang, P. G, y los programas en el apéndice.

Ahora, si asumimos que el monitoreo de la barrera es continuo, se tiene que corregir la barrera como,

$$S_b \Rightarrow S_b e^{\pm 0.5826\sigma\sqrt{\delta t}}$$

donde el término 0.5826 se deriva de la función zeta de Riemann, $\delta t$ es el tiempo transcurrido entre dos monitoreos consecutivos y el signo $\pm$ depende del tipo de opción. Para una put down-and-out tomamos el signo menos.

**5.3 Precio de una down-and-out put**

Consideremos el precio de una opción con dos meses de maduración, asumiendo que cada mes tiene 30 días y la barrera se checa diariamente. La barrera $S_b$ es de \$40.

Es conveniente considerar el precio $P_{di}$ de una down-and-in put, así

$$P_{do} = P - P_{di}$$

Asumamos que discretizamos la vida de la opción en intervalos de tiempo $\delta t$ ( en nuestro caso un día), $T = M\delta t$, y consideremos la trayectoria del precio de la acción para los días $i$, $i = 1,\ldots,M$ :

$$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_M\}$$

Basado en estas trayectorias, la estimación del precio de la opción es

$$P_{di} = e^{-rT} E\left[I(S)(X - S_M)^+\right],$$

donde la función indicador $I$ es

$$I(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_j < S_b \text{ para algún } j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, consideremos $j^*$ como el índice que indica el tiempo en que la barrera es cruzada por primera vez; por convención, tomemos $j^* = M + 1$ si la barrera no se cruza durante el tiempo de vida de la opción. Mientras el tiempo $j^*\delta t$ de la opción es activado. También, considerando el tiempo de cruce $t^* = j^*\delta t$ y el precio $S_{j^*}$, usamos la fórmula de Black-Scholes para estimar la ganancia:

$$E\left[ I(S)(X - S_M)^+ \mid j^*, S_{j^*} \right] = e^{r(T-t^*)} B_p\left( S_{j^*}, X, T - t^* \right),$$

donde $B_p\left( S_{j^*}, X, T - t^* \right)$ es el precio de Black-Scholes para una opción vainilla de venta con precio de ejercicio $X$, precio inicial del subyacente $S_{j^*}$, y el tiempo de maduración $T - t^*$; el término exponencial toma la discontinuidad. Para simular la trayectoria $S$ es recomendable usar el siguiente estimador:

$$I(S)e^{-rt^*}B_p\left(S_{j^*}, X, T-t^*\right).$$

Por cada paso de tiempo, generamos una normal $Z_j$ con valor esperado

$$\upsilon = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t$$

y varianza $\sigma^2 \delta t$. Todas estas variables son mutuamente independientes y el precio de la acción es generado por

$$\ln S_j - \ln S_{j-1} = Z_j .$$

Sea $Z$ el vector de variables aleatorias normales y $f(Z)$ es la función de densidad. Si usamos el valor esperado modificado

$$\upsilon - b$$

nosotros esperamos que la barrera sea cruzada más frecuentemente. Sea $g(Z)$ la función de densidad para generar variables normales con su valor esperado modificado. Combinando el muestreo por importancia y condicionado tenemos que

$$E_f\left[ I(S)\left(X - S_M\right)^+ \middle| j^*, S_{j^*} \right] = E_g\left[ \frac{f(Z)I(S)\left(X - S_M\right)^+}{g(Z)} \middle| j^*, S_{j^*} \right]$$

$$= \frac{f(z_1,..., z_j)}{g(z_1,..., z_j)} E_g\left[ \frac{f\left(Z_{j^*+1},..., Z_M\right)}{g\left(Z_{j^*+1},..., Z_M\right)} I(S)\left(X - S_M\right)^+ \middle| j^*, S_{j^*} \right]$$

$$= \frac{f(z_1,..., z_j)}{g(z_1,..., z_j)} E_f\left[ I(S)\left(X - S_M\right)^+ \middle| j^*, S_{j^*} \right]$$

$$= \frac{f(z_1,..., z_j)}{g(z_1,..., z_j)} e^{r(T-t^*)} B_p\left( S_{j^*}, X, T - t^* \right).$$

En la práctica generamos variables normales con valor esperado $\upsilon - b$, y multiplicamos el estimador condicional por el radio de máxima verosimilitud.

En nuestro caso, tenemos dos variables aleatorias $Z_j$ mutuamente independientes, la matriz de covarianza es una matriz diagonal con elementos $\sigma^2 \delta t$ y el vector de valores esperados tiene componentes

$$\mu = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta t$$

para la función de densidad $f$ y $\mu - b$ par la función de densidad $g$. También se tiene que,

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_1,...,z_j)}{g(z_1,...,z_j)} &= \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j^*} \left( \frac{z_k - \mu}{\sigma \sqrt{\delta t}} \right)^2 \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j^*} \left( \frac{z_k - \mu + b}{\sigma \sqrt{\delta t}} \right)^2 \right\} \\
&= \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \delta t} \sum_{k=1}^{j^*} \left[ (z_k - \mu)^2 - (z_k - \mu + b)^2 \right] \right\} \\
&= \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \delta t} \sum_{k=1}^{j^*} \left[ -2(z_k - \mu) b - (b)^2 \right] \right\} \\
&= \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \delta t} \left[ -2b \sum_{k=1}^{j^*} z_k + 2 j^* \mu b - j^* b^2 \right] \right\} \\
&= \exp\left\{ \frac{b}{\sigma^2 \delta t} \sum_{k=1}^{j^*} z_k - \frac{j^* b}{\sigma^2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{j^* b^2}{2\sigma^2 \delta t} \right\}
\end{aligned}$$

### 5.4 Opciones asiáticas

Las opciones asiáticas se diferencian de los contratos de opciones clásicos en el precio del activo subyacente, el cual se calcula como el promedio de los precios alcanzados por el mismo a lo largo de un periodo determinado.

Un precio promedio es menos volátil que las series de precios utilizadas para obtenerlo, por lo que este tipo de opciones tienen un menor valor que las opciones tradicionales. Cuanto más frecuente se calcule el promedio, más baja será la volatilidad (por ejemplo un promedio diario tendrá menor volatilidad que el que se calcule cada semana y, por tanto, un valor de la opción bajo). Por lo general se utiliza el promedio diario para calcular el valor del activo subyacente, extendiéndose el período de cálculo desde la fecha de emisión de la opción hasta la de su vencimiento. El valor intrínseco de la opción se calcula como,

$$Máx\left[0, S_{promedio} - X\right] \text{ para las opciones call.}$$
$$Máx\left[0, X - S_{promedio}\right] \text{ para las opciones put.}$$

La finalidad de este tipo de opciones es reducir las posibilidades de manipulación del precio del subyacente en la fecha de expiración. También resultan muy útiles para aquellos inversionistas que realizan compras o ventas sobre un mismo activo en un horizonte temporal determinado. Frente a la alternativa de comprar n opciones con distintos vencimientos, resulta más barato comprar una opción asiática con vencimiento al final del periodo, logrando un nivel similar de cobertura de riesgos.

Para valorar este tipo de opciones podemos utilizar métodos como: el método binomial, el método de Monte-Carlo la aproximación a través de la media geométrica desarrollada por Kemna y Vorst, quienes derivaron el valor de la opción de compra como el valor actual de la media geométrica de los pagos esperados. Este modelo es una variación del de Black-Scholes.

**Media aritmética y geométrica**

La media aritmética ($AA$) de $n$ números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, está definida como

$$AA(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

donde $n$ es el número de observaciones y $a_i$ son las observaciones.

La media geométrica estándar ($GA$) de $n$ números positivos es definida como sigue:

$$GA(n) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{2}$$

donde $n$ es el número de observaciones y $a_i$ son las observaciones.

Ahora, supongamos que el precio de las opciones $S(\tau)$ sigue el movimiento browniano geométrico con el pago de una tasa g del activo subyacente. Conocemos que el precio de un activo subyacente en cualquier tiempo $T$ entre el tiempo transcurrido $t$ y cualquier tiempo en el futuro $t^*$ puede ser expresado como

$$S(T) = S\exp\left[\left(r - g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\, z(T)\right], \tag{3}$$

donde $t < T < t^*$, $t$ y $t^*$ están en el tiempo que transcurre y el tiempo de maduración de la opción, respectivamente y $z(T)$ es el proceso de Gauss-Wiener estándar.

La ecuación (3) incluye la solución del modelo de Black-Scholes cuando $g = 0$. Suponga que los $n$ precios siguen un movimiento browniano geométrico en la ecuación (3) con observaciones frecuentes $h$,

$$\begin{aligned} a_i &= S[\tau - (n-i)h] = S\exp\{\left(r - g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)[\tau - (n-i)h] \\ &\quad + \sigma\, z[\tau - (n-i)h]\}, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $i = 1, 2, 3, ..., n$ , y $\tau = t^{*} - t$ es el tiempo de maduración. De (4), vemos que el promedio del periodo comienza con la primera observación mientras $T = \tau - (n-1)h$ y paramos cuando en las observaciones $T = \tau$ .
Promediando los periodos de $\tau - (n-1)h$ a $\tau$ , o $(n-1)h$ .
La ganancia de una opción europea basada en la media geométrica de $n$ precios del activo subyacente puede ser expresado como sigue:

$$PFGA = máx[\omega GA(n) - \omega X, 0], \tag{5}$$

donde $X$ es el precio de ejercicio de la opción (strike price), $\omega$ es un indicador binario (1 para una opción call y -1 para una opción put), y $máx[.,.]$ es la función matemática dada a lo largo de dos números implicados.

La opción asiática geométrica definida en (5) es muy general y está incluye la opción asiática geométrica estándar promediando los periodos en el curso de vida de la opción.
Esto es porque empieza promediando el periodo $\tau - (n-1)h$, la cual puede ser o no cero, dependiendo del número de observaciones $n$ y la observación de frecuencia $h$ .

**Precio de opciones asiáticas geométricas**

Para obtener el precio de las opciones asiáticas geométricas con ganancia dada en (5), tenemos que conocer la distribución de la media geométrica $GA(n)$ así como:
i) el tiempo de maduración de la opción $\tau$ ;
ii) la observación de frecuencia $h$ ;
iii) el número de observaciones $n$ ; y
iv) la distribución del precio del activo subyacente.

Para obtener la distribución de $GA(n)$ es casi la misma para encontrar una solución cerrada de la opción asiática geométrica. Para una fórmula general, necesitamos considerar dos casos: primero, el periodo promedio que no ha comenzado y segundo, hasta su comienzo. Si $0 \le j \le n$ es el número de observaciones, las cuales han sido observadas. Cuando $j = 0$, el periodo promedio no se tiene, cuando $j = n$ la opción espira, y cuando $1 \le j < n$, la opción esta dentro del periodo promedio. Claramente, la incertidumbre de la media geométrica es reducida con más observaciones.

Para obtener la función de distribución para $GA(n)$ tenemos que conocer como las observaciones $a_i$, $i = 1,2,3,...,n$ se han correlacionado entre ellas. La covarianza entre dos variables con movimiento browniano estándar, resultado de cálculos estocásticos.

**Proposición 1**

La covarianza de cualesquiera dos observaciones que siguen un proceso estándar Gauss-Wiener igual, el más pequeño de los dos corresponde al intervalo de tiempo. Matemáticamente,

$$Cov\left[z(t_i), z(t_j)\right] = mín(t_i, t_j),$$

donde $z(t_i)$ y $z(t_j)$ son dos observaciones que siguen el proceso estándar Gauss-Wiener en dos puntos del tiempo $t_i$ y $t_j$, y $min(.,.)$ es la función matemática que nos indica que debemos tomar el argumento más pequeño de ambos argumentos.

**Teorema 1**

Si los números promedio son especificados como en (4), entonces el logaritmo natural de $GA(n)/S$ o $ln\left[GA(n)/S\right]$ tiene una distribución normal con media $\left(r - g - \sigma^2/2\right)T^{sa}_{\mu,n-j} + ln\,B^{sa}(j)$ y varianza $\sigma^2 T^{sa}_{n-j}$, donde

$$B^{sa}(0)=1,\ B^{sa}(j)=\left(\prod_{i=1}^{j}\frac{S[\tau-(n-j)h]}{S}\right)^{1/n} \qquad \text{for} \quad 1\le j\le n, \tag{6}$$

$$T^{sa}_{\mu,n-j}=\frac{n-j}{n}\left[\tau-\frac{h(n-j-1)}{2}\right] \tag{7}$$

$$T^{sa}_{n-j}=\tau\left(\frac{n-j}{n}\right)^2-\frac{(n-j)(n-j-1)(4n-4j+1)}{6n^2}h \tag{8}$$

n es el número de observaciones especificado en el contrato; h es la observación de frecuencia en el intervalo de tiempo entre dos observaciones consecutivas; $j$ es el número de observaciones ya pasadas; $B(j)$ es el promedio geométrico de la ganancia bruta (gross return) de aquellas observaciones pasadas; y $\tau$ es el tiempo de maduración de la opción.

**Teorema 2**

Si el promedio es especificado en (4), entonces el precio promedio geométrico de una opción europea está dado por la siguiente fórmula:

$$C^{sa}=\varpi SA^{sa}(j)e^{-gT^{sa}_{\mu,n-j}}N\left(\varpi d^{sa}_{n-j}+\varpi\sigma\sqrt{T^{sa}_{n-j}}\right)-\varpi Xe^{-r\tau}N\left(\omega d^{sa}_{n-j}\right), \tag{9}$$

donde

$$A^{sa}(j)=e^{-r\left(\tau-T^{sa}_{\mu,n-j}\right)-\sigma^2\left(T^{sa}_{\mu,n-j}-T^{sa}_{n-j}\right)/2}B^{sa}(j)$$

$$d^{sa}_{n-j}=\left\{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(r-g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T^{sa}_{\mu,n-j}+\ln\left[B^{sa}(j)\right]\right\}/\left(\sigma\sqrt{T^{sa}_{n-j}}\right),$$

$\varpi$ es la misma operación binaria que en (5) y los demás parámetros son los mismos que en el teorema 1.

**Opciones Asiáticas geométricas continuas**

Los promedios continuos son buenas aproximaciones de los promedios discretos con muy alta observación de frecuencia.

En está sección se hablará de los conceptos de promedios aritméticos y geométricos continuos y el precio de opciones basado en estos promedios.

Para comenzar nuestro análisis, necesitamos establecer la relación entre el número de observaciones $n$, la observación de frecuencia $h$ y el periodo de promedio $T_{ap}$. Si conocemos dos de estos tres parámetros, fácilmente obtenemos el tercero, con la siguiente identidad:

$$T_{ap} = nh, \tag{10}$$

el cual obviamente indica que el periodo promediado es cero para una opción vainilla con sólo una observación.

El promedio aritmético continuo(CAA) de el precio de la acción subyacente entre cualquier tiempo especificado en el futuro $s$ y el tiempo de maduración de la opción $t^*$ es definido como sigue:

$$CAA\left(s, t^*\right) = \frac{1}{t^* - s}\int_s^{t^*} S(T)dT, \tag{11}$$

donde $S(T)$ esta dado en (3).

La identidad (11) indica que el número de observaciones $n$ se aproxima al infinito cuando la observación de frecuencia $h$ se aproxima a cero en el caso continuo, dando el periodo promediado $T_{ap} = t^* - s$ fijo. Con alguna manipulación de cálculos simples, mostramos que (11) es el resultado limite de (1) cuando la observación de frecuencia se aproxima a cero y el número de observaciones se aproxima al infinito.

Similarmente, el promedio geométrico continuo (CGA) del precio del activo subyacente $S(\tau)$ entre cualquier tiempo especificado en el futuro $s$ y el tiempo de maduración de la opción $t^*$ es definido como sigue:

$$CGA(s,t^*) = \exp\left\{\frac{1}{t^* - s}\int_s^{t^*} \ln[S(T)]dT\right\}, \qquad (12)$$

donde $S(T)$ esta dado en (3).

Podemos mostrar que (12) es el resultado limitado de (2) cuando la observación de frecuencia se aproxima a cero y el número de observaciones se aproxima al infinito, dando el periodo promediado $T_{ap} = t^* - t$ fijo. Es el mismo promedio geométrico cuando la aproximación de frecuencia llega a ser infinitesimalmente pequeña.

Podemos mostrar que el promedio geométrico continuo dado en (12) es igual a lo siguiente si nosotros sustituimos (3) en (12)

$$CGA(s,t^*) = S\exp\left\{\left(r - g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\tau}{2} + \frac{\sigma}{t^* - s}\int_s^{t^*} z(T)dT\right\}, \qquad (13)$$

donde $z(T)$ es el mismo proceso Gauss-Wiener estándar como en (3).

Las opciones pueden ser escritas como el promedio geométrico continuo dado en (12) o (13). La ganancia segura de una opción puede ser expresada como:

$$PFCGA = \max[\varpi CGA - \varpi K, 0], \qquad (14)$$

donde $K$, $\varpi$ y $\max[.,.]$ son los mismos que en (5).

Expresamos el precio de una opción asiática basado en el promedio geométrico continuo en el siguiente teorema.

**Teorema 3**

Si el promedio es continuo y el periodo promediado comienza en $t$, el tiempo transcurre, el precio promedio geométrico continuo de una opción Europea esta dado por

$$C^{csa} = \varpi S e^{-(r\tau+\sigma^2/6)/2} e^{-g\tau/2} N\left(\varpi d^{csa} + \varpi\sigma\sqrt{\tau/3}\right) - \varpi X e^{-r\tau} N\left(\varpi d^{csa}\right), \qquad (15)$$

donde

$$d^{csa} = \left[ \ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - g - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\tau}{2} \right] \Big/ \left( \sigma\sqrt{\frac{\tau}{3}} \right).$$

## 5.5 Opciones Asiáticas con precio de la acción promedio aritmético

El promedio aritmético discreto de una muestra es

$$A_{da} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i),$$

donde $t_i$ , $i = 1,...,n$ son las muestras de tiempo discreto.

Si el muestreo es continuo, obtenemos

$$A_{ca} = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt$$

$$A_{cg} = \exp\left[ \frac{1}{T}\int_0^T \ln S(t)dt \right]$$

El pago de una opción call con una tasa promedio esta dada por

$máx\{A - X, 0\},$

donde A es el promedio de las tasas y $X$ es el precio de ejercicio.

El pago de una opción call con precio de ejercicio promedio es

$$máx\{S(T) - A, 0\}.$$

Así mismo definimos el pago de una opción put con una tasa promedio como,

$$máx\{X - A, 0\},$$

o con un precio de ejercicio promedio para un put como el

$$máx\{A - S(T), 0\}.$$

En este caso, aplicar simulación de Monte Carlo no es fácil.

### 5.6 Opciones Lookback

En este tipo de opciones el valor máximo o mínimo es monitoreado durante la vida de la opción. Asumiendo un monitoreo continuo, obtenemos el precio máximo o mínimo de la acción:

$$S_{máx} = \underset{t\in[0,T]}{máx} S(t)$$

$$S_{\min} = \min_{t\in[0,T]} S(t)$$

El pago de una opción compra lookback europea esta dado por

$$S(T) - S_{\min} ,$$

en el caso de una opción de venta lookback, se tiene

$$S_{máx} - S(T).$$

### Precio de una opción asiática

Consideremos el precio de una opción asiática de compra con tasa promedio, mediante el promedio aritmético discreto. Entonces el pago de una opción es

$$máx\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S(t_i) - X ,0\right\},$$

donde la maduración de la opción es $T$ años, $t_i = i\delta t$, y $\delta t = T/N$. En la aproximación por Monte Carlo Crudo, simplemente generamos las trayectorias del precio de la acción y estimamos la ganancia discontinua como usualmente se calcula.

Para el muestreo de Monte Carlo crudo, usamos variables de control. Una variable de control, toma la siguiente suma de los precios de las acciones:

$$Y = \sum_{i=0}^{N} S(t_i).$$

Esta es una variable de control adecuada que se correlaciona con la ganancia de la opción, para calcular el valor esperado:

$$E[Y] = E\left[\sum_{i=0}^{N} S(t_i)\right] = \sum_{i=0}^{N} E[S(t_i\delta\, t)]$$

$$= \sum_{i=0}^{N} S(0)e^{ri\delta\, t} = S(0)\sum_{i=0}^{N}\left[e^{r\delta\, t}\right]^i = S(0)\frac{1-e^{r(N+1)\delta\, t}}{1-e^{r\delta\, t}},$$

donde tenemos que usar la fórmula

$$\sum_{i=0}^{N}\alpha^i = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}$$

# CAPÍTULO 6

# VALUACIÓN DE OPCIONES EXÓTICAS MEDIANTE SIMULACIÓN

## 6.1 Introducción

Supongamos que la tasa binomial de interés es $r$ y el precio del activo subyacente sigue un movimiento browniano geométrico de riesgo neutro; esto es, sigue un movimiento browniano geométrico con parámetro de varianza $\sigma^2$ y parámetro de empuje $\mu$ donde

$$\mu = r - \sigma^2 / 2.$$

Para simular la trayectoria del precio del bien sobre un intervalo $(0,T)$ discretizamos el tiempo usando un tamaño de paso $\delta$ t. Entonces,

$$S(t + \delta\, t) = S(t) \exp\left(\mu\delta\, t + \sigma\sqrt{\delta\, t} W_1\right)$$

donde $W_1 \sim N(0,1)$. Sea $N$ $N\delta\, t = T$, y para $i = 1,...,n$ con $n \leq N$,

$$X(i) = \log\left(\frac{S(i\delta\, t)}{S((i-1)\delta\, t)}\right)$$

Bajo movimiento browniano geométrico, $X(1),\ldots,X(n)$ son variables aleatorias independientes normales con media $\mu\delta\, t$ y varianza $\sigma^2\delta\, t$.

Por lo tanto, generando los valores de $n$ variables aleatorias independientes normales que tengan esta media y varianza, podemos construir una sucesión de precios que tienen las mismas probabilidades que las que evolucionan del modelo de movimiento browniano geométrico con riesgo neutro.

Supongamos que queremos encontrar la valuación de riesgo neutro de una opción exótica con precio de ejercicio $X$, con valor inicial $S(0)=s,$ y tiempo de ejercicio $T$. Comenzamos generando $n$ variables aleatorias normales independientes con media $\mu\delta t$ y varianza $\sigma^2\delta t$. Las igualamos a $X(1),\ldots,X(n)$, y luego determinamos la sucesión de precios a partir de las ecuaciones

$$S(0)=s,$$

$$S(i\delta t)=S((i-1)\delta t)e^{X(i)} \quad \text{para} \quad i=1,\ldots,n.$$

**6.2 Valuación de opciones asiáticas mediante simulación**

En el caso de las opciones asiáticas, tenemos que

$$Y=e^{-rn\delta t}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S(i\delta t)}{n}-X\right)^{+}$$

si el precio de ejercicio $X$ es fijo y la ganancia esta basada en el promedio de los precios, o se tiene que

$$Y=e^{-rn\delta t}\left(S(n\delta t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{S(i\delta t)}{n}\right)^{+}$$

si el precio de ejercicio es el precio promedio final.

Llamemos $Y_1$ a esta ganancia. Repitiendo este procedimiento $k-1$ veces más, obtenemos un conjunto de $k$ realizaciones de ganancia $Y_1,\ldots,Y_k$. Así, podemos usar su promedio como una estimación de la valuación de riesgo neutro de movimiento browniano de la opción asiática.

Las valuaciones de riesgo neutro de otras opciones exóticas se obtiene de manera similar.

Se pueden aplicar las técnicas de reducción de varianza para reducir el número de réplicas necesarias para obtener una precisión requerida (ver [2, 3, y 6]).

## 6.3 Reducción de varianza mediante variables de control en la valuación de opciones asiáticas

Aplicamos lo que vimos en la sección 4.4.2, sobre técnicas de reducción de varianza mediante variables de control, a la valuación de una opción asiática. Supongamos que la ganancia de la opción es

$$máx\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S(t_i) - X, 0 \right)$$

donde la opción madura en $T$ años, $t_i = i\delta t$ y $\delta t = T / N$. Se tiene que la ganancia está positivamente correlacionada con

$$V = \sum_{i=0}^{N} S(t_i)$$

Usamos $V$ como variable de control. Así, tenemos que

$$E(V) = \sum_{i=0}^{N} E(S(i\delta t)) = \sum_{i=0}^{N} S(0)e^{ri\delta t} = S(0)\frac{1-e^{r(N+1)\delta t}}{1-e^{r\delta t}}$$

A continuación presentamos dos programas en Matlab para la valuación de una opción asiática por simulación de Monte Carlo:

*VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN ASIÁTICA POR SIMULACIÓN DE MONTE CARLO*

```
%AsianMC.m
function[P,CI]=AsianMC(S0,X,r,T,sigma,NSamples,NRepl)
Payoff=zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
    Path=AssetPaths1(S0,r,sigma,T,NSamples,1);
    Payoff(i)=max(0,mean(Path(2:(NSamples+1)))-X);
end
[P,aux,CI]=normfit(exp(-r*T)-Payoff);
```

*VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN ASIÁTICA POR SIMULACIÓN DE MONTE CARLO CON VARIABLES DE CONTROL*

```
%AsianMCCV.m
function[P,CI]=AsianMCCV(S0,X,r,T,sigma,NSamples,NRepl,NPilot)
%pilot replications to set control parameter
TryPath=AssetPaths1(S0,r,sigma,T,NSamples,NPilot);
StockSum=sum(TryPath,2);
PP=mean(TryPath(:,2:(NSamples+1)),2);
TryPayoff=exp(-r*T)*max(0,PP,X);
MatCov=cov(StockSum,TryPayoff);
c=-MatCov(1,2)/var(StockSum);
dt=T/NSamples;
ExpSum=S0*(1-exp((NSamples+1)*r*dt))/(1-exp(r*dt));
% MC run
ControlVars=zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
    StockPath=AssetPaths1(S0,r,sigma,T,NSamples,1);
    Payoff=exp(-r*T)*max(0,mean(StockPath(2:(NSamples+1)))-X);
      ControlVars(i)=Payoff+c*(sum(StockPath)-ExpSum);
end
[P,aux,CI]=normfit(ControlVars);
```

## 6.4 Ejemplo

Calculamos el valor de una opción asiática con ganancia final dada como el promedio de precios de la trayectoria, con los parámetros $S(0)=50$, $K=50$, $r=0.1$ y con diferentes valores de $T$ y $\sigma$. Hacemos un estudio comparativo usando: el método de Monte Carlo MC simple con $n=600000$ réplicas; el método de Monte Carlo con reducción de varianza, (variable de control) MCVC, con $n = 200000$ réplicas. Se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla siguiente. En los métodos MC y MCVC se indica a la derecha la precisión obtenida p, usando la longitud del intervalo de 95% de confianza del valor estimado.

| S(0)=50, K=50, r=0.1 | Método MC valor, precisión p | Método MCVC valor, precisión p |
|---|---|---|
| T = 0.25, $\sigma = 0.2$ | 1.4834, p=0.0100 | 1.4842, p=0.0104 |
| T = 0.25, $\sigma = 0.4$ | 2.6213, p=0.0197 | 2.6110, p=0.0212 |
| T = 0.5, $\sigma = 0.4$ | 3.8231, p=0.0288 | 3.8098, p=0.0290 |
| T = 1.0, $\sigma = 0.4$ | 5.5776, p=0.0428 | 5.5795, p=0.0386 |

## 6.5 Cálculo de delta mediante simulación

Mostraremos dos métodos para calcular delta, $\partial p(S_0, T, r, \sigma) / \partial S_0$.

Primero, consideremos la aproximación de la derivada parcial, Representaremos el precio de una opción de compra europea bajo el movimiento browniano geométrico del precio de las acciones, como

$$p(S_0, T, r, \sigma) = e^{-rT} \int \left( S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}z} - K \right)^+ \phi(z) dz$$

donde $\phi(z)$ es la función de densidad de probabilidad(p.d.f) de la distribución normal estándar. Intercambiando el orden de diferenciación e integración, encontramos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p(S_0,T,r,\sigma)}{\partial S_0} &= e^{-rT}\ \frac{\partial}{\partial S_0}\int\left(S_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}z}-K\right)^+\phi(z)dz \\
&= e^{-rT}\int\frac{\partial}{\partial S_0}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}z}-K\right)^+\phi(z)dz \\
&= e^{-rT}\int e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}z} I_{\{S_T\geq K\}}\phi(z)dz \\
&= e^{-rT}E\left(\frac{S_T}{S_0}I_{\{S_T\geq K\}}\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente, este resultado se puede calcular utilizando el método de Monte Carlo, así como todas las técnicas de reducción de varianza descritas anteriormente. Expresiones similares pueden ser derivadas directamente de otros precios de opciones derivados.

Segundo, consideremos la aproximación del radio de máxima verosimilitud. En este caso, necesitamos calcular $f_{S_T}$, la p.d.f de $S_T$. Así,

$$
f_{S_T}(s) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T}}\phi(g(s))
$$

donde

$$
g(s) = g(s;S_0,T,r,\sigma) = \frac{\log(s/S_0) - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}
$$

y $\phi$ es la p.d.f. de la distribución normal estándar.

## CONCLUSIONES

La simulación por Monte Carlo es una herramienta computacional importante para las finanzas, pues, podemos evaluar un portafolio, el precio de opciones y estimar el valor del riesgo. El método Monte-Carlo es un método numérico que permite resolver problemas físicos y matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias.

La importancia actual del método Monte-Carlo se basa en la existencia de problemas de difícil solución por métodos analíticos o numéricos, pero que dependen de factores aleatorios o se asocian a un modelo determinístico; como el cálculo de una esperanza matemática como es el caso de la valuación de opciones, que es en donde lo hemos aplicado. Gracias a la velocidad de cómputo en la actualidad, el cálculo de Monte-Carlo es sumamente utilizado.

En las finanzas, podemos utilizar las simulaciones de Monte-Carlo para: encontrar el rango de resultados esperados representado por una lista de operaciones históricas; saber lo que nos espera en un futuro, sabiendo las operaciones históricas; para conocer hasta donde puede caer nuestra inversión inicial; así como, saber la racha de operaciones positivas y negativas consecutivas que se pueden esperar; entre otras tantas.

Las técnicas de reducción de varianza aplicadas por el método de Monte Carlo son muy importantes porque nos permiten usar muestras aleatorias de tamaño más pequeño, y aumentar al mismo tiempo la precisión del cálculo.

En el problema de valuación de opciones exóticas, a menudo nos encontramos con el problema de que no existen fórmulas cerradas o analíticas para su cálculo. En particular, en la valuación de opciones asiáticas, el valor de la opción depende de la trayectoria seguida por el proceso de precios. En este caso, el uso de las técnicas de Monte Carlo es sumamente útil. En este trabajo hemos visto como aplicar estas técnicas a la valuación de opciones exóticas de tipo europeo.

Al efectuar cálculos numéricos para la valoración de opciones exóticas mediante el método de Monte Carlo, hemos encontrado que se obtienen aproximaciones bastante precisas Aunque hemos observado que los valores altos de la volatilidad $\sigma$ afectan los resultados considerablemente.

También es posible aplicar el método de Monte Carlo a la valuación de opciones de tipo americano

## APÉNDICE

## PROGRAMAS EN MATLAB

Programa para la valuación de una opción call europea por el método binomial

```
function [price,lattice]=LatticeEurCall(S0,K,r,T,sigma,N)
deltaT=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
d=1/u;
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for j=0:N
      lattice(N+1,j+1)=max(0,S0*(u^j)*(d^(N-j))-K);
  end
for i=N-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(i+1,j+1)=exp(-r*deltaT)*...
            (p*lattice(i+2,j+2)+(1-p)*lattice(i+2,j+1));
    end
end
price=lattice(1,1);
```

Programa para valuar una opción call europea por simulación de Monte Carlo

```
% BlsMC.m
function [Price, CI] = BlsMC(S0,X,r,T,sigma,NRepl)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
DiscPayoff = exp(-r*T)*max(0,S0*exp(nuT+siT*randn(NRepl,1))-X);
[Price, VarPrice, CI] = normfit(DiscPayoff);
```

Uso de variables antitéticas para valuar una opción call por simulación de Monte Carlo

```
% BlsMCAV.m
function [Price,CI]=BlsMCAV(S0,X,r,T,sigma,NRepl)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
Veps=randn(NRepl,1);
Payoff1=max(0,S0*exp(nuT+siT*Veps)-X);
Payoff2=max(0,S0*exp(nuT+siT*(-Veps))-X);
DiscPayoff=exp(-r*T)*0.5*(Payoff1+Payoff2);
[Price,VarPrice,CI]=normfit(DiscPayoff);
```

Valuación de una opción call con ganancia truncada por el método de Monte Carlo

```
% BlsTrMC.m
function [Price,CI]=BlsTrMC(S0,X,r,T,sigma,Sb,NRepl)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
StockPrice=S0*exp(nuT+siT*randn(NRepl,1));
Clip=find(StockPrice>Sb);
StockPrice(Clip)=0;
DiscPayoff=exp(-r*T)*max(0,StockPrice-X);
[Price,VarPrice,CI]=normfit(DiscPayoff);
```

Valuación de una opción call europea con ganancia truncada por muestreo antitético

```
% BlsTrMCAV.m
function [Price,CI]=BlsTrMCAV(S0,X,r,T,sigma,Sb,NRepl)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
Veps=randn(NRepl,1);
StockPrice1=S0*exp(nuT+siT*Veps);
StockPrice2=S0*exp(nuT-siT*Veps);
Clip1=find(StockPrice1>Sb);
Clip2=find(StockPrice2>Sb);
StockPrice1(Clip1)=0;
StockPrice2(Clip2)=0;
Payoff1=max(0,StockPrice1-X);
Payoff2=max(0,StockPrice2-X);
DiscPayoff=exp(-r*T)*0.5*(Payoff1+Payoff2);
[Price,VarPrice,CI]=normfit(DiscPayoff);
```

Uso de variables de control para valuar una opción europea por simulación simple de Monte Carlo

```
% BlsMCCV.m
function [Price,CI]=BlsMCCV(S0,X,r,T,sigma,NRepl,NPilot)
nuT=(r-0.5*sigma^2)*T;
siT=sigma*sqrt(T);
% compute parameters first
StockVals=S0*exp(nuT+siT*randn(NPilot,1));
OptionVals=exp(-r*T)*max(0,StockVals-X);
MatCov=cov(StockVals,OptionVals);
VarY=S0^2*exp(2*r*T)*(exp(T*sigma^2)-1);
c=-MatCov(1,2)/VarY;
ExpY=S0*exp(r*T);
%
NewStockVals=S0*exp(nuT+siT*randn(NRepl,1));
NewOptionVals=exp(-r*T)*max(0,NewStockVals-X);
ControlVars=NewOptionVals+c*(NewStockVals-ExpY);
[Price,VarPrice,CI]=normfit(ControlVars);
```

Valuación de una opción put down and out mediante la fórmula analítica

```
% DownOutPut.m
function P=DownOutPut(S0,X,r,T,sigma,Sb)
a=(Sb/S0)^(-1+(2*r/sigma^2));
b=(Sb/S0)^(1+(2*r/sigma^2));
d1=(log(S0/X)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=(log(S0/X)+(r-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d3=(log(S0/Sb)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d4=(log(S0/Sb)+(r-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d5=(log(S0/Sb)-(r-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d6=(log(S0/Sb)-(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d7=(log(S0*X/Sb^2)-(r-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d8=(log(S0*X/Sb^2)-(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
P=X*exp(-r*T)*(normcdf(d4)-normcdf(d2)-...
    a*(normcdf(d7)-normcdf(d5)))...
    -S0*(normcdf(d3)-normcdf(d1)-...
    b*(normcdf(d8)-normcdf(d6)));
```

Valuación de una opción barrera por el Método de Monte Carlo

```
% DOPutMC.m
function [P,CI,NCrossed]=DOPutMC(S0,X,r,T,sigma,Sb,NSteps,NRepl)
% Generate asset paths
%[Call,Put]=blsprice(S0,X,r,T,sigma);
Payoff=zeros(NRepl,1);
NCrossed=0;
for i=1:NRepl
    Path=AssetPaths1(S0,r,sigma,T,NSteps,1);
      crossed=any(Path<=Sb);
      if crossed==0
          Payoff(i)=max(0,X-Path(NSteps+1));
      else
        Payoff(i)=0;
            NCrossed=NCrossed+1;
      end
end
[P,aux,CI]=normfit(exp(-r*T)*Payoff);
```

Valuación de una opción barrera por el Método condicional de Monte Carlo

```
% DOPutMCCond.m
function [Pdo,CI,NCrossed]=...
    DOPutMCCond(S0,X,r,T,sigma,Sb,NSteps,NRepl)
dt=T/NSteps;
[Call,Put]=blsprice(S0,X,r,T,sigma);
% Generate asset paths and payoffs for the down and in option
NCrossed=0;
Payoff=zeros(NRepl,1);
Times=zeros(NRepl,1);
StockVals=zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
    Path=AssetPaths1(S0,r,sigma,T,NSteps,1);
      tcrossed=min(find(Path<=Sb));
      if not(isempty(tcrossed))
         NCrossed=NCrossed+1;
Times(NCrossed)=(tcrossed-1)*dt;
StockVals(NCrossed)=Path(tcrossed);
    end
end
if(NCrossed>0)
   [Caux,Paux]=blsprice(StockVals(1:NCrossed),X,r...
   T-Times(1:NCrossed),sigma);
   Payoff(1:NCrossed)=exp(-r*Times(1:NCrossed)).*Paux;
end
[Pdo,aux,CI]=normfit(Put-Payoff);
```

Valuación de una opción barrera por el método condicional de Monte Carlo y muestreo por importancia

```
% DOPutMCCondIS.m
function [Pdo,CI,NCrossed]=...
    DOPutMCCondIS(S0,X,r,T,sigma,Sb,NSteps,NRepl,bp)
dt=T/NSteps;
nudt=(r-0.5*sigma^2)*dt;
b=bp*nudt;
sidt=sigma*sqrt(dt);
[Call,Put]=blsprice(S0,X,r,T,sigma);
% Generate asset paths and payoffs for the down and in option
NCrossed=0
Payoff=zeros(NRepl,1);
Times=zeros(NRepl,1);
StockVals=zeros(NRepl,1);
ISRatio=zeros(NRepl,1);
for i=1:NRepl
   % generate normals
vetZ=nudt-b+sidt*randn(1,NSteps);
LogPath=cumsum([log(S0),vetZ]);
Path=exp(LogPath);
    jcrossed=min(find(Path<=Sb));
    if not(isempty(jcrossed))
         NCrossed=NCrossed+1;
         TBreach=jcrossed-1;
Times(NCrossed)=TBreach*dt
StockVals(NCrossed)=Path(jcrossed);
        ISRatio(NCrossed)=exp(TBreach*b^2/2/sigma^2/dt+...
            b/sigma^2/dt*sum(vetZ(1:TBreach))-...
            TBreach*b/sigma^2*(r-sigma^2/2));
      end
end
if(NCrossed>0)
  [Caux,Paux]=blsprice(StockVals(1:NCrossed)),X,r,...
  T-Times(1:NCrossed),sigma);
  Payoff(1:NCrossed)=exp(-r*Times(1:NCrossed)).*Paux...
  .*ISRatio(1:NCrossed);
end
[Pdo,aux,CI]=normfit(Put-Payoff);
```

## BIBLIOGRAFIA


[1] Brandimarte, P. *Numerical Methods in Finance A MATLAB –Based Introduction*, Wiley New York, 2002.

[2] Ross, S. M. *A First Course in Probability*, Third Ed., Maxwell Macmillan International Editions, New York, 1989.

[3] Ross, S. M. *An Introduction to Mathematical Finance, Options and Other Topics*, Cambridge University Press, New York, 1999.

[4] Ross, S. M. *Simulation, Statistical Modeling and Decision Science,* Fourth Edition**,** Elsevier Academic Press, Burlington MD, 2006.

[5] Seydel, R. *Tools for Computational Finance*, Springer, New York, 2002.

[6] Stampli, J. y V. Goodman, *Matemáticas para las Finanzas, Modelado y Cobertura,* Thompson, México, 2002.

[7] Zhang, P. G.;*Exotic Options: a guide to second generation options*, World Scientific, Singapore, 1998.