



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas

Valuación de Opciones Financieras Empleando Métodos Numéricos

TESIS
Que para obtener el título de:
INGENIERO MATEMATICO
Presenta:

JOSÉ URIEL CABELLO SÁNCHEZ

Asesor: Dr. Edmundo del Valle Gallegos

México, D.F., 2008

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
1. Riesgo y Derivados Financieros	1
1.1. Los Riesgos en las Finanzas	1
1.2. Conceptos Preliminares	2
1.3. Las Opciones como Instrumentos de Cobertura	3
1.3.1. Cláusulas de los contratos sobre opciones	3
1.3.2. Opciones <i>CALL</i> o de compra y opciones <i>PUT</i> o de venta	4
1.3.3. Expectativas de los inversionistas	6
1.4. Arbitraje	8
1.5. Contratos Adelantados (<i>Forward</i>)	11
1.5.1. Paridad <i>Put-Call</i>	12
2. Mercados de Opciones	13
2.1. Introducción a los mercados de opciones	13
2.2. Funciones de los mercados de Opciones	14
2.2.1. Los Subyacentes	14
2.2.2. Negociación	14
2.2.3. Esquema de Negociación en México	14
2.2.4. Garantías	15
2.2.5. Emisión de Opciones	15
2.2.6. Vencimientos	16
2.2.7. Liquidación	16
2.2.8. Marco Regulatorio	16
2.3. MexDer y el mercado de opciones en México	16
3. Métodos analíticos de valuación	17
3.1. Valuación de Activos Financieros	17
3.2. Formula de <i>Black-Scholes</i> para la valuación de opciones	19
3.3. La Ecuación Diferencial Parcial de <i>Black-Scholes</i> (EDP-BS)	22
3.4. Conceptos financieros en la ecuación de Black-Scholes	23
3.5. Transformación a la Ecuación de Difusión	25
3.5.1. Condiciones iniciales y de frontera para la Valuación de Opciones de Compra	27
3.5.2. Condiciones Iniciales y de Frontera para la Valuación de Opciones de Venta	28

4. Ecuaciones diferenciales y el método de Diferencias finitas (MDF)	31
4.1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales	31
4.2. El método de diferencias finitas	33
4.3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	34
4.4. La ecuación unidimensional de Calor con condiciones Homogéneas	36
4.4.1. Esquema Euler Hacia Adelante	37
4.4.2. Esquema Euler Hacia Atrás	38
4.4.3. Esquema Crank-Nicholson	39
4.5. Algoritmos de Solución	40
5. El Método de Elemento Finito (MEF)	43
5.1. Introducción al método de elemento finito	43
5.2. El M.E.F. en problemas estáticos	43
5.2.1. Aproximación mediante polinomios de grado 2 y un elemento	44
5.2.2. Aproximación mediante polinomios de grado N y un elemento	45
5.2.3. Discretización en múltiples elementos	46
5.2.4. Aproximación mediante polinomios de grado 1 y múltiples elementos	46
5.2.5. Aproximación mediante polinomios de grado 2 y múltiples elementos	53
5.3. El M.E.F. en problemas dinámicos	55
5.4. Aplicación del M.E.F. en la ecuación unidimensional de calor	59
5.4.1. Uso de funciones de aproximación lineal.	59
5.4.2. Uso de funciones de aproximación cuadráticas.	63
5.4.3. Uso de funciones de aproximación cúbicas.	68
6. Valuación de Opciones sobre Activos que Cotizan en B.M.V.	73
6.1. Metodología	73
6.2. Aplicación No. 1 Valuación de Opciones sobre América Móvil (Telcel)	74
6.2.1. Captura de Información	74
6.2.2. Análisis de la información, gráficos y evaluación de los Resultados	77
6.2.3. Valuación Mediante Diferencias Finitas	77
6.2.4. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Lineal)	80
6.2.5. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Cuadrática)	82
6.3. Aplicación No. 2 Valuación de Opciones sobre Divisas (Dólar Americano)	85
6.3.1. Captura de Información	85
6.3.2. Análisis de la información, gráficos y evaluación de los Resultados	86
6.3.3. Valuación de una opción de venta	86
6.3.4. Análisis de la información, gráficos y evaluación de los Resultados	91
6.3.5. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Lineal)	91
6.3.6. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Cuadrática)	96
6.3.7. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Cúbica)	100
Conclusiones	105
Recomendaciones	107
Código fuente de los programas	109
1. M.D.F. Para valuación de un <i>CALL</i>	109
2. M.D.F. Para valuación de un <i>PUT</i>	111
3. M.E.F. Interpolación Lineal, para valuación de un <i>CALL</i>	113
4. M.E.F. Interpolación Cuadrática, para valuación de un <i>CALL</i>	116
5. M.E.F. Interpolación Cúbica, para valuación de un <i>CALL</i>	119

Resumen

En este trabajo se presentan los aspectos necesarios para la valuación de opciones financieras en México haciendo uso de métodos numéricos, en particular del método de diferencias finitas y del método del elemento finito.

En los primeros capítulos se proporcionan los conceptos financieros básicos que permiten familiarizarse con el contexto en caso de que no hubiera tenido mucha relación con el tema así como una explicación detallada de cómo es que operan los mercados de opciones en México ofreciendo con esto una panorámica del procedimiento que se debe seguir en caso de que se decidiera invertir en este tipo de derivados. Posteriormente se introducen los capítulos correspondientes a la teoría matemática que se necesita para abordar la valuación de las opciones así como las técnicas usadas para entrelazar un concepto financiero con una idea matemática que lo represente comenzando por introducir la fórmula de valuación analítica para después conocer cómo es que se construye la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes que posteriormente y mediante una serie de transformaciones, será convertida en la ecuación de calor además de que se construirá las condiciones de frontera que permitan resolver la ecuación. En los siguientes capítulos se introduce el concepto de ecuaciones diferenciales parciales así como dos de los métodos numéricos más conocidos para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales, dichos métodos son el de diferencias finitas y el de elementos finitos los cuales son explicados a detalle para permitir una correcta aplicación de los mismos en la solución del problema de valuación de opciones. Por último se analizan algunas opciones reales cuya información financiera proviene directamente de la página del MexDer para esto se hace uso de los métodos analíticos y numéricos desarrollados en las secciones previas. Al final del trabajo se proporcionan algunas conclusiones y recomendaciones relativas a esta tesis.

Introducción

Debido al número de operaciones financieras que se realizan en el mundo entero, la rapidez con que se realizan y las sumas de capital que se transfieren desde un extremo a otro del planeta se dice que el comercio es una actividad global y podemos comprobar esto todos los días cuando consultamos algún periódico donde se muestra cómo afecta a nuestro país la actividad económica de otros países e incluso como las propias actividades de algunas empresas internacionales afectan el desempeño de la economía nacional. Operaciones tan grandes como éstas suelen estar acompañadas de grandes riesgos de pérdidas para los inversionistas es por esto que se han diseñado y comercializado una nueva generación de productos conocidos como derivados financieros que permiten el intercambio de riesgo de las transacciones a una persona dispuesta a asumir el riesgo de pérdidas, es decir, en la actualidad no sólo se comercializan activos o productos sino que también se vende y se compra el riesgo en los mercados bursátiles del mundo. Uno de estos derivados, que es en especial el de interés de esta tesis, son las opciones financieras.

Una opción financiera es un derivado que brinda al comprador el derecho de liquidar una operación a un precio previamente establecido pero sólo si él lo considera adecuado, en cambio su contraparte, el vendedor de la opción tiene la obligación de liquidar la operación solicitada, para esto el vendedor de la opción solicita el pago de una prima conocida como prima de riesgo por lo que surge entonces el problema de la valuación del precio de las opciones.

El problema central que tratará de resolver esta tesis es el de encontrar el valor de la prima de riesgo que debe ser pagada por una opción financiera; en términos más concretos se quiere encontrar el valor de una opción mediante métodos numéricos, este problema ha sido estudiado desde varios puntos de vista, sin embargo la valuación de opciones financieras mediante diferencias finitas y elementos finitos ha sido poco utilizada ya que por lo general son empleadas algunas otras técnicas como las de simulación o las de árboles binomiales que aunque suelen ser más prácticas porque son fáciles de implementar éstas requieren la evaluación de una gran cantidad de posibles escenarios y asignar a estos probabilidades de ocurrencia que por lo general son desconocidas y suelen introducir variaciones en los resultados. Los métodos numéricos de diferencias finitas y elementos finitos, en cambio no han sido muy experimentados en el problema de la valuación de opciones a pesar de que las técnicas son bastante conocidas por su eficiencia dentro de la solución de problemas en física e ingeniería, es ésta la principal motivación de la realización de esta tesis. Otra de las ventajas más importantes en el uso de las técnicas de análisis numérico es que brindan la posibilidad de conocer el desenvolvimiento del valor de un derivado considerando para ello la captura de datos discretos que son en realidad los que brindan los mercados financieros y no continuos como se supone para el caso de la valuación analítica. Es necesario el uso de algunas hipótesis antes de comenzar a desarrollar esta tesis una de ellas es la suposición de que todos los inversionistas, los activos y los derivados financieros son parte de un mercado eficiente, en términos simples que se trata de un mercado justo, libre de la posibilidad de arbitraje y donde los costos de transacción son despreciables o nulos. Con base en esta suposición se propone como objetivo de este trabajo mostrar cómo operan los mercados de derivados en México y en particular cómo son negociadas las opciones financieras sobre activos financieros que cotizan en la bolsa mexicana de Valores (B.M.V) además se pretende hacer uso de los métodos numéricos de diferencias finitas y de elemento finito para conocer el precio de la prima de una opción financiera. La metodología que se emplea para conseguir este objetivo es la siguiente:

1. Realizar una investigación de las características de una opción financiera.
2. Describir cómo opera el mercado mexicano de derivados (MexDer) en particular el mercado de opciones financieras.
3. Investigar como funcionan las técnicas analíticas de valuación de opciones y usarlas como referente de los resultados que deben obtenerse mediante los métodos numéricos.
4. Investigar a detalle cómo funcionan las técnicas de diferencias finitas y elementos finitos así como las condiciones necesarias y suficientes para la solución del problema.
5. Adaptar las técnicas numéricas a los conceptos financieros que permitan la valuación de las opciones financieras.
6. Investigar algunos datos reales sobre los precios de los activos, las tasas de interés y los índices de volatilidad para algunas opciones que coticen en México y evaluarlas mediante los métodos antes descritos.
7. Desarrollar algunos programas de cómputo que permitan la valuación de otras opciones financieras.

Capítulo 1

Riesgo y Derivados Financieros

1.1. Los Riesgos en las Finanzas

Uno de los temas de estudio más importantes en el mundo de las finanzas actuales es el riesgo y la cobertura del riesgo porque dados los volúmenes de capital que se mueven en el mundo se quiere estar protegido contra cualquier movimiento desfavorable de los mercados que afecte la rentabilidad de los capitales que se invierten. Es bien sabido que aquella entidad que este dispuesta a correr un riesgo espera a cambio recibir una gratificación y cuanto mayor sea el tamaño del riesgo mayor es la cantidad de utilidad requerida para correr dicho riesgo así pues existe ya un detallado estudio de el riesgo como se clasifica, de donde proviene y técnicas para diversificarlo o transferirlo sin embargo sólo se presenta un breve resumen de lo indispensable para familiarizarse con el contexto:

Intuitivamente se conoce al riesgo como aquella probabilidad de ocurrencia de un evento desfavorable o inoportuno que contraiga pérdidas a una entidad determinada. Así pues, en las finanzas dichos eventos desfavorables representan la pérdida de capitales u oportunidades y básicamente se tienen dos clasificaciones para el riesgo:

1. **Diversificable o no sistemático:** Este es el riesgo que se puede minimizar en función del conocimiento que se tenga sobre el instrumento en el que se invierta es de cierto modo un tipo de riesgo que se puede medir de acuerdo al historial del activo.
2. **No diversificable o sistemático:** Este es un riesgo implícito en cualquier negociación que se efectúa entre dos entidades podemos ejemplificar estos riesgos con eventos como guerras, golpes de estado, desastres naturales u otros eventos similares.

Otro modo de clasificar el riesgo es como sigue:

1. **Riesgo de Crédito:** Se basa en el comportamiento que haya tenido la entidad en la que se invierte y su capacidad de cumplir con sus obligaciones de pago sobre los créditos que adquiere.
2. **Riesgo de País:** Este tipo de riesgo se basa en la situación económica y política del país donde se va a invertir, y se relaciona básicamente con la estabilidad de la moneda con la que se habría de invertir así como la cantidad de divisas que se posean y el tipo de cambio. Otro de los riesgos asociados al riesgo país es la gobernabilidad y la situación política que atraviesa un país dado.
3. **Riesgo de Mercado:** Este es el riesgo más común al que se enfrentan las inversiones y esta dado por todas las condiciones que aparezcan en el mercado tal como variaciones en las tasas de interés, inflación, volatilidad , variaciones en el tipo de cambio, etc.
4. **Riesgo de desfasamiento:** Este tipo de riesgo está dado por variaciones o disparidades en las fechas de vencimiento de contratos ocasionados por permutas o compraventa de los mismos.

5. **Riesgo de Base:** Este tipo muy común de riesgo se debe a la diferencia de precio de contado de un activo con el de una fecha futura.
6. **Riesgo de entrega:** Es el riesgo que se asocia con la probabilidad de que la entidad deudora no cumpla con sus pagos en tiempo y forma.
7. **Riesgo de trayectoria:** Este riesgo se da por todos los agentes propios del mercado que hacen fluctuar el valor de la inversión está representado por la volatilidad de los activos.¹



Figura 1.1: Tipos de Riesgo

Dados todos estos riesgos dentro de los mercados bursátiles de todo el mundo se han diseñado herramientas de protección contra las probabilidades de pérdida uno de ellos son las opciones.

1.2. Conceptos Preliminares

Se enlistan a continuación los conceptos básicos que deben conocerse sin hacer énfasis en los mismos para una referencia más profunda se recomienda consultar la bibliografía. [8]

Subyacente: Las acciones, bonos, divisas y en general cualquier instrumento financiero comercializable cuyo valor radica en su propio comportamiento se denomina activo subyacente.

Derivado: Se dice que un derivado es un instrumento financiero cuyo valor radica en la trayectoria que tenga un activo subyacente con el cual se le encuentra asociado.

Interés Simple: Considere una cantidad de capital P el día de hoy y que dicho capital es invertido en un fondo cualquiera de inversión que paga una tasa de interés r y el capital permanece en dicho fondo durante un tiempo t que es el momento en el que el capital será retirado o reinvertido así pues la cantidad de capital que se tendrá al momento del retiro está dada por la relación:

$$F = P(1 + r)^t \quad (1.1)$$

¹Esta información se sustenta en [5]

Interés Compuesto: De igual modo consideremos una cantidad de capital P el día de hoy. Luego entonces al cabo de un tiempo t esperaríamos obtener una cantidad F acumulada por n recapitalizaciones del capital inicial durante el intervalo de tiempo t a una tasa de interés r , dicha relación puede ser expresada como:

$$F = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad (1.2)$$

Interés Continuo: De la ecuación anterior podemos asumir la siguiente relación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = e^{rt} \quad (1.3)$$

Luego entonces podemos establecer la siguiente relación entre el capital y el interés cuando se tiene recapitalización constante:

$$F = Pe^{rt} \quad (1.4)$$

Función de densidad de una variable aleatoria normal: f es la función de densidad de una variable aleatoria normal estandarizada es decir de media 0 y desviación estándar 1; $N(0,1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1.5)$$

Función de distribución de una variable aleatoria normal: F es la función de distribución de una variable aleatoria normal estandarizada es decir de media 0 y desviación estándar 1; $N(0,1)$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1.6)$$

1.3. Las Opciones como Instrumentos de Cobertura

Una opción es un instrumento financiero cuyo valor depende del comportamiento de un bien subyacente (Acciones, Bonos, Divisas, etc.) al que se encuentra asociado, su mismo nombre nos sugiere que una opción es un contrato que brinda el derecho de ejercerla si el poseedor de la misma lo considera adecuado. Es importante enfatizar en todo lo que engloba la frase *Derecho de Ejercicio* para esto se deben mencionar que la opción es un contrato que reúne dos inversores, por un lado el emisor de la opción y por otra parte el comprador de la misma adquieren un contrato de compra o de venta de opciones.

1.3.1. Cláusulas de los contratos sobre opciones

Los contratos son uno de los principales elementos que generan los mercados de opciones pues además de adjudicar derechos y obligaciones a los inversionistas brindan toda la información que permite conocer el valor de la opción a través del tiempo es por eso que se enlistan a continuación todos los datos que debe contener un contrato de opciones.

1. **El activo subyacente S:** Deberá especificarse el activo subyacente, esto es el nombre de la acción, bono, o activo financiero en cuyo valor de mercado habrá de sustentarse el valor de la opción.
2. **El tamaño del contrato:** Se refiere al número de acciones del activo subyacente que se están negociando.
3. **El precio de ejercicio K:** Este precio es una parte muy importante porque establece una frontera virtual a partir de la cual el comprador de la opción decidirá cual es el momento indicado para ejercer su opción, este precio de ejercicio es pactado por el comprador y el vendedor de la opción en función de las expectativas que tenga cada uno de ellos sobre el desenvolvimiento en el mercado del activo subyacente así como de la estrategia que tenga planeada seguir.
4. **La fecha del Contrato:** La fecha en que se firma el contrato.

5. **La fecha de expiración T:** Este es otro de los puntos importantes para determinar el valor de la opción antes de que la opción expire y carezca definitivamente de valor.
6. **La Prima de riesgo:** Este es el costo que el comprador de una opción está dispuesto a pagar con tal de transferir el riesgo de pérdidas al emisor de la opción.
7. **Tipo de Opción:** El contrato especifica el tipo de opción que se esta negociando que puede ser:
 - Opciones Americanas
 - Opciones Europeas
 - Opciones Asiáticas
 - Opciones *Lookback*
 - Opciones Condicionales
 - Opciones Bermuda
 - Opciones Digitales

Por otra parte el modo en el que cada una de estas cláusulas y algunas otras quedan estipuladas en el contrato no es negociada directamente por los inversionistas en la compra-venta de los contratos sino por medio de una cámara de negociación que funge como intermediaria legal para dar credibilidad y certeza al mercado de derivados, en capítulos posteriores se redacta el medio en que operan estas cámaras así como un detallado informe de cómo se puede participar en este mercado.

Es importante aclarar que el valor que se calculara es **el valor intrínseco de las opciones** esto es el valor teórico de la opción si fuera ejercida al momento dejando de lado el valor que pudiera encontrarse en el mercado puesto que este esta sujeto a la capacidad de negociación de los inversionistas así como de las características de cada mercado.

1.3.2. Opciones *CALL* o de compra y opciones *PUT* o de venta

Las dos variantes de las opciones son las opciones tipo *CALL* o de compra y las del tipo *PUT* o de venta que poseen las siguientes características:

Una opción *CALL* brinda a su poseedor el derecho a comprar de considerarlo adecuado el activo subyacente estipulado en el contrato al precio de ejercicio pactado en el mismo siempre que la duración al vencimiento del contrato se lo permita. Por otra parte el emisor o vendedor de la opción *CALL* tiene la obligación de vender a petición de su comprador el activo suscrito y recibir por concepto de pago el precio de ejercicio de la acción y no su valor de mercado o en caso de así pactarlo se compromete a entregar la diferencia por concepto de utilidades en beneficio del comprador de las opciones.

Una opción *PUT* brinda a su poseedor el derecho de vender en caso de considerarlo apropiado a sus intereses el activo subyacente estipulado en el contrato al precio de ejercicio pactado en la misma siempre que la duración al vencimiento del contrato se lo permita. Por otra parte el emisor de la opción de venta tiene la obligación de comprar a petición del vendedor el activo suscrito y pagar por el activo el precio de ejercicio y no el precio de mercado o en caso de acordarlo ambas partes pagar la diferencia al comprador de la opción por concepto de utilidades.

En los siguientes párrafos se describen las expectativas generales que tienen los inversionistas sobre los activos para tomar sus decisiones.

La Función de Pago para las opciones de compra (CALL)

La función de pago tanto para las opciones *CALL* como para las opciones *PUT* representa una relación del valor intrínseco de la opción con respecto al valor del activo subyacente.

Se dice que una opción *CALL* tiene valor cuando el precio de ejercicio supera el precio del activo subyacente situación que se conoce como opción *in the money* o dentro de dinero. El diagrama ilustra con claridad la idea que acabamos de mencionar.

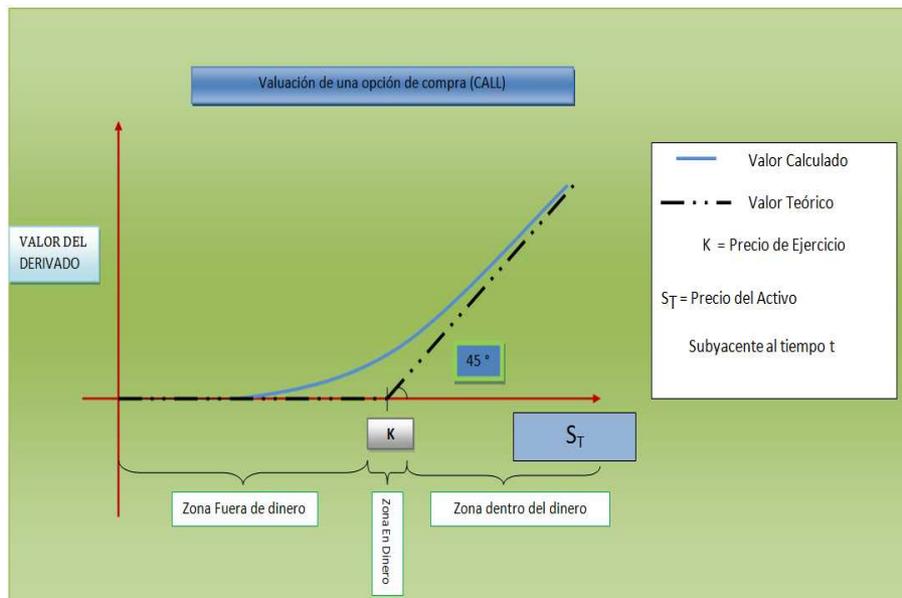


Figura 1.2: Función de pago de una opción CALL

La figura muestra una la relación de valor del activo subyacente contra valor de la opción y podemos verificar fácilmente que la opción tiene el valor conforme más se asienta en la zona *in the money* empleamos la siguiente función para determinar el valor de una opción de compra:

Función de Pago para una opción CALL

$$C_E(S_t, t) = (S_t - K)^+$$

Donde $C_E(S_T, T)$ expresa el valor de una opción *Call* de tipo europea en función de tiempo y el valor del activo subyacente.

La Función de Pago para las opciones de venta *Put*

Por otra parte para las opciones *Put* se tiene que carece de valor mientras que el precio de mercado se encuentre por encima del precio de ejercicio como lo muestra el diagrama.

Matemáticamente escribimos la función de pago de estas opciones mediante:

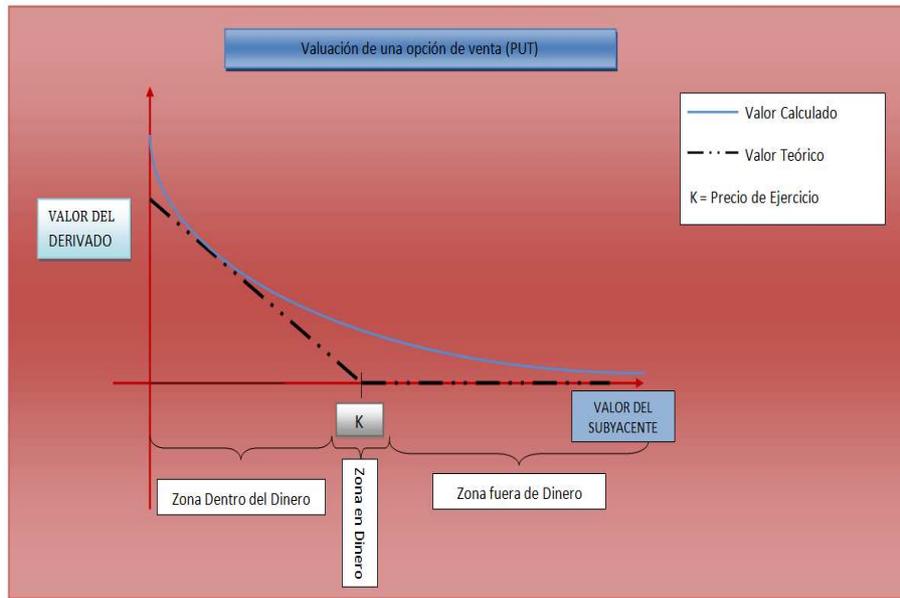


Figura 1.3: Función de pago de una opción PUT

Función de Pago para una opción PUT

$$P_E(S_t, t) = (K - S_t)^+$$

Donde $P_E(S_t, t)$ expresa el valor de la opción *Put* tipo europea en función del tiempo y el valor del activo subyacente al tiempo t .

1.3.3. Expectativas de los inversionistas

El concepto de función de pago es un concepto fundamental que muestra la perspectiva general del valor de las opciones en términos del valor de mercado del activo subyacente. De manera análoga a como se hizo para las funciones de pago haremos uso de gráficos que permitan visualizar con claridad las expectativas de los inversionistas para una referencia mas detallada consulte la bibliografía [3].

1. Opciones *CALL*

- *Punto de vista del Emisor:* En general se puede decir que el emisor de una opción *CALL* espera estabilidad o tendencia a la baja en el precio del activo subyacente.

Así el emisor de una opción *CALL* obtendrá beneficios mientras que el precio del subyacente sea menor que el precio de ejercicio, siendo éste el caso se dice que el emisor de una opción *CALL* adopto una posición corta de opciones y obtendrá utilidades mientras la opción se encuentra en la zona *out of the money*.

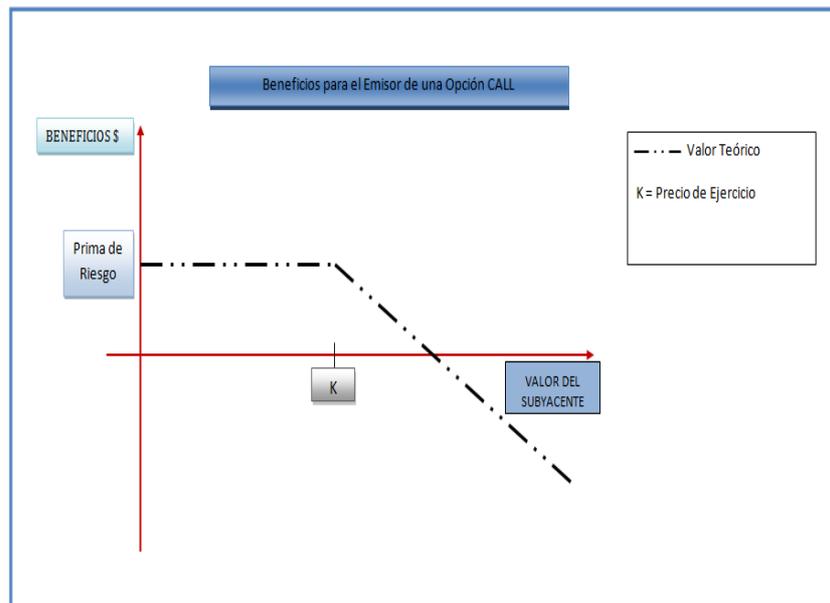


Figura 1.4: Beneficios para el emisor de un CALL

- *Punto de vista del comprador:* En este caso se puede decir que el comprador de una opción *Call* espera tendencias a la alza en el precio del activo subyacente.

Luego entonces el comprador de una opción *CALL* obtendrá beneficios mientras que el precio del activo subyacente sea mayor que el precio de ejercicio, siendo éste el caso se dice que el comprador de la opción *CALL* adoptó una posición larga en opciones y que obtendrá beneficios mientras que la opción se asiente en la zona *in the money*.

2. Opciones *PUT*

- *Punto de vista del emisor:* El emisor de una opción *PUT* espera que el precio del activo subyacente se mantenga estable o con ligera tendencia a la alza.
De aquí concluimos que el emisor de una opción *Put* obtendrá beneficios mientras que el precio del activo subyacente sea mayor al precio de ejercicio, en este caso suele decirse que el emisor de una opción *Put* adoptó una posición corta en opciones de venta y obtendrá beneficios mientras que la opción se encuentre en la zona *in the money*.
- *Punto de vista del comprador:* El comprador de una opción *Put* espera que el precio del subyacente mantenga tendencias a la baja.

De aquí concluimos que el comprador de una opción de venta obtendrá beneficios mientras que el precio del activo subyacente sea menor que el precio de ejercicio en este caso suele decirse que el comprador adoptó una posición larga de opciones y obtendrá beneficios mientras que la opción se encuentre en la zona *Out of the Money*.

Las posturas que puede tomar un inversor con base en sus expectativas y las relaciones que acaban de ser mostradas pueden ser muchas e incluso ciertas combinaciones de éstas son ejecutadas por los inversionistas aunque es preciso mencionar que dichas estrategias combinadas son difíciles de ejecutar a la perfección en el mundo real. Un estudio más detallado sobre opciones, riesgo y cobertura nos permitirá determinar cual es la estrategia que más se adapta a nuestras expectativas sobre activos en función del riesgo que se este dispuesto a correr.

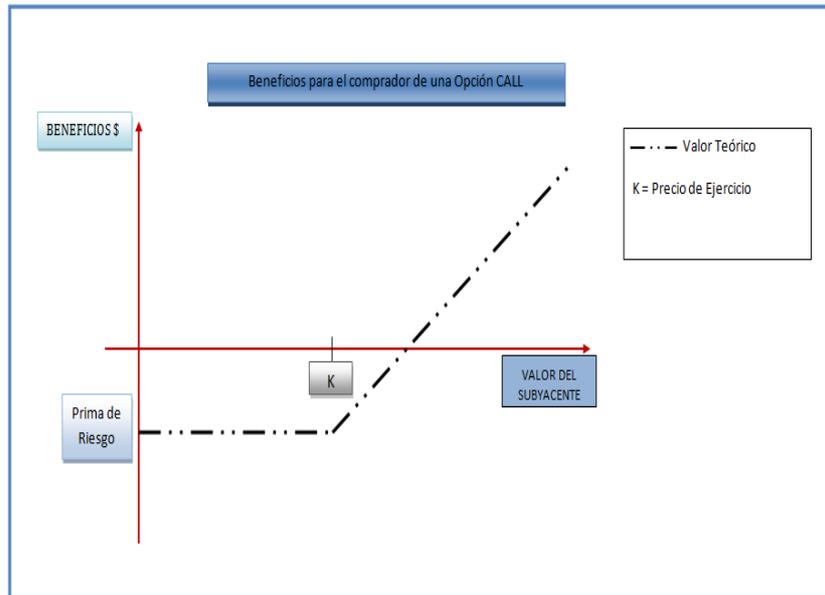


Figura 1.5: Beneficios para el comprador de un CALL

Por último se aclara a qué se refieren los conceptos que fueron mencionados anteriormente sobre posiciones cortas y largas sobre activos.

1. **Posición corta** En general una posición corta en cualquier activo u opción o algún otro derivado refiere al hecho de vender o despojarse de algo. Es común encontrarse en la jerga de los mercados financieros expresiones como "se adoptó una posición corta sobre el activo" que se puede interpretar como negociar o vender acciones que no se tengan a la fecha de firmarse un contrato.
2. **Posición Larga** El caso contrario es el de la posición larga que podemos entender como adquirir algo o negociar algo que pudiera tenerse en el momento de efectuar el contrato

1.4. Arbitraje

Este es uno de los mas importantes supuestos que deben considerarse en la teoría de valuación de opciones. El arbitraje representa para los inversores de los mercados financieros la oportunidad de aprovechar una descompensación o desequilibrio en los precios de los instrumentos financieros para conseguir algún beneficio sin que implique ninguna de los tipos de riesgo que mencionamos anteriormente y probablemente tampoco tenga que invertir capital para obtener alguna ganancia.

El enfoque principal que se encarga de eliminar las posibilidades de arbitraje es el enfoque del *Precio Justo de Mercado* en éste se considera que el precio de cualquier instrumento financiero siempre busca alcanzar el equilibrio en base a la teoría básica de la oferta y la demanda que dice básicamente que el precio de un bien representa la razón de equilibrio entre la cantidad ofertada y el nivel de demanda del producto luego entonces con base en estas dos teorías vamos a explicar cómo desaparecen las oportunidades de arbitraje en los mercado eficientes.

Sea V el precio de la opción S el precio del subyacente y digamos que a denotará el número de acciones compradas o vendidas (en lo sucesivo a^+ denotará compra de acciones y a^- denotará la venta de acciones). Vamos a suponer que creamos una cartera cuya inversión será distribuida de la siguiente manera:

$$\Pi_0 = aS - V$$

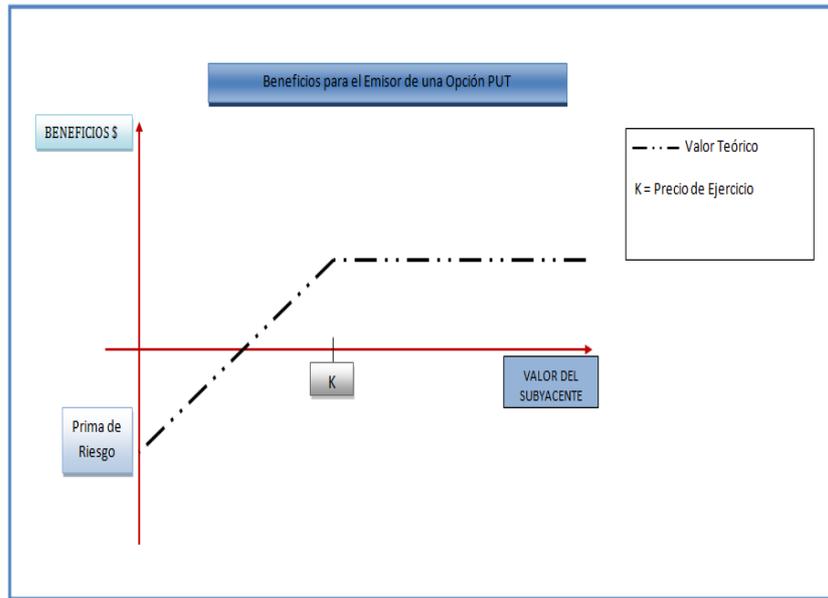


Figura 1.6: Beneficios para el emisor de un PUT

Donde Π_0 representa el valor de nuestra cartera en este momento, pasado el tiempo la cartera se valorará en función de los movimientos del activo subyacente que para simplificar este capítulo consideraremos sólo dos casos:

1. Si la tendencia del activo subyacente fue a la alza:

$$\Pi_U = aS_U - V_U \tag{1.7}$$

2. Si la tendencia del activo subyacente fue a la baja:

$$\Pi_D = aS_D - V_D \tag{1.8}$$

Supongamos ahora que deseamos construir nuestra cartera de modo tal que transcurrido el tiempo el valor de la misma sea independiente de lo que haya ocurrido con el activo subyacente luego entonces lo que haríamos es igualar las ecuaciones (1.9) y (1.10) con lo que obtendremos:

$$aS_U - V_U = aS_D - V_D \tag{1.9}$$

Despejando a de la igualdad anterior se tiene que:

$$a = \frac{V_U - V_D}{S_U - S_D} \tag{1.10}$$

El valor de a es conocido como la *Delta* " Δ " de la cartera en términos de riesgo pero para este caso representa el número de acciones que se poseen por cada opción que se vende una vez conocido dicho valor reorganizamos nuestras ecuaciones en términos financieros como sigue:

$$e^{rt}(V_0 - aS_0) = (V_U - aS_U) \tag{1.11}$$

La expresión anterior es el valor futuro de la cartera inicial y dado que encontramos a de modo tal que las variaciones del mercado no influyan en el valor final de la cartera la igualdad anterior resulta ser válida tanto

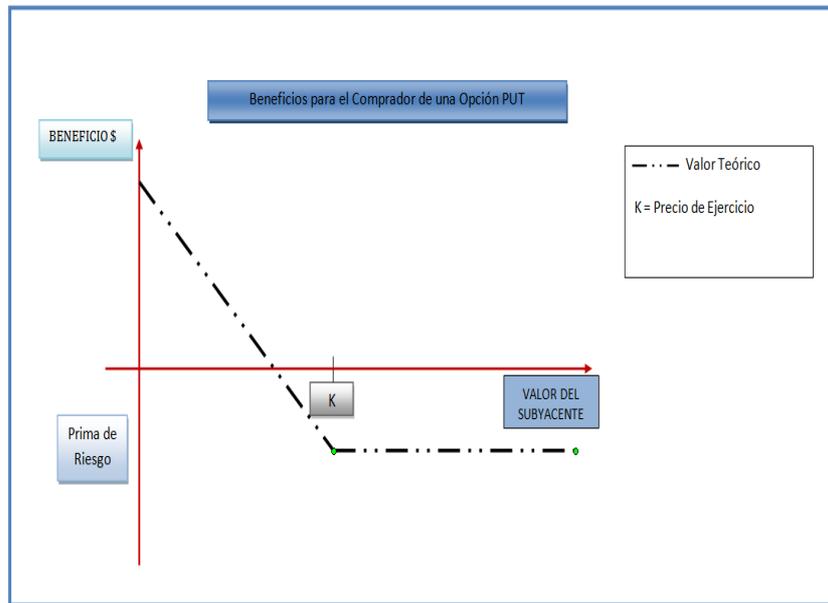


Figura 1.7: Beneficios para el comprador de un PUT

para movimientos a la alza como para movimientos a la baja del activo subyacente. Luego entonces es sencillo conocer el valor del derivado al tiempo $t = 0$ esto es V_0

$$V_0 = aS_0 + (V_U - aS_U)e^{-rt} \quad (1.12)$$

Esta es una igualdad cuya obtención es sencilla pero muy representativa y aunque en los mercados actuales es muy improbable que el valor del derivado coincida exactamente con el valor calculado una diferencia muy pronunciada respecto a este valor pondría en evidencia oportunidades de arbitraje como se explica a continuación:

1. **Si V es muy alto:** Si V excede demasiado el valor calculado podría prestarse a la oportunidad de vender una gran cantidad de opciones puesto que de adquirir el número apropiado de acciones determinado por la delta que se calculó aseguraríamos nuestra posición ya que el costo del valor futuro de la cartera estaría por debajo de lo que se obtiene de V ya que la delta fue calculada de modo que la cartera fuese indiferente a las variaciones del mercado esto es mantendremos asegurada la diferencia entre ambos valores.
2. **Si V es muy bajo:** De manera similar si V está demasiado por debajo del valor calculado existiría la oportunidad de comprar una gran cantidad de opciones pues de igual modo al vender el número apropiado de acciones el valor futuro que genera esta posición excedería el costo que genera la cartera inicial puesto que también fue construida para producir ingresos independientes del valor del subyacente.

De estos enunciados podemos concluir que si el precio de la opción está sesgado respecto al valor apropiado el mismo mercado se encargara de corregir este defecto puesto que una gran demanda de acciones provocará una tendencia a la alza en el precio de las mismas provocando así que el valor de la cartera inicial aumente eliminando esto las posibilidades de arbitraje.

1.5. Contratos Adelantados (*Forward*)

Un complemento importante que permite entender mejor las teorías de valuación de opciones consiste en un instrumento financiero que permite asegurar a los participantes de los mercados que en una fecha futura denominada *fecha de expiración* ambas partes tienen la estricta obligación de efectuar la compra o venta de un activo subyacente a un precio pactado con anterioridad denominado *precio de ejercicio*. A diferencia de las opciones este contrato tiene carácter de cumplimiento obligatorio por parte de los inversionistas sin embargo dicho contrato puede ser recomercializado en el mercado secundario luego entonces el valor intrínseco del contrato se calcula en base a la probabilidad de obtener utilidades. El vendedor obtiene beneficios cuando el precio del subyacente va a la baja puesto que la función de pago se representa por:

$$K - S_T \quad (1.13)$$

Para el comprador los beneficios se presentan cuando el precio del subyacente se encuentra por encima del precio de ejercicio.

La siguiente es una representación gráfica que permite ilustrar las utilidades que perciben los participantes en función del precio del subyacente.

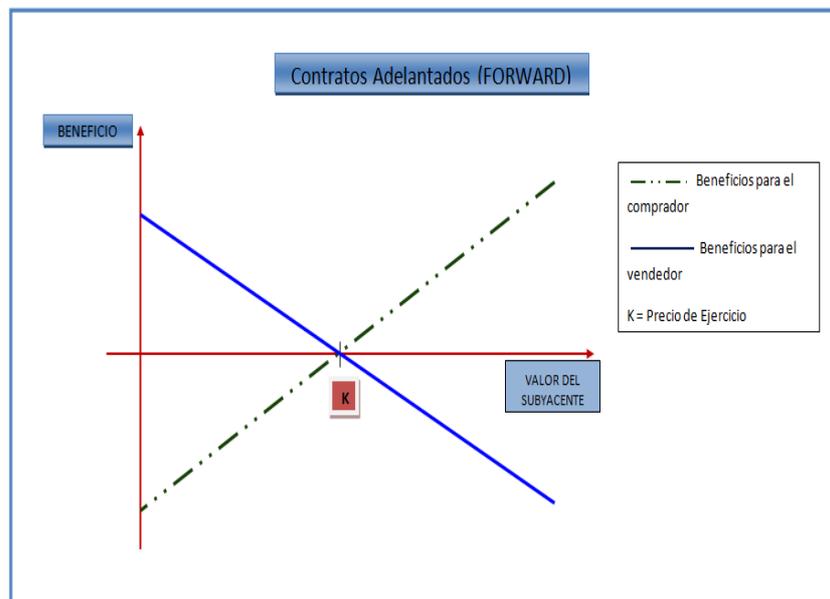


Figura 1.8: Contratos Adelantados

Del mismo modo que en los casos anteriores surge la pregunta de ¿Cuál es el precio que se debe de acordar en dicho contrato? un análisis sencillo nos permite realizar un esbozo del precio apropiado.

Suponga que el día de hoy se firma un contrato adelantado en el que me comprometo a entregar una acción en una fecha pactada esto es al tiempo $t = T$ que quede asentada en dicho contrato, luego entonces lo que hago para cubrir mi posición ante variaciones del precio de la acción es solicitar un préstamo por la cantidad adecuada para comprar de inmediato la acción y mantenerla hasta el día que sea requerida en ese momento es preciso entregar la acción y pagar el préstamo mas los intereses generados, de ahí se concluye que el precio del *Forward* debe aproximarse al valor dado por:

$$F_t = S_t e^{r(T-t)} \quad (1.14)$$

De igual modo es importante mencionar que cualquier diferencia pronunciada sobre el precio se prestaría a oportunidades de arbitraje siendo el mercado el que de inmediato corregiría esta situación hasta alcanzar el equilibrio.

1.5.1. Paridad *Put-Call*

Existe una relación bastante útil que se produce en base a las teorías de ausencia de arbitraje en los mercados eficientes², se trata de la relación de paridad de los precios de un *Call* y un *Put* para esto consideraremos dos portafolios: Por un lado el portafolio A que consiste en adoptar una posición larga sobre un *forward* esto es comprometerme a entregar una acción a un tiempo t a un precio de ejercicio K ; por otro lado el portafolio B que consiste en una posición larga sobre una opción *Call* europea esto es adquirir una opción *Call* con precio de ejercicio K y fecha de expiración T mas una posición corta sobre un *Put* europea con los mismos parámetros. A la fecha de vencimiento el valor del portafolio B está dado por la expresión

$$(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K \quad (1.15)$$

Si se es cuidadoso se observa que este valor coincide con el valor del portafolio A al momento del vencimiento y de aquí se tiene la siguiente expresión que resume la idea del párrafo anterior con el valor presente del flujo de efectivo:

$$C_E(S_t, T) - P_E(S_t, T) = S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad (1.16)$$

²Esta información se consulto en [4]

Capítulo 2

Mercados de Opciones

2.1. Introducción a los mercados de opciones

Desde tiempos remotos el riesgo ha sido parte de las actividades cotidianas de la humanidad y está implícito en mayor o menor medida en cada una de las decisiones que tomamos. No obstante siempre se está dispuesto ha aceptarlo en el entendido de que lo que se está arriesgando tiene un valor menor que el beneficio que se obtendrá de conseguirse el objetivo. Por otra parte y como parte de la naturaleza humana son muy variadas las situaciones bajo las cuales una persona decide correr un riesgo o mostrarse adverso a la posibilidad de pérdidas es esta diversidad de personalidades la que enriquece y le da vida a los mercados financieros.

Una buena estrategia para entender qué es un mercado de opciones consiste en describir el significado de las palabras mercado y opciones para después entrelazarlos y construir una idea de lo que son los mercados de opciones. Enfocándonos estrictamente en el sentido financiero los mercados son el conjunto de espacios y mecanismos mediante los cuales se intercambian valores. Luego una opción es un instrumento financiero que permite protegerse contra situaciones adversas en el valor de un activo subyacente esto es permite transferir el riesgo de pérdidas a una entidad dispuesta a arriesgarse para obtener cierto beneficio en este caso económico. Así pues un mercado de opciones es aquel espacio¹ con ciertas reglas y mecanismos mediante los cuales se transfieren riesgos por valores.

Aunque la historia de estos mercados se remonta alrededor del siglo XVII en Holanda donde se comenzaban a comercializar opciones que tenían como activos subyacentes bulbos de tulipanes fue para mediados del siglo XVIII que se pudo establecer un mercado un poco más formal en Inglaterra y Estados Unidos que en sí mismo no tuvo credibilidad a falta de marcos reguladores que permitieran garantizar certeza y legalidad de los procesos así como el problema al que se enfrentaban los accionistas debido al nivel de especulación que propiciaban las transacciones con opciones, esto provocó el cierre de estos mercados que se consideraron entonces como fraudulentos e ilegales.

A principios del siglo XX se funda la Asociación de Agentes y *Dealers* de opciones de compra y venta dada la insistente demanda de instrumentos de cobertura contra riesgo. Sin embargo este mercado operaba como un mercado *OTC "over the counter"* o fuera del mostrador esto es de manera ajena al mercado bursátil y carente de un marco regulador lo que propiciaba falta de confianza en el mismo ya que no existían mecanismos para garantizar las liquidaciones y proteger a los inversionistas contar fraudes. fue hasta el 26 de abril de 1973 el *Chicago Board of Trade* inauguro un nuevo mercado denominado *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) con el único fin de negociar las opciones sobre activos que cotizaban en bolsa. Dicho mercado consiguió un alto grado de confianza y popularidad por la variedad de opciones que ahí se comercializaban sobre una gran cantidad de activos muy variados como metales o piedras preciosas así como índices bursátiles e instrumentos de deuda. La creciente consolidación de otros mercados como los de futuros o los de *warrants* motivaron la comercialización opciones en otros como en el *American Stock Exchange* (AMEX) y el *Philadelphia Stock Exchange* (PHLX) en 1975 o en el *Pacific Stock Exchange* (PSE) en 1976 para Marzo de 1993 comenzó la comercialización de opciones

¹la palabra espacio no se refiere estrictamente a la existencia de un espacio físico puede tratarse de uno virtual o de otra clase

cuyo activo subyacente era el índice *Standar & Poor's* 100 que había aparecido en la década anterior. Es por esto que se considera un mercado relativamente nuevo el de las opciones y con mucho terreno por explorar.

2.2. Funciones de los mercados de Opciones

2.2.1. Los Subyacentes

Como se mencionó anteriormente el valor de las opciones se deriva, como lo indica su nombre del valor de un activo subyacente, así pues se consigue respaldar el valor de algunos activos como son:

- Acciones
- Indices Accionarios
- Instrumentos de deuda
- Divisas
- Mercancías y futuros financieros

2.2.2. Negociación

Una de las características más importantes de los mercados de opciones de todo el mundo es lo impersonales y anónimos que resultan ser.

En casi todos los mercados existen los denominados creadores de mercado que son los encargados de elaborar las cotizaciones del precio de compra así como los precios de venta que piensan ofertar con lo que se asegura que las transacciones de compra y venta se lleven a cabo en tiempo y forma.

Básicamente el mercado de opciones se compone de agentes de parque o socios liquidadores y agentes de piso. Los agentes de parque son entidades que tienen el derecho de acudir al parque del mercado y negociar con otros miembros del mercado los cuales adoptan diferentes posiciones cortas y largas en opciones de acuerdo a lo que le soliciten los agentes de piso. Los agentes de piso son personas que fungen como intermediarios entre los inversionistas y los socios liquidadores.

2.2.3. Esquema de Negociación en México

El siguiente esquema muestra de manera más precisa como funciona el mercado de opciones en México. Suponga que existe un inversionista que posee acciones sobre cierta empresa y desea cubrir su posición adquiriendo algunas opciones de venta. Entonces el procedimiento para hacerlo es el siguiente.

1. Contactar a un agente de piso autorizado por MexDer².
2. El operador o agente de piso solicitará cierta información por parte del inversor que le permita analizar su liquidez.
3. De considerarlo adecuado el operador creará una carpeta del análisis que elaboró sobre su cliente para enviarlo a un socio liquidador del MexDer con lo que se firma un convenio ente las partes.

Por otra parte el operador llevara a cabo las siguientes actividades junto con su cliente.

1. El operador explica a la empresa las condiciones a las que se sujeta así como los riesgos propios del mercado.
2. El operador puede asesorar al inversionista en la construcción de una estrategia de cobertura contra el riesgo.

²Mercado Mexicano de Derivados

3. El operador gira las instrucciones de compra o venta de opciones previa autorización de su cliente.
4. El socio liquidador mantendrá informado diariamente al operador de la situación de su cliente.

Todas estas operaciones se realizan por medios electrónicos que garantizan por completo que los vendedores y compradores realizan operaciones completamente anónimas utilizando el sistema electrónico de negociación registro y asignación "SENTRA- Derivados" y para la operación se utiliza el "S/MART" este sistema es el encargado de realizar a cabo las operaciones de compra-venta asignando aleatoriamente un comprador de una opción con un vendedor de una opción de las mismas características.

2.2.4. Garantías

La consolidación de los mercados de Opciones se debe a las garantías de pago que éste ofrezca así como la certeza de que éstos se realizarán en tiempo y forma y es por esto que en todos los mercados mundiales se exige a los inversionistas tanto compradores como vendedores de opciones realizar depósitos en cuentas de garantías que serán utilizadas para las liquidaciones que correspondan llegada la fecha de vencimiento del contrato. Los compradores de opciones tienen que garantizar su pago de las pérdidas que enfrentan en caso de no ejercer su opción, éste equivale con una prima de riesgo por cada contrato por otra parte el vendedor de una opción debe depositar en su cuenta de garantía una cantidad de entre el 15 % al 20 %, esta cantidad se calcula diariamente y está en función del valor del activo subyacente así como de qué tan cerca del precio de ejercicio se encuentre el precio del activo suyacente. Estas garantías son depositadas en cuentas individuales a las que los inversionistas no tienen acceso durante el tiempo de vida de la opción esto implica que los recursos invertidos no generan dividendos para los inversores por lo que una de las formas para cubrir los depósitos de garantía es mediante bonos del tesoro o algún otro título de renta fija esto permite que el inversor cubra su posición con bajos costos de oportunidad. Como ya se mencionó estas operaciones de pago no se realizan directamente entre los inversionistas si no que se realizan ante una cámara de liquidación que en el caso de México se trata de ASIGNA compensación y liquidación la cual funge como intermediario y llegada la fecha de vencimiento del contrato es la encargada de realizar los cobros o los depósitos en las respectivas cuentas de garantía de los inversionistas.

2.2.5. Emisión de Opciones

Una ventaja significativa de la emisión de opciones es el grado de apalancamiento que se puede obtener para invertir en las acciones de alguna compañía esto es porque en los mercados de opciones se permite la emisión de opciones sobre activos que pudieran o no tenerse al momento de la emisión de las opciones.

- Emisión de opciones en descubierto (*Naked options*). Cuando un inversor decide emitir opciones sin contar con la posesión del activo subyacente se le denomina a esto emisión de opciones en descubierto. Obviamente por ser ésta una estrategia más riesgosa implica que los depósitos en la cuenta de garantía son más altos y se calculan de la siguiente manera:
 1. Un 100 % del ingreso obtenido por la venta de las opciones mas un 20 % del precio del subyacente menos la cantidad por la que la opción estuviese fuera del dinero.
 2. Un 100 % del ingreso obtenido por la venta de las opciones mas un 10 % del precio del subyacente

El depósito de garantía está dado por aquél que resulte el mayor de los dos anteriores

- Emisión de opciones de compra cubiertas. En este caso el emisor de las opciones es propietario de los activos subyacentes al momento de emitir opciones por lo tanto por ser ésta una estrategia menos riesgosa permite que los depósitos en la cuenta de garantía sean mínimos o prácticamente nulos ya que si las opciones emitidas son opciones fuera del dinero es poco probable que sean ejercidas por su propietario y en caso de que así sea lo peor que puede pasarle al emisor es tener que vender sus acciones por debajo de su valor de mercado. Por lo tanto el dinero que se obtiene por la venta de las opciones es prácticamente suficiente para cumplir su cuenta de garantía.

2.2.6. Vencimientos

Las fechas de vencimiento de los contratos de opciones se centran en tres ciclos y están en función de lo que especifique el contrato sin embargo los contratos son negociados todos los días en los mercados secundarios lo que permite a los inversionistas adoptar la estrategia que consideren más adecuada a sus predicciones sobre el mercado. Dichos ciclos están distribuidos de la siguiente manera:

1. Enero/Abril/Julio/Octubre
2. Febrero/Mayo/Agosto/Noviembre
3. Marzo/Junio/Septiembre/Diciembre

Como podemos ver los contratos de opciones tienen un vencimiento mínimo de tres meses y hasta por un año, sin embargo como ya se mencionó, este contrato puede ser renegociado todos los días en el mercado secundario. Llegada la fecha de vencimiento ASIGNA ejerce automáticamente las opciones que estén dentro de dinero salvo que se le indique lo contrario por parte de los inversionistas. Las opciones que implique compra venta de acciones implican operaciones de enajenación de valores que son ejecutadas directamente en la bolsa mexicana de valores el día hábil siguiente a la fecha de vencimiento del contrato.

2.2.7. Liquidación

Una de las funciones de ASIGNA es fungir como un elemento imparcial en las operaciones de compra venta llevadas a cabo en el MexDer por lo que se encarga de liquidar llegada la fecha de cada contrato los saldos a cargo o a favor de los socios de la cámara. Los pagos son efectuados mediante el sistema centralizado de pago del banco de México (SPEUA) los movimientos de liquidación que pueden ocurrir son básicamente los siguientes:

1. Liquidación de las primas de riesgo a favor de los vendedores de opciones.
2. El ejercicio anticipado de opciones que originen la enajenación de acciones en bolsa (compra venta de acciones) se ejecutará al día hábil siguiente de la notificación del ejercicio.
3. El ejercicio de la opción al vencimiento que originen la enajenación de acciones en bolsa (compra venta de acciones) se ejecutará al día hábil siguiente a la fecha que indica el contrato.

2.2.8. Marco Regulatorio

Como ya se había mencionado en los párrafos anteriores los mercados de opciones adquieren confianza entre los inversores al contar con un marco regulatorio estricto que brinde certeza y legalidad a las transacciones que en él se realizan. En el caso de México los mercados de opciones han demostrado ser mercado autosuficientes que se rigen en la medida de lo posible por sus propios reglamentos de operación internos sin embargo existe un organismo federal encargado de supervisar las actividades de los mercados de opciones se trata de la comisión nacional bancaria y de valores (CNBV) quien es la encargada de vigilar las actividades de ASIGNA compensación y liquidación así como de la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP) y del Banco de México.

2.3. MexDer y el mercado de opciones en México

En México el mercado de opciones opera a través del MexDer que es el mercado mexicano de derivados cuya fecha de inicio de operaciones fue el 22 de marzo de 2004 y fue inaugurado por el gobernador del Banco de México Guillermo Ortíz Martínez después de que un conjunto de operadores, el Mercado Español de Futuros y Opciones Financieras (MEFF) así como un conjunto de inversionistas privados instalaran la cámara de compensación y liquidación ASIGNA. En México las operaciones del mercado de opciones se manejan mediante MexDer que es una subdivisión de la Bolsa Mexicana de Valores bajo el control de ASIGNA una institución calificada entre las de mejor prestigio crediticio otorgado por las calificadoras más destacadas *Fitch Rating* con *AAA Standar & Poor's* con *mxAAA* y *Moody's* que le otorga *AAA*. Es por esto que el mercado de opciones crece aceleradamente en México.³

³Para mayor información consulte www.mexder.com.mx

Capítulo 3

Métodos analíticos de valuación

3.1. Valuación de Activos Financieros

Uno de los supuestos más conocidos en la teoría de los mercados eficientes es que el precio de las acciones que se comercializa tiene un comportamiento meramente aleatorio, esto es, los inversionistas del mercado aun conociendo toda la información del historial y la que el emisor del activo financiero pudiera brindarle sobre la misma no tiene alguna manera para poder determinar el precio exacto del activo en un futuro próximo. Este supuesto es de vital importancia para el desarrollo de los mercados financieros pues de no cumplirse los inversionistas podrían generar cantidades extraordinarias de utilidades fracturando así el sistema hasta volverlo inútil y obsoleto. Este concepto tiene un parecido con un concepto matemático que al aplicarse a los mercados financieros proporciona una herramienta para tratar de modelar el comportamiento del precio de las acciones. Se trata de los procesos Markovianos y el movimiento Browniano. Un modelo adoptado comúnmente debido a su similitud con el comportamiento real de un activo S al tiempo t está dado por la ecuación¹:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB \quad (3.1)$$

Donde μ representa el rendimiento que ofrece el activo y σ la volatilidad del mismo. En el siguiente apartado trataremos de visualizar la construcción de este modelo para posteriormente utilizarlo en el modelo de *Black-Scholes*. Una de las bases más importantes para la construcción del modelo de *Black-Scholes* es considerar tres supuestos importantes: Suponga que el rendimiento proporcionado por una acción sobre un intervalo de tiempo t se apegue a la expresión:

$$\frac{S_t - S_0}{S_0}$$

suponiendo además:

1. Los rendimientos son variables aleatorias idénticamente distribuidas
2. Los rendimientos son variables aleatorias independientes
3. La media y la varianza coinciden con $(\mu t, \sigma^2 t)$ respectivamente

Estas tres suposiciones coinciden con la idea mencionada anteriormente sobre las características de los mercados eficientes.

Para alcanzar a visualizar el alcance de estos modelos es conveniente partir de lo básico así que supongamos que $S(T)$ es el precio de una acción al tiempo T así que si se emplea el hecho de que μ representa la tasa de rendimiento esperado por periodo de tiempo Δt para nuestra acción podemos esperar que

$$S_1 = e^{\mu \Delta t} S_0 \quad (3.2)$$

¹Esta información se consultó en [?]

o más en general que:

$$S_{k+1} = e^{\mu\Delta t} S_k \quad (3.3)$$

Observando cuidadosamente nos damos cuenta que S_k es el producto de los k factores anteriores de rendimiento $e^{\mu\Delta t}$ lo que nos permite concluir que:

$$S_k = e^{\mu k\Delta t} S_0 \quad (3.4)$$

Ahora hagamos que $T = k\Delta t$ con lo que obtendríamos:

$$S(T) = e^{\mu T} S_0 \quad (3.5)$$

que coincide con la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = \mu S$$

Que resulta ser la abstracción matemática del hecho de que la razón de cambio en el valor del activo subyacente cuando transcurre el tiempo es equivalente al valor inicial del subyacente multiplicado por la tasa de crecimiento que se espera tenga.

Esta ecuación diferencial es la misma que se tiene en (3.1) cuando se hace que $\sigma = 0$, suposición que elimina el efecto de la volatilidad en el precio del activo. Sin embargo la solución determinista que construimos no coincide con la realidad, luego entonces resultan imprescindibles términos aleatorios que den apego a la realidad a este modelo. Para lograr esto sea \mathbf{Z} una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 esto es $Z \rightarrow N(0, 1)$ cuyas características quedaron establecidas en los capítulos anteriores.

Procederemos entonces a agregar términos aleatorios que nos ayuden a modelar la parte no determinista del precio del subyacente por lo que tendríamos que:

$$S_1 = e^{\mu\Delta t} e^{cZ_1} S_0 \quad (3.6)$$

Donde Z_1 representa el valor de una normal y c es una constante y como se hizo anteriormente tras repetir durante \mathbf{k} unidades de tiempo podemos establecer que:

$$S_k = e^{\mu k\Delta t} e^{cZ_k} S_{k-1} \quad (3.7)$$

Suponemos que las variables aleatorias Z_K son independientes entre si por lo que podemos escribir:

$$S_k = e^{\mu k\Delta t} e^{c(Z_1+Z_2+\dots+Z_k)} S_0 \quad (3.8)$$

Aunque podemos observar que se ha construido un modelo mucho más elaborado y preciso para explicar los movimientos del precio de subyacente tiene un defecto bastante importante que trataremos de corregir. $e^{\mu\Delta t}$ representa la parte de crecimiento determinístico por lo que vamos a eliminar la tendencia de crecimiento por parte del termino estocástico, esto es normalizar la parte estocástica para corregir la tendencia que brindan los términos aleatorios. Para esto considere la siguiente propiedad:

$$E[e^{cZ}] = e^{c^2/2}$$

La igualdad anterior se deduce del siguiente desarrollo:

$$E[e^{cZ}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{cZ} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} \quad (3.9)$$

Al reordenar los términos, según las propiedades operacionales de la función exponencial, y aplicando la técnica de completar cuadrados podemos visualizar que la expresión anterior es equivalente con :

$$E[e^{cZ}] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(Z^2 - 2cZ + c^2)} e^{c^2/2}}_1 \quad (3.10)$$

Puede entonces visualizarse en la expresión anterior que la parte entre llaves corresponde a la función de densidad de una variable aleatoria con media c por lo que dicha expresión debe ser igual con la unidad concluyendo entonces la veracidad de nuestra hipótesis $E[e^{cZ}] = e^{c^2/2}$.

El siguiente paso consiste en la normalización, esto es aplicar algunas operaciones algebraicas para concluir que:

$$E[e^{cZ - c^2/2}] = 1$$

Dicha identidad será de gran utilidad para reforzar el modelo que se está construyendo. Al aplicar todos los conceptos que se han desarrollado se tiene que:

$$S_1 = e^{\mu\Delta t} e^{cZ - c^2/2} S_0 \quad (3.11)$$

Generalizando la expresión anterior para k períodos concluimos que:

$$S_k = S_0 e^{\mu k \Delta t} e^{c(Z_1 + \dots + Z_k)} e^{-kc^2/2} \quad (3.12)$$

Ahora se necesita escribir esta expresión con una notación más robusta lo que se logra tras la observación de que la expresión anterior incluye k variables aleatorias normales con media cero y varianza uno por lo que definimos:

$$W_k = Z_1 + \dots + Z_k$$

donde W_k es un proceso de Wiener que cumple con las siguientes propiedades:

- $W(0)=0$;
- $W(t)-W(s)$ está normalmente distribuida con media cero y varianza $\sigma^2(t-s)$ para $s \leq t$;
- $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ son independientes para $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$.

Estas condiciones permiten establecer un modelo eficiente para el comportamiento de un activo dado por la ecuación:

$$S_t = S_0 e^{\mu k \Delta t} e^{cW_k} e^{-kc^2/2} \quad (3.13)$$

Donde para este caso $e^{-kc^2/2}$, así como, c representan factores de corrección que nos permitirán ajustar el modelo al comportamiento específico del activo que se esté manejando.

Por otra parte el factor e^{cW_k} representa el comportamiento estocástico del activo por lo que en la medida de lo posible debemos ajustarla con el parámetro de la volatilidad ($\sigma^2 T$) esto es:

$$Var(cW_k) = c^2 Var(W_k) = c^2(k-0) = \sigma^2 T$$

Terminamos por concluir un modelo eficiente para la representación del valor de un activo sobre el tiempo dados sus antecedentes de volatilidad y tendencia de crecimiento:

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)T} \quad (3.14)$$

3.2. Formula de *Black-Scholes* para la valuación de opciones

Para verificar cómo se construye la fórmula de *Black-Scholes* vamos a utilizar una de las herramientas de las finanzas para la valuación de activos. Suponga entonces que tenemos una cartera compuesta de una cantidad de acciones de alguna empresa y por otra parte una cantidad de dinero esto es:

$$\Pi = aS_0 + b \quad (3.15)$$

Luego de transcurrido un tiempo t el valor de la cartera original queda dado por:

$$\Pi_t = aS_t + be^{rt} \quad (3.16)$$

Calculamos entonces el valor presente de la ecuación (3.16) como sigue:

$$e^{-rt}\Pi_t = ae^{-rt}S_t + b \quad (3.17)$$

En esta ecuacion sustituimos el valor de \mathbf{b} tomado de (3.15) con lo que tenemos:

$$e^{-rt}\Pi_t = ae^{-rt}S_t + \Pi_0 - aS_0 \quad (3.18)$$

reagrupando términos obtenemos la siguiente expresión:

$$e^{-rt}\Pi_t - \Pi_0 = a(e^{-rt}S_t - S_0) \quad (3.19)$$

Supongamos que S cumple con la siguiente proposición $E[e^{-rt}S_t - S_0] = 0$, lo que implica necesariamente que $E[e^{-rt}\Pi_t - \Pi_0] = 0$; luego entonces se puede decir que:

$$\Pi_0 = e^{-rt}E[\Pi_t] \quad (3.20)$$

La construcción del valor esperado de la cartera nos permite visualizar una aproximación del valor de la misma que nos servirá como referendo para comparar los datos que se obtienen con otros métodos de valuación o en su caso si son erróneos y exagerados.

Una de las técnicas que son un poco mas elaboradas para la valuación de opciones se desarrolla a continuación. Para esto consideremos una opción de compra Europea cuya utilidad está dada por la expresión $(S_T - K)^+$ Donde S_T representa el valor del subyacente a la fecha de expiración T y K representa el precio de ejercicio fijado en el contrato de modo que el valor actual del derivado se estima mediante la ecuación:

$$V = e^{-rT}E[(S_T - K)^+] \quad (3.21)$$

Al sustituir en esta ecuación el precio estimado del subyacente dado por la ecuación que se construyó anteriormente.

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)T}$$

Donde W_t representa un proceso de Wiener con las propiedades ya mencionadas esto es media cero y varianza t por lo que podemos entonces sustituir:

$$W_t = \sqrt{t}Z \text{ donde } Z \text{ es la variable aleatoria normal Std.}$$

Luego entonces:

$$S_t = S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z + (\mu - \sigma^2/2)T} \quad (3.22)$$

Por lo que:

$$V = e^{-rT}E[(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z + (\mu - \sigma^2/2)T} - K)^+] \quad (3.23)$$

Entonces tenemos que:

$$V = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2 * \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (\mu - \sigma^2/2)T} - K)^+ e^{-x^2/2} dx \quad (3.24)$$

Que es el cálculo ordinario del valor esperado, nuestra tarea consiste ahora en calcular esta integral en el espacio donde

$$(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (\mu - \sigma^2/2)T} - K) > 0$$

Para hacer esto sea “ \mathbf{a} ” sustituida en la expresión anterior que al ser igualada con cero resulta ser:

$$(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}a + (\mu - \sigma^2/2)T} - K) = 0 \quad (3.25)$$

Despejando a de dicha ecuación:

$$a = \frac{\ln \frac{K}{S_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3.26)$$

Ahora ya se construyo “ a ” de tal modo que podemos entonces restringir la ecuación inicial de V como:

$$V = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2} * \pi} \int_a^\infty (S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (\mu - \sigma^2/2)T} - K) e^{-x^2/2} dx \quad (3.27)$$

Luego entonces procedemos a resolver esta integral separándola en dos partes.

En la primera parte tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2} * \pi} \int_a^\infty (-K) e^{-x^2/2} dx = -K(1 - N(a)) = -KN(-a) \quad (3.28)$$

mientras que en la segunda parte tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2} * \pi} \int_a^\infty S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (\mu - \sigma^2/2)T} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T} \int_a^\infty e^{\sigma\sqrt{T}x - x^2/2} dx \quad (3.29)$$

Para poder evaluar dicha integral tendremos que hacer uso de la siguiente herramienta:

$$x^2/2 - \sigma\sqrt{T}x = x^2/2 - \sigma\sqrt{T}x + \sigma^2 T/2 - \sigma^2 T/2 = ((x - \sigma\sqrt{T})^2 - \sigma^2 T)/2$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{\sigma\sqrt{T}x - x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-((x - \sigma\sqrt{T})^2 + \sigma^2 T)/2} dx$$

Basta ahora con realizar un cambio de variable hága $y = x - \sigma\sqrt{T}$ con lo que la integral se convierte en:

$$e^{\sigma^2 T/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a - \sigma\sqrt{T}}^\infty e^{-y^2/2} dy = e^{\sigma^2 T/2} (1 - N(a - \sigma\sqrt{T})) \quad (3.30)$$

Concluimos que la segunda parte de la integral esta dado por:

$$S_0 e^{\mu T} N(-(a - \sigma\sqrt{T}))$$

Por último sólo resta reunir las integrales que acabamos de evaluar con lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} V &= e^{-rT} E[(S_T - K)^+] \\ &= e^{-rT} [S_0 e^{\mu T} N(-(a - \sigma\sqrt{T})) - KN(-a)] \\ &= S_0 N(-(a - \sigma\sqrt{T})) - K e^{-\mu T} N(-a) \end{aligned}$$

Recordamos que “ a ” quedó construido de esta manera:

$$a = \frac{\ln \frac{K}{S_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Se tiene que:

$$-a = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

además:

$$-(a - \sigma\sqrt{T}) = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (\mu + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Por ello $d_2 = -a$ y $d_1 = -(a - \sigma\sqrt{T})$ Con lo que podemos expresar finalmente el valor del derivado como:

$$V = S_0 N(d_1) - e^{-rT} KN(d_2) \quad (3.31)$$

3.3. La Ecuación Diferencial Parcial de *Black-Scholes* (EDP-BS)

Hasta este momento se ha visto un enfoque analítico de la valuación de opciones europeas en base al empleo de técnicas matemáticas sencillas y una serie de conceptos financieros en los que se emplean herramientas matemáticas para abstraer los conceptos que se necesitan. Sin embargo la premisa fundamental de este texto es mostrar el uso de los métodos numéricos que nos permitan una panorámica del comportamiento de los derivados pero, sobre todo que nos permita comprender el modelado y la aplicación de herramientas numéricas. Esto es a título de que uno de los elementos de la matemática moderna es el modelado de los fenómenos que cambian en el tiempo y espacio por medio de las Ecuaciones Diferenciales que si bien es cierto es una de las mejores herramientas para construir modelos eficientes la mayoría de las ocasiones es difícil o resulta poco práctico tratar de utilizar las soluciones analíticas de las ecuaciones.

Las finanzas son un campo en desarrollo para la modelación donde expresar las soluciones en términos numéricos resulta más practico y fácil de entender.

Es importante que no se pierda de vista en el siguiente desarrollo el modelo que gobierna el precio de un subyacente que se estudió anteriormente:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

Para poder verificar la estructura de la ecuación diferencial parcial de *Black-Scholes* emplearemos algunas técnicas sencillas y algunos conceptos financieros que determinan dicha ecuación.

Supongamos que $\mathbf{V}(\mathbf{S}, \mathbf{t})$ representa el precio del derivado en función del precio del activo subyacente y del tiempo; supongamos además que se trata de una función suave esto es continua y derivable en cualquier punto del dominio entonces el primer paso consiste en expandir $\mathbf{V}(\mathbf{S}, \mathbf{t})$ mediante series de Taylor esto es :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Sin embargo en nuestro caso se trata de dos variables por lo que tenemos que hacer uso de:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} y^2 + O(h^3)$$

Reescribimos esta ecuación en forma diferencial:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + O(h^3)$$

Adoptaremos la notación que hemos venido utilizando por lo que reescribimos la ecuación de la siguiente manera.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} dS dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dt^2 + O(h^3) \quad (3.32)$$

Por otra parte sabemos que:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

Dado que la variable dB es una variable estocástica con la propiedad de que es continua sobre t pero no es diferenciable en ningún punto el cálculo ordinario no nos permite resolver este tipo de ecuaciones por lo que

se hace uso de las técnicas del cálculo estocástico a partir de este punto. Luego entonces podemos realizar la siguiente substitución:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dB) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\mu S dt + \sigma S dB)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} (\mu S dt + \sigma S dB) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dt^2 + O(h^3) \quad (3.33)$$

Dicha ecuación se restringirá a la precisión de orden *uno* en la variable t con lo que analizaremos entonces la naturaleza de los términos para determinar si se preservan o si son desechados.

1.

$$dS dt = (\mu S dt + \sigma S dB) dt = \mu S dt^2 + \sigma S dB dt$$

Dado que se ha supuesto durante todo este tiempo que $dB \cong Z\sqrt{dt}$ es claro que $dB dt \cong Z(dt)^{3/2}$ luego dado que están contenidos en $dS dt$ términos cuyo orden de precisión en t superan al establecido podemos desecharlos.

2. Por otra parte del termino $(dS)^2$ podemos ver que:

$$(dS)^2 = \mu^2 S^2 (dt)^2 + \mu \sigma S^2 dB dt + \sigma^2 S^2 (dB)^2$$

En este caso los dos primeros términos del lado derecho serán desechados en base a las consideraciones similares a las que realizamos anteriormente sin embargo tenemos en el último término que:

$$(dB)^2 \cong (Z\sqrt{dt})^2 \cong Z^2 dt$$

Una vez verificados dichos puntos procedemos a reordenar nuestra ecuación diferencial como:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dB) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \quad (3.34)$$

Al reagrupar los términos que corresponden a $dt dB$ respectivamente se obtiene:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB \quad (3.35)$$

Ahora usaremos una estrategia estadística que nos permitirá simplificar aun mas la ecuación anterior. Como Z es una V.A normal estándar entonces Z^2 es una variable aleatoria con distribución gama de media 1 por lo que

$$E[Z^2] = 1$$

Luego podemos sustituir esta identidad con lo que se obtiene:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB \quad (3.36)$$

3.4. Conceptos financieros en la ecuación de Black-Scholes

En los capítulos anteriores se presentaron los fundamentos financieros a los que se apelará en los pasos posteriores dado que se tiene una ecuación diferencial genérica aplicable a cualquier campo de estudio, desarrollaremos una cartera con lo que se expondrá como valorar el precio del derivado que deseamos estimar.

Consideremos que $\phi(t)$ representa el número de acciones que se poseen sobre un valor al tiempo t y que $\psi(t)$ es el número de bonos que se poseen al tiempo t de modo que:

$$V(S_t, t) = \phi S_t + \psi P_t \forall t \in (0, T) \quad (3.37)$$

Representa el valor neto de una cartera compuesta con ϕ unidades de acción de precio S al tiempo t y ψ unidades de bonos de precio P al tiempo t similarmente al caso discreto el caso continuo afirma que las variaciones

en el valor de las acciones y de los bonos se refleja directamente en el valor de la cartera; representamos esas variaciones como:

$$dV = \phi dS_t + \psi dP_t$$

Ahora puesto que sabemos que:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

y que:

$$dP = rP dt$$

haremos uso de dichas igualdades para concretar la siguiente ecuación:

$$dV = (\mu\phi S + r\psi P)dt + \sigma\phi S dB$$

Acto seguido concluimos la parte matemática al igualar la ecuación que acabamos de analizar respecto a la ecuación que construimos con anterioridad esto es:

$$(\mu\phi S + r\psi P)dt + \sigma\phi S dB = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB \quad (3.38)$$

Luego si se considera una cartera con disposición nula al riesgo se tiene necesariamente que el numero de acciones que se adquieren coincide con la delta de la cartera esto es:

$$\phi(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t)$$

este modo de construir cartera permite simplificar la ecuación (3.38) con lo que obtenemos:

$$r\psi P dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \quad (3.39)$$

Además por el modo en el que se propuso la construcción de la cartera, podemos verificar fácilmente de ahí mismo que:

$$\psi P = V - S \frac{\partial V}{\partial S}$$

Esta sencilla observación permite reducir más aún la Ecuación:

$$r(V - S \frac{\partial V}{\partial S})dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \quad (3.40)$$

al simplificar esta ecuación tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (3.41)$$

Dicha ecuación es conocida como la **Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes** que resulta ser bastante conocida en los medios relacionados a las finanzas pero al hacer uso de herramientas matemáticas se podrá visualizar mediante el método de diferencias finitas el comportamiento de la ecuación. Cabe mencionar que la solución analítica, de la ecuación que se acaba de construir coincide con la fórmula para valuación de derivados que se estudio anteriormente; sin embargo el motivo de esta tesis es mostrar una alternativa de solución que emplea otros principios y que sirva de herramienta comparativa o como alternativa para la toma de decisiones.

Antes de abordar el método de solución de la ecuación es indispensable familiarizarse con las herramientas que se van a emplear es por esto que en los capítulos subsecuentes se mostrara la teoría necesaria para la solución de la ecuación se mostrará cómo resolver la ecuación de difusión que es ampliamente conocida en problemas de física y que coincide con la ecuación que vamos a resolver.

3.5. Transformación a la Ecuación de Difusión

Pues bien una vez vista la forma de la ecuación con la que nos encontraremos se muestra el método de solución. Se simplificará la ecuación mediante algunas transformaciones que permitirán resolverla numéricamente. Consideramos la siguiente ecuación²:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.42)$$

Consideramos los siguientes cambios de variable:

$$S = Ke^x, t = T - \tau / (\frac{1}{2}\sigma^2) \quad (3.43)$$

y

$$V(S(x), t(\tau)) = Kv(x(s), \tau(t)) \quad (3.44)$$

La transformación nos dice que $V(S(x), t(\tau)) = Kv(x(s), \tau(t))$ pero por otra parte de las mismas transformaciones es evidente que si $S = Ke^x$ entonces $x = \ln(\frac{S}{K})$ y también que si $t = T - \tau / (\frac{1}{2}\sigma^2)$ entonces $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$ Luego se quiere calcular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \end{aligned}$$

De manera similar se puede verificar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial S} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{S}\right) \end{aligned}$$

Por último se analiza qué pasa para:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial v}{\partial S} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial S} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} + \frac{\partial x}{\partial S} \left(\frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &= -\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Una vez construidas las transformaciones necesarias procedemos a sustituirlas en la EDP original con lo que obtenemos:

²Aunque el modo en que se explica el uso de estas transformaciones es una aportación propia la idea original de las transformaciones fue consultada en [4]

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} - rv + rS \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{1}{S^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{S^2} \right) \right) = 0 \quad (3.45)$$

Al simplificar esta ecuación aplicando un poco de álgebra obtenemos la ecuación transformada:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) - \frac{2r}{\sigma^2} v \quad (3.46)$$

Sea:

$$k = \frac{2r}{\sigma^2}$$

bajo esta consideración podemos escribir nuestra ecuación como:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} (k - 1) - kv \quad (3.47)$$

Finalmente podemos eliminar los términos v y v_x realizando un nuevo cambio de variable :

$$v(x, \tau) = e^{-\gamma x - (\gamma^2 + k)\tau} u(x, \tau) \quad (3.48)$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{2}(k - 1)$$

Recordando que $V(S, T) = Kv(x, \tau)$ del cambio de variable que se propuso originalmente podemos reescribir a $u(x, \tau)$ como:

$$u(x, \tau) = e^{\gamma x + (\gamma^2 + k)\tau} V/K$$

Para hacer una expresión más sencilla sea β definido por:

$$\beta = \frac{1}{2}(k + 1)$$

Luego entonces se tiene la siguiente ecuación simplificada

$$u(x, \tau) = e^{\gamma x + \beta^2 \tau} V/K \quad (3.49)$$

Cabe señalar que una vez que se conozca la solución en términos de $u(x, \tau)$ es posible recuperar la solución en términos de $V(S, T)$ mediante la transformación inversa de la ecuación dada por:

$$V(S, t) = Ku(x, \tau) e^{-\gamma x - \beta^2 \tau} \quad (3.50)$$

Aunque los precios S del activo subyacente estén limitados por cero como frontera bajo la transformación $x = Ln(\frac{S}{K})$ está en el intervalo $-\infty < x < \infty$. Por otra parte bajo la transformación:

$$\tau = (T - t) \frac{1}{2} \sigma^2$$

y dado que T se definió como el tiempo para la expiración del derivado cuando se tenga $t = T$ que es la fecha de expiración coincidirá bajo la transformación con $\tau = 0$ y cuando $t = 0$ que es el tiempo presente se tiene que $\tau = \frac{T\sigma^2}{2}$.

Una vez que aplicamos el cambio de variable propuesto en (3.49) a (3.48) obtenemos una ecuación conocida como **La ecuación de Difusión**

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Se tiene entonces una ecuación para la que existen técnicas ya revisadas de solución sin embargo para poder garantizar la existencia y unicidad de dicha solución es indispensable contar con las condiciones de frontera y la condición inicial que delimita este problema:

Para hacer esto se requiere definir los conceptos financieros que permiten construir las condiciones:

3.5.1. Condiciones iniciales y de frontera para la Valuación de Opciones de Compra

1. Sabemos por las reglas de operación de las opciones que cumplido el tiempo de vida del derivado su valor está dado por el máximo entre cero y la diferencia del precio del subyacente al momento del vencimiento y el precio de ejercicio expresando esta relación como:

$$V(S_T, T) = (S_T - K)^+$$

2. Sabemos también basándonos en las teorías de valuación de opciones que si el valor del subyacente crece demasiado, es decir se encuentra en una región muy dentro del dinero el valor intrínseco de la opción se aproxima asintóticamente al valor del subyacente expresemos esta relación por:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} V(S_t, t) = S_t$$

3. Por último sabemos que si el valor del subyacente se ubica en una región fuera del dinero extrema el valor de la opción carecerá de valor el resto de su vida expresamos esta idea por:

$$Si S(t_0) = 0 \Rightarrow V(S, t) = 0 \forall t \geq t_0;$$

Es necesario aplicar las mismas transformaciones de la ecuación a las condiciones que acabamos de mencionar para garantizar su validez en el problema:

1. se tiene que:

$$V(S, T) = Ku(x, 0)e^{-\gamma x - \beta^2 \cdot 0}$$

Despejando $u(x, 0)$ de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{V(S, T)}{K} e^{\gamma x} \\ &= \frac{\max(S - K, 0)}{K} e^{\gamma x} \\ &= \max\left(\frac{S e^{\gamma x}}{K} - e^{\gamma x}, 0\right) \\ &= \max(e^{x+\gamma x} - e^{\gamma x}, 0) \\ &= \max(e^{(1+\gamma)x} - e^{\gamma x}, 0) \\ &= \max\left(e^{1+\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) \end{aligned}$$

Así, finalmente se concluye que:

$$u(x, 0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) \quad (3.51)$$

2. Tenemos que cuando:

$$S \rightarrow \infty \Rightarrow V(S, t) \rightarrow S$$

por lo que podemos deducir que:

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) &= \frac{V}{K} e^{\gamma x + \beta^2 \tau} \\
 &= \frac{S}{K} e^{\gamma x + \beta^2 \tau} \\
 &= e^{x(\gamma x + \beta^2 \tau)} \\
 &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau}
 \end{aligned}$$

concluimos entonces que:

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad (3.52)$$

y por último

3. Tenemos que cuando:

$$S \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow -\infty \text{ entonces } V(S, t) \rightarrow 0$$

Se concluye que:

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \quad (3.53)$$

3.5.2. Condiciones Iniciales y de Frontera para la Valuación de Opciones de Venta

1. Sabemos por las reglas de operación de las opciones de venta que cumplido el tiempo de vida del derivado su valor está dado por el máximo entre cero y la diferencia del precio de ejercicio al momento del vencimiento y el precio del subyacente expresando esta relación como:

$$V(S, T) = (K - S)^+$$

2. Sabemos también basándonos en las teorías de valuación de opciones de venta que si el valor del subyacente crece demasiado es decir se encuentra en una región muy dentro del dinero el valor intrínseco de la opción se aproxima asintóticamente a cero expresamos esta relación por:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} V(S_t, t) = 0$$

3. Por último sabemos que si el valor del subyacente se ubica en una región fuera del dinero extrema el valor de la opción tenderá a ser igual al precio de ejercicio:

$$\text{Si } S_t \rightarrow 0 \Rightarrow V(S, t) = K$$

Es necesario aplicar las mismas transformaciones de la ecuación a las condiciones que acabamos de mencionar para garantizar su validez en el problema:

1. se tiene que:

$$V(S, T) = Ku(x, 0)e^{-\gamma x - \beta^2 \cdot 0}$$

despejando $u(x, 0)$ de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= \frac{V(S, T)}{K} e^{\gamma x} \\
 &= \frac{\max(K - S, 0)}{K} e^{\gamma x} \\
 &= \max\left(\frac{Ke^{\gamma x} - Se^{\gamma x}}{K}, 0\right) \\
 &= \max(e^{\gamma x} - e^{x+\gamma x}, 0) \\
 &= \max(e^{\gamma x} - e^{(1+\gamma)x}, 0) \\
 &= \max(e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{1+\frac{1}{2}(k+1)}, 0)
 \end{aligned}$$

Así, finalmente concluimos que:

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x}, 0) \quad (3.54)$$

2. Tenemos que cuando:

$$S \rightarrow \infty \Rightarrow V(S, t) \rightarrow 0$$

por lo que podemos deducir que:

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) &= \frac{V}{K} e^{\gamma x + \beta^2 \tau} \\
 &= \frac{0}{K} e^{\gamma x + \beta^2 \tau} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

concluimos entonces que:

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad (3.55)$$

y por último

3. Tenemos que cuando:

$$S \rightarrow 0 \Rightarrow V(S, t) \rightarrow K$$

Se concluye que:

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \quad (3.56)$$

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales y el método de Diferencias finitas (MDF)

4.1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales

El objetivo de este capítulo es aplicar las técnicas numéricas de solución de ecuaciones diferenciales parciales en las cuales se utilizarán las herramientas computacionales que se conocen para identificar la solución.

Lo más conveniente en este punto es introducir la notación que se empleará a lo largo de estas secciones en la medida de lo posible se va a procurar emplear la notación que emplean la mayoría de los textos conocidos lo que permitirá que cuando se requiera consultar una bibliografía más avanzada no existan conflictos para relacionar los conceptos que representan las variables es por eso que procuramos emplear la notación tradicional emplearemos indistintamente los símbolos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = U_{xx} = U''$$

Para representar la derivada parcial de la función \mathbf{U} con respecto a la variable independiente \mathbf{x} . Similarmente emplearemos la notación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U_t = \dot{U}$$

Para representar la derivada parcial de la función \mathbf{U} con respecto a la variable independiente \mathbf{t} , que generalmente se emplea en problemas dinámicos para representar variaciones respecto al tiempo. Emplearemos la notación abreviada

1. E.D.P. ; para abreviar Ecuación diferencial parcial
2. M.D.F. ; para abreviar Método de diferencias finitas
3. M.E.F. ; para abreviar Método de elemento finito

En general una EDP de segundo orden es una ecuación de la forma:

$$\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{j=1}^d b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x), \quad (4.1)$$

Donde:

$x \in \mathbb{R}^d$

d = es el número de variables independientes y

U = La variable dependiente o función incógnita.

Las EDP poseen una gran variedad de aplicaciones en problemas trascendentes de la física (gravitación, electrostática, magnetismo, etc...) así como en otras áreas tales como en problemas de modelos financieros o en fenómenos biológicos. Es bastante común que sólo sean empleadas dos o tres variables dependientes en la construcción de modelos mediante E.D.P. de 2° orden pues los métodos de solución suelen aumentar su complejidad en función del número de variables independientes que sean empleadas por lo general una de las variables dependientes se relaciona con el tiempo y las restantes con la dimensión del espacio en el que se analicen los problemas. así pues una E.D.P. lineal de segundo orden con dos variables independientes es una ecuación de la forma:

$$AU_{xx} + BU_{xt} + CU_{tt} = f(x, t, U, U_x, U_t) \quad (4.2)$$

Donde A, B, C son constantes numéricas que representan algunos parámetros dependiendo del área en que se emplea. dicha ecuación es dividida en tres clases dependiendo del discriminante de la ecuación esto es:

- si $B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow$ Es una E.D.P. Elíptica
- si $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ Es una E.D.P. Parabólica
- si $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow$ Es una E.D.P. Hiperbólica

Algunos de los modelos más comúnmente empleados que involucran E.D.P. son los siguientes:

La ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 u = f(x) \text{ en } \Omega, \quad (4.3)$$

$$u = g(x) \text{ sobre } \Gamma \quad (4.4)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_d)$, ∇^2 representa al Laplaciano definido por $\nabla u = \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}$, y Ω es el dominio de la función u sobre \mathbb{R}^d con frontera Γ las funciones dadas por $f=f(x)$ y $g=g(x)$ son los datos del problema. Además de las anteriores podemos considerar también la condición de Neumann dada por

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \text{ sobre } \Gamma \quad (4.5)$$

Donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota la derivada en la dirección del vector normal n a Γ

Una tercer forma de las condiciones de frontera son las condiciones mixtas o de Robin;

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u = g(x); \text{ sobre } \Gamma. \quad (4.6)$$

O algunos problemas con dependencia en tiempo que son:

La ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla u = f(x, t), \quad (4.7)$$

La ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla u = f(x, t). \quad (4.8)$$

Consideraremos para todo tiempo t positivo y $\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$

Es importante que a fin de conocer una solución en particular y de acuerdo al teorema de unicidad sean proporcionadas las condiciones de frontera del problema pero además es indispensable contar con las condiciones iniciales relativas al problema esto implica que para ecuaciones de orden uno en la variable de tiempo (Ecuación de Calor) es indispensable conocer el valor de la variable dependiente en algún tiempo t_0 y para los problemas de orden dos en la variable de tiempo (Ecuación de Onda) es necesario conocer $\frac{\partial u(t_0)}{\partial t}$

Así este tipo de ecuaciones y sus generalizaciones nos permitirán visualizar aplicaciones en la conducción de calor en sólidos, en transporte de masas por difusión en la transmisión telegráfica en los cables, en las teorías de ondas electromagnéticas, en procesos estocásticos y biológicos así como en los problemas de vibración en sólidos, las ondas sonoras dentro de un tubo o la transmisión de la electricidad en cable largo y de baja resistencia.

En las aplicaciones las ecuaciones utilizadas en los modelos contienen parámetros físicos. en particular en el problema de conducción de calor la temperatura en algún punto de un sólido homogéneo extendido sobre Ω con conductividad térmica κ , densidad, ρ , capacidad calorífica específica c y con una fuente de calor $f(x, t)$ satisface:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla u) + f(x, t) \text{ sobre } \Omega \quad (4.9)$$

Si ρ, c, κ son constantes esta ecuación puede ser escrita de la forma de (4.6) después de la correspondiente transformación pero si estas dependen de x entonces tenemos una EDP del caso más general. Una característica de la modelación matemática es que una vez que el modelo es establecido y en nuestro caso como un modelo de condiciones iniciales y/o de frontera se tiene entonces que iniciar con un análisis puramente matemático y que es independiente al área de aplicación que el modelo describe luego entonces el resultado obtenido es validado por la experimentación sobre el mismo. Podemos decir de aquí entonces que mucha de la terminología de la física y el resto de los campos de aplicación son casos meramente particulares de los anteriores modelos.

Una vez que se ha construido el modelo, lo más importante es poderlo resolver y aunque existen diversas técnicas analíticas para obtener la solución como la separación de variables el objetivo de este texto es el empleo de técnicas numéricas esto es debido a que cuando se construye un modelo la solución analítica del mismo suele ser difícil de establecer con claridad o muy compleja como para ser realmente de utilidad para ciertas áreas de aplicación como las finanzas y la medicinas así que en lo sucesivo nos referiremos a dos de los métodos más comunes para la solución de ecuaciones diferenciales el método de diferencias finitas y el método del elemento finito.

4.2. El método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas es un método práctico que permite resolver ecuaciones diferenciales que por razones de complejidad la obtención de una solución analítica es poco factible o que está expresada en términos complejos para ser realmente útil.

Para comenzar emplearemos la fórmula de Taylor para obtener aproximaciones de las expresiones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.11)$$

Desarrollemos la expansión en series de Taylor de la expresión $U(x_k + h)$ sea $\theta \in (x_k, x_{k+1})$

$$U(x_k + h) = U(x_k) + h \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x_k} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_k} + \dots + \frac{h^n}{n!} \cdot \frac{d^n u}{dx^n} \Big|_{x=\theta} \quad (4.12)$$

sea $h = x_{k+1} - x_k$ y $\theta \in (x_k, x_{k+1})$ se tiene en (4.12) que;

$$U(x_{k+1}) = U(x_k) + h \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x_k} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_k} + \dots + \frac{h^n}{n!} \cdot \frac{d^n u}{dx^n} \Big|_{x=\theta} \quad (4.13)$$

sea $h = x_{k-1} - x_k$ y $\theta \in (x_k, x_{k+1})$ se tiene en (4.12) que;

$$U(x_{k-1}) = U(x_k) - h \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x_k} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_k} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{h^n}{n!} \cdot \frac{d^n u}{dx^n} \Big|_{x=\theta} \quad (4.14)$$

Sea $O(h^n)$ el error de truncamiento de orden n , al considerar para (4.13) y (4.14) $O(h)$ tenemos

para (4.13):

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_k} = \frac{U(x_{k+1}) - U(x_k)}{h} + O(h) \quad (4.15)$$

y para (4.14):

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_k} = \frac{U(x_k) - U(x_{k-1})}{h} + O(h) \quad (4.16)$$

Que son las expresiones conocidas como primera diferencia dividida hacia adelante y primera diferencia dividida hacia atrás respectivamente.

Más aún, de la diferencia de (4.13) y (4.14) obtenemos

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_k} = \frac{U(x_{k+1}) - U(x_{k-1})}{2 \cdot h} + O(h^2) \quad (4.17)$$

Conocida como primera diferencia dividida central que como podremos apreciar tiene un error de orden dos por lo que es un esquema más preciso

Siguiendo el mismo razonamiento podemos elaborar un esquema para las segundas derivadas en el que se debe considerar

$$U(x_{k+2}) = U(x_k) + 2h \cdot \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_k} + \frac{4h^2}{2} \cdot \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_k} + \dots + \frac{2^n h^n}{n!} \cdot \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_{x=\theta} \quad (4.18)$$

$$U(x_{k-2}) = U(x_k) - 2h \cdot \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_k} + \frac{4h^2}{2} \cdot \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_k} + \dots + 2^n (-1)^n \cdot \frac{h^n}{n!} \cdot \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_{x=\theta} \quad (4.19)$$

Al considerar (4.18) y (4.19) se puede deducir la expresión para

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_k} = \frac{U(x_{k+2}) - 2U(x_{k+1}) + U(x_k)}{h^2} \quad (4.20)$$

Que representa la aproximación para la segunda diferencia dividida hacia adelante

De igual modo podemos construir expresiones cerradas para la segunda diferencia dividida central y la segunda diferencia dividida hacia atrás.

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_k} = \frac{U(x_{k+1}) - 2U(x_k) + U(x_{k-1}))}{h^2} \quad (4.21)$$

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_k} = \frac{U(x_{k-2}) - 2U(x_{k-1}) + U(x_k)}{h^2} \quad (4.22)$$

4.3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Se muestra ahora el método para resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden misma que nos permitirá introducirnos en la notación y que servirá como preámbulo para la solución de las E.D.P.

Considere:

$$-\alpha \frac{d^2u}{dx^2} + \beta u = f(x); \quad (4.23)$$

junto con las siguientes condiciones de frontera:

$$u(0) = u(1) = 0 ;$$

Paso 1 : Evaluar

$$-\alpha \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x_k} + \beta u(x_k) = f(x_k);$$

Paso 2 : Aproximar El siguiente paso consiste en aproximar la expresión anterior para la cual emplearemos la aproximación a la segunda derivada según el esquema de la segunda diferencia dividida central:

$$-\alpha \frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{h^2} + \beta U_k = f(x_k) ; k = 1, \dots, N - 1$$

Ya que hemos obtenido esta expresión el siguiente paso consiste en obtener las incógnitas de esta ecuación para lograrlo primero tenemos que reorganizar la ecuación como a continuación se presenta:

$$-\frac{\alpha}{h^2} U_{k-1} + \left(\frac{2\alpha}{h^2} + \beta\right) U_k - \frac{\alpha}{h^2} U_{k+1} = f(x_k) ; k = 1, \dots, N - 1$$

en cuyo caso las incógnitas serían

$$U_1 \dots U_{N-1}$$

Al emplear las condiciones iniciales se verifica que:

k=1:

$$\left(\frac{2\alpha}{h^2} + \beta\right) U_1 - \frac{\alpha}{h^2} U_2 = f(X_1)$$

k=2:

$$-\frac{\alpha}{h^2} U_1 + \left(\frac{2\alpha}{h^2} + \beta\right) U_2 - \frac{\alpha}{h^2} U_3 = f(X_2)$$

⋮

k=N-2:

$$-\frac{\alpha}{h^2} U_{N-3} + \left(\frac{2\alpha}{h^2} + \beta\right) U_{N-2} - \frac{\alpha}{h^2} U_{N-1} = f(X_{N-2})$$

k=N-1:

$$-\frac{\alpha}{h^2} U_{N-2} + \left(\frac{2\alpha}{h^2} + \beta\right) U_{N-1} = f(X_{N-1})$$

En base a las ecuaciones anteriores podemos entonces construir la representación matricial que nos permita despejar las incógnitas que buscamos esto se lograría al resolver el sistema

$$A \cdot \vec{U} = F \tag{4.24}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{2\alpha}{h^2} + \beta\right) & -\frac{\alpha}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{\alpha}{h^2} & \left(\frac{2\alpha}{h^2} + \beta\right) & -\frac{\alpha}{h^2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\alpha}{h^2} & \left(\frac{2\alpha}{h^2} + \beta\right) & -\frac{\alpha}{h^2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{h^2} & \left(\frac{2\alpha}{h^2} + \beta\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

4.4. La ecuación unidimensional de Calor con condiciones Homogéneas

Ahora que ya hemos logrado visualizar un ejemplo sencillo de solución de ecuaciones diferenciales mediante la técnica de diferencias divididas vamos entonces a abordar en el tema de interés de este trabajo la solución de EDP'S para esto vamos a considerar una ecuación diferencial parcial de orden dos dependiente del tiempo y en una dimensión en el espacio. Considere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.25)$$

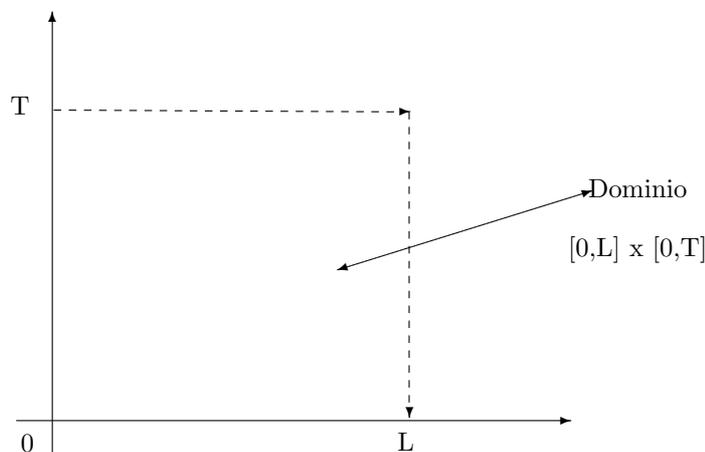


Figura 4.1: Dominio de la función

Esta es la ecuación unidimensional de calor se construye a continuación una aproximación a la solución mediante diferencias finitas.

Por simplicidad en esta ocasión vamos a considerar las dos condiciones de frontera:

$$U(0, t) = U(L, t) = 0$$

y la condición inicial siguiente:

$$U(x, 0) = g(x).$$

Para obtener una aproximación a la solución de esta ecuación utilizaremos cada uno de los siguientes tres esquemas de discretización:

- Euler Hacia Adelante
- Euler Hacia Atrás
- Crank-Nicholson

4.4.1. Esquema Euler Hacia Adelante

La idea que sustenta este esquema de discretización es aproximar la solución a la ecuación en un punto posterior sobre la malla en base a tres puntos próximos que ya se conocen. Para esto considerando (4.25) aproximamos mediante

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{X_l, T_n} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{X_l, T_n}$$

Luego lo sustituimos según la ecuación de diferencias divididas hacia adelante en tiempo y diferencias centradas en espacio con lo que se tiene:

$$\frac{U(X_l, T_{n+1}) - U(X_l, T_n)}{\Delta t} = \frac{U(X_{l+1}, T_n) - 2U(X_l, T_n) + U(X_{l-1}, T_n)}{\Delta x^2} \quad (4.26)$$

Esta es una gráfica que ilustra cómo se obtiene el nodo U_l^{n+1} en base a los nodos cercanos.

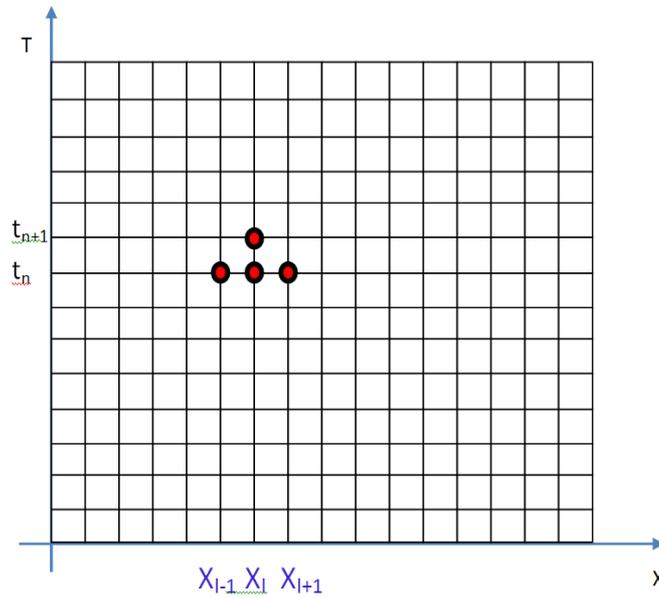


Figura 4.2: Discretización Euler hacia adelante

A partir de este punto se empleará la siguiente notación:

$$U(X_l, T_n) = U_l^n$$

Luego entonces de (4.26)

$$U_l^{n+1} - U_l^n = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) [U_{l+1}^n - 2U_l^n + U_{l-1}^n]$$

Para simplificar la notación $\nu = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right)$

$$U_l^{n+1} = \nu U_{l-1}^n + (1 - 2\nu)U_l^n + \nu U_{l+1}^n$$

Luego al considerar las condiciones de frontera que mencionamos al inicio la obtención de la solución para cada nodo se obtiene al resolver

$$\vec{U} = \Psi \vec{U}_0 \quad (4.27)$$

Donde :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{I-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1-2\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \nu & 1-2\nu & \nu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \nu & 1-2\nu & \nu & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 1-2\nu \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ \vdots \\ U_{I-1}^n \end{pmatrix}$$

Donde podemos ver que cuando n=0 se tiene el vector de la condición inicial.

4.4.2. Esquema Euler Hacia Atrás

La idea que sustenta este esquema de discretización es aproximar la solución a la ecuación en un punto anterior sobre la malla en base a tres puntos próximos que ya se conocen. Para esto considerando (4.25) aproximamos mediante

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{X_l, T_n} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{X_l, T_n}$$

Luego lo sustituimos según la ecuación de diferencias divididas hacia atrás en tiempo y diferencias centradas en espacio con lo que se tiene:

$$\frac{U(X_l, T_{n+1}) - U(X_l, T_n)}{\Delta t} = \frac{U(X_{l+1}, T_{n+1}) - 2U(X_l, T_{n+1}) + U(X_{l-1}, T_{n+1})}{\Delta x^2} \tag{4.28}$$

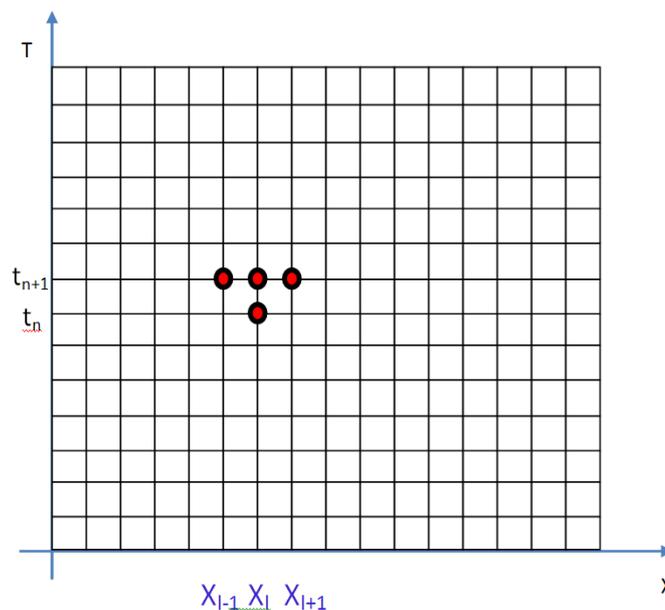


Figura 4.3: Discretización Euler hacia atrás

Esta es una gráfica que ilustra como se obtiene el nodo U_l^{n+1} en base a los nodos cercanos y así proponemos la siguiente solución al utilizar la notación ya conocida donde por conveniencia proponemos que:

$$U(X_l, T_n) = U_l^n$$

tenemos que

$$U_l^n = -\nu U_{l-1}^{n+1} + (1 + 2\nu)U_l^{n+1} - \nu U_{l+1}^{n+1}$$

Luego al considerar las condiciones de frontera que mencionamos al inicio de la sección la solución para cada nodo se obtiene al resolver

$$\vec{U}_0 = \Psi \vec{U} \tag{4.29}$$

Donde :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{I-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 + 2\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\nu & 1 + 2\nu & -\nu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\nu & 1 + 2\nu & -\nu & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu & 1 + 2\nu \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ \vdots \\ U_{I-1}^n \end{pmatrix}$$

Donde podemos ver que cuando $n = 0$ se tiene el vector de la condición inicial.

4.4.3. Esquema Crank-Nicholson

Este es un esquema que hace uso de los dos anteriores y busca aproximar la solución de la ecuación en base al promedio de los nodos en vez de un nodo a la vez esto es tomando como base (4.25) hacemos que:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt \tag{4.30}$$

Y haciendo uso del teorema de divergencia podemos hacer a (4.30) igual con:

$$U(x_l, t_{n+1}) - U(x_l, t_n) = \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x_l, t_{n+1})} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x_l, t_n)} \right]$$

Luego de aquí procedemos a aplicar la notación que habíamos venido empleando para simplificar la expresión anterior a

$$U_l^{n+1} - U_l^n = \frac{\nu}{2} [U_{l-1}^{n+1} - 2U_l^{n+1} + U_{l+1}^{n+1} + U_{l-1}^n - 2U_l^n + U_{l+1}^n]$$

de esta expresión procedemos a reorganizar agrupando los términos como se muestra:

$$-\frac{\nu}{2} U_{l-1}^{n+1} + (1 + \nu) U_l^{n+1} - \frac{\nu}{2} U_{l+1}^{n+1} = \frac{\nu}{2} U_{l-1}^n + (1 - \nu) U_l^n + \frac{\nu}{2} U_{l+1}^n$$

Luego al considerar las condiciones de frontera que mencionamos al inicio la obtención de la solución para cada nodo se obtiene al resolver

$$\Phi \vec{U} = \Psi \vec{U}_0 \tag{4.31}$$

Donde:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 + \nu & -\frac{\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{\nu}{2} & 1 + \nu & -\frac{\nu}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\nu}{2} & 1 + \nu & -\frac{\nu}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{2} & 1 + \nu \end{pmatrix}$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{I-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 - \nu & \frac{\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\nu}{2} & 1 - \nu & \frac{\nu}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\nu}{2} & 1 - \nu & \frac{\nu}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\nu}{2} & 1 - \nu \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ \vdots \\ U_{I-1}^n \end{pmatrix}$$

Donde podemos ver que cuando $n = 0$ se tiene el vector de la condición inicial.

4.5. Algoritmos de Solución

Una vez que se conoce la estructura de los sistemas de ecuaciones que nos brindan las aproximaciones al valor de la solución es necesario resolverlos así pues es necesario destacar que aunque esta tarea puede parecer sencilla podría no serlo tanto puesto que para construir aproximaciones razonablemente buenas muchas veces es necesario construir sistemas de ecuaciones de orden muy grande cuya solución resulta ser costosa computacionalmente es por eso que es necesario elaborar un análisis detallado de la estructura de las matrices que acabamos de construir puesto que es importante explotar la forma que poseen dichas matrices para elaborar cálculos precisos pero mucho más eficientes.

Como se pudo observar nuestra tarea consiste en resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$\Psi U^{\vec{n}+1} = \vec{U}^n$$

donde Ψ es una matriz tridiagonal lo que nos permite resolver el sistema de ecuaciones sin abusar del uso de cálculos y operaciones. Observamos que la matriz Ψ tiene $1 + 2\nu$ en la diagonal principal y $-\nu$ en la diagonal superior así como en la diagonal inferior el resto de valores son nulos un camino obvio para resolver el sistema es emplear una computadora y calcular Ψ^{-1} sin embargo haremos uso de la siguiente técnica. Dado que Ψ es una matriz cuadrada con elementos nulos en posiciones diferentes para cada uno de los vectores columna que la componen podemos entonces asegurar que se trata de una matriz invertible con lo que aseguramos que todas las

operaciones que realizaremos nos permiten efectivamente resolver el sistema de ecuaciones. así pues podemos expresar a Ψ mediante el producto de dos matrices triangulares superior e inferior respectivamente esto es

$$L(U \cdot U^{\vec{n}+1}) = \vec{U}^{\vec{n}}$$

Con esto podemos entonces resolver nuestro sistema inicial en dos etapas en la primera de ellas resolveremos el sistema

$$\vec{v} = L^{-1}\vec{U}^{\vec{n}}$$

Y en la segunda etapa resolver el sistema:

$$U^{\vec{n}+1} = U^{-1}\vec{v}$$

Es importante enfatizar las ventajas de está separación ya que a simple vista podría incluso pensarse que se esta aumentando la carga de trabajo pues ahora en vez de resolver un sistema de ecuaciones tengo que resolver dos de ellos sin embargo no es así puesto que nuestro trabajo se reduce a construir las matrices L y U ya que la solución de los sistemas asociados radica en simple sustitución hacia adelante para el sistema $L\vec{v} = \vec{U}^{\vec{n}}$ y sustitución hacia atrás para el sistema $U \cdot U^{\vec{n}+1} = \vec{v}$. También es importante resaltar que ser cuidadoso en diferenciar claramente entre la matriz triangular superior U y el vector de aproximaciones $\vec{U}^{\vec{n}}$ pues desafortunadamente hacemos uso de la misma literal para representarlos, son bastante similares y hacemos uso de los mismos para emplear la notación de cualquier literatura que sea consultada.

Mediante esta idea procedemos a construir dichas matrices tenemos entonces que las matrices deben ser de la forma:

$$\Psi = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{L-2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 & -\nu & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & -\nu & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\nu \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \delta_{L-1} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Donde L representa el número de intervalos en los que se divide el dominio de interés. Ahora se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 1 + 2\nu \\ \lambda_1 &= -\frac{\nu}{\delta_1} \\ -\nu\lambda_1 + \delta_2 &= 1 + 2\nu \end{aligned}$$

De la ultima identidad se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= (1 + 2\nu) + \nu\lambda_1 \\ \delta_2 &= (1 + 2\nu) - \frac{\nu^2}{\delta_1} \end{aligned}$$

De donde se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\delta_1 = 1 + 2\nu \quad (4.33)$$

$$\delta_{j+1} = (1 + 2\nu) - \frac{\nu^2}{\delta_j} \quad (4.34)$$

$$\lambda_j = -\frac{\nu}{\delta_j} \quad (4.35)$$

Donde, $j=1 \dots L-2$

Con esto conocemos perfectamente la estructura de las matrices L y U . El siguiente paso consiste en resolver los sistemas de ecuaciones que se habían desglosado lo cual como se había mencionado consiste únicamente de múltiples sustituciones hacia adelante y luego hacia atrás se tiene que:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= U_1^n \\
 v_2 &= U_2^n + \frac{\nu}{\delta_1} v_1 \\
 v_3 &= U_3^n + \frac{\nu}{\delta_1} v_2 \\
 &\vdots \\
 v_i &= U_i^n + \frac{\nu}{\delta_{i-1}} v_{i-1} \\
 &\vdots \\
 v_{L-1} &= U_{L-1}^n + \frac{\nu}{\delta_{L-2}} v_{L-2}
 \end{aligned}$$

Con esto hemos resuelto la primera parte de los sistemas de ecuaciones ahora sólo resta sustituir hacia atrás para obtener la soluciones que estamos buscando tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
 U_{L-1}^{n+1} &= \frac{v_{L-1}}{\delta_{L-1}} \\
 U_{L-2}^{n+1} &= \frac{v_{L-2} + \nu U_{L-1}^{n+1}}{\delta_{L-2}} \\
 &\vdots \\
 U_i^{n+1} &= \frac{v_i + \nu U_{i+1}^{n+1}}{\delta_i} \\
 &\vdots \\
 U_1^{n+1} &= \frac{v_1 + \nu U_2^{n+1}}{\delta_1}
 \end{aligned}$$

Así entonces son conocidos las aproximaciones numéricas que estábamos buscando ahora bien aunque existen muchos otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales como el método de Jacobi o el de Gauss-Seidel todos ellos son métodos iterativos cuya rapidez de convergencia suele depender de la proximidad del vector inicial o del radio espectral de la matriz a diferencia de estos la descomposición \mathbf{LU} es un método óptimo pues los resultados no son aproximados si no que son exactos y el número de operaciones que se realiza no es mas que de orden 2^*L siendo este aceptable en términos de costo computacional.

Para concluir esta sección se elaboró un programa computacional que realiza todas las operaciones que se mencionaron sin embargo se anexa al final de la tesis.

Capítulo 5

El Método de Elemento Finito (MEF)

5.1. Introducción al método de elemento finito

En esta parte abordaremos un método alternativo para conocer la forma de la solución de las ecuaciones en derivadas parciales resultantes del análisis de Black-Scholes que fue previamente elaborado.¹ Aunque existen ciertas singularidades en general se puede decir que el método del elemento finito es un proceso estandarizado por lo que podemos enumerar una serie de pasos que nos permiten implantarlo con facilidad. La idea general del método de elemento finito consiste en discretizar o dividir el espacio de dominio de la ecuación diferencial dada en polígonos convexos regulares de modo que la suma de todos los polígonos sea aproximadamente igual al dominio original. A cada uno de estos polígonos se le llamará elemento a su vez todos los elementos estarán conectados mediante nodos que son la intersección de los vértices, líneas o planos que tengan en común algunos de los elementos.

Por otra parte para cada uno de esos elementos existe una función de interpolación asociada que será la encargada de aproximar el valor de la función que se desea conocer en cada uno de los elementos del dominio aunque existe una gran variedad de funciones de aproximación es muy común emplear polinomios debido a que son muy sencillos de manipular. Una vez seleccionada dicha función el siguiente paso consiste en ajustar los coeficientes de dicho polinomio de modo que la función aproxime la solución de manera optima. Una vez obtenidas las ecuaciones de cada uno de los elementos éstas deben ser ensambladas de modo que quede cubierto el dominio de interés y que se asegure la continuidad de la solución. El siguiente paso consiste en agregar las condiciones de frontera al sistema de ecuaciones y por ultimo implementar algún método de solución que por lo general resulta ser un sistema de ecuaciones que se factoriza mediante descomposición LU. El problema central de este capítulo es resolver una ecuación diferencial parcial con una variable independiente en tiempo y una variable independiente en espacio lo que lo convierte en un problema dinámico de una dimensión por lo que trataremos la variable de espacio con el E.F. pero la variable de tiempo sera discretizada mediante D.F.

5.2. El M.E.F. en problemas estáticos

Antes de abordar completamente el método de solución para la ecuación de calor asociada al problema medular de este trabajo se estudia el M.E.F. únicamente para la variable de espacio se construye el esquema de solución así como la manera de adaptar las condiciones de frontera (CF)².

Para esto consideramos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden discretizando el dominio de interés en un sólo elemento para apreciar cómo funciona el método posteriormente se hace un análisis más minucioso.

$$\alpha \frac{d^2 u}{dx^2} + \beta \frac{du}{dx} = f(x) \quad (5.1)$$

¹Esta informacion fue consultada en [9]

²a partir de este punto CF denotara las condiciones de frontera

Sujeta a las CF:

$$u(x^{min}) = u(x^{max}) = 0 \quad (5.2)$$

5.2.1. Aproximación mediante polinomios de grado 2 y un elemento

Considere una función de aproximación de grado 2 esto es de la forma:

$$\tilde{u}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

Dicha función de aproximación a u debe cumplir con las CF, por lo que:

$$\tilde{u}(x^{min}) = a_1 + a_2(x^{min}) + a_3(x^{min})^2 = 0$$

$$\tilde{u}(x^{max}) = a_1 + a_2(x^{max}) + a_3(x^{max})^2 = 0$$

En base a esta información desarrollamos la forma matricial asociada al sistema que se tiene que resolver:

$$\begin{bmatrix} 1 & x^{min} & x^{min^2} \\ 1 & x^{max} & x^{max^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema dejando todas las constantes expresadas en términos de a_1 se obtiene:

$$\tilde{u}(x) = a_1 - \frac{(x^{min} + x^{max})a_1}{(x^{min} * x^{max})}x + \frac{x^{min^2} + (x^{max} * x^{min})a_1}{(x^{min} * x^{max})}x^2$$

Hasta este punto sólo se ha construido una familia de funciones de aproximación que satisfacen las condiciones de frontera que se le proporcionaron sin embargo el siguiente paso consiste en encontrar el valor del coeficiente a_1 de modo que el polinomio de aproximación sea tal que se minimice la diferencia respecto al valor de la solución del problema. Pues bien resulta ser que ésta es la idea general del método de residuos ponderados (M.R.P) lo que hacemos es considerar la función de aproximación \tilde{u} así que al sustituir esta aproximación dentro de la ecuación diferencial obtenemos un residuo distinto de cero pues si fuese cero entonces lo que tendríamos es la solución exacta y carecería de sentido todo esto. Expresamos la función de residuo mediante:

$$R = L(\tilde{u}) - f(x) \quad (5.3)$$

Ahora bien ya que se visualizó el objetivo es necesario emplear ciertas herramientas algebraicas para desarrollar la solución el método de residuos ponderados propone construir la función de residuo de manera que sea ortogonal a ciertas funciones de ponderación con lo que garantizamos que la magnitud del error sea mínima es claro que dichas funciones de peso son funciones linealmente independientes, expresamos esta idea mediante.

$$\int_D R W_i dD = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.4)$$

donde:

D=Dominio de la solución.

W_i funciones de Ponderación

Se tienen múltiples opciones para las funciones W_i sin embargo el método más común consiste en emplear las funciones de interpolación como funciones de ponderación. Esta elección es conocida como el método de Galerkin.

Una vez que se conoce el marco teórico que respalda lo que se va a hacer podemos continuar con la solución de la ecuación diferencial que estábamos resolviendo originalmente. Contábamos entonces con la siguiente función aproximación:

$$\tilde{u}(x) = a_1 - \frac{(x^{min} + x^{max})a_1}{(x^{min} * x^{max})}x + \frac{x^{min^2} + (x^{max} * x^{min})a_1}{(x^{min} * x^{max})}x^2$$

Al factorizar a_1 de la ecuación anterior podemos encontrar fácilmente las funciones de interpolación esto es:

$$\tilde{u}(x) = a_1 \underbrace{\left(1 - \frac{(x^{min} + x^{max})}{(x^{min} * x^{max})}x + \frac{x^{min^2} + (x^{max} * x^{min})}{(x^{min} * x^{max})}x^2\right)}_{W_1}$$

Ahora construimos la función de residuo según se explicó con lo que:

$$R(x, a_1) = \alpha \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + \beta \frac{d \tilde{u}}{dx} - f(x) \quad (5.5)$$

De donde:

$$\begin{aligned} \frac{d \tilde{u}(x)}{dx} &= a_2 + 2a_3 x \\ \frac{d^2 \tilde{u}(x)}{dx^2} &= 2a_3 \end{aligned}$$

Empleando el método de Galerkin se debe seguir que:

$$\int_{x^{min}}^{x^{max}} R(x, a_1) \cdot \left(1 - \frac{(x^{min} + x^{max})}{(x^{min} * x^{max})}x + \frac{x^{min^2} + (x^{max} * x^{min})}{(x^{min} * x^{max})}x^2\right) dx = 0 \quad (5.6)$$

Al desarrollar esta integral se obtendrá el valor del coeficiente "a₁" de modo que se ha construido la mejor función de aproximación a la solución.

Aunque este es un ejemplo de los más sencillos ya que el espacio de dominio se analiza únicamente con un elemento y es interpolado con un polinomio de grado 2 nos permite conocer una panorámica del funcionamiento del método de elemento finito.

5.2.2. Aproximación mediante polinomios de grado N y un elemento

Se podría continuar de manera indefinida agregando términos al polinomio de interpolación ya que conforme se vayan agregando se obtendrá una aproximación más precisa a la solución analítica sin embargo conforme va creciendo el grado del polinomio de interpolación va aumentando en complejidad el sistema de ecuaciones que se tiene que resolver lo que se hace entonces, para evitar este problema, es subdividir el espacio de dominio donde se quiere conocer la solución en una cantidad mayor de elementos haciendo con esto una malla mas refinada y se obtendrá una solución precisa con un polinomio de grado pequeño.

Podemos resumir la aplicación del MEF con un solo elemento y polinomios de grado N mediante el siguiente procedimiento:

1. Selección de una función de aproximación $\tilde{u} = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$
2. sustitución de las CF en la función de aproximación
3. Encontrar las (n-2) funciones de interpolación W_i
4. aplicar el criterio de Galerkin

$$\int_D R(x, \mathbf{a}) W_i dx = 0 \quad (5.7)$$

5. Determinar el valor de los coeficientes restantes de las funciones de aproximación

En las siguientes secciones se agrega un estudio para casos un poco más desarrollados que permiten ver el verdadero potencial de este método.

5.2.3. Discretización en múltiples elementos

Como ya se había mencionado, una de las ventajas del método es que permite estudiar el espacio de dominio de la función por espacios tan pequeños como las herramientas computacionales lo permitan y una vez que ya estamos familiarizados con la idea de M.R.P. y que ya practicamos un poco el método de Galerkin podemos realizar el siguiente análisis.

Consideramos en este caso una ecuación diferencial de segundo orden similar a la que se había analizado en la sección anterior esto es:

$$u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) + f(x) = 0 \quad (5.8)$$

pero en este caso analizaremos condiciones de frontera de la siguiente forma:

$$\alpha_1 u(x^{min}) + \beta_1 u'(x^{min}) = \gamma_1 \quad (5.9)$$

$$\alpha_2 u(x^{max}) + \beta_2 u'(x^{max}) = \gamma_2 \quad (5.10)$$

Dichas condiciones son conocidas como condiciones de frontera mixtas.

La similitud de la aproximación con la solución exacta depende básicamente de dos cosas la, primera es el grado del polinomio que se emplea para interpolar y la segunda es el número de elementos en la que se divide el espacio de dominio. Aunque obviamente a mayor numero de elementos o polinomios de interpolación de mayor grado brindan soluciones mas precisas su costo está dado por la complejidad de cálculo por lo que debe encontrarse un punto de equilibrio entre estos factores según el nivel de precisión que se necesite. Básicamente el método de solución se resume a continuación:

5.2.4. Aproximación mediante polinomios de grado 1 y múltiples elementos

1. *Discretización:* Por tratarse en este caso de ecuaciones unidimensionales en espacio la discretización del dominio se tratará simplemente de división en intervalos de la misma o de distinta longitud para el dominio que se analiza. Cada uno de esos subintervalos representa un elemento y los nodos son simplemente los puntos de los extremos de cada uno de los elementos.
2. *Interpolación:* Por simplicidad de esta sección vamos a considerar el polinomio de aproximación más sencillo que es un polinomio de grado 1 esto es vamos a suponer que una línea recta entre dos nodos es una buena aproximación a la solución. Se tiene entonces la siguiente función de aproximación:

$$\tilde{u}_e(x) = ax + b$$

ambos coeficientes a y b serán construidos de modo que $\tilde{u}_e(x_i) = u_i$ y que $\tilde{u}_e(x_{i+1}) = u_{i+1}$ con estas condiciones podemos definir la forma de a y b tenemos que :

$$\tilde{u}_e(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \tilde{u}_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \tilde{u}_{i+1} \quad (5.11)$$

$$= N_i \tilde{u}_i + N_{i+1} \tilde{u}_{i+1} \quad (5.12)$$

N_i y N_{i+1} son las funciones de interpolación. Como se había mencionado la solución general en el dominio de interés está dada por la suma de las soluciones de cada uno de los elementos en los que sea dividido el dominio por lo que la solución general de la ecuación debe ser entonces de la forma:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u}_i n_i(x)$$

donde:

$$n_i(x_j) = 1 \quad \forall i = j$$

$$n_i(x_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Se tiene entonces que n_i es igual con 1 cuando se le evalúa en el i -ésimo nodo y vale cero para el resto de los nodos, esto implica necesariamente entonces que:

$$\tilde{u}(x_j) = \sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u}_i n_i(x_j) = \tilde{u}_j$$

3. *Sustitución:* En esta parte vamos a sustituir la función de aproximación dentro de la ecuación diferencial con esto vamos a obtener una función de residuo como lo hicimos anteriormente.

$$R(x, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{N+1}) = \tilde{u}'' + a_1(x)\tilde{u}' + a_2(x)\tilde{u} + f(x)$$

ahora que se tiene la forma de R procedemos a aplicar el criterio de Galerkin el cual requiere que:

$$\int_{x^{min}}^{x^{max}} [\tilde{u}'' + a_1(x)\tilde{u}' + a_2(x)\tilde{u} + f(x)] n_k(x) dx = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (5.13)$$

El siguiente paso consiste en la reducción de orden de la ecuación anterior para lo cual basta con analizar el primer término dentro de la integral

$$\begin{aligned} \int_{x^{min}}^{x^{max}} \tilde{u}'' n_k(x) dx &= [\tilde{u}' n_k]_{x^{min}}^{x^{max}} - \int_{x^{min}}^{x^{max}} \tilde{u}' n_k'(x) dx \\ &= n_k(x^{max}) \left[\frac{\gamma_2 + \alpha_2 u(x^{max})}{\beta_2} \right] - n_k(x^{min}) \left[\frac{\gamma_1 + \alpha_1 u(x^{min})}{\beta_1} \right] - \int_{x^{min}}^{x^{max}} \tilde{u}' n_k' dx \end{aligned}$$

al sustituir el resultado de esta integral en la ecuación que teníamos originalmente se tendrá la reducción de orden que se esperaba:

$$\begin{aligned} n_k(x^{max}) \left[\frac{\gamma_2 + \alpha_2 u(x^{max})}{\beta_2} \right] - n_k(x^{min}) \left[\frac{\gamma_1 + \alpha_1 u(x^{min})}{\beta_1} \right] - \int_{x^{min}}^{x^{max}} [n_k' \tilde{u}' - n_k a_1 \tilde{u}' - n_k a_2 \tilde{u} - n_k f] dx = 0 \\ \forall k = 1, 2, \dots, N+1 \end{aligned}$$

Ahora se sustituye \tilde{u} por la función de aproximación que se construyó anteriormente para el lado derecho de (5.20) con lo que se tiene que:

$$\int_{x^{min}}^{x^{max}} \left[n_k' \sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u}_i n_i' - n_k a_1 \sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u}_i n_i' - n_k a_2 \sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u}_i n_i - n_k f \right] dx \quad (5.14)$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, N+1$$

Por las propiedades de linealidad del operador \sum_i podemos escribir (5.20) como:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \left[\int_{x^{min}}^{x^{max}} (n_k' n_i' - a_1 n_k n_i' - a_2 n_k n_i) dx \right] \tilde{u}_i - \int_{x^{min}}^{x^{max}} n_k f dx \quad (5.15)$$

usando este resultado y al unir todas las partes de la ecuación podemos verificar fácilmente que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N+1} \left[\int_{x^{min}}^{x^{max}} (n_k' n_i' - a_1 n_k n_i' - a_2 n_k n_i) dx \right] \tilde{u}_i &= \int_{x^{min}}^{x^{max}} n_k f dx + n_k(x^{max}) \left[\frac{\gamma_2 + \alpha_2 u(x^{max})}{\beta_2} \right] \\ &- n_k(x^{min}) \left[\frac{\gamma_1 + \alpha_1 u(x^{min})}{\beta_1} \right] \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, N + 1$$

A modo de tener una escritura más compacta y de reordenar los términos de la ecuación anterior introduciremos la función Delta de Kronecker la cual puede ser descrita como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

con esto reescribimos la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N+1} \left[\int_{x^{min}}^{x^{max}} (n'_k n'_i - a_1 n_k n'_i - a_2 n_k n_i) dx \right] \tilde{u}_i + \delta_{kN+1} \frac{\alpha_2}{\beta_2} \tilde{u}_{N+1} - \delta_{k1} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \tilde{u}_1 \\ = \int n_k f dx + \delta_{kN+1} \frac{\gamma_2}{\beta_2} - \delta_{k1} \frac{\gamma_1}{\beta_1} \end{aligned}$$

$$\forall k = 1, \dots, N + 1$$

El uso de esta función es la que nos permite introducir las CF podemos reescribir el sistema de una manera mucho más compacta:

$$\sum_{i=1}^{N+1} K_{ki} \tilde{u}_i = F_k \quad \forall k = 1, \dots, N + 1 \tag{5.16}$$

o en una notación más compacta aún:

$$K \tilde{u} = F$$

donde:

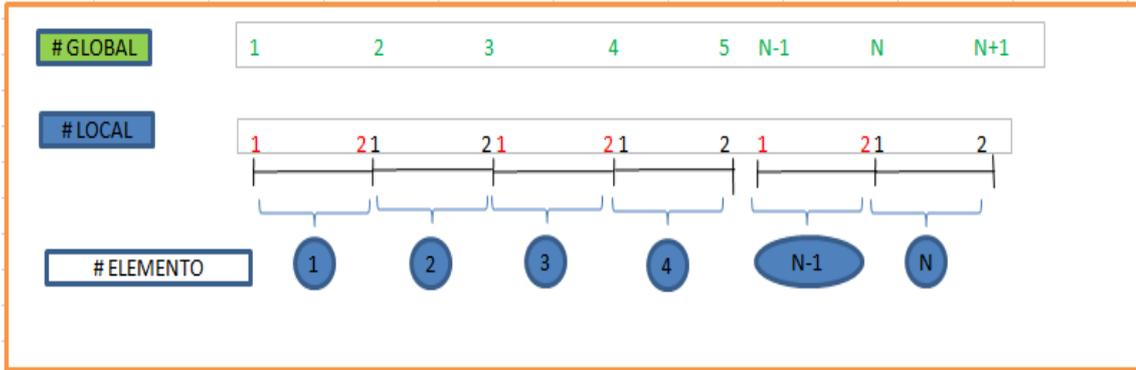
$$K_{ki} = \int_{x^{min}}^{x^{max}} (n'_k n'_i - a_1 n_k n'_i - a_2 n_k n_i) dx + \delta_{kN+1} \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \delta_{k1} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \tag{5.17}$$

$$F_k = \int_{x^{min}}^{x^{max}} n_k f dx + \delta_{kN+1} \frac{\gamma_2}{\beta_2} - \delta_{k1} \frac{\gamma_1}{\beta_1} \tag{5.18}$$

Un método útil para conocer la relación entre los elementos del dominio y ver cómo están conectados es realizar una tabla de la topología del sistema.

ELEMENTO	NÚMERO DE NODOS	
	LOCAL	GLOBAL
1	1	1
2	2	2
3	1	3
4	2	4
...
...
...
N-1	1	N-1
	2	N
N	1	N
	2	N+1

Un gráfico que puede ser de utilidad para elaborar la tabla es el siguiente:



Y un esbozo de la forma de la matriz asociada puede ser también de utilidad para conocer la forma en que se conectan los elementos del dominio en este caso y por tratarse con polinomios lineales tenemos la siguiente forma

$$K = \begin{pmatrix} X & X & 0 & 0 & 0 & \dots \\ X & X & X & 0 & 0 & \dots \\ 0 & X & X & X & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \end{pmatrix}$$

Una vez que se tiene una idea de la forma que tiene la matriz podemos hacer las sustituciones en base al desarrollo que habíamos venido construyendo sabemos entonces que la matriz asociada debe ser de la forma:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{N+1,N} & K_{N+1,N+1} \end{pmatrix}$$

Como podemos observar se trata de una estructura tridiagonal similar a las que habían sido analizadas en los capítulos anteriores.

4. *Ensamble*: Ahora que se conoce la estructura de la matriz así como la forma de sus elementos el siguiente paso consiste en armar la matriz que servirá para encontrar las incógnitas \tilde{u}_i aunque es sencillo determinar la forma general de las matrices resulta mucho más ilustrativo considerar un caso en particular que por sencillez resulta ser el caso en que se tengan solamente 2 elementos :

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{11} dx \tilde{u}_1 + \int_{x_1}^{x_2} F_{12} dx \tilde{u}_2 + 0 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \tilde{u}_1 = \int_{x_1}^{x_2} n_1 f dx - \frac{\gamma_1}{\beta_1} \tag{5.19}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{21} dx \tilde{u}_1 + \int_{x_1}^{x_2} F_{22} dx \tilde{u}_2 + \int_{x_2}^{x_3} F_{22} dx \tilde{u}_2 + \int_{x_1}^{x_2} F_{23} dx \tilde{u}_3 = \int_{x_1}^{x_2} n_2 f dx + \int_{x_2}^{x_3} n_2 f dx \tag{5.20}$$

$$0 + \int_{x_2}^{x_3} F_{13} dx \tilde{u}_2 + \int_{x_2}^{x_3} F_{33} dx \tilde{u}_3 + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \tilde{u}_2 = \int_{x_2}^{x_3} n_3 f dx + \frac{\gamma_2}{\beta_2} \tag{5.21}$$

Donde $F_{ik} = n'_i n'_k - a_1 n_i n'_k - a_2 n_i n_k$.

Desde esta perspectiva podemos visualizar dónde se encuentran los términos relacionados con el primer y con el segundo elemento respectivamente a partir de esta información diseñamos las siguientes matrices:

$$k_{e1} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} F_{11} dx & \int_{x_1}^{x_2} F_{12} dx \\ \int_{x_1}^{x_2} F_{21} dx & \int_{x_1}^{x_2} F_{22} dx \end{pmatrix}$$

$$k_{e2} = \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} F_{11} dx & \int_{x_2}^{x_3} F_{12} dx \\ \int_{x_2}^{x_3} F_{21} dx & \int_{x_2}^{x_3} F_{22} dx \end{pmatrix}$$

Las matrices k_{e_i} son conocidas como las matrices de rigidez para el i –ésimo elemento vamos a expresar estas matrices en términos de las funciones de interpolación para esto definamos el siguiente vector de interpolación

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$N' = \begin{pmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{pmatrix}$$

con esto y según la construcción que habíamos desarrollado para las matrices de rigidez podemos describir las como:

$$k_{e1} = \int_{x_1}^{x_2} N' N'^T - a_1 N N'^T - a_2 N N^T dx$$

$$k_{e2} = \int_{x_2}^{x_3} N' N'^T - a_1 N N'^T - a_2 N N^T dx$$

El siguiente paso consiste en expandir las matrices de rigidez de cada elemento hasta que tengan la dimensión de las matrices de rigidez global para el caso de dos elementos y con funciones de interpolación lineal la matriz de rigidez global es de orden 3 por lo que las matrices de rigidez de cada elemento son de la forma:

$$k_{g1} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} F_{11} dx & \int_{x_1}^{x_2} F_{12} dx & 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} F_{21} dx & \int_{x_1}^{x_2} F_{22} dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_{g2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \int_{x_2}^{x_3} F_{11} dx & \int_{x_2}^{x_3} F_{12} dx & 0 \\ \int_{x_2}^{x_3} F_{21} dx & \int_{x_2}^{x_3} F_{22} dx & 0 \end{pmatrix}$$

escribimos entonces que $\mathbf{k}_G = k_{g1} + k_{g2}$

De la misma manera construimos el lado derecho del sistema de ecuaciones mediante:

$$f_{e1} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} N_1 f dx \\ \int_{x_1}^{x_2} N_2 f dx \end{pmatrix}$$

$$f_{e2} = \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} N_1 f dx \\ \int_{x_2}^{x_3} N_2 f dx \end{pmatrix}$$

Dichas matrices son conocidas como matrices de carga y de manera similar a lo que se hizo con las matrices de rigidez las matrices de carga deben ser de orden (3×1) para que el sistema de ecuaciones tenga sentido. por lo que hacemos:

$$f_{g1} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} N_1 f dx \\ \int_{x_1}^{x_2} N_2 f dx \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{g2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_2}^{x_3} N_1 f dx \\ \int_{x_2}^{x_3} N_2 f dx \end{pmatrix}$$

escribimos entonces que $\mathbf{f}_G = f_{g1} + f_{g2}$

Por último agregamos las C.F. que se especificaron pero de igual manera a como se ha venido haciendo deben ser escritas dentro de matrices de orden tres para poder operarlas dentro del sistema de ecuaciones por lo que tenemos:

$$\mathbf{BT}_G = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{pmatrix}$$

similarmente:

$$bt_G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_1}{\beta_1} \\ 0 \\ \frac{\gamma_2}{\beta_2} \end{pmatrix}$$

finalmente el sistema de ecuaciones puede ser escrito de la forma:

$$\mathbf{K}_G \tilde{\mathbf{u}}_G = \mathbf{F}_G \quad (5.22)$$

donde:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{k}_G + \mathbf{BT}_G \quad (5.23)$$

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{f}_G + \mathbf{bt}_G \quad (5.24)$$

Podemos generalizar este resultado al caso de N elementos esto es muy sencillo ya que las matrices de rigidez para el i-ésimo elemento tienen la misma estructura que las que acabamos de construir para 2 elementos esto es:

$$k_{ei} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (N' N'^T - a_1 N N'^T - a_2 N N^T) dx \quad (5.25)$$

$$f_{ei} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (N) f dx \quad (5.26)$$

La ecuación diferencial ordinaria que estamos analizando es un modelo bastante general sin embargo si enfocamos nuestra atención al caso en el que las a_i son términos constantes tenemos entonces una ecuación diferencial lineal y en este caso podemos expresar los vectores de interpolación N como:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \\ \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \end{pmatrix} = \frac{1}{l_E^i} \begin{pmatrix} x_{i+1} - x \\ x - x_i \end{pmatrix}$$

$$N' = \frac{1}{l_E^i} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nuestra tarea consiste ahora en introducir las expresiones de los vectores de interpolación en las ecuaciones de las matrices de rigidez del i –ésimo elemento con lo que obtenemos:

$$k_{ei} = \frac{1}{l_E^i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{a_1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{a_2 l_E^i}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De maneja similar a como lo hicimos en los párrafos anteriores podemos expresar el sistema de ecuaciones mediante:

$$K\tilde{u} = F$$

donde:

$$K = \sum_{i=1}^N k_{gi} + BT_g \quad (5.27)$$

$$F = \sum_{i=1}^N f_{gi} + bt_g \quad (5.28)$$

5. *Condiciones de frontera:* Según fue dada la forma de las condiciones de frontera del problema que se esta analizando no nos queda más que insertar dicha condición en el sistema de ecuaciones diferenciales lo que modificaría ligeramente la matriz de rigidez global y la matriz de carga global como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{N+1,N} & K_{N+1,N+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N+1} \end{pmatrix}$$

Con lo que forzamos al valor \tilde{u}_1 a cumplir con la condición de frontera.

6. *Solución:* Una vez que se han desarrollado todos los elementos que nos permiten conocer la naturaleza de la solución de la ecuación diferencial el siguiente paso consiste en resolver el sistema asociado para esto se cuenta con infinidad de técnicas pero por ser esta un area de estudio de las técnicas numéricas de solución se hará uso de las mismas así como de la ventaja de la estructura de la matriz que es una matriz tridiagonal la cual es fácil de manipular. Dejaremos por el momento de lado este punto pero será desarrollado en capítulos posteriores dedicados al los métodos numéricos de solución de sistemas de ecuaciones así como su ejecución mediante *software* de cálculo.

5.2.5. Aproximación mediante polinomios de grado 2 y múltiples elementos

De manera similar a como lo realizamos con funciones de aproximación lineales estudiaremos cómo construir un sistema de ecuaciones para obtener una aproximación a la solución de la ecuación diferencial pero mediante el uso de polinomios de grado 2.

1. *Discretización:* Dado que continuamos trabajando el dominio de la función en una sola dimensión la discretización consta simplemente de subintervalos de la misma o de diferente longitud. Sin embargo a diferencia del caso de polinomios de grado uno para polinomios cuadráticos requeriremos un nodo más por cada uno de los elementos podemos entonces considerar por simplicidad el punto medio de cada uno de los elementos con lo que tendríamos $2n + 1$ nodos.
2. *Interpolación:* para este caso suponemos que una buena aproximación a la solución está dado por:

$$\tilde{u}_e(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \quad (5.29)$$

Esta ecuación debe pasar por los siguientes tres puntos: $(x_i, \tilde{u}_i), (x_{i+1}, \tilde{u}_{i+1}), (x_{i+2}, \tilde{u}_{i+2})$ de aquí tenemos que:

$$\tilde{u}_i = \alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 \quad (5.30)$$

$$\tilde{u}_{i+1} = \alpha + \beta x_{i+1} + \gamma x_{i+1}^2 \quad (5.31)$$

$$\tilde{u}_{i+2} = \alpha + \beta x_{i+2} + \gamma x_{i+2}^2 \quad (5.32)$$

$$(5.33)$$

Con estas tres ecuaciones podemos determinar de manera única la forma de los parámetros α , β y γ como lo hicimos anteriormente podemos expresar la función de aproximación como:

$$\tilde{u}_e(x) = N_i(x)\tilde{u}_i + N_{i+1}(x)\tilde{u}_{i+1} + N_{i+2}(x)\tilde{u}_{i+2} \quad (5.34)$$

donde:

$$N_i(x) = \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} \tag{5.35}$$

$$N_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} \tag{5.36}$$

$$N_{i+2}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} \tag{5.37}$$

$$\tag{5.38}$$

Con esto creamos el vector de interpolación N así que podemos conocer la forma del vector N' derivando cada una de las entradas del vector N con lo que obtendríamos:

$$N'_i(x) = \frac{2x - x_{i+1} - x_{i+2}}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} \tag{5.39}$$

$$N'_{i+1}(x) = \frac{2x - x_i - x_{i+2}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} \tag{5.40}$$

$$N'_{i+2}(x) = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} \tag{5.41}$$

$$\tag{5.42}$$

3. *Sustitución:* Debemos tener en cuenta que cambia la dimensión de la matriz de rigidez a matrices de orden 3×3 y también cambian los intervalos de integración que ahora van de x_i a x_{i+2} esto es:

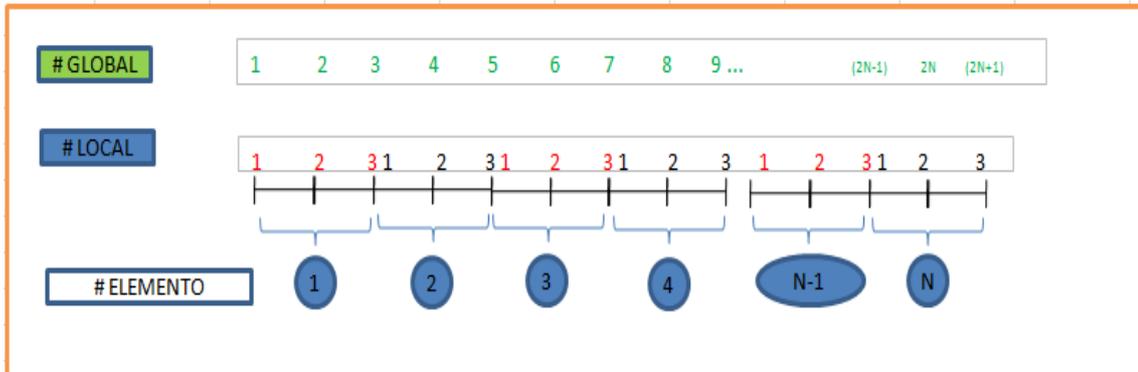
$$k_{ei} = \int_{x_i}^{x_{i+2}} (N'N'^T - a_1NN'^T - a_2NN^T) dx f_{ei} = \int_{x_i}^{x_{i+2}} (Nf) dx \tag{5.43}$$

4. *Ensamblaje:* El proceso de armado de la matriz de rigidez global es muy similar al que se realizó para interpolación lineal pero como ya se dijo se tienen matrices de rigidez para el i -ésimo elemento de dimensión 3 y para armar la matriz de rigidez global debe considerarse que traslapan la componente de la primera fila y la primera columna de la matriz de un elemento con la componente del 3° renglón y la 3° columna por lo que para una matriz con n elementos la matriz global es de orden $(2n + 1) \cdot (2n + 1)$ similarmente para la matriz de carga la cual es de orden 3×1 para el i -ésimo elemento y traslapan el primer y el tercer elemento de cada vector para formar la matriz global de carga la cual es de orden $(2n + 1) \times 1$ emplearemos la siguiente tabla para conocer como se conectan los nodos de algunos elementos:

ELEMENTO	NÚMERO DE NODOS	
	LOCAL	GLOBAL
1	1	1
	2	2
	3	3
2	1	3
	2	4
	3	5
3	1	5

N-1	1	2N-3
	2	2N-2
	3	2N-1
N	1	2N-1
	2	2N
	3	2N+1

Y un gráfico que podría ser de utilidad para entender el concepto



5. *Condiciones de Frontera:* Las condiciones de frontera se introducen al sistema del mismo modo que se hizo en la interpolación lineal
6. *Solución:* Indudablemente la complejidad de cómputo del valor de la función en los nodos aumenta considerablemente dado que la estructura de la matriz resultante ya no es una matriz tridiagonal pero esto no implica que no funcione este método de interpolación si no que hay que diseñar o proponer algún otro esquema de programación de *software* numérico para la solución.

5.3. El M.E.F. en problemas dinámicos

Una vez que se tiene una amplia panorámica de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de elemento finito podemos ahora enfocarnos en problemas donde la función incógnita tiene una parte dependiente de tiempo y una parte dependiente del espacio en esta parte del texto nos enfocamos en la soluciones de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x)u + f(x) \quad (5.44)$$

Para simplificar nuestra notación y como se hizo en otros capítulos cuando se trata más de una variable independiente escribiremos u' para denotar la derivada parcial de u con respecto a x y \dot{u} denotará la derivada parcial de u respecto a t . con esta notación escribimos entonces la ecuación diferencial como:

$$\dot{u} = a_0 u'' + a_1 u' + a_2 u + f \quad (5.45)$$

con las condiciones de frontera siguientes:

Consideraremos esta ecuación con estas condiciones de frontera e iniciales para dar generalidad a los métodos que se estudian para solucionar ecuaciones diferenciales posteriormente haremos énfasis en el modelo que nos interesa junto con las ecuaciones de frontera que resulta ser solamente un caso particular de la ecuación que estamos por desarrollar.

Para determinar la solución específica de la ecuación diferencial necesitamos dos condiciones de frontera tal cual se hizo en los capítulos anteriores y una condición inicial para determinar la parte de la ecuación relacionada con el tiempo expondremos entonces las ecuaciones de frontera como:

$$\alpha_1 u(x^{min}) + \beta_1 u'(x^{min}) = \gamma_1 \quad (5.46)$$

$$\alpha_2 u(x^{max}) + \beta_2 u'(x^{max}) = \gamma_2 \quad (5.47)$$

Cabe señalar que esta es la forma más general de las condiciones de frontera donde se tiene la función evaluada en los puntos extremos así como en su derivada sin embargo es suficiente conocer cualesquier dos de ellas para determinar una solución en específico.

Como ya se dijo es necesario agregar una condición inicial que es de la forma:

$$u(t_0, x) = u_0(x) \quad (5.48)$$

En particular se consideran únicamente condiciones de frontera dadas por la función evaluada en x^{min} y x^{max} así como de la condición inicial.

El procedimiento de solución para ecuaciones dinámicas es en extremo similar al procedimiento que se había estado desarrollando para ecuaciones estáticas salvo que en este caso es necesario revisar como va evolucionando el sistema en función de los avances sucesivos en el dominio del tiempo. comenzaremos como en el caso anterior por la discretización.

1. *Discretización:* Dado que la función sigue teniendo un dominio de una sola dimensión en espacio el tipo de discretización no cambia siguen siendo intervalos de la misma o de distinta longitud. Por otro lado el tiempo no será discretizado si no que se usará la condición inicial para resolver para intervalos de tiempo de la misma o de distinta magnitud.
2. *Interpolación:* En este caso las funciones de aproximación serán construidas considerando no sólo el el producto de funciones de interpolación por el valor que se interpola si no por el valor que se interpola relacionado con el tiempo en el que se evalúa expresamos esta idea mediante:

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u}_i(t) n_i(x) \quad (5.49)$$

3. *Sustitución:* Antes de continuar sobre la formulación de los elementos se sugiere un cambio de variable que resulta muy conveniente para simplificar nuestras operaciones, haga:

$$a_0 u'' = (a_0 u')' - a_0' u'$$

Haciéndose notar que mediante la regla de la cadena se puede verificar la validez de esta transformación además esta fue diseñada así para poder escribir (5.51) como:

$$\dot{u} = (a_0 u')' + (a_1 - a_0') u' + a_2 u + f \quad (5.50)$$

Una vez que se reformuló la forma en que se presenta nuestra ecuación diferencial podemos proseguir con el procedimiento conocido para conocer la solución del problema así que como sabemos se tiene la función de residuo dada por:

$$R(x, t, \tilde{u}) = (a_0 \tilde{u}')' + (a_1 - a_0') \tilde{u}' + a_2 \tilde{u} + f - \dot{\tilde{u}} \quad (5.51)$$

Sabemos que el criterio de Galerkin requiere que la función de residuo sea ortogonal a las funciones de peso por lo que se debe cumplir que:

$$\int_{x^{min}}^{x^{max}} R n_k dx = 0 \quad (5.52)$$

$\forall k = 1, 2, \dots, N + 1$ o lo que es lo mismo:

$$\int_{x^{min}}^{x^{max}} [(a_0 \tilde{u}')' + (a_1 - a_0') \tilde{u}' + a_2 \tilde{u} + f - \dot{\tilde{u}}] n_k dx = 0 \quad (5.53)$$

Similar a como lo habíamos hecho vamos resolver la integral del término con derivada de orden dos solo para reducir el orden de la ecuación que queremos resolver tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\int_{x^{min}}^{x^{max}} (a_0 \tilde{u}')' n_k dx &= [a_0 \tilde{u}' n_k]_{x^{min}}^{x^{max}} - \int_{x^{min}}^{x^{max}} a_0 \tilde{u}' n_k' dx \\
&= [a_0 \tilde{u}'(x^{max}) n_k(x^{max})] - [a_0 \tilde{u}'(x^{min}) n_k(x^{min})] - \int_{x^{min}}^{x^{max}} a_0 \tilde{u}' n_k' dx \\
&= a_0 n_k(x^{max}) \left[\frac{\gamma_2 - \alpha_2 u(x^{max})}{\beta_2} \right] - a_0 n_k(x^{min}) \left[\frac{\gamma_1 - \alpha_1 u(x^{min})}{\beta_1} \right] - \int_{x^{min}}^{x^{max}} a_0 \tilde{u}' n_k' dx
\end{aligned}$$

Al insertar este resultado en (5.59) se tiene:

$$\begin{aligned}
&\int_{x^{min}}^{x^{max}} [a_0 \tilde{u}' n_k' - (a_1 - a_0') \tilde{u}' n_k - a_2 \tilde{u} n_k - f n_k + n_k \dot{\tilde{u}}] dx = \\
&a_0 n_k(x^{max}) \left[\frac{\gamma_2 - \alpha_2 u(x^{max})}{\beta_2} \right] - a_0 n_k(x^{min}) \left[\frac{\gamma_1 - \alpha_1 u(x^{min})}{\beta_1} \right]
\end{aligned}$$

$\forall k = 1, \dots, N+1$

Considere ahora únicamente el integrando de la ecuación anterior insertamos la función de interpolación que construimos en la ecuación anterior con lo que obtenemos:

$$\int_{x^{min}}^{x^{max}} \left[a_0 n_k' \left(\sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u} n_i' \right) - (a_1 - a_0') n_k \left(\sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u} n_i' \right) - a_2 n_k \left(\sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u} n_i \right) - f n_k + n_k \left(\sum_{i=1}^{N+1} \dot{\tilde{u}} n_i \right) \right] dx \quad (5.54)$$

Como lo hicimos anteriormente hacemos uso de las propiedades del operador \sum con lo que podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \left[\int_{x^{min}}^{x^{max}} (a_0 n_k' n_i' - (a_1 - a_0') n_k n_i' - a_2 n_k n_i) dx \right] \tilde{u}_i + \sum_{i=1}^{N+1} \left[\int_{x^{min}}^{x^{max}} (n_k n_i) dx \right] \dot{\tilde{u}} - \int_{x^{min}}^{x^{max}} n_k f dx \quad (5.55)$$

Reunimos los elementos de nuestra ecuación y utilizamos la función Delta de Kronecker para simplificar nuestra ecuación.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N+1} \left[\int_{x^{min}}^{x^{max}} (a_0 n_k' n_i' - (a_1 - a_0') n_k n_i' - a_2 n_k n_i) dx \right] \tilde{u}_i + a_0 \delta_{kN+1} \frac{\alpha_2}{\beta_2} \tilde{u}_{N+1} - a_0 \delta_{k1} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \tilde{u}_1 \\
&+ \sum_{i=1}^{N+1} \left[\int_{x^{min}}^{x^{max}} (n_k n_i) dx \right] \dot{\tilde{u}} = \int_{x^{min}}^{x^{max}} n_k f dx + a_0 \delta_{kN+1} \frac{\delta_2}{\beta_2} - a_0 \delta_{k1} \frac{\gamma_1}{\beta_1}
\end{aligned}$$

$\forall k = 1, \dots, N+1$

Reescribimos mediante el sistema de ecuaciones

$$A \tilde{u} + B \dot{\tilde{u}} = q \quad (5.56)$$

donde:

$$A_{ki} = \int_{x^{min}}^{x^{max}} (a_0 n'_k n'_i - (a_1 - a'_0) n_k n'_i - a_2 n_k n_i) dx + a_0 \delta_{kN+1} \frac{\alpha_2}{\beta_2} \tilde{u}_{N+1} - a_0 \delta_{k1} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \tilde{u}_1 \quad (5.57)$$

$$B_{ki} = \int_{x^{min}}^{x^{max}} (n_k n_i) dx \quad (5.58)$$

$$q_k = \int_{x^{min}}^{x^{max}} n_k f dx + a_0 \delta_{kN+1} \frac{\delta_2}{\beta_2} - a_0 \delta_{k1} \frac{\gamma_1}{1} \quad (5.59)$$

4. *Ensamblaje:* En este caso se tienen matrices similares a las que se tenían en el caso estático es decir la dimensión de éstas se relaciona directamente con el grado del polinomio que se eligiera para aproximar así como del numero de elementos en los que se subdivida el dominio de cualquier manera es necesario construir matrices de la forma:

$$\begin{aligned} A &= \sum_e K_g + BT \\ B &= \sum m_G \\ q &= \sum q_g + bt \end{aligned}$$

Dichas matrices son el resultado de la suma de matrices de cada uno de los elementos expandidas al orden que sea necesario según el número de elementos en que fuera dividido el dominio en este caso se han considerado n elementos por la que las matrices tendrían las siguientes dimensiones:

$$A \in M^{(n+1)(n+1)}$$

$$B \in M^{(n+1)(n+1)}$$

$$q \in M^{(n+1)(1)}$$

Tenemos entonces que las matrices de rigidez y de carga par cada uno de los elementos están dadas por:

$$k_e = \int_{x^{min}}^{x^{max}} (a_0 N' N'^T - (a_1 - a'_0) N N'^T - a_2 N N^T) dx \quad (5.60)$$

$$m_e = \int_{x^{min}}^{x^{max}} N N^T dx \quad (5.61)$$

$$m_e = \int_{x^{min}}^{x^{max}} N f dx \quad (5.62)$$

$$\mathbf{BT}_G = \begin{pmatrix} -a_0 \frac{\alpha_1(t)}{\beta_1(t)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \frac{\alpha_2(t)}{\beta_2(t)} \end{pmatrix}$$

similarmente:

$$bt_G = \begin{pmatrix} -a_0 \frac{\gamma_1(t)}{\beta_1(t)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \frac{\gamma_2(t)}{\beta_2(t)} \end{pmatrix}$$

5. *Condiciones de Frontera:* Son insertadas de manera natural como se hizo en el caso estático es decir son insertadas en las matrices de masa y de rigidez forzando al sistema a cumplir con dichas ecuaciones.
6. *Solución:* La solución de estas ecuaciones requiere de la combinación de técnicas de elemento finito junto con las de diferencias finitas ya que como se dijo antes la parte relacionada con el tiempo será resuelta mediante el esquema de diferencias finitas. básicamente tenemos la tarea de resolver sistemas de la forma:

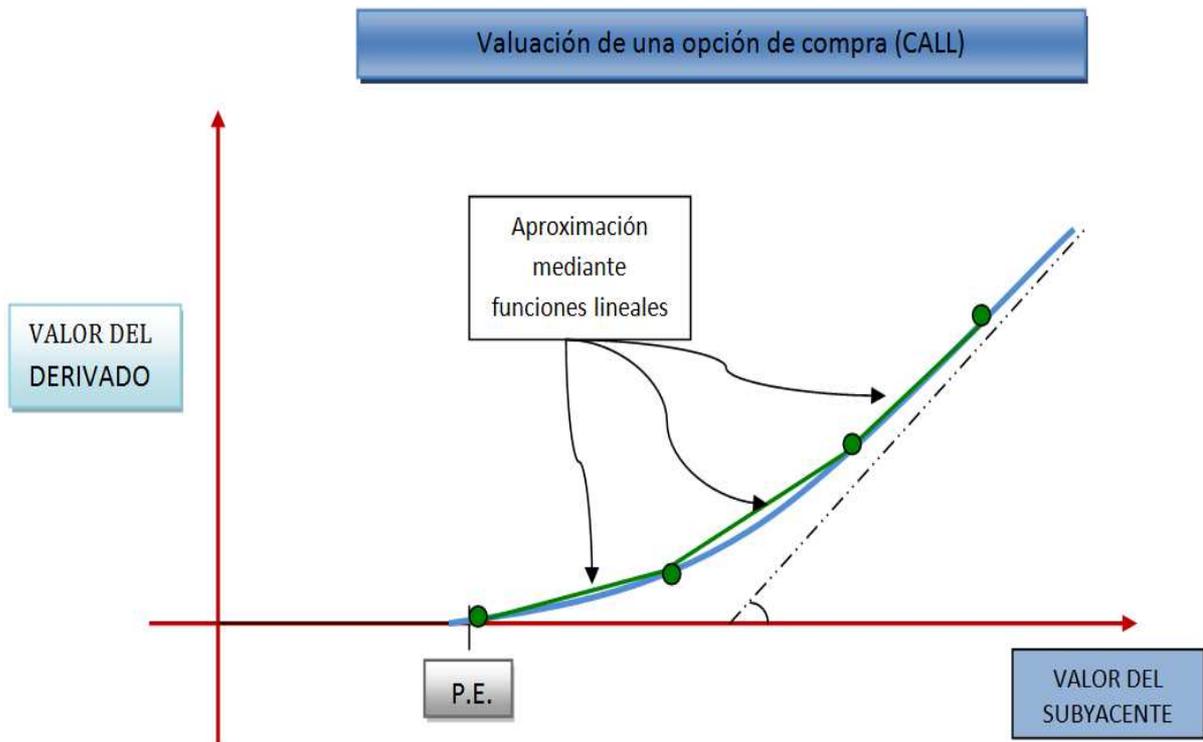
$$M\dot{\tilde{u}} + K\tilde{u} = f \quad (5.63)$$

5.4. Aplicación del M.E.F. en la ecuación unidimensional de calor

Como ya habíamos dicho la ecuación diferencial parcial de *Black-Scholes* puede ser transformada en la ecuación de calor por lo que en este apartado mostraremos cómo emplear el método de elemento finito para resolver la ecuación diferencial parcial de calor con las condiciones de frontera que derivamos en capítulos anteriores obtenidas en base a la teoría de las opciones financieras. utilizaremos la misma metodología que habíamos venido empleando para la ecuación diferencial parcial parabólica genérica con la que se había estado trabajando y utilizaremos los resultados que se obtuvieron en la sección anterior. esta sección sera dividida en dos apartados en el primero de ellos se emplean funciones de aproximación lineal y en el segundo funciones de aproximación cuadráticas esto con el fin de visualizar diferencias en la precisión y otras que pudiéramos destacar.

5.4.1. Uso de funciones de aproximación lineal.

1. *Discretización:* Se van a considerar M elementos de la misma longitud para dividir el dominio de valores que para el caso de modelo de valuación de opciones representa la gama de precios del activo subyacente es importante mencionar que aunque este dominio está acotado por cero hacia la izquierda e ∞ hacia la derecha será truncado a un intervalo finito x^{min} a x^{max} que sea de interés para los inversionistas.
2. *Interpolación:* Esta vez se empleara interpolación lineal para cada uno de los elementos los cuales serán enumerados de $1 \cdots M$ esto implica que se tendrán $M + 1$ nodos por lo tanto como se vera en lo sucesivo podemos adelantar que nuestra tarea consistirá en resolver sistemas de ecuaciones lineales de orden $M + 1$
3. *Sustitución:* Emplearemos el análisis que elaboramos en la sección anterior para determinar fácilmente la forma de las matrices de rigidez y de carga para cada uno de los elementos.
Se propuso emplear interpolación por medio de líneas como lo muestra el diagrama:



Ya conocemos la forma de las funciones base por lo tanto conocemos la forma de los vectores de interpolación y dado que los elementos son de la misma longitud podemos escribirlo como:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \\ \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \end{pmatrix} = \frac{1}{l_E^i} \begin{pmatrix} x_{i+1} - x \\ x - x_i \end{pmatrix}$$

de donde:

$$N' = \frac{1}{l_E^i} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. *Ensamblaje*: Para la ecuación de calor se tiene que $f(x) = a_1(x) = a_2(x) = 0$ por lo que las matrices para cada uno de los elementos está dado por:

$$k_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N' N'^T dx \quad (5.64)$$

al desarrollar esta expresión tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} N' N'^T dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{l_E^i} \\ \frac{1}{l_E^i} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{-1}{l_E^i} & \frac{1}{l_E^i} \end{pmatrix} dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{l_E^i}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} dx \\ &= \frac{M}{x^{max} - x^{min}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De igual modo para la matrices de carga tenemos que:

$$m_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} NN^T dx \quad (5.65)$$

Desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} NN^T dx &= \frac{1}{l_E^i} \begin{pmatrix} x_{i+1} - x \\ x - x_i \end{pmatrix} * \frac{1}{l_E^i} \begin{pmatrix} x_{i+1} - x & , & x - x_i \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{l_E^i}\right)^2 \begin{pmatrix} (x_{i+1} - x)^2 & (x_{i+1} - x)(x - x_i) \\ (x - x_i)(x_{i+1} - x) & (x - x_i)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces al desarrollar la integral del primer elemento del producto de estas matrices se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{l_E^i}\right)^2 dx &= \left(\frac{1}{l_E^i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{3l_E^i}\right)^2 (x_{i+1} - x_i)^3 \\ &= \frac{l_E^i}{3} \\ &= \frac{x_{max} - x_{min}}{3 * M} \end{aligned}$$

al desarrollar de manera análoga los otros tres elementos de la matriz podemos encontrar la siguiente forma de la matriz de carga:

$$m_e = \frac{x^{max} - x^{min}}{6 * M} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

Por último para el caso particular de la ecuación de calor tenemos que:

$$q_e = 0 \quad (5.67)$$

En este punto es prudente recordar cuál es el tipo de sistema que pretender resolver tenemos entonces según lo que analizamos en las secciones anteriores que resolver el sistema:

$$A\tilde{u} + B\dot{\tilde{u}} = 0 \quad (5.68)$$

Ahora se puede construir la matriz de rigidez global \mathbf{A} pero primero trataremos de conocer la estructura que tendrá dicha matriz nos auxiliaremos del diagrama elaborado en la sección anterior para conocer cómo se relacionan los elementos tomando en consideración que se tienen ahora \mathbf{M} elementos, igual a como ya lo se había visualizado el nodo izquierdo de los elementos coincide con el nodo derecho del elementos adyacentes de hecho son el mismo por lo que podemos adelantar que el valor del segundo renglón y la segunda columna de las matrices de rigidez de cada elemento se traslapan con el valor del primer renglón y la primera columna de la matriz de rigidez del elemento adyacente al colocarlas en la matriz global, dichas matrices quedan expresadas como:

$$A := \frac{M}{x^{max} - x^{min}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

Algo similar ocurre en la matriz de carga \mathbf{B} la cual expresamos mediante:

$$B := \frac{x^{max} - x^{min}}{6 * M} * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

5. *Condiciones de Frontera e iniciales:* Como se ha venido haciendo las condiciones de frontera y la condición inicial serán insertadas en las matrices globales que acabamos de construir forzando al sistema a cumplir con las mismas recordamos que se tenían como condiciones que:

a)

$$u(x, 0) = max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0)$$

b)

$$u(x^{min}, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x^{min} \rightarrow 0$$

c)

$$u(x^{max}, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \text{ cuando } x^{max} \rightarrow \infty$$

Aunque aún es necesario realizar algunos ajustes a las matrices globales así como ciertas operaciones algebraicas que se mostrarán a detalle posteriormente es esta la forma de resolver nuestro problema original es conveniente volver a mencionar que la parte dependiente en tiempo de nuestro problema sera discretizada mediante el método de diferencias finitas.

6. *Solución:* Dejaremos el algoritmo de solución para un apartado posterior por ahora nos limitamos a asegurar que los sistemas por resolver son de sistemas tridiagonales de orden $M + 1$ El siguiente diagrama puede ser de gran ayuda para visualizar el tipo de sistema que vamos a resolver:

Ya conocemos la forma de las funciones base por lo tanto conocemos la forma de los vectores de interpolación y dado que los elementos son de la misma longitud podemos escribirlo como:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})} \\ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x-x_i)(x-x_{i+2})} \\ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x-x_i)(x-x_{i+1})} \\ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})} \end{pmatrix}$$

de donde:

$$N' = \begin{pmatrix} \frac{2x-x_{i+1}-x_{i+2}}{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})} \\ \frac{2x-x_i-x_{i+2}}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} \\ \frac{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}{2x-x_i-x_{i+1}} \\ \frac{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})} \end{pmatrix}$$

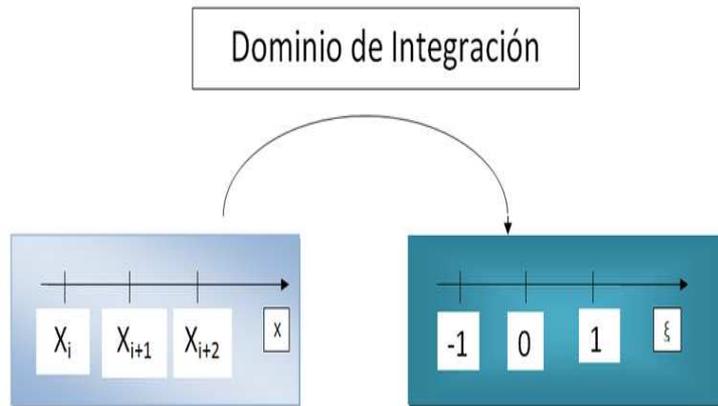
4. *Ensamblaje:* Para la ecuación de calor se tiene que $f(x) = a_1(x) = a_2(x) = 0$ por lo que las matrices para cada uno de los elementos está dado por:

$$k_e = \int_{x_i}^{x_{i+2}} N' N'^T dx \quad (5.71)$$

al desarrollar esta expresión tenemos que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} N' N'^T dx = \begin{pmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_i N'_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_i N'_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_i N'_{i+2} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_{i+1} N'_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_{i+1} N'_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_{i+1} N'_{i+2} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_{i+2} N'_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_{i+2} N'_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_{i+2} N'_{i+2} dx \end{pmatrix}$$

Para desarrollar estas ecuaciones es conveniente emplear un cambio de variable que nos permita resolver todas estas integrales con facilidad. Dado que las integrales que forman la matriz difieren solamente en los límites de integración esto es el integrando es similar para cada uno de los elementos de las matrices de rigidez se propone construir un cambio de variable que transforme la región de integración a una región normalizada esto es:



Así pues el cambio de variable propuesto es:

$$\xi = \frac{2x - (x_{i+2} + x_i)}{x_{i+2} - x_i} \quad (5.72)$$

Una vez que se conoce el cambio de variable es necesario expresar las funciones de interpolación en función de la nueva variable ξ para esto tenemos que considerar una vez mas la forma de la función de aproximación que habíamos venido empleando:

$$\tilde{u}(x, t) = u_i(t)N_i(\xi) + u_{i+1}(t)N_{i+1}(\xi) + u_{i+2}(t)N_{i+2}(\xi) \quad (5.73)$$

Sabemos también que:

$$N_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

donde $\xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1$ Resolviendo el sistema de ecuaciones que construimos a partir de esta información obtenemos las siguientes funciones de interpolación:

$$N_i(\xi) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \quad (5.74)$$

$$N_{i+1}(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (5.75)$$

$$N_{i+2}(\xi) = \frac{\xi(\xi + 1)}{2} \quad (5.76)$$

Por último necesitamos expresar la función integradora en términos de la nueva variable ξ para esto observamos que

$$dx = \frac{\Delta x_i}{2} d\xi \quad (5.77)$$

donde $\Delta x_i = x_{i+2} - x_i$ así que empleando toda esta información tenemos que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} N'_i(x)N'_j(x)dx = \frac{2}{\Delta x_i} \int_{-1}^1 N'_i(\xi)N'_j(\xi)d\xi \quad (5.78)$$

Podemos con esto construir una forma estilizada y fácil de manipular de las matrices de rigidez de cada uno de los elementos que sean considerados :

$$k_e = \frac{M}{3(x^{max} - x^{min})} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

De igual modo para la matrices de carga tenemos que:

$$m_e = \int_{x_i}^{x_{i+2}} NN^T dx \quad (5.80)$$

Desarrollando se tiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} NN^T dx = \begin{pmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_i N_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_i N_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_i N_{i+2} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_{i+1} N_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_{i+1} N_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_{i+1} N_{i+2} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_{i+2} N_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_{i+2} N_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+2}} N_{i+2} N_{i+2} dx \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

Para resolver estas integrales empleamos la misma tecnica que empleamos en las matrices de rigidez pero es necesario realizar ciertas daptaciones con lo que obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} N_i(x)N_j(x)dx = \frac{\Delta x_i}{2} \int_{-1}^1 N_i(\xi)N_j(\xi)d\xi \quad (5.82)$$

Así obtenemos la siguiente matriz de carga de un elemento :

$$m_e = \frac{x^{max} - x^{min}}{30M} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

Por último para el caso particular de la ecuación de calor tenemos que:

$$q_e = 0 \quad (5.84)$$

Entonces según lo que analizamos en las secciones anteriores se tiene que resolver el sistema:

$$A\tilde{u} + B\dot{\tilde{u}} = 0 \quad (5.85)$$

Una vez más el siguiente paso es construir la matriz de rigidez global \mathbf{A} pero primero trataremos de conocer la estructura que tendrá dicha matriz nos auxiliaremos del diagrama elaborado en la sección anterior para interpolación mediante funciones cuadráticas y de ahí conocer cómo se relacionan los elementos tomando en consideración que se tienen M elementos, igual a como ya se había visualizado el nodo izquierdo de los elementos coincide con el nodo derecho del elementos adyacentes de echo son el mismo por lo que podemos adelantar que el valor del tercer renglón y la tercer columna de las matrices de rigidez de cada elemento se traslapan con el valor del primer renglón y la primer columna de la matriz de rigidez del elemento adyacente al colocarlas en la matriz global. dichas matrices quedan expresadas como:

$$A := \frac{M}{3(x^{max} - x^{min})} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

Algo similar ocurre en la matriz de carga \mathbf{B} la cual expresamos mediante:

$$B := \frac{x^{max} - x^{min}}{30M} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (5.87)$$

5. *Condiciones de Frontera e iniciales:* Como se ha venido haciendo las condiciones de frontera y la condición inicial serán insertadas en las matrices globales que acabamos de construir forzando al sistema a cumplir con las mismas recordamos que se tenían como condiciones que:

a)

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0)$$

b)

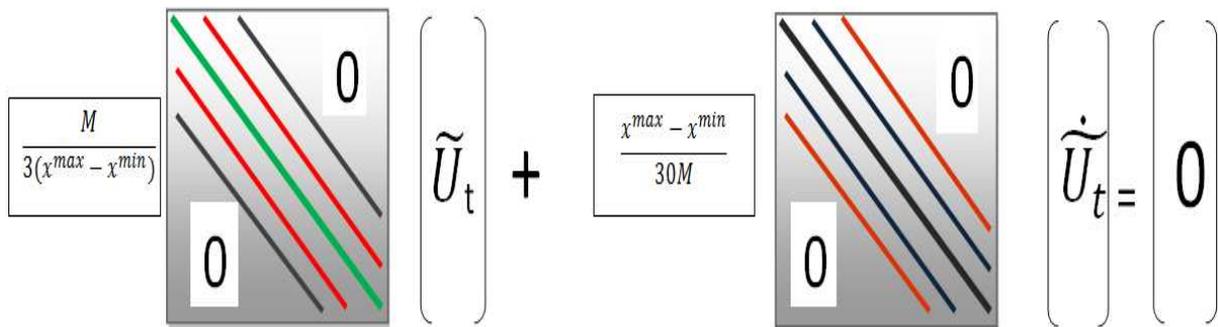
$$u(x^{min}, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x^{min} \rightarrow 0$$

c)

$$u(x^{max}, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \text{ cuando } x^{max} \rightarrow \infty$$

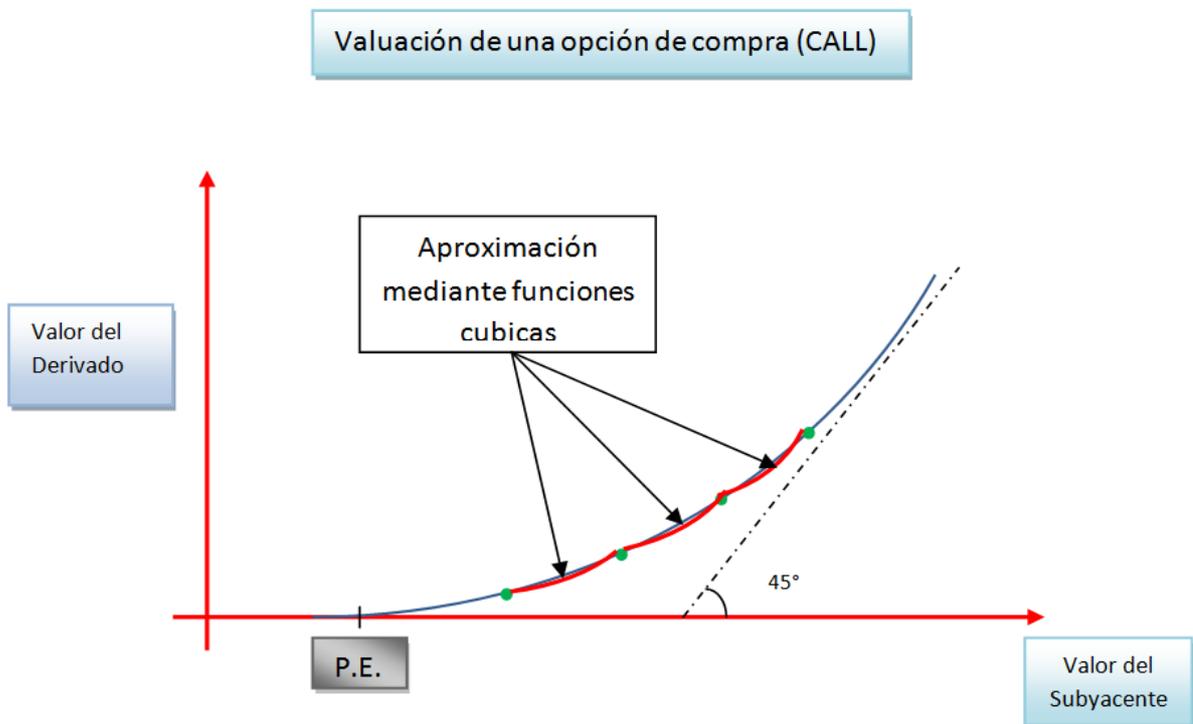
Aunque aún es necesario realizar algunos ajustes a las matrices globales así como ciertas operaciones algebraicas que se mostrarán a detalle posteriormente es esta la forma de resolver nuestro problema original es conveniente volver a mencionar que la parte dependiente en tiempo de nuestro problema sera discretizada mediante el método de diferencias finitas.

6. *Solución:* Dejaremos el algoritmo de solución para un apartado posterior por ahora nos limitamos a asegurar que los sistemas por resolver son de sistemas pentadiagonales de orden $2M + 1$ El siguiente diagrama puede ser de gran ayuda para visualizar el tipo de sistema que vamos a resolver:



5.4.3. Uso de funciones de aproximación cúbicas.

1. *Discretización:* Al igual que en los apartados anteriores se van a considerar M elementos de la misma longitud para dividir el dominio de valores que sea de interés para los inversionistas.
2. *Interpolación:* Esta vez se empleará interpolación cúbica para cada uno de los elementos los cuales serán enumerados de $1 \cdots M$ esto implica que se tendrán $3M + 1$ nodos por lo tanto como se verá en lo sucesivo podemos adelantar que nuestra tarea consistirá en resolver sistemas de ecuaciones banda cuyo ancho de banda será siete y de orden $3M + 1$
3. *Sustitución:* Emplearemos el análisis que elaboramos en las secciones anterior para determinar fácilmente la forma de las matrices de rigidez y de carga para cada uno de los elementos.
Se propuso emplear interpolación por medio de funciones cuadráticas como lo muestra el diagrama:



Ya conocemos la forma de las funciones base por lo tanto conocemos la forma de los vectores de interpolación y dado que los elementos son de la misma longitud podemos escribirlo como:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})(x-x_{i+3})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})(x_i-x_{i+3})} \\ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})(x-x_{i+3})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})(x_{i+1}-x_{i+3})} \\ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+3})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+3})} \\ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_{i+3}-x_i)(x_{i+3}-x_{i+1})(x_{i+3}-x_{i+2})} \end{pmatrix}$$

de donde:

$$N' = \begin{pmatrix} \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})+(x-x_{i+1})(x-x_{i+3})+(x-x_{i+2})(x-x_{i+3})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})(x_i-x_{i+3})} \\ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})+(x-x_i)(x-x_{i+3})+(x-x_{i+2})(x-x_{i+3})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})(x_{i+1}-x_{i+3})} \\ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})+(x-x_i)(x-x_{i+3})+(x-x_{i+1})(x-x_{i+3})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+3})} \\ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})+(x-x_i)(x-x_{i+2})+(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_{i+3}-x_i)(x_{i+3}-x_{i+1})(x_{i+3}-x_{i+2})} \end{pmatrix}$$

4. *Ensamblaje*: Para la ecuación de, calor se tiene que $f(x) = a_1(x) = a_2(x) = 0$ por lo que las matrices para cada uno de los elementos esta dado por:

$$k_e = \int_{x_i}^{x_{i+3}} N' N'^T dx \quad (5.88)$$

al desarrollar esta expresión tenemos que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} N' N'^T dx = \begin{pmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_i N'_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_i N'_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_i N'_{i+2} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_i N'_{i+3} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+1} N'_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+1} N'_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+1} N'_{i+2} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+1} N'_{i+3} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+2} N'_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+2} N'_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+2} N'_{i+2} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+2} N'_{i+3} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+3} N'_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+3} N'_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+3} N'_{i+2} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_{i+3} N'_{i+3} dx \end{pmatrix} \quad (5.89)$$

de la misma manera que en la sección anterior se emplea la técnica de cambio de variable:

$$\xi = \frac{2x - (x_{i+2}x_i)}{x_{i+2} - x_i} \quad (5.90)$$

Y también aquí es necesario expresar las funciones de interpolación en función de la nueva variable ξ para esto tenemos que considerar una vez mas la forma de la función de aproximación que habíamos venido empleando para interpolación cúbica:

$$\tilde{u}(x, t) = u_i(t)N_i(\xi) + u_{i+1}(t)N_{i+1}(\xi) + u_{i+2}(t)N_{i+2}(\xi) + u_{i+3}(t)N_{i+3}(\xi) \quad (5.91)$$

Sabemos también que:

$$N_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

donde $\xi_1 = -1, \xi_2 = -\frac{1}{3}, \xi_3 = \frac{1}{3}, \xi_4 = 1$ Resolviendo el sistema de ecuaciones que construimos a partir de esta información obtenemos las siguientes funciones de interpolación:

$$N_i(\xi) = \frac{(1-\xi)(3\xi-1)(3\xi+1)}{16} \quad (5.92)$$

$$N_{i+1}(\xi) = \frac{9(\xi-1)(3\xi-1)(\xi+1)}{16} \quad (5.93)$$

$$N_{i+2}(\xi) = \frac{9(1-\xi)(3\xi+1)(\xi+1)}{16} \quad (5.94)$$

$$N_{i+3}(\xi) = \frac{(3\xi - 1)(3\xi + 1)(\xi + 1)}{16} \quad (5.95)$$

Por último necesitamos expresar la función integradora en términos de la nueva variable ξ para esto observamos que

$$dx = \frac{\Delta x_i}{2} d\xi \quad (5.96)$$

donde $\Delta x_i = x_{i+3} - x_i$ así que empleando toda esta información tenemos que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} N'_i(x)N'_j(x)dx = \frac{2}{\Delta x_i} \int_{-1}^1 N'_i(\xi)N'_j(\xi)d\xi \quad (5.97)$$

Ahora ya podemos conocer la forma de las matrices de rigidez de cada elemento

$$k_e = \frac{M}{40(x^{max} - x^{min})} \begin{pmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

De igual modo para la matrices de carga tenemos que:

$$m_e = \int_{x_i}^{x_{i+3}} NN^T dx \quad (5.99)$$

Desarrollando se tiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} NN^T dx = \begin{pmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_i N_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_i N_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_i N_{i+2} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_i N_{i+3} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+1} N_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+1} N_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+1} N_{i+2} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+1} N_{i+3} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+2} N_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+2} N_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+2} N_{i+2} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+2} N_{i+3} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+3} N_i dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+3} N_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+3} N_{i+2} dx & \int_{x_i}^{x_{i+3}} N_{i+3} N_{i+3} dx \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

Para resolver estas integrales empleamos la misma técnica que empleamos en las matrices de rigidez pero es necesario realizar ciertas adaptaciones con lo que obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} N_i(x)N_j(x)dx = \frac{\Delta x_i}{2} \int_{-1}^1 N_i(\xi)N_j(\xi)d\xi \quad (5.101)$$

Así obtenemos la siguiente matriz de carga de un elemento :

$$m_e = \frac{x^{max} - x^{min}}{2M} \begin{pmatrix} \frac{16}{105} & \frac{33}{280} & -\frac{3}{70} & \frac{19}{840} \\ \frac{33}{280} & \frac{27}{35} & -\frac{27}{280} & -\frac{3}{70} \\ -\frac{3}{70} & -\frac{27}{280} & \frac{27}{35} & \frac{33}{280} \\ \frac{19}{840} & -\frac{3}{70} & \frac{33}{280} & \frac{16}{105} \end{pmatrix} \quad (5.102)$$

Por último para el caso particular de la ecuación de calor tenemos que:

$$q_e = 0 \quad (5.103)$$

Entonces según lo que analizamos en las secciones anteriores se tiene que resolver el sistema:

$$A\tilde{u} + B\dot{\tilde{u}} = 0 \quad (5.104)$$

Una vez más el siguiente paso es construir la matriz de rigidez global \mathbf{A} pero primero trataremos de conocer la estructura que tendrá dicha matriz nos auxiliaremos del diagrama elaborado en la sección anterior para interpolación mediante funciones cuadráticas y de ahí conocer cómo se relacionan los elementos tomando en consideración que se tienen M elementos, igual a como ya lo se había visualizado el nodo izquierdo de los elementos coincide con el nodo derecho del elementos adyacentes de hecho son el mismo por lo que podemos adelantar que el valor del tercer renglón y la tercer columna de las matrices de rigidez de cada elemento se traslapan con el valor del primer renglón y la primer columna de la matriz de rigidez del elemento adyacente al colocarlas en la matriz global. Dichas matrices quedan expresadas como:

$$A := \frac{M}{40(x^{max} - x^{min})} \begin{pmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -189 & 432 & -297 & 54 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -297 & 432 & -189 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & 54 & -189 & 296 & -189 & 54 & -13 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 54 & -297 & 432 & -189 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -13 & 54 & -189 & 296 & -189 & 54 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -189 & 432 & -297 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 54 & -297 & 432 & -189 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -13 & 54 & -189 & 148 \end{pmatrix}$$

Algo similar ocurre en la matriz de carga \mathbf{B} la cual expresamos mediante:

$$B := \frac{x^{max} - x^{min}}{2M} \begin{pmatrix} \frac{16}{105} & \frac{33}{280} & -\frac{3}{70} & \frac{19}{840} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{33}{280} & \frac{27}{35} & -\frac{27}{280} & -\frac{3}{70} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{70} & -\frac{27}{280} & \frac{27}{35} & \frac{33}{280} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{840} & -\frac{3}{70} & \frac{33}{280} & \frac{32}{105} & \frac{33}{280} & -\frac{3}{70} & \frac{19}{840} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{3}{70} & -\frac{27}{280} & \frac{27}{35} & \frac{33}{280} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{19}{840} & -\frac{3}{70} & \frac{33}{280} & \frac{32}{105} & \frac{33}{280} & -\frac{3}{70} & \frac{19}{840} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{33}{280} & \frac{27}{35} & -\frac{27}{280} & -\frac{3}{70} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{3}{70} & -\frac{27}{280} & \frac{27}{35} & \frac{33}{280} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{19}{840} & -\frac{3}{70} & \frac{33}{280} & \frac{16}{105} \end{pmatrix}$$

5. *Condiciones de Frontera e iniciales:* Como se ha venido haciendo las condiciones de frontera y la condición inicial serán insertadas en las matrices globales que acabamos de construir forzando al sistema a cumplir con las mismas recordamos que se tenían como condiciones que:

a)

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0)$$

b)

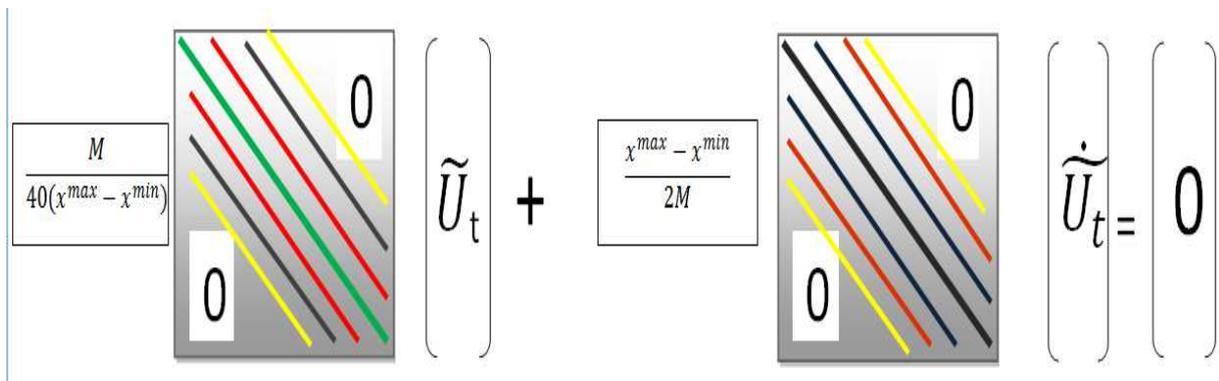
$$u(x^{\min}, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x^{\min} \rightarrow 0$$

c)

$$u(x^{\max}, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \text{ cuando } x^{\max} \rightarrow \infty$$

Aunque aún es necesario realizar algunos ajustes a las matrices globales así como ciertas operaciones algebraicas que se mostrarán a detalle posteriormente es ésta la forma de resolver nuestro problema original es conveniente volver a mencionar que la parte dependiente en tiempo de nuestro problema sera discretizada mediante el método de diferencias finitas.

6. *Solución:* Dejaremos el algoritmo de solución para un apartado posterior por ahora nos limitamos a asegurar que los sistemas por resolver son de sistemas heptadiagonales de orden $3M + 1$ El siguiente diagrama puede ser de gran ayuda para visualizar el tipo de sistema que vamos a resolver:



Capítulo 6

Valuación de Opciones sobre Activos que Cotizan en B.M.V.

6.1. Metodología

En este apartado se aplicarán los tópicos que se revisaron en los capítulos anteriores y se va a emplear información real obtenida desde los mercados bursátiles en México, lo anterior con la finalidad de visualizar una aplicación concreta y real de los métodos de valuación de opciones. La metodología que se va a emplear es la siguiente:

1. Emplear la información que se conoce sobre el esquema de negociación de derivados en México.

2. Recabar la información para poner en practica los métodos que se han desarrollado esto es:
 - a) Análisis de la información mediante los programas de cómputo que se desarrollaron en este trabajo.

 - b) Gráficas y evaluación de los Resultados.

6.2. Aplicación No. 1

Valuación de Opciones sobre América Móvil (Telcel)

Este ejemplo sirve para mostrar cómo obtener la información financiera de algún activo subyacente que permita entonces, la valuación de opciones sobre dicho activo, se muestran las fuentes que fueron consultadas y el modo en que debe interpretarse esta información para que sea de utilidad, posteriormente se emplean los métodos numéricos de valuación que se desarrollaron a lo largo de la tesis y se describe como debe interpretarse los resultados.

6.2.1. Captura de Información

Selección del Activo Subyacente:

Se elige un activo financiero cuya información financiera sea de dominio público para esto es necesario ingresar a la página de internet del mercado mexicano de derivados e ingresar en la pestaña de productos en el *link* de *contratos de opción* en la que va a aparecer una página similar a la que muestra la imagen:



Figura 6.1: Pagina del MexDer

Esta página despliega la información sobre los contratos de opción que se comercializan en México así como del tipo y razón social del activo subyacente al que pertenecen, así entonces se selecciona uno de ellos, en este caso:

- AMERICA MOVIL, S.A.B. de C.V.
serie L
Clave en Bolsa: AX
Empresa relacionada con los servicios de telecomunicaciones

Una vez seleccionado el activo subyacente se puede emplear la información que brinda la página de la bolsa mexicana de valores sobre el estado del activo que estamos investigando, para ello es necesario ingresar a la página y navegar en *link* de las empresas emisoras una vez ahí es posible ubicar rápidamente la información relacionada con el desempeño de la empresa propietaria de las acciones y de este modo podemos consultar la estabilidad de sus precios así como el estado actual de la compañía esto con el fin de ir formando un criterio sobre el tipo de riesgo al que se va a enfrentar un inversionista.

Ya que se tiene una primera impresión del comportamiento del activo que se está examinando es necesario elaborar una análisis detallado del historial del activo, por lo anterior es necesario emplear una pagina de Internet que resulta de gran utilidad en este tipo de aplicaciones ya que esta nos brinda el historial del activo en un formato apropiado para su análisis estadístico mediante una hoja de cálculo de "Microsoft Excel" así que ingresamos a la página de *yahoo finanzas* la cual posee un *link* de inversiones donde basta con ingresar la razón social de la empresa que estamos investigando para que nos brinde la información. Con esta información se elaborara una gráfica (figura 6.2) que muestra el comportamiento del activo.



Figura 6.2: Historial de los precios del activo

Una vez capturada esta información podemos estimar el valor de la volatilidad del activo que se está analizando, aunque existen técnicas muy sofisticadas para realizar este calculo se considera la desviación estándar como medida de la volatilidad para la valuación de opciones, se considera también que es conveniente analizar el historial de 30 días anteriores para obtener una buena estimación. Al elaborar dicho cálculo obtenemos el valor de la volatilidad diaria que es:

▪

$$\sigma_d = 0,030596$$

Precio de Ejercicio

En el caso de las opciones sobre acciones de América Móvil el MexDer establece que los precios de ejercicio se encontrarán distribuidos a intervalos iguales y dependerán del precio de la acción. Una vista mas detallada nos permite verificar que los precios de Ejercicio se encuentran distribuidos de la siguiente manera:

- Desde 25 Pesos por Acción hasta 38 Pesos por Acción

Diferidos a un peso por acción entre cada uno de los precios de ejercicio.

Tasa de Interés

Otro de los datos que es necesario conocer para estimar el valor de las opciones es la tasa de interés libre de riesgo y para poder conocerla es necesario ingresar a la página del Banco de México y considerar el historial del monto de interés que brinda el gobierno sobre los certificados de deuda que para el caso de México corresponde con la tasa de los CETES (certificados del Tesoro) a 28 días. La siguiente imagen muestra el sitio en Internet que despliega dicha información.

El análisis de la información de esta página permite establecer el valor de la tasa de interés que vamos se va a

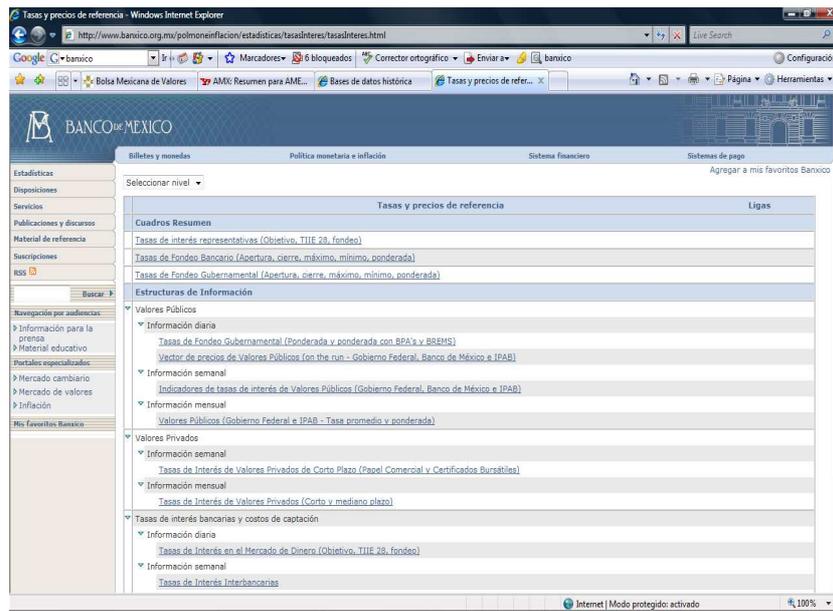


Figura 6.3: Pagina del Banco de México

utilizar así como la posibilidad de elaborar un gráfico que nos ilustre el comportamiento de las tasas de interés en México:

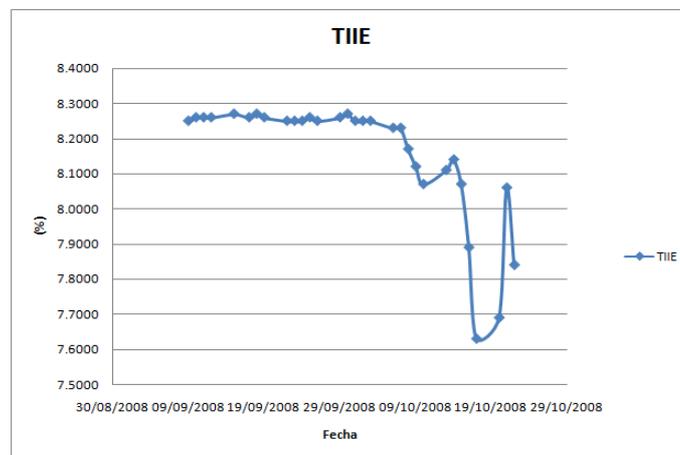


Figura 6.4: Historial de la tasa de interés

$$r_a = 0,081574194$$

Tipo de opcion:

- Call Europea

6.2.2. Análisis de la información, gráficos y evaluación de los Resultados

Una vez capturada la información se puede establecer plenamente el siguiente problema:¹ Un inversionista desea conocer el valor de una opción CALL tipo Europea sobre las acciones de América Móvil cuya volatilidad diaria $\sigma_d = 1,5413\%$ (Volatilidad anualizada $= \sigma = \sigma_d * \sqrt{250} = 0,4837$) fechada un año antes de la expiración del contrato, el precio de ejercicio de 30 pesos/acción, tasa de interés anual $r_a = 0,081574194$ (Tasa de interés continuo $r = (\ln(1 + r_a)) = 0,07841$). Desea conocer el valor del derivado para cada uno de los posibles precios del activo subyacente así como su evolución en función del tiempo que le resta de vida al contrato (“Time to Maturity”).

6.2.3. Valuación Mediante Diferencias Finitas

Para realizar la valuación de opciones mediante diferencias finitas lo primero es seleccionar el rango de precios del activo para los cuales se va a calcular el precio de la opción, por lo general para los inversionistas el rango de interés se encuentra cercano al precio de ejercicio, sin embargo, pensando en las condiciones de frontera requeridas para la valuación mediante métodos numéricos se selecciona un rango mas amplio, posteriormente se aplican las transformaciones sugeridas en (3.43) al intervalo seleccionado con lo que se obtiene:

$$S^{min} = ,01Pesos/Acción \Rightarrow x^{min} = -5,703$$

$$S^{max} = 100Pesos/Acción \Rightarrow x^{max} = 1,204$$

Una operación similar ocurre para el dominio del tiempo donde t representa el tiempo que le resta de vida al contrato (“Time to Maturity”):

$$t^{min} = 0Año \Rightarrow \tau^{min} = 0$$

$$t^{max} = 1Año \Rightarrow \tau^{max} = ,117$$

Ya con el dominio especificado procedemos a discretizar la ecuación de calor en intervalos de la misma longitud para el tiempo y espacio como muestra la imagen:

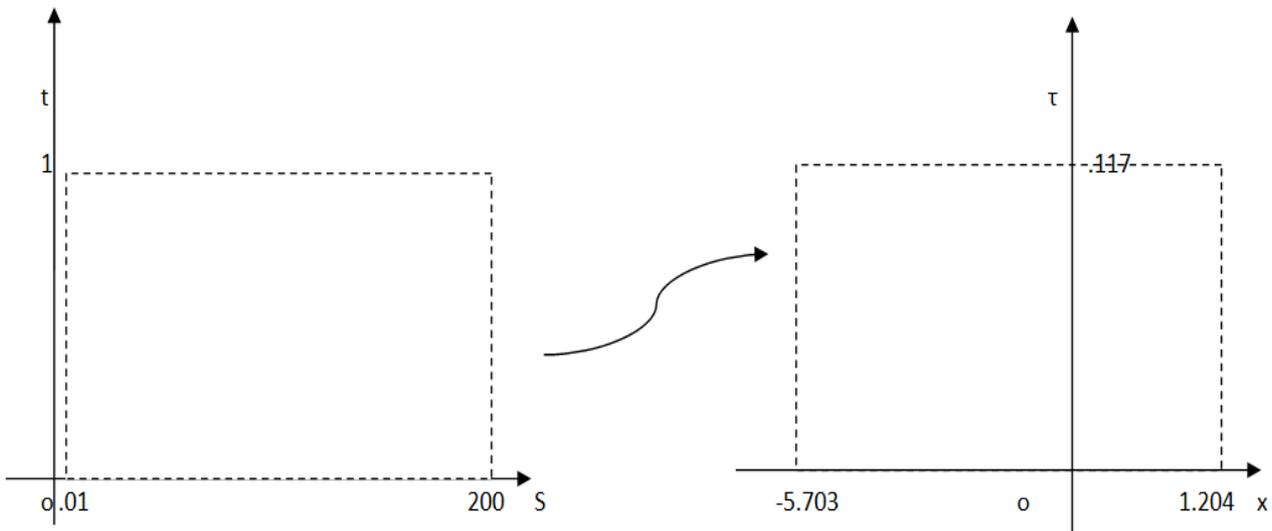


Figura 6.5: Cambio de Dominio

¹Un planteamiento similar se puede consultar en: Levi Haim, *Introduction to Investments*, Ed Thompson, 1996, pp.863

En este caso se dividió el dominio de precios en 512 subintervalos de la misma longitud y el dominio del tiempo fue dividido en 32 intervalos todos ellos de la misma longitud. Con estos datos se puede generar una malla similar a la que muestra en la figura 6.6 donde cada una de las intersecciones corresponde con un punto donde se interpolará. El siguiente punto es construir las condiciones de frontera que permitan resolver el problema

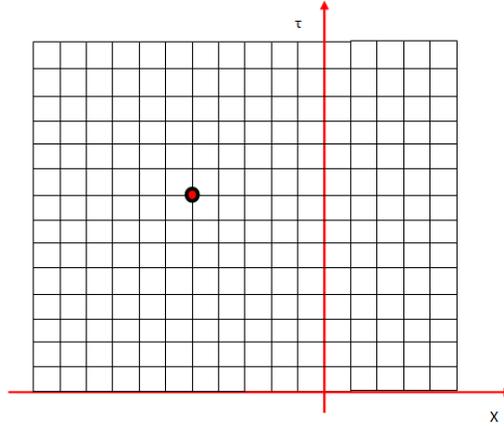


Figura 6.6: Discretización del Dominio

para esto empleamos las ecuaciones (3.51), (3.52) y (3.53) las cuales desarrolladas para este caso en particular son:

1.

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(1,67)x} - e^{\frac{1}{2}(-,33)x}, 0) \quad (6.1)$$

2.

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(1,67)x + \frac{1}{4}(2,79)\tau} \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad (6.2)$$

3.

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \quad (6.3)$$

Conocida la condición inicial se puede construir el vector de condición inicial \vec{U}_0 que nos permita resolver (4.29) también se puede ahora establecer claramente la forma de la matriz Ψ desarrollada en (4.29) en este caso los elementos de dicha matriz son:

$$\begin{aligned} 1 + 2\nu &= 344,34 \\ -\nu &= -171,67 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Mediante la solución de (4.29) con estos datos podemos estimar el valor de la opción para el siguiente intervalo de tiempo la solución de este sistema de ecuaciones se realiza mediante el programa 1 del apéndice A “M.D.F para valuación de un Call” sin embargo una vez resuelto el sistema de ecuaciones es necesario aplicar las transformaciones inversas propuestas en (3.50) a los resultados obtenidos con lo que conocemos finalmente el valor de la opción en el dominio original.

Se muestra el resultado de esta operación mediante un gráfico donde cada uno de los puntos corresponde con el valor de la opción según el valor del subyacente y con un tiempo antes del vencimiento de $\frac{1}{32}$ de año ≈ 11 días.

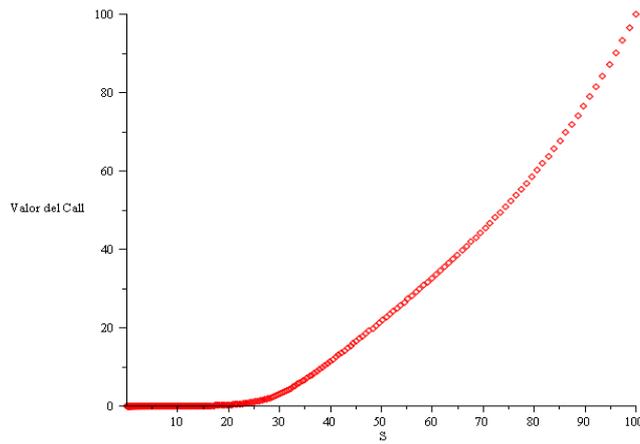


Figura 6.7: Valor del un Call con 11 días antes del vencimiento

De manera similar se realizan los cálculos para el resto de los intervalos en que fue discretizado el dominio del tiempo luego se grafican todos ellos donde se muestra el dominio del tiempo y el dominio de precios completo:

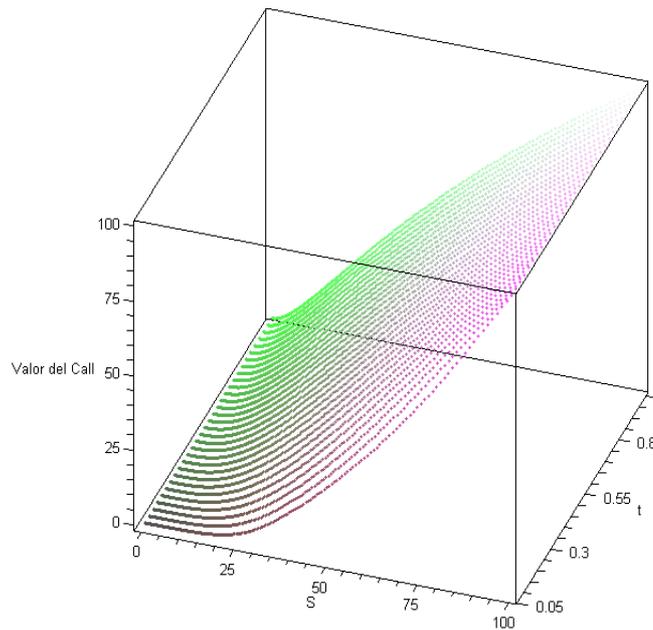


Figura 6.8: Valor del un Call mediante diferencias finitas con distintas fechas antes del vencimiento

En este gráfico se puede apreciar el efecto del tiempo sobre el valor del derivado provocando en este reducción de su precio cuando el activo subyacente baja su precio por debajo del precio de ejercicio pero aumentando su valor cuando el tiempo de vida del contrato de opción es mayor.

6.2.4. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Lineal)

Para realizar la valuación de opciones mediante elemento finito lo primero es seleccionar el rango de precios del activo para los cuales se va a calcular el precio de la opción, se conserva el mismo intervalo del análisis anterior posteriormente se aplican las transformaciones sugeridas en (3.43) al intervalo seleccionado con lo que se obtiene:

$$S^{min} = ,01Pesos/Acción \Rightarrow x^{min} = -5,703$$

$$S^{max} = 100Pesos/Acción \Rightarrow x^{max} = 1,204$$

Una operación similar ocurre para el dominio del tiempo donde t representa el tiempo que le resta de vida al contrato (*"Time to Maturity"*):

$$t^{min} = 0Año \Rightarrow \tau^{min} = 0$$

$$t^{max} = 1Año \Rightarrow \tau^{max} = ,117$$

Ya con el dominio especificado procedemos a discretizar en intervalos de la misma longitud en tiempo y espacio la ecuación de calor que se ha especificado para la valuación de opciones en este caso por tratarse de interpolación lineal la discretización es igual a la que se hizo para diferencias finitas en el análisis anterior. Se divide el dominio de precios en 512 elementos de la misma longitud y el dominio del tiempo fue dividido en 32 intervalos todos ellos de la misma longitud. Con estos datos se puede generar una malla como la que se diseñó en la sección anterior donde cada una de las intersecciones corresponde con un punto de interpolación. El siguiente punto es construir las condiciones de frontera que permitan resolver el problema para esto empleamos las ecuaciones (3.51), (3.52) y (3.53) las cuales desarrolladas para este caso en particular son:

1.

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(1,67)x} - e^{\frac{1}{2}(-,33)x}, 0) \quad (6.5)$$

2.

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(1,67)x + \frac{1}{4}(2,79)\tau} \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad (6.6)$$

3.

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \quad (6.7)$$

Conocida la condición inicial se puede construir el vector de condición inicial \tilde{u}^0 que nos permita resolver (5.68), sin embargo, aun falta emplear diferencias finitas para de discretización en tiempo de este sistema para hacer esto solo es necesario emplear la formula de Taylor de diferencias hacia adelante (4.15) con la cual expresamos (5.68) como:

$$\begin{aligned} A\tilde{u} + B\dot{\tilde{u}} &= 0 \\ B\dot{\tilde{u}} &= -A\tilde{u} \\ B\left(\frac{\tilde{u}^{t+1} - \tilde{u}^t}{\Delta t}\right) &= -A\tilde{u}^t \\ B\tilde{u}^{t+1} &= B\tilde{u}^t - \Delta t A\tilde{u}^t \end{aligned}$$

La forma de las matriz de rigidez A y de la matriz de carga B para este caso en particular se obtiene directamente de la sustitución de valores en (5.69) y (5.70) dando por resultado:

$$A := (74,1277) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Algo similar ocurre en la matriz de carga B la cual expresamos mediante:

$$B := (0,002248) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Con estos datos podemos estimar el valor de la opción para el siguiente intervalo de tiempo la solución de este sistema de ecuaciones se realiza mediante el programa 3 del apéndice A “M.E.F. Interpolación Lineal, para valuación de un CALL” una vez resuelto el sistema de ecuaciones es necesario aplicar las transformaciones inversas propuestas en (3.50) a los resultados obtenidos con lo que conocemos finalmente el valor de la opción en el dominio original. Se muestra el resultado de esta operación mediante un gráfico donde cada uno de los puntos corresponde con el valor de la opción según el valor del subyacente y con una tiempo antes del vencimiento de $\frac{1}{32}$ de año ≈ 11 días.

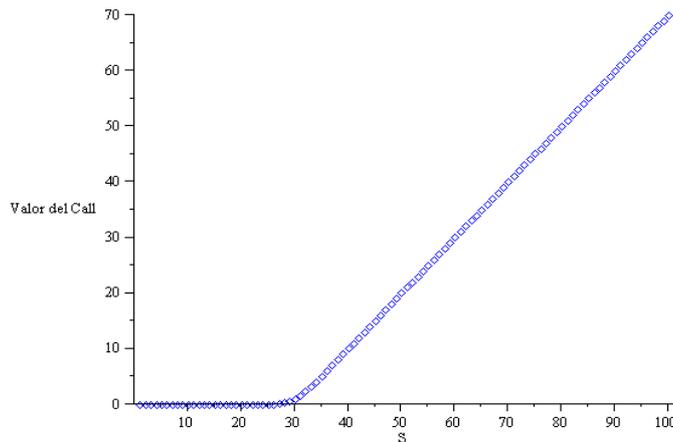


Figura 6.9: Valor del un Call con 11 días antes del vencimiento

De manera similar se realizan los cálculos para el resto de los intervalos en que fue discretizado el dominio del tiempo luego se grafican todos ellos donde se muestra el dominio del tiempo y el dominio de precios completo:

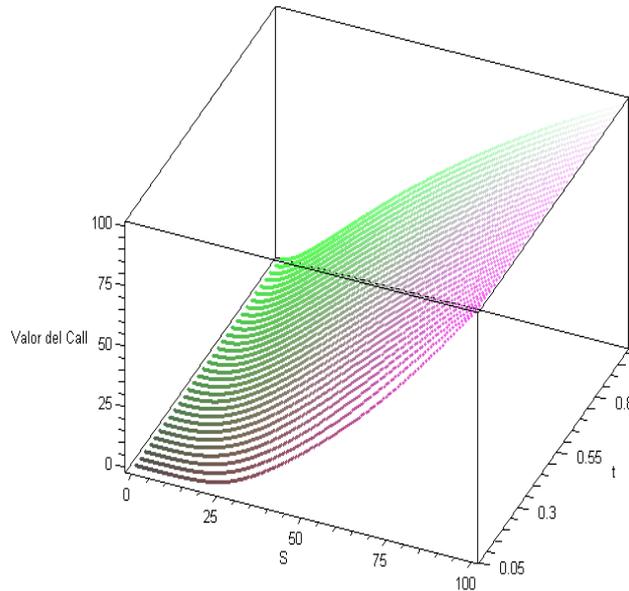


Figura 6.10: Valor del un Call mediante elemento finito con distintas fechas antes del vencimiento

Este gráfico muestra como evoluciona el valor del derivado confirmando las proposiciones teóricas ya que como se aprecia en el mismo a medida que aumenta el precio del activo subyacente la opción incrementa su valor hasta el punto en el que el activo subyacente y la opción valen practicamente lo mismo, por otro lado a medida que disminuye el tiempo de vida del contrato el valor de la opción decrece hasta el punto en que su valor es el mismo que el de la función de pago de una opción de compra.

6.2.5. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Cuadrática)

Para realizar la valuación de opciones mediante elemento finito e interpolación cuadrática se procede de la misma manera como se ha venido haciendo lo primero es seleccionar el rango de precios del activo para los cuales se va a calcular el precio de la opción, se conserva el mismo intervalo del análisis anterior posteriormente se aplican las transformaciones sugeridas en (3.43) al intervalo seleccionado con lo que se obtiene:

$$S^{min} = ,01Pesos/Acción \Rightarrow x^{min} = -5,703$$

$$S^{max} = 100Pesos/Acción \Rightarrow x^{max} = 1,204$$

Una operación similar ocurre para el dominio del tiempo donde t representa el tiempo que le resta de vida al contrato (“Time to Maturity”):

$$t^{min} = 0Año \Rightarrow \tau^{min} = 0$$

$$t^{max} = 1Año \Rightarrow \tau^{max} = ,117$$

Ya con el dominio especificado procedemos a discretizar en intervalos de la misma longitud en tiempo y espacio la ecuación de calor que se ha especificado para la valuación de opciones pero en este caso por tratarse de interpolación cuadrática la discretización del espacio de los precios requiere un numero mas grande de nodos

pues por cada elemento que se interpole se requerirían 3 nodos. Se divide el dominio de precios en 512 elementos de la misma longitud y se emplea un tercer punto en el centro de cada uno de los elementos esto general un total de 1025 nodos, el dominio del tiempo fue dividido en 32 intervalos todos ellos de la misma longitud. Con estos datos se puede generar una malla como la que se diseño en la sección anterior donde cada una de las intersecciones corresponde con un punto de interpolación sin embargo se trata de una malla mas refinada. El siguiente punto es construir las condiciones de frontera que permitan resolver el problema para esto empleamos las ecuaciones (3.51),(3.52) y (3.53) las cuales desarrolladas para este caso en particular son:

1.
$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(1,67)x} - e^{\frac{1}{2}(-,33)x}, 0) \tag{6.10}$$

2.
$$u(x, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(1,67)x + \frac{1}{4}(2,79)\tau} \text{ cuando } x \rightarrow \infty \tag{6.11}$$

3.
$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \tag{6.12}$$

Conocida la condición inicial se puede construir el vector de condición inicial \tilde{u}^0 que nos permita resolver (5.68), sin embargo, es necesario emplear diferencias finitas para de discretización en tiempo de este sistema para hacer esto solo es necesario emplear la formula de Taylor de diferencias hacia adelante (4.15) con la cual expresamos (5.68) como:

$$\begin{aligned} A\tilde{u} + B\dot{\tilde{u}} &= 0 \\ B\dot{\tilde{u}} &= -A\tilde{u} \\ B\left(\frac{\tilde{u}^{t+1} - \tilde{u}^t}{\Delta t}\right) &= -A\tilde{u}^t \\ B\tilde{u}^{t+1} &= B\tilde{u}^t - \Delta t A\tilde{u}^t \end{aligned}$$

La forma de las matriz de rigidez A y de la matriz de carga B para este caso en particular se obtiene directamente de la sustitución de valores en (5.86) y (5.87) dando por resultado:

$$A := (24,71) \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

Algo similar ocurre en la matriz de carga **B** la cual expresamos mediante:

$$B := (0,00039) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

Con estos datos podemos estimar el valor de la opción para el siguiente intervalo de tiempo la solución de este sistema de ecuaciones se realiza mediante el programa 4 del apéndice A “M.E.F. Interpolación Cuadrática, para valuación de un CALL” una vez resuelto el sistema de ecuaciones es necesario aplicar las transformaciones inversas propuestas en (3.50) a los resultados obtenidos con lo que conocemos finalmente el valor de la opción en el dominio original. Se muestra el resultado de esta operación mediante un gráfico donde cada uno de los puntos corresponde con el valor de la opción según el valor del subyacente y con un tiempo antes del vencimiento de $\frac{1}{32}$ de año ≈ 11 días. De manera similar se realizan los cálculos para el resto de los intervalos en que fue

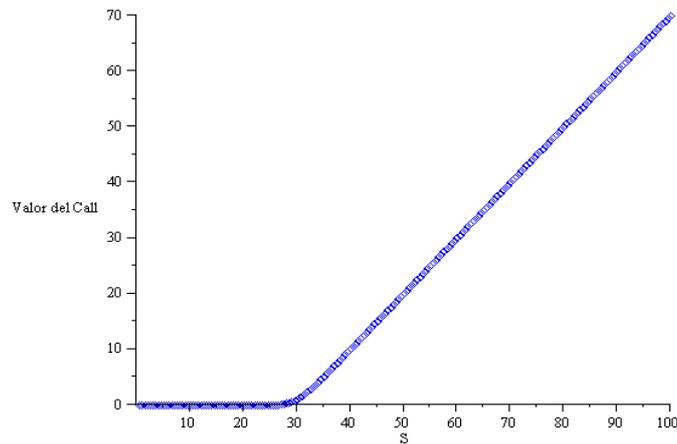


Figura 6.11: Valor del un Call con 11 días antes del vencimiento

discretizado el dominio del tiempo luego se grafican todos ellos donde se muestra el dominio del tiempo y el dominio de precios completo:

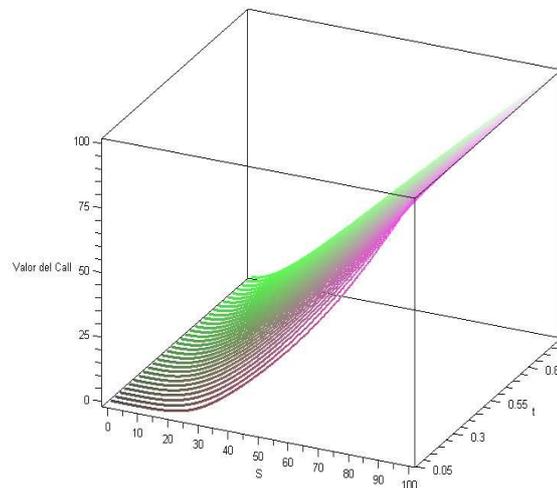


Figura 6.12: Valor del un Call mediante elemento finito con distintas fechas antes del vencimiento

Este gráfico muestra también la evolución del precio de una opción *Call* sin embargo este tiene una definición más clara puesto que cada uno de los elementos que compone la discretización en precios está formado por tres nodos que permiten desarrollar la interpolación con más precisión.

6.3. Aplicación No. 2 Valuación de Opciones sobre Divisas (Dólar Americano)

El objetivo de esta aplicación es emplear el método de diferencias finitas en la valuación de una opción de venta (*Put*) sobre dolares americanos esto con la intención de revisar como emplear este trabajo para la valuación de esta clase de opciones, sin embargo, el énfasis se centra en la valuación de opciones *Call* puesto que mediante la paridad *Put-Call* se puede determinar el precio de las opciones *Put* conociendo el valor del *Call*, por lo que se van a desarrollar comparaciones entre la valuación de una opción de compra mediante diferencias finitas, elemento finito y el método analítico.

6.3.1. Captura de Información

Selección del Activo Subyacente:

Similar al caso anterior se va a seleccionar un activo financiero cuya información financiera sea de dominio público. Para esto una vez mas se requiere ingresar a la pagina de Internet del mercado mexicano de derivados. En este caso seleccionamos el siguiente activo subyacente:

- Dólar de los Estados Unidos de América
Clave en Bolsa: DA

En esta ocasión la información del historial de comportamiento se puede adquirir desde la página del Banco de México y similar a como se hizo en el apartado anterior se elabora una gráfico que permita conocer el desempeño del activo subyacente en los últimos días.

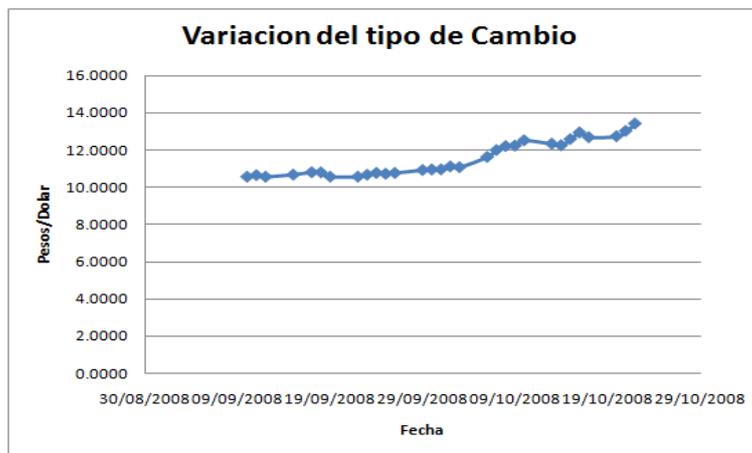


Figura 6.13: Tipo de Cambio

Una vez que se tiene una primera impresión del comportamiento del activo que se está analizando es necesario elaborar una análisis detallado del historial del activo. Una vez capturada la información referente al historial del tipo de cambio podemos estimar el valor de la volatilidad del activo que se está analizando y aunque existen técnicas muy sofisticadas para realizar cálculos sobre la volatilidad de una activo se considera que la desviación estándar es un buen estimador se considera también que es conveniente analizar el historial de 30 días anteriores para obtener una buena estimación.

Al elaborar dicho cálculo obtenemos el valor de la volatilidad que es:

- $$\sigma = 0,928972034$$

El Precio de Ejercicio

En el caso de las opciones sobre divisas el MexDer establece que los precios de ejercicio se expresarán en pesos de acuerdo al precio del Dólar fecha valor *spot* y serán múltiplos de 0.05 pesos una vista más detallada de la información que muestra la pagina del MexDer nos permite verificar que los precios de ejercicio se encuentran distribuidos de la siguiente manera:

- Desde 10.5 Pesos por Dólar hasta 12 Pesos por Dólar

Diferidos a .05 pesos por dolar entre cada uno de los precios de ejercicio.

Tasa de Interés

El análisis de la información elaborado para el ejemplo anterior brinda el valor de la tasa de interés que vamos a considerar:

- $$r = 0,081574194$$

Tipo de opción:

- Europea

6.3.2. Análisis de la información, gráficos y evaluación de los Resultados

Una vez capturada la información podemos establecer plenamente el siguiente problema:² Un inversionista desea conocer el valor de una opción PUT tipo Europea sobre las acciones de América Móvil cuya volatilidad es $\sigma = 0,928972034\%$ fechada un año antes de la expiracion del contrato, el precio de ejercicio de 11 pesos/acción, tasa de interés continua $r = 0,081574194$. Desea conocer el valor del derivado para cada uno de los posibles precios del activo subyacente así como su evolución en funcion del tiempo que le resta de vida al contrato (“*Time to Maturity*”).

6.3.3. Valuación de una opción de venta

El método para valuar una opción de venta es similar al de la valuación de las opciones de compra, un procedimiento es el siguiente. Seleccionar el rango de precios del activo para los cuales se va a calcular el precio de la opción, por lo general el rango de interés se encuentra cercano al precio de ejercicio, sin embargo, pensando en las condiciones de frontera requeridas para la valuación mediante métodos numéricos se selecciona un rango mas amplio, posteriormente se aplican las transformaciones sugeridas en (3.43)al intervalo seleccionado con lo que se obtiene:

$$S^{min} = ,01Pesos/Acción \Rightarrow x^{min} = -5,703$$

$$S^{max} = 100Pesos/Acción \Rightarrow x^{max} = 1,204$$

Una operación similar ocurre para el dominio del tiempo donde t representa el tiempo que le resta de vida al contrato (“*Time to Maturity*”):

$$t^{min} = 0Año \Rightarrow \tau^{min} = 0$$

$$t^{max} = 1Año \Rightarrow \tau^{max} = ,117$$

Ya con el dominio especificado procedemos a discretizar la ecuación de calor en intervalos de la misma longitud para el tiempo y espacio como muestra la imagen:

En este caso se dividió el dominio de precios en 200 subintervalos de la misma longitud y el dominio del tiempo

²Un planteamiento similar se puede consultar en: Levi Haim, *Introduction to Investments*, Ed Thompson, 1996, pp.863

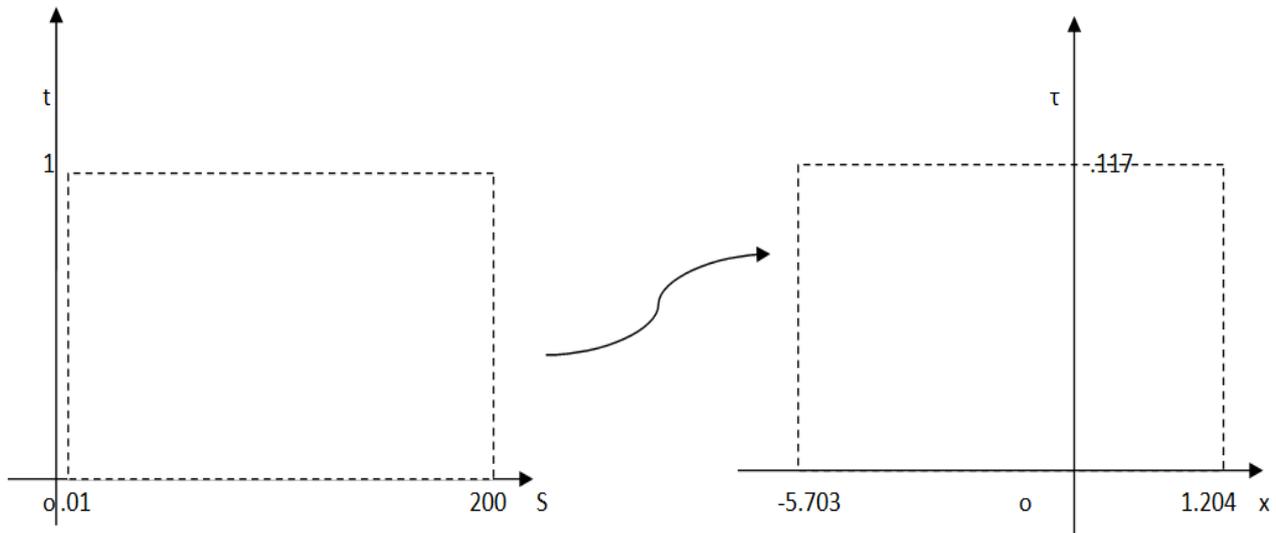


Figura 6.14: Cambio de Dominio

fue dividido en 32 intervalos todos ellos de la misma longitud. Con estos datos se puede generar una malla similar a la que muestra en la figura (6.15) donde cada una de las intersecciones corresponde con un punto donde se interpolará.

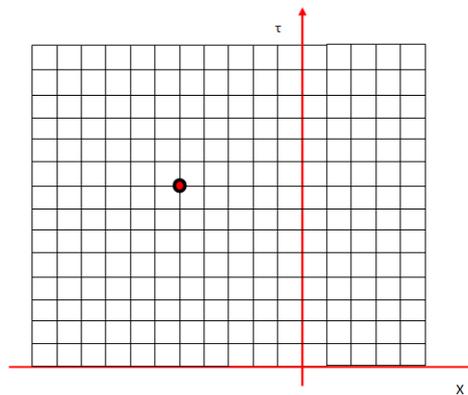


Figura 6.15: Discretización del Dominio

El siguiente punto es construir las condiciones de frontera que permitan resolver el problema para esto empleamos las ecuaciones (3.54),(3.55) y (3.56) las cuales desarrolladas para este caso en particular son:

1.

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(-.81094)x} - e^{\frac{1}{2}(1,189)x}, 0) \tag{6.15}$$

2.

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty \tag{6.16}$$

3.

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(-.81094)x + \frac{1}{4}(1,189)^2\tau} \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \tag{6.17}$$

Conocida la condición inicial se puede construir el vector de condición inicial \vec{U}_0 que nos permita resolver (4.29) se establece entonces la forma de la matriz Ψ desarrollada en (4.29) en este caso los elementos de dicha matriz son:

$$\begin{aligned} 1 + 2\nu &= 8,3676 \\ -\nu &= -3,6838 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Mediante la solución de (4.29) con estos datos podemos estimar el valor de la opción para el siguiente intervalo de tiempo la solución de este sistema de ecuaciones se realiza mediante el programa 2 del apéndice A “M.D.F. Para valuación de un PUT” sin embargo una vez resuelto el sistema de ecuaciones es necesario aplicar las transformaciones inversas propuestas en (3.50) a los resultados obtenidos con lo que conocemos finalmente el valor de la opción en el dominio original.

Por otra parte el objetivo de este ejemplo es mostrar comparaciones entre los resultados del análisis numérico y la solución analítica por lo que se procede a emplear la formula de valuación analítica: Un desarrollo similar al de (3.31) permite obtener la formula para la valuación de opciones de venta esto es:

$$V_P(S, t) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S N(-d_1) \quad (6.19)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (6.20)$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (6.21)$$

Lo que se tiene que hacer es sustituir los precios del subyacente y del tiempo en la formula para obtener el valor de la opción *Put* por ejemplo para obtener el valor de la opción de venta que se esta analizando cuando el precio del subyacente es 2 Pesos/Dólar y cuando el tiempo de vida de esta opciones de 182 días.

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{2}{11}) + (0,081574194 + \frac{1}{2} \cdot 0,86299)(\frac{1}{2})}{0,92897\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= -2,204677246 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln(\frac{2}{11}) + (0,081574194 - \frac{1}{2} \cdot 0,86299)(\frac{1}{2})}{0,92897\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= -2,861559671 \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} V_P(S, t) &= 11e^{-0,081574194 \cdot (\frac{1}{2})} N(1,430779835) - 2 \cdot N(1,102338623) \\ &= 8,565586017 \end{aligned}$$

Se muestra el resultado de esta operación mediante un gráfico donde cada uno de los puntos corresponde con el valor de la opción según el precio del subyacente, la línea continua representa el valor analítico calculado para esta opción el tiempo antes del vencimiento es de $\frac{16}{32}$ de año ≈ 182 días.

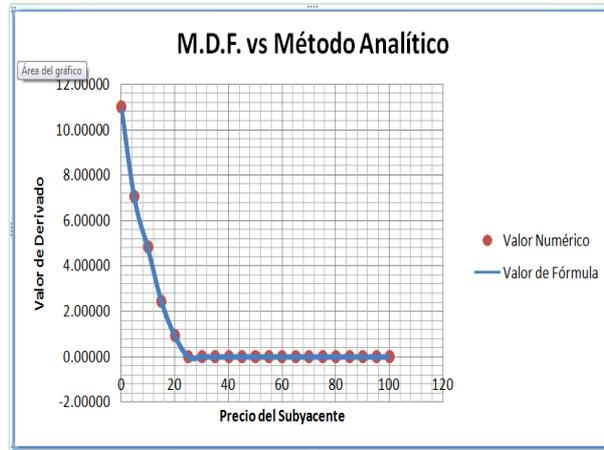


Figura 6.16: Valor del un Put con 182 días antes del vencimiento

Por ultimo se realizan los cálculos haciendo variar los precios del subyacente entre todo el dominio en que se quiera analizar también se hace variar el tiempo antes del vencimiento del contrato.

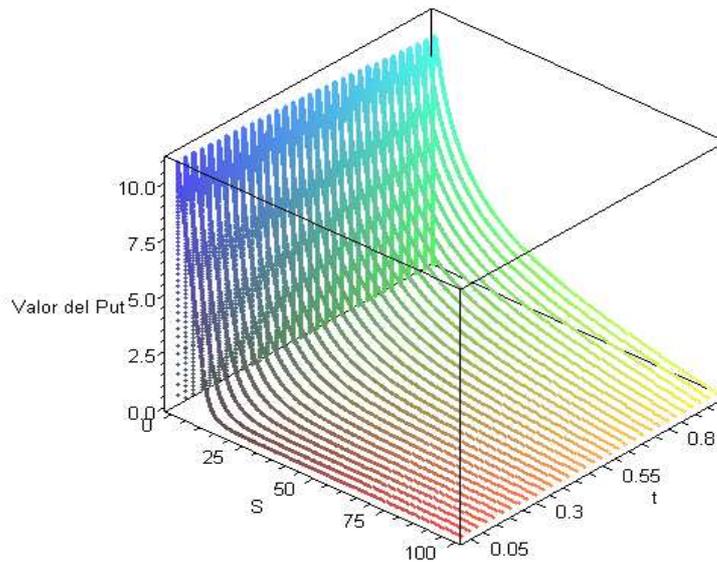


Figura 6.17: Valor de un Put mediante diferencias finitas con distintas fechas antes del vencimiento

En este gráfico se puede apreciar claramente el efecto que tiene el tiempo sobre el valor del derivado provocando en este reducción de su precio cuando el activo subyacente aumenta su precio por encima del precio de ejercicio pero aumentando su valor cuando el tiempo de vida del contrato de opción es mayor.

La tabla siguiente muestra un resumen de la comparación de los datos obtenidos numéricamente y los datos analíticos además de que permite visualizar estos comparativos más fácilmente, esta tabla se construye seleccionando un tiempo antes del vencimiento de **182 días** se capturan los datos para ser evaluados mediante el método analítico como se acaba de mostrar y se capturan también algunos de los datos que proporciona el método numérico de diferencias finitas posteriormente se toma como referencia el valor analítico y se considera como error la diferencia de la solución numérica respecto de la solución analítica.

Datos del Activo Subyacente			
Subyacente : Dólar Americano (Divisas)			
Precio de Ejercicio: 11 pesos/Dólar			
volatilidad: 0.93	tasa de Interés 8.2 %		
tiempo antes del vencimiento : 0.5 años			
Precio del Subyacente	Método de Valuación		Error
	Analítico	Numérico	
		Diferencias Finitas	
0	11.00000	11.00000	0.0000%
5	6.91954	7.0579	2.0000%
10	4.73761	4.8418	2.2000%
15	2.42467	2.4269	0.0900%
20	0.91347	0.9140	0.0600%
25	0.00000	0.0000	0.0010%
30	0.00000	0.0000	0.0000%
35	0.00000	0.0000	0.0000%
40	0.00000	0.0000	0.0000%
45	0.00000	0.0000	0.0000%
50	0.00000	0.0000	0.0000%
55	0.00000	0.0000	0.0000%
60	0.00000	0.0000	0.0000%
65	0.00000	0.0000	0.0000%
70	0.00000	0.0000	0.0000%
75	0.00000	0.0000	0.0000%
80	0.00000	0.0000	0.0000%
85	0.00000	0.0000	0.0000%
90	0.00000	0.0000	0.0000%
95	0.00000	0.0000	0.0000%
100	0.00000	0.0000	0.0000%
Datos de la Corrida			
Programa:	M.D.F para valuación de un PUT		
Smin	0.01000		
Smax	100		
L (No. de intervalos en precios)	200		
N (No. De intervalos para tiempo)	32		

6.3.4. Análisis de la información, gráficos y evaluación de los Resultados

Ahora se plantea el siguiente problema; un inversionista desea conocer el valor de una opción Call tipo Europea sobre las acciones de América Móvil cuya volatilidad diaria $\sigma = 0,928972034\%$ fechada un año antes de la expiración del contrato, el precio de ejercicio de 11 pesos/acción, tasa de interés continua $r = 0,081574194$. Desea conocer el valor del derivado para cada uno de los posibles precios del activo subyacente así como su evolución en función del tiempo que le resta de vida al contrato ("Time to Maturity").

6.3.5. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Lineal)

Para realizar la valuación de la opción de compra sobre divisas mediante elemento finito lo primero es seleccionar el rango de precios del activo para los cuales se va a calcular el precio de la opción, se conserva el mismo intervalo del análisis anterior posteriormente se aplican las transformaciones sugeridas en (3.43) al intervalo seleccionado con lo que se obtiene:

$$S^{min} = ,01Pesos/Acción \Rightarrow x^{min} = -5,703$$

$$S^{max} = 100Pesos/Acción \Rightarrow x^{max} = 1,204$$

Una operación similar ocurre para el dominio del tiempo donde t representa el tiempo que le resta de vida al contrato ("Time to Maturity"):

$$t^{min} = 0Año \Rightarrow \tau^{min} = 0$$

$$t^{max} = 1Año \Rightarrow \tau^{max} = ,117$$

Ya con el dominio especificado procedemos a discretizar en intervalos de la misma longitud en tiempo y espacio la ecuación de calor que se ha especificado para la valuación de opciones. Se divide el dominio de precios en 100 elementos de la misma longitud y el dominio del tiempo fue dividido en 32 intervalos todos ellos de la misma longitud. Con estos datos se puede generar una malla como la que se diseñó en la sección anterior donde cada una de las intersecciones corresponde con un punto de interpolación. El siguiente punto es construir las condiciones de frontera que permitan resolver el problema para esto empleamos las ecuaciones (3.51),(3.52) y (3.53) las cuales desarrolladas para este caso en particular son:

1.

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(1,1890)x} - e^{\frac{1}{2}(-0,8109)x}, 0) \quad (6.22)$$

2.

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(1,189)x + \frac{1}{4}(1,413)\tau} \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad (6.23)$$

3.

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \quad (6.24)$$

Conocida la condición inicial se puede construir el vector de condición inicial \tilde{u}^0 que nos permita resolver (5.68), sin embargo, aun falta emplear diferencias finitas para de discretización en tiempo de este sistema para hacer esto solo es necesario emplear la fórmula de Taylor de diferencias hacia adelante (4.15) con la cual expresamos (5.68) como:

$$\begin{aligned} A\tilde{u} + B\dot{\tilde{u}} &= 0 \\ B\dot{\tilde{u}} &= -A\tilde{u} \\ B\left(\frac{\tilde{u}^{t+1} - \tilde{u}^t}{\Delta t}\right) &= -A\tilde{u}^t \\ B\tilde{u}^{t+1} &= B\tilde{u}^t - \Delta t A\tilde{u}^t \end{aligned}$$

La forma de las matriz de rigidez A y de la matriz de carga B para este caso en particular se obtiene directamente de la sustitución de valores en (5.69) y (5.70) dando por resultado:

$$A := (14,47806573) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Algo similar ocurre en la matriz de carga B la cual expresamos mediante:

$$B := (0,011511667) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Con estos datos se puede estimar el valor de la opción para el siguiente intervalo de tiempo la solución de este sistema de ecuaciones se realiza mediante el programa 3 del apéndice A “M.E.F. Interpolación Lineal, para valuación de un CALL” una vez resuelto el sistema de ecuaciones es necesario aplicar las transformaciones inversas propuestas en (3.50) a los resultados obtenidos con lo que conocemos finalmente el valor de la opción en el dominio original.

El calculo analítico se realiza mediante el uso de (3.31) en este caso en particular Lo que se tiene que hacer es sustituir los precios del subyacente y del tiempo en la formula para obtener el valor de la opción *Call* por ejemplo para obtener el valor de la opción de venta que se esta analizando cuando el precio del subyacente es 2 Pesos/Dólar y cuando el tiempo de vida de esta opciones de 182 días.

$$V_C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (6.27)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (6.28)$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (6.29)$$

En este caso:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{2}{11}) + (0,081574194 - \frac{1}{2} \cdot 0,86299)(\frac{1}{2})}{0,92897\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= -2,861559671 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln(\frac{2}{11}) + (0,081574194 + \frac{1}{2} \cdot 0,86299)(\frac{1}{2})}{0,92897\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= -2,204677246 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_C(S, t) &= 2 \cdot N(-1,430779835) - 11e^{-0,081574194 \cdot (\frac{1}{2})} N(-1,102338623) \\
 &= 0,0042
 \end{aligned}$$

Se muestra el resultado de esta operación mediante un gráfico donde cada uno de los puntos corresponde con el valor de la opción según el valor del subyacente y con un tiempo antes del vencimiento de $\frac{16}{32}$ de año \approx 182 días.

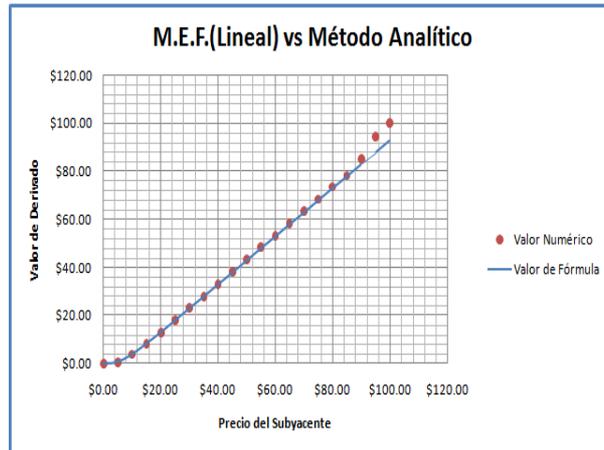


Figura 6.18: Valor del un Call con 182 días antes del vencimiento

De manera similar se realizan los cálculos para el resto de los intervalos en que fue discretizado el dominio del tiempo luego se grafican todos ellos donde se muestra el dominio del tiempo y el dominio de precios completo:

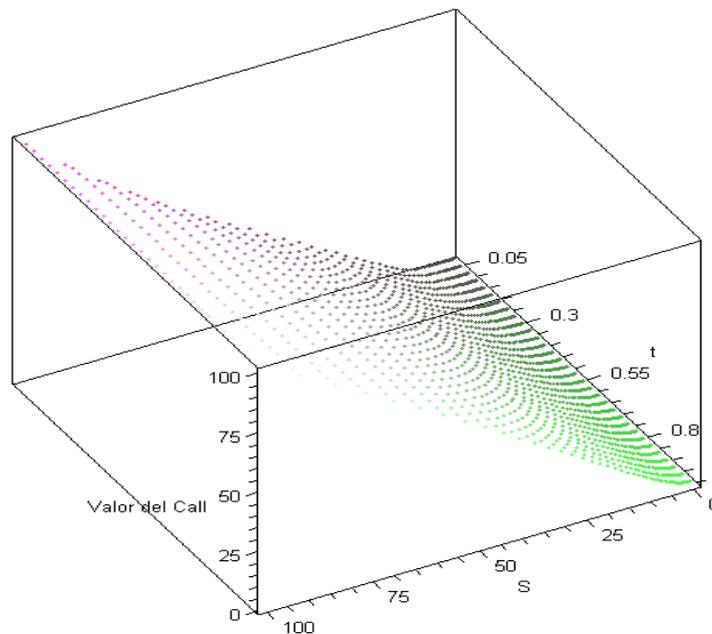


Figura 6.19: Valor del un Call mediante elemento finito con distintas fechas antes del vencimiento

Este gráfico muestra como evoluciona el valor del derivado confirmando las proposiciones teóricas ya que como se aprecia en el mismo a medida que aumenta el precio del activo subyacente la opción incrementa su valor hasta el punto en el que el activo subyacente y la opción valen practicamente lo mismo, por otro lado a medida que disminuye el tiempo de vida del contrato el valor de la opción decrece hasta el punto en que su valor es el mismo que el de la función de pago de una opción de compra.

La tabla siguiente muestra un resumen de la comparación de los datos obtenidos numéricamente y los datos analíticos ademas de que permite visualizar estos comparativos mas fácilmente, esta tabla se construye seleccionando un tiempo antes del vencimiento de **182 días** se capturan los datos para ser evaluados mediante el método analítico como se acaba de mostrar y se capturan también algunos de los datos que proporciona el método numérico de diferencias finitas posteriormente se tomo como referencia el valor analítico y se considera como error la diferencia del la solución numérica respecto de la solución analítica.

Datos del Activo Subyacente			
Subyacente : Dólar Americano (Divisas)			
Precio de Ejercicio: 11 pesos/Dólar			
volatilidad: 0.93	tasa de Interés 8.2 %		
tiempo antes del vencimiento : 0.5 años			
Precio del Subyacente	Método de Valuación		Error
	Analítico	Numérico	
		Elemento Finito (Lineal)	
0	0.00000	0.00000	0.0000%
5	0.71326	0.7364	3.2450%
10	3.79439	3.9054	2.9243%
15	8.20400	8.2873	1.0154%
20	12.83973	12.9729	1.0370%
25	17.80854	17.9910	1.0246%
30	22.83698	23.0733	1.0349%
35	27.69614	27.9840	1.0395%
40	32.76123	33.1033	1.0441%
45	37.63702	38.0317	1.0487%
50	42.71078	43.1606	1.0533%
55	47.78617	48.2917	1.0579%
60	52.66720	53.2268	1.0625%
65	57.74398	58.3601	1.0671%
70	62.62580	63.2454	0.9893%
75	67.70307	68.3202	0.9115%
80	72.78046	73.3873	0.8338%
85	77.66264	78.1150	0.5825%
90	82.74016	85.0000	2.7313%
95	87.62241	94.3450	7.6722%
100	92.69998	100.0000	7.8749%
Datos de la Corrida			
Programa:	M.E.F para valuación de un CALL		
Smin	0.01000		
Smax	100		
M (No. de elementos en precios)	100		
N (No. De intervalos para tiempo)	32		

6.3.6. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Cuadrática)

Para realizar la valuación de opciones mediante elemento finito e interpolación cuadrática se procede de la misma manera como se ha venido haciendo lo primero es seleccionar el rango de precios del activo para los cuales se va a calcular el precio de la opción, se conserva el mismo intervalo del análisis anterior posteriormente se aplican las transformaciones sugeridas en (3.43) al intervalo seleccionado con lo que se obtiene:

$$S^{min} = ,01Pesos/Acción \Rightarrow x^{min} = -5,703$$

$$S^{max} = 100Pesos/Acción \Rightarrow x^{max} = 1,204$$

Una operación similar ocurre para el dominio del tiempo donde t representa el tiempo que le resta de vida al contrato (*"Time to Maturity"*):

$$t^{min} = 0Año \Rightarrow \tau^{min} = 0$$

$$t^{max} = 1Año \Rightarrow \tau^{max} = ,117$$

Ya con el dominio especificado procedemos a discretizar en intervalos de la misma longitud en tiempo y espacio la ecuación de calor que se ha especificado para la valuación de opciones pero en este caso por tratarse de interpolación cuadrática la discretización del espacio de los precios requiere un numero mas grande de nodos pues por cada elemento que se interpole se requerirían 3 nodos. Se divide el dominio de precios en 100 elementos de la misma longitud y se emplea un tercer punto en el centro de cada uno de los elementos esto general un total de 201 nodos, el dominio del tiempo fue dividido en 32 intervalos todos ellos de la misma longitud. Con estos datos se puede generar una malla como la que se diseño en la sección anterior donde cada una de las intersecciones corresponde con un punto de interpolación sin embargo se trata de una malla mas refinada. El siguiente punto es construir las condiciones de frontera que permitan resolver el problema para esto empleamos las ecuaciones (3.51),(3.52) y (3.53) las cuales desarrolladas para este caso en particular son:

1.

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(1,1890)x} - e^{\frac{1}{2}(-0,8109)x}, 0) \quad (6.30)$$

2.

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(1,189)x + \frac{1}{4}(1,413)\tau} \text{ cuando } x \rightarrow \infty \quad (6.31)$$

3.

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \quad (6.32)$$

Conocida la condición inicial se puede construir el vector de condición inicial \tilde{u}^0 que nos permita resolver (5.68), sin embargo, es necesario emplear diferencias finitas para de discretización en tiempo de este sistema para hacer esto solo es necesario emplear la formula de Taylor de diferencias hacia adelante (4.15) con la cual expresamos (5.68) como:

$$\begin{aligned} A\tilde{u} + B\dot{\tilde{u}} &= 0 \\ B\dot{\tilde{u}} &= -A\tilde{u} \\ B\left(\frac{\tilde{u}^{t+1} - \tilde{u}^t}{\Delta t}\right) &= -A\tilde{u}^t \\ B\tilde{u}^{t+1} &= B\tilde{u}^t - \Delta t A\tilde{u}^t \end{aligned}$$

La forma de las matriz de rigidez A y de la matriz de carga B para este caso en particular se obtiene directamente de la sustitución de valores en (5.86) y (5.87) dando por resultado:

$$A := (4,826) \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

Algo similar ocurre en la matriz de carga B la cual expresamos mediante:

$$B := (0,0023) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Con estos datos podemos estimar el valor de la opción para el siguiente intervalo de tiempo la solución de este sistema de ecuaciones se realiza mediante el programa 4 del apéndice A “M.E.F. Interpolación Cuadrática, para valuación de un CALL” una vez resuelto el sistema de ecuaciones es necesario aplicar las transformaciones inversas propuestas en (3.50) a los resultados obtenidos con lo que conocemos finalmente el valor de la opción en el dominio original.

El calculo analítico es el mismo al que se mostró en 6.30 para la interpolación lineal por lo que solo es necesario consultar los datos que se obtuvieron para poder elaborar la comparación. Se muestra el resultado de esta operación mediante un gráfico donde cada uno de los puntos corresponde con el valor de la opción según el valor del subyacente y con una tiempo antes del vencimiento de $\frac{16}{32}$ de año ≈ 182 días. De manera similar se realizan

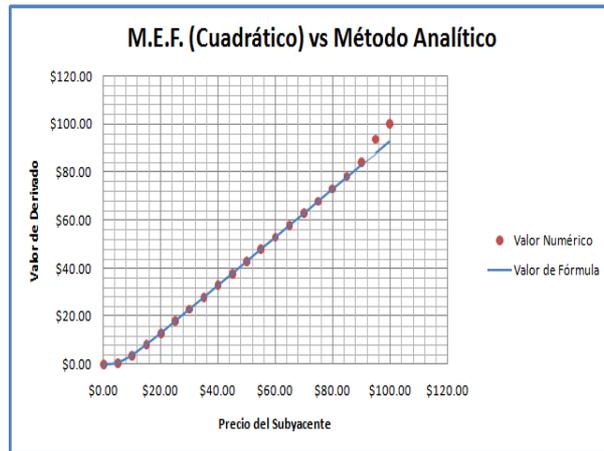


Figura 6.20: Valor del un Call con 182 días antes del vencimiento

los cálculos para el resto de los intervalos en que fue discretizado el dominio del tiempo luego se grafican todos ellos donde se muestra el dominio del tiempo y el dominio de precios completo. Este gráfico muestra también la

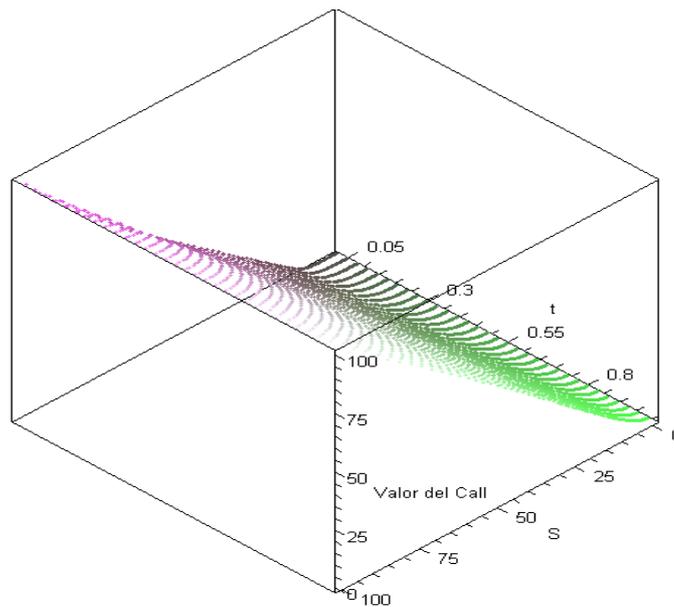


Figura 6.21: Valor del un Call mediante elemento finito con distintas fechas antes del vencimiento

evolución del precio de una opción *Call* sin embargo este tiene una definición más clara puesto que cada uno de los elementos que compone la discretización en precios esta formado por tres nodos que permiten desarrollar la interpolación con más precisión. La tabla siguiente muestra un resumen de la comparación de los datos obtenidos numéricamente y los datos analíticos ademas de que permite visualizar estos comparativos mas fácilmente, esta tabla se construye seleccionando un tiempo antes del vencimiento de **182 días** se capturan los datos para ser evaluados mediante el método analítico como se acaba de mostrar y se capturan también algunos de los datos que proporciona el método numérico de diferencias finitas posteriormente se tomo como referencia el valor analítico y se considera como error la diferencia del la solución numérica respecto de la solución analítica.

Datos del Activo Subyacente			
Subyacente : Dólar Americano (Divisas)			
Precio de Ejercicio: 11 pesos/Dólar			
volatilidad: 0.93	tasa de Interés 8.2 %		
tiempo antes del vencimiento : 0.5 años			
Precio del Subyacente	Método de Valuación		Error
	Analítico	Numérico	
		Elemento Finito (Cuad.)	
0	0.00000	0.00000	0.0000%
5	0.71326	0.7221	1.2450%
10	3.79439	3.8370	1.1236%
15	8.20400	8.2852	0.9893%
20	12.83973	12.9506	0.8636%
25	17.80854	17.9396	0.7358%
30	22.83698	22.9758	0.6079%
35	27.69614	27.8291	0.4801%
40	32.76123	32.8766	0.3522%
45	37.63702	37.7215	0.2244%
50	42.71078	42.8018	0.2132%
55	47.78617	47.8827	0.2021%
60	52.66720	52.7677	0.1909%
65	57.74398	57.8478	0.1798%
70	62.62580	62.7314	0.1686%
75	67.70307	67.8097	0.1575%
80	72.78046	72.8869	0.1463%
85	77.66264	78.1150	0.5825%
90	82.74016	83.8764	1.3733%
95	87.62241	93.4550	6.6565%
100	92.69998	100.0000	7.8749%
Datos de la Corrida			
Programa:	M.E.F para valuación de un CALL		
Smin	0.01000		
Smax	100		
M (No. de elementos en precios)	100		
N (No. De intervalos para tiempo)	32		

6.3.7. Valuación Mediante Elemento Finito (Interpolación Cúbica)

Para realizar la valuación de opciones mediante elemento finito e interpolación cúbica se procede de la misma manera como se ha venido haciendo lo primero es seleccionar el rango de precios del activo para los cuales se va a calcular el precio de la opción, se conserva el mismo intervalo del análisis anterior posteriormente se aplican las transformaciones sugeridas en (3.43) al intervalo seleccionado con lo que se obtiene:

$$S^{min} = ,01Pesos/Acción \Rightarrow x^{min} = -5,703$$

$$S^{max} = 100Pesos/Acción \Rightarrow x^{max} = 1,204$$

Una operación similar ocurre para el dominio del tiempo donde t representa el tiempo que le resta de vida al contrato (“*Time to Maturity*”):

$$t^{min} = 0Año \Rightarrow \tau^{min} = 0$$

$$t^{max} = 1Año \Rightarrow \tau^{max} = ,117$$

Ya con el dominio especificado procedemos a discretizar en intervalos de la misma longitud en tiempo y espacio la ecuación de calor que se ha especificado para la valuación de opciones pero en este caso por tratarse de interpolación cúbica la discretización del espacio de los precios requiere un numero mas grande de nodos pues por cada elemento que se interpole se requerirían 4 nodos. Se divide el dominio de precios en 100 elementos de la misma longitud y se emplean dos nodos equidistantes dentro de cada uno de los elementos esto general un total de 301 nodos, el dominio del tiempo fue dividido en 32 intervalos todos ellos de la misma longitud. Con estos datos se puede generar una malla como la que se diseño en la sección anterior donde cada una de las intersecciones corresponde con un punto de interpolación sin embargo se trata de una malla mas refinada. El siguiente punto es construir las condiciones de frontera que permitan resolver el problema para esto empleamos las ecuaciones (3.51),(3.52) y (3.53) las cuales desarrolladas para este caso en particular son:

1.

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(1,1890)x} - e^{\frac{1}{2}(-0,8109)x}, 0) \quad (6.35)$$

2.

$$u(x, \tau) \rightarrow e^{\frac{1}{2}(1,189)x + \frac{1}{4}(1,413)\tau} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty \quad (6.36)$$

3.

$$u(x, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty \quad (6.37)$$

Conocida la condición inicial se puede construir el vector de condición inicial \tilde{u}^0 que nos permita resolver (5.68), sin embargo, es necesario emplear diferencias finitas para de discretización en tiempo de este sistema para hacer esto solo es necesario emplear la formula de Taylor de diferencias hacia adelante (4.15) con la cual expresamos (5.68) como:

$$\begin{aligned} A\tilde{u} + B\dot{\tilde{u}} &= 0 \\ B\dot{\tilde{u}} &= -A\tilde{u} \\ B\left(\frac{\tilde{u}^{t+1} - \tilde{u}^t}{\Delta t}\right) &= -A\tilde{u}^t \\ B\tilde{u}^{t+1} &= B\tilde{u}^t - \Delta t A\tilde{u}^t \end{aligned}$$

La forma de la matriz de rigidez A y de la matriz de carga B para este caso en particular se obtiene directamente de la sustitución de valores en (5.86) y (5.87) dando por resultado:

$$A := (0,36195) \cdot \begin{pmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -189 & 432 & -297 & 54 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -297 & 432 & -189 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -13 & 54 & -189 & 296 & -189 & 54 & -13 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 54 & -297 & 432 & -189 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -13 & 54 & -189 & 296 & -189 & 54 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -189 & 432 & -297 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 54 & -297 & 432 & -189 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -13 & 54 & -189 & 148 \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

Algo similar ocurre en la matriz de carga B la cual expresamos mediante:

$$B := (0,0018) \cdot \begin{pmatrix} \frac{16}{105} & \frac{33}{280} & -\frac{3}{70} & \frac{19}{840} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{33}{280} & \frac{27}{35} & -\frac{27}{280} & -\frac{3}{70} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{70} & -\frac{27}{280} & \frac{27}{35} & \frac{33}{280} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{840} & -\frac{3}{70} & \frac{33}{280} & \frac{32}{105} & \frac{33}{280} & -\frac{3}{70} & \frac{19}{840} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{3}{70} & -\frac{27}{280} & \frac{27}{35} & \frac{33}{280} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{19}{840} & -\frac{3}{70} & \frac{33}{280} & \frac{32}{105} & \frac{33}{280} & -\frac{3}{70} & \frac{19}{840} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{33}{280} & \frac{27}{35} & -\frac{27}{280} & -\frac{3}{70} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{3}{70} & -\frac{27}{280} & \frac{27}{35} & \frac{33}{280} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{19}{840} & -\frac{3}{70} & \frac{33}{280} & \frac{16}{105} \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

Con estos datos podemos estimar el valor de la opción para el siguiente intervalo de tiempo la solución de este sistema de ecuaciones se realiza mediante el programa 5 del apéndice A “M.E.F. Interpolación Cúbica, para valuación de un CALL” una vez resuelto el sistema de ecuaciones es necesario aplicar las transformaciones inversas propuestas en (3.50) a los resultados obtenidos con lo que conocemos finalmente el valor de la opción en el dominio original.

El calculo analítico es el mismo al que se mostró en 6.30 para la interpolación lineal por lo que solo es necesario consultar los datos que se obtuvieron para poder elaborar la comparación. Se muestra el resultado de esta operación mediante un gráfico donde cada uno de los puntos corresponde con el valor de la opción según el valor del subyacente y con una tiempo antes del vencimiento de $\frac{16}{32}$ de año ≈ 182 días.

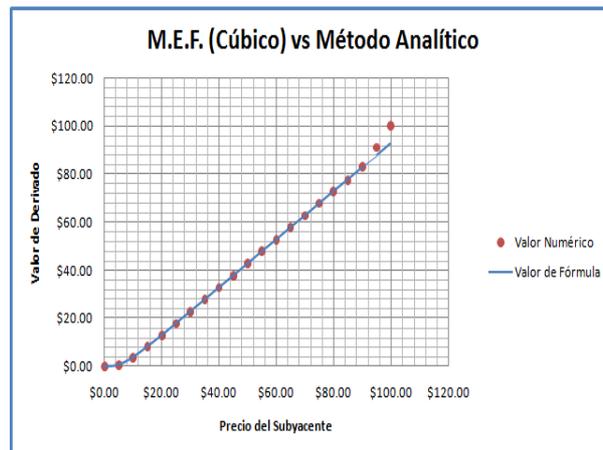


Figura 6.22: Valor del un Call con 182 días antes del vencimiento

De manera similar se realizan los cálculos para el resto de los intervalos en que fue discretizado el dominio del tiempo luego se grafican todos ellos donde se muestra el dominio del tiempo y el dominio de precios completo:

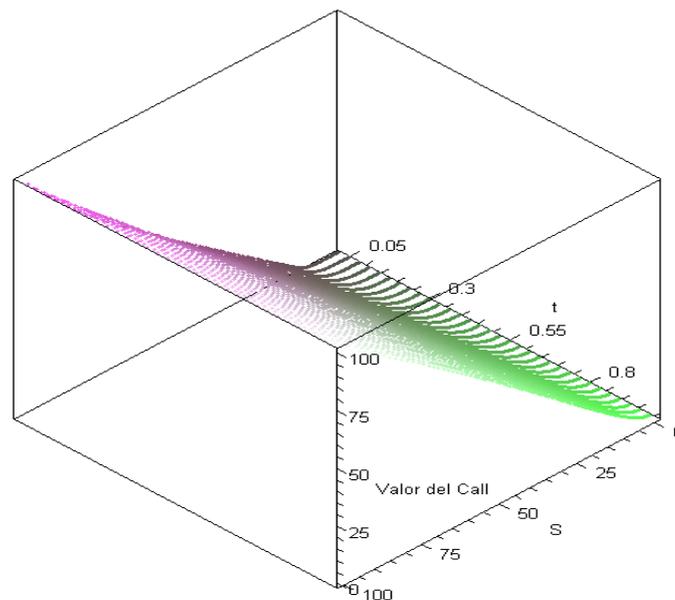


Figura 6.23: Valor del un Call mediante elemento finito con distintas fechas antes del vencimiento

Este gráfico muestra también la evolución del precio de una opción *Call* sin embargo este tiene una definición más clara puesto que cada uno de los elementos que compone la discretización en precios esta formado por tres nodos que permiten desarrollar la interpolación con más precisión. La tabla siguiente muestra un resumen de la comparación de los datos obtenidos numéricamente y los datos analíticos además de que permite visualizar estos comparativos mas fácilmente, esta tabla se construye seleccionando un tiempo antes del vencimiento de **182 días** se capturan los datos para ser evaluados mediante el método analítico como se acaba de mostrar y se capturan también algunos de los datos que proporciona el método numérico de diferencias finitas posteriormente se tomo como referencia el valor analítico y se considera como error la diferencia del la solución numérica respecto de la solución analítica.

Datos del Activo Subyacente			
Subyacente : Dólar Americano (Divisas)			
Precio de Ejercicio: 11 pesos/Dólar			
volatilidad: 0.93		tasa de Interés 8.2 %	
tiempo antes del vencimiento : 0.5 años			
Precio del Subyacente	Método de Valuación		Error
	Analítico	Numérico	
		Elemento Finito (Cub.)	
0	0.00000	0.00000	0.0000%
5	0.71326	0.7198	0.9234%
10	3.79439	3.8294	0.9216%
15	8.20400	8.2716	0.8234%
20	12.83973	12.9223	0.6430%
25	17.80854	17.8909	0.4626%
30	22.83698	22.9014	0.2822%
35	27.69614	27.7606	0.2327%
40	32.76123	32.8212	0.1832%
45	37.63702	37.6873	0.1337%
50	42.71078	42.7467	0.0842%
55	47.78617	47.8168	0.0640%
60	52.66720	52.6903	0.0438%
65	57.74398	57.7692	0.0436%
70	62.62580	62.6530	0.0434%
75	67.70307	67.7323	0.0432%
80	72.78046	72.8119	0.0432%
85	77.66264	77.1150	-0.7052%
90	82.74016	82.8764	0.1647%
95	87.62241	90.8650	3.7006%
100	92.69998	100.0000	7.8749%
Datos de la Corrida			
Programa:	M.E.F para valuación de un CALL		
Smin		0.01000	
Smax		100	
M (No. de elementos en precios)		100	
N (No. De intervalos para tiempo)		32	

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se logró concretar el uso de los métodos numéricos de diferencias finitas y de elemento finito para la valuación de opciones financieras se pudo entrar también en contacto con el mercado bursátil de México y conocer su modo de operación. Una de las cosas más importantes es que se pudieron encontrar los medios para obtener información real de los activos subyacentes ya que aun cuando la teoría sugiere que esta información es pública y para uso de los inversionistas algunas veces se tuvo que recurrir a fuentes diferentes a las oficiales para conseguir los archivos del historial del comportamiento de los activos subyacentes. Se logró también demostrar plenamente mediante ejemplos concretos que los métodos numéricos brindan una muy buena aproximación al valor de la prima de riesgo de las opciones financieras tomando como referencia el valor analítico dado por la fórmula de Black-Scholes se pudo observar también que el método de diferencias finitas entrega un resultado de muy buena precisión cuando se emplean números grandes en la discretización del dominio, sin embargo, y aunque se diseñó un algoritmo muy eficiente en la solución de los sistemas de ecuaciones asociados, el uso de más de 1000 intervalos para discretizar el dominio de precios no genera información que sea realmente de interés para un inversionista pues pudimos observar que los mercados bursátiles en México sólo operan con dos cifras decimales por lo que no es recomendable entorpecer los algoritmos agregando números muy grandes en la discretización. Por otra parte en el caso del elemento finito pudimos observar que el uso de 100 elementos para la discretización del dominio de precios genera aproximaciones muy buenas en todos los casos y que al igual que en diferencias finitas el uso de funciones de interpolación de grado mayor a 3 resultaría compleja e innecesaria puesto que sólo se crearían sistemas de ecuaciones más complejos de resolver pero que no aportan una precisión significativa para los inversionistas. Surgen sin embargo muchas nuevas preguntas a partir del desarrollo de este trabajo ya que algunas de las hipótesis empleadas son muy restrictivas como la ausencia de dividendos pagados por las acciones o el considerar como constante la tasa de interés libre de riesgo por lo que uno se puede preguntar ¿Qué pasaría con el modelo al incluir éstas como variables independientes que afectan el valor de los derivados? ¿Qué tan complejo se vuelven los modelos? ¿Qué tan importantes son estas variables en la valuación de opciones? o simplemente si brindan una aproximación más precisa al valor técnico de las opciones. Otra de las investigaciones que resultan de gran importancia es la de analizar la estabilidad y la convergencia de los métodos numéricos que fueron empleados.

Recomendaciones

El desarrollo de esta tesis sirve como introducción para conocer cómo emplear los métodos numéricos en la valuación de opciones. Sin embargo, usando este trabajo como plataforma se recomienda realizar un estudio más profundo de la volatilidad, existen líneas de investigación que apuntan a que la volatilidad debe ser estimada mediante el historial propio del valor del derivado y no sólo del comportamiento del activo subyacente este es un tópico en el que se recomienda investigar, también se sugiere que un estudio complementario incluya la planeación de toda una estrategia de cobertura empleando diferentes activos y derivados más complejos como las opciones canasta con las que se puede diversificar el riesgo entre varios activos.

Código fuente de los programas

.1. M.D.F. Para valuación de un *CALL*

El siguiente programa, compilado para Maple 11, ayuda a resolver la ecuación de calor mediante diferencias finitas con las condiciones iniciales y de frontera adaptadas para permitir la valuación, de opciones de Compra y emplea la factorización LU para resolver el sistema de ecuaciones que resulta, además construye un gráfico que permite realizar una comparación entre los resultados por la solución analítica y los de aproximación mediante M.D.F, por último convierte toda la información en un archivo de Excel para permitir algún análisis posterior:

```
> restart;
> Smin := 0.1e-1;
Smax := 100;
r := 0.82e-1;
sigma := .93;
k := 2*r/sigma^2;
K := 11;
T := 1;
L := 512;
N := 32;
x[0] := ln(Smin/K);
x[L] := ln(Smax/K); evalf(\%);
Delta0 := (x[L]-x[0])/L;
Delta1 := evalf(Delta0);
Delta2 := T/N;
nu := Delta2/Delta1^2;
> for w from 0 to N do
  tau[w] := w*T*sigma^2/(2*N)
end do;
  for i from 0 to L-1 do
    x[i] := ln(Smin/K)+i*Delta1;
    if x[i] <= 0 then U[i, 0] := 0
    else
      U[i, 0] := exp((.5*(k+1))*x[i])-exp((.5*(k-1))*x[i])
    end if
  end do;
> for i to N do
  U[0, i] := 0
end do;
> for j from 0 to N do
  a := exp((.5*(k+1))*x[L]+.25*(k+1)^2*tau[j]);
  U[L, j] := evalf(a);
```

```

    end do;
> delta[1] := 1+2*nu;
  for j from 2 to L-1 do
    delta[j] := 1+2*nu-nu^2/delta[j-1]
  end do;
> for d to N do
  B[1, d] := U[1, d-1];
  for l from 2 to L-1 do
    if l = L-1 then B[l, d] := U[l, d-1]+nu*U[L, d]+nu*B[l-1, d]/delta[l-1]
    else
      B[l, d] := U[l, d-1]+nu*B[l-1, d]/delta[l-1]
    end if
  end do;
  U[L-1, d] := B[L-1, d]/delta[L-1];
  for j from L-2 by -1 to 1 do
    U[j, d] := (B[j, d]+nu*U[j+1, d])/delta[j]
  end do
end do;
> gama := .5*(k-1);
  beta := .5*(k+1);
> for g from 0 to N do
  for h from 0 to L do
    S[h] := K*exp(x[h]);
    t[g] := T-2*tau[g]/sigma^2;
    V[h, g] := evalf(K*U[h, g]*exp(-gama*x[h]-beta^2*tau[g]))
  end do
end do;
> with(plots);
  for j from 0 to N do
    f := j/N; points[j] := {seq([S[i], f, V[i, j]], i = 0 .. 512)}
  end do;
> multiple(pointplot3d, [points[1]], [points[2]], [points[3]], [points[4]], [points[5]],
[points[6]], [points[7]], [points[8]], [points[9]], [points[10]], [points[11]], [points[12]],
[points[13]], [points[14]], [points[15]], [points[16]], [points[17]], [points[18]], [points[19]],
[points[20]], [points[21]], [points[22]], [points[23]], [points[24]], [points[25]], [points[26]],
[points[27]], [points[28]], [points[29]], [points[30]], [points[31]], [points[32]],
axes = boxed, labels = ["S", "t", "Valor del Call"]);

> with(finance);
plot3d(evalf(blackscholes(x, 11, .82, t, .93)), x = 0 .. 100, t = 0 .. 1,
axes = boxed, labels = ["S", "t", "Valor del Call"]);

> P := array(1 .. 20, 0 .. 8);
  for j from 0 to 8 do
    for i to 20 do
      P[i, j] := V[25*i, 4*j]
    end do
  end do;
> VC := convert(P, Matrix); matfile := "C:/MDFC-DA.xls"; ExportMatrix(matfile, VC);

```

.2. M.D.F. Para valuación de un *PUT*

El siguiente programa, compilado para Maple 11, ayuda a resolver la ecuación de calor mediante diferencias finitas con las condiciones iniciales y de frontera adaptadas para permitir la valuación, de opciones de Venta y emplea la factorización LU para resolver el sistema de ecuaciones que resulta, por último convierte toda la información en un archivo de Excel para permitir algún análisis posterior:

```

> restart;
> Smin := 0.1e-1;
Smax := 100;
r := 0.82e-1;
sigma := .93;
k := 2*r/sigma^2;
K := 11;
T := 1;
L := 512;
N := 32;
x[0] := ln(Smin/K);
x[L] := ln(Smax/K); evalf(\%);
Delta0 := (x[L]-x[0])/L;
Delta1 := evalf(Delta0);
Delta2 := T/N;
nu := Delta2/Delta1^2;
> for w from 0 to N do
    tau[w] := w*T*sigma^2/(2*N)
end do;

for i from 0 to L-1 do
    x[i] := ln(Smin/K)+i*Delta1;
    if x[i] <= 0 then
        U[i, 0] := exp((.5*(k-1))*x[i])-exp((.5*(k+1))*x[i])
    else
        U[i, 0] := 0
    end if
end do;
> for i to N do
    U[L, i] := 0
end do;
> for j from 0 to N do
    a := exp((.5*(k+1))*x[L]+.25*(k+1)^2*tau[j]); U[0, j] := evalf(a)
end do;

> delta[1] := 1+2*nu;
for j from 2 to L-1 do
    delta[j] := 1+2*nu-nu^2/delta[j-1]
end do;
> for d to N do
    B[1, d] := U[1, d-1];
    for l from 2 to L-1 do
        if l = L-1 then B[1, d] := U[1, d-1]+nu*U[L, d]+nu*B[l-1, d]/delta[l-1]
        else
            B[1, d] := U[1, d-1]+nu*B[l-1, d]/delta[l-1]
        end if
    end do
end do;

```

```

        end if
    end do;
    U[L-1, d] := B[L-1, d]/delta[L-1];
    for j from L-2 by -1 to 1 do
        U[j, d] := (B[j, d]+nu*U[j+1, d])/delta[j]
    end do
end do;
> gama := .5*(k-1);
beta := .5*(k+1);
> for g from 0 to N do
    for h from 0 to L do
        S[h] := K*exp(x[h]);
        t[g] := T-2*tau[g]/sigma^2;
        V[h, g] := evalf(K*U[h, g]*exp(-gama*x[h]-beta^2*tau[g]))
    end do
end do;
> with(plots);
for j from 0 to N do
    f := j/N; points[j] := {seq([S[i], f, V[i, j]], i = 0 .. 512)}
end do;
> multiple(pointplot3d, [points[1]], [points[2]], [points[3]], [points[4]], [points[5]],
[points[6]], [points[7]], [points[8]], [points[9]], [points[10]], [points[11]], [points[12]],
[points[13]], [points[14]], [points[15]], [points[16]], [points[17]], [points[18]], [points[19]],
[points[20]], [points[21]], [points[22]], [points[23]], [points[24]], [points[25]], [points[26]],
[points[27]], [points[28]], [points[29]], [points[30]], [points[31]], [points[32]],
axes = boxed, labels = ["S", "t", "Valor del Put"]);

> P := array(1 .. 20, 0 .. 8);
for j from 0 to 8 do
    for i to 20 do
        P[i, j] := V[25*i, 4*j]
    end do
end do;
> VP := convert(P, Matrix); matfile := "C:/MDFP-DA.xls"; ExportMatrix(matfile, VP);

```

.3. M.E.F. Interpolación Lineal, para valuación de un *CALL*

El siguiente programa, compilado para Maple 11, ayuda a resolver la ecuación de calor mediante elementos finitos con las condiciones iniciales y de frontera adaptadas para permitir la valuación de opciones de Compra y emplea funciones de interpolación polinomiales de grado 1, por ultimo convierte toda la información en un archivo de Excel para permitir algún análisis posterior:

```

> restart;
> with(LinearAlgebra);
> Smin := 0.1e-1;
  Smax := 100;
  r := 0.82e-1;
  sigma := .93;
  k := 2*r/sigma^2;
  K := 11;
  T := 1;
  M := 55;
  N := 100;
  x[0] := ln(Smin/K);
  x[M] := evalf(ln(Smax/K));
  Le := evalf((x[M]-x[0])/M);
  Deltat := evalf(T*sigma^2/(2*N));
> alpha := 1/Le;
  beta := (1/6)*Le;
> for w from 0 to N do
  tau[w] := w*Deltat
end do;
> for i from 0 to M-1 do
  x[i] := ln(Smin/K)+i*Le;
  if x[i] <= 0 then
    U[i, 0] := 0
  else
    U[i, 0] := exp((.5*(k+1))*x[i])-exp((.5*(k-1))*x[i])
  end if
end do;
> for i to N do
  U[0, i] := 0
end do;
> for j from 0 to N do
  a := exp((.5*(k+1))*x[M]+.25*(k+1)^2*tau[j]); U[M, j] := evalf(a)
end do;
> BTG := array(0 .. M, 0 .. M);
  BTG[0, 0] := -1;
  BTG[M, M] := 1;
  BTG := convert(BTG, Matrix);
> E[0] := array(1 .. M+1);
  for i to M+1 do
    E[0][i] := U[i-1, 0]
  end do;

  E[0] := Transpose(convert(E[0], Vector));

```

```

> for j from 0 to N do
  btG[j] := array(0 .. M);
  for i from 0 to M do
    if i = M then btG[j][i] := U[i, j]+1
    end if
  end do;
  btG[j] := Transpose(convert(btG[j], Vector))
end do;
> A1 := array(0 .. M, 0 .. M);
B1 := array(0 .. M, 0 .. M);
  for i from 0 to M do
    for j from 0 to M do
      if i = j and (i = 0 or i = M) then
        A1[i, j] := 1; B1[i, j] := 2
      elif i = j then
        A1[i, j] := 2; B1[i, j] := 4
      elif 'or'(i = j+1, i = j-1) then
        A1[i, j] := -1; B1[i, j] := 1
      end if
    end do
  end do;
> A := alpha*convert(A1, Matrix);
  B := beta*convert(B1, Matrix);
> A2 := A+BTG;
> for i to N do
  Lambda[i] := -(A2, E[i-1])+btG[i-1];
  PI[i] := LinearSolve(B, Lambda[i]);
  E[i] := array(1 .. M+1);
  E[i] := Deltat*PI[i];
  for j to M+1 do
    E[i][j] := E[i-1][j]+E[i][j];
    if j = 1 then E[i][j] := U[0, i]
    elif j = M+1 then E[i][j] := U[M, i]
    elif E[i][j] < 0 then
      for k from j by -1 to 1 do
        E[i][k] := 0
      end do
    end if
  end do;
  E[i] := convert(E[i], Vector)
end do;
> U := array(1 .. M+1, 1 .. N);
  for i to M+1 do
    for j to N do
      U[i, j] := E[j][i]
    end do
  end do;
  U := convert(U, Matrix);
> gama := .5*(k-1);
  beta := .5*(k+1);
> for g to N do
  for h to M+1 do

```

```

S[h] := K*exp(x[h]);
t[g] := T-2*tau[g]/sigma^2;
V[h, g] := evalf(K*U[h, g]*exp(-gama*x[h]-beta^2*tau[g]))
end do
end do;
> with(plots);
for j to N do
  f := j/N; points[j] := {seq([S[i], f, V[i, j]], i = 1 .. 55)}
end do;
> multiple(pointplot3d, [points[1]], [points[2]], [points[3]], [points[4]], [points[5]],
[points[6]], [points[7]], [points[8]], [points[9]], [points[10]], [points[11]], [points[12]],
[points[13]], [points[14]], [points[15]], [points[16]], [points[17]], [points[18]], [points[19]],
[points[20]], [points[21]], [points[22]], [points[23]], [points[24]], [points[25]], [points[26]],
[points[27]], [points[28]], [points[29]], [points[30]], [points[31]], [points[32]]
, axes = boxed, labels = ["S", "t", "Valor del Call"]);

> P := array(1 .. 27, 1 .. 20);
for j to 20 do for i to 27 do
P[i, j] := V[2*i, 5*j]
end do
end do;
> VC := convert(P, Matrix);
matfile := "F:/MEFC-DA.xls";
ExportMatrix(matfile, VC);

```

4. M.E.F. Interpolación Cuadrática, para valuación de un *CALL*

El siguiente programa, compilado para Maple 11, ayuda a resolver la ecuación de calor mediante elementos finitos con las condiciones iniciales y de frontera adaptadas para permitir la valuación de opciones de Compra y emplea funciones de interpolación polinomiales de grado 2, por último convierte toda la información en un archivo de Excel para permitir algún análisis posterior:

```

> restart;
> with(LinearAlgebra);
> Smin := 0.1e-1;
  Smax := 100;
  r := 0.82e-1;
  sigma := .93;
  k := 2*r/sigma^2;
  K := 11;
  T := 1;
  M1 := 55;
  M := 2*M1;
  N := 100;
  x[0] := ln(Smin/K);
  x[M] := evalf(ln(Smax/K));
  Le := evalf((x[M]-x[0])/M);
  Deltat := evalf(T*sigma^2/(2*N));
> alpha := 1/(3*Le);
  beta := (1/30)*Le;
> for w from 0 to N do
  tau[w] := w*Deltat
end do;
> for i from 0 to M-1 do
  x[i] := ln(Smin/K)+i*Le;
  if x[i] <= 0 then
    U[i, 0] := 0
  else
    U[i, 0] := exp((.5*(k+1))*x[i])-exp((.5*(k-1))*x[i])
  end if
end do;
> for i to N do
  U[0, i] := 0
end do;
> for j from 0 to N do
  a := exp((.5*(k+1))*x[M]+.25*(k+1)^2*tau[j]); U[M, j] := evalf(a)
end do;
> BTG := array(0 .. M, 0 .. M);
  BTG[0, 0] := -1;
  BTG[M, M] := 1;
  BTG := convert(BTG, Matrix);
> E[0] := array(1 .. M+1);
  for i to M+1 do
    E[0][i] := U[i-1, 0]
  end do;
  E[0] := Transpose(convert(E[0], Vector));
> for j from 0 to N do
  btG[j] := array(0 .. M);

```

```

for i from 0 to M do
  if i = M then
    btG[j][i] := U[i, j]+1
  end if
end do;
btG[j] := Transpose(convert(btG[j], Vector))
end do;
> A1 := array(0 .. M, 0 .. M);
B1 := array(0 .. M, 0 .. M);
for i from 0 to M do
  for j from 0 to M do
    if i = j and (i = 0 or i = M) then
      A1[i, j] := 7;
      B1[i, j] := 4
    elif (i = j and 'mod'(i+j, 4) = 0 )then
      A1[i, j] := 14;
      B1[i, j] := 8
    elif i = j then
      A1[i, j] := 16;
      B1[i, j] := 16;
    elif (i = j+1 'or' i = j-1) then
      A1[i, j] := -8;
      B1[i, j] := 2
    elif ((i = j+2 'or' i = j-2) 'and' 'mod'(i+j, 4) <> 0)
      then A1[i, j] := 1;
      B1[i, j] := -1
    end if
  end do
end do;
> A := alpha*convert(A1, Matrix);
B := beta*convert(B1, Matrix);
> A2 := A+BTG;
> for i to N do
Lambda[i] := -(A2, E[i-1])+btG[i-1];
PI[i] := LinearSolve(B, Lambda[i]);
E[i] := array(1 .. M+1);
E[i] := Deltat*PI[i];
  for j to M+1 do
    E[i][j] := E[i-1][j]+E[i][j];
    if j = 1 then
      E[i][j] := U[0, i]
    elif j = M+1 then
      E[i][j] := U[M, i]
    elif E[i][j] < 0 then
      for k from j by -1 to 1 do
        E[i][k] := 0
      end do
    end if
  end do;
  E[i] := convert(E[i], Vector)
end do;
> U := array(1 .. M+1, 1 .. N);
for i to M+1 do

```

```

    for j to N do
      U[i, j] := E[j][i]
    end do
  end do;
  U := convert(U, Matrix);
> gama := .5*(k-1);
  beta := .5*(k+1);
> for g to N do
  for h to M+1 do
    S[h] := K*exp(x[h]);
    t[g] := T-2*tau[g]/sigma^2;
    V[h, g] := evalf(K*U[h, g]*exp(-gama*x[h]-beta^2*tau[g]))
  end do
end do;
> with(plots);
  for j to N do
    f := j/N;
    points[j] := {seq([S[i], f, V[i, j]], i = 1 .. 55)}
  end do;

> multiple(pointplot3d, [points[1]], [points[2]], [points[3]], [points[4]], [points[5]],
[points[6]], [points[7]], [points[8]], [points[9]], [points[10]], [points[11]], [points[12]],
[points[13]], [points[14]], [points[15]], [points[16]], [points[17]], [points[18]], [points[19]],
[points[20]], [points[21]], [points[22]], [points[23]], [points[24]], [points[25]], [points[26]],
[points[27]], [points[28]], [points[29]], [points[30]], [points[31]], [points[32]],
  axes = boxed, labels = ["S", "t", "Valor del Call"]);

> P := array(1 .. 27, 1 .. 20);
  for j to 20 do
    for i to 27 do
      P[i, j] := V[2*i, 5*j]
    end do
  end do;
> VC := convert(P, Matrix);
  matfile := "F:/MEFCCuad-DA.xls";
  ExportMatrix(matfile, VC);

```

.5. M.E.F. Interpolación Cúbica, para valuación de un *CALL*

El siguiente programa, compilado para Maple 11, ayuda a resolver la ecuación de calor mediante elementos finitos con las condiciones iniciales y de frontera adaptadas para permitir la valuación de opciones de Compra y emplea funciones de interpolación polinomiales de grado 3, por último convierte toda la información en un archivo de Excel para permitir algún análisis posterior:

```

> restart;
> with(LinearAlgebra);
> Smin := 0.1e-1;
  Smax := 100;
  r := 0.82e-1;
  sigma := .93;
  k := 2*r/sigma^2;
  K := 11;
  T := 1;
  M1 := 55;
  M := 3*M1;
  N := 100;
  x[0] := ln(Smin/K);
  x[M] := evalf(ln(Smax/K));
  Le := evalf((x[M]-x[0])/M);
  Deltat := evalf(T*sigma^2/(2*N));
> alpha := 1/(40*Le);
  beta := (1/2)*Le
> for w from 0 to N do
  tau[w] := w*Deltat
end do;
> for i from 0 to M-1 do
  x[i] := ln(Smin/K)+i*Le;
  if x[i] <= 0 then
  U[i, 0] := 0
  else
  U[i, 0] := exp((.5*(k+1))*x[i])-exp((.5*(k-1))*x[i])
  end if
end do;
> for i to N do
  U[0, i] := 0
end do;
> for j from 0 to N do
  a := exp((.5*(k+1))*x[M]+.25*(k+1)^2*tau[j]); U[M, j] := evalf(a)
end do;
> BTG := array(0 .. M, 0 .. M);
  BTG[0, 0] := -1;
  BTG[M, M] := 1;
  BTG := convert(BTG, Matrix);
> E[0] := array(1 .. M+1);
  for i to M+1 do
  E[0][i] := U[i-1, 0]
  end do;
  E[0] := Transpose(convert(E[0], Vector));
> for j from 0 to N do
  btG[j] := array(0 .. M);

```

```

    for i from 0 to M do
      if i = M then
        btG[j][i] := U[i, j]+1
      end if
    end do;
  btG[j] := Transpose(convert(btG[j], Vector))
end do;
>A1:=array(0..M,0..M):
B1:=array(0..M,0..M):
  for i from 0 to M do
    for j from 0 to M do
      if (i=j and (i= 0 or i= M)) then
        A1[i,j]:=148;
        B1[i,j]:=16/(105);
      elif (i=j and (i+j mod 3<>0)) then
        A1[i,j]:=432;
        B1[i,j]:=27/(35);
      elif (i=j and (i+j mod 3=0)) then
        A1[i,j]:=296;
        B1[i,j]:=(32)/(105);
      elif ((i=j+1 or i=j-1)and (i+j mod 3 <>0)) then
        A1[i,j]:=-189;
        B1[i,j]:=33/(280);
      elif ((i=j+1 or i=j-1)and (i+j mod 3 =0)) then
        A1[i,j]:=-297;
        B1[i,j]:=-27/(280);
      elif ((i=j+2 or i=j-2) and (i+j mod 3<>0) ) then
        A1[i,j]:=54;
        B1[i,j]:=-3/(70);
      elif ((i=j+3 or i=j-3) and (i+j mod 3=0) ) then
        A1[i,j]:=-13;
        B1[i,j]:=(19)/(840);
      end if
    end do
  end do;
> A := alpha*convert(A1, Matrix);
  B := beta*convert(B1, Matrix);
> A2 := A+BTG;
> for i to N do
  Lambda[i] := -(A2, E[i-1])+btG[i-1];
  PI[i] := LinearSolve(B, Lambda[i]);
  E[i] := array(1 .. M+1);
  E[i] := Deltat*PI[i];
  for j to M+1 do
    E[i][j] := E[i-1][j]+E[i][j];
    if j = 1 then
      E[i][j] := U[0, i]
    elif j = M+1 then
      E[i][j] := U[M, i]
    elif E[i][j] < 0 then
      for k from j by -1 to 1 do
        E[i][k] := 0
      end do
    end if
  end do
end do

```

```

    end if
  end do;
  E[i] := convert(E[i], Vector)
end do;
> U := array(1 .. M+1, 1 .. N);
for i to M+1 do
  for j to N do
    U[i, j] := E[j][i]
  end do
end do;
U := convert(U, Matrix);
> gama := .5*(k-1);
beta := .5*(k+1);
> for g to N do
  for h to M+1 do
    S[h] := K*exp(x[h]);
    t[g] := T-2*tau[g]/sigma^2;
    V[h, g] := evalf(K*U[h, g]*exp(-gama*x[h]-beta^2*tau[g]))
  end do
end do;
> with(plots);
for j to N do
  f := j/N;
  points[j] := {seq([S[i], f, V[i, j]], i = 1 .. 55)}
end do;

> multiple(pointplot3d, [points[1]], [points[2]], [points[3]], [points[4]], [points[5]],
[points[6]], [points[7]], [points[8]], [points[9]], [points[10]], [points[11]], [points[12]],
[points[13]], [points[14]], [points[15]], [points[16]], [points[17]], [points[18]], [points[19]],
[points[20]], [points[21]], [points[22]], [points[23]], [points[24]], [points[25]], [points[26]],
[points[27]], [points[28]], [points[29]], [points[30]], [points[31]], [points[32]],
axes = boxed, labels = ["S", "t", "Valor del Call"]);

> P := array(1 .. 27, 1 .. 20);
for j to 20 do
  for i to 27 do
    P[i, j] := V[2*i, 5*j]
  end do
end do;
> VC := convert(P, Matrix);
matfile := "F:/MEFCCub-DA.xls";
ExportMatrix(matfile, VC);

```


Bibliografía

- [1] DOMINGUEZ VILLANUEVA JANET : *Cobertura de Inversión y Sensibilidad de las Opciones: El MexDer y los índices letras griegas*, Tesis de Maestría En Ingeniería U.N.A.M ,Facultad de Ingeniería,México, 2007.
- [2] H. HUEBNER KENNETH: *The Finite Element Method For Engineers*, 4° Edición, Ed. Wiley Interscience, (1997), pp 348-410.
- [3] HULL JHON: *Options, Futures and Other Derivates*, 3° Edición, Ed. Prentice Hall,U.S.A (1997).
- [4] KERMAN JOUNI: *Numerical Methods for Option Pricing: Binomial and Finite-difference Approximations*,Courant Institute of Mathematical Sciences ,New York University, (2002).
- [5] ORTIZ EDGAR: *Finanzas y Productos Derivados, Contratos Adelantados, Futuros, Opciones y Swaps*, 4° Edición, (1997).
- [6] LUENBERGER DAVID: *Investment Science*,Ed. Oxford University Press, (1998).
- [7] ROSS STEPHEN A.: *Fundamentos de Finanzas Corporativas*,5° Edición , Mc Graw Hill,México, 2000.
- [8] STAMPFLI JOSHEP, GOODMAN VÍCTOR : *Matemáticas para las finanzas. Modelado y cobertura*, Ed. Thompson ,Mexico, 2002.
- [9] Topper Jurgen: *Financial Engineering with Finite Elements*,Ed. Wiley Finance Series, Southern Gate, Chichester,Engalnd , 2006
- [10] PAGINA ELECTRÓNICA DE BOLSA MEXICANA DE VALORES: www.bmv.com.mx
- [11] PAGINA ELECTRÓNICA DEL MEXDER: www.mexder.com.mx
- [12] PAGINA ELECTRÓNICA DE ASIGNA COMPENSACIÓN Y LIQUIDACIÓN: www.asigna.com.mx
- [13] PAGINA ELECTRÓNICA SECCIÓN FINANCIERA DE YAHOO: www.finance.yahoo.com