Índice

Introducción.

En los últimos años se ha visto que las condiciones de los mercados financieros requieren cada día de una mayor precisión, para la valuación de los instrumentos financieros. Los mercados se han visto obligados a crear nuevos instrumentos financieros, con el fin de cubrirse de los riesgos que implica una inversión, un ejemplo claro de estos nuevos instrumentos financieros también llamados derivados son la diferente gama de opciones. La creación de dichos instrumentos nos lleva a considerar el problema de la evaluación de éstos, así como los modelos que nos podrían describir el comportamiento de estos mercados y sus métodos de valuación. Las teorías que más han contribuido son las de Black, Scholes y Merton, (véase [4]), quiénes propusieron fórmulas explícitas para valuar opciones europeas.

Aunque en México el mercado de derivados es muy joven, ya se empieza a hacer contratos de opciones sobre algunas variables macroeconómicas, así que la aparición de estos nuevos instrumentos financieros trae consigo por un lado la curiosidad y el interés de los inversionistas de obtener los beneficios que proporcionan estos instrumentos, y por el otro despierta el interés de los que estudian el comportamiento de los mercados de encontrar un método para poder valuarlos.

En el Capítulo 1 se presenta la teoría básica sobre las opciones. Se describe lo que es una opción, las diferencias entre una opción y una acción, así como los aspectos y las definiciones que son básicas en el estudio de las opciones. Se presentan los diferentes tipos de opciones, la paridad put – call, concluyendo con las llamadas opciones exóticas.

En el Capítulo 2 se presentan algunas técnicas de valuación que existen hasta el momento en el estudio de las opciones, se empieza describiendo el modelo de Black y Scholes, seguido del método Binomial. Se describen el método de valuación por medio de ecuaciones diferenciales parciales y la simulación por Monte Carlo. En este Capítulo también se habla del método de reducción de varianza, que es el utilizado en este trabajo para valuar las opciones asiáticas.

Por último se presentan las conclusiones y se dan algunas recomendaciones para trabajos futuros relacionados con el estudio de las opciones.

Objetivo.

Explicar lo que son las opciones, sus beneficios y sus desventajas, así como los diferentes métodos utilizados en su valuación.

Además de aplicar la simulación de Monte Carlo en la valuación de cierto tipo de opciones.

1. Teoría básica sobre Opciones.

1.1. Opciones

Una opción es un contrato en el cual el tenedor de éste tiene el derecho más no la obligación de comprar o vender un bien subyacente S_T en una fecha T y precio antes establecido. No existe hasta el momento restricción alguna sobre el tipo de activo que se negocia en las opciones, aunque generalmente los activos que más se negocian son las acciones y los bonos.

Para poder obtener el derecho, antes mencionado, el tenedor de la opción deberá pagar una prima la cual se dará al obtener el contrato. El precio que se paga al vencimiento de la opción, se le conoce como precio de ejercicio K. Se llama valor intrínseco de la opción a la diferencia del subyacente S_T y el precio de ejercicio K.

Este tipo de comercio se lleva a cabo en una cámara de compensación. Ésta cámara sirve como mediador entre las dos partes que están involucradas en la negociación de una opción en común, ésta se encarga de la negociación y del cumplimiento del contrato por ambas partes.

Diferencias entre Opciones y Acciones.

- **Las acciones no representan un derecho sobre el activo (3 Pág.125 -126).**

Lo que esto quiere decir, es que un accionista tiene cierto derecho sobre los beneficios que la compañía obtenga, así como de los activos de ésta, mientras que el poseedor de una opción tan solo adquiere el derecho de comprar en un futuro acciones de la misma compañía, en el caso de ejercer dicha opción, pero aún no gozaría de los beneficios que obtuviera la empresa.

- **Las opciones pueden llegar a no tener ningún valor.**

Obviamente el que una opción no tenga valor ocurre cuando el precio del subyacente no se comporta de la manera que se espera en el momento de adquirir la opción. En cambio, lo que ocurre con las acciones es que carecen de valor cuando las deudas de la empresa superan los activos de ésta, además de que independientemente de la situación económica de la empresa la opción puede tener un valor intrínseco de cero.

- **Las opciones dan la posibilidad a su tenedor de variar el riesgo de las acciones.**

En este caso el inversionista puede tomar la decisión de aumentar o disminuir el rendimiento y el riesgo esperado haciendo uso de las opciones.

Tipo de Opciones

Definición 1.1.1 (Opciones Call). Existen principalmente dos tipos de opciones: las de compra que son también llamadas *call* en las cuales el tenedor de dicha opción tiene el derecho de comprar un bien subyacente S_T. Una opción de tipo *call* será ejercida cuando el precio del subyacente, es decir, el precio de mercado sea mayor al precio de ejercicio K, en este caso el poseedor de la opción obtendrá un beneficio ya que podrá vender el subyacente al precio en el que esta cotizado en el mercado. En caso contrario el poseedor del *call* no ejercerá la opción, y la pérdida máxima en este caso será la prima.

Podemos ver el beneficio gráficamente en la figura 1.1

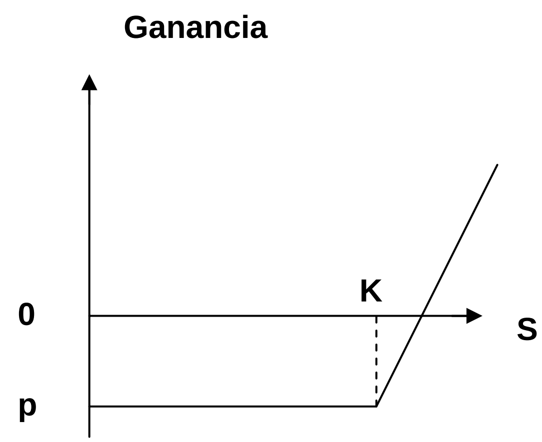

Figura 1.1

El valor intrínseco (precio) de la opción al momento de ser ejercida está dado por

$$C(S,T) := \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)_+$$

Para el emisor de un *call* también se obtiene un beneficio y éste se da sólo cuando el precio del subyacente S_T o de mercado está por debajo del precio de ejercicio K. Podemos ver gráficamente éste beneficio en la figura 1.2

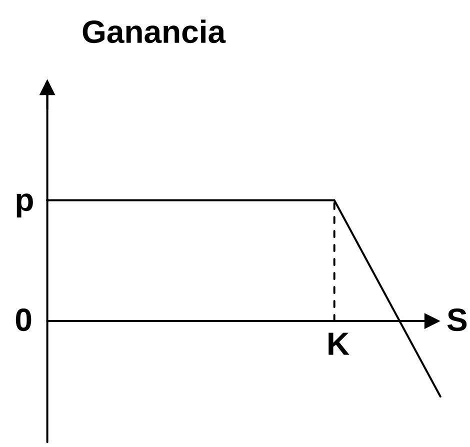

Figura 1.2

Cuando se emite una opción de tipo *call* y no se tiene el bien subyacente, se le llama opción al descubierto.

Un ejemplo de éste tipo de opciones puede ser el siguiente: Suponga que adquiere en $10,000 el derecho de comprar un auto para que sea entregado en Diciembre a un precio de $90,000. Si decimos que el precio del auto subió a $95,000, entonces el precio de la opción ya tiene un valor intrínseco de 5,000 pesos, dado que el precio de ejercicio es de $90,000, $5,000 más barato que el precio de mercado. Normalmente éste tipo de opciones se utilizan cuando se espera que el precio de mercado suba.

Definición 1.1.2 (Opciones put). El otro tipo de opciones son las de venta, también llamadas *put* en las cuales el tenedor tiene el derecho de vender un bien subyacente S_T a un precio K y una fecha de vencimiento antes determinados. Para la opción de tipo *put* se ejercerá cuando el precio del subyacente S_T es decir, el precio de mercado sea menor al precio de ejercicio K, así que el poseedor de dicha opción obtendrá un beneficio máximo que en este caso, es la prima. En caso contrario no se ejercerá y la pérdida puede ser muy grande. Gráficamente el beneficio se puede ver en la figura 1.3

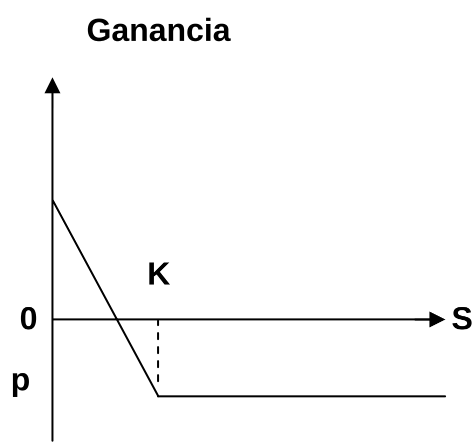

Figura 1.3

En este caso el valor intrínseco está dado por

$$P(S,T) := \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)_+$$

Del mismo modo que ocurre con las opciones de compra *call*, en las opciones de venta *put,* el emisor de ellas también obtiene un beneficio el cual se ve en la gráfica 1.4

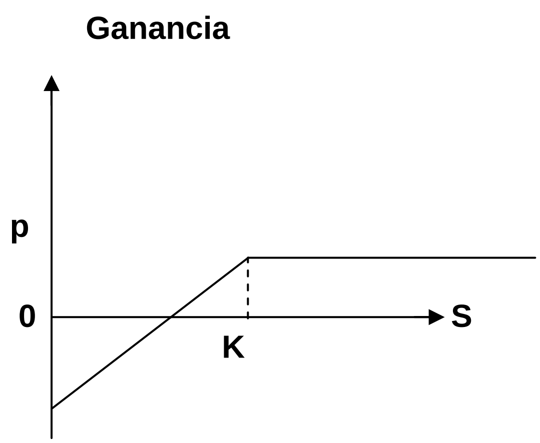

Figura 1.4

Ejemplo (opción de venta *put*). La Sra. Jiménez se siente totalmente segura de que las acciones de la compañía SCI pronto caerán de su precio unitario actual de \$60. Ella compra una opción de venta; el contrato le da derecho de vender 100 acciones de SCI a \$50 cada una después de un año contando a partir de hoy. Si el precio de SCI es de \$100 en la fecha de vencimiento, ella romperá el contrato de la opción de venta por que no valdrá nada. Es decir, no querrá vender acciones cuyo valor es de \$100 a cambio de un precio de ejercicio de \$50. Por otra parte, si las acciones de SCI se cotizan a un precio de \$40 en la fecha de vencimiento, ella ejercerá la opción. La Sra. Jiménez tiene el derecho de vender 100 acciones de SCI a \$50 cada una. En este caso ella puede comprar 100 acciones de SCI en el mercado a un precio de \$40 y posteriormente venderlas a un precio unitario de \$50. Sus utilidades serán de \$1000. Por consiguiente el valor de la opción de venta en la fecha de vencimiento será de \$1000.

Factores que determinan el valor de un *Call* y de un *Put*

Existen básicamente seis factores que influyen o determinan el valor de una opción en los siguientes párrafos se explicarán brevemente cada uno de ellos.

- **Precio de ejercicio.** Mientras más alto sea el precio establecido, es decir, el precio de ejercicio, menor será el precio del *call,* aunque se debe considerar que el valor intrínseco no debe de ser negativo. No importando que nuestro precio de ejercicio sea muy elevado, por otro lado mientras la opción no llegue a su fecha de vencimiento ésta aún tiene valor. Para las opciones de venta ocurre lo contrario, a medida que aumenta el precio de ejercicio, mayor será el precio de la opción de venta.

- **Fecha de Vencimiento.** Este factor esencialmente nos dice que mientras más alejados nos encontremos de la fecha de vencimiento tanto para una opción de compra como una opción de venta, mayor será el precio de éstas, ya que, las probabilidades de que el precio de mercado se mueva son mayores.

- **Precio de las acciones.** Si todo permanece constante, mientras más alto sea el precio de una acción valdrá más la opción de compra. Mientras que, para las opciones de venta ocurre que a mayor precio de la acción menor es el precio de la opción.

- **La volatilidad.** En este caso lo que vemos es que entre más varía el activo subyacente mayor va a ser el precio de nuestra opción, ya que si el precio de mercado se va muy por encima del precio de ejercicio el precio del *call* por consiguiente también subirá y ocurre lo contrario para las opciones de venta. De tal forma que a mayor riesgo mayor precio y viceversa.

- **La tasa de interés.** Los precios de las opciones están muy ligados con la tasa de interés ya que conforme suben éstas, las opciones *call* también lo hacen, y con las opciones de venta ocurre que a mayor tasa de interés menor es el precio de éstas.

- **Los dividendos.** Los dividendos repartidos por la acción subyacente también afectan al valor de la opción. Pues cuanto mayores sean los dividendos más bajo será el precio del *call,* puesto que se supone que al repartirse los dividendos el precio de mercado de la acción descenderá, lo que puede retraer a los posibles adquirientes de las opciones de compra. Con las opciones de venta ocurre exactamente lo contrario, pues si desciende el precio de mercado del activo subyacente ello redundará en un aumento del valor del *put.*

Definición 1.1.3 (Arbitraje). El *arbitraje* en finanzas es conocido como un movimiento en el que se involucran transacciones simultáneas en dos o más mercados con el objetivo de aprovechar precios o valores diferentes entre los mercados. El arbitraje consiste en adquirir en un mercado un bien subyacente (moneda, acciones, etc.,), por un precio inferior e, instantáneamente venderlo en otro distinto por un precio superior, con esto se consigue una ganancia segura, y sin desembolso alguno.

Definición 1.1.4 (Opciones dentro del dinero). Una opción está *dentro del dinero* (in the money) cuando el valor intrínseco de la opción es mayor que cero, es decir, cuando el precio de mercado es más alto que el precio de ejercicio para un *call,* y para un *put,* cuando el precio de ejercicio es más alto que el precio del subyacente.

Definición 1.1.5 (Opciones en el dinero). Una opción está *en el dinero* (at the money) cuando el precio de ejercicio y el precio del subyacente son iguales, es decir, cuando el valor intrínseco es cero.

Definición 1.1.6 (Opciones fuera del dinero). Una opción está *fuera del dinero* (out of the money), cuando el precio de mercado o del subyacente está por abajo del precio de ejercicio para un call, y para un put, es cuando el precio de mercado es mayor que el precio de ejercicio.

1.2. Modalidades de las Opciones

Existen tres modalidades o clasificaciones de las opciones las cuales tienen ciertas características, las primeras dos que se describen enseguida son conocidas como opciones estándar, porque la forma de valuarlas es más sencilla que aquellas que no son de este tipo y que son conocidas como opciones exóticas las cuales serán explicadas más adelante.

Definición 1.2.1 (Opciones Europeas). Este tipo de opciones se caracterizan por que sólo pueden ser ejercidas hasta su fecha de vencimiento.

Definición 1.2.2 (Opciones Americanas). Este tipo de opciones a diferencia de las opciones Europeas pueden ser ejercidas en cualquier momento de la vida de la opción aunque generalmente se ejercen hasta la fecha de vencimiento.

El tenedor de una opción ya sea de tipo *call* o *put* tiene tres posibles decisiones:

- Ejercer el derecho que adquirió al pagar la prima de la opción.
- No ejercer la opción en ningún momento de vida de la opción.
- Vender dicha opción antes de la fecha de vencimiento a otra persona o en el mercado secundario de opciones.

El nombre de las opciones Europeas, como Americanas, no tiene nada que ver la ubicación geográfica.

1.3. Paridad put - call

Aunque sabemos que una opción *put* y una *call* son diferentes, podemos combinar a éstas de tal forma que estén relacionadas entre sí.

Suponga que forma un portafolio adquiriendo un bien cuyo valor es S, además de que se adquiere una opción *put* y se emite una opción *call*, ambas con el mismo precio de ejercicio K y la misma fecha de vencimiento T. Ahora si denotamos por $V(S,T)$ el valor del portafolio, entonces tendríamos que

$$V(S,T) = S + P(S,T) - C(S,T)$$

donde $P(S,T) = \max\{K - S_T, 0\}$,y $C(S,T) = \max\{S_T - K, 0\}$ son los valores de la opción *put* y la opción *call* respectivamente. Podemos expresar *V* de la siguiente manera

$$V(T,S) = \begin{cases} S + (K - S) - 0 & \text{sí } S_T \leq K, \\ S + 0 - (S - K) & \text{sí } S_T > K. \end{cases}$$

Sin importar el valor final de S con respecto a K, al vencimiento el portafolio tiene el valor constante K.

La pregunta que surge inmediatamente es ¿cuánto se debe pagar por un portafolio que valdrá K al tiempo T? Suponiendo que el interés *r* se compone de forma continua, una inversión bancaria $V(T,S)$ crece de acuerdo a la ecuación

$$\frac{dV}{dt} = rV$$

cuya solución es el valor descontado o actualizado del portafolio $V(T,S)$.

Ya que $V = K$ en $t = T$, el valor requerido al tiempo t es $V(T,S) = Ke^{-r(T-t)}$ esto iguala la ganancia del portafolio con un depósito bancario. Entonces se concluye que

$$S + P(S,T) - C(S,T) = Ke^{-r(T-t)}$$

Esta relación entre el valor del subyacente y sus opciones se denomina ecuación de paridad put- call. Esta ecuación es un ejemplo de la eliminación del riesgo, llevada a cabo mediante transacciones sobre el valor involucrado y cada una de las opciones.

1.4 Opciones exóticas

Se dice que una opción es exótica por que su valor intrínseco no está dado por ninguna de las siguientes expresiones:

$$C(S,T) = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)_+$$
$$\text{ó } P(S,T) = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)_+$$

este tipo de opciones también son conocidas como opciones de la segunda generación.

Clasificación de las opciones exóticas

Existen diferentes clases de opciones exóticas entre las que se encuentran

Definición 1.4.1 (Opciones Lookback). Una opción *call* de tipo lookback da a su tenedor el derecho de adquirir una cantidad fija del activo subyacente al precio mínimo que éste haya alcanzado durante toda la vida de la opción. En cambio, una opción *put* de tipo lookback da a su tenedor el derecho de vender un bien subyacente al precio máximo que ésta tuvo durante su tiempo de vida.

Este tipo de opciones por tener la ventaja de que siempre son dentro del dinero lógicamente son más caras que una opción de tipo *call* o *put* estándar, además de que también pueden ser de tipo europeas o americanas.

El valor intrínseco de este tipo de opciones esta dado por

$$\max\{0, -S_n - \min(S_0, S_1, \ldots, S_n)\},$$

para una opción de tipo *call*

$$\max\{0, \max(S_0, S_1, \ldots, S_n) - S_n\},$$

para una opción de tipo *put*

Definición 1.4.2. (Opciones Compuestas). Este tipo de opciones también son llamadas: opciones sobre opciones y pueden ser de cuatro formas distintas

i. *call* de un *call.*
ii. *call* de un *put.*
iii. *put* de un *call.*
iv. *put* de un *put.*

Este tipo de opciones se utiliza para cubrir riesgos en el mercado de divisas, un ejemplo del cuál nos puede cubrir estas opciones, es el riesgo de cambio que se puede dar por obtener un contrato en el extranjero.

Definición 1.4.3 (Opciones condicionales u opciones con barrera). Este tipo de opciones son aquellas en donde su vigencia depende de algún suceso, que generalmente se va a relacionar con la evolución de los precios del activo subyacente. Este tipo de opciones pueden ser de muchas clases pero generalmente el poseedor de ésta opción puede ejercerlas siempre y cuando el valor del activo subyacente esté por arriba o por debajo de un valor antes determinado.

Definición 1.4.4 (Opciones multiíndices). En este tipo de opciones el precio está determinado por el comportamiento de al menos dos índices.

Definición 1.4.5 (Opciones diferidas). Estas opciones pueden ser adquiridas incluso antes de que su tiempo de vida comience realmente, por ejemplo: un inversionista podría pagar en este momento el precio de una opción diferida para aprovechar el precio de mercado actual del activo subyacente por que sabe que en un futuro va a necesitar dicha opción.

Definición 1.4.6 (Opciones digitales). Se les llama de esta manera por que tienen un funcionamiento muy similar al de los circuitos binarios lógicos, lo que quiere decir es que, sí el precio del activo subyacente supera al precio de ejercicio de una opción de tipo *call* el tenedor de la opción recibe una cantidad antes determinada de no ser así el poseedor no recibe nada.

Definición 1.4.7 (Super - acciones). En este tipo de opciones el poseedor de dicha opción recibe una cantidad monetaria antes determinada en la fecha de vencimiento de ésta, si el precio del activo subyacente es casi exactamente el precio de ejercicio, de lo contrario no recibe nada.

Opciones Asiáticas.

Este tipo de opciones se considera dentro de las opciones exóticas por que el precio del activo subyacente se calcula mediante un promedio de los precios alcanzados por éste durante el tiempo de vida de la opción. Estas opciones pueden ser de tipo europeas o americanas. Este tipo de opciones pueden ser utilizada por compañías en donde sus flujos son constantes, para invertir su dinero de una forma más "barata". Existen las soluciones en forma cerrada para las opciones de tipo europeo. La valuación de este tipo de opciones es complicada porque dependen del promedio de los precios.

En este caso el precio de éstas es menor que el de una opción estándar, por que un precio promedio es menos volátil que las series de precios que se utilizan para obtenerlo, puesto que entre más frecuente se calcule el promedio menor es la volatilidad. Generalmente para calcular su precio se utiliza el promedio diario, así que el valor intrínseco de la de la opción está dado por

$$\max\{0, A(S) - K\},$$

para una opción de tipo *call*

$$\max\{0, K - A(S)\},$$

para una opción de tipo *put.* En donde $A(S)$ es un promedio de valores que toma el subyacente durante su vigencia.

La finalidad principal de este tipo de opciones es reducir la posibilidad de manipulación del precio del subyacente al término de la vida de la opción. Cuando se tiene una opción de tipo asiático cuyo promedio sea aritmético, por sus características, que se analizan más adelante, su cálculo se realiza aplicando algún método numérico.

Rubinstein, con base en un estudio de Kemna y Vorst [7], propone un sistema de valuación que se basa en el método de simulación por Monte Carlo, utilizando como variable de control la prima de una opción con un precio final del subyacente estimado según la media geométrica de los precios históricos para la que existe un modelo de cálculo analítico. Se dan los supuestos de volatilidad y precio de ejercicio hasta el vencimiento.

Opciones con precio medio del subyacente.

El precio de este tipo de opciones es calculado por medio de un promedio del subyacente en un período previo que es estipulado antes del vencimiento de la opción.

Opciones con precio de ejercicio promedio.

En éste tipo de opciones, el precio del activo subyacente se calcula mediante una media aritmética que se obtiene mediante los precios históricos del activo subyacente durante un período determinado al vencimiento de la opción.

2. Técnicas de Valuación de las opciones financieras.

Con el objetivo de encontrar el valor de cuanto es lo justo que se debe de pagar por el derecho que nos concede el tener una opción (Prima), se han desarrollados diferentes métodos de valuación como son: Árboles (Lattices) binomiales o también llamado el Método Binomial, Ecuaciones Diferenciales Parciales, métodos analíticos como el Modelo de Black y Scholes y aproximaciones mediante simulación, como el Método de Monte Carlo.

En las siguientes subsecciones se describirán cada uno de los métodos antes mencionados.

2.1. Modelo de Black y Scholes.

Este modelo fue desarrollado por los profesores Fischer Black y Myron Scholes, se considera de gran importancia para valuar las opciones de tipo europeo, no sólo por que toma en cuenta la valoración del arbitraje, sino por que proporciona una solución analítica en un sólo paso es más rápido que el método binomial . Este modelo supone que el precio del subyacente sigue una caminata aleatoria, lo que significa que los cambios porcentuales en el precio de las acciones en un período corto sigue una distribución normal, así que el precio de las acciones en cualquier momento futuro se comporta como una log normal.

Tomando en cuenta que las diferencias entre una variable normal y una log normal son: mientras una variable con distribución normal puede tomar valores tanto positivos como negativos, una variable que esta distribuida log normalmente solo puede ser positiva, una variable normal es simétrica, mientras que una log normal no lo es, siendo su media, mediana y moda diferentes. (Fig. 2.1)

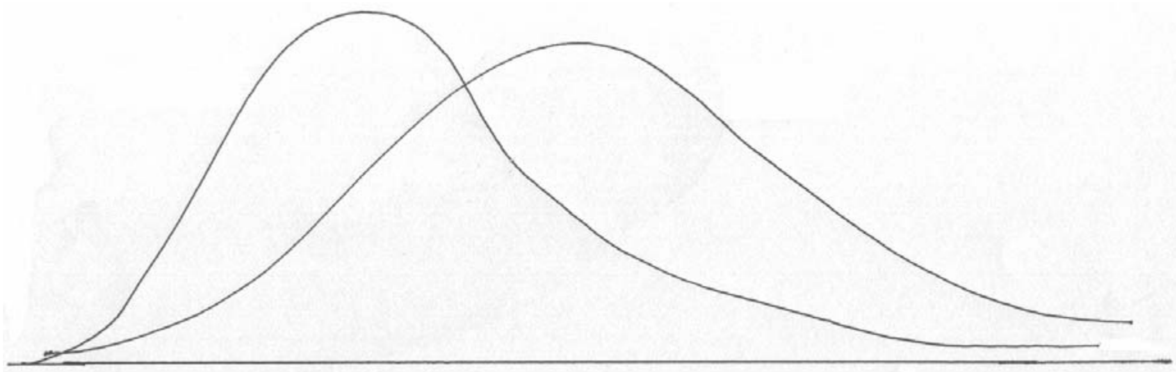

Figura 2.1.

Los supuestos hechos por Black y Scholes al realizar la fórmula de valoración son los siguientes:

Supuestos del Modelo de Black y Scholes.

i. El precio del activo sigue una distribución normal logarítmica (log normal), por lo que los rendimientos se distribuyen normalmente.
ii. No existen costos de transacción o impuestos.
iii. No hay dividendos sobre las acciones durante el tiempo de vida de la opción.
iv. No hay oportunidades de arbitraje.
v. La negociación de valores es continua.
vi. Los inversionistas pueden prestar o pedir prestado al mismo tipo de interés libre de riesgo.
vii. El tipo de interés libre de riesgo a corto plazo, es constante.

A éstos supuestos se le pueden hacer modificaciones para poder tomar en cuenta dividendos, o para aproximar las soluciones de otro tipo de opciones no estándar.

Fórmulas de Precios

A continuación se dan las fórmulas para calcular los precios de las opciones europeas tanto de tipo *call* como de tipo *put* tomando en cuenta que no se tienen dividendos

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2)$$

$$P = Ke^{-rt} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rt + \left(\frac{1}{2}\right)\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rt - \left(\frac{1}{2}\right)\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Teniendo en cuenta $N(d_x)$, $x = 1{,}2$ es la función de distribución de probabilidad acumulada para una variable que es normal y estandarizada. Las variables C *y* P son los precios de una opción *call* y *put* respectivamente, S_0 es el precio del subyacente K el precio de ejercicio, r el tipo de interés libre de riesgo y σ es la volatilidad.

2.2. Método Binomial.

Este método fue desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein hacia 1979; consiste en realizar un árbol binomial que nos muestra las posibles trayectorias que puede seguir el precio del subyacente durante el tiempo de vida de la opción, tiene como ventaja que es muy intuitivo y que se emplea una matemática muy sencilla. Para hacer más simple su explicación se toma en cuenta que no existen dividendos.

Considérese una situación donde el precio de las acciones es de \$100 y además sabemos que al cabo de un mes su precio será de \$90 o de \$110. Suponga ahora que se está interesado en valuar un *call* de tipo Europeo sobre las acciones, con precio de ejercicio por \$105 dentro de un mes, así que dicha opción tendrá alguno de los dos valores antes mencionados al cabo de un mes. Si el precio de las acciones es de \$110 el precio de la opción será de \$5, pero si el precio de las acciones es de \$90 el precio de la opción será cero, podemos verlo en el siguiente diagrama (Figura 2.2.1).

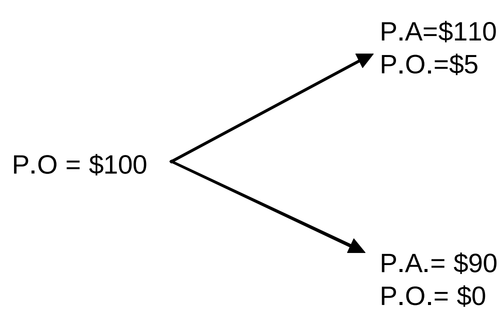

Figura 2.2.1

Para poner el precio de la opción al ejemplo anterior utilizaremos un método muy sencillo lo único que tenemos que suponer es que no existe arbitraje. Considérese un portafolio de inversión que esté compuesto por las acciones y la opción de tal forma que no exista riesgo al término de vida de la opción, como el portafolio no tiene riesgo alguno el interés generado por éste será igual al tipo de interés libre de riesgo y esto nos permite deducir el precio del mismo y por lo tanto el precio de la opción que obtuvimos.

Considerando un portafolio en posición larga, es decir, la posición que mantiene el vendedor de una opción de cualquier tipo, en β acciones y con una posición corta, es decir, la posición que mantiene el comprador de una opción de cualquier tipo, en un *call*, ahora calcularemos el valor de β que hace que dicho portafolio sea libre de riesgo. Si el precio de la acción pasa de 100 a 110, el valor de las acciones será de 110β y el precio de la opción será de 5 con lo que el valor del portafolio creado será de $110\beta - 5$. En cambio si el precio de las acciones baja el valor de las acciones estará dado por 90β y por tanto el precio el valor de la opción será cero y el precio del portafolio será 90β. Así éste será libre de riesgo sólo si se elige un valor para β tal que el valor de éste al final sea el mismo para ambas alternativas, es decir

$$110\beta - 5 = 90\beta$$

donde

$$\beta = 0.25$$

Luego el portafolio será libre de riesgo, por lo tanto:

Posición larga: 0.25 acciones

Posición corta: 1 opción

Si el precio de las acciones sube a 110, el valor del portafolio será

(110)(0.25)-5= 22.50

Si el precio de la acción baja a 90, el valor del portafolio será

(90)(0.25)=22.50

Esto nos indica que no importa que el precio de las acciones suba o baje ya que el valor del portafolio al final de la vida de la opción siempre será el mismo en este caso 22.50.

Así que por ser un portafolio libre de riesgo no tiene arbitraje y la ganancia es el interés libre de riesgo.

Éste ejemplo lo que nos muestra es como funciona el método binomial para un período. El método se generaliza para cuando se tiene un problema con muchos períodos y se muestra a continuación.

- Primero se necesita construir un diagrama de árbol el cual nos va a representar las diferentes trayectorias que puede tener el subyacente a través del tiempo de vida de la opción.

- Ahora se considera una opción que no paga dividendos y se divide el tiempo de vida de la opción en pequeños intervalos de duración Δt, después se supone que en cada intervalo que se dividió el precio del subyacente éste se mueve desde su precio inicial hasta alguno de los dos nuevos valores Su o Sd. El movimiento de S hasta Su es considerado un movimiento a la alza, de igual manera el movimiento que va desde S hasta Sd se considera un movimiento a la baja. Generalmente se considera u >1 y d <1 esto se muestra en la figura (2.2.2)

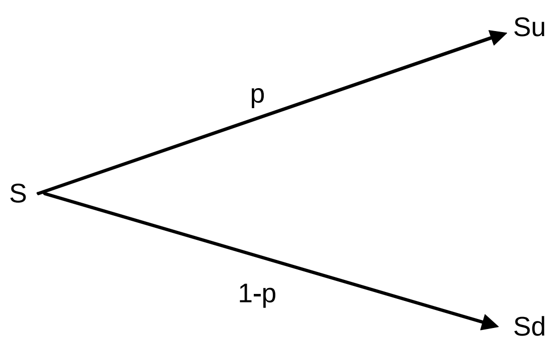

Figura 2.2.2

La probabilidad de que se tenga un movimiento a la alza es denominada p y la probabilidad de que se tenga un movimiento a la baja será $1-p$.

Según el modelo de Cox Ross y Rubinstein se debe de considerar que el mercado es neutral al riesgo, con lo cuál se supone lo siguiente:

i. La ganancia esperada de cualquier valor negociado es el tipo de interés libre de riesgo.

ii. Los flujos de efectivo futuros pueden ser valuados descontando sus valores esperados al tipo de interés libre de riesgo.

Las fórmulas que calculan los valores de los parámetros p, u y d de un diagrama de árbol son

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{d} \qquad (2.2.1)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (2.2.2)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \qquad (2.2.3)$$

Donde $e^{\sigma\partial t}$ se le denomina el factor de crecimiento.

El diagrama de árbol se construye de la siguiente manera.

En el momento inicial, es decir, cero se conoce el precio del subyacente que es S, en el intervalo de tiempo Δt, hay dos posibles precios del activo subyacente que son Su y Sd, en el intervalo de tiempo $2\Delta t$ existen tres posibles valores para el precio del subyacente Su^2, S, Sd^2, y así sucesivamente. Así que en el intervalo de tiempo Δt se consideran $i+1$ valores posibles para el precio del subyacente y estos son (véase [4] Pág.403 - 421).

$$Su^j d^{i-j} \quad \text{j=0,1,..., i.}$$

El parámetro $u = \frac{1}{d}$ se utiliza para calcular el precio del subyacente en cada nodo del diagrama.

En el árbol, un movimiento a la alza seguido de un movimiento a la baja genera el mismo precio del subyacente, de la misma forma un movimiento a la baja seguido de un movimiento a la alza produce el mismo efecto, lo cual reduce el número de nodos en el árbol.

El árbol que se considera cuando se utiliza el modelo binomial es el mostrado en la figura 2.2.3

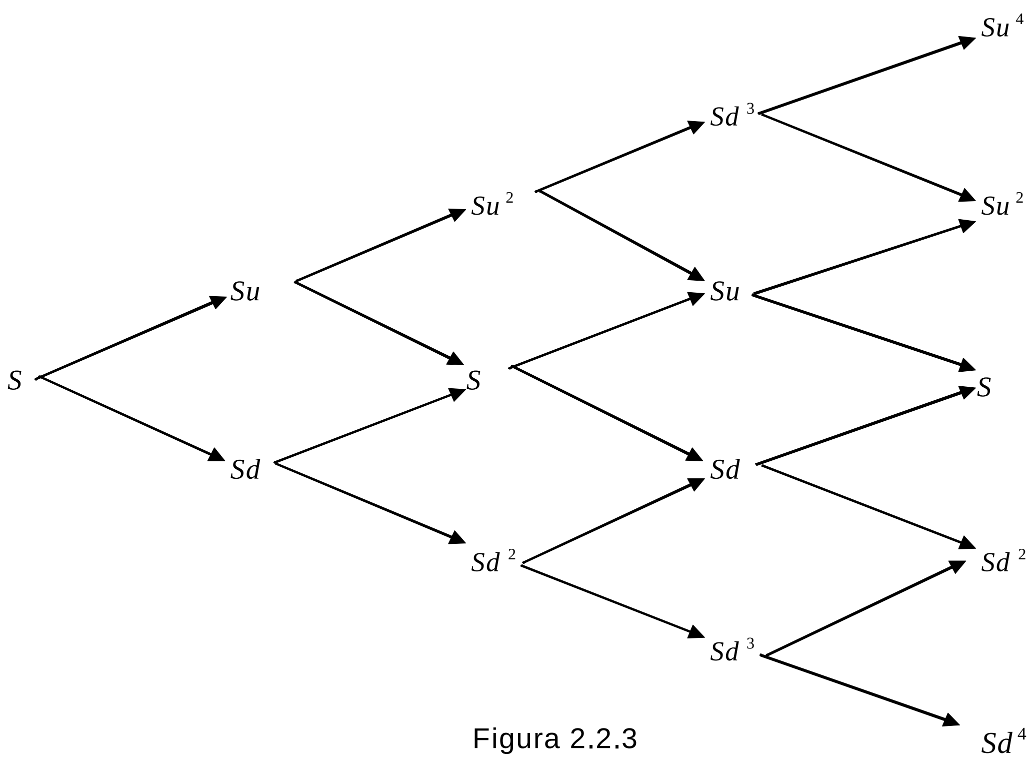

Figura 2.2.3

Resolución del árbol hacia atrás

En este caso las opciones son valuadas empezando al final del árbol y haciendo movimientos hacia atrás. Ahora el valor de la opción es conocido en el tiempo T. Puesto que se supone el mercado neutral al riesgo, el valor de cada nodo del árbol en el momento $T - \Delta t$, se puede calcular como el valor esperado en el momento T descontado al tipo r por un período de tiempo Δt. Al igual que para cada nodo en el tiempo $T - 2\Delta t$ puede calcularse como el valor esperado en el momento $T - \Delta t$ descontado por un periodo de tiempo el tipo r y así sucesivamente. En el caso de una opción americana es necesario revisar cada nodo del árbol para ver si es mejor ejercer antes de la fecha de vencimiento. Eventualmente después de haberse movido hacia atrás a lo largo de todos los nodos, se obtiene el valor de la opción en el momento cero.

El procedimiento anterior se puede ver con el siguiente ejemplo.

Considere una opción Americana de venta a cinco meses sobre acciones que no pagan dividendos cuando el precio de las acciones es de \$50, el precio de ejercicio es de \$50, el tipo de interés libre de riesgo es del 10% anual, y la volatilidad es del 40% anual; con la notación utilizada esto significa que $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.10$, $\sigma = 0.40$ y $T = 0.4167$. Suponga que se divide la vida de la opción en cinco intervalos de 1 mes de vida para construir el árbol binomial. Entonces $\Delta t = \frac{1}{12}$ y utilizando las ecuaciones (2.2.1) - (2.2.3) y calculando el factor de crecimiento se obtiene.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.1224$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.8909$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0.5073$$

$$1 - p = 0.4927$$

$$e^{\sigma\partial t} = 1.0084$$

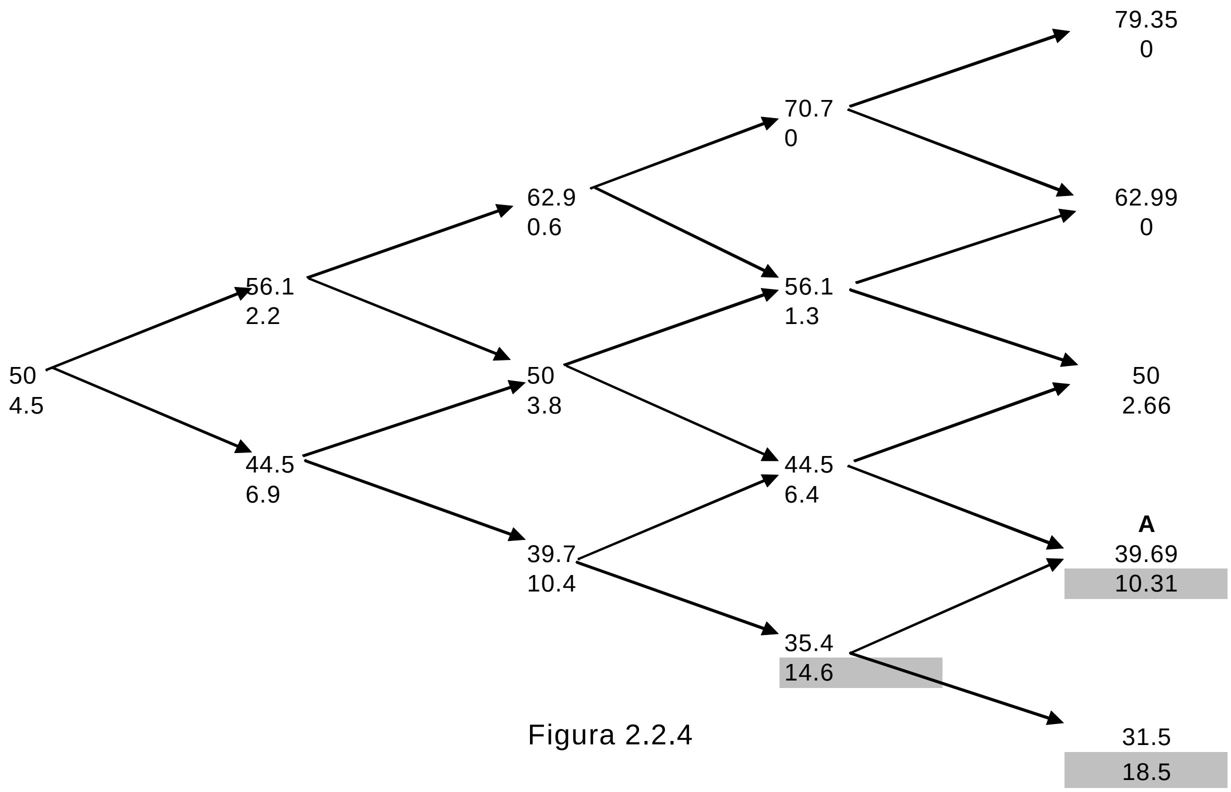

Figura 2.2.4

En cada nodo:

Valor superior = Precio del activo subyacente.

Valor inferior = Precio de la opción.

Los cuadros sombreados es donde se ejerce la opción.

La figura 2.2.4 nos muestra el árbol binomial que se obtiene para el ejemplo anterior. La probabilidad de un movimiento a la alza siempre es de 0.5073 que es el valor de p y la probabilidad de un movimiento a la baja siempre es 0.49274, es decir $1-p$.

El precio de las acciones en el nodo $j,\ j=0,1,\ldots,i$ en el momento $i\Delta t, i=0,1,\ldots,4$ se calcula como $S_0 u^j d^{i-j}$. Por ejemplo, el precio de las acciones en el nodo A $(i=4,\ j=1)$ es

$$(50)(1.1224)(0.8909)^3 = \$39.69$$

Los precios de las opciones en los nodos finales se calculan como

$$\max(K - S_T, 0).$$

Los precios en los penúltimos nodos se calculan a partir de los precios de las opciones de los nodos finales. Primero, se supone que no se ejerce la opción en los nodos, lo cual significa que el precio de la opción se calcula como el valor presente del precio esperado de la opción en un intervalo de tiempo más adelante. De ésta manera es como se evalúa si se ejerce la opción o es mejor esperar de tal manera que el tenedor de la opción obtenga un beneficio mayor.

2.3. Valuación por medio de ecuaciones diferenciales parciales.

Este es otro de los métodos que se utilizan para calcular el precio de una opción. Tomando en cuenta nuevamente al modelo de Black y Scholes así como los supuestos en los cuales se basa (no arbitraje, ni costos de transacción, comportamiento como una log normal del activo subyacente etc.) tenemos la ecuación:

$$\frac{dS}{S} = \mu(t,S)dt + \sigma(t,S)dw$$

Si denotamos $V(t,S)$ al valor de la acción en el instante t, entonces por el Lema de $It\hat{o}$ (Ver apéndice 1), y del hecho de que no existe el arbitraje obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r(t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,S)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Con las condiciones inicial y de frontera

$$\begin{array}{l} C(0,t) = 0; \\ C(S,t) \end{array},$$

es aproximadamente igual a S, cuando $S \to \infty$

$$C(S,T) = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)_+$$

La ecuación anterior nos calcula el precio de una opción *call* europea. Para el caso de las opciones asiáticas la valuación tiene cambios, los cuales se presentan a continuación.

Valuación de Opciones Asiáticas con Ecuaciones Diferenciales Parciales

La valuación de las opciones asiáticas por medio de ecuaciones diferenciales parciales se calcula o se puede obtener como sigue.

Dado que el precio de este tipo de opciones se obtiene con el promedio de los precios del activo durante el tiempo de vida de la opción, entonces el precio de éstas puede estar dado por:

- **Media Continua.-** En este caso se introduce una nueva variable que nos definirá la media para la resolución del problema

$$A = \int_0^t f(S(\tau), \tau) d\tau$$

donde f es una función que depende de las variables S y T, así

$$dA = f(S, \tau) d\tau$$

Luego la media aritmética está dada por $\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau) d\tau$

Por lo tanto el precio de la opción está dado por

$$\max\left(S - \frac{1}{T}\int_0^T S(\tau) d\tau, 0\right)$$

donde

$$S = f(S,\tau)$$

Ahora como la ecuación para una opción Asiática tiene tres variables $V(S, A, T)$ se aplica Lema de Itô a la función *V* así que

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dS + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t) \frac{\partial V}{\partial I} \right) dt$$

Y la media geométrica por

$$\exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log S(\tau) d\tau \right)$$

Así, la ecuación diferencial parcial quedaría de la siguiente manera

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

con la condición

$$V(S, A, T) = \max\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T S_T - K, 0 \right\}$$

Para las opciones en las que el precio es la media del subyacente durante la vida de la opción, la ecuación diferencial anterior se puede expresar en función de únicamente dos variables, mediante un adecuado cambio de variables.

- **Media discreta.-** En este caso la media se define

$$I = \sum f(S(t_i), t_i)$$

I es una variable que permanece constante entre instantes de cálculo del promedio t_i, así que I puede considerarse un parámetro en estos tramos. De esta manera el valor de la opción en esta parte se comporta de acuerdo a la ecuación diferencial de Black y Scholes.

El valor V de la opción tiene que comportarse de manera continua para evitar el arbitraje, es decir, si al moverse I resulta un cambio negativo en V podría aprovecharse la oportunidad de arbitraje vendiendo la opción de inmediato antes de que I vuelva a cambiar y recomprarla de manera inmediata.

2.4. Método Monte Carlo.

El nombre de Monte Carlo viene de Mónaco que es llamada la capital del juego de azar. Aproximadamente en 1944 fueron desarrollados sistemáticamente estos métodos y esto se da a raíz del desarrollo de la computadora electrónica.

El primer paso de este método es el construir un modelo analítico que nos simule la situación actual, después es producir la distribución de probabilidad a partir de datos históricos o subjetivos para cada factor de incertidumbre en el modelo. Después se generan resultados de muestra aleatoria con la distribución de probabilidad que sigue cada una de las cantidades inciertas, después éstas se utilizan para determinar un resultado prueba del modelo.

Entre más pruebas se realicen, mejor será la aproximación que se tenga de la media y la desviación estándar. Un método que indica si se han llevado a cabo el número suficiente de pruebas es el de llevar un promedio móvil de los resultados.

SIMULACIÓN POR MONTE CARLO.

El primer paso para llevar a cabo este método es construir un árbol binomial y generar lo que se llama caminatas aleatorias a lo largo del árbol trabajando hacia adelante. El primer paso es generar un número aleatorio p que esté entre 0 y 1, si el número generado está entre 0 y p se toma la rama superior, pero si éste se encuentra entre p y 1 entonces se toma la rama inferior, el procedimiento se termina hasta que se han recorrido cada uno de los nodos del árbol. Teniendo todos los valores posibles que se generan entonces se calcula el beneficio bruto de la opción, es así como se completa la primera caminata aleatoria, este proceso se repite tantas veces como se desee o sea necesario. La estimación de la opción será el valor de la media aritmética de todos los resultados que se obtuvieron al realizar las caminatas aleatorias, descontado al tipo de interés libre de riesgo

Este método sirve para calcular el precio de una opción europea, pero no funciona para calcular el precio de una opción americana ya que no se podría saber si existe un nodo en el cual se pueda ejercer la opción antes de su fecha de vencimiento. En cambio, este método si se puede utilizar para calcular el precio en algunas opciones exóticas como las asiáticas y las lookback. En las opciones asiáticas como ya se mencionó anteriormente, éstas proporcionan un resultado que está basado en la media aritmética del precio del activo a lo largo de la vida de la opción es así que el precio de un *call* está dado por:

$$C(S,T) = \max\{S_T - K, 0\}$$

y el precio del put por

$$P(S,T) = \max\{K - S_T, 0\}$$

Como la eficiencia de este método es medida por la varianza de su salida, entonces cuanto más pueda ser reducida ésta sin cambiar su valor esperado, menor será el número de repeticiones requeridas.

Para este trabajo se utilizó la simulación por Monte Carlo a fin de dar una aproximación a la integral

$$X_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_u du \ ,$$

la integral puede aproximarse por medio de sumas de Riemann de la forma siguiente

$$X_T = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} S_{t_k}$$

donde

$$\Delta t = \frac{\text{Tiempo de vida de la opción}}{\text{Intervalos}} = \frac{T}{N}$$

Lapeyre [9, Pág. 39 – 57], desarrolla un método para aproximar la integral anterior, el cual es de orden de $O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, y que en esencia es el método del trapecio. Y la aproximación al valor de un call asiático con precio de ejercicio fijo está dada por

$$X^{(A)} = \left[\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \frac{S_{t_k} + S_{t_{k+1}}}{2} - K\right]_+ \qquad (2.4.1)$$

Este procedimiento se adaptó para el programa que se utilizó en la obtención de resultados de este trabajo, los resultados se muestran más adelante.

2.5 TÉCNICAS DE REDUCCIÓN DE VARIANZA

En un caso particular del estudio de la simulación se esta interesado en calcular θ que es un parámetro que se relaciona con un modelo estocástico. Para poder estimar θ se simula un modelo en el que se obtiene un dato de salida X tal que $\theta = E[X]$, después de realizar muchas ejecuciones en la j-ésima ejecución se produce la variable de salida X_i, así después de n ejecuciones la estimación de θ esta definida por [13, pág. 141-149]

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

Como esto produce una estimación insesgada de θ, entonces el error cuadrático medio de éste es igual a su varianza, es decir

$$ECM = E[(\overline{X} - \theta)^2] = VAR(\overline{X}) = \frac{VAR(X)}{n}$$

Ahora si se pudiera obtener otra estimación de θ reduciendo la varianza que tiene $\overline{X}$, el estimador sería aún mejor.

Existen diferentes técnicas de reducción de varianza, como variables antitéticas, variables de control, reducción de varianza mediante condicionamiento, muestreo estratificado, muestreo de importancia, entre otras, en todas ellas se está interesado en estimar el valor de θ, pero con una menor varianza.

En este trabajo, la técnica que se empleará será, la técnica de reducción de varianza usando una variable de control.

VARIABLE DE CONTROL

Como anteriormente se mencionó, se está interesado en estimar $\theta = E[X]$ donde X es una variable aleatoria, cuya esperanza se aproxima por medio de simulación. Ahora bien, si se supone que se conoce el valor esperado de alguna otra variable aleatoria, Y, es decir, $E[Y] = \mu_y$ es conocida, y se define una tercer variable aleatoria, Z por

$$Z = X + c(Y - \mu_Y)$$

en donde c es una constante. Entonces,

$$E[Z] = E(X + c[Y - E(Y)])$$

por lo que, $E[X] = E[Z]$, y así se tiene que el valor esperado de X y de Z son iguales. Por otro lado, la varianza de Z está dada por

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var(X + c(Y - \mu_Y)) \\ &= Var(X + cY) \\ &= Var(X) + c^2 Var(Y) + 2cCov(X, Y) \end{aligned}$$

En la expresión anterior se tiene que la varianza de Z depende del parámetro c, y esta varianza alcanza su valor mínimo cuando

$$c^* = -\frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}$$

Así, la varianza de Z, para el valor anterior de $c*$, está dada por

$$Var(X + c*(Y - \mu_Y)) = Var(X) - \frac{[Cov(X,Y)]^2}{Var(Y)} \tag{2.5.1}$$

A la variable aleatoria Y, se le conoce como variable de control.

Si dividimos la ecuación (2.5.1) entre $Var(X)$, se obtiene

$$\frac{Var\left(X + c^{*}\left(Y - \mu_{Y}\right)\right)}{Var(X)} = 1 - Corr^{2}\left(X, Y\right) \qquad (2.5.2)$$

donde

$$\rho = \frac{Cov\left(X, Y\right)}{\sqrt{Var\left(X\right)Var\left(Y\right)}}$$

donde ρ es el coeficiente de correlación de X y Y. Por lo que la ecuación (2.5.2), establece que la reducción de varianza obtenida al utilizar la variable de control Y es de 100 $\rho^{2}\left(X, Y\right)$ por ciento.

Ahora si regresamos al problema original, se había comentado que valuar una opción asiática con promedio aritmético no era sencillo, esto es porque aunque el subyacente se distribuye como una lognormal, no así el promedio aritmético, (véase Linetsky [8]). Por otro lado, el promedio geométrico de variables aleatorias que se distribuyen lognormalmente también se distribuye de forma lognormal.

Kemna y Vorst (véase [7]) proponen aproximar

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} S_{u}\,du \;,$$

por medio de

$$e^{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\ln\left(Su\right)du} \;,$$

Estas dos variables aleatorias se espera sean parecidas, para los parámetros de r y σ, cuando sus valores no son muy grandes. Además, recuérdese que el promedio geométrico siempre es menor o igual que el promedio aritmético.

Se puede demostrar, Lamberton [8, Pág. 97- 98] e Ibarra [6, Pág. 48- 50] que la variable aleatoria

$$e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln(Su)du},$$

tiene una distribución normal y que la esperanza de ésta, está dada por la siguiente expresión,

$$E\left[e^{-rT}\left(e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_u)du}-K\right)_+\right]=e^{\frac{1}{2}\left[r+\frac{\sigma^2}{6}\right]T}S_0N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2)$$

en donde

$$d_2=\frac{\ln\frac{S_0}{K}+\frac{1}{2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)r}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}$$

$$d_1=d_2+\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}$$

Por lo que si se toma

$$Y=e^{-rt}\left(e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_u)du}-K\right)_+ \quad , \qquad (2.5.3)$$

como variable de control, y si S_u es sustituida por

$$S_0e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)u+\sigma W_u},$$

en la ecuación (2.5.3) se obtiene

$$Y=e^{-rT}\left(S_0e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2}+\frac{\sigma}{T}\int_0^T W_u du}-K\right)_+$$

Ya que el esquema numérico que se utilizará es el del trapecio, la expresión para aproximar el valor de la variable aleatoria Y está dada por

$$Y^{(A)}=e^{-rT}\left(S_0e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2}+\frac{\sigma}{T}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(W_{t_k}+W_{t_{k+1}}\right)}-K\right)_+$$

Debe hacerse notar que en la aproximación anterior, se debe utilizar la misma trayectoria del movimiento browniano que para la variable X La manera en que se aplicó el método se explica en la sección siguiente.

Aplicación de la Técnica

Con base en lo expuesto en las secciones anteriores, para aplicar el método de reducción de varianza al cálculo de

$$E(X) = E\left[e^{-rT} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S(\tau) d\tau - K \right)_+ \right]$$

se utiliza como variable de control a Y con

$$E(Y) = E\left[e^{-rT} \left(Exp\left(\frac{1}{T} \int \ln S_T dt \right) - K \right)_+ \right]$$

Y se calcula

$$E[Z] = E\left(X + c^* [Y - E(Y)] \right)$$

en la que, de acuerdo con Lapeyre [9], se puede utilizar

$$c^* = -1.$$

Así, que, para realizar la aproximación por medio del método Monte Carlo se debe calcular

$$E[Z] = E\left[X^{(A)}\right] + c^* E\left[Y^{(A)}\right] - c^* \mu_Y .$$

utilizando el esquema numérico dado en la sección anterior.

3. Conclusiones.

Con base en los resultados del programa que se realizó para este trabajo, éste proporcionó resultados que a continuación se presentan y se hace el análisis correspondiente, además de que se compara con los resultados que obtuvieron en el artículo de Roger y Shi.

Se hicieron una serie de tablas que muestran el precio de la prima en diferentes circunstancias para una opción asiática con precio de ejercicio fijo, y precio inicial $S_0 = 100$ y $T = 1$.

En la tabla 1 y 2 se muestran los resultados que se obtuvieron con el programa sin reducción de varianza, en ellas se puede observar que los resultados están cerca de los que obtuvieron Roger y Shi en su artículo pero que se necesitan hacer un número muy grande de trayectorias para poder aproximarnos a estos resultados, y esto hace que el tiempo computacional sea grande, además este método tiene una convergencia muy lenta es por ello que se necesita meter la técnica de reducción de varianza (variable de control) para que los resultados converjan de manera más rápida y precisa a los dados por Roger y Shi.

En estas tablas están dos columnas marcadas con un asterisco lo que significa que en esas tablas se utilizó la volatilidad que también esta marcada con un asterisco.

En las tablas de la 3 - 8 se han tabulado los resultados del programa sin aplicar la técnica de reducción de varianza y aplicando la técnica respectivamente, variando el número de intervalos, la tasa libre de riesgo r y la volatilidad σ, manteniendo fijo el precio del subyacente S_0, el precio de ejercicio K, y el número de trayectorias. De esta manera si se comparan los resultados que se obtuvieron en las tablas es notable que los resultados en la tabla 3 tienen mayor variación que los que se obtuvieron en la tabla 4, lo cual nos indica que los resultados obtenidos con el programa de reducción de varianza tiene una mejor aproximación al precio de la opción ya que se encuentran más cercanos, se notó que para la tabla 4 basta, con tener 1000 trayectorias para que se estuviera rápidamente dentro de los límites dados por Roger y Shi, lo que es una ventaja, porque reduce considerablemente el tiempo que tarda el programa en dar resultados.

En ambas tablas se trabajó con 1000 trayectorias, las columnas LIRYS y LIP son, por un lado los límite inferiores que obtuvieron Roger y Shi y la otra indica los límites dados por el programa que se utilizó en esté trabajo, de la misma manera ocurre para las columnas LSRYS y LSP, que son los límites superiores y por último las columnas APRYS y APP son las aproximaciones de Roger y Shi y las que se obtuvieron con el programa de esta tesis. En estos resultados se observa que en las tablas en las que no se aplicó la técnica de reducción de varianza las columnas que contiene los límite superiores e inferiores varían mucho y son más grandes que los que se obtuvieron en las tablas en las que se aplicó dicha técnica.

Para todas las tablas se observó que a mayor número de iteraciones mejor aproximación se obtiene a la prima de la opción.

Por último en las tablas 9 y 10 el número de trayectorias es de 10000, ya que fue necesario aumentar las trayectorias para que los resultados estuvieran dentro de los límites de Roger y Shi, pero se observa de igual forma que la técnica de reducción de varianza es muy buena por que los resultados no varían tanto y se obtiene una aproximación mejor con menos número de trayectorias, es decir, que los valores que se obtienen en este programa rápidamente nos hace estar dentro de los límites dados por Roger y Shi, por lo tanto, es más rápido la obtención del precio de la prima de la opción.

Hasta el momento se ha visto que el método de reducción de varianza que se utilizó en este trabajo es bueno, no sólo por que computacionalmente es más eficiente, sino por que se necesitan un número menor de trayectorias para obtener los resultados deseados y esto ahorra mucho tiempo en comparación con el Método de Monte Carlo sin reducción de varianza. Esto toma una gran importancia ya que se obtiene un precio más justo de la prima, y por tanto beneficia aquel que la paga.

Se pudo observar que a mayor número de trayectorias, mayor es el tiempo que tarda en dar resultados el programa, pero también mejor es la aproximación que se tiene con los resultados de Roger y Shi, de igual forma ocurre cuando el número de intervalos es aumentado.

En las tablas también pudimos observar que a mayor volatilidad y tasa libre de riesgo, mayor será el precio de la opción. Los resultados obtenidos en el programa que se utilizó, como anteriormente se mencionó, fueron comparados con los que obtuvieron los autores Roger y Shi

Lo anterior se obtuvo por medio del Método de Simulación de Monte Carlo, pero existen otros métodos, un ejemplo claro de esto es el creado por Linetsky.

El trabajo de Linetsky consistió en crear un par de soluciones analíticas que fueron basadas en el movimiento browniano las cuales son infinitas, por lo que no resultan precisas del todo, ya que deben de cortarse en algún momento para que la opción pueda ser valuada, por lo que tiene que agregarse un error para que pueda obtenerse una aproximación, así que aún siendo un método analítico, no resulta ser la mejor alternativa. Linetsky [7] se baso en las Simulación por el Método de Monte Carlo, la Transformada inversa de Laplace, entre otras.

Se recomienda para trabajos futuros el análisis de sensibilidad al precio de la opción, es decir, que se realice un análisis completo de lo que es conocido como las letras griegas.

Se puede concluir, que las opciones son una buena elección para cubrirse del riesgo, y que algunas de ellas resultan mejores, pero que depende de los intereses que tenga el inversionista. Así que éste debe de analizar cual es la que mejor le conviene para que pueda obtener los beneficios deseados.

Apéndice 1. Lema de Itô

Proceso de Itô

Estos procesos son una generalización de los procesos de Wiener en donde a y b son funciones del valor de x y del tiempo transcurrido t

$$dX = a(x,t)dt + b(x,t)dW \qquad \text{(Ap. 1)}$$

en donde dW es un proceso de Wiener con media de a y varianza de b^2.

El Lema de $Itô$ proviene de hacer una expansión en series de Taylor de la función $f(x,t)$, escrita en forma diferencial la expansión de la serie de Taylor queda de la siguiente forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dxdt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \cdots \qquad \text{(Ap. 2)}$$

Sustituyendo la ecuación (1) en esta última ecuación y conservando sólo términos de primer orden en dt se obtiene

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(adt + bdW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(adt + bdW)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(adt + bdW)dt + \cdots \qquad \text{(Ap.3)}$$

Note que $dXdt = (adt + bdW)dt = a(dt)^2 + bdWdt$, dado que

$$dW = \xi\sqrt{dt}$$

se tiene que

$$dWdt = \xi\sqrt{dt}dt = \xi\sqrt{(dt)^3}$$

Debido a que $(dt)^2$ y $\sqrt{(dt)^3}$ no son de primer orden, se desprecian, de esta forma lo único que queda por considerar en la ecuación (3) es

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}\left(adt + bdW\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(a^2dt^2 + 2abdtdW + b^2dW^2\right)$$

Despreciando los términos que contienen dt con exponentes mayores a uno y considerando que $(dW)^2 = \left(\xi\sqrt{dt}\right)^2 = \xi^2 dt$, se tiene

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}\left(adt + bdW\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(b^2\xi^2 dt\right)$$

Dado que la varianza de ξ es uno y su media cero, se puede simplificar de la siguiente manera

$$E\left[\xi^2\right] - \left[E[\xi]\right]^2 = 1 \Rightarrow$$

$$E\left[\xi^2\right] = 1 \quad \Rightarrow$$

$$(dX)^2 \cong b^2 dt$$

luego

$$\partial f = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]dt + b\frac{\partial f}{\partial x}dW$$

A la ecuación anterior se le conoce como la Fórmula de *Itô*

Lema de **Itô**

Toda función derivable de $f(x,t)$ sigue un proceso dado por la ecuación

$$\partial f = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dt + b\frac{\partial f}{\partial x}dW$$

De donde dW es un proceso de Wiener, y la ecuación anterior es un proceso de $Itô$, cuya media esta dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

y varianza

$$b^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

Bibliografía

[1] Cox, J. C, Ross S. A y Rubinstein M, **Option pricing: a Simplified Approach,** Journal of Financial Economics, 7 (1979), 229-64**.**

[2] Degarmo, Paul, **Ingeniería económica,** México, Ed. Prentice Hall,(1997).

[3] Diez de Castro, Luis, **INGENIERÍA FINANCIERA*,*** La gestión en los mercados financieros internacionales, Segunda edición. Ed. Mc Graw Hill

[4] Hull, John C., **Introducción a los mercados de futuros y opciones,** *S*egunda edición, España. Ed. Pearson Education, (2001).

[5] Hull, John C., **Options, futures and other derivates*,*** Third edition, Prentice Hall, U.S.A. (1999).

[6] Ibarra, V, **Métodos de reducción de varianza en la valuación de opciones euroasiáticas,** Tesis Maestría (2004).

[7] Kemna y Vorst, **"A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values",** Faculty of Economics, Erasmus University, Rotterdam, Netherlands, (1990).

[8] Lamberton, D y Lapeyre, B, **Introduction to sttochastics calculus.** Applied to Finance Chapman & Hall (1996).

[9] Lapeyre, B Y Temam, E, **Competitive Monte Carlo methods for the pricing of Asian options*,*** Journal of Computational Finance.

[10] Linetsky, Vadim, **Spectral expansions for Asian options*,*** Operations Research, (2003).

[11] Mc Leish, Don L, **Monte Carlo methods in finance*,*** Wiley Finance (2005).

[12] Rogers, L.C.G., and Shi Z (1995), **“THE VALUE OF ASIAN OPTION”,** Journal of Applied Probability, 32, 1077- 1088

[13] Ross, Sheldon M., **SIMULACIÓN,** Segunda edición, México, Ed. Prentice Hall, (1988).

[14] Wilmott, Howison, Dewyne, **The mathematics of finantial derivates,** a Student introduction, Cambridge University Press, Cambridge, (1996).

[15] Zhang Jin E. **“A semi-analytical method for the pricing and hedging continuously sampled arithmetic average options”** Departament of Finance, Hong Kong University of Science and Tecnology (1999).

Tabla 1. Simulación por Monte Carlo sin Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.05^*$ y $\sigma = 0.1$									
r	**K**	**LIR&S**	**LIP**	**APR&S**	**APP_{10}**	**APP_{50}**	**APP_{100}**	**LSR&S**	**LSP**
0.05^*	95	7.174	7.172679428	7.178	7.15197201	7.16303256	7.17821545	7.20719888	7.18375148
	100	2.713	2.7125025	2.716	2.71235783	2.71295789	2.71494921	2.722	2.719648173
	105	0.334	0.335719711	0.337	0.32669068	0.33508972	0.33752836	0.343	0.339337003
0.15^*	95	11.094	11.08831662	11.094	11.1371095	11.0870423	11.0936711	11.114	11.19065842
	100	6.79	6.789719981	6.794	6.7966326	6.80261771	6.79505542	6.81	6.800390857
	105	2.741	2.739871125	2.744	2.77678933	2.75005917	2.74446906	2.761	2.749066997
0.09	90	13.376	13.37295126	13.385	13.3213649	13.3541443	13.3838748	13.41	13.9479836
	100	4.908	4.905109511	4.915	4.95245165	4.91715673	4.91425445	4.942	4.923399389
	110	0.623	0.627002701	0.63	0.63120697	0.62540928	0.63056706	0.657	0.634113143

Tabla 2. Simulación por Monte Carlo sin Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.2^*$ y $\sigma = 0.3$									
r	**K**	**LIR&S**	**LIP**	**APR&S**	**APP_{10}**	**APP_{50}**	**APP_{100}**	**LSR&S**	**LSP**
0.15^*	90	15.624	15.62359003	15.641	15.6296052	15.6614367	15.6442925	15.748	15.66499492
	100	8.391	8.390696453	8.408	8.37485531	8.37789484	8.40835209	8.515	8.42600773
	110	3.537	3.545516267	3.554	3.6186645	3.56970785	3.55793997	3.661	3.570363671
0.05	90	13.919	13.92423877	13.952	14.1109008	13.8927221	13.9531977	14.161	13.98215668
	100	7.911	7.920830392	7.944	7.8948033	7.98263131	7.94444422	8.153	7.968058039
	110	4.037	4.057353998	4.07	4.05976909	4.05024417	4.07492454	4.279	4.092495087

Tabla 3. Simulación por Monte Carlo sin Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.05$								
r	**K**	**LIR&S**	**LIP**	**APR&S**	**APP_{50}**	**APP_{100}**	**LSR&S**	**LSP**
0.05	95	7.174	6.991231738	7.178	7.26360448	7.17071666	7.20719888	7.35020159
	100	2.713	2.55586087	2.716	2.63924307	2.70070904	2.722	2.8455572
	105	0.334	0.317673317	0.337	0.34293672	0.31767332	0.343	0.44175055
0.09	95	8.808	8.619849478	8.809	8.87397327	8.78790658	8.821	8.95596367
	100	4.305	4.167524744	4.308	4.41392357	4.33081006	4.318	4.49409537
	105	0.955	0.80991713	0.958	0.88660283	0.90320445	0.968	0.99649177
0.15	95	11.094	10.92162741	11.094	11.1587247	11.0930389	11.114	11.2644504
	100	6.79	6.638084337	6.794	6.77256804	6.80323382	6.81	6.9683833
	105	2.741	2.622008388	2.744	2.79556545	2.76780709	2.761	2.9136058

Tabla 4. Simulación por Monte Carlo con Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.05$						
r	**K**	**LIR&S**	**APR&S**	**APP_{50}**	**APP_{100}**	**LSR&S**
0.05	95	7.174	7.178	7.178	7.178	7.20719888
	100	2.713	2.716	2.717	2.716	2.722
	105	0.334	0.337	0.337	0.337	0.343
0.09	95	8.808	8.809	8.808	8.809	8.821
	100	4.305	4.308	4.309	4.307	4.318
	105	0.955	0.958	0.96	0.958	0.968
0.15	95	11.094	11.094	11.094	11.094	11.114
	100	6.79	6.794	6.794	6.793	6.81
	105	2.741	2.744	2.745	2.745	2.761

Tabla 5. Simulación por Monte Carlo sin Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.10$								
r	K	LIR&S	LIP	APR&S	APP_{50}	APP_{100}	LSR&S	LSP
0.05	90	11.944	11.61222818	11.951	11.9250586	11.9604092	11.973	12.3085902
	100	3.634	3.365227322	3.641	3.6605234	3.62708377	3.663	3.88894023
	110	0.324	0.212892086	0.331	0.34804338	0.36609045	0.353	0.42894039
0.09	90	13.376	13.04402018	13.385	13.4086669	13.3885021	13.41	13.7329841
	100	4.908	4.625061214	4.915	4.93949804	4.92310206	4.942	5.2211429
	110	0.623	0.513391922	0.63	0.64372745	0.6287366	0.657	0.74408128
0.15	90	15.4	15.0548784	15.399	15.3660417	15.390046	15.445	15.7252136
	100	7.021	6.70178016	7.028	7.02564851	7.00773267	7.066	7.31368518
	110	1.406	1.241502934	1.4313	1.46698376	1.40342421	1.451	1.56534548

Tabla 6. Simulación por Monte Carlo con Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.10$						
r	K	LIR&S	APR&S	APP_{50}	APP_{100}	LSR&S
0.05	90	11.944	11.951	11.951	11.952	11.973
	100	3.634	3.641	3.643	3.64	3.663
	110	0.324	0.331	0.329	0.329	0.353
0.09	90	13.376	13.385	13.384	13.387	13.41
	100	4.908	4.915	4.916	4.914	4.942
	110	0.623	0.63	0.631	0.626	0.657
0.15	90	15.4	15.399	15.395	15.397	15.445
	100	7.021	7.028	7.03	7.03	7.066
	110	1.406	1.4313	1.411	1.412	1.451

Tabla 7. Simulación por Monte Carlo sin Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.20$								
r	K	LIR&S	LIP	APR&S	APP_{50}	APP_{100}	LSR&S	LSP
0.05	90	12.578	11.89981189	12.595	12.5955634	12.5613796	12.687	13.2229474
	100	5.745	5.268995234	5.762	5.79105945	5.7521004	5.854	6.23520556
	110	1.971	1.671252796	1.989	1.95244323	1.96765038	2.08	2.26404797
0.09	90	13.814	13.19342848	13.831	13.8491979	13.8319565	13.927	14.4704846
	100	6.759	6.236536017	6.777	6.79858726	6.76362152	6.872	7.29070702
	110	2.528	2.199922858	2.545	2.50555223	2.54477053	2.641	2.8896182
0.15	90	15.624	14.96301187	15.641	15.6311092	15.6331957	15.748	16.3033795
	100	8.391	7.861189263	8.408	8.424297	8.42704743	8.515	8.9929056
	110	3.537	3.166514601	3.554	3.50069143	3.55375069	3.661	3.94098679

Tabla 8. Simulación por Monte Carlo con Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.20$						
r	K	LIR&S	APR&S	APP_{50}	APP_{100}	LSR&S
0.05	90	12.578	12.595	12.599	12.599	12.687
	100	5.745	5.762	5.773	5.756	5.854
	110	1.971	1.989	1.985	1.991	2.08
0.09	90	13.814	13.831	13.824	13.825	13.927
	100	6.759	6.777	6.773	6.797	6.872
	110	2.528	2.545	2.547	2.554	2.641
0.15	90	15.624	15.641	15.631	15.635	15.748
	100	8.391	8.408	8.408	8.404	8.515
	110	3.537	3.554	3.549	3.549	3.661

Tabla 9. Simulación por Monte Carlo sin Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.30$								
r	K	LIR&S	LIP	APR&S	APP_{50}	APP_{100}	LSR&S	LSP
0.05	90	13.919	13.74123316	13.952	13.9061569	13.9720921	14.161	14.2583878
	100	7.911	7.704276046	7.944	7.94108245	7.93950879	8.153	8.17474154
	110	4.037	3.896315941	4.070	4.06526722	4.07354693	4.279	4.25077792
0.09	90	14.95	14.7372799	14.983	14.8669995	15.0265119	15.194	15.315744
	100	8.795	8.538746092	8.827	8.85432658	8.78444847	9.039	9.03015084
	110	4.662	4.525058913	4.695	4.67840466	4.71816674	4.906	4.91127457
0.15	90	16.48	16.22344209	16.512	16.5981928	16.5207289	16.732	16.8180157
	100	10.177	9.952174402	10.208	10.2250242	10.2078721	10.429	10.4635699
	110	5.696	5.530790244	5.728	5.73760714	5.7335532	5.948	5.93631615

Tabla 10. Simulación por Monte Carlo con Reducción de Varianza Volatilidad $\sigma = 0.30$						
r	K	LIR&S	APR&S	APP_{50}	APP_{100}	LSR&S
0.05	90	13.919	13.952	13.962	13.970	14.161
	100	7.911	7.944	7.938	7.945	8.153
	110	4.037	4.070	4.071	4.072	4.279
0.09	90	14.95	14.983	15.003	14.983	15.194
	100	8.795	8.827	8.834	8.832	9.039
	110	4.662	4.695	4.699	4.698	4.906
0.15	90	16.48	16.512	16.521	16.515	16.732
	100	10.177	10.208	10.21	10.212	10.429
	110	5.696	5.728	5.729	5.736	5.948