Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

"Una aplicación del Modelo de Van Hiele"

Tesis

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIATURA EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS (OPCIÓN MATEMÁTICA EDUCATIVA).

Presenta

Espinoza Islas Verónica Marcela

Asesor

Dr. Ramón Sebastián Salat Figols

MÉXICO, D. F. *MAYO 2008*

ÍNDICE.

Introducción.

"En esta vida hay dos cosas interesantes:
Investigar matemáticas y enseñar matemáticas"

Poisson.

El presente trabajo tiene como propósito ofrecer a los estudiantes más y mejores oportunidades de visualización sobre conceptos geométricos relativos a las cónicas y de esta forma, observar la evolución cognitiva en ellos.

Este trabajo se llevó a cabo con cinco estudiantes de la Escuela Normal Superior de México de la Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad en Matemáticas, que en ese momento cursaban el tercer semestre. Se utilizó el laboratorio de cómputo de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

Las actividades presentadas en el siguiente trabajo, están estructuradas tomando en cuenta el modelo de Van Hiele. Aprovechando el hecho de que hoy en día es más viable el uso de la tecnología, hemos utilizado el *software* Geogebra diseñado por Markus Hohenwarter, en el desarrollo de actividades como herramienta didáctica.

El *software*, permite a los estudiantes una mejor visualización de los lugares geométricos y al mismo tiempo determinar propiedades implícitas en la construcción de estos.

Los temas que se estudiaron en las actividades presentadas, son los lugares geométricos de la parábola, elipse e hipérbola. Las construcciones realizadas de estas cónicas se hicieron determinando puntos que pertenecen a ellas (construcción por puntos); es decir, son realizadas como si se estuviera trabajando con regla y compás. Con la diferencia, claro, de que se puede manipular la construcción, es decir, mover los puntos libres que nos permiten conocer mejor el comportamiento de los trazos y así, determinar las propiedades de estos. Llamaremos por puntos libres a aquellos de los que depende la construcción.

En este caso los estudiantes involucrados, en base a las observaciones realizadas en este *software* generalizaron propiedades de los lugares geométricos que a su vez les permitieron profundizar en el contenido científico de estos.

Se ha mencionado anteriormente la utilización del modelo de Van Hiele en la estructuración de las actividades desarrolladas, ¿Pero, de que trata dicho modelo? Esté consiste, por un lado en ubicar a los estudiantes en un nivel de razonamiento y por otro en ayudar a los alumnos a pasar con mayor facilidad de un nivel a otro.

Los niveles de razonamiento geométrico que considera Van Hiele son: Visualización, Análisis, Deducción Informal, Deducción Formal y Rigor. Para llevar a cabo el paso de un nivel a otro propone cinco fases cíclicas, las cuales le permiten al docente organizar sus clases y con ellas ayudar a los estudiantes en su aprendizaje.

Las fases son: Información, Orientación Dirigida, Explicitación, Orientación Libre e Integración. En el desarrollo de las actividades nos referiremos a ellas como fase 1,…, fase 5 respectivamente. De la misma forma se clasifican los niveles: el nivel 0 corresponde al de Visualización, así sucesivamente, hasta llegar al nivel 4 el cual corresponde al de Rigor.

En el Marco Teórico se presenta una descripción detallada del los niveles de razonamiento geométrico y fases de dicho modelo. Cabe mencionar, que para poder pasar al siguiente nivel se tendrá que tener un manejó adecuado del anterior, y el paso de un nivel a otro dependerá de los conocimientos adquiridos del estudiante.

Existen diferentes formas que se pueden utilizar para realizar una evaluación cualitativa de los estudiantes, las cuales son: Escala de actitudes, Historia y experiencia de vida, Tabla de especificaciones, V heurística de Gowin, informe KPSI, Rubrica, Lista de cotejo, Matriz de resultados, Bitácora COL, portafolios, entre otras (Flores: *pág*.47).

En esta ocasión se utilizó la lista de cotejo como herramienta para la evaluación cualitativa de los estudiantes, estas listas se pueden observar detenidamente en las tablas de evaluación 1,2 y 3, las cuales permiten observar en un inicio los conocimientos previos de los alumnos y al finalizar poder observar el avance de los estudiantes durante la actividad. Estas lista contiene los elementos relevantes de la actividad, fomentando en los estudiantes un aprendizaje conceptual, actitudinal y procedimental.

Finalmente ¿Cuáles fueron las ventajas y desventajas? Entre las ventajas que se obtuvieron; al observar la construcción, es decir, la dependencia de los elementos, se reafirman los conceptos involucrados e incluso se determinan propiedades de los lugares geométricos. Sin embargo, entre las desventajas más comunes está; el tener plena confianza en los resultados que arroja el programa, pues, si al realizar las construcciones correspondientes y al mover los puntos libres, estas sufren cambios inadecuados, se pueden producir errores en el razonamiento geométrico y generar “lagunas” en el aprendizaje.

Problemática.

Como sabemos el modelo de Van Hiele nos ayuda a explicar cómo es que el razonamiento geométrico evoluciona en el ser humano. Y al mismo tiempo propone al docente cómo puede apoyar al alumno en pasar de un nivel a otro con mayor facilidad por medio de las diferentes fases de dicho modelo, las cuales se mencionaran al ser analizado durante el marco teórico.

Debido a la falta de visualización geométrica que presentan los alumnos en los diferentes niveles educativos. El presente trabajo se centrará en el ámbito educativo, enfocándonos en estudiantes que cursan el segundo año de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas.

Objetivo.

Por medio de las estrategias didácticas empleadas en las actividades basadas en el modelo de Van Hiele y apoyándonos en el *software* Geogebra, identificar el avance en el razonamiento geométrico de los estudiantes.

Hipótesis.

El razonamiento geométrico del estudiante se incrementa por medio de las estrategias didácticas, utilizando el *software* Geogebra, con respecto al modelo de Van Hiele.

Marco Teórico.

A lo largo de la historia la humanidad ha sufrido cambios importantes sociales, científicos, tecnológicos entre otros, los que han permitido la evolución de herramientas tecnológicas en el avance científico y tecnológico de la sociedad. El desarrollo de las geometrías en la investigación sigue siendo de gran importancia en la matemática del siglo XXI, siendo uno de los impulsores Euclides considerado uno de los pilares de la geometría.

La palabra “geometría” oculta una diversidad de apartados de interés matemático, entre ellos: transformaciones geométricas, geometría algebraica, sistemas dinámicos, geometría fractal, etc., de una gran lista que se encuentra ligada con la geometría según Joseph Malkevitch, que se dio a la tarea de revisar los diferentes apartados y su relación con la geometría.

¿Pero en donde podemos utilizar la geometría?, esta pregunta es cada vez más sencilla de responder, pues, las aplicaciones “geométricas” son más amplias en el transcurrir del tiempo. Por ejemplo: Aplicaciones a la modelización matemática del mundo físico, estructuras en ingeniería y arquitectura, visualización de datos estadísticos, etc.

El presente trabajo estudia el razonamiento geométrico de los alumnos del nivel superior apoyándonos con el modelo de Van Hiele, considerando que en la actualidad el acceso a la tecnología es cada vez más viable para el aprendizaje; así la utilización del *software* educativo abre un amplio panorama de oportunidades tanto para la vida laboral como estudiantil.

Así pues, la extensa gama de aplicaciones de la geometría es de gran interés en la geometría analítica clásica al fomentar un conocimiento geométrico, que permite a los alumnos enfrentarse desde otros puntos de vista a los diferentes apartados ligados a la geometría, encaminados a la gran diversificación de lugares en donde pueden ser empleados de manera significativa.

Por lo tanto, el *software* desarrollado ha permitido alcanzar niveles de visualización que sin ayuda de estos sería difícil de esperar, como es el caso del *software* Geogebra y Cabri-Géometre. Sin embargo, al igual que las construcciones realizadas con regla y compás, el *software* permite realizar las construcciones dinámicas con la misma analogía, es claro que es necesario conocer las definiciones previas de los conceptos geométricos involucrados en las construcciones, para desenvolverse con mayor facilidad.

Podemos entender que visualización es el proceso por el cual, dado un concepto, se puede dar una forma mental o física del concepto, pues, los símbolos visuales juegan un papel importante por la estrecha relación que tienen con los objetos y conceptos que designan. La geometría se considera como un método que puede visualizar formas y figuras, visualizar conceptos o procesos sistemáticos, etc. (Fortuny: *pág*. 25).

El modelo de Van Hiele esta conformado por cinco niveles de razonamiento geométrico, que describen las características del proceso de pensamiento. Cada nivel esta estructurado por cinco fases que le permiten al profesor organizar sus clases para poder ayudar a los estudiantes a pasar de un nivel a otro con mayor facilidad. Dichos niveles no están asociados con la edad, además, sólo alcanzando un nivel se puede pasar al siguiente y su mayor o menor dominio de la geometría, influirá en que tan rápido avancen al siguiente nivel.

Los autores de este modelo son Pierre M. Van Hiele y su esposa Dina Van Hiele – Goldof que en los años 50 eran profesores de geometría de enseñanza secundaria en Holanda. (Ángel Gutiérrez: pág. 125)

A partir de sus experiencias docentes y de las dificultades de comprensión que observaban en sus alumnos elaboraron este modelo que explica, por una parte como se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y, por otra parte como puede el profesor ayudar a sus alumnos para mejorar la calidad de su razonamiento, los niveles de razonamiento son visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor.

Van Hiele afirma que el paso a través de ellos depende de la instrucción recibida que de la edad o madurez fisiológica, de acuerdo con esto propone cinco fases de aprendizaje, con el fin de ayudar a los estudiantes a pasar de un nivel a otro. (Amelia Rodríguez: pág. 3)

Este modelo considera que la geometría juega un papel importante dentro de las mismas matemáticas, además de reconocer que la geometría permite las interpretaciones geométricas de diferentes conceptos matemáticos para comprenderlos y asimilarlos mejor.

El trabajo de Pierre M. Van Hiele y de su esposa Dina Van Hiele – Goldof, se basó en cinco niveles de razonamiento, los cuales describimos a continuación:

Nivel 0 (Visualización).- En este nivel el estudiante identifica, nombra, compara y opera sobre figuras geométricas basándose en su experiencia, (por ejemplo, triángulos, rectángulos, círculos, etc.) de acuerdo con su apariencia global, pero las propiedades de las figuras no las distinguen.

Nivel 1 (Análisis).- El estudiante se da cuenta de las propiedades de las figuras geométricas en términos de sus componentes y descubre propiedades y reglas de una clase de figuras empíricamente, mediante una variedad de actividades (por ejemplo, observando, doblando, midiendo, usando diagramas, etc.) ninguna de estas propiedades implican cualquier otra porque cada una se percibe de manera diferente.

Nivel 2 (Deducción informal).- Un estudiante en este nivel interrelaciona lógicamente propiedades y reglas descubiertas previamente, dando o siguiendo argumentos informales. Las características de las figuras geométricas están organizadas y se perciben de forma estructurada.

Nivel 3 (Deducción formal).- Aquí el estudiante demuestra teoremas deductivamente, de una manera formal usando axiomas y teoremas antes demostrados, establece interrelaciones entre redes de teoremas. Acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.).

Nivel 4 (Rigor).- El estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos, tiene la capacidad para manejar, analizar y comparar diferentes geometrías.

Debemos tomar en cuenta que en estos niveles existe una jerarquización, pues tienen un orden que no podemos saltar, además son recursivos, es decir, lo que es implícito en un nivel se convierte explícito en el siguiente nivel.

Es conveniente mencionar que el estudiante no puede pasar de un nivel a otro sin antes manejar correctamente el nivel en el que se encuentra, para que esto suceda Van Hiele, propone fases cíclicas que le ayudarán al estudiante, estas fases constituyen un esquema para organizar su enseñanza. Su carácter cíclico viene dado por el hecho de que cuando los estudiantes, tras recorrer las cinco fases, consiguen alcanzar un nivel de razonamiento superior al que tenían, deben iniciar un nuevo recorrido por las cinco fases para conseguir llegar al nivel superior actual.

Las fases son las mismas para todos los niveles, los contenidos matemáticos, el lenguaje empleado y la forma de resolver problemas son diferentes para cada nivel.

Las fases del modelo de Van Hiele son las siguientes:

Fase 1 (Información).- El maestro y los alumnos conversan y desarrollan actividades en relación a los objetos de estudio para el presente nivel. La finalidad es que el maestro se dé cuenta de los conocimientos previos de los estudiantes acerca del tema a tratar y además estas actividades permiten que los estudiantes se den cuenta del nuevo estudio que harán.

Fase 2 (Orientación dirigida).- Los estudiantes exploran el campo de investigación por medio de materiales que el maestro hace cuidadosamente secuenciados. Este material suele estar formado por bloques de actividades dirigidos al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales del área de estudio.

Fase 3 (Explicitación).- Construyendo sobre sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus ideas acerca de las estructuras que han sido observadas. Fuera de ayudar a los estudiantes en el uso preciso y apropiado del lenguaje, el profesor sólo interviene cuando es necesario. Es durante esta fase cuando el sistema de relaciones del nivel empieza a manifestarse.

Fase 4 (Orientación libre).- En esta fase, el estudiante debe de afianzar y completar sus conocimientos. Esto se consigue mediante la asignación de tareas por parte del profesor que pueda desarrollar de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. Así, los estudiantes adquieren experiencia al resolver las tareas usando sus propios caminos.

Fase 5 (Integración).- En esta fase el profesor debe tratar de resumir en un todo el campo que han explorado los estudiantes y lograr que integren lo que acaban de aprender en la red de conocimientos relacionados con este campo.

Al final de la quinta fase, los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento. El nuevo dominio del pensamiento remplaza el viejo, y los estudiantes están listos para repetir las fases de aprendizaje para el próximo nivel.

Desarrollando el pensamiento visual, no sólo se abren nuevos horizontes a la forma de enseñar Geometría, sino que se facilitan nuevas maneras de descubrir e investigar.

Una de las formas que se utilizan para observar la evaluación del conocimiento como “proceso” de los estudiantes, es la elaboración de una lista de cotejo, la cual nos permite organizar la información y resultados que arrojan los estudiantes, capturando en ella los conceptos y elementos relevantes en el desarrollo de la actividad que se quieren verificar.

Esta tabla (1, 2 y 3) nos permite cotejar el desempeño de los estudiantes con el desarrollo esperado de la actividad. La evaluación nos permite conocer en un principio, cuales son los conocimientos con los que se enfrenta el alumno a la actividad y por otro lado, al finalizar poder observar los avances que presentaron los estudiantes. Esta evaluación es de tipo cualitativa, sin embargo, se puede llegar a cuantificar.

¿Pero que es una evaluación cualitativa? Es aquella que nos permite involúcranos en el pensamiento del estudiante, realizando a su vez un análisis interpretativo de los resultados obtenidos, procurando capturar las experiencias de los propios estudiantes.

Los aprendizajes de los estudiantes son diversos y los podemos clasificar en sus diferentes ámbitos como: actitudinal, procedimental y conceptual (Díaz, Rojas). Donde el aprendizaje actitudinal consiste en la adquisición de actitudes por parte del alumno en su proceso de enseñanza – aprendizaje, es decir, el saber ser.

El aprendizaje procedimental, es decir, el saber hacer o saber procedimental se define como la ejecución de procedimientos, estrategias, técnicas, habilidades, destrezas, etc. Es decir, como un conjunto de acciones ordenadas y orientadas a un objetivo común, el llevar al estudiante a dominar dicho aprendizaje. El aprendizaje conceptual o el saber qué, se construye a partir del aprendizaje de conceptos, principios y explicaciones, abstrayendo de estos su significado esencial.

Estos aprendizajes son los que se involucran en la evaluación de los estudiantes, y se señalaran en las tablas 1, 2 y 3.

Metodología.

Las actividades presentadas en esté trabajo utilizaron como herramienta de estudio el *software* Geogebra, con la finalidad de permitir a los estudiantes obtener una mejor visualización de los lugares geométricos que se estudiaron en el transcurso de las sesiones, apoyándose en el modelo de Van Hiele para la organización de las mismas.

El desarrollo de las actividades se llevó acabó en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional ubicado en la Unidad Adolfo López Mateos, se hizo uso de la sala siglo XXI (computadoras y proyector) en el horario de 16:30 a 18:00.

Antes de ingresar al laboratorio de cómputo se realizó una breve explicación del contenido, con el propósito de introducir al estudiante en el tema de estudio. Esto se realizó con la técnica "lluvia de ideas" incorporando así a los estudiantes a las actividades.

Al iniciar cada tema se aplicó un examen diagnóstico, que nos permitió conocer el nivel geométrico de los estudiantes, para después comparar los resultados con los obtenidos al finalizar las actividades.

Se realizaron diez sesiones en el período del 4 de Septiembre al 4 de Octubre de 2007, los días martes y jueves, con cinco estudiantes que cursan el segundo grado de la Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad en Matemáticas. Se ingreso al laboratorio de cómputo en sólo ocho ocasiones.

En el momento que se aplicaron las actividades los estudiantes no habían cursado durante la licenciatura materias cuyo contenido científico fuera de matemáticas, pues, son cursos que estudiarán en semestres posteriores. Es decir, sólo contaban con los conocimientos adquiridos durante el bachillerato hace aproximadamente cuatro años.

La muestra que se considero fue tomada con estudiantes voluntarios, por lo tanto, es una muestra no probabilística. Lo cual implica que los resultados obtenidos tienen un valor limitado y relativo a la muestra en sí, más no a la población. Sin embargo, esto no quiere decir que no se pueda llevar acabo en una población.

Ninguno de los estudiantes conocía el *software*, ni habían manejado otro semejante anteriormente, por lo cual se dedicó la primera sesión de cómputo para enseñarles a manejar el programa con la construcción del lugar geométrico del cardioide. En esta construcción, se utilizan la mayoría de los comandos que son necesarios conocer y manejar adecuadamente en el transcurso de las actividades.

A continuación se muestra en la figura 1 la interfase del *software* Geogebra, la cual esta compuesta de diversos componentes como son: Barra de titulo, barra de menús, barra de herramientas, zona gráfica, campo de entrada y ventana algebraica.

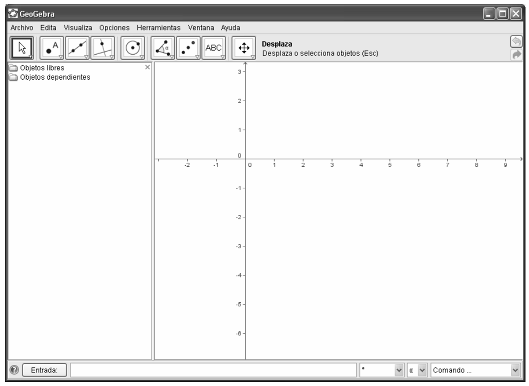


Figura 1.

La barra de menús, nos permite crear nuevos archivos, guardar, imprimir la zona gráfica, etc. La barra de herramientas contiene los comandos que son de gran utilidad para realizar las construcciones geométricas. Al dar clic sobre alguno de los comandos estos desplegarán más comandos relacionados a este como se muestra en la figura 2. El comando, específica con una figura o una etiqueta el concepto que representan como se muestra a continuación.

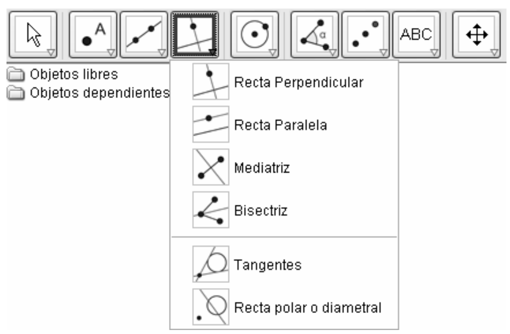


Figura 2

En la zona gráfica son visibles los trazos realizados en las construcciones, las propiedades de estos se pueden modificar en la ventana algebraica colocando el ratón en el objeto a modificar y al dar clic con el botón derecho se mostraran las propiedades que se pueden modificar, como podemos ver en la figura 3.

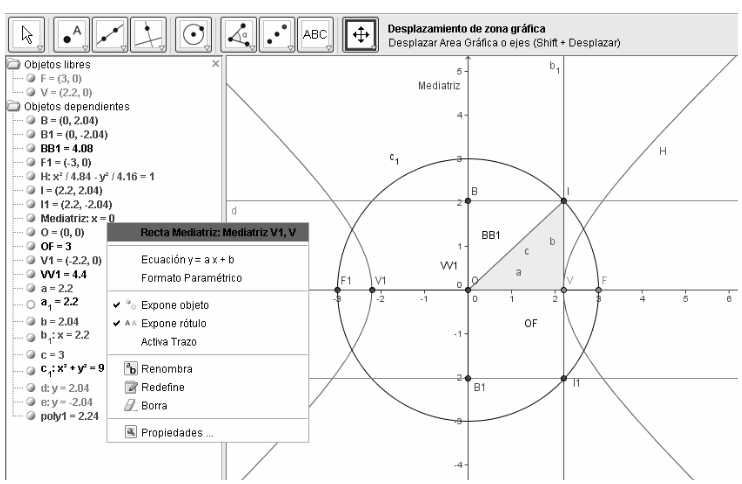


Figura 3.

Las construcciones que se realizan en este *software* son dinámicas, pues, se pueden modificar con facilidad y sin necesidad de rehacer toda la construcción, además de poder observar el comportamiento de los lugares geométricos moviendo los puntos libres.

En la ventana algebraica podemos ver los puntos libres de los cuales nuestras construcciones dependen. Al mover estos puntos, se puede observar como se modifica la construcción sin alterar sus propiedades. Las construcciones en el *software* se realizan de la misma forma que se hacen utilizando regla y compás.

La diferencia al utilizar el *software* es que al realizar las construcciones nos permite observar con mayor facilidad la dependencia de los trazos. Lo cual permite al estudiante prestar atención a las propiedades de los lugares geométricos.

En el campo de entrada de Geogebra que se muestra en la figura 4, se puede introducir funciones determinadas que facilitan la construcción de ciertos objetos en este caso, de los lugares geométricos.

Figura 4.

Las funciones se deben de introducir de acuerdo a los siguientes formatos, tomando en cuenta que los objetos entre corchetes ya están determinados y sólo se escribe la etiqueta del objeto.

Parábola.

Parábola[punto F, recta g]: Parábola con punto focal *F* y directriz *g*

Elipse

Elipse[punto F, punto G, número a]: Elipse con puntos focales *F* y *G* y eje principal de longitud *a*. Atención: Condición: 2*a* > *Distancia[F, G]*

Elipse[punto F, punto G, segmento s]: Elipse con puntos focales *F* y *G* siendo la longitud del eje principal igual a la del segmento *s* (*a* = *Longitud[s]*).

Hipérbola

Hipérbola[punto F, punto G, número a]: Hipérbola con puntos focales *F* y *G* y eje principal de longitud *a*. Atención: Condición: 0 < 2*a* < *Distancia[F, G]*

Hipérbola[punto F, punto G, segmento s]: Hipérbola con puntos focales *F* y *G* siendo la longitud del eje principal igual a la del segmento *s* (*a* = *Longitud[s]*)

En la fase de orientación dirigida se da a los estudiantes paso a paso la construcción por puntos del lugar geométrico, como se especifica posteriormente en las actividades. Esto les permitía, realizar sus construcciones y adaptarlas a determinadas circunstancias a las que se afrontaban en la fase de orientación libre.

El hecho de poder cambiar los colores de los trazos, ayuda al estudiante a tener un mejor panorama del lugar geométrico y de las propiedades del mismo.

Al finalizar las actividades, se aplicó un examen de conocimientos donde sólo tenían que resolver un problema que se les asigno de forma aleatoria y explicarlo posteriormente. El avance de los estudiantes se especifico por medio de tablas de evaluación (1, 2 y 3) como se describe a continuación.

Durante el desarrollo de la actividad se realizó una lista de cotejo determinando en ella los elementos relevantes con la finalidad de poder observar el desempeño de los estudiantes, considerando en ellas los aprendizajes actitudinales, procedimentales y conceptuales. Esta evaluación es cualitativa, sin embargo, si se requiere se puede cuantificar.

Las listas de cotejo se indican en el apartado de actividades como tablas de evaluación (1, 2 y 3), la finalidad de presentar dicho enlistado de forma detallada es para verificar el cumplimiento de cada punto. Después de cada tabla (5, 7 y 8) se especifica cuales fueron los indicadores que se consideran para conocer y validar que el estudiante cumple con ciertos elementos en especial, estos fueron retomados de los estándares curriculares (NCTM, 2001) del nivel 9-12. Al finalizar las actividades se realizó un cuadro comparativo, para observar con mayor claridad el progreso en los estudiantes.

Actividades.

En esta sección se muestra las sesiones que se les aplicarán a los estudiantes, dichas actividades están diseñadas basándonos en el modelo de Van Hiele, que consta de cinco fases: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración, y apoyándonos del *software* Geogebra, se identifica también el momento en que se introduce cada una de las fases del modelo y las observaciones que se realizarán utilizando el *software*.

Tomando en cuenta que los alumnos nunca han utilizado el *software* Geogebra, el estudio de la primera cónica (parábola), nos servirá como eje para facilitar el aprendizaje en las siguientes, y familiarizarse con la nueva estructura del trabajo, pues para el caso de la elipse e hipérbola la especificación de los pasos es menos rigurosa ó especifica, ya que, se sobreentiende como manejar el programa.

Parábola.

Para iniciar esta sesión se aplicará un examen diagnóstico y de esta forma, con sesiones posteriores, complementar sus ideas y facilitar el aprendizaje.

Es, en éste momento, donde se involucra la fase de información, en la cual el docente averiguará cuales son los conocimientos con los que el estudiante cuenta y establecer un acuerdo en común, donde se mostrarán las definiciones correspondientes y simbología que se utilizará en el transcurso de las actividades.

Fase 1. Información.

Examen Diagnóstico.

a) ¿Qué es una parábola?
b) Mencione las partes principales de la parábola (propiedades de la directriz, vértice, foco, lado recto).
c) ¿Cuál es la ecuación de dicha curva? Menciona los diferentes casos.

Al finalizar la prueba se construirá el concepto correspondiente al lugar geométrico de la parábola, se mostrarán sus partes principales y se hará mención de las propiedades de la misma, involucrando al alumno a través de la técnica conocida como "lluvia de ideas". Se utilizará la tabla 1 para la evaluación cualitativa del examen diagnostico.

Para la siguiente sección necesitamos estar familiarizados con el *software* Geogebra, con la finalidad de proporcionar herramientas necesarias para construcciones posteriores, se realizará la siguiente construcción.

Actividad auxiliar: Construcción del lugar geométrico llamado Cardioide (Díaz: pág.49).

A pesar de que esta construcción no es tan sencilla de realizar, escogimos este lugar geométrico, pues, involucra gran parte de los comandos que estaremos utilizando. Considerando que nuestro objetivo con el procedimiento establecido, es que se pueda familiarizar poco a poco con el programa y conocer algo de lo que se puede llevar a cabo con él.

Procedimiento:

Realice los siguientes trazos.

- Trazar un punto cualquiera A.
- Circunferencia con centro en A y radio fijo (ejemplo: radio 3).
- Punto sobre la circunferencia denotado por B y otro fuera de ella, llamado C.
- Segmento A-B
- Perpendicular a $\overline{AB}$ que pase por B.
- Perpendicular a la recta anterior que pase por C
- Punto de intersección entre ambas rectas llamado D.
- Lugar geométrico de D cuando B se mueve.

Finalmente, mueva los puntos B y C.

El lugar geométrico que obtuvimos, conforme a esta construcción es conocido como cardioide. Se puede cambiar de color los diferentes trazos, según lo prefieran, esto lo podrán realizar ingresando a Menú-Edita-Propiedades, es en esta última se pueden realizar los cambios que así lo requieran.

A partir de este momento ya se tienen los conocimientos necesarios para continuar con las actividades establecidas, pues se conoce, a grandes rasgos, la teoría de la parábola y los comandos que utilizaremos.

Fase 2. Orientación dirigida.

Es en esta fase, donde con actividades concretas, bien secuenciadas y dirigidas por el docente, se puede observar, analizar y practicar a través de la medición, con el fin de corroborar las diferentes construcciones.

Además, si la construcción realizada está mal ó en su defecto no cumple con las propiedades correspondientes las figuras se distorsionarán al mover alguno de los puntos libres.

a) Tomando en cuenta lo anterior, construiremos la parábola con vértice en el origen y que es simétrica al eje X.

El programa Geogebra, automáticamente asigna a cada trazo una etiqueta; en la barra de menús en la ventana de propiedades podemos reasignar nombre a los trazos correspondientes y elegir la forma de la ecuación de las respectivas curvas según nuestros intereses. Veamos ahora la realización de esta curva:

Procedimiento.

- Trazar un punto F, de coordenadas (x, 0).
- Considere al Origen del plano cartesiano como el vértice V de la parábola.
- Con el comando simetría, trazar el simétrico de F respecto al vértice V.
- Trazar la recta perpendicular al eje X que pase por el punto simétrico de F, llamemos a esta recta, la directriz de la parábola.

Por definición de lugar geométrico de la parábola sabemos que: un punto sobre este lugar geométrico equidista del foco y de la directriz, así:

- Trace un punto P sobre la directriz.
- Trace la perpendicular a la directriz que pase por P.
- Aplique el comando mediatriz a los puntos P y F.
- Trace el punto de intersección de estas dos últimas rectas, llamémosle M.

Mueva el punto P y observe que sucede con la mediatriz, ¿Qué figura se va formando al moverse la mediatriz?

- Trace el lugar geométrico de M cuando P se mueve.

Lo que nos interesa en este momento es observar el comportamiento de la ecuación de la parábola, sin embargo, con el procedimiento anterior el *software* no proporciona dicha ecuación. Así construiremos de otra manera la cónica; para ello se requieren cinco puntos que pertenezcan a ésta.

- Trace los puntos Q, R y S sobre la directriz y repita el procedimiento que utilizamos para el punto P, denote a los nuevos puntos de intersección como N, O y T, respectivamente.
- Con el comando "cónica" seleccione los puntos de intersección y el vértice.
- Oculte los trazos auxiliares, sólo conserve las partes principales de la parábola (vértice, foco, directriz y el lugar geométrico).

Hasta este momento hemos realizado la construcción de la cónica, sin embargo, se deben tener claras las definiciones de recta perpendicular, mediatriz, entre otros conceptos, pues de lo contrario provocará confusiones al realizar el procedimiento. Una vez terminada nuestra construcción podemos proceder al análisis de la misma.

¿Qué sucede con la ecuación de la parábola y las coordenadas de F, cuando F se mueve a lo largo del eje X?

- Con el comando "distancia" obtén la distancia del vértice al foco y la distancia del lado recto. Mueve nuevamente al punto F, observa cuál es la relación que existe entre la distancia del vértice al foco y la distancia del lado recto.

Así, podemos concluir que si p es positivo entonces la parábola abre hacia: _________. Y si p es negativo entonces la parábola abre hacia: _________ y la ecuación es de la forma: _____________. La parábola es más ancha cuando: ____. Y es más estrecha cuando: ____

Justifica tus respuestas.

Así, los estudiantes han analizado, a partir de la observación, el caso cuando el eje focal coincide con el eje X y el vértice se encuentra en el origen.

Fase 3. Explicitación.

La intención en esta fase es que con la nueva construcción, en caso de ser necesario o de surgir alguna duda, el docente corrija el lenguaje de los estudiantes en cuanto a contenido y a su vez ellos interactúen entre sí, teniendo así que ordenar sus ideas y analizarlas, para posteriormente expresarlas de manera clara hacia los demás.

Así, al realizar la siguiente construcción se reflejará la claridad del contenido que han obtenido hasta este momento y a su vez se aclararán las dudas correspondientes según sea el caso.

Continuemos con el desarrollo de la actividad que realizarán los alumnos.

Análogamente construya la parábola simétrica al eje Y con vértice en el origen. Obtenga la ecuación de la parábola y las coordenadas del foco.

- Mueva el punto F

¿Qué sucede con la parábola cuando F se mueve a lo largo del eje Y (positivo)?

1. Si la parábola abre hacia arriba ¿Cómo se comporta p?, si éste es la ordenada al origen del foco.
2. Si la distancia del vértice al foco aumenta ¿Qué pasa con la parábola?
3. En el caso cuando la distancia del vértice al foco es muy pequeña ¿Qué sucede con la parábola?
4. ¿Cuál sería la relación que existe entre el lado recto y la ordenada del foco?

¿Qué sucede cuando F se mueve en el eje Y (negativo)?

1. Hacia dónde abre la parábola y cómo es p, si éste es la ordenada al origen del foco.
2. Si la distancia del vértice al foco aumenta qué pasa con la parábola.
3. En el caso cuando la distancia del vértice al foco es muy pequeña qué sucede con la parábola.
4. Cuál sería la relación que existe entre el lado recto y la ordenada del foco.

Así, cuando la parábola es simétrica al eje X y con vértice en el origen, observamos que:

- La coordenada del Foco: (__,__)
- El lado recto es: _____
- La ecuación de la directriz es: _______
- La parábola es de la forma: _________

Por otro lado, cuando la parábola tiene vértice en el origen y es simétrica al eje Y, podemos decir que:

- La coordenada del Foco es: (__,__)
- El lado recto es: _____
- La ecuación de la directriz es: _______
- La parábola es de la forma: _________

Fase 4. Orientación libre.

En las fases anteriores hemos estudiado a la parábola con vértice en el origen y eje focal que coincide con los ejes de coordenadas, respectivamente. De acuerdo con esto, ya se ha analizado a la parábola en estos casos.

En esta fase de orientación libre se busca reforzar el contenido y llevarlo a diferentes situaciones cada vez más complejas. Es por esta razón que ahora se estudiará a la cónica trasladada con eje focal paralelo o coincidente a los ejes de coordenadas, como se especifica en las siguientes actividades:

Realiza la construcción de la parábola trasladada, para el caso donde el vértice no esta en el origen y el eje de ésta, es paralelo al eje X.

Puesto que ya analizamos el caso cuando la parábola es simétrica al eje X, observemos ahora que sucede cuando movemos el vértice en los diferentes cuadrantes.

¿Cambian las partes principales de la parábola?

Considera un caso particular utilizando la ecuación de la parábola que aparece en el programa y completando cuadrados obtén la ecuación de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

De acuerdo con las observaciones anteriores:
Si p es positivo, la parábola abre hacia: ________
Si p es negativo, la parábola abre hacia: ________
El foco es de la forma: (____, ____)

¿Qué sucede si el eje focal es paralelo ó coincide con eje Y?

Realiza la construcción correspondiente y mueve el vértice en los diferentes cuadrantes, observa cuidadosamente, tomando en cuenta la ecuación de la cónica, considera un caso particular y completando trinomios cuadrados perfectos obtén una ecuación similar al caso anterior, así, podemos concluir que:

La ecuación de la parábola es de la forma: $(\quad)^2 = 4p(\quad)$
Si la parábola abre hacia arriba, entonces p es: __________
Si la parábola abre hacia abajo, entonces p es: __________
El Foco es de la forma: (___, ___)

Fase 5. Integración.

Como su nombre lo dice, en esta fase lo que el docente realiza es una recapitulación de los nuevos conocimientos adquiridos, de modo que el estudiante integre todo lo que ha explorado a lo largo de las actividades presentadas en una red de conocimientos. Finalmente los ejercicios presentados a continuación reflejarán qué tanto ha influido la actividad en ellos.

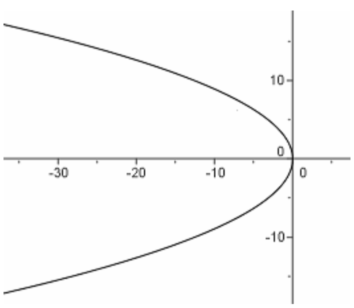
En las observaciones anteriores, estudiamos qué sucede con la parábola, cuando esta tiene vértice en el origen y es simétrica a los ejes coordenados respectivamente, también estudiamos el caso cuando se encuentra trasladada.

Utilizando Geogebra introduce las siguientes ecuaciones y halla: el Foco, la directriz, el vértice y la longitud del lado recto; si la ecuación es de la forma: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ completa el trinomio cuadrado perfecto para expresarla, según sea el caso a una ecuación de la forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ó $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

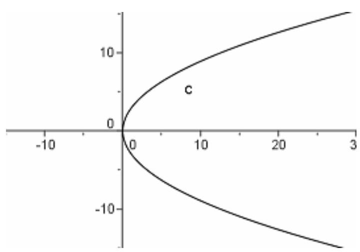
1. $x^2 = 12y$
2. $y^2 = 8x$
3. $x^2 = 2y$
4. $x^2 = -16y$
5. $y^2 = -20x$
6. $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$
7. $y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$

¿Qué lugar geométrico le corresponde a cada ecuación cuadrática?

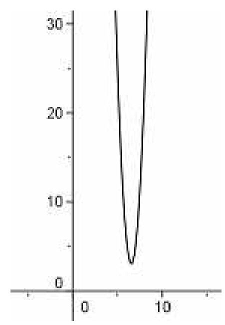
1. $y^2 = 8x$



a)

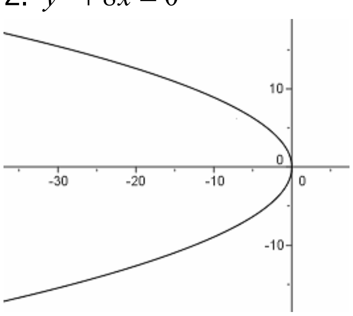


b)

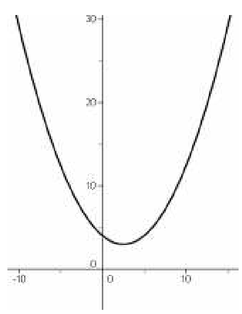


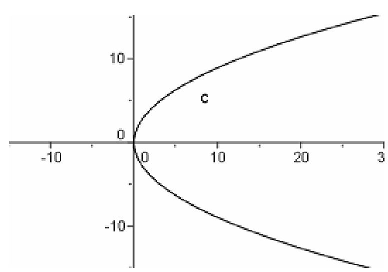
c)

2. $y^2 + 8x = 0$



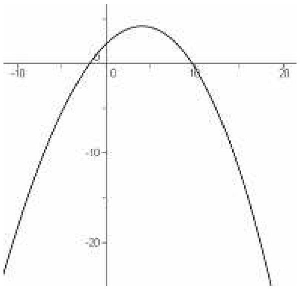
a)


b)

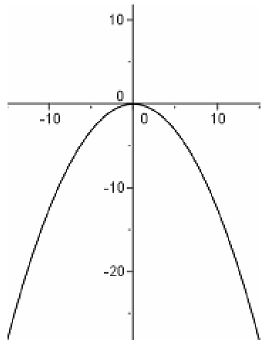


c)

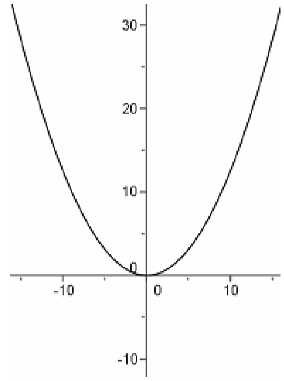
3. $x^2 = 8y$



a)

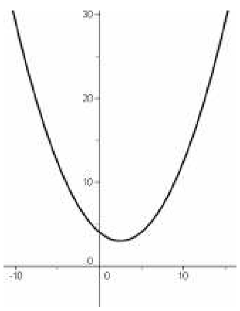


b)

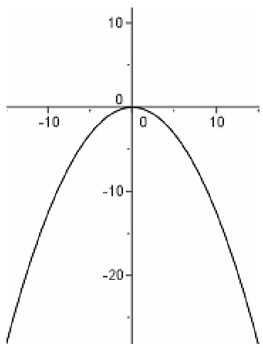


c)

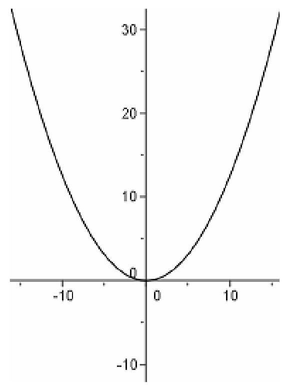
4. $x^2 + 8y = 0$



a)

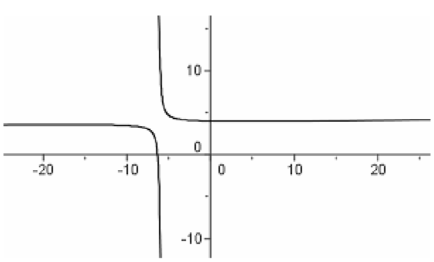


b)

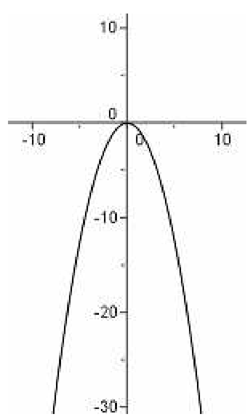


c)

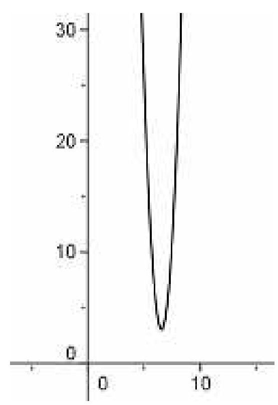
5. $4x^2 + 8y = 0$



a)

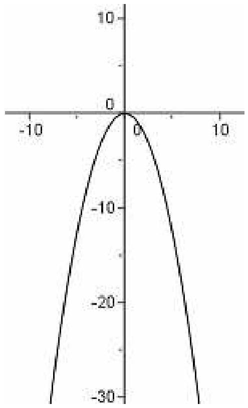


b)

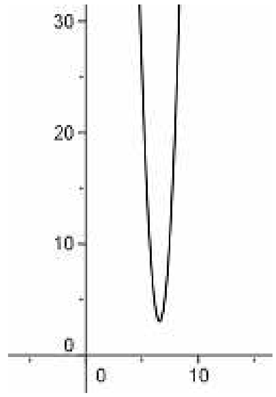


c)

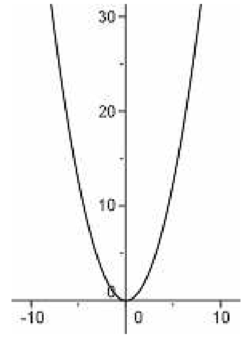
6. $4x^2-8y=0$



a)



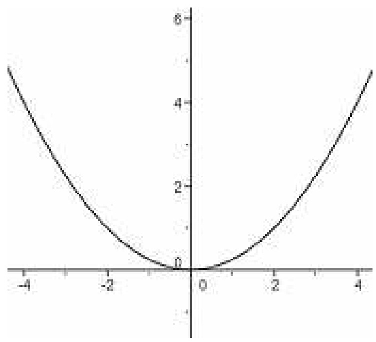
b)



c)

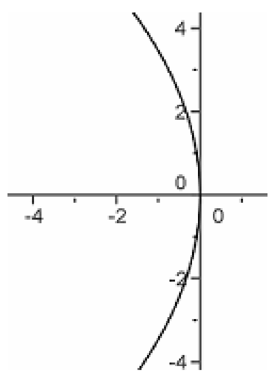
¿A qué curva pertenece cada lugar geométrico?

1.



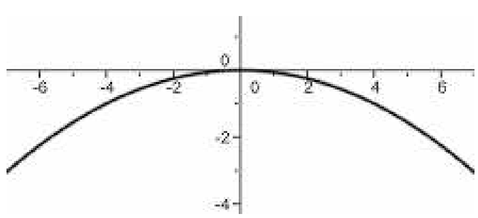
a) $x^3 = 4y$
b) $x^2 = 4y$
c) $x^2 + y^2 = 1$

2.



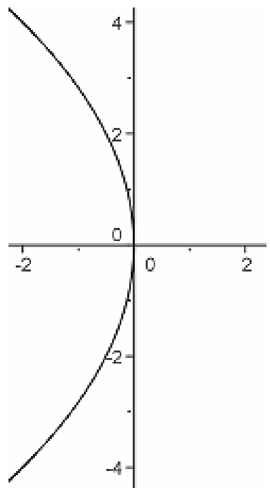
a) $y^2 + 12x^2 = 0$
b) $x^2 - y^2 = 1$
c) $y^2 + 12x = 0$

3.



a) $x + y = 4$
b) $x^2 - 16y = 0$
c) $x^2 = -16y$

4.



a) $2x + y = 9$
b) $y^2 - 8x = 0$
c) $y^2 = -8x$

En la tabla 1, se muestran los elementos relevantes que se tomarán en cuenta para la evaluación de los estudiantes, al iniciar la actividad se realizará la evaluación del examen diagnóstico, por medio de este enlistado. Para poder comparar e interpretar el desempeño de los estudiantes se utilizará esta misma tabla como herramienta de evaluación final.

Tabla 1. Evaluación de la parábola

Alumno		A	B	C	D	E
1. La definición es clara.						
2. Reconoce a la parábola como lugar geométrico.						
3. La definición tiene relación con la gráfica.						
4. Menciona como elementos de la parábola a:	la directriz.					
	el foco.					
	el vértice.					
	el lado recto.					
	el eje focal.					
5. Representa a la parábola con vértice en el origen.						
6. Representa a la parábola con vértice fuera del origen.						
7. Relaciona los elementos de la parábola con la grafica.						
8. Describe los elementos de la parábola con vértice en el origen.	la directriz.					
	el foco.					
	el vértice.					
	el lado recto.					
	el eje focal.					
9. Describe los elementos de la parábola con vértice en (h, k)	la directriz.					
	el foco.					
	el vértice.					
	el lado recto.					
	el eje focal.					
10. La ecuación corresponde al lugar geométrico.	vértice (0, 0)					
	vértice (h, k)					
11. Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática.						
12. Observa que el eje focal es eje de simetría						
13. Intenta describir a la parábola visualmente.						
14. Realiza un bosquejo del lugar geométrico para conocer la ecuación						
15. Relaciona el signo de la ecuación con la orientación $\uparrow \downarrow \leftarrow \rightarrow$						
16. Utiliza gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas						
17. Cuando conoce la ecuación de la parábola describe su lugar geométrico						
18. Convierte representaciones sintéticas a representaciones analíticas						

En las diferentes tablas, consideraremos a los alumnos con las letras A – E, de acuerdo a la tabla anterior, observaremos si cada alumno cumple con los elementos correspondientes a la evaluación. Por otro lado, los elementos de la tabla están enfocados a los diferentes aprendizajes, actitudinal, procedimental y conceptual, donde los elementos de la tabla, 1, 7-9, 11, 17 y 18 son aprendizajes conceptuales, los elementos 2-6, 10, 12 y 15 son aprendizajes procedimentales, mientras que los elementos 13, 14 y 16 son aprendizajes actitudinales.

Elipse.

Tanto la elipse como la hipérbola llevan un formato muy similar al que se ha visto anteriormente, tomando en cuenta que en ella se especificó la importancia de las fases del modelo de Van Hiele; a menos que sea necesario, se agregará otro comentario dentro de las actividades describiendo algún punto en particular.

Fase 1. Información.

A partir de los conocimientos previos, con los que el alumno cuenta se obtendrá la información necesaria para averiguar a grandes rasgos, que conocen acerca del tema.

a) ¿Cuál es la definición de elipse?
b) ¿Cuáles son las propiedades que conoces de la elipse?

La finalidad de las preguntas anteriores es desde luego poner al corriente a los estudiantes, apoyándonos una vez más de la técnica "lluvia de ideas" se construirá el concepto de elipse y las propiedades de la misma, para que los alumnos cuenten con un contenido más claro de la nueva cónica a estudiar. Se utilizará la tabla 2, para la evaluación del examen diagnostico de la elipse, donde se consideran a los aprendizajes actitudinal, procedimental y conceptual para la evaluación cualitativa de los estudiantes.

Fase 2. Orientación dirigida.

Tomando en cuenta los conocimientos adquiridos en las construcciones efectuadas anteriormente, se realizará la construcción de la elipse y a partir de ésta se deducirán las propiedades correspondientes.

En esta fase se contará con el apoyo del docente que los guiará en el procedimiento de construcción para un caso particular de la elipse y se efectuarán las observaciones pertinentes, indicadas a continuación.

Construcción de la elipse con centro en el origen y eje mayor en el eje X.

Procedimiento.

- Trazar los puntos correspondientes al origen O y los focos F y F´. (F´ es el simétrico de F respecto a O)
- Trazar los puntos que corresponden a los vértices V y V´ son simétricos respecto a O, pero no están en $\overline{F'F}$.
- Dar un punto R en $\overline{F'O}$.

- Determinar los puntos A y A' (eje menor), para esto trazar una circunferencia con centro en F y F', respectivamente y radio $\overline{VO} = a$, las intersecciones de estas circunferencias nos generan dichos puntos. (Nota: Para determinar los radios de las circunferencias se necesita primero construir los segmentos que jugarán el papel de radio.)
- Trazar las siguientes circunferencias.
    a) Centro en F' y radio $\overline{V'R}$
    b) Centro en F y radio $\overline{VR}$
    c) Centro en F' y radio $\overline{VR}$
    d) Centro en F y radio $\overline{V'R}$
- Definir los puntos de intersección de las circunferencias a) y b) con las etiquetas P y S.
- Definir los puntos de intersección de las circunferencias c) y d) con las etiquetas Q y T.
- Con el comando Cónica seleccionar los puntos P, S, Q, T y el vértice V.
- Oculte todos los trazos auxiliares que se utilizaron para construir la cónica.
- Trace los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OF}$ renómbrelos como b y c, respectivamente.

Hasta el momento sólo se ha construido la elipse utilizando la definición.

Para obtener las propiedades principales de la elipse, analiza la construcción y observa su comportamiento, con base a ello responde las siguientes preguntas justificando tus respuestas.

a) Determine ¿Cuál es la longitud del eje mayor?, si ésta es la porción comprendida entre los vértices V y V´.
b) ¿Cuál es la longitud el eje menor?, si éste es el segmento $\overline{AA'}$.
c) Una vez determinados ambos ejes ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices?
d) ¿Cuál es la relación que existe en el triángulo ΔAOF respecto a sus lados?, si éstos son: $\overline{AF} = a$, $\overline{AO} = b$ y $\overline{OF} = c$.
e) ¿Por qué $\overline{AF} = a$?
f) ¿La relación entre a, b y c se cumple para $F \in (O,V)$?
g) Con lo anterior, dados a y b ¿Podemos determinar c? ¿Cuál es la expresión?
h) ¿Cuáles son las coordenadas de los focos F y F´, respectivamente?
i) ¿Cuál es la ecuación de la elipse con centro en el origen y ejes que coinciden con los ejes de coordenadas?
j) El cociente $\frac{c}{a}$ se llama excentricidad de la elipse el cual determina su grado de redondez o alargamiento y se denota como $e = \frac{c}{a}$. ¿Cuál es el comportamiento de e, conforme varia c?
k) Para cada elipse la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, deduzca esta razón algebraicamente.

Fase 3. Explicitación.

En esta fase los alumnos se ven obligados a interactuar para analizar y complementar los conocimientos que acaban de adquirir, ordenando así sus ideas para posteriormente externarlas a los demás con mayor claridad, mientras son orientados para una adecuada construcción de sus conocimientos. Y de esta manera puedan enfrentarse a las actividades que a continuación se presentan.

Ahora, construya la elipse con centro en el origen y eje mayor en el eje Y.

Nota: Para términos prácticos, seguiremos utilizando la notación de la construcción anterior.

a) ¿Las longitudes del eje mayor y eje menor se siguen comportando de la misma manera en términos de a y b?
b) Determina las coordenadas de los vértices.
c) ¿La relación en el triángulo ΔAOF se sigue cumpliendo?
d) ¿Cuáles son las coordenadas de los focos?
e) ¿Cuál es la ecuación de la elipse para este caso?
f) ¿La excentricidad de la elipse, tiene el mismo comportamiento que en el caso anterior?
g) Podemos afirmar que si el denominador en x^2 es mayor entonces, la elipse tiene una posición: __________; en caso contrario, es decir, que el denominador mayor corresponde a y^2 entonces, la elipse tiene una posición: ___________.

Fase 4. Orientación libre.

Reforzaremos los conocimientos anteriores llevando a los estudiantes a una nueva situación semejante a las que se han estado estudiando, sólo con un pequeño cambio, que en este caso es, la traslación de la cónica, para que observe los cambios que se presentan en la misma.

¿Qué sucede, si ahora el centro de la elipse no está en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes de coordenadas? Construye dicha curva.

¿Cambian las partes principales de la elipse?

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos? Expresa tu respuesta con variables.

Considera un caso particular utilizando la ecuación de la elipse que aparece en el programa y completando el trinomio cuadrado perfecto obtén una ecuación de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. Determina los focos, vértices, lado recto, electricidad y el centro de la elipse.

Fase5. Integración.

En los siguientes ejercicios el estudiante reflejará como ha influido la actividad en su razonamiento.

Determina los vértices y los focos, en caso de ser necesario completar los trinomios cuadrados perfectos y realiza las gráficas correspondientes.

a) $3x^2 + 4y^2 = 48$

b) $25x^2 + 16y^2 = 400$

c) $3x^2 + 9y^2 - 6x - 27y + 2 = 0$

d) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y - 24 = 0$

e) $2x^2 + 5y^2 + 16x - 10y - 13 = 0$

En la tabla 2, se especifican los elementos que se tomarán en cuenta para la evaluación de los estudiantes, considerando a la vez los aprendizajes actitudinales, procedimentales y conceptuales. Se realizará la misma metodología que en la actividad anterior, para la evaluación del examen diagnóstico y así poder comparar e interpretar el desempeño de los estudiantes.

Tabla 2. Evaluación de la elipse

Alumno		A	B	C	D	E
1. La definición es clara.						
2. Reconoce a la elipse como lugar geométrico.						
3. La definición tiene relación con la gráfica.						
4. Menciona como elementos de la elipse a:	los focos					
	los vértices					
	los lados rectos					
	el eje mayor					
	el eje menor					
5. Representa a la elipse con centro en el origen.						
6. Representa a la elipse con centro fuera del origen.						
7. Relaciona los elementos de la elipse con la grafica.						
8. Describe los elementos de la elipse con centro en el origen.	los focos					
	los vértices					
	los lados rectos					
	el eje mayor					
	el eje menor					
9. Describe los elementos de la elipse con vértice en (h, k)	los focos					
	los vértices					
	los lados rectos					
	el eje mayor					
	el eje menor					
10. La ecuación corresponde al lugar geométrico.	centro (0, 0)					
	centro (h, k)					
11. Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática.						
12. Intenta describir a la elipse visualmente.						
13. Relaciona al denominador de mayor valor en la ecuación, con la orientación $\uparrow \downarrow \leftarrow \rightarrow$						
14. Utiliza gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas						
15. Deduce las propiedades de una figura por medio de sus coordenadas						
16. Describe el termino excentricidad con sus propias palabras						

Por otro lado, elementos de la tabla, 1, 7-9 y 11 son aprendizajes conceptuales, los elementos 2-6, 10, 12 y 15 son aprendizajes procedimentales, mientras que los elementos 14 y 16 son aprendizajes actitudinales.

Hipérbola.

En esta ocasión no se especificará en cada fase el propósito, pues se sobreentiende con las actividades anteriores, ya que en ellas se aclara que función cumple cada una, y esta actividad cuenta con el mismo formato, sin embargo, en caso de ser necesario realizaremos algún comentario al respecto.

Fase 1. Información.

Considerando los conocimientos previos, se obtendrá la información necesaria para averiguar a grandes rasgos, que conocen acerca del tema.

a) ¿Cómo se define el lugar geométrico de la hipérbola?
b) ¿Cuáles son las propiedades que conoces de la hipérbola?

Quizás esta información pueda surgir gracias a la gran semejanza que se puede encontrar con la cónica elipse, pero esperando que dicha observación sea llevada a cabo por los estudiantes. De lo contrario el profesor puede hacer alusión al tema, y así establecer, en algún momento las diferencias que existen entre ambas cónicas.

Fase 2. Orientación dirigida.

En esta ocasión, no utilizaremos la construcción por puntos, se utilizará una función importante del *software*, la cual nos permitirá realizar con mayor facilidad los trazos correspondientes. Está función consiste en introducir la función de hipérbola como se especifica en el procedimiento, para generar el lugar geométrico correspondiente a los parámetros señalados y también nos proporciona la ecuación de la cónica que estemos trabajando, de hecho la razón de utilizar esta propiedad es porque, de hacer la construcción por puntos necesitamos demasiados trazos que podrían confundirnos al final y obstaculizar las observaciones que deben realizarse.

Con ayuda de los conocimientos adquiridos en las construcciones realizadas anteriormente, y apoyándonos de los conocimientos previos se deducirán las propiedades principales. Construcción de la hipérbola con centro en el origen y eje focal en el eje X.

Procedimiento.

- Trazar los puntos que corresponderán al origen O y los focos F y F1. (F1 es el simétrico de F respecto a O)
- Trazar los vértices V y V1, donde V1 es el simétrico respecto a O del vértice V, además, están en $\overline{FF1}$ y siempre son menores a los extremos del segmento $\overline{FF1}$
- Trazar el segmento $\overline{OV}$, además sabemos que $\overline{VV1}$ es el eje real y se designa por $2a$ entonces, $\overline{OV} = a$ y oculta este segmento.
- En la parte inferior de la pantalla, ingresar la función Hipérbola[F, F1, OV], donde F y F1 son los focos y $\overline{OV}$ es el semieje real

Hasta el momento, con el procedimiento anterior hemos determinado la hipérbola. Si elegimos un punto cualquiera, Q por ejemplo, entonces ¿Se cumple la condición $\overline{QF} - \overline{QF1} = \overline{VV1}$, donde $\overline{VV1} = 2a$? ¿Cuál es la razón por la que en el eje no focal no hay puntos que pertenezcan a la hipérbola?

Nota: Para determinar geométricamente el eje no focal realizaremos el siguiente procedimiento:

- Trazar la recta perpendicular al eje focal que pase por V.
- Trazar la circunferencia con centro en O y radio OF (semidistancia focal, $\overline{OF} = c$)
- Trazar los puntos de intersección de la circunferencia con la recta, llamemos a estos puntos I, I1
- Trazar dos perpendiculares a $\overline{II1}$, que pasen por los extremos del segmento, respectivamente.
- Trazar la mediatriz del segmento $\overline{VV1}$
- Trazar los puntos de intersección entre las rectas perpendiculares anteriores y la mediatriz del segmento $\overline{VV1}$, denotemos a estos puntos por B, B1. Al segmento $\overline{BB1}$ lo llamaremos eje no focal ó imaginario, lo designaremos por *2b* así, $\overline{BB1} = 2b$

¿Cuál es la relación que existe en el triángulo ΔOIV , respecto a sus lados?, si las longitudes de los lados son $\overline{OV} = a$, $\overline{IV} = b$ y $\overline{OI} = c$. ¿Cuáles fueron los criterios que utilizaste en esta ocasión?
¿Cuál es la longitud del eje no focal o imaginario?
¿Cuáles son las coordenadas de los focos F, F1 y de los vértices V, V1 respectivamente?
¿Cuál es la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y ejes que coinciden con los ejes de coordenadas?
El cociente $\frac{c}{a}$, se llama excentricidad de la hipérbola, y denota como $e = \frac{c}{a}$. ¿Cuál es el comportamiento de e, conforme varia c?
Para cada hipérbola, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, deduzca esta razón algebraicamente.

Fase 3. Explicitación.

Una vez comprendida la construcción anterior, es importante ver qué tanto manejan los alumnos este nuevo conocimiento, así que en esta fase se buscará, como en las cónicas anteriores, que los estudiantes interactúen entre si, en las siguientes actividades y desde luego corregir su lenguaje en caso de ser necesario.

Análogamente, construya la hipérbola con centro en el origen y eje focal en el eje Y.

Nota. Para términos prácticos, seguiremos utilizando la notación de la construcción anterior.
¿Determina las coordenadas de los vértices y los focos?
¿La relación en el triángulo ΔOIV , se sigue cumpliendo?
¿Cuál es la ecuación de la hipérbola para este caso?
La excentricidad de la hipérbola, ¿tiene el mismo comportamiento que en el caso anterior?

En el caso de la elipse, para saber en qué eje de coordenadas coincidía o era paralelo el eje mayor observábamos el comportamiento de los denominadores, para la hipérbola esto no puede ser posible pues los denominadores pueden ser mayores, menores o iguales y esto no nos da ninguna información en cuanto a la posición del eje real. Así, lo que el docente debe hacer notar es que lo que determina este dato de gran importancia, es precisamente el signo menos que posee alguna de las variables de la ecuación de la hipérbola.

Podemos afirmar, que si la variable *x* tiene el signo menos, entonces la hipérbola tiene una posición __________; en caso contrario, es decir que el signo menos lo tenga la variable *y*, entonces la hipérbola tiene una posición ___________.

Fase 4. Orientación libre.

¿Qué sucede, si ahora el centro de la hipérbola no esta en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes de coordenadas? Construye dicha curva.
¿En qué cambian, las partes principales de la hipérbola?
¿Cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos? Expresa tu respuesta con variables.

Fase5. Integración.

Los siguientes ejercicios nos ayudarán a saber cuanto se ha aprendido acerca del tema y como lo expresan los estudiantes.

Determina los vértices, focos y las longitudes de los ejes en caso de ser necesario completa cuadrados y realiza la gráfica.

a) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

b) $4x^2 = y^2 + 16$

c) $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{6} = 1$

d) $25(y-1)^2 - 16(x+4)^2 = 400$

En la tabla 3, se especifican los elementos que se tomarán en cuenta para la evaluación cualitativa de los estudiantes.

Tabla 3. Evaluación de la Hipérbola.

Alumno		A	B	C	D	E
1. Considera como elementos de la hipérbola	focos					
	vértices					
	lado rectos					
	eje no focal					
	eje focal					
2. Relaciona el signo de la ecuación con la orientación ↑ ↓ ← →						
3. La ecuación de la hipérbola con centro (0, 0) y la gráfica tienen relación						
4. La ecuación de la hipérbola con centro (h, k) y la gráfica tienen relación						
5. Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática						
6. Dada la ecuación describe el lugar geométrico						
7. Completan cuadrados para obtener los elementos de la hipérbola						

Además, los elementos de la tabla, 3-5 y 7 son aprendizajes conceptuales, los elementos 1 y 2 son aprendizajes procedimentales, mientras que el elemento 6 es un aprendizaje actitudinal.

Resultados y análisis.

El formato que se proporciono a los alumnos para que realicen las actividades correspondientes a cada una de las cónicas estudiadas es similar para los tres casos al que a continuación se presenta.

Elipse. (Formato)

1. ¿Cuál es la definición de elipse?
   ¿Cuáles son las propiedades que conoces de la elipse?

2. Tomando en cuenta los conocimientos adquiridos en las construcciones efectuadas anteriormente, se realizará la construcción de la elipse y a partir de ésta se deducirán las propiedades correspondientes a la misma.

Construcción de la elipse con centro en el origen y eje mayor en el eje X.

Procedimiento.

- Trazar los puntos correspondientes al origen O y los focos F y F´. (F´ es el simétrico de F respecto a O)
- Trazar los puntos que corresponden a los vértices V y V´ son simétricos respecto a O, pero no están en $\overline{F'F}$.
- Dar un punto R en $\overline{F'O}$.
- Determinar los puntos A y A' (eje menor), para esto trazar una circunferencia con centro en F y F', respectivamente y radio $\overline{VO} = a$, la intersección de estas circunferencias nos generan dichos puntos. (Nota. Para determinar los radios de las circunferencias se necesita primero construir los segmentos que jugaran el papel de radio.)
- Trazar las siguientes circunferencias.
  e) Centro en F' y radio $\overline{V'R}$
  f) Centro en F y radio $\overline{VR}$
  g) Centro en F' y radio $\overline{VR}$
  h) Centro en F y radio $\overline{V'R}$
- Definir los puntos de intersección de las circunferencias a) y b) con las etiquetas P y S.
- Definir los puntos de intersección de las circunferencias c) y d) con las etiquetas Q y T.
- Con el comando cónica seleccionar los puntos P, S, Q, T y el vértice V.
- Oculte todos los trazos auxiliares que se utilizaron para construir la cónica.
- Trace los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OF}$ renómbrelos como b y c, respectivamente.

Hasta el momento sólo se ha construido la elipse utilizando la definición de la misma. Analiza la construcción y observa su comportamiento al mover los puntos libres, para obtener las propiedades principales de la elipse, con base a ello responde las siguientes preguntas justificando tus respuestas.

l) Determine ¿Cuál es la longitud del eje mayor?, si esta es la porción comprendida entre los vértices V y V´.

m) ¿Cuál es la longitud el eje menor?, si este es el segmento $\overline{AA'}$.
n) Una vez, determinados ambos ejes. ¿Cuáles son las coordenadas los vértices?
o) ¿Cuál es la relación que existe en el triángulo ΔAOF respecto a sus lados?, si éstos son: $\overline{AF} = a$, $\overline{AO} = b$ y $\overline{OF} = c$.
p) ¿Por qué $\overline{AF} = a$?
q) ¿La relación entre *a*, *b* y *c* se cumple para $F \in (O,V)$?
r) Con lo anterior, dados *a* y *b* ¿Podemos determinar *c*? ¿Cuál es la expresión?
s) ¿Cuáles son las coordenadas de los focos F y F´, respectivamente?
t) ¿Cuál es la ecuación de la elipse con centro en el origen y ejes que coinciden con los ejes de coordenadas?
u) El cociente $\frac{c}{a}$ se llama excentricidad de la elipse el cual determina su grado de redondez o alargamiento y se denota como $e = \frac{c}{a}$. ¿Cuál es el comportamiento de e, conforme varia c?
v) Para cada elipse la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, deduzca esta razón algebraicamente.

3. Construya la elipse con centro en el origen y eje mayor en el eje Y.

Nota. Para términos prácticos, seguiremos utilizando la notación de la construcción anterior.

h) ¿Las longitudes del eje mayor y eje menor se siguen comportando de la misma manera en términos de *a* y *b*?
i) Determina las coordenadas de los vértices.
j) ¿La relación en el triángulo ΔAOF , se sigue cumpliendo?
k) ¿Cuáles son las coordenadas de los focos?
l) ¿Cuál es la ecuación de la elipse para este caso?
m) La excentricidad de la elipse, tiene el mismo comportamiento que en el caso anterior.
n) Podemos afirmar, que si el denominador en x^2 es mayor entonces, la elipse tiene una posición: __________; en caso contrario, es decir, que el denominador mayor corresponde a y^2 entonces, la elipse tiene una posición: ___________.

4. ¿Qué sucede, si ahora el centro de la elipse no esta en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes de coordenadas? Construye dicha curva.

¿Cambian las partes principales de la elipse?

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos? Expresa tu respuesta con variables.

Considera un caso particular, utilizando la ecuación de la elipse que aparece en el programa y completando cuadrados obtén la ecuación de la forma

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, determine los focos, vértices, lado recto, excentricidad y centro de la elipse.

5. Determina los vértices y los focos, en caso de ser necesario completar los trinomios cuadrados perfectos y realiza la gráficas correspondientes.

a) $3x^2+4y^2=48$

b) $25x^2+16y^2=400$

c) $3x^2+9y^2-6x-27y+2=0$

d) $4x^2+9y^2-8x+36y-24=0$

e) $2x^2+5y^2+16x-10y-13=0$

Observemos que este formato es semejante al que se presentó en el apartado de actividades, sólo que esta es la versión que se le proporciono al alumno, con la finalidad de facilitar el trabajo.

Para no manejar los nombres de los estudiantes en el transcurso de esta sección mencionáremos con letras mayúsculas del alfabeto a los alumnos, por ejemplo: alumno A, para hacer alguna referencia en sus resultados. Utilizaremos sólo las letras correspondientes al intervalo A – E, pues las actividades se aplicaron a cinco estudiantes.

Parábola. (Resultados y análisis)

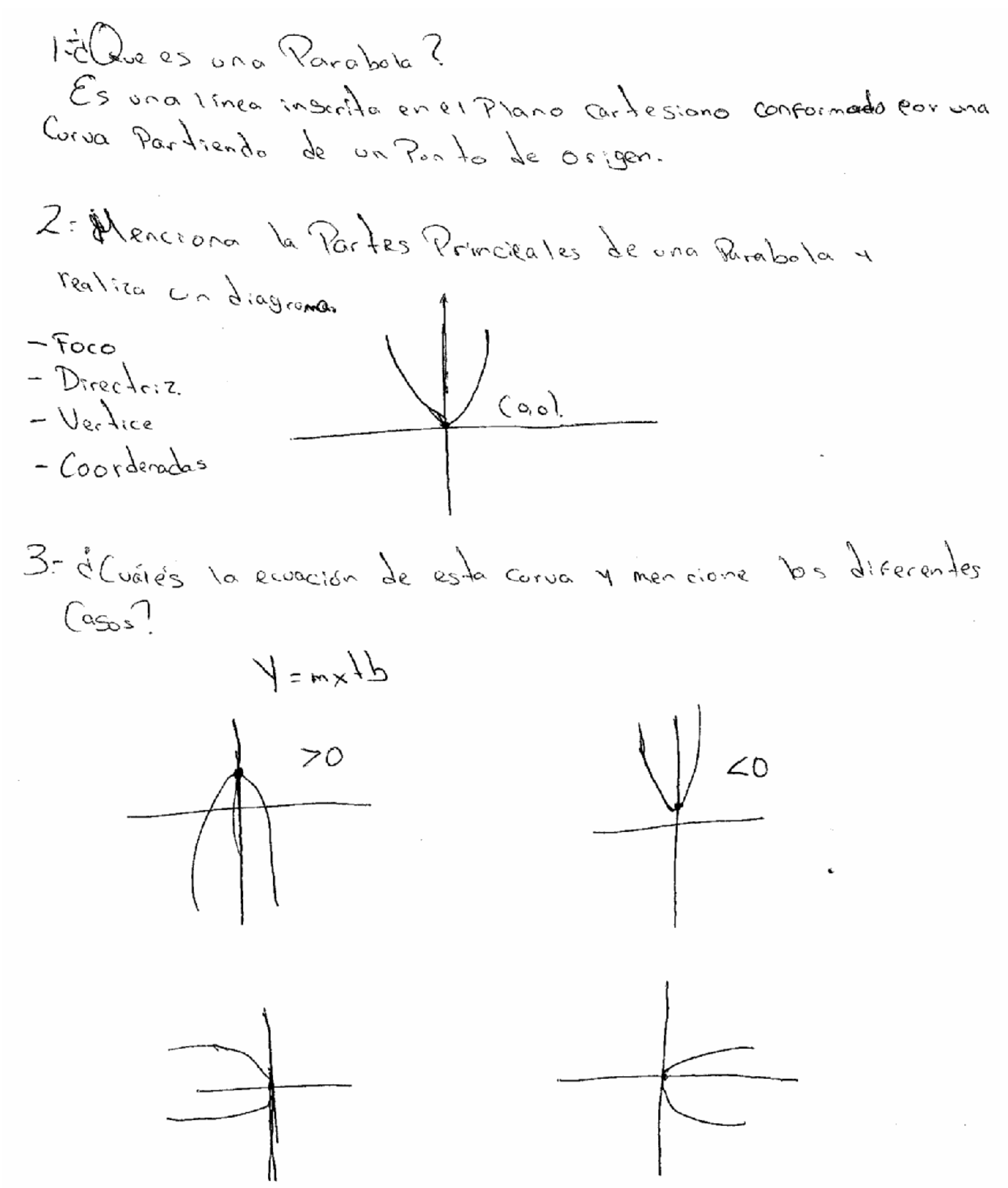
Fase1. Información y Fase 2. Orientación dirigida.

El examen diagnóstico se llevó a cabo el día 4 de Septiembre del presente año, alrededor de las 14:30 horas. Los alumnos tuvieron un tiempo aproximado de cuarenta y cinco minutos para contestar las preguntas correspondientes. Al finalizar la prueba, con la técnica “lluvia de ideas” se hizo participar a los estudiantes, integrando así los conocimientos previos y estableciendo un acuerdo común en cuanto a contenido y simbología.

Una inquietud que surgió entorno a la teoría fue el como surgía la ecuación de este lugar geométrico es por ello que se realizó la demostración algebraica para el caso cuando el eje focal coincide con el eje de coordenadas X y el vértice está en el origen, la tarea de ellos fue deducir en las sesiones posteriores para cada cónica la ecuación correspondiente según fuera el caso, los detalles se mostraran mas adelante. A pesar de que en un inicio esto no estaba contemplado dentro de las actividades la reacción en los alumnos fue favorable.

Los resultados de los exámenes diagnósticos se muestran a continuación.

Alumno A.


1- ¿Que es una Parabola?
Es una linea inscrita en el Plano cartesiono conformado por una Curva Partiendo de un Punto de origen.

2- Menciona la Partes Principales de una Parabola y realiza un diagrama.
- Foco
- Directriz.
- Vertice
- Coordenadas

3- ¿Cuál es la ecuación de esta curva y mencione los diferentes Casos?

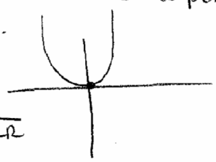
Y = mx+b

Alumno B.

1.- ¿Qué es una parábola?
Lugar geométrico, representa una cónica

2.- Partes principales de la parabola?
diagrama.

Directriz
foco
lado recto $\overline{LR}$
Vertice



3.- ¿Cuál es la ecuación de esta curva y menciona los diferentes casos?

1.- $x = 4ay$ → 1. Vértice en el origen $4a$

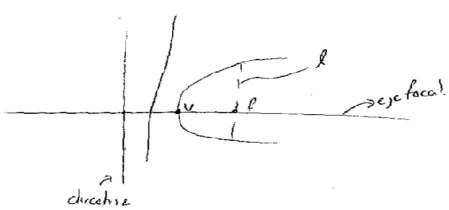
2. Vertice fuera del origen. (h, k)

$(x-h)(y-k)$

Alumno C.

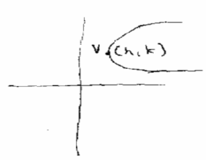
1.- Es el lugar geométrico que se obtiene del movimiento de un punto que equidista de una recta y un punto fuera de ella.
(directriz) (foco)

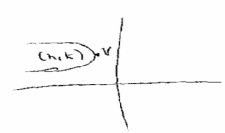
2.- Vertice, foco, directriz, eje focal, lado recto
V f ℓ

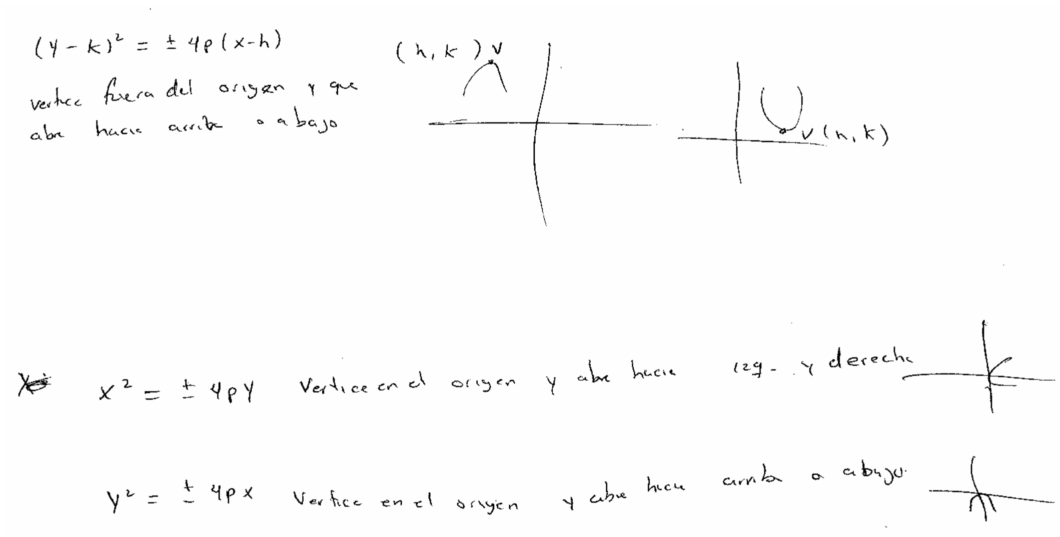


3.- Ecuacion general
$Ax^2 + Bx + C = 0$

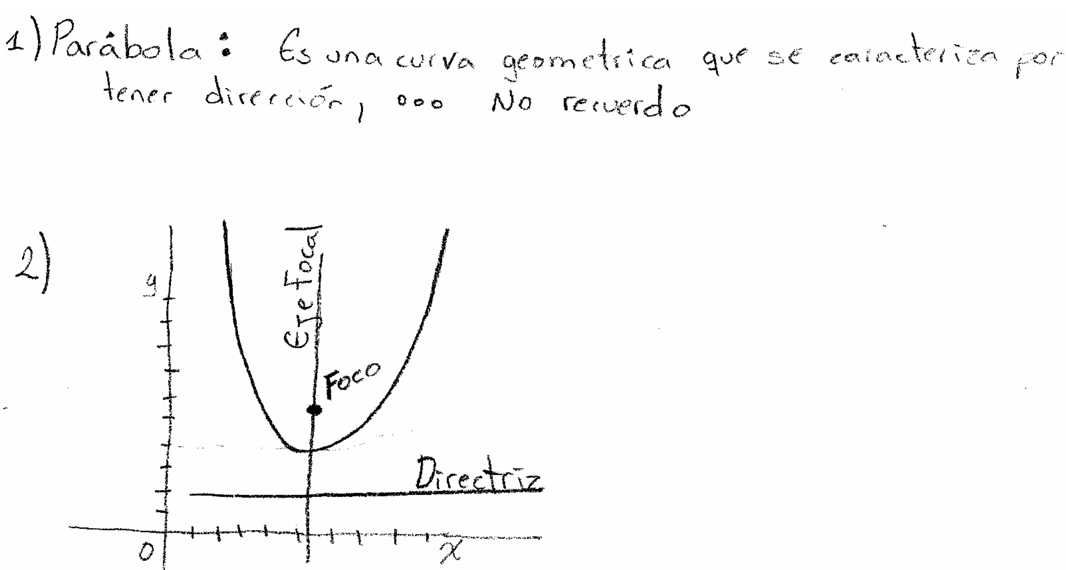
Ecuación con centro fuera del origen
$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$
abre hacia la izq. o la derecha
segun $\pm$







Alumno E.



Por razones ajenas, el alumno D no presento examen diagnóstico escrito, sin embrago, se le realizó posteriormente una entrevista en la cual se le realizaron las mismas preguntas que a los otros estudiantes, observando que los conocimientos con los que este alumno cuenta son visuales, pues sólo intento realizar una descripción gráfica del lugar geométrico, sin relacionar los elementos de la cónica, además de considerar sólo como elementos del lugar geométrico al vértice, foco y directriz, pero sin realizar una descripción de ellos.

Durante esta fase los estudiantes dieron ejemplos de en donde podíamos encontrar objetos con la forma de está cónica. En la tabla 4, se muestra una evaluación cualitativa de los conocimientos, con los cuales deberían de contar y en los se va trabajar en el transcurso de la actividad. Con la finalidad de observar el cumplimiento de dichos elementos.

Tabla 4. Evaluación del examen diagnóstico (Parábola)

Alumno		A	B	C	D	E
La definición es clara.				✓		
Reconoce a la parábola como lugar geométrico.			✓	✓	✓	
La definición tiene relación con la gráfica.				✓		
Menciona como elementos de la parábola a:	la directriz.	✓	✓	✓	✓	✓
	el foco.	✓	✓	✓	✓	✓
	el vértice.	✓	✓	✓	✓	
	el lado recto.		✓	✓		
	el eje focal.			✓		✓
Representa a la parábola con vértice en el origen.		✓	✓	✓	✓	
Representa a la parábola con vértice fuera del origen.		✓		✓	✓	✓
Relaciona los elementos de la parábola con la grafica.				✓		✓
Describe los elementos de la parábola con vértice en el origen.	La directriz.					
	El foco.					
	El vértice.					
	El lado recto.					
	El eje focal.					
|Describe los elementos de la parábola con vértice en (h, k)	la directriz.					
	el foco.					
	el vértice.					
	el lado recto.					
	el eje focal.					
La ecuación corresponde al lugar geométrico.	vértice (0, 0)					
	vértice (h, k)					
Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática.						
Observa que el eje focal es eje de simetría						
Intenta describir a la parábola visualmente.		✓	✓	✓	✓	✓
Realiza un bosquejo del lugar geométrico para conocer la ecuación						
Relaciona el signo de la ecuación con la orientación ↑ ↓ ← →						
Utiliza gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas						
Cuando conoce la ecuación de la parábola describe su lugar geométrico						
Convierte representaciones sintéticas a representaciones analíticas						

De acuerdo con los datos anteriores se puede observar que sólo representan de manera visual al lugar geométrico, incluso no consideran a la cónica como lugar geométrico. Los estudiantes saben que existen los elementos de la parábola, pero no los relacionan entre si y mucho menos describen en que consisten.

De tener que ubicar a los estudiantes en uno de los niveles del modelo de Van Hiele de acuerdo con los resultados de su examen diagnóstico, la mayoría de ellos se encuentran en el nivel 0 que es el de visualización, como podemos observar los estudiantes identifican el lugar geométrico de la parábola, a manera de alguna curva en especial pero sin propiedades que pertenezcan a la misma. El alumno C tiene una mayor noción de esta cónica, sólo que confunde la correspondencia de las simetrías en estas cónicas, pues, al relacionar la ecuación de las mismas con el diagrama correspondiente podemos observar que esta correlación no es correcta, sin embargo, esperemos que estos detalles se disipen en la realización de la actividad.

En nuestra primera visita al laboratorio de cómputo, la cual se realizó el 6 de Septiembre del año pasado, los estudiantes comenzaron a involucrarse con las algunas construcciones y el hecho de familiarizarse con el *software* les hizo notar que necesitaban conocer la teoría correspondiente, de lo contrario sus construcciones se deformarían al mover los puntos que son considerados como libres pues los trazos posteriores dependen de éstos. Por ejemplo, en caso de no trazar la directriz perpendicular al eje focal a pesar de que a simple vista la construcción parece estar bien, como se muestra en la figura 5, podemos observar que al mover los puntos libres nuestra construcción se distorsiona como se muestra en la figura 6.

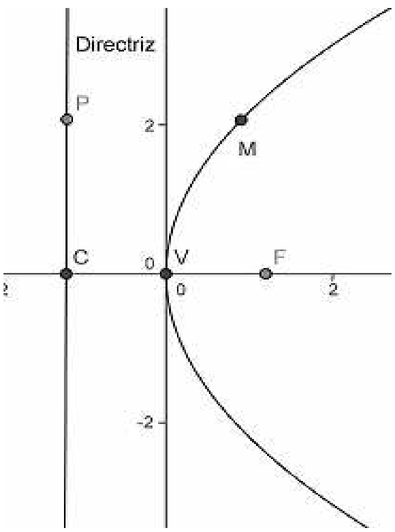


Figura 5.

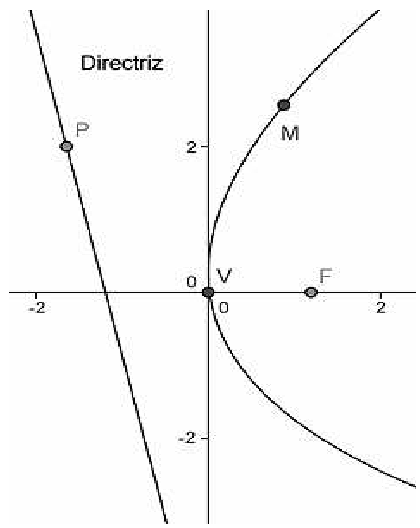


Figura 6.

Este tipo de circunstancias a las que se enfrentaron los alumnos dieron pauta a reafirmar sus conocimientos y profundizar en el tema a tratar, a continuación se presentan sus comentarios al respecto.

Alumno A

El Sotware, geogebra, me Parecio interesante, didáctico y a la vez Creativo ya que Podiamos hacer Por nuestra Cuenta las gráficas, conocer las Partes de una Parabola, SusPropiedas y sus aplicaciones.

Creo que me falta revisar un Poco mas la teoría, es decir, leer los temas relacionados, hacer ejercicios y Conocer Sus caracteristicas y propiedades. Así que me Podré estudiar y relacionar los temas con las demas ramas de las Matemáticas.

Alumno B

Lo más importante es construir ese lugar geometrico nosotros mismo, porque así te darás cuenta de lo que implica y como es que se cumplen las característi-cas que anteriormente ya se habían visto en la clase. Por lo tanto viene a reafirmar lo que se vio en clase.

Alumno C. En esta ocasión el comentario hace referencia del desarrollo de la actividad, así como los problemas en los que el se vio involucrado.

Hé aquí una disyuntiva que hay que considerar; puesto que pese a que algúnas respuestas son correctas matemáticamente hablando, son incorrectas por el proceso de razonamiento y el mal análisis que utilizé.

¿Cómo darnos cuenta, que es aquí donde como alumno fallé?

La respuesta a la pregunta anterior, no es difícil. La realización de una actividad correctamente estructurada, permite al alumno (yo) darse cuenta que hay algo que no concuerda al hacer la revisión general de sus respuestas. Ello hace surgir la necesidad en él de esclarecer sus dudas y de transformar ese conocimiento ingenuo a un aprendizaje significativo.

Así también como de gran importancia fué el ejercicio previo realizado en la sala de cómputo.

Es aquí donde se muestra que es el alumno el que debe darse cuenta de los huecos informativos que tiene y la falta de análisis de los mismos. El profesor de matemáticas no es capaz de notar cuando el concepto de un alumno es mal comprendido, en la mayoría de los casos. Es por ello que el uso dirigido y experimental para el alumno de esté programa, le permite notar este tipo de fallos en su abstracción del concepto y la definición.

Alumno E.

A medida que vamos haciendo los trazos en el programa GeoGebra se nota una mejor manera de usarlos; en lo personal, necesito práctica para poder desarrollar cualquier procedimiento, no soy de las personas que a la primera explicación se le quede el conocimiento.

Comenzamos con un repaso de los conceptos vistos relacionados con la parábola, al llegar con la incógnita de donde salían las fórmulas para cada caso (vertical u horizontal; fuera o en el origen, el vértice), para lo cual se quedo como tarea llegar a la demostración algebraicamente, lo cual realmente me costara trabajo.

A pesar de los conflictos de los estudiantes en cuanto al álgebra que se utilizó en el transcurso de la práctica la mejoría fue notable, pues al iniciar con los reportes podemos notar que los resultados eran expresados en lenguaje coloquial, pero al finalizar, la generalización de resultados en el caso de las propiedades fue realmente notoria.

En las actividades van implícitas las observaciones que tienen que realizar los alumnos. Así, al terminar las construcciones estas fueron las anotaciones que se realizaron.

En el caso cuando el eje focal coincide con el eje X, al mover el foco a lo largo del eje focal se puede observar que:
Alumno C.

Tanto la ecuación como las coordenadas de F son positivas si se mueve a lo largo de x^+, y ambos son negativas cuando lo hacen sobre x^-

Por otro lado, si consideramos las distancias que hay del vértice al foco y la del lado recto, la relación que hay entre estas los estudiantes la ven de distintas formas apoyándose en las herramientas del *software* junto con la visualización de la construcción, como se señala a continuación.
Alumno A.

Que es equivalente del foco a la directriz es la mitad de la longitud del lado recto.

Alumno C.

Bueno, en este caso obtuvé una ecuación de la forma $y^2 = 12.64x$

con $F(3.16, 0)$, $V(0,0)$

$\overline{VF} = 3.16$ $\overline{LL_1} = 12.64$

podemos ver que la distancia del lado recto es 4 veces más grande que la que existe entre el vertice y el foco.

podemos decir que si $\overline{VF} = p$ el lado recto será $4p$. (resulta ser una propuesta tentadora)

Cabe añadir que en los casos presentados anteriormente la única diferencia que se exhibe es la generalización que podemos ver en el alumno C, sin embargo, el alumno A aunque con otro lenguaje presenta una definición acertada.

Fase 3. Explicitación.

Con base a lo anterior, en esta fase los alumnos obtienen las propiedades de la parábola para los casos cuando el eje focal coincide con los ejes de coordenadas respectivamente, observando la semejanza que existe entre ambos casos, realizando las observaciones pertinentes. Por ejemplo; el alumno C muestra la semejanza entre ambos procesos, sin embargo, los estudiantes pueden generalizar como se hace explícito en el reporte del alumno E, al igual que sucede con el alumno D, como se presenta a continuación:

Alumno C. Estas anotaciones fueron realizadas al observar el comportamiento de los puntos libres, esto es sólo un fragmento.

¿Qué sucede con la parábola cuando F se mueve a lo largo del eje y (positivo)? la parábola abre hacia arriba.

1.- Si la parábola abre hacia arriba, ¿cómo es p?, si esta es la ordenada al origen del foco. Positiva.

2.- Si la distancia del vértice al foco aumenta ¿Qué pasa con la parábola? Se hace más ancha

3.- En el caso cuando la distancia del vértice al foco es muy pequeña ¿Qué sucede con la parábola? Es menos ancha.

4.- Cuál es la relación que existe entre el lado recto y la ordenada del foco. también tiene una relacion 4p, siendo p la ordenada del foco

Alumno E. Analizando el comportamiento de los diferentes trazos al mover los puntos libres y realizar las anotaciones como se mencionó con el alumno anterior, se puede llegar a una generalización de los conocimientos aprendidos.

Así, cuando la parábola es simétrica en el eje X y con vértice en el origen, observamos que para un caso general tenemos que:

- La coordenada del Foco: $(p, 0)$
- El lado recto es: $4p$
- La ecuación de la directriz es: $x = -p$
- La parábola es de la forma: $y^2 = 4px$

Por otro lado, cuando la parábola tiene vértice en el origen y es simétrica al eje Y, podemos decir que:

- La coordenada del Foco: $(0, p)$
- El lado recto es: $4p$
- La ecuación de la directriz es: $y = -p$
- La parábola es de la forma: $x^2 = 4py$

Alumno D. En este caso, sus reportes muestran, un manejó adecuado del tema Generalizaciones correspondientes a las parábolas con vértice en el origen:

Simétrica al eje X.

- La coordenada del foco $(x, 0)$ o $(-x, 0)$
Lado recto $4p$
La directriz $x=-p$
$y^2 = 4px$

Simétrica al eje Y.

- $F=(0,y)$ ó $F=(0,-y)$
$L_R = 4p$
La directriz $y=-p$
$x^2 = 4py$

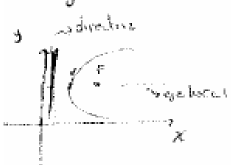
Tomando en cuenta que el alumno E en su examen diagnóstico prácticamente no resaltó ninguna propiedad de la parábola y basándonos en sus comentarios y sus anotaciones anteriores, podemos decir que al realizar las observaciones y apoyándose de la construcción geométrica el alumno adquirió la correcta visualización de las propiedades de la parábola. En definitiva podemos afirmar que tanto el *software* como la estructura de la actividad han creado un aprendizaje significativo en él.

Fase 4. Orientación libre.

Pero qué sucede ahora al trasladar los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores, en donde el lugar geométrico de la parábola se manejó con vértice en el origen y la actividad en esta fase implica colocar nuestro vértice fuera del origen y ver los casos cuando el eje focal es paralelo a los ejes de coordenadas o coincidente. Desde luego, se encuentra una gran semejanza en el comportamiento de nuestro lugar geométrico y los estudiantes lo notan.

Veamos a continuación los siguientes casos: Alumno C. En el transcurso de la actividad podemos notar que él tiene más arraigada la generalización de conceptos, sin embargo, la dificultad mostrada en relacionar la simetría de algún lugar geométrico se ha disipado satisfactoriamente, pues la correlación que existe entre la ecuación y su diagrama correspondiente es correcta.

Bueno, el vértice debe estar fuera del origen, el eje focal paralelo o coincide al eje "x"



Supongamos que el vértice está en

✓ $V=(a,b)$

y sea p la distancia que hay entre el Vértice y el foco.

✓ $\Rightarrow$ El foco estaría dado por $F(a+p, b)$

la ecuación sería de la forma

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

o bien :

$$y^2 - 2by - 4px + b^2 + 4pa = 0$$

$$y^2 + (-2b)y + (-4p)x + (b^2 + 4pa) = 0$$

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0.$$

El lado recto seguiría siendo $4p$.

y la ecuación de la directriz será $x = a - p$.

Las partes principales de la parábola no cambian, solo las coordenadas de la ecuación pero la parábola no, ello quiere decir que p sigue conservando su signo

Alumno E. Al generalizar el caso cuando el eje focal es paralelo o coincidente al eje de coordenadas *x* tenemos las siguientes anotaciones.

¿Cambian las partes principales de la parábola? No, se conservan las mismas propiedades (del Vértice, Foco, Directriz, etc)
Si p es positivo, la parábola abre hacia: derecho
Si p es negativo, la parábola abre hacia: izquierda
El foco es de la forma: ($h+p$, K)

Para el caso cuando el eje focal es paralelo o coinciden de con el eje de coordenadas *y,* tenemos que:

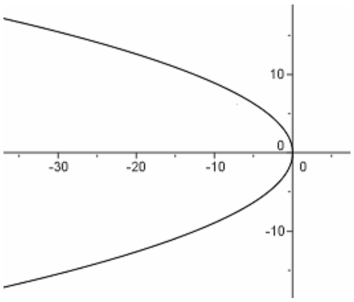
La ecuación de la parábola es de la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-K)$ con vértice en (h, K)
Si la parábola abre hacia arriba, entonces p es: positivo
Si la parábola abre hacia abajo, entonces p es: negativo
El Foco es de la forma: (h, $K+p$).

Fase 5. Integración

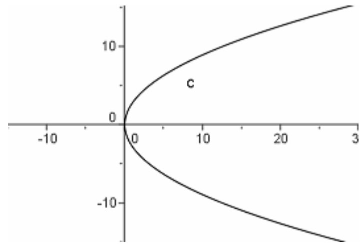
Finalmente, ¿Qué tanto ha influido la actividad en los estudiantes? Es en esta fase donde se reflejará que tanto han aprendido y como relacionan sus conocimientos con el problema a tratar.

¿Qué lugar geométrico le corresponde a cada ecuación cuadrática?

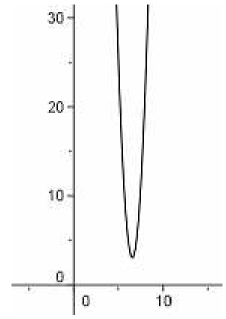
1. $y^2 = 8x$



a)



b)



c)

Solución.

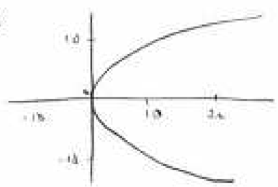
Alumno C. Al finalizar la actividad y presentar el resultado siguiente, podemos observar que: el razonamiento utilizado por el alumno lo conduce a la correcta representación gráfica de la ecuación presentada. Lo cual nos indica que la confusión del concepto "simétrico a" se ha disipado.

1.- $y^2 = 8x$

Es una parábola simétrica al eje X, con vértice en el origen y que abre hacia la derecha, pues $p = 2$ ya que:

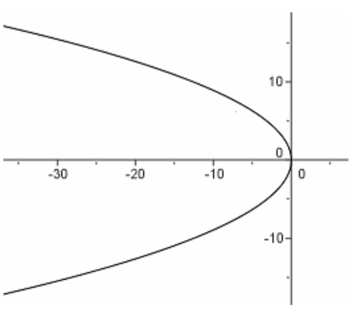
$y^2 = 8x$

$y^2 = 4(2)x$; por lo tanto la gráfica, o bien la representación del lugar geométrico es:

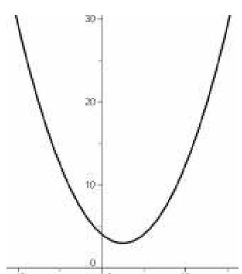


v(0,0)
F(2,0)

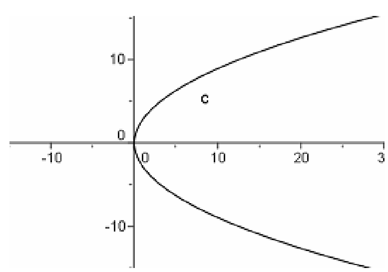
2. $y^2 + 8x = 0$



a)



b)



c)

Solución.
Alumno C. Con las observaciones realizadas en la actividad se puede analizar a partir de la ecuación, la gráfica de la que estamos hablando como se muestra a continuación.

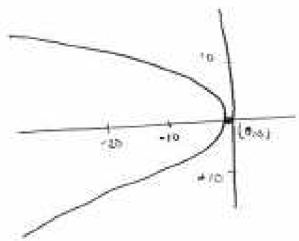
$y^2 + 8x = 0$ Es una parábola con vértice en el origen

$y^2 = -8x$ que abre hacia la izquierda, pues $P = -2$,

$y^2 = 4(-2)x$ es simétrica al eje x

el lugar geométrico es

$V(0,0)$
$F(-2,0)$



Alumno B. Las observaciones realizadas en el *software* ayudan al estudiante a analizar en este caso el comportamiento de la ecuación cuadrática.

2- $y^2 + 8x = 0$ a

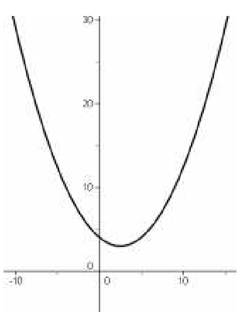
Para esta ecuación sabemos que se debe despejar y^2, entonces es la siguiente forma:

$y^2 + 8x = 0$

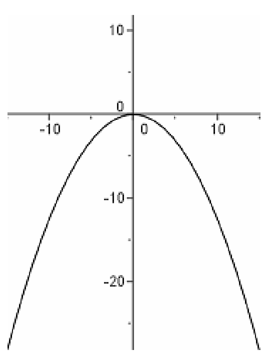
$\boxed{y^2 = -8x}$

Para empezar es negativa, puede ir hacia la izquierda o hacia abajo, pero como es simétrica al eje "x" entonces va hacia la izquierda.
El "b" no porque es fuera del origen y sería $v(h,k)$, y la última es positiva, entonces tampoco.

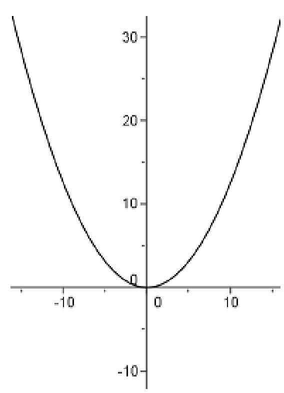
4. $x^2 + 8y = 0$



a)



b)



c)

Solución.
Alumno B.

4.- $x^2 + 8y = 0$

Tenemos que despejar x^2 ∴

$x^2 + 8y = 0$

$\boxed{x^2 = -8y}$

El signo nos indica que es una parábola hacia la izquierda o hacia abajo no hay ninguna hacia la izquierda así que es el inciso "b."

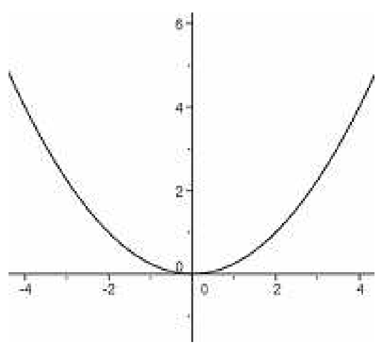
¿Porqué las otras 2 no?

El inciso "a", es parábola fuera del origen $V(h,k)$, y no concuerda con la ecuación.

La parábola "c" está en $V(0,0)$ y es simétrica al eje y, pero es positiva y por lo tanto no concuerda con la ecuación.

¿A qué curva pertenece cada lugar geométrico?

1.



a) $x^3 = 4y$
b) $x^2 = 4y$
c) $x^2 + y^2 = 1$

Solución

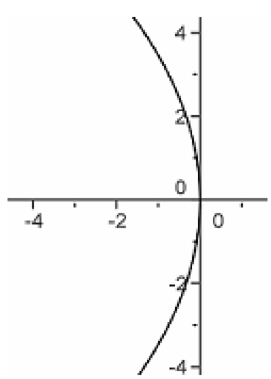
Alumno C. En base al siguiente análisis se muestra que a partir de la gráfica, el alumno puede deducir la ecuación a la que pertenece el lugar geométrico.

Es una parábola simétrica al eje Y, positiva pues abre hacia arriba y además con vértice en el origen, por lo tanto la ecuación respectiva es: $x^2 = 4y$

$x^2 = 4(1)y$

$p > 0$
$V(0,0)$
$F(0,1)$

2.



a) $y^2 + 12x^2 = 0$
b) $x^2 - y^2 = 1$
c) $y^2 + 12x = 0$

Solución.
Alumno C.

Es una parábola con vértice en el origen, simétrica al eje x, y negativa pues abre hacia la izquierda por lo tanto la ecuación es:

$y^2 + 12x = 0$

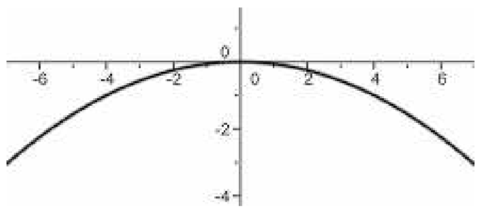
$\Rightarrow y^2 = -12x$

$y^2 = 4(-3)x \qquad p < 0$

$v(0,0)$

$F(-3,0)$

3.



a) $x + y = 4$

b) $x^2 - 16y = 0$

c) $x^2 = -16y$

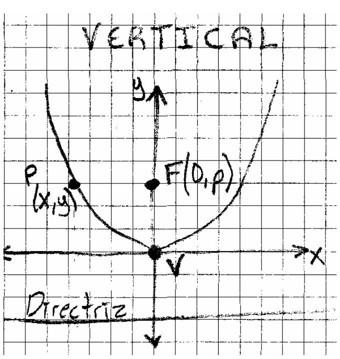
Solución.
Alumno B.

3 a) $x + y = 4$ b) $x^2 - 16y = 0$ c) $x^2 = -16y$

El inciso "a" parece que es una recta, los otros dos incisos son una parábola, pero de acuerdo a la gráfica es negativa por que habre hacia abajo, y simetrica al eje "y".

Es importante resaltar de esta actividad el problema al que se enfrentaron los estudiantes al intentar deducir las ecuaciones que describen a los lugares geométricos correspondientes.

A pesar de la dificultad que externaron al realizar las demostraciones, como es el caso del alumno E, sus deducciones son correctas como se muestra a continuación.



Parábola con vértice en el origen

- Se traza el punto P que equidista del foco y la directriz.

∴ Se cumple la propiedad de la distancia entre los puntos

$|PF| = |PD|$

- Con los datos:

$F(0,p)$ $P(x,y)$ $D(x,-p)$

- Usando la fórmula (determinar la distancia de 2 puntos)

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

- Para llegar a la igualación

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

- Elevando ambos lados al cuadrado para quitar raiz

$$(x-0)^2+(y-p)^2=(x-x)^2+(y+p)^2$$

- Simplificando y elevando al cuadrado

$$x^2+y^2-2yp+p^2=y^2+2yp+p^2$$

$$x^2=\cancel{y^2}-\cancel{y^2}+2yp+2yp+\cancel{p^2}-\cancel{p^2}$$

$$x^2=4yp$$

- Transponiendo $\boxed{x^2=4py}$

Al finalizar la actividad de la parábola los estudiantes han pasado del nivel 0 al nivel 1 del modelo de Van Hiele, es decir, ahora como podemos observar surge en ellos el descubrimiento y la generalización de propiedades a partir de las observaciones que se realizaron en el transcurso de la actividad.

En la tabla 5, se muestra el avance que tuvieron los estudiantes en el transcurso de las actividades, también se toma en cuenta los resultados del examen final en el cual se involucran estos conceptos, es decir, al finalizar las actividades, los conocimientos adquiridos por los estudiantes son los establecidos en el siguiente listado.

Tabla 5. Evaluación final de la Parábola.

Alumno		A	B	C	D	E
1. La definición es clara.		✓	✓	✓	✓	✓
2. Reconoce a la parábola como lugar geométrico.		✓	✓	✓	✓	✓
3. La definición tiene relación con la gráfica.		✓	✓	✓	✓	✓
4. Menciona como elementos de la parábola a:	la directriz.	✓	✓	✓	✓	✓
	el foco.	✓	✓	✓	✓	✓
	el vértice.	✓	✓	✓	✓	✓
	el lado recto.		✓	✓	✓	✓
	el eje focal.	✓	✓	✓	✓	✓

5. Representa a la parábola con vértice en el origen.		✓	✓	✓	✓	✓
6. Representa a la parábola con vértice fuera del origen.		✓	✓	✓	✓	✓
7. Relaciona los elementos de la parábola con la grafica.			✓	✓	✓	✓
8. Describe los elementos de la parábola con vértice en el origen.	La directriz.			✓	✓	✓
	El foco.	✓	✓	✓	✓	✓
	El vértice.	✓	✓	✓	✓	✓
	El lado recto.			✓	✓	✓
	El eje focal.	✓	✓	✓	✓	✓
9. Describe los elementos de la parábola con vértice en (h, k)	la directriz.			✓	✓	
	el foco.	✓	✓	✓	✓	✓
	el vértice.	✓	✓	✓	✓	✓
	el lado recto.			✓	✓	✓
	el eje focal.	✓	✓	✓	✓	✓
10. La ecuación corresponde al lugar geométrico.	vértice (0, 0)	✓	✓	✓	✓	✓
	vértice (h, k)	✓	✓	✓	✓	✓
11. Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática.				✓	✓	
12. Observa que el eje focal es eje de simetría			✓	✓	✓	
13. Intenta describir a la parábola visualmente.		✓	✓	✓	✓	✓
14. Realiza un bosquejo del lugar geométrico para conocer la ecuación			✓	✓	✓	
15. Relaciona el signo de la ecuación con la orientación ↑ ↓ ← →		✓	✓	✓	✓	✓
16. Utiliza gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas			✓	✓	✓	✓
17. Cuando conoce la ecuación de la parábola describe su lugar geométrico			✓	✓	✓	✓
18. Convierte representaciones sintéticas a representaciones analíticas			✓	✓	✓	

Finalmente los estudiantes relacionan los elementos de la parábola, consideran al eje focal como eje de simetría de la cónica. Como fue el caso del estudiante C, el cual presento en un inicio confusión al respecto y que al realizar la actividad se dio cuenta del error. Sin embargo, el alumno D preservó el problema, pues las ecuaciones tanto con vértice en el origen como trasladado en los diferentes casos no corresponden a la gráfica.

Comparando las tablas 4 y 5, podemos afirmar que los conocimientos en los estudiantes son diferentes, han pasado del nivel cero al nivel uno, pues ya relacionan las propiedades de los elementos de la parábola, además de identificar las características que corresponden al lugar geométrico.

Los alumnos A, B y E, no distinguen entre una ecuación lineal y una cuadrática, en el sentido de que aun confunden la ecuación de la directriz con la ecuación de la parábola, sin embargo, dada la ecuación cuadrática pueden determinar los elementos del lugar geométrico y describir con sus propias palabras a la directriz, pero no dar su ecuación. Además, relacionan el signo de la ecuación con la orientación horizontal, vertical, arriba y abajo de la parábola, Pues al realizar la actividad y hacer uso del *software* observaron estas características de los elementos de la parábola.

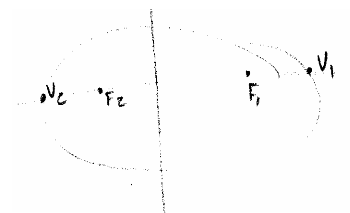
Elipse. (Resultados y análisis)

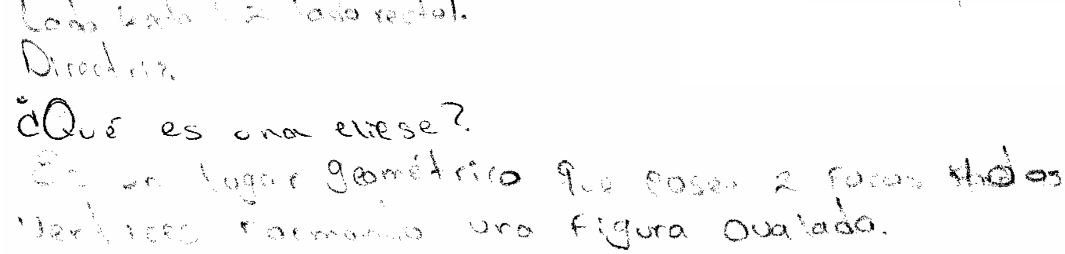
Fase1. Información y Fase 2. Orientación dirigida.

El examen diagnóstico se llevó a cabo el día 18 de Septiembre de 2007, alrededor de las 15:00 horas. En esta ocasión los alumnos sólo utilizaron un tiempo aproximado de veinte minutos para contestar las preguntas correspondientes.

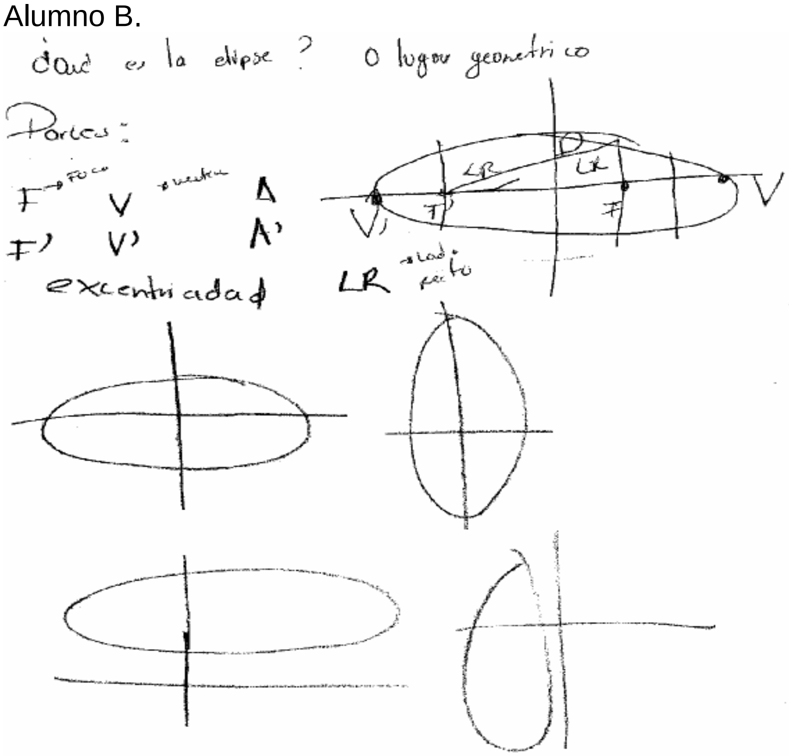
Al finalizar la prueba la técnica “lluvia de ideas” ayudó a para poner al corriente a los estudiantes, integrando así los conocimientos previos y estableciendo un acuerdo común en cuanto a contenido y simbología, llevándose a cabo en un tiempo aproximado de una hora en el intervalo de las 15:30 a las 16:30.

Los exámenes diagnósticos se muestran a continuación:
Alumno A.




¿Cuáles Son las Partes Principales de la elipse?
Vertice (2 Vértices)
Foco (2 focos)
Lado Recto (2 lado recto).
Directriz.
¿Qué es una elipse?
Es un lugar geométrico que posee 2 focos y dos vértices formando una figura ovalada.

Alumno B.

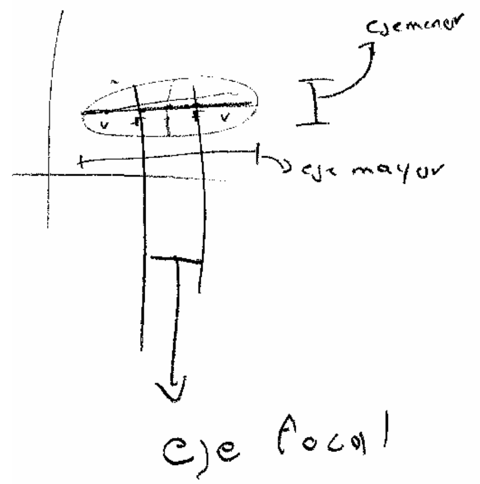

¿Qué es la elipse? O lugar geometrico
Partes:
F → foco V → vertice A
F' V' A'
excentriadad LR → lado recto

Alumno C.

1.- Es el lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición que la distancia a dos puntos fijos llamados focos es constante.

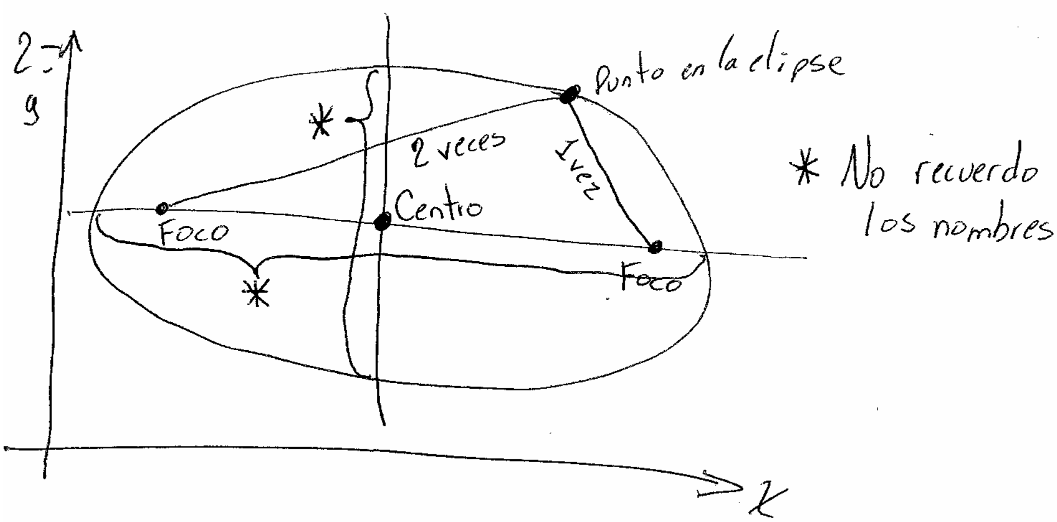
2.- Cuáles son las partes principales de la elipse?

Focos
Vertices
~~Lado~~ eje mayor
eje menor



Alumno E.

1.- Es una cónica de forma ovalada.



Al estudiante D se le realizó una entrevista con las preguntas que contenía el examen diagnóstico, observando que, reconoce como elementos de la elipse a los focos, vértices, los lados rectos, además de reconocer a la cónica como un lugar geométrico e intentarla describir gráficamente con centro en el origen

En la tabla 6, se muestra una evaluación cualitativa de los conocimientos, con los cuales deberían de contar los estudiantes y en los que se va trabajar en el transcurso de la actividad. Con la finalidad de observar el cumplimiento de dichos elementos

Tabla 6. Evaluación del examen diagnóstico (Elipse)

Alumno		A	B	C	D	E
1. La definición es clara.				✓		
2. Reconoce a la elipse como lugar geométrico.		✓	✓	✓	✓	
3. La definición tiene relación con la gráfica.				✓		
4. Menciona como elementos de la elipse a:	los focos	✓	✓	✓	✓	✓
	los vértices	✓	✓	✓	✓	
	los lados rectos	✓			✓	
	el eje mayor			✓		
	el eje menor			✓		
5. Representa a la elipse con centro en el origen.			✓		✓	
6. Representa a la elipse con centro fuera del origen.			✓	✓		✓
7. Relaciona los elementos de la elipse con la grafica.				✓		
8. Describe los elementos de la elipse con centro en el origen.	los focos.					
	los vértices.					
	los lados rectos.					
	el eje mayor.					
	el eje menor.					
9. Describe los elementos de la elipse con vértice en (h, k)	los focos.					
	los vértices.					
	los lados rectos.					
	el eje mayor.					
	el eje menor.					
10. La ecuación corresponde al lugar geométrico.	centro (0, 0)					
	centro (h, k)					
11. Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática.						
12. Intenta describir a la elipse visualmente.		✓	✓	✓	✓	✓
13. Relaciona al denominador de mayor valor en la ecuación, con la orientación ↑↓← →						
14. Utiliza gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas.						
15. Deduce las propiedades de una figura por medio de sus coordenadas.						
16. Describe el término excentricidad con sus propias palabras.						

Como podemos observar en la tabla anterior, los estudiantes inician un nuevo tema, es decir, se encuentran nuevamente en el nivel 0 de Van Hiele, no reconocen propiedades y elementos de la elipse, los elementos que toman en cuenta son los que de alguna forma relacionan con la parábola, tratando de encontrar una semejanza con el nuevo tema.

Después de establecer la teoría de nuestro nuevo tema iniciamos las sesiones en el laboratorio de cómputo con la construcción por puntos que pertenecen al lugar geométrico de la elipse, como se muestra en la figura 7. La cual permite una mejor visualización de las propiedades de la misma, cabe señalar que la elipse resultó ser más complicada por la cuestión algebraica, además, de involucrar más trazos que en el caso de la parábola, sin embargo, esto no fue ningún impedimento.

Como se esperaba, al realizar las construcciones correspondientes el manejó del *software* fue mayor y esto ayudó a tener una mejor soltura en las observaciones que permitieron deducir con facilidad las propiedades de la elipse.

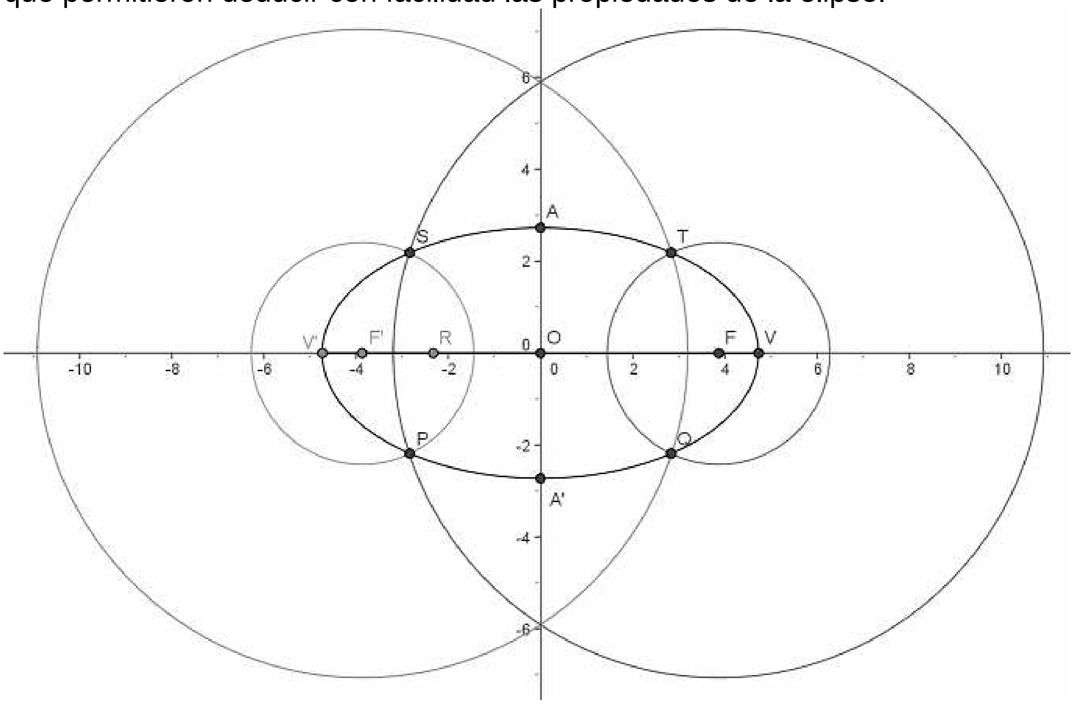


Figura 7.

Tomando en cuenta los exámenes diagnósticos que observamos anteriormente podemos decir que los estudiantes se encuentran en el nivel 0 del modelo de Van Hiele. Es decir, no toman en cuenta los elementos y propiedades del lugar geométrico, considerándolo sólo como una figura. Sin embargo, en esta ocasión, tenemos cierta ventaja sobre la actividad anterior, pues ya manejan el programa con mayor fluidez, además de haber adquirido conocimientos que les ayudarán en ésta actividad.

Ahora bien, con ayuda de la construcción anterior y utilizando la misma simbología empleada en el caso de la parábola, los estudiantes descubrirán en el transcurso de la actividad las propiedades del lugar geométrico de la elipse llegando a una generalización de sus elementos.

El realizar la construcción y etiquetar los puntos conforme a la notación que se utilizará les ayudará a visualizar las distancias que hay entre ellos. No obstante, si se maneja otra notación pero sin perder de vista el punto que estamos tratando, no habría ningún problema.

Así, los estudiantes apoyándose en el *software* pueden responder las siguientes preguntas y hacer generalizaciones. Como es el caso del alumno C en el que se puede observar el proceso que utilizó para llegar a la generalización de sus resultado. Sin embargo, el alumno D también generaliza correctamente pero sin argumentar, en caso de que sus respuestas fueran incorrectas se podría llegar a pensar que ha mecanizado la información. En base a esto las observaciones que realizaron son las siguientes:

¿Cuál es la longitud del eje mayor ($\overline{VV'}$)?

Alumno C. Es en este alumno donde podemos observar con mayor claridad la visualización del lugar geométrico.

la longitud de $\overline{VV'}$ es 2a, puesto que $\overline{OV} = a$ y V y V' son simétricos con respecto a O.

Alumno D.

a) 2a

¿Cuál es la longitud del eje menor ($\overline{AA'}$)?

Alumno C.

la longitud de $\overline{AA'}$ es 2b, pues $\overline{OA} = b$, A y A' son simétricos con respecto a O.

Alumno D.

b) 2b

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices?

Alumno C.

Para V (a, 0), V' (-a, 0), A (0, b), A' (0, -b), puesto que. $\overline{OV} = a$, $\overline{OA} = b$

y V es simétrico a V' con respecto a O

y A' es simétrico a A con respecto a O.

Alumno D.

c) V = (a, 0)   V1 = V' = (-a, 0)

Pues en la construcción, se obtuvo el segmento $\overline{VO} = a$, si los vértices están sobre el eje x, y V1 es simétrico a V con respecto al origen, por ende $\overline{V1O} = a$

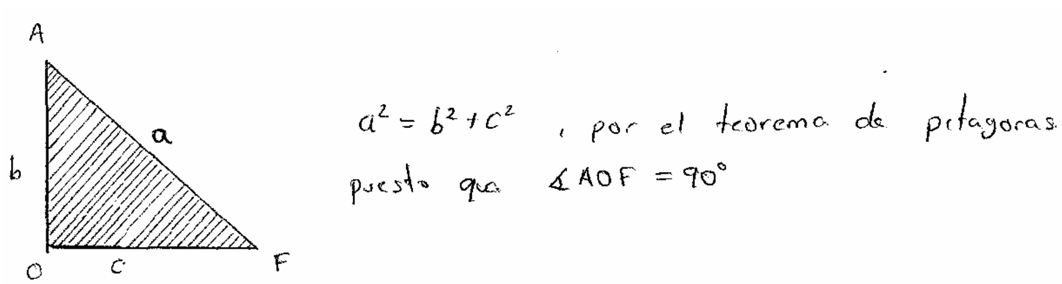
Hasta el momento lo que se ha realizado en las observaciones, es ubicar conforme a la construcción de la elipse por puntos, aquellos que corresponden a los vértices y las respectivas longitudes de los ejes mayor y menor del lugar geométrico.

Otro punto a considerar es precisamente si se cumple la relación: El cuadrado del semieje mayor es igual a la suma de los cuadrados del semieje menor y de la semidistancia focal. La importancia de esta correspondencia se involucra en la justificación de la ecuación de la elipse y en la relación del lado recto, además de surgir de la construcción de la elipse.

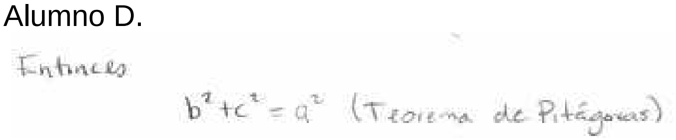
Así, podemos ver a continuación la relación que encuentran los alumnos de estos elementos, apoyándose del teorema de Pitágoras, como es el caso de los alumnos C y D, sin embargo, el alumno E sólo realiza la observación de que es un triángulo rectángulo e identifica al semieje mayor como la hipotenusa del triángulo.

¿Cuál es la relación que existe en el triángulo ΔAOF respecto a sus lados?, si éstos son: $\overline{AF} = a$, $\overline{AO} = b$ y $\overline{OF} = c$.

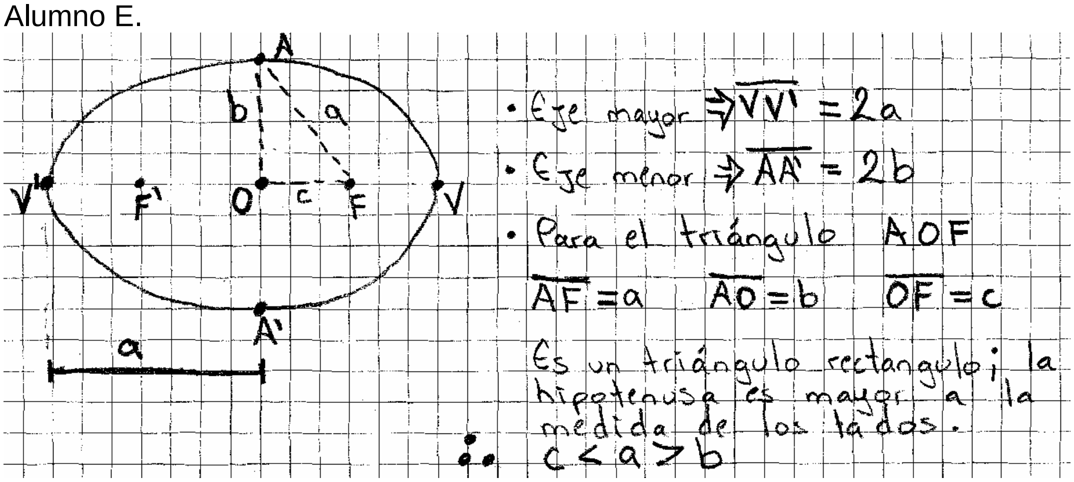
Alumno C



Alumno D.



Alumno E.



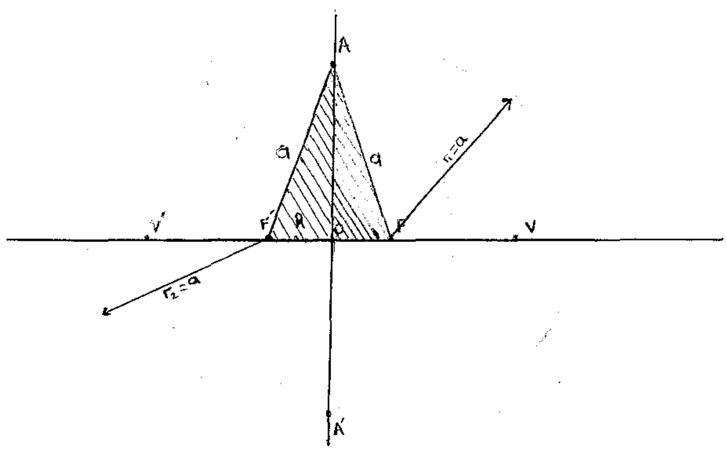
De lo anterior podemos preguntarnos ¿Por qué $\overline{AF} = a$? Es claro que es de esta forma en la que hemos realizado la construcción, aun así, la respuesta del alumno B es en base a la definición del lugar geométrico comparándola con la del alumno C que se apoyo de la construcción como se indica en su reporte.

Alumno B.

la condición anterior: (Condición de la elipse).
punto cualquiera en el plano (A) la distancia de este al F y F'; sumadas estas dan la distancia de V a V'

$\overline{VO} = a$, $\overline{V'O} = a$ $> 2a$ $\quad \overline{AF} = a$, $\overline{AF'} = a$

Alumno C.



Por la forma en como esta construida nuestra elipse:

Se toman Circunferencias con radio $\overline{OV} = a$ y centro en F y F'

$\therefore$ $\overline{AF} = a$, así como $AF' = a$ y $A'F = a$, $A'F' = a$

Ahora bien, la correspondencia en el teorema de Pitágoras ¿Se cumple para $F \in (O,V)$? desde luego, pues, para que hablemos de una elipse la distancia $\overline{OF}$ es menor a la de $\overline{OV}$. En caso de que fueran iguales los semiejes estaríamos hablando de una circunferencia que es un caso particular de la elipse, es así como argumentan a continuación los alumnos B y C.

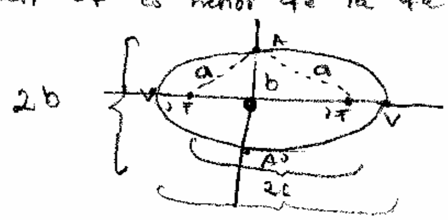
Alumno B.

$a = \overline{AF} = \overline{OV}$ $\quad O < F < V$

$b = \overline{AO}$ $\quad O\ (0,0)$

$c = \overline{OF}$

En cuanto al F está dentro de la distancia de $\overline{OV}$ esto quiere decir $\overline{OF}$ es menor que la que existe de $\overline{OV}$



Alumno C.

En el programa es claro que F debe estar entre O y V puesto que la elipse desaparece cuando F = V ó F = O o bien, cuando F ∉ entre OV', si

F = O = F' se obtiene una circunferencia con radio a.

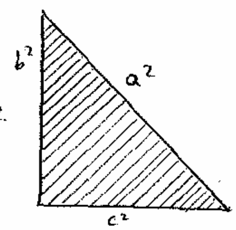
si F = V no se podría construir una elipse.

Con lo anterior, dados a y b ¿Podemos determinar c? es decir, si conocemos las longitudes de los semiejes mayor y menor, respectivamente ¿Podemos determinar la semidistancia focal? ¿Cuál es la expresión? ¿Cuáles son las coordenadas de los focos F y F', respectivamente?

Alumno C.

En 2d) vimos que $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$, puesto que



$F = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, esto sólo si contamos con a y b como únicos datos.

$F = (c, 0)$, $F'(-c, 0)$ cuando el eje mayor de la elipse coincide con el eje x.

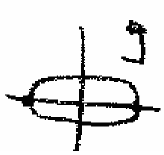
Al iniciar las actividades los estudiantes determinaron la ecuación que correspondía al lugar geométrico de la parábola. Cuando iniciamos con la elipse se realizó un bosquejo de la ecuación correspondiente. Así, ¿Cuál es la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje mayor que coincide con el eje X? Como podemos observar, en las ecuaciones que los estudiantes determinan como es el caso del alumno B y C hacen referencia con que eje de coordenadas debe de coincidir el eje mayor de la elipse.

Alumno B.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a^2 → Eje mayor paralelo al eje "x"

b^2 → Eje menor



Alumno C.

Para este caso la ecuación está dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

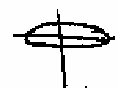
Observemos que a^2 nos dirá conrespecto a quien es paralelo o coincidente el eje focal, o el eje mayor, en este caso lo es con el eje x, porlo ta
nuestra elipse es horizontal.

Otras propiedades o elementos que son importantes considerar de la elipse son su excentricidad y la longitud de sus lados rectos, como ambos lados miden lo mismo sólo consideramos a uno de ellos para deducir su razón algebraica. Ahora bien, el cociente $\frac{c}{a}$ se llama excentricidad de la elipse y se denota como $e = \frac{c}{a}$. ¿Cuál es el comportamiento de *e*, conforme varia c?

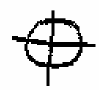
Alumno B.

Entre mas se aleje de 0

si "c" aumenta "e" aumenta (asalchichonada)



Si "c" disminuye "e" disminuye y se va convirtiendo en un circulo



e→ Entre mas se acerque a 0

Alumno C.

Sabemos que $c<a$ y e es una proporción, por así decirlo. En el programa podemos observar que si $c=a$ la elipse es una linea (ya no es elipse), y si $c=0$ la elipse es una circunferencia

Si c se aproxima a a; es decir, $c \approx a$ la elipse es más alargada

Si c es mucho menor que a; es decir, $c \approx 0$ sin serlo, la elipse se hace más redonda

Ahora, $e = \frac{c}{a}$ si $c=a \Rightarrow e=1 \Rightarrow$ ¿esto será una parabola? no pues las condiciones de lugar geometrico son distintas, es por ello que sólo se puede observar una linea.

Si $c=0 \Rightarrow e=0$ por lo tanto no tendriamos proporción alguna, no habrá con quien comparar a a, es por ello que lo que se describe es una circunferencia.

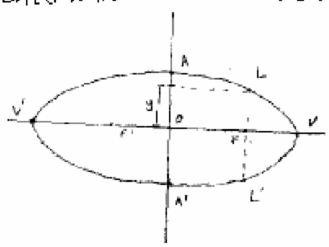
En las observaciones realizadas en este caso por los alumnos B y C, se determinó que: La excentricidad es igual a la unidad cuando la elipse se transforma un segmento y si la excentricidad se acerca cada vez más a 0, tenemos que la elipse se aproxima a una circunferencia (la circunferencia es una elipse de excentricidad nula) La excentricidad de una elipse es su grado de redondez o alargamiento (Toribio: 266)

Para cada elipse la longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, deduzca esta razón algebraicamente.

Alumno C.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Encontremos el lado recto (bueno son 2 pero valen lo mismo)



$F = (c, 0)$

Sea $L = (c, y)$

Sustituyamos este valor en la ecuación correspondiente a esta elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{multiplicando por } a^2 b^2$$

$$\Rightarrow c^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2 \quad \text{despejando } y^2$$

$$y^2 = \frac{a^2 b^2 - c^2 b^2}{a^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2} - \frac{c^2 b^2}{a^2} \quad \text{pero } c^2 = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2} - \frac{(a^2 - b^2) b^2}{a^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2} - \frac{a^2 b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{b^2}{a} = \overline{LF}$$

$$\therefore LL' = \frac{2b^2}{a}$$

Fase 3. Explicitación.

En la fase anterior los alumnos obtuvieron las propiedades de la elipse para el caso cuando el centro esta en el origen y el eje mayor coincide con el eje X. En esta ocasión los estudiantes interactúan entre sí observando la semejanza que existe, realizando la construcción correspondiente cuando el eje mayor coincidente con el eje Y con centro en el origen y efectuando posteriormente las observaciones pertinentes.

Para este caso también se realizó la construcción por puntos de la elipse como se muestra en la figura 8, para poder observar detenidamente las propiedades de la elipse y realizar las anotaciones correspondientes.

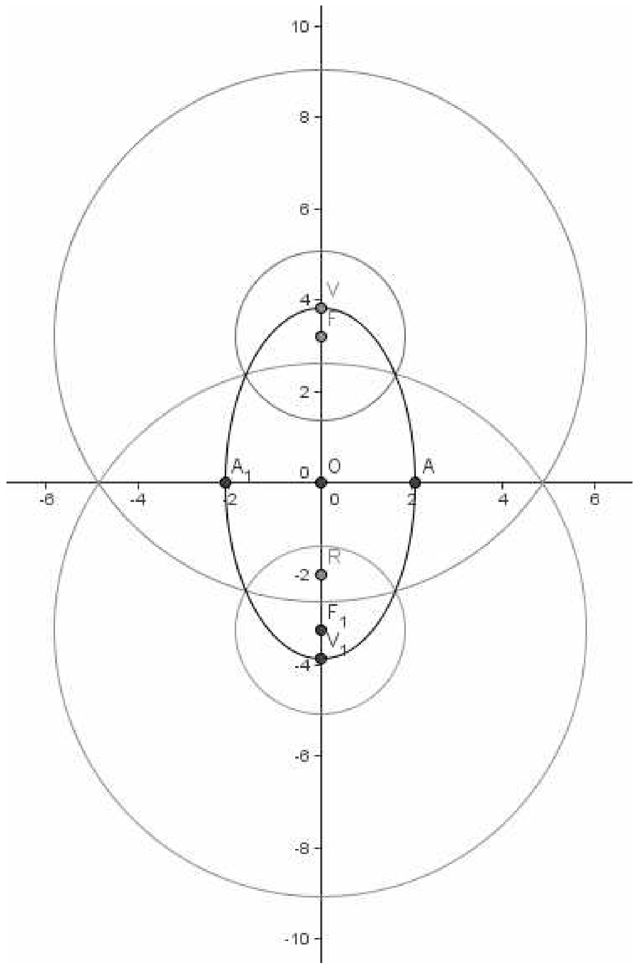


Figura 8.

La finalidad en esta fase es encontrar la semejanza y diferencias que existen en esta construcción, para poder generalizar en las diferentes situaciones los elementos que se han estudiado con anterioridad. Así, las anotaciones de los alumnos son las siguientes:

¿Las longitudes del eje mayor y eje menor se siguen comportando de la misma manera?

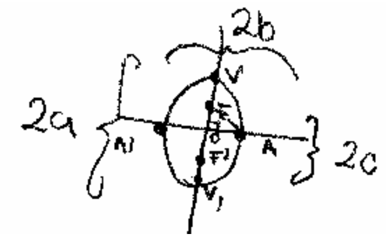
Alumno C.

claro $\overline{OV} = a > b = \overline{OA} \Rightarrow 2a > 2b$

solo que ahora el eje mayor coincide con el eje y.

Determina las coordenadas de los vértices.

Alumno B.



$V\ (0, a)$
$V'\ (0, -a)$
$A\ (b, 0)$
$A'\ (-b, 0)$

Alumno C.

$V\ (0, a)\quad V'(0, -a)\ ,\quad A = (b, 0),\ A'(-b, 0)$
puesto que ahora el eje mayor esta en el eje y , y el eje menor coincide con el eje x.

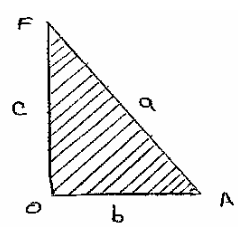
¿La relación en el triángulo ΔAOF , se sigue cumpliendo?

Alumno B.

Sí, sólo que la elipse ahora es paralela al eje "y"!

Alumno C.

así es puesto que $\overline{AF} = a$ (por las prop. de la elipse).
$\Rightarrow\ a^2 = c^2 + b^2$



¿Cuáles son las coordenadas de los focos?

Alumno B.

$F\ (0, c)$
$F'\ (0, -c)$

Alumno C.

$F\ (0, c)\quad F'\ (0, -c)$ ó bien $F\ (0, \sqrt{a^2 - b^2}\ ),\ F'\ (0, -\sqrt{a^2 - b^2}\ )$

¿Cuál es la ecuación de la elipse para este caso? Al igual que para el caso anterior los alumnos hacen hincapié en la relación que existe entre el eje mayor y el eje de coordenadas correspondientes.

Alumno B.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Eje menor

Eje mayor paralela al eje "y"

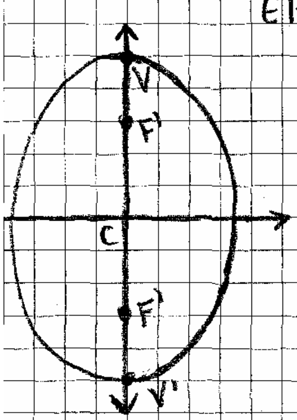
$\}2a$

Alumno C.

para este caso la ecuación está dada por $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Observemos que a^2 nos dirá con respecto a quién es paralelo o coincidente el eje mayor, en este caso con el eje "y" $\therefore$ la elipse es vertical

Alumno E.



Elipse vertical porque el eje mayor coincide o es paralelo al eje y

Su fórmula $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Se puede notar que "a" esta en relación de "y", esto indica que es vertical. Recordemos que "a" es el mayor lado y donde este nos indicara la posición de la curva.

Por otro lado, la excentricidad de la elipse tiene el mismo comportamiento que en el caso anterior. Como lo hacen notar los alumnos B y C individualmente.

Alumno B.

Sí, no cambian ni las partes de la elipse y las formulas, sólo se ajustan conforme al eje al que es paralela la elipse.

Alumno C

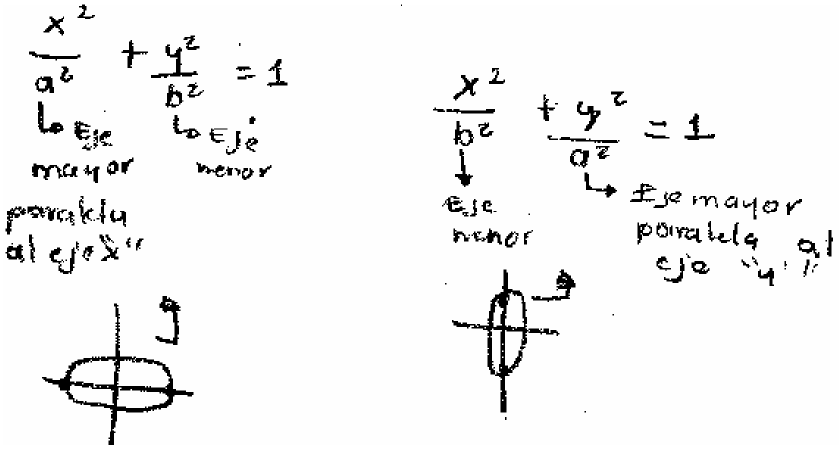
si $c \approx a$ la elipce se alarga

si $c \approx 0$ la elipse se hace más redonda

(pasa lo mismo que en el caso anterior).

La relación que existe en la ecuación de la elipse con el eje mayor los estudiantes lo manejan de la siguiente manera:

Alumno B.



Alumno C.

"Podemos afirmar que si el denominador en X es mayor, entonces la elipse tiene una posición horizontal; en caso contrario, es decir, que el denominador mayor corresponde a Y, entonces la elipse tiene una posición vertical

"Claro tomando como referencia al eje mayor o hacia dónde es más larga la elipse"

Podemos resumir las observaciones anteriores en el siguiente Teorema (Lehmann: 177)

La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a *2c* y cantidad constante igual a *2a* es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean (*0, c*) y (*0, -c*), la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Para cada elipse, *a* es la longitud del semieje mayor, *b* la del semieje menor, y *a*, *b* y *c* están ligados por la relación.

$$a^2=b^2+c^2$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad *e* está dada por la fórmula

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\langle 1$$

Fase 4. Orientación libre.

Al realizar la traslación de ejes de la elipse, los estudiantes se enfrentan a nuevas situaciones en las que refuerzan sus conocimientos, logrando incorporar en un todo lo aprendido anteriormente; observando la semejanza que existe en los diferentes casos, como se muestra en las figuras 9 y 10 donde podemos ver a la elipse con centro en (*h, k*) y eje mayor paralelo al eje Y & X respectivamente, concluyendo así, los cambios que existen en las mismas.

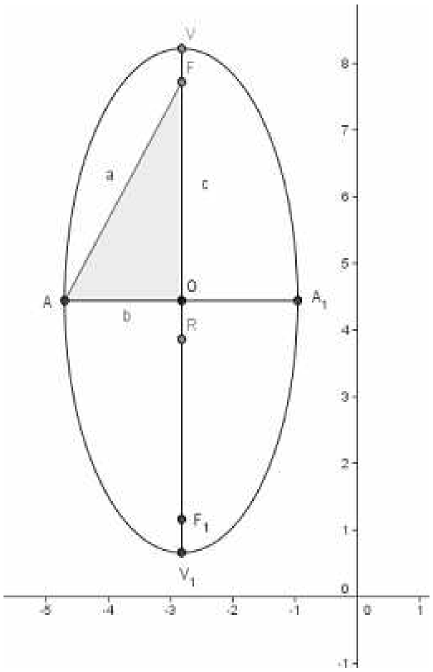


Figura 9.

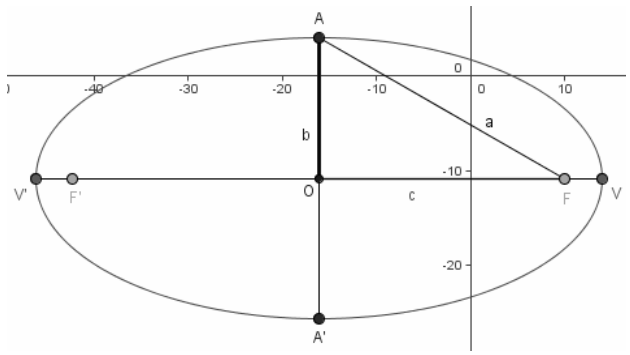


Figura 10.

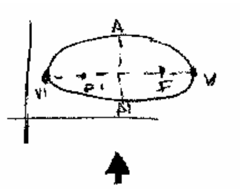
Ahora bien, ¿Qué sucede, si el centro de la elipse no esta en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes de coordenadas? ¿Cambian las partes principales de la elipse?

Alumno C

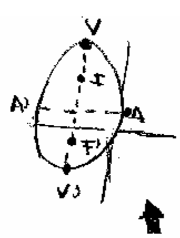
No, puesto que solo se traslada, claro sólo cambia en cuanto a numeros pero no sus propiedades ni sus partes.

¿Cuál es la ecuación del lugar geométrico y cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos?

Alumno B.



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Alumno C.
Para el caso cuando la ecuación del lugar geométrico es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$O(h, k)$ $V(a+h, k)$ $V'(h-a, k)$, $F(c+h, k)$ $F'(h-c, k)$

$A(h, k+b)$, $A'(h, k-b)$

Si la ecuación de la elipse es:

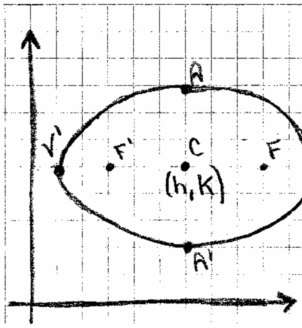
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Se puede observar que las coordenadas cambian, entonces:

$O(h, k)$ $V(h, k+a)$ $V'(h, k-a)$ $A(h+b, k)$ $A'(h-b, k)$

$F(h, k+c)$ $F'(h, k-c)$.

Alumno E.



Ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Excentricidad $e = \dfrac{c}{a}$ } Determina la redondez

Los resultados anteriores se obtuvieron a partir de las observaciones de los estudiantes, observemos que la ecuación de la elipse permite saber a los estudiantes si es horizontal o vertical. Las conjeturas anteriores las podemos resumir en el siguiente Teorema (Lehmann: 181).

La ecuación de la elipse de centro el punto (*h, k*) y eje focal paralelo al eje X, está dada por la segunda forma ordinaria,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria,

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, *a* es la longitud del semieje mayor, *b* la del semieje menor, y *a*, *b* y *c* están ligados por la relación.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad *e* está dada por la fórmula.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \langle 1$$

Fase 5. Integración

Finalmente, es en esta fase donde se refleja que tanto han aprendido y como relacionan sus conocimientos con el problema a tratar.

Determina los vértices y los focos, en caso se ser necesario completar los trinomios cuadrados perfectos y realiza las gráficas correspondientes.

Alumno C.

a) $3x^2 + 4y^2 = 48$

Es claro que esta elipse tiene centro en el origen y su eje focal es paralelo o mejor dicho coincidente al eje x puesto que

$3x^2 + 4y^2 = 48$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

$O(0,0)$

$a = 4$

$b = \sqrt{12}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12}$

$c = \sqrt{4} = 2$

$V(4,0) \quad V'(-4,0)$

$F(2,0) \quad F'(-2,0)$

$A(0,\sqrt{12}) \quad A'(0,-\sqrt{12})$

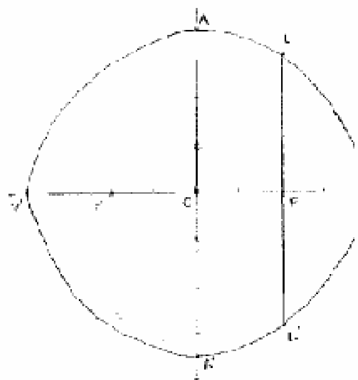
$LL' = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(12)}{4}$

$LL' = 6$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

por eso se ve redonda

$0.5 >> 4.$



Alumno D.

d) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y - 24 = 0$

$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 + 4y + 4) - 36 - 24 = 0$

$4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 64$

$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{\frac{64}{9}} = 1$ HORIZONTAL

$c = (1,-2)$

$v = (5,-2)$

$v' = (-3,-2)$

$A = (1, \frac{2}{3})$

$A' = (1, -\frac{14}{3})$

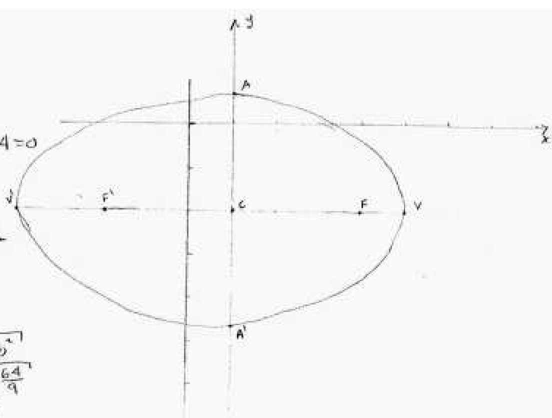
$F = (3.98, -2)$

$F' = (-1.98, -2)$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$= \sqrt{16 - \frac{64}{9}}$

$= \frac{\sqrt{80}}{3}$



En la tabla 7, se muestra el avance que tuvieron los estudiantes en el transcurso de la actividades, también se toma en cuenta los resultados del examen final, donde se involucran estos conceptos, es decir, al finalizar las actividades, los conocimientos adquiridos por los estudiantes son los establecidos en el siguiente listado.

Tabla 7. Evaluación final de la Elipse.

Alumno		A	B	C	D	E
1. La definición es clara.		✓	✓	✓	✓	✓
2. Reconoce a la elipse como lugar geométrico.		✓	✓	✓	✓	✓
3. La definición tiene relación con la gráfica.		✓	✓	✓	✓	✓
4. Menciona como elementos de la elipse a:	los focos	✓	✓	✓	✓	✓
	los vértices	✓	✓	✓	✓	✓
	los lados rectos	✓	✓	✓	✓	
	el eje mayor	✓	✓	✓	✓	✓
	el eje menor	✓	✓	✓	✓	✓
5. Representa a la elipse con centro en el origen.		✓	✓	✓	✓	✓
6. Representa a la elipse con centro fuera del origen.		✓	✓	✓	✓	✓
7. Relaciona los elementos de la elipse con la grafica.			✓	✓	✓	✓
8. Describe los elementos de la elipse con centro en el origen.	los focos.	✓	✓	✓	✓	✓
	los vértices.	✓	✓	✓	✓	✓
	los lados rectos.			✓	✓	
	el eje mayor.	✓	✓	✓	✓	✓
	el eje menor.	✓	✓	✓	✓	✓
9. Describe los elementos de la elipse con vértice en (h, k)	los focos.	✓	✓	✓	✓	✓
	los vértices.	✓	✓	✓	✓	✓
	los lados rectos.			✓	✓	
	el eje mayor.	✓	✓	✓	✓	✓
	el eje menor.	✓	✓	✓	✓	✓
10. La ecuación corresponde al lugar geométrico.	centro (0, 0)	✓	✓	✓	✓	✓
	centro (h, k)	✓	✓	✓	✓	✓
11. Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática.		✓	✓	✓	✓	✓
12. Intenta describir a la elipse visualmente.		✓	✓	✓	✓	✓
13. Relaciona al denominador de mayor valor en la ecuación, con la orientación ↑↓← →		✓	✓	✓	✓	✓
14. Utiliza gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas.			✓	✓	✓	✓
15. Deduce las propiedades de una figura por medio de sus coordenadas.		✓	✓	✓	✓	✓
16. Describe el término excentricidad con sus propias palabras.			✓	✓		✓

Finalmente los estudiantes relacionan los elementos de la elipse, consideran a los ejes mayor y menor como ejes de simetría. Tomando en cuenta que el aprendizaje es un proceso y que cada individuo tiene un ritmo diferente, podemos decir que si hubo avance en sus conocimientos, pues, comparando las tablas 6 y 7, podemos afirmar que los conocimientos en los estudiantes son diferentes, han pasado del nivel cero al nivel uno, pues ya relacionan las propiedades de los elementos de la elipse, además de identificar las características que corresponden al lugar geométrico.

Hipérbola. (Resultados y análisis)

Fase1. Información y Fase 2. Orientación dirigida.

En esta ocasión no se realizó ningún examen diagnóstico, por cuestiones de tiempo, empezamos y concluimos la teoría de la hipérbola en una sesión de una hora y media aproximadamente que se llevó a cabo el 2 de Octubre del 2007. Se hizo notar la gran semejanza que existe con el lugar geométrico de la elipse, posteriormente ingresamos a la sala de cómputo para realizar las construcciones correspondientes.

Incluso, no se realizó la construcción por puntos en su lugar se ingreso la función de Hipérbola$[F, F1, OV]$ en la parte inferior de la pantalla para facilitar el trazo del lugar geométrico de la hipérbola y ahorrar tiempo. Sin embargo, la construcción por puntos es semejante a la de la elipse con la diferencia de que ahora $\overline{OF} > \overline{OV}$.

Ahora bien ya que el *software* no proporciona el eje no focal de la hipérbola, se realizaron los trazos convenientes para poderlo visualizar gráficamente como se muestra en la figura 11 donde es representado por $\overline{BB1}$.

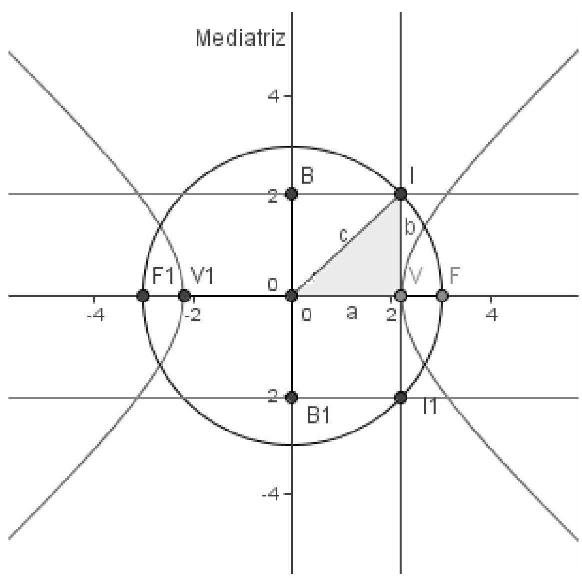


Figura 11.

En base a la construcción del lugar geométrico de la hipérbola se realizaron las observaciones con la finalidad de generalizar los resultados y así conocer sus elementos y propiedades. Las anotaciones realizadas por los estudiantes son las siguientes:

¿Se cumple la condición $\overline{QF} - \overline{QF1} = \overline{VV1}$, donde $\overline{VV1} = 2a$?

Alumno D.

Si se cumple, pues la hipérbola es simétrica respecto al origen y $\overline{QF} - \overline{QF1}$ es cte

Alumno E.

Si, porque es la propiedad de la hipérbola

Podemos argumentar que la razón por la cual en el eje no focal no hay puntos que pertenezcan al lugar geométrico es precisamente por:

Alumno C.

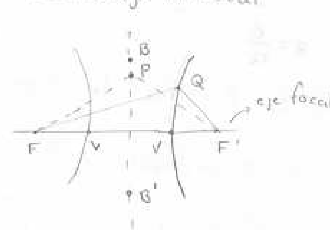
por que la diferencia

$\overline{PF} - \overline{PF'} = 0$

y el lugar geometrico son los puntos Q tales que

$\overline{QF} - \overline{QF'} = 2a = \overline{VV'}$

Sea P∈ eje no focal



Alumno D.

Porque los vértices se encuentran en el segmento FF1 y las distancias entre un punto cualquiera y los focos, es una constante

Alumno E.

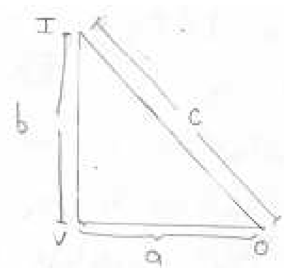
Porque sólo funciona como eje auxiliar donde se ven reflejados tanto el Foco como el Vértice

Al igual que en la elipse, en la hipérbola se encuentra un triangulo rectángulo en el que se puede observar la relación entre los diámetros principales y la distancia focal la cual es $c^2 = a^2 + b^2$ donde *a* puede ser mayor, igual o menor que *b.* (Anfossi: 76)

Alumno C.

$c^2 = b^2 + a^2$

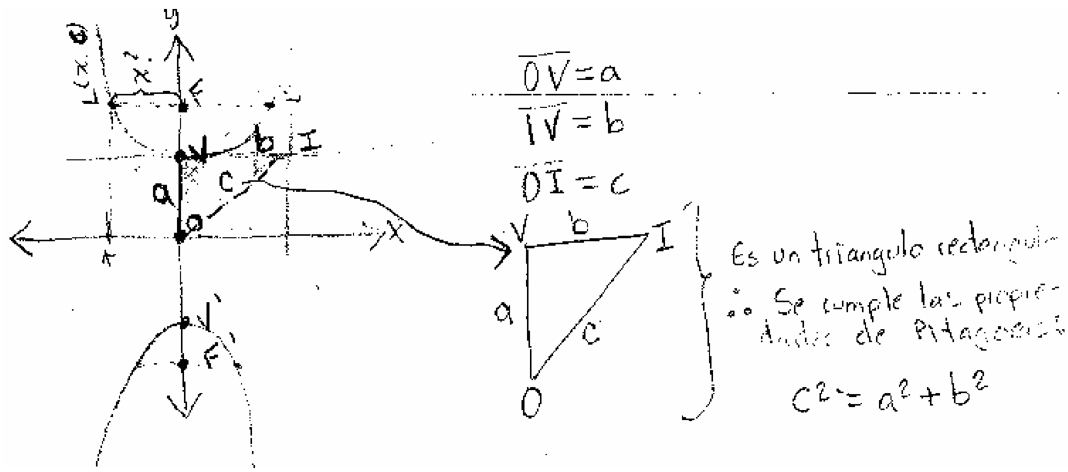
utilizando el teorema de pitágoras.



Alumno D.

-La relación es $a^2+b^2=c^2$, al igual que en el caso de la elipse, estamos tratando con un triángulo rectángulo y la relación, viene del Teorema de Pitágoras

Alumno E.



¿Cuáles son las coordenadas de los focos F, F1 y de los vértices V, V1 respectivamente?

Alumno D.

$V = (a, 0)$
$V1 = (-a, 0)$
$F1 = (-c, 0)$
$F = (c, 0)$

Según el procedimiento de construcción

¿Cuál es la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal que coinciden con el eje X?

Alumno D.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El cociente $\frac{c}{a}$, se llama excentricidad de la hipérbola, y denota como $e = \frac{c}{a}$. ¿Cuál es el comportamiento de *e*, conforme varia *c*?

Alumno C.

si $c >>> a$ la hiperbola se hace mucho muy ancha.

si c se acerca a "a" sin revasarla, se hace menos ancha mi hiperbola.

si $c = a$ hay una linea o desaparece no recuerdo.

si $c < a$ se tiene una elipse.

si $c = 0$ hay una circunferencia de radio a.

Hemos visto que una propiedad importante de la hipérbola es el hecho de que siempre *c*>*a*, a partir de esto la pregunta anterior va en relación al comportamiento de la excentricidad conforme *c* varia.

De acuerdo a las anotaciones anteriores del alumno C podemos decir (Toribio: 299): Como *c*>*a*, entonces *e*>1. Por otro lado $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, de acuerdo con esta formula resulta que manteniendo invariable la longitud del eje real *2a* y disminuyendo la longitud del eje no focal *2b*, la excentricidad de la hipérbola se aproximara a 1. Por otra parte, en cuanto *b* disminuye la hipérbola se irá haciendo cada vez más delgada.

Por lo que se refiere a la hipérbola, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, los estudiantes demostraron esta razón algebraicamente como se muestra a continuación.

Alumno C.

tomemos a L(C, y) basta con saber cuanto vale y.

pues $\overline{BO} = y$ y $\overline{LL'} = \overline{BB'} = \overline{BO} + \overline{OB'} = 2\overline{BO}$

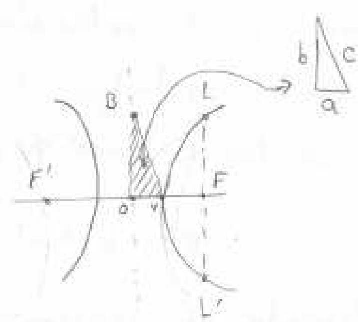
El lado recto es el mismo para las hiperbolas con eje focal coincidente a los dos ejes coordenados y para los de eje focal paralelo a los ejes coordenados.

tomemos $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sustituyamos L

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$$

$$y^2 = \frac{c^2b^2 - a^2b^2}{a^2}$$



$$y^2 = \frac{c^2b^2}{a^2} - \frac{a^2b^2}{a^2}$$

Por el teorema de pitagoras en el triangulo que se resalta de la figura

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \quad y^2 = \frac{(a^2+b^2)\,b^2}{a^2} - \frac{a^2 b^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{\cancel{a^2 b^2}}{\cancel{a^2}} + \frac{b^2 b^2}{a^2} - \frac{\cancel{a^2 b^2}}{\cancel{a^2}}$$

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{b^4}{a^2}}$$

$$y = \frac{b^2}{a}$$

$$LL' = 2b = 2y = \frac{2b^2}{a}$$

$$\therefore \quad LL' = \frac{2b^2}{a}$$

Otra forma:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) b^2$$

$$y^2 = \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2}\right) b^2$$

$$y^2 = (c^2 - a^2)\,\frac{b^2}{a^2}$$

aplicando para el mismo triangulo de la figura el teorema de pitagoras $b^2 = c^2 - a^2$

$$y^2 = b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y = \frac{b^2}{a} \qquad \therefore \quad \overline{LL'} = 2y = \frac{2b^2}{a}.$$

Hasta el momento los estudiantes sólo han estudiado el comportamiento de la hipérbola cuando se encuentra en el origen y su eje focal coincide con el eje X, han generalizado los elementos de la curva para este caso en particular.

Fase 3. Explicitación.

En la fase anterior los alumnos obtuvieron las propiedades de la hipérbola para el caso cuando el centro esta en el origen y el eje focal coincide con el eje X. En esta ocasión se realizará la construcción correspondiente cuando el eje focal coincidente con el eje Y, con centro en el origen efectuando posteriormente las observaciones pertinentes.

Se realizó la construcción de la hipérbola utilizando el procedimiento de la *fase 2* del modelo de Van Hiele, realizando análogamente los trazos para definir gráficamente el eje no focal como se muestra en la figura 12 y así poder observar detenidamente las propiedades y realizar las anotaciones correspondientes.

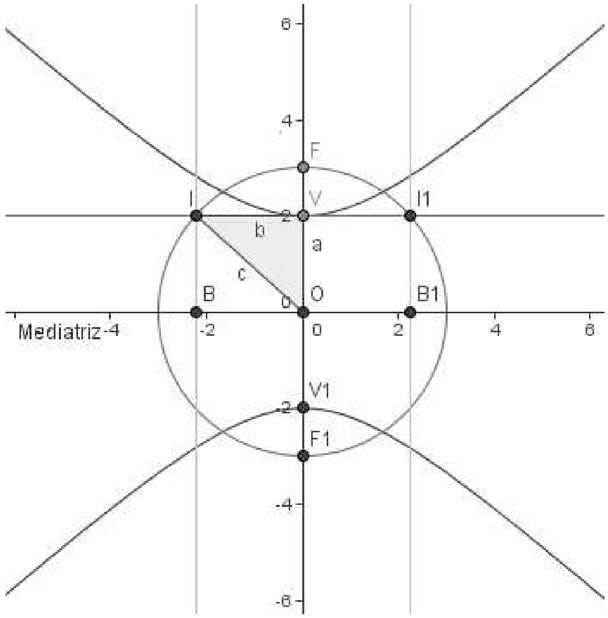


Figura 12.

De acuerdo con lo anterior se les pidió a los estudiantes determinar las coordenadas de los vértices y los focos utilizando la notación anterior y la construcción previa. Así las conclusiones de los alumnos son las siguientes:

Alumno D.

$V=(0,a)$

$V1=(0,-a)$

$F=(0,c)$

$F1=(0,-c)$

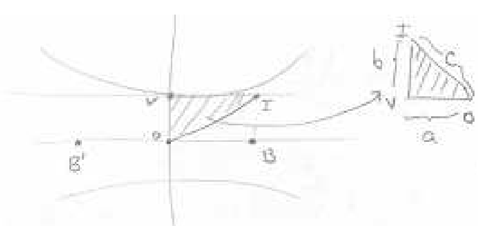
Además, ¿La relación en el triángulo ΔOIV , se sigue cumpliendo?

Alumno C.

Si, se sigue cumpliendo

$c^2=a^2+b^2$

por el teorema de pitágoras



Como podemos observar la relación entre los diámetros principales y la distancia focal se sigue cumpliendo a pesar de la posición de la hipérbola.

¿Cuál es la ecuación de la hipérbola para este caso? Veremos mas adelante que esta pregunta causa gran controversia entre los estudiante, pues, a diferencia de la elipse no podemos determinar la posición de la hipérbola, tomando en consideración el denominador de mayor valor. Este punto será tratado mas adelante con mayor detalle. Así, la ecuación con la que asocia el lugar geométrico de la hipérbola el alumno C es la siguiente:

Alumno C.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Nuevamente, la excentricidad de la hipérbola, ¿tiene el mismo comportamiento que en el caso anterior? Al igual que la relación que existe con el teorema de Pitágoras al realizar las observaciones para cada caso de la hipérbola, es decir, eje focal paralelo o coincidente al eje coordenada X & Y respectivamente, podemos ver que sus propiedades no cambian. De acuerdo con esto la semejanza que existe en los comentarios del alumno C en las diferentes fases del modelo de Van Hiele, la excentricidad es acertada.

Alumno C.

así es !

si $c >> a$ la hipérbola se hace ancha

si c se aproxima a a siendo todavía $c > a$, se hace menos ancha

si $c = a$ hay una circunferencia, nó, creo que desaparece, o hay una linea.

si $c < a$ se forma una elipse.

y cuando $c = 0$ hay una circunferencia de radio a.

Al proporcionarles el material a los estudiantes este tenia un error, pues se consideraba que al igual que en la elipse el denominador era el que determinaba la posición horizontal o vertical de la hipérbola. Cuando llegaron a esta parte surgieron bastantes dudas; los estudiantes se encontraron con las siguientes posibilidades $a>b$, $a<b$ y $a=b$ observando que para cualquiera de los casos anteriores la hipérbola podía ser horizontal o vertical.

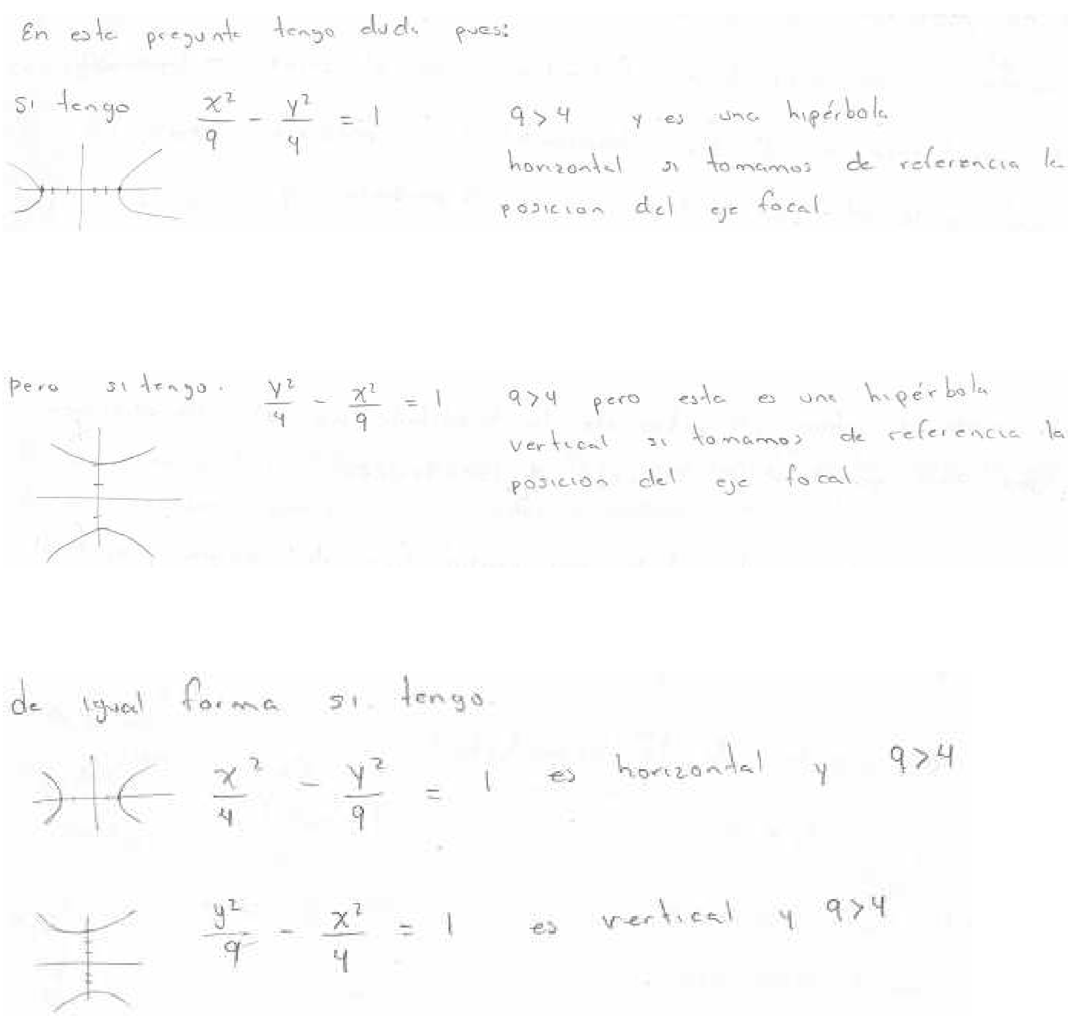
Los estudiantes comentaron durante la sesión de cómputo estos problemas observando cada uno de los casos, por un momento sin encontrar la relación como lo menciona el alumno E en las anotaciones posteriores.

El alumno D argumentaba que al mover los puntos libres cuando el eje focal coincide con el eje de coordenadas X podía encontrarse con los tres casos antes mencionados, sin embargo, el signo menos de la variable no cambiaba para los casos anteriores. Es aquí donde al analizar este punto los estudiantes comprobaron que era el signo el que determinaba la posición de la hipérbola, pues al estudiar el caso cuando el eje focal coincide con el eje de coordenadas Y sucedía exactamente lo mismo sólo que ahora el signo menos le pertenecía a la variable contraria que en el caso anterior.

Finalmente los estudiantes concluyeron que si el signo menos lo tenia la variable *y*, entonces el eje focal es paralelo o coincidente al eje de coordenadas X. Análogamente, si el signo menos de la ecuación pertenecía a la variable *x*, entonces el eje focal era paralelo o coincidente al eje de coordenadas Y.

El reporte del alumno C que aparece a continuación muestra la confusión a la que se enfrentaron los estudiantes incluyéndolo a él. No obstante, estas se disiparon con ayuda del *software* observando el comportamiento de los puntos libres como se mencionó anteriormente llegando así a la conclusión correcta.

Alumno C.



En esta pregunta tengo duda pues:

si tengo $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ $9 > 4$ y es una hipérbola horizontal si tomamos de referencia la posicion del eje focal

pero si tengo. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ $9 > 4$ pero esta es una hipérbola vertical si tomamos de referencia la posicion del eje focal

de igual forma si tengo

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ es horizontal y $9 > 4$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ es vertical y $9 > 4$

Comparando tenemos

horizontales.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

en ambos $9 > 4$

pero en uno 9 es denominador de x^2 y en el otro de y^2

Verticales:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

en ambos $9 > 4$

pero en uno 9 es denominador de x^2 y en otro de y^2

entonces ya no entendí?

Incluso puedo tener $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ ó $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$

$\Rightarrow a = b$ y en un caso es horizontal y en el otro vertical.

Creo que no podemos decir si es horizontal o vertical sólo viendo el denominador, sino más bien fijandonos en el signo − (menos) si este le pertenece a y^2 será horizontal la hipérbola, pero si le pertmece a la x^2 será vertical nuestra hipérbola.

Alumno E. Este estudiante no relaciona el signo menos de la variable, sin embargo, toma en cuenta signo positivo de la variable llegando al mismo resultado.

No encontré relación

Podemos afirmar, que si el denominar en x es mayor, entonces la hipérbola tienen una posición ___ ____; en caso contrario, es decir que el denominador mayor corresponda a y, entonces la elipse tiene una posición ______

Lo q' indica si es vertical u horizontal es el valor positivo de la ecuación, donde se encuentre estará el eje focal.

Los resultados anteriores los podemos resumir en el siguiente Teorema (Lehmann: 195).

La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje X, y focos los puntos (*c, 0*) y (-*c, 0*), es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean (*0, c*) y (*0, -c*), entonces la ecuación es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Para cada hipérbola, *a* es la longitud del semieje transverso o eje focal, *b* la del semieje conjugado o eje no focal, *c* la distancia del centro a cada foco, y *a, b, c* están ligados por la relación

$$c^2 = a^2 + b^2$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad *e* está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \rangle 1$$

Fase 4. Orientación libre.

En esta fase los estudiantes realizarán la traslación de ejes fuera del origen para el lugar geométrico de la hipérbola con la finalidad de encontrar la semejanza que existe con los casos anteriores.

En la figura 13 y 14 podemos observar a la hipérbola con centro en (*h, k*) y eje focal paralelo al eje de coordenadas X & Y respectivamente.

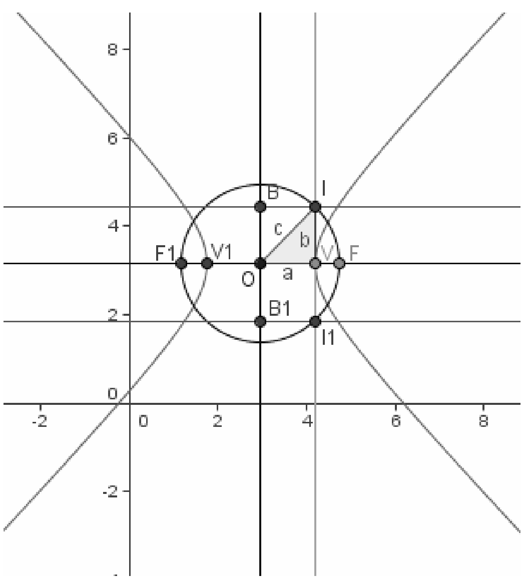


Figura 13.

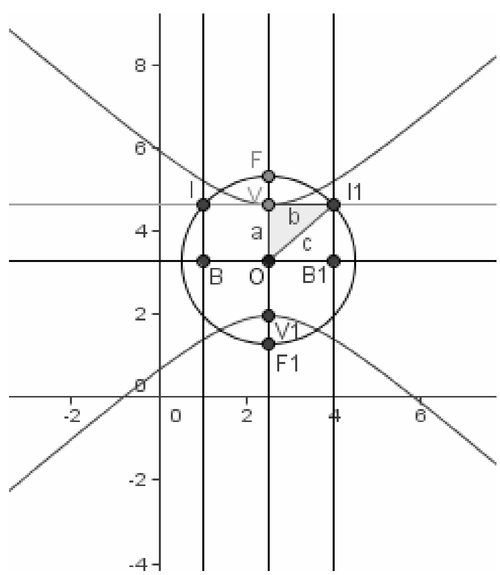


Figura 14.

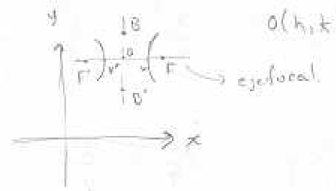
Una vez realizadas las construcciones anteriores podemos preguntarles a los estudiantes ¿Qué sucede si ahora el centro de la hipérbola no está en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes de coordenadas? ¿En qué cambian las partes principales de la hipérbola?

Alumno C.

➤ Tomemos primero a una hiperbola con centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje "X"

¿En que cambian, las partes principales de la hiperbola?

Solo en cosas númericas, pues esta trasladada fuera del origen pero sus partes principales son las mismas y los puntos que lo describen siguen cumpliendo la misma condicion que relaciona la diferencia entre la distancia de un punto del lugar geometrico a los focos con una constante $2a = \overline{VV'}$



➤ Ahora consideremos una hipérbola fuera del origen y eje focal paralelo al eje "y".

¿Cambian las partes principales de la hipérbola?

Al igual que en el punto anterior, todo se desplaza y las partes principales de la hipérbola no cambian, sólo lo hacen en cuestiones numéricas.

Alumno D.

- Podemos hablar de un centro $C \neq (0,0)$, de hecho tendrá coordenadas (h,k)
- Las asíntotas de la hipérbola, no serán los ejes X y y, tendrán una pendiente

Alumno E.

¿En que cambian, las partes principales de la hipérbola? Sólo se consideran las coordenadas del centro para realizar los procedimientos

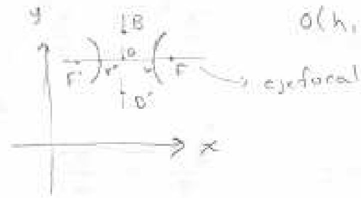
En cualquiera de los comentarios anteriores se puede observar que no cambian los elementos ó propiedades de la hipérbola. El único cambio es un tanto numérico y está dirigido a las nuevas coordenadas de traslación, pues en esta ocasión la hipérbola se encuentra fuera del origen. Así, ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos?

Alumno C.
Hipérbola con eje focal paralelo al eje de coordenadas X.

Si $O(h, k)$

$V(h+a, k)$ $F(h+c, k)$

$V'(h-a, k)$ $F'(h-c, k)$



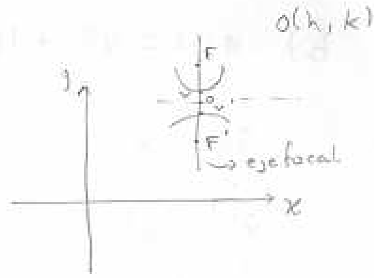
Hipérbola con eje focal paralelo al eje de coordenadas Y.

en este caso.

Si $O(h, k)$

$V(h, k+a)$ $F(h, k+c)$

$V(h, k-a)$ $F'(h, k-c)$



Alumno D.

– HORIZONTAL

$V=(h+a, k)$

$V1=(h-a, k)$

$F=(h+c, k)$

$F1=(h-c, k)$

VERTICAL

$V=(h, k+a)$

$V1=(h, k-a)$

$F=(h, k+c)$

$F1=(h, k-c)$

Alumno E. Hipérbola con eje focal paralelo al eje de coordenadas X.

$C(h, k)$ $V(h+a, k)$ $V1(h-a, k)$ $F(h+c, 0)$ $F1(h-c, 0)$

Finalmente, podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente Teorema (Lehmann: 203).

La ecuación de una hipérbola de centro el punto *(h, k)* y eje focal paralelo al eje X, es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Para cada hipérbola, *a* es la longitud del semieje transverso, *b* la del semieje conjugado, *c* la distancia del centro a cada uno de los focos, y *a, b, c* están ligados por la relación

$$c^2 = a^2 + b^2$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad *e* está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \rangle 1$$

Fase 5. Integración

En los siguientes ejercicios se puede observar el razonamiento utilizado por los estudiantes para resolver los problemas reflejando en ellos lo que han aprendido.

Determina los vértices, focos y las longitudes de los ejes en caso de ser necesario completa cuadrados y realiza la gráfica.

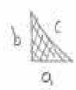
Alumno C.

a) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

Como el signo (-) pertenece a y^2 la hiperbola es horizontal, además está en el origen

$a^2 = 144 \Rightarrow a = 12$

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

del triangulo 

que se hizo en la pregunta 2 y 3 se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = a^2 + b^2 = 144 + 25$

$c^2 = 169$

$\boxed{c = 13}$

$\therefore$ V(12, 0) F(13, 0)

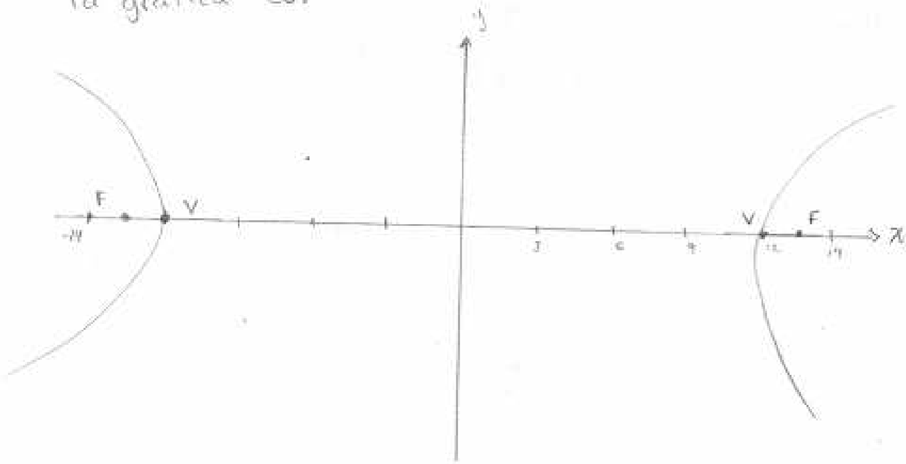
V'(-12, 0) F'(-13, 0)

eje imaginario $= 2b = 2(5) = 10$

eje focal $= 2a = 2(12) = 24$

$LL' = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(25)}{12} = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}$ $e = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$

la gráfica es:



b) $4x^2 = y^2 + 16$

$4x^2 - y^2 = 16$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ también es horizontal y está en el origen

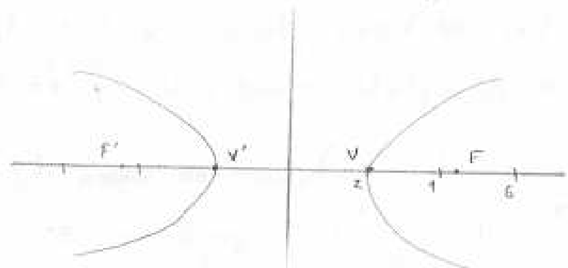
$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = 4 + 16 = 20$

$c = \sqrt{20} \approx 4.47$



$\therefore$ $V(2, 0)$ $F(\sqrt{20}, 0)$

$V'(-2, 0)$ $F'(-\sqrt{20}, 0)$

eje imaginario $= 2b = 2(4) = 8$

eje focal $= 2a = 2(2) = 4$

$LL' = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{2} = 16$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{20}}{2}$

c) $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{6} = 1$

Centro en $O(4, -3)$, horizontal también

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 6 \Rightarrow b = \sqrt{6}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 6 = 10$

$c = \sqrt{10}$

$\Rightarrow$

$V\ (4+2,\ -3) = (6,\ -3)$

$V'\ (4-2,\ -3) = (2,\ -3)$

$F\ (4+\sqrt{10},\ -3) \approx (7.16,\ -3)$

$F'\ (4-\sqrt{10},\ -3) \approx (0.83,\ -3)$

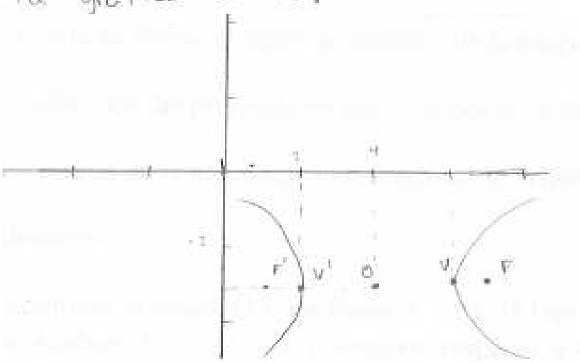
eje imaginario $= 2b = 2(\sqrt{6})$

eje focal $= 2a = 2(2) = 4$

$LL' = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(6)}{2} = 6$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

la gráfica correspondiente es:



Alumno D.

$4x^2 = y^2 + 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ (HORIZONTAL)

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$L_R = \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{2} = 16$

$C = (0,0)$

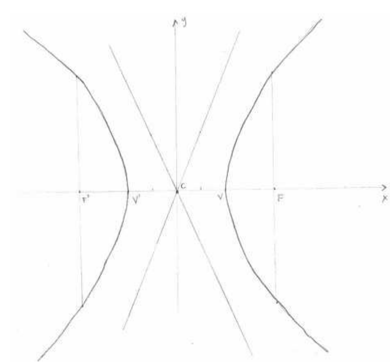
$V = (2,0)$

$V' = (-2,0)$

$F = (4,0)$

$F' = (-4,0)$

Asíntotas: $y = \pm 2x$



A diferencia de las cónicas anteriores en esta ocasión no se aplico examen diagnóstico, sin embargo, si consideramos al contenido de las tablas 4 y 6, observamos que el nivel que tienen de conocimientos, es visual, pues, en la mayoría de los casos el estudiante sólo describe de manera visual el lugar geométrico a estudiar, es decir, sabe que existe y que tiene propiedades y elementos, pero no los relaciona entre sí.

Tabla 8. Evaluación final de la Hipérbola.

Alumno		A	B	C	D	E
Considera como elementos de la hipérbola	focos	✓	✓	✓	✓	✓
	vértices	✓	✓	✓	✓	✓
	lado rectos	✓	✓	✓	✓	
	eje no focal			✓	✓	✓
	eje focal			✓	✓	✓
Relaciona el signo de la ecuación con la orientación ↑ ↓ ← →				✓	✓	✓
La ecuación de la hipérbola con centro (0, 0) y la gráfica tienen relación				✓	✓	✓
La ecuación de la hipérbola con centro (h, k) y la gráfica tienen relación				✓	✓	✓
Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática				✓	✓	✓
Dada la ecuación describe el lugar geométrico				✓	✓	✓
Completan cuadrados para obtener los elementos de la hipérbola				✓	✓	

En la tabla anterior, podemos apreciar que los estudiantes más constantes fueron el C, D y E, a pesar de que en un inicio el alumno E, no demostró tener un gran avance en sus conocimientos, consideró que su aprendizaje al finalizar todas las actividades fue significativo.

Los alumnos A y B, no concluyeron la última actividad, por razones ajenas, sin embargo su desempeño en la parábola y la elipse fue mejorando comparándolo con sus conocimientos iniciales, como se puede apreciar en las tablas 5 y 6, adquirieron conocimientos nuevos y relevantes.

Al finalizar las actividades se aplicó a los estudiantes un examen final con la finalidad de evaluar sus conocimientos de las cónicas estudiadas, el formato es el siguiente.

Examen Final.

1. Encontrar el lado recto, vértices, focos y la ecuación de la elipse que tiene el centro en el origen de coordenadas y sus elementos son los que se indican.

a) *2a* = 34, *c* = 15 y eje mayor sobre el eje *X*.
b) Un foco es (5, 0) y $e = \frac{2}{3}$

2. Encontrar los elementos de las siguientes elipses (centro, ejes, lado recto, vértices, focos y excentricidad). Dibujar la curva correspondiente.

a) $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$
b) $4(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$

3. Dadas las siguientes parábolas, obténgase V, F, la ecuación de la directriz y el ancho focal.

a) $y^2 + 6y + 9x - 27 = 0$
b) $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$

4. Para las ecuaciones de la hipérbola. Hallar, vértices, focos, longitudes de los ejes focal y no focal y la longitud del lado recto.

a) $4x^2 - 9y^2 = 36$
b) $x^2 - 4y^2 = 4$

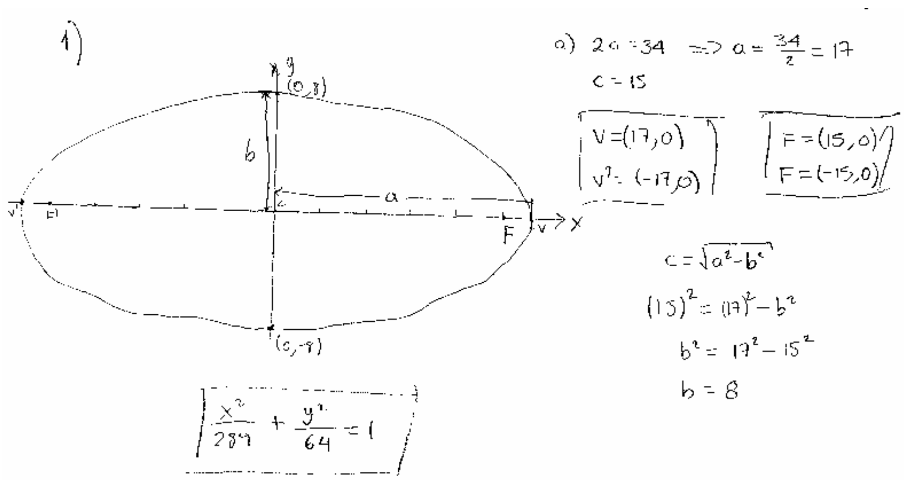
Como podemos observar en los siguientes resultados los avances de los estudiantes son notorios. Realizan las observaciones de las propiedades o elementos correspondientes al lugar geométrico, construyendo para alguno de los casos la gráfica correspondiente. Es así, como podemos comprobar que los estudiantes han pasado del nivel 0 del modelo de Van Hiele al nivel 1 del mismo.

En los estudiantes surge el descubrimiento de propiedades o elementos a partir de las observaciones de los casos particulares, generalizando finalmente sus resultados.

1. Encontrar el lado recto, vértices, focos y la ecuación de la elipse que tiene el centro en el origen de coordenadas y sus elementos son los que se indican.

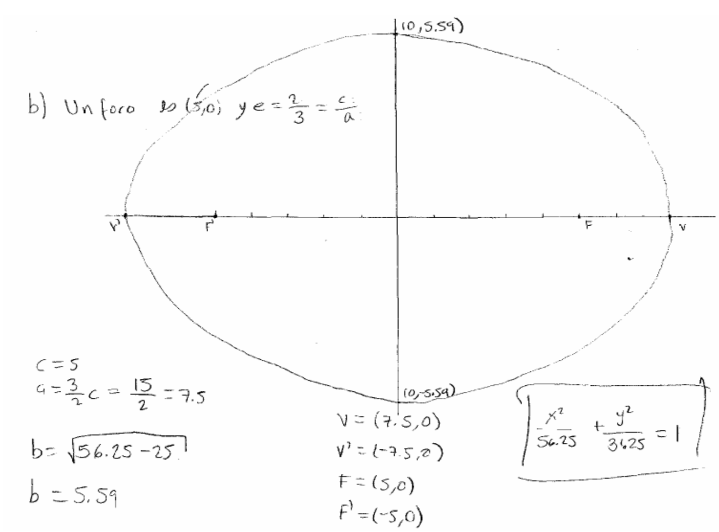
a) $2a = 34$, $c = 15$ y eje mayor sobre el eje X.

Solución. Alumno D.



b) Un foco es (5, 0) y $e = \frac{2}{3}$

Solución. Alumno D.



2. Encontrar los elementos de las siguientes elipses (centro, ejes, lado recto, vértices, focos y excentricidad). Dibujar la curva correspondiente.

a) $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

Solución.

Alumno C.

2 - a) $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

$a = 5$
$b = 4$
$c = 3$

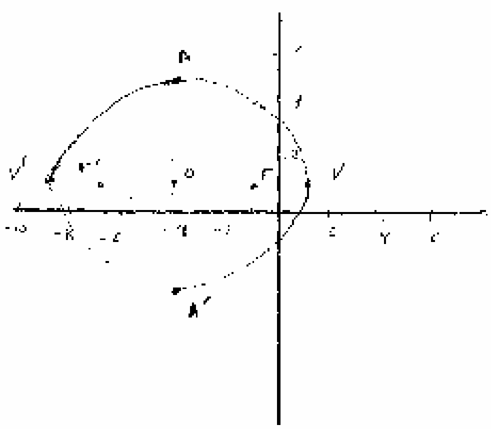
$\sqrt{25-16} = c$
$3 = c$

$O(-4, 1)$
$V(-4+5, 1) = (1, 1)$
$V'(-4-5, 1) = (-9, 1)$
$F(-4+3, 1) = (-1, 1)$
$F'(-4-3, 1) = (-7, 1)$

eje mayor $= 2a = 10$

eje menor $= 2b = 8$

$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{5} = \frac{32}{5}$; $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$



b) $4(x-1)^2+(y+3)^2=4$

Solución. Alumno A.

2) b

$4(x-1)^2+(y+3)^2=4$

$\frac{4(x-1)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{4}=\frac{4}{4}$ Ecuación

$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

$\therefore \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Si $4>1 \therefore a^2=4$, $b^2=1$

$\boxed{a=2}$ $\boxed{b=1}$

Si: $a^2=b^2+c^2$

$c^2=a^2-b^2$

$c=\sqrt{(2)^2-(1)^2}$

$\boxed{c=\sqrt{3}}$

Centro

$O(h,k)$

$-h=-1$ $-k=3$

$h=1$ $k=-3$

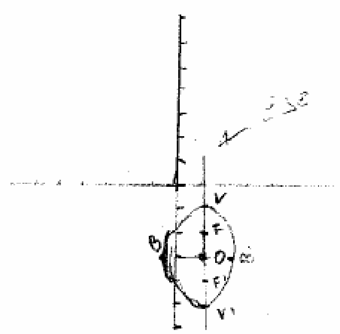
$\therefore O(1,-3)$

$LR=\frac{2b^2}{a}$

$LR=\frac{2(1)^2}{2}$

$LR=\frac{2}{2}$

$LR=1$



Vértices y foco

$V=(1,-1)$

$V'=(1,5)$

$F=(1,-2)$

$F'=(1,-4)$

excentricidad

$e=\frac{c}{a}$

$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Dadas las siguientes parábolas, obténgase V, F, la ecuación de la directriz y el ancho focal.

a) $y^2+6y+9x-27=0$

Solución.

Alumno C. En esta ocasión podemos decir que el procedimiento utilizado y las observaciones para resolver este problema son correctas, sin embargo, el error al factorizar un signo afecta los resultados finales.

3-a) $y^2 + 6y + 9x - 27 = 0$

$y^2 + 6y = -9x + 27$

$y^2 + 6y + 9 = -9x + 27 + 9$

$(y+3)^2 = -9x + 36$

$(y+3)^2 = -9(x+4)$

$(y+3)^2 = 4\left(-\frac{9}{4}\right)(x+4)$ $\Rightarrow p = -\frac{9}{4}$

Parábola simétrica al eje x fuera del origen, que abre hacia la izq puesto que $p<0$.

$\Rightarrow V(-4,-3)$

$F\left(-4-\frac{9}{4}, -3\right) = \left(-\frac{25}{4}, -3\right)$

ecuación de la directriz es $x = -4 + \frac{9}{4} = -\frac{7}{4}$

$LL' = 4|p| = 9$

b) $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$

Solución.

Alumno E

3 b) Parábola

$x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$

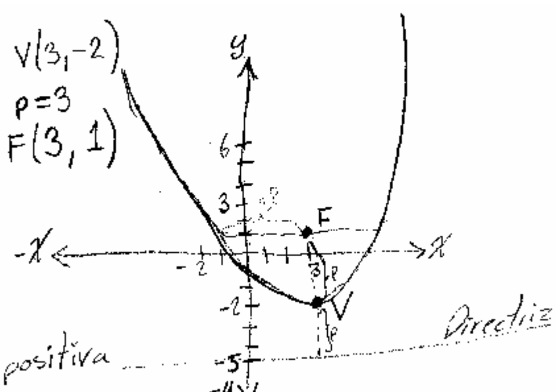
$x^2 - 6x = 12y + 15$

$x^2 - 6x + 9 = 12y + 15 + 9$

$(x-3)^2 = 12y + 24$

* $(x-3)^2 = 4(3)(y+2)$ Vertical, positiva

* $V(3,-2)$
* $p = 3$
* $F(3,1)$



Ancho Focal $= 4p = 4(3) = 12$ * Directriz $y = -5$

4. Para las ecuaciones de la hipérbola. Hallar, vértices, focos, longitudes de los ejes focal y no focal y la longitud del lado recto.

a) $4x^2 - 9y^2 = 36$

Solución. Alumno C.

4.- a) $4x^2 - 9y^2 = 36$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

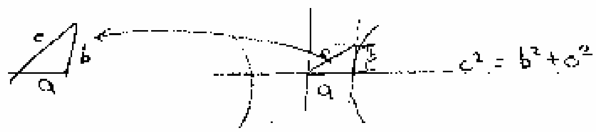
hiperbola con eje focal coincidente al eje x, con centro en el origen

$\Rightarrow a = 3$
$b = 2$
$c = \sqrt{13} \approx 3.6$

$c^2 = a^2 + b^2$
$c = \sqrt{9+4}$

$O(0,0)$
$V(3,0)$
$V'(-3,0)$
$F(\sqrt{13}, 0)$
$F(-\sqrt{13}, 0)$

eje focal $= 2c = 2\sqrt{13}$
eje no focal $= 2b = 4$



$LL' = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$

b) $x^2 - 4y^2 = 4$

Solución. Alumno B

b) $x^2 - 4y^2 = 4$

$\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{4} = \frac{4}{4}$

$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1}$ ecuación

$a^2 \quad b^2$

$a^2 = 4$
$a = \sqrt{4}$
$a = 2$

$b^2 = 1$
$b = \sqrt{1}$
$b = 1$

$c^2 = a^2 + b^2$
$c = \sqrt{2^2 + 1^2}$
$c = \sqrt{4+1}$
$c = \sqrt{5}$

* $\boxed{F(\sqrt{5}, 0) \quad F'(-\sqrt{5}, 0)}$

* $\boxed{V(2,0) \quad V'(-2,0)}$

Longitud del lado recto

$LR = \frac{2b^2}{a}$

$LR = \frac{2(1)^2}{2}$

$LR = \frac{2}{2}$

$LR = 1$

Longitud focal

$c = \sqrt{5}$
$2c = 2\sqrt{5}$

Longitud focal
4.47

Longitud del eje focal

$2a = 2(2)$
$= 4$

Durante las actividades se llevaron acabo diferentes evaluaciones entre ellas el examen diagnóstico, que nos sirvió como guía para conocer cuales eran los conocimientos con los que se enfrentaban los estudiantes a los nuevos temas. Mientras que en la evaluación final, se pudo observar el avance de los estudiantes considerando que este es todo un proceso que requiere de tiempo, que varía conforme al estudiante.

Además, como los elementos de las tablas de evaluación consideran al aprendizaje en sus diferentes ámbitos, es decir, actitudinal, procedimental y conceptual, esto nos permitió comparar entre el examen diagnóstico y la evaluación final, pues, se pudo observar cuales fueron los elementos que cumplieron los estudiantes, como se muestra en la tabla 9.

Tabla 9. Cuadro comparativo de evaluación de la parábola.

Cuadro comparativo		Examen Diagnóstico					Evaluación Final				
Alumno		A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1. La definición es clara.				✓			✓	✓	✓	✓	✓
2. Reconoce a la parábola como lugar geométrico.			✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
3. La definición tiene relación con la gráfica.				✓			✓	✓	✓	✓	✓
4. Menciona como elementos de la parábola a:	la directriz.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	el foco.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	el vértice.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
	el lado recto.		✓	✓			✓	✓	✓	✓	
	el eje focal.			✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
5. Representa a la parábola con vértice en el origen.		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
6. Representa a la parábola con vértice fuera del origen.		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
7. Relaciona los elementos de la parábola con la grafica.				✓		✓		✓	✓	✓	✓
8. Describe los elementos de la parábola con vértice en el origen.	La directriz.							✓	✓	✓	
	El foco.						✓	✓	✓	✓	✓
	El vértice.						✓	✓	✓	✓	✓
	El lado recto.								✓	✓	✓
	El eje focal.						✓	✓	✓	✓	✓
9. Describe los elementos de la parábola con vértice en (h, k)	la directriz.								✓	✓	
	el foco.						✓	✓	✓	✓	✓
	el vértice.						✓	✓	✓	✓	✓
	el lado recto.								✓	✓	✓
	el eje focal.						✓	✓	✓	✓	✓
10. La ecuación corresponde al lugar geométrico.	vértice (0, 0)						✓	✓	✓	✓	✓
	vértice (h, k)						✓	✓	✓	✓	✓
11. Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática.									✓	✓	
12. Observa que el eje focal es eje de simetría								✓	✓	✓	
13. Intenta describir a la parábola visualmente.		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
14. Realiza un bosquejo del lugar geométrico para conocer la ecuación								✓	✓	✓	
15. Relaciona el signo de la ecuación con la orientación ↑ ↓ ← →							✓	✓	✓	✓	✓
16. Utiliza gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas								✓	✓	✓	✓
17. Cuando conoce la ecuación de la parábola describe su lugar geométrico								✓	✓	✓	✓
18. Convierte representaciones sintéticas a representaciones analíticas								✓	✓	✓	

De acuerdo a la tabla anterior, los estudiantes no tenían el aprendizaje conceptual, pues no relacionaban, ni describían los elementos de la cónica, sólo sabían que existían algunos elementos de esta como son: directriz, foco y vértice, pero no los relacionaban con la grafica del lugar geométrico, sólo describía a la cónica visualmente, sin propiedades, ni elementos, incluso la ecuación que presentaban para la parábola no correspondía.

Por otro lado, no tenían clara la definición de parábola, pues la definición que trataron de dar en su examen diagnóstico, no correspondía al lugar geométrico que ellos dibujaban, como es el caso del alumno A que intento definir a la parábola como una curva cualquiera que parte del origen y en el momento de dibujar el lugar geométrico, dibujo una parábola en el origen, la cual no es una curva cualquiera, pues tiene propiedades y elementos que la acompañan. Además de no distinguir entre una ecuación lineal y una cuadrática. Es decir, los elementos de la tabla que corresponden a los aprendizajes actitudinales y procedimentales, no los ubicaban.

Hay que tener en cuenta que los estudiantes, no habían cursado materias relacionadas con matemáticas en el momento que se aplicaron las actividades, pues, son cursos que estudiarán en semestres posteriores. Es decir, sólo contaban con los conocimientos adquiridos durante el bachillerato hace aproximadamente cuatro años.

Sin embargo al realizar las actividades con ayuda del *software* Geogebra, tanto los aprendizajes actitudinales, procedimentales y conceptuales fueron cambiando, pues, el *software* permitió a los estudiantes una mejor visualización de los elementos de la parábola, así como también facilito la construcción de la cónica.

Por otro lado, al realizar la construcción de la cónica, la definición se aclaro, pues se podía apreciar con mayor facilidad, como se formaba el lugar geométrico de la parábola, así como la orientación de la cónica. La razón por la que algunos estudiantes tuvieron problemas al determinar la ecuación de la directriz, fue en principio por que no distinguían entre una ecuación lineal y una cuadrática, sin embargo los alumno C y D no presentaron este problema, a pesar de que en un inicio tampoco realizaron la distinción entre estas ecuaciones.

Con respecto al aprendizaje procedimental, los estudiantes crearon en ellos habilidades que les permitieron saber describir e identificar el lugar geométrico de la parábola y representar tanto en el origen como fuera de este a dicha cónica. En lo que concierne al aprendizaje actitudinal, los alumnos fueron capaces de realizar un bosquejo del lugar geométrico para conocer la ecuación y por otro lado, utilizar gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas.

En la tabla 10, se puede observar la comparación entre la evaluación cualitativa del examen diagnostico y la evaluación final. Al igual que en la actividad anterior, esta tabla nos permite observar con mayor claridad el desenvolvimiento de los alumnos en el transcurso de la actividad y en los diferentes aprendizajes, actitudinal, procedimental y conceptual que se presentan en la lista de cotejo de dicha tabla.

Tabla 10. Cuadro comparativo de evaluación de la elipse.

Cuadro comparativo.		Examen Diagnóstico.					Evaluación Final.				
Alumno		A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
1. La definición es clara.				✓			✓	✓	✓	✓	✓
2. Reconoce a la elipse como lugar geométrico.		✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
3. La definición tiene relación con la gráfica.				✓			✓	✓	✓	✓	✓
4. Menciona como elementos de la elipse a:	los focos	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	los vértices	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
	los lados rectos	✓			✓		✓	✓	✓	✓	
	el eje mayor			✓			✓	✓	✓	✓	✓
	el eje menor			✓			✓	✓	✓	✓	✓
5. Representa a la elipse con centro en el origen.			✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓
6. Representa a la elipse con centro fuera del origen.			✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
7. Relaciona los elementos de la elipse con la grafica.				✓				✓	✓	✓	✓
8. Describe los elementos de la elipse con centro en el origen.	los focos						✓	✓	✓	✓	✓
	los vértices						✓	✓	✓	✓	✓
	los lados rectos								✓	✓	
	el eje mayor						✓	✓	✓	✓	✓
	el eje menor						✓	✓	✓	✓	✓
9. Describe los elementos de la elipse con vértice en (h, k)	los focos						✓	✓	✓	✓	✓
	los vértices						✓	✓	✓	✓	✓
	los lados rectos								✓	✓	
	el eje mayor						✓	✓	✓	✓	✓
	el eje menor						✓	✓	✓	✓	✓
10. La ecuación corresponde al lugar geométrico.	centro (0, 0)						✓	✓	✓	✓	✓
	centro (h, k)						✓	✓	✓	✓	✓
11. Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática.								✓	✓	✓	✓
12. Intenta describir a la elipse visualmente.		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
13. Relaciona al denominador de mayor valor en la ecuación, con la orientación ↑↓←→								✓	✓	✓	✓
14. Utiliza gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas									✓	✓	✓
15. Deduce las propiedades de una figura por medio de sus coordenadas								✓	✓	✓	✓
16. Describe el termino excentricidad con sus propias palabras									✓	✓	

Al iniciar el estudio de la elipse, los alumnos no contaban con los aprendizajes conceptuales establecidos en la tabla anterior, pues, las definiciones no correspondían al lugar geométrico del que hablaban, excepto el alumno C el cual dio una definición de elipse correspondiente al lugar geométrico. Los elementos de la elipse que mencionaron fueron aquellos que tenían una analogía con la parábola, pero no describieron en que consistían, sólo intentaron definir a la parábola como una curva ovalada, tal fue el caso de los alumnos A, B y E, como se muestra en sus exámenes diagnósticos.

Al iniciar con las construcciones los alumnos tuvieron una mejor soltura en el manejo del *software*, a pesar de las dificultades que mostraba la figura, puse requería de una gran cantidad de trazos. En el aprendizaje conceptual, la ayuda que proporciono el *software* fue en cuanto a la visualización de los elementos de la elipse, pues, a partir de la construcción los alumnos pudieron observar con claridad la definición de la elipse, además de describir los elementos que la componen.

Por otro lado, en el aprendizaje procedimental los estudiantes crearon en ellos habilidades que les permitieron saber describir e identificar el lugar geométrico de la elipse y representar tanto en el origen como fuera de este a dicha cónica. En lo que concierne al aprendizaje actitudinal, los alumnos fueron capaces de realizar un bosquejo utilizando gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas.

Tabla 11. Evaluación final de la Hipérbola.

Alumno		A	B	C	D	E
Considera como elementos de la hipérbola	focos	✓	✓	✓	✓	✓
	vértices	✓	✓	✓	✓	✓
	lado rectos	✓	✓	✓	✓	
	eje no focal			✓	✓	✓
	eje focal			✓	✓	✓
Relaciona el signo de la ecuación con la orientación ↑ ↓ ← →				✓	✓	✓
La ecuación de la hipérbola con centro (0, 0) y la gráfica tienen relación				✓	✓	✓
La ecuación de la hipérbola con centro (h, k) y la gráfica tienen relación				✓	✓	✓
Distingue entre una ecuación lineal y una cuadrática				✓	✓	✓
Dada la ecuación describe el lugar geométrico				✓	✓	✓
Completan cuadrados para obtener los elementos de la hipérbola				✓	✓	

Finalmente, como se puede observar en la tabla 11, los aprendizajes en sus diferentes ámbitos, actitudinal, procedimental y conceptual, para el caso de la hipérbola, no son tan claros para los alumnos A y B, pues no concluyeron la actividad, sin embargo, para los alumnos C y D, se puede observar que la analogía que existe con las cónicas anteriores sirvió de apoyo para realizar esta actividad, pues tanto las construcciones como los elementos de las cónicas son bastantes semejantes.

Conclusiones.

Al iniciar las actividades y observar los resultados que arrojaron los exámenes diagnósticos se apreció que el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes se podía ubicar en el nivel de visualización, pues, no relacionaban las propiedades o elementos de los lugares geométricos y los consideraban como alguna curva en particular.

Sin embargo, en el momento que se aplicaron las actividades los estudiantes no habían cursado durante la licenciatura materias cuyo contenido científico fuera de matemáticas, pues, son cursos que estudiarán en semestres posteriores. Es decir, sólo contaban con los conocimientos adquiridos durante el bachillerato hace aproximadamente cuatro años.

Por otro lado, la muestra que se considero fue tomada con estudiantes voluntarios, por lo tanto, es una muestra no probabilística. Lo cual implica que los resultados obtenidos tienen un valor limitado y relativo a la muestra en sí, más no a la población. Sin embargo, esto no quiere decir que no se pueda llevar acabo en una población.

Al transcurrir el tiempo, los estudiantes pasaron del nivel cero al nivel uno del modelo de Van Hiele, es decir, surge en ellos el descubrimiento y la generalización de propiedades de los lugares geométricos a partir de las observaciones que se realizaron en el desarrollo de las actividades.

Las construcciones dinámicas realizadas con el *software* facilitan el trabajo al estudiante, es decir, le permiten construir con mayor rapidez las construcciones de los lugares geométricos y tener una mejor exactitud en los trazos, provocando observaciones de los elementos con mayor precisión.

El manejar con mayor soltura el programa provocó en ellos un mejor desempeño y desenvolvimiento en las actividades, permitiéndoles a su vez observar con mayor claridad las propiedades y elementos de las cónicas estudiadas.

El uso dirigido y experimental del *software* ayudó a los estudiantes a darse cuenta de algunos errores de abstracción de conceptos. Como fue el caso del alumno C, el cual confundía el concepto de “simetría respecto a” y al enfrentarse con el programa y analizar el desarrollo de las actividades pudo darse cuenta que su ecuación no correspondía a la gráfica, corrigiendo y reafirmando así, los conceptos involucrados.

Por otro lado, en el aprendizaje procedimental los alumnos crearon en ellos habilidades que les permitieron saber describir e identificar el lugar geométrico de la parábola y representar tanto en el origen como fuera de este a dicha cónica. Como es el caso del alumno B, que al realizar sus reportes especificaba el porque de su elección, cuando resolvió los ejercicios planteados en la actividad de la parábola.

Cuando los estudiantes se enfrentaron a la semejanza que existe entre la elipse y la hipérbola observaron que a diferencia de la elipse la posición de la hipérbola no se podía determinar con ayuda de los denominadores de la ecuación, sino más bien con el signo menos de ésta. Este pequeño detalle lo visualizo el alumno D que al mover los puntos libres de la construcción observó los diferentes casos que presentaba la ecuación de la hipérbola, llegando así al resultado correcto.

Sin embargo, la confianza total de los resultados del programa sin tener claridad de los conceptos básicos, puede provocar conflictos cognitivos, es decir, si el estudiante no se da cuenta de errores que puede cometer durante la construcción de los lugares geométricos, los resultados pueden ser malos o en el peor de los casos coincidir con lo que ellos quieren ver, pero al mover sus puntos libres sus construcciones se deforman evitando así, obtener las propiedades correctas y poder observar el comportamiento adecuado de éstas.

La evaluación cualitativa de las actividades se realizó mediante listas de cotejo (1, 2 y 3), determinando en ellas los elementos relevantes con la finalidad de poder observar el desempeño de los estudiantes, considerando en ellas los aprendizajes actitudinales, procedimentales y conceptuales, involucrados en la evaluación de los estudiantes. De acuerdo con esta evaluación, los estudiantes tuvieron un progreso considerable, como se determino en los cuadros comparativos 9, 10 y 11.

Existen diferentes herramientas para llevar acabo la evaluación cualitativa de los estudiantes y poder llevar un seguimiento del progreso de estos, como son: la tabla de actitudes, realizar un diario docente, entrevistas antes y después de las actividades, entre otras que ayudaran a llevar un mejor control de la evaluación.

Por otro lado, uno de los aspectos importantes que falto realizar en este trabajo fue el llevar a cabo pruebas piloto, tanto en las actividades como en los instrumento de evaluación, con la finalidad de afinar dichos instrumentos.

Los niveles de Van Hiele se observarían mejor si se hubiera trabajado con un sólo tema, para poder llevar a los alumnos del nivel cero al nivel cuatro de Van Hiele y poder observar con claridad el paso de un nivel a otro, sin embargo, en este trabajo se pudo apreciar el paso del nivel cero al nivel uno en el estudio de la parábola, elipse e hipérbola.

Bibliografía.

Alsina, C., y J. Fortuny. ¿Por qué geometría? España: Síntesis.

Alvarez F. J., y J. Casado (1998). Estandares Curriculares y de evaluación para la educación matemática. Nacional Councli of theachers of mathematics (NCTM). Estados Unidos: Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.

Anfossi, A. (1978). Geometría Analítica. Prol. Marco A. Flores Meyer. Duodécima edición. México: Progreso.

Baena, G. (2004). Instrumentos de investigación. (30a. ed.) México: Editores Mexicanos Unidos.

Bruner, J. (1972). Hacia una Teoría de la Instrucción. México: UTEHA.

Cruz , T. (1996). Geometría Analítica. (2a. ed.). México: EDIMAF.

Díaz Barriga, E. (2006). Geometría Dinámica con Cabri-Géometre. México: Kali.

Díaz Barriga, F., y G. Rojas. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. (2a. ed.) México: Mc Graw Hill.

Flores A. Producción de materials didácticos que atiendan el aprendizaje de los alumnos. (2004).

Gutiérrez, A.; Jaime, Adela. El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los giros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia, España.

Hernández Sampieri, R. (1991). Metodología de la investigación. (3a. ed.). México: McGraw-Hill.

Hiele, P. M. Structure and insight. A theory of mathematics education, Academic Press, Londres, 1986.

Hiele, P. M., El problema de la comprensión, en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría (De problematiek van het inzicht, gademonstreed aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde - leerstof), Universidad de Utrecht, Utrecht, Holanda, 1990.

Hiele – Geldof, D.
“The didactics of geometry in the coger class of secundary school” (De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V. H. M. O.), en Fuys; Geddes, Tischler, 1984, Selected writings of Dina Van Hiele – Geldolf and Pierre M. Van Hiele, Broklyn College, C.U.N.Y., Nueva York.

Lehmann, Ch. (1986). Geometría Analítica. Traduc. Rafael García Díaz.(10a. ed.). México: Limusa.

Lev Vigotsky. (1995). Pensamiento y Lenguaje. Prol. Kozulin Alex. España: Paidós.

Rodríguez Luevanos, Rosa Amelia. <u>El modelo de Van Hiele del desarrollo del pensamiento geométrico: Una experiencia en la Universidad Autónoma de Nuevo León.</u> (Tesis Maestría CINVESTAV)

Ruiz Garrido, C. (Octubre 1994). Los niveles van Hiele de pensamiento geométrico. <u>UNO</u>, Revista Didáctica de las Matemáticas. México, DF. No. 2.

Santaló, M., y V. Carbonell. (1993). <u>Geometría Analítica.</u> (16a. ed.). México: Joaquín Porrua.

Van Hiele – Geldof, D
<u>The didactics of geometry inthe lowest class of secondary school.</u> Doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957.: D. Fuygs, D. Geddes & M. Verdonk (An investigation of van Hiele levels of geometry among among sixth and ninth graders: Research findigs and implications (pp.1-206). (Professor Dorothy Geddes, Scool of Education, Grooklyn College, C.U.N.Y., Brooklyn, New York 11210, 1984.

Van Hiele, P. M:<u>Structure and insight: A theory of mathematics education</u>. New York: Academic Press, 1986.

Software Geogebra.
Diseñado por: Markus Hohenwarter en la Universidad Atlantic de Florida (Florida Atlantic University)
www.geogebra.org